**As Propriedades P e RP
em
espaços de Banach**

Neusa Nogas Tocha

Dissertação Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de mestre em matemática

Área de concentração: Análise
Orientadora: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

*Durante o programa de mestrado, a autora obteve
apoio financeiro da CAPES*

São Paulo, fevereiro de 2002

As Propriedades P e RP em espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Neusa Nogas Tocha
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de fevereiro de 2002.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Geraldo Botelho - UFU
- Prof. Dr. Raymundo Alencar - IMECC-UNICAMP

*Dedico este trabalho
aos meus pais Mário e Nádía
e ao meu esposo Maurício*

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Mary Lilian pela confiança em mim depositada, pelo incentivo e sugestões sem os quais este trabalho dificilmente seria realizado. Agradeço pela sua orientação, paciência e companheirismo durante estes anos.

Agradeço a hospitalidade e companheirismo dos professores e colegas que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço à minha família, principalmente meus pais, pelo apoio constante aos meus estudos.

Agradeço ao meu esposo Maurício pelo seu apoio, companheirismo, sua tolerância e sua eterna disposição em me ajudar.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro recebido durante o programa de mestrado.

(★) Obrigado (★)

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os espaços de Banach que possuem as propriedades denominadas **P** e **RP**. Estas propriedades foram introduzidas por Aron, Choi & Llavona em [2].

Vamos estudar a **propriedade P** e a **propriedade RP** e suas relações com outras propriedades de espaços de Banach, entre elas, a propriedade Dunford-Pettis, polinomialmente Schur e Schur.

Abstract

The main purpose of this work is to study Banach spaces with properties **P** and **RP**. These properties were introduced by Aron, Choi & Llavona, in [2].

We study properties **(P)** and **(RP)** and their relation with other properties of Banach spaces, such as the Dunford-Pettis, the polynomially Schur and Schur property.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	7
1.1 Notação	7
1.2 Definições e resultados	8
1.3 Alguns resultados da geometria de Espaços de Banach	19
2 Polinômios	23
2.1 Aplicações multilineares	23
2.2 Fórmula multinomial	29
2.3 Polinômios homogêneos	35
2.4 Polinômios contínuos	40
2.5 Polinômios de tipo finito, fracamente contínuos e compactos	50
3 Propriedade P	59
3.1 Introdução	59
3.2 Propriedade P	61
4 Recíproca da propriedade P	81
4.1 Propriedade RP	81
4.2 Funções polinomialmente contínuas sobre os limitados	84
4.3 Exemplos de alguns espaços que não possuem a propriedade RP	91
Referências Bibliográficas	101

Introdução

O estudo do espaço dos polinômios homogêneos contínuos definidos em espaços de Banach tem sido objeto contínuo de pesquisa nos últimos anos. Um dos pontos a se destacar é o grande interesse em estabelecer relações entre um espaço de Banach X e o espaço dos polinômios definidos sobre X . Podemos observar tal fato nos diversos trabalhos científicos que estudam como os polinômios portam-se em conexão com certas propriedades geométricas dos espaços de Banach onde estão definidos e de propriedades definidas em termos de polinômios. Citamos aqui alguns trabalhos [2], [8], [9], [12], [16], [18], [19], [20] e [23] que abordam o referido tema.

Nesta dissertação temos por objetivo estudar as *propriedades $\mathbf{P}$ e $\mathbf{RP}$* , introduzidas por Aron, Choi & Llavona em [2], e suas relações com as propriedades do espaço de Banach em questão. Os resultados apresentados neste trabalho se encontram em [2], [8], [9] e [12].

A motivação original para a definição da **propriedade $\mathbf{P}$** é dada pelo seguinte problema:

Sejam X , Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde B_X e B_Y são as bolas unitárias fechadas de X e Y respectivamente, e $g : B_X \longrightarrow B_Y$ uma função que satisfaz a seguinte propriedade $(\star)$:

$(\star)$ *Para qualquer polinômio contínuo $P : Y \longrightarrow \mathbb{K}$, $P \circ g : B_X \longrightarrow \mathbb{K}$ é uniformemente contínua.*

Seria g necessariamente uniformemente contínua ?

Aron, Choi & Llavona no artigo [2] observaram que o problema tem resposta positiva se a seguinte condição é satisfeita:

$(\star\star)$: *Se para quaisquer duas seqüências limitadas $(u_n)_n, (v_n)_n$ em Y , se para cada $P \in \mathcal{P}(Y)$ com $|P(u_n) - P(v_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ implicar que $\|u_n - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Para poder determinar sob que condições os espaços de Banach tem a *propriedade*

$(\star\star)$, Aron, Choi & Llavona em [2] introduziram uma propriedade mais fraca que $(\star\star)$, e a chamaram de *propriedade P*. Eles observaram que se uma função $g : B_X \rightarrow B_Y$ verifica $(\star)$ e Y é um espaço polinomialmente Schur e tem a **propriedade P** então g é uniformemente contínua.

No capítulo 1 apresentamos as notações, definições, resultados e algumas propriedades geométricas de espaços de Banach que utilizamos no decorrer da dissertação.

No capítulo 2 estudamos as aplicações multilineares, a Fórmula de Leibniz, os polinômios homogêneos e as condições necessárias e suficientes para que um polinômio seja contínuo. Indicamos [11] e [27] como livros textos para o estudo desses tópicos. Também introduzimos um breve estudo sobre polinômios de tipo finito, fracamente contínuos e compactos.

No capítulo 3 temos por objetivo estudar a **propriedade P** e suas relações com outras propriedades de espaços de Banach, entre elas, a Dunford-Pettis e polinomialmente Schur. Para exibirmos um número maior de exemplos de espaços que possuem a **propriedade P**, também estudamos as suas relações com as propriedades de espaços de tipo p , S_p e W_p .

Aron, Choi & Llavona em [2] colocaram a seguinte pergunta:

Existe um espaço de Banach que não tem a propriedade P ?

Em [12], Choi & Kim conseguiram encontrar condições suficientes para que um espaço não tenha a *propriedade P*. Tais condições foram estudados neste capítulo.

No trabalho [9], Castillo, García & Gonzallo conseguiram exibir um exemplo de um espaço de Banach que não possui a **propriedade P**. Tal espaço é dado por um produto cartesiano de espaços que têm a **propriedade P**. O exemplo trabalha com o espaço de sequências de Lorentz e seu predual. Finalizamos o capítulo 3 estudando este exemplo.

No capítulo 4 estudamos a recíproca da **propriedade P**, a qual é denominada de **propriedade RP**. Assim como no capítulo 3, aqui estudamos as suas relações com as propriedades de espaços de Banach citadas anteriormente. Também estudamos alguns exemplos de espaços de Banach que não satisfazem a **propriedade RP**.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as notações e resultados necessários que serão utilizados no decorrer desta dissertação e cujas demonstrações podem ser encontradas nas respectivas referências indicadas.

1.1 Notação

As propriedades topológicas envolvidas no decorrer da dissertação estarão associadas à topologia dada pela norma em questão. A menos que se mencione algo, vamos utilizar a seguinte notação.

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaços normados sobre $\mathbb{K}$
X^m	o espaço $X \times \dots \times X$
$B_X(a; r)$	a bola aberta de X de centro a e raio r
$B_X[a; r]$	a bola fechada de X de centro a e raio r
B_X	a bola unitária fechada de X
$\mathcal{L}(X; Y)$	o conjunto das aplicações lineares e contínuas de X em Y
$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$	o conjunto das aplicações m -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y

$\mathcal{L}(^m X; Y)$	o conjunto das aplicações m -lineares e contínuas de X^m em Y
X^*	o espaço dual de X , o conjunto $\mathcal{L}(X; \mathbb{K})$
X^{**}	o espaço bidual de X , o conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X; \mathbb{K}); \mathbb{K})$
$\overline{W}$	o fecho de W , onde $W \subset X$
$x_n \rightarrow x$	a sequência $(x_n)_n$ converge para x
$x_n \not\rightarrow x$	a sequência $(x_n)_n$ não converge para x
$x_n \xrightarrow{\omega} x$	a sequência $(x_n)_n$ converge fracamente para x
$J : X \longrightarrow X^{**}$	a aplicação canônica de X em X^{**} tal que $J(x) = \hat{x}$ onde $\hat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in X^*$
$[x_n : n \in \mathbb{N}]$	subespaço fechado de X gerado por $(x_n)_n$
$Y \hookrightarrow X$	X tem uma cópia isomorfa de Y
$Y \not\hookrightarrow X$	X não tem cópia isomorfa de Y
δ_{ij}	Símbolo de Kronecher onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

1.2 Definições e resultados

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço normado. Dizemos que X é separável se admite um subconjunto enumerável denso.*

O próximo teorema (Banach-Mazur) será utilizado no capítulo 3, onde vamos estudar a denominada **propriedade P**.

Teorema 1.2.2. (Banach-Mazur)

Seja X um espaço de Banach. Se X é separável então existe um aplicação linear contínua e sobrejetora $T : l_1 \longrightarrow X$.

Demonstração: Ver por exemplo [7], teorema 1 pg 114. ■

Definição 1.2.3. *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear. Dizemos que A é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq M \|x\|$ para qualquer $x \in X$.*

Teorema 1.2.4. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear, as seguintes condições são equivalentes:*

1. A é contínua.
2. A é contínua na origem.
3. Existe M tal que $\|A(x)\| \leq M \|x\|$ para todo $x \in X$, ou seja, A é limitada.
4. A imagem de A aplicada em conjuntos limitados são conjuntos limitados.

Demonstração: Ver por exemplo [11], teorema 2.3. ■

Teorema 1.2.5. *Sejam X um espaço normado e Y um espaço de Banach. A aplicação $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X; Y) \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ por:*

$$\|A\| = \sup_{x \in B_X} \|A(x)\|$$

constitui uma norma em $\mathcal{L}(X; Y)$ que o faz completo, ou seja, $\mathcal{L}(X; Y)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Ver por exemplo [11], teorema 2.5. ■

O teorema de Hahn-Banach será utilizado no capítulo 3 para demonstrar que um espaço de Banach com certas propriedades geométricas, tem uma determinada propriedade polinomial tratada em tal capítulo.

Teorema 1.2.6. (Hahn-Banach)

Sejam X um espaço normado, Y um subespaço próprio de X e $f \in Y^$. Então existe $\phi \in X^*$ tal que:*

$$\begin{cases} \phi(z) = f(z) & \text{para cada } z \in Y \\ e \\ \|\phi\| = \|f\| \end{cases}.$$

Demonstração: Ver por exemplo [24], teorema 4.3-2 pg 221. ■

Definições 1.2.7. 1. *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que X e Y são isomorfos, e denotamos por $X \cong Y$, se existe uma aplicação linear contínua bijetora $A : X \rightarrow Y$ com inversa contínua.*

2. *Um isomorfismo isométrico entre X e Y é um isomorfismo $A : X \rightarrow Y$ entre X e Y tal que $\|A(x)\| = \|x\|$ para qualquer $x \in X$ e denotamos por $X \approx Y$ quando X e Y são isometricamente isomorfos.*

Proposição 1.2.8. *Sejam X um espaço de Banach, $J : X \longrightarrow X^{**}$ definida por $J(x) = \hat{x}$ para cada $x \in X$, onde para cada $x \in X$, $\hat{x}(f) = f(x)$ para todo $f \in X^*$. Então a aplicação J é uma isometria linear e é chamada de aplicação canônica.*

Demonstração: Ver por exemplo [24], lemas 4.6-1 e 4.6-2 pg 240. ■

Definição 1.2.9. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é reflexivo se J é sobrejetora.*

Teorema 1.2.10. (Teorema de Banach-Steinhaus)

Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(A_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}(X; Y)$. Se para cada $x \in X$ a sequência $(A_n(x))_n$ converge para $A(x)$, então $A \in \mathcal{L}(X; Y)$.

Demonstração: Ver por exemplo [11], pag 100. ■

Definição 1.2.11. *Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que X possui cópia isomorfa de Y , e denotamos por $Y \hookrightarrow X$, se existir $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ injetora tal que $A^{-1} : A(Y) \longrightarrow Y$ é contínua.*

Definições 1.2.12. *Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em X .*

1. *Dizemos que $(x_n)_n$ é uma base de Schauder para X se para cada $x \in X$ existe uma única sequência $(a_n)_n$ em $\mathbb{K}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = 0$.*
2. *Dizemos que $(x_n)_n$ é uma sequência básica em X se $(x_n)_n$ é base de Schauder para o subespaço fechado $[x_n : n \in \mathbb{N}]$.*

Neste trabalho, uma sequência $(x_n)_n \subset X$ será chamada de base quando ela for uma base de Schauder para X .

Definição 1.2.13. *Seja X um espaço de Banach. Um par de sequências (x_n, x_n^*) , $x_n \in X$, $x_n^* \in X^*$, é chamado de sistema biortogonal para X se $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$, $n, m = 1, 2, \dots$.*

Seja X um espaço de Banach com base $(x_n)_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o coeficiente funcional x_n^* associado ao vetor x_n por $x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n$ para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Assim temos:

Teorema 1.2.14. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma base para X com coeficientes funcionais associados $(x_n^*)_n$. Então os coeficientes funcionais são contínuos e existe $M > 0$ tal que $1 \leq \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente*

- $\inf_n \|x_n\| > 0$ se e somente se $\sup_n \|x_n^*\| < \infty$.
- $\sup_n \|x_n\| < \infty$ se e somente se $\inf_n \|x_n^*\| > 0$.

Demonstração: Ver por exemplo [25], pg 07. ■

Desta maneira, se $(x_n)_n$ é uma base para X e $(x_n^*)_n$ os coeficientes funcionais associados, então o par (x_n, x_n^*) é um sistema biortogonal para X .

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Se uma propriedade vale exceto em um conjunto de medida nula, dizemos que vale quase sempre e abreviamos por q.s..

Definições 1.2.15. (os espaços L_p s)

Dado qualquer p , $1 \leq p < \infty$, considere $L_p([a, b])$ como sendo o conjunto formado pelas classes de equivalências $\left[f : \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right]$ das funções mensuráveis de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$. Uma função $g \in \left[f : \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right]$ se f e g coincidem quase sempre. As operações usuais de adição e multiplicação por escalar fazem de $L_p([a, b])$ um espaço vetorial e a aplicação definida no espaço a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

constitui uma norma (a usual) em $L_p([a, b])$ que o faz completo, ou seja, $(L_p([a, b]), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

Para $p = \infty$, $L_\infty([a, b])$ é o conjunto formado pelas classes das funções mensuráveis $\left[f : \text{ess sup } |f(t)| < \infty \right]$, onde $\text{ess sup } |f(t)| = \inf \{M : |f(t)| \leq M \text{ q.s.}\}$.

A aplicação definida no espaço a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(t)|$$

o faz completo, ou seja, $(L_\infty([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Para $1 \leq p \leq \infty$, se $1 \leq p < q$, então $L_q([a, b]) \subset L_p([a, b])$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$.

Definição 1.2.16. (o espaço $C[a, b]$)

Dado um intervalo fechado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a \neq b$, considere $C[a, b]$ o conjunto formado pelas funções contínuas f de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar fazem de $C[a, b]$ um espaço vetorial e a aplicação definida no espaço a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$\|f\| = \sup |f(t)|$$

o faz completo, ou seja, $(C[a, b], \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Definições 1.2.17. (os espaços l_p s e c_0)

Dado qualquer p , $1 \leq p < \infty$, considere l_p como sendo o conjunto das seqüências

$x = (x_k)_k \subset \mathbb{K}$ tais que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar fazem de l_p um espaço vetorial e a aplicação no espaço a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

constitui uma norma em l_p (a usual) que o faz completo, ou seja, $(l_p, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Para $p = \infty$, considere l_∞ como sendo o conjunto das seqüências $x = (x_k)_k \subset \mathbb{K}$ limitadas.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar fazem de l_∞ um espaço vetorial e a aplicação no espaço a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

constitui uma norma em l_∞ que o faz completo, ou seja, $(l_\infty, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Definimos c_0 como sendo o subespaço de l_∞ constituído pelas seqüências $x = (x_i)_i \subset \mathbb{K}$ que convergem a zero.

Munindo c_0 da norma induzida de l_∞ , o espaço normado obtido é Banach.

Para $1 \leq p \leq \infty$, se $1 \leq p < q$, então $l_p \subset l_q$ e $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.

Definição 1.2.18. (operador linear compacto)

Sejam X, Y espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que A é compacto se A aplica cada subconjunto $M \subset X$ limitado, em um subconjunto $A(M)$ relativamente compacto em Y .

Alguns exemplos de operadores compactos:

- a) Para $1 \leq p \leq \infty$, o operador $T : l_p \rightarrow l_p$ definido por $T(x) = (\frac{x_j}{j})_j$ para cada $x = (x_j)_j \in l_p$ é compacto.
- b) Seja X um espaço normado com produto interno. Sejam $y, z \in X$ fixos e $T : X \rightarrow X$ dado por $T(x) = \langle x, y \rangle z$ é um operador compacto.
- c) Sejam X um espaço normado, $z \in X$ fixo e $f \in X^*$. O operador $T : X \rightarrow X$ definido por $T(x) = f(x)z$ é compacto.

Teorema 1.2.19. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear. A é compacto se e somente se A aplica seqüências limitadas $(x_n)_n \subset X$ em seqüências $(A(x_n))_n \subset Y$ que admitem subsequências convergentes.*

Demonstração: Ver por exemplo [24], teorema 8.1-3 pg 407. ■

Definição 1.2.20. *Seja X um espaço vetorial normado. A topologia fraca de X é a topologia obtida tomando como base todos os conjuntos da forma:*

$$U(x_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \epsilon) = \{x \in X : \sup_{i=1, \dots, n} |x_i^*(x) - x_i^*(x_0)| < \epsilon\}$$

onde $x_0 \in X; x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ e $\epsilon > 0$.

Aqui, fracamente aberto, fracamente fechado, fracamente compacto, função fracamente contínua, aplicação fracamente compacta, etc estão se referindo a conjunto aberto, fechado, compacto, função contínua, aplicação compacta, etc com relação à topologia fraca, e denotamos por $\overline{W}^w$ o fecho fraco do conjunto W .

Teorema 1.2.21. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se e somente se B_X é fracamente compacta.*

Demonstração: Ver por exemplo [13], pg 18. ■

Proposição 1.2.22. *Sejam X, Y espaços de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em X .*

1. *Se $x_n \rightarrow x$ para algum $x \in X$ então $(x_n)_n$ converge fracamente para x , e denotamos por $x_n \xrightarrow{\omega} x$, ou seja, para cada $f \in X^*$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*
2. *Se $x_n \xrightarrow{\omega} x$ para algum $x \in X$ então $A(x_n) \xrightarrow{\omega} A(x)$ para cada $A \in \mathcal{L}(X; Y)$.*

Demonstração: Ver por exemplo [24], teorema 4.8-4. ■

Proposição 1.2.23. *Sejam X, Y espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(X; Y)$. Se A é compacta então A é completamente contínua, ou seja, para cada sequência $(x_n)_n$ em X tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ para algum x em X temos que $A(x_n) \rightarrow A(x)$.*

Demonstração: Ver por exemplo [24], teorema 8.1-7 pg 410. ■

Teorema 1.2.24. (Eberlein - Smulian)

Sejam X um espaço de Banach, e W um subconjunto de X . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *W é fracamente sequencialmente compacto, ou seja, qualquer sequência de W tem uma subsequência que converge fracamente para algum elemento de X ;*
2. *O fecho fraco de W é fracamente compacto, isto é, W é relativamente fracamente compacto.*

Demonstração: Ver por exemplo, [13], pg 18. ■

Definição 1.2.25. *Sejam X, Y espaços de Banach. Uma aplicação linear $A : X \rightarrow Y$ é denominada fracamente compacta se, para cada $W \subset X$ limitado, temos que $A(W)$ é relativamente fracamente compacto em Y .*

Os seguintes resultados da teoria de medida serão necessários no capítulo 4:

Teorema 1.2.26. *Seja f uma função limitada e Lebesgue mensurável em $[a, b]$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe uma função escada h tal que $\int_a^b |f(t) - h(t)| dt < \epsilon$.*

Demonstração: Ver por exemplo [6], pg 72. ■

Teorema 1.2.27. *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Uma sequência $(f_n)_n$ em $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ converge fracamente para $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ se e somente se $(f_n)_n$ é limitada e*

$$\int_E f(t) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(t) d\mu$$

para cada $E \in \Sigma$.

Demonstração: Ver por exemplo [13], pg 91. ■

Definição 1.2.28. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua sobre X se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - y\| < \delta$.*

Teorema 1.2.29. *Sejam X, Y espaços métricos. Então $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua se e somente se para quaisquer duas sequências $(x_n)_n, (y_n)_n$ em X com $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ temos que $\|f(x_n) - f(y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $f : X \rightarrow Y$ uniformemente contínua, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - y\| < \delta$. Se $(x_n)_n, (y_n)_n$ são duas sequências em X tais que $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então para o δ encontrado acima existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - y_n\| < \delta$ para todo $n \geq n_0$, logo $\|f(x_n) - f(y_n)\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $\|f(x_n) - f(y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que f não é uniformemente contínua, então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos pontos x_n, y_n tal que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ e $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon$. Então teríamos duas sequências $(x_n)_n, (y_n)_n$ tal que $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mas $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon$, e isto contradiz a hipótese.

Portanto f é uniformemente contínua. ■

Dizemos que uma aplicação $A : X \rightarrow Y$ é fracamente uniformemente contínua sobre os limitados se para cada $W \subset X$ limitado e cada $\epsilon > 0$ existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $\|A(x) - A(y)\| < \epsilon$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $x, y \in W$ e $i = 1, \dots, n$.

No que segue vamos apresentar um teorema que será utilizado no capítulo 2, seção 2.5. A demonstração do teorema encontra-se em [[5], proposição 2.5].

Lema 1.2.30. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear uniformemente contínua sobre os limitados de X . Então $T(W)$ é precompacto para todo $W \subset X$ limitado.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Para cada $x \in W$, seja $V(x, \epsilon) := \{y \in Y; \|y - T(x)\|_Y < \epsilon\}$. Como T é fracamente uniformemente contínua sobre W , existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $x, z \in W$ e $|\phi_i(x - z)| < \delta$, ($1 \leq i \leq n$), temos que $\|T(x) - T(z)\|_Y < \epsilon$. Consideremos a aplicação:

$$\Phi : X \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \quad \text{onde } \|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\phi_i(x)|$$

$$x \longmapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$$

Para cada $x_0 \in X$ arbitrário, temos que

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| = \|(\phi_1(x - x_0), \dots, \phi_n(x - x_0))\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\phi_i(x - x_0)|. \text{ Como para todo } 1 \leq i \leq n, |\phi_i(x - x_0)| \leq \|\phi_i\| \cdot \|x - x_0\|_X, \text{ tomando } M = \max_{1 \leq i \leq n} \|\phi_i\| \text{ segue que}$$

$\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| \leq M \|x - x_0\|_X$. Donde se conclui que Φ é limitada e contínua. Logo $\Phi(W)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe $c > 0$ tal que

$\Phi(W) \subset [-c, c] \times \dots \times [-c, c]$ que é compacto. Logo $\Phi(W)$ é precompacto. Seja

$U = B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < \delta\}$. Como $\Phi(W)$ é precompacto, existem $x_1, \dots, x_m \in W$ tais que $\Phi(W) = \bigcup_{i=1}^m \Phi(x_i) + U$. Dado $x \in W$ existe algum x_j , $1 \leq j \leq m$, tal que

$\|\Phi(x) - \Phi(x_j)\| < \delta$, isto é, $\sup_{1 \leq i \leq n} |\phi_i(x - x_j)| < \delta$. Logo $|\phi_i(x) - \phi_i(x_j)| < \delta$ para todo

$1 \leq i \leq n$ o que implica que $\|T(x) - T(x_j)\|_Y < \epsilon$. Então

$T(W) \subset V(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup V(x_m, \epsilon)$, isto é, $T(W)$ é precompacto. ■

Teorema 1.2.31. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear contínua. Então A é compacta se e somente se A é fracamente uniformemente contínua sobre os subconjuntos limitados de X .*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $B = \{x \in X; \|x\|_X \leq 1\}$. Suponhamos que A é compacta; então $\overline{A(B)}$ é um subconjunto compacto de Y . Seja $K = \overline{A(B)} + \overline{A(B)}$; K é um subconjunto compacto de Y , pois por Tychonoff $\overline{A(B)} \times \overline{A(B)}$ é compacto em $Y \times Y$ e como a operação adição é contínua, leva compactos em compactos. Pelo teorema de [[24],

teorema 4.3-3 pg 223] para cada $k \in K$ existe $\phi_k \in Y^*$ tal que $\|\phi_k\| = 1$ e $|\phi_k(k)| = \|k\|_Y$. Seja $\phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \|x\|_K - |\phi_k(x)|$, ϕ é contínua, pois é diferença de funções contínuas. Logo $\phi|_K$ é contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U_k de k em Y tal que se $x \in U_k$ então $|\phi(x) - \phi(k)| < \epsilon$. Segue daí que

$\|x\|_Y < \epsilon + |\phi_k(x)|$ para todo $x \in U_k$ (*). Como $K \subset \bigcup_{k \in K} U_k$, existem $k_1, \dots, k_n \in K$ tais

que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$, pois K é compacto. Assim, se $k \in K$, $k \in U_{k_i}$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ por (*) temos que

$$\|k\|_Y < \epsilon + |\phi_{k_i}(k)| < \sup_{1 \leq i \leq n} |\phi_{k_i}(k)| + \epsilon. \quad (1.1)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ consideremos o funcional $\phi_k \circ A : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $x, y \in B$ tais que $|\phi_{k_i}(A(x) - A(y))| < \epsilon$, $1 \leq i \leq n$. Ora, $A(x) - A(y) \in K$; então por (1.1) temos que:

$$\|A(x) - A(y)\|_Y \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |\phi_{k_i}(A(x) - A(y))| + \epsilon < 2\epsilon.$$

Donde se conclui que A é fracamente uniformemente contínua sobre os subconjuntos limitados de X .

($\Leftarrow$) Pelo lema acima temos que $A(B_X)$ é precompacto, logo $\overline{A(B_X)}$ é fechado e precompacto o que equivale a dizer que $\overline{A(B_X)}$ é compacto.

Donde se conclui que A é compacta. ■

Teorema 1.2.32. (Bessaga-Pelczynski)

Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em X . Se $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ e $\|x_n\| = 1$ então $(x_n)_n$ admite uma subsequência $(x_{n_k})_k$ tal que $(x_{n_k})_k$ é uma sequência básica em X .

Demonstração: Ver por exemplo [13], pg 42. ■

Teorema 1.2.33. (Rosenthal)

Seja X um espaço de Banach. Toda sequência limitada $(x_n)_n \subset X$ admite uma subsequência $(x_{n_k})_k$ fracamente de Cauchy em X se e somente se $l_1 \not\hookrightarrow X$.

Demonstração: Ver por exemplo [13], cap. XI. ■

Definição 1.2.34. (O espaço das sequências de Lorentz)

Considere dados p , $1 \leq p < \infty$, e $w = (w_n)_n$ uma sequência decrescente de reais positivos tais que $w_1 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$, ou seja, $w \in c_0/l_1$. A partir destes dados,

podemos definir o denominado espaço de seqüências de Lorentz $d(w; p)$, isto é, o espaço formado pelas seqüências de números reais $x = (x_n)_n$ tais que

$$\sup_{\pi \in \sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p \cdot w_n \right)^{1/p} < \infty$$

onde σ é o conjunto das permutações em $\mathbb{N}$. O espaço $d(w; p)$ munido das operações usuais de adição e multiplicação por real é um espaço vetorial. Quando munimos $d(w; p)$ com a norma

$$\|x\|_p = \sup_{\pi \in \sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p \cdot w_n \right)^{1/p}$$

$(d(w; p), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

O espaço de seqüências de Lorentz $d(w; p)$ é reflexivo se e somente se $p > 1$ (ver por exemplo [25]).

Aqui, neste trabalho, especificamente no capítulo 3, vamos estudar este tipo de espaço, mas no caso $p = 1$.

O espaço $d(w; 1)$ admite um predual (ver por exemplo [30]), que denotamos por $d_*(w; 1)$, que é definido por:

$$d_*(w; 1) = \left\{ x = (x_n)_n \in c_0 : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k \hat{x}_n}{\sum_{n=1}^k w_n} = 0 \right\}$$

onde $(\hat{x}_n)_n$ é um rearranjo decrescente de $(|x_n|)_n$.

Este espaço munido da norma $\|\cdot\|: d_*(w; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{n=1}^k \hat{x}_n}{\sum_{n=1}^k w_n}$$

o faz completo, ou seja, $(d_*(w; p), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

No capítulo 4, as funções de Rademacher têm um papel fundamental para o estudo dos resultados que garantem que os espaços l_∞ , $L_\infty[0, 1]$, $C[0, 1]$, $L_1[0, 1]$ e $L_1[0, 2\pi]$ não possuem a denominada **propriedade RP** definida no referido capítulo.

Definição 1.2.35. (Funções de Rademacher)

Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, as funções de Rademacher, $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, são definidas por:

$$r_0(t) = 1 \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

$$r_n(t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Proposição 1.2.36. Em $L_2[0, 1]$, a sequência $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ das funções de Rademacher formam um sistema ortonormal, mas não formam uma base ortonormal.

Demonstração: Ver por exemplo [15], pg 10. ■

1.3 Alguns resultados da geometria de Espaços de Banach

Aqui nesta seção vamos apresentar algumas definições e principais resultados da geometria de espaços de Banach que serão utilizados nos capítulos 3 e 4.

Definições 1.3.1. Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $1 \leq p < \infty$.

1. Dizemos que uma sequência $(x_n)_n \subset X$ é fracamente p -somável se para cada $x^* \in X^*$ temos que $\left(x^*(x_n)\right)_n \in l_p$.
2. Dizemos que X tem a propriedade S_p se toda sequência $(x_n)_n \subset X$ com $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ admite uma subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente q -somável, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
3. Dizemos que X tem a propriedade W_p se para cada sequência $(x_n)_n \subset X$ limitada existem uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ e $x \in X$ tais que $(x_{n_k} - x)_k$ é fracamente p -somável.

Facilmente vemos que $W_1 \subset W_2 \subset \dots \equiv \{\text{espaços reflexivos}\}$.

Em espaços reflexivos a propriedade W_p é equivalente a propriedade S_q , onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ver por exemplo [10]).

Exemplos 1.3.2. (Espaços de Banach com propriedade S_p)

1. Para $1 < p < \infty$, $L_p[0, 1]$ tem a propriedade S_r onde $r = \min\{2, p\}$.
2. Para $1 < p < \infty$, l_p tem a propriedade S_p .
3. O espaço l_1 tem propriedade S_p para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Definições 1.3.3. Seja X um espaço de Banach.

1. Seja Y um espaço de Banach. Dizemos que Y é finitamente representável em X se para cada $\epsilon > 0$ e cada $Y_0 \subset Y$, $\dim Y_0 < \infty$, existem $X_0 \subset X$ com $\dim X_0 < \infty$ e $T : Y_0 \rightarrow X_0$ isomorfismo tal que $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$.
2. Dizemos que X é super-reflexivo se para cada Y finitamente representável em X , Y é reflexivo.

Segue da definição que os espaços super-reflexivos também são reflexivos.

Teorema 1.3.4. Seja X um espaço de Banach.

1. X é super-reflexivo se e somente se X^* é super-reflexivo.
2. Se X é de dimensão infinita e é super-reflexivo então X tem a propriedade W_p para algum $p > 1$ (ou $X \in S_q$, pois S_q e W_p são equivalentes em espaços reflexivos).

Demonstração: Para (1) ver por exemplo [22], teorema 2 pg 897 e para (2) ver por exemplo [10], teorema 2.2 pg 258. ■

Definição 1.3.5. Seja X um espaço de Banach.

Para cada $\epsilon > 0$ seja $\delta(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}$.

Dizemos que X é uniformemente convexo se $\delta(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$, e chamamos $\delta(\epsilon)$ de módulo de convexidade de X .

Teorema 1.3.6. Sejam X, Y espaços de Banach.

1. Se X é uniformemente convexo e Y finitamente representável em X , então Y é uniformemente convexo.

2. Se X é uniformemente convexo então X é reflexivo.

Demonstração: Ver por exemplo [7]. ■

Exemplos 1.3.7. Para p , $1 < p < \infty$, os espaços l_p e $L_p[0, 1]$ são uniformemente convexos.

Corolário 1.3.8. Seja X um espaço de Banach. Se X é uniformemente convexo então X é super-reflexivo.

Demonstração: Seja Y finitamente representável em X então pelo teorema 1.3.6 temos que Y é reflexivo. Assim, por definição, X é super-reflexivo. ■

Exemplos 1.3.9. Os espaços l_p e $L_p[0, 1]$, para $1 < p < \infty$, são super-reflexivos.

Definições 1.3.10. Seja X um espaço de Banach.

1. Dizemos que X é de tipo p , $1 \leq p \leq 2$, (respectivamente, de cotipo q , $2 \leq q \leq \infty$) se existe uma constante $C > 0$ tal que para qualquer família finita $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, temos:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

respectivamente,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq C \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|$$

2. Dizemos que X tem tipo não-trivial se X tem tipo p para algum $p > 1$.

Observamos que se X é um espaço de tipo não-trivial então X^* também é de tipo não-trivial (ver por exemplo [15], pag 263 e 266).

Exemplos 1.3.11. (Relação de tipo e cotipo em alguns espaços de Banach)

1. l_1 não tem tipo não-trivial, tem cotipo 2.
2. Se $1 \leq p \leq 2$ então l_p tem tipo p e cotipo 2.

3. Se $2 \leq q < \infty$ então l_q tem tipo 2 e cotipo q .
4. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L_p[0, 1]$ tem tipo $\min\{p, 2\}$ e cotipo $\max\{p, 2\}$.

Teorema 1.3.12. *Seja X um espaço de Banach.*

1. Se X tem tipo $p \in (1, 2]$ então $X \in S_r$ para todo $r < p$.

Demonstração: Ver por exemplo [19], corolário 1.5 pg 219. ■

Definição 1.3.13. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é Schur se para cada sequência $(x_n)_n \subset X$ com $x_n \xrightarrow{w} x$ para algum $x \in X$ temos que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.*

Exemplos 1.3.14. 1. l_1 é Schur.

2. l_p , $1 < p < \infty$ não é Schur.

3. c_0 não é Schur.

4. Se X é Schur e se $Y \subset X$ é um subespaço fechado então Y é Schur.

Capítulo 2

Polinômios

2.1 Aplicações multilineares

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre as aplicações multilineares e polinômios. Aqui o nosso objetivo é estudar as aplicações multilineares contínuas, simétricas, os polinômios m -homogêneos, polinômios m -homogêneos contínuos, os polinômios contínuos e seus principais resultados que nos são necessários para o desenvolvimento da dissertação. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [11] e [27].

As aplicações multilineares nos são de grande valia para a definição de polinômios e no estudo dos principais resultados.

Definição 2.1.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_m$, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ é m -linear (multilinear) se é linear em cada variável, ou seja,*

$$A(x_1, \dots, x_i + \lambda y_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + \lambda A(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

para cada $i = 1, \dots, m$.

Se $X_1, \dots, X_m$ são espaços normados, o espaço $X_1 \times \dots \times X_m$ também é normado munido da norma

$$\| (x_1, \dots, x_m) \| = \max_{1 \leq i \leq m} \| x_i \| .$$

Vamos denotar por $\mathcal{L}_a(X_1, \dots, X_m; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares $A : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$. Quando $X = X_1 = \dots = X_m$ denotamos por

$\mathcal{L}_a({}^m X; Y)$. Se $m = 0$, $\mathcal{L}_a({}^m X; Y) = Y$. Se $m = 1$, $\mathcal{L}_a({}^m X; Y) = \mathcal{L}_a(X; Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}_a(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_a(X_1, \dots, X_m)$.

O teorema que apresentamos a seguir nos dá alguns critérios de continuidade para as aplicações multilineares.

Teorema 2.1.2. *Sejam $X_1, \dots, X_m, Y$ espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, $A : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ uma aplicação m -linear. São equivalentes:*

1. *A é contínua.*
2. *A é contínua na origem.*
3. *Existe $M > 0$ tal que para cada $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ temos que*

$$\| A(x_1, \dots, x_m) \| \leq M \| x_1 \| \dots \| x_m \| .$$

Demonstração: $(1 \Rightarrow 2)$ Trivial.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sejam $A \in \mathcal{L}_a(X_1, \dots, X_m; Y)$ e $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. Se $x_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, m$, vale (3) para qualquer $M > 0$. Como A é contínua na origem, dado $\epsilon = 1$ existe $r > 0$ tal que para qualquer $x \in X_1 \times \dots \times X_m$, com $\| x \| \leq r$, temos que $\| A(x) \| \leq 1$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Agora para cada $i = 1, \dots, m$, chamamos $z_i = \frac{rx_i}{\|x_i\|}$ e $z = (z_1, \dots, z_m)$, assim $\| z \| = r$ e

$$\| A(z_1, \dots, z_m) \| = \frac{r^m}{\| x_1 \| \dots \| x_m \|} \| A(x_1, \dots, x_m) \| \leq 1$$

e conseqüentemente,

$$\| A(x_1, \dots, x_m) \| \leq \frac{1}{r^m} \| x_1 \| \dots \| x_m \| .$$

Logo para termos (3), basta considerar $M = \frac{1}{r^m}$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sejam $a = (a_1, \dots, a_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. Então para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, temos que

$$\begin{aligned} A(x) - A(a) &= A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_m) + A(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_m) + \\ &\dots + A(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m - a_m). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(a)\| &\leq \|A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_m)\| + \|A(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_m)\| + \\ &\quad \dots + \|A(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m - a_m)\| \\ &\leq M \left(\|x_1 - a_1\| \|x_2\| \dots \|x_m\| + \right. \\ &\quad \left. + \|a_1\| \|x_2 - a_2\| \|x_3\| \dots \|x_m\| + \right. \\ &\quad \left. \dots + \|a_1\| \dots \|a_{m-1}\| \|x_m - a_m\| \right). \end{aligned}$$

Se $\|x - a\| \leq 1$ então $\|x_i\| \leq \|a_i\| + 1 \leq \|a\| + 1$ para cada $i = 1, \dots, m$. Logo

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(a)\| &\leq M \left(\|x_1 - a_1\| \left(\|a\| + 1 \right)^{m-1} + \|x_2 - a_2\| \left(\|a\| + 1 \right)^{m-1} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \|x_m - a_m\| \left(\|a\| + 1 \right)^{m-1} \right) \\ &= M \left(\|a\| + 1 \right)^{m-1} \left(\|x_1 - a_1\| + \dots + \|x_m - a_m\| \right) \\ &= M \left(\|a\| + 1 \right)^{m-1} m \|x - a\|. \end{aligned}$$

Portanto dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{mM(\|a\|+1)^{m-1}} \right\}$ tal que se $\|x - a\| < \delta$, então

$$\|A(x) - A(a)\| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Vamos denotar por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações multilineares contínuas $A : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$. Quando $X = X_1 = \dots = X_m$ denotamos por $\mathcal{L}^m(X; Y)$. Se $m = 0$, denotamos $\mathcal{L}^m(X; Y) = Y$. Se $m = 1$, denotamos $\mathcal{L}^m(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, denotamos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$.

Para cada $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ definimos:

$$\|A\| = \sup \{ \|A(x)\| : \|x\|_\infty \leq 1, x \in X_1 \times \dots \times X_m \}.$$

Na proposição apresentada a seguir estudamos algumas propriedades de $\|A\|$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $X_1, \dots, X_m, Y$ espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$, então valem as seguintes afirmações:*

1. $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x_1\| \dots \|x_m\|$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$;
2. $\|A\|$ é uma norma de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$;
3. $\|A\| = \inf \{ M > 0 : \|A(x)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_m\|, x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m \}$;

Demonstração: 1) Se existir $i = 1, \dots, m$ tal que $x_i = 0$ então vale (1). Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ tal que $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, m$. Definimos, para cada $i = 1, \dots, m$, $z_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$. Então $\|z\| = 1$, onde $z = (z_1, \dots, z_m)$. Como

$$\|A(z)\| = \frac{1}{\|x_1\| \dots \|x_m\|} \|A(x)\|,$$

temos que

$$\|A(x)\| = \|A(z)\| \|x_1\| \dots \|x_m\| \leq \|A\| \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Portanto $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x_1\| \dots \|x_m\|$.

2) Da definição de $\|A\|$ segue que $\|A\| \geq 0$. Suponhamos que $\|A\| = 0$. Então, para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, temos que

$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x_1\| \dots \|x_m\| = 0$. Assim $\|A(x)\| = 0$ para qualquer $x \in X_1 \times \dots \times X_m$, isto é, $A \equiv 0$. Logo $\|A\| = 0$ se e somente se $A = 0$.

Seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\|\alpha A\| = \sup\{\|\alpha A(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\alpha| \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\alpha| \|A\|.$$

Portanto $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.

Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Então, para qualquer $x \in X_1 \times \dots \times X_m$ com $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Portanto $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$.

3) Seja $M > 0$ tal que para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ temos que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Agora consideremos qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ tal que $\|x\| \leq 1$. Então $\|A(x)\| \leq M$, isto é, M é uma cota superior de $\|A(x)\|$ para $\|x\| \leq 1$, consequentemente $\|A\| \leq M$. Portanto $\|A\|$ é uma cota inferior do conjunto

$$\{M > 0 : \|A(x)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_m\|, x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m\},$$

e pelo item (1) obtemos que $\|A\|$ é o ínfimo. ■

Na proposição acima vimos que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é um espaço normado se $X_1, \dots, X_m$ e Y são espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. No próximo teorema vamos estudar uma condição para que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ seja um espaço de Banach.

Teorema 2.1.4. *Sejam $X_1, \dots, X_m$, espaços normados e Y um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ então $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Da proposição 2.1.3 $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é um espaço normado, assim basta mostrar que é completo. Para tal seja $(A_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para quaisquer $p, r > N$

$$\|A_p - A_r\| < \epsilon. \quad (2.1)$$

Para cada $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ temos que

$$\begin{aligned} \|A_p(x) - A_r(x)\| &= \|(A_p - A_r)(x)\| \\ &\leq \|A_p - A_r\| \|x_1\| \dots \|x_m\|, \end{aligned} \quad (2.2)$$

segue que $(A_n(x))_n$ é uma sequência de Cauchy em Y para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. Como Y é um espaço de Banach, a sequência será convergente. Então podemos definir uma aplicação m-linear dada por

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$$

para cada $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. É fácil ver que A é m-linear. Vamos provar que A é contínua em $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. Dado $\epsilon^* > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $n > n_0$, $\|A(x) - A_n(x)\| < \epsilon^*$, ou seja,

$$\|A(x)\| < \epsilon^* + \|A_n(x)\|.$$

Como $(A_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, existe $M > 0$ tal que $\|A_n\| \leq M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\|A(x)\| < \epsilon^* + M \|x_1\| \dots \|x_m\|$$

para qualquer $\epsilon^* > 0$. Assim $\|A(x)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_m\|$ para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. Logo pelo teorema 2.1.2 concluímos que $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Para p suficientemente grande e $n > n_0$ fixo, segue de 2.1 e 2.2 que

$$\|A(x) - A_n(x)\| \leq \epsilon \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Portanto $\|A - A_n\| \leq \epsilon$ para todo $n > n_0$ e consequentemente $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é completo. ■

No que segue, damos alguns exemplos de aplicações multilineares contínuas.

Exemplo 2.1.5. *Sejam X, Y, Z espaços normados. A aplicação*

$$A : \mathcal{L}(X; Y) \times \mathcal{L}(Y; Z) \longrightarrow \mathcal{L}(X; Z)$$

dada por $A(f, g) = g \circ f$ é bilinear e contínua.

De fato: É fácil mostrar que A é bilinear. Vamos provar que A é contínua. Sejam $f \in \mathcal{L}(X; Y)$, $g \in \mathcal{L}(Y; Z)$, então para qualquer $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\|g \circ f(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\| \|f(x)\| \leq \|g\| \|f\| \|x\| \leq \|g\| \|f\|.$$

Assim, $\|A(f, g)\| = \|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$. Portanto A é contínua.

Exemplo 2.1.6. *Seja $X = l_p$ munido da norma usual. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $A : X^m \rightarrow \mathbb{K}$ definida por:*

$$A(x_1, \dots, x_m) = x_{11} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{mm}$$

onde $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots)$. A nada mais é que o produto dos elementos da diagonal. Afir-mamos que A é m -linear e contínua.

De fato: Claramente vemos que A é m -linear. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$, com $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots)$, então:

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| = |x_{11} \cdot \dots \cdot x_{mm}| = |x_{11}| \cdot \dots \cdot |x_{mm}| \leq \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_m\|,$$

e conseqüentemente A é contínua.

No próximo teorema vamos estudar o isomorfismo isométrico entre os espaços $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ e $\mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$.

Teorema 2.1.7. *Sejam $X_1, \dots, X_m, Y$ espaços normados. Então o espaço $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$.*

Demonstração: Vamos definir $\psi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \rightarrow \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$ por:

$$\psi(A)(x_1)(x_2, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m)$$

para cada $x_1 \in X_1$ e $(x_2, \dots, x_m) \in X_2 \times \dots \times X_m$. A aplicação ψ assim definida é um isomorfismo isométrico. De fato:

Sejam $A, B \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, m$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \psi(A + \lambda B)(x_1)(x_2, \dots, x_m) &= (A + \lambda B)(x_1, \dots, x_m) \\ &= A(x_1, \dots, x_m) + \lambda B(x_1, \dots, x_m) \\ &= \psi(A)(x_1)(x_2, \dots, x_m) + \lambda \psi(B)(x_1)(x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Logo

$$\psi(A + \lambda B) = \psi(A) + \lambda \psi(B).$$

Seja $B \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$, definamos $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ por:

$$A(x_1, \dots, x_m) = B(x_1)(x_2, \dots, x_m).$$

para cada $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. A assim definida é m -linear e contínua uma vez que $B(x_1) \in \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y)$, $B \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$ e

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_m)\| &= \|B(x_1)(x_2, \dots, x_m)\| \leq \|B(x_1)\| \|x_2\| \dots \|x_m\| \\ &\leq \|B\| \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_m\|. \end{aligned}$$

Assim, para cada $B \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$, encontramos $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ como acima tal que

$$\psi(A)(x_1)(x_2, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) = B(x_1)(x_2, \dots, x_m),$$

ou seja $\psi(A) = B$. Portanto ψ é sobrejetora. Agora, para cada $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$,

$$\|\psi(A)\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1} \|\psi(A)(x_1)\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1: 1 \leq i \leq m} \|A(x_1, \dots, x_m)\| = \|A\|.$$

Portanto ψ é uma isometria. ■

Desta maneira, identificamos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \approx \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$.

Corolário 2.1.8. *Sejam X, Y espaços normados, $m \in \mathbb{N}$. Então o espaço $\mathcal{L}({}^m X; Y)$ é isométricamente isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}({}^{m-1} X; Y))$.*

Demonstração: Consequência imediata do teorema acima. ■

Corolário 2.1.9. *Sejam $X_1, \dots, X_m, Y$ espaços normados. Então o espaço $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é isométrico ao espaço $\mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2; \dots; \mathcal{L}(X_m; Y) \dots))$.*

Demonstração: Segue direto do teorema 2.1.7.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) &\approx \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y)) \approx \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2; \mathcal{L}(X_3, \dots, X_m; Y))) \\ &\approx \dots \approx \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2; \dots; \mathcal{L}(X_m; Y) \dots)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

2.2 Fórmula multinomial

Nesta seção temos por objetivo estudar a fórmula de Leibniz. Primeiramente estudamos as aplicações simétricas, a simetrização de uma aplicação e seus principais resultados

que serão utilizados no estudo da fórmula de Leibniz.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por S_n o grupo de todas as permutações σ de $\{1, \dots, n\}$.

Definição 2.2.1. *Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : X^m \rightarrow Y$ uma aplicação m -linear. Dizemos que A é simétrica se para cada $\sigma \in S_m$ temos:*

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}),$$

para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{as}(^m X; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m -lineares simétricas de X^m em Y e $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m -lineares simétricas contínuas de X^m em Y . Assim vemos que $\mathcal{L}_s(^m X; Y) = \mathcal{L}(^m X; Y) \cap \mathcal{L}_{as}(^m X; Y)$. Se $m = 0$, $\mathcal{L}_{as}(^m X; Y) = \mathcal{L}_s(^m X; Y) = Y$. Se $Y = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}_{as}(^m X; Y) = \mathcal{L}_{as}(^m X)$ e $\mathcal{L}_s(^m X; Y) = \mathcal{L}_s(^m X)$.

Proposição 2.2.2. *Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(^m X; Y)$.*

Demonstração: Basta mostrar que $\overline{\mathcal{L}_s(^m X; Y)} \subset \mathcal{L}_s(^m X; Y)$. Seja $A \in \overline{\mathcal{L}_s(^m X; Y)}$, então existe uma sequência $(A_n)_n \subset \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ tal que $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$. Vamos mostrar que A é simétrica. Para cada $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$ e para cada $\sigma \in S_m$:

$$A(x_1, \dots, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1, \dots, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}),$$

pois A_n é simétrica para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}),$$

e conseqüentemente, $A \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$. ■

Proposição 2.2.3. *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Pelo teorema 2.1.4 temos que o espaço $\mathcal{L}(^m X; Y)$ é um espaço de Banach. Pela proposição 2.2.2, $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ é um espaço fechado de $\mathcal{L}(^m X; Y)$. Portanto, $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ é um espaço de Banach. ■

O próximo teorema nos dará a simetrização de uma aplicação m -linear.

Teorema 2.2.4. *Sejam X, Y espaços normados e $m \in \mathbb{N}$. Para cada aplicação m -linear $A : X^m \rightarrow Y$ definimos a aplicação $A_s : X^m \rightarrow Y$ por:*

$$A_s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

então A_s é uma aplicação m -linear simétrica e $\|A_s\| \leq \|A\|$.

Demonstração: A_s é m -linear pois é soma de aplicações m -lineares. Seja $\pi \in S_m$ e seja $x_i \in X$ $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} A_s(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(\pi(1))}, \dots, x_{\sigma(\pi(m))}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\beta \in S_m} A(x_{\beta(1)}, \dots, x_{\beta(m)}) \\ &= A_s(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Logo, A_s é simétrica. Considere

$$\begin{aligned} \|A_s\| &= \sup_{\|x_i\| \leq 1: 1 \leq i \leq m} \|A_s(x_1, \dots, x_m)\| \\ &= \sup_{\|x_i\| \leq 1: 1 \leq i \leq m} \left\| \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \right\|. \end{aligned}$$

Se $\|x_i\| \leq 1$, para $1 \leq i \leq m$, temos que $\|A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})\| \leq \|A\|$. Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{\|x_i\| \leq 1: 1 \leq i \leq m} \left\| \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \right\| &\leq \\ \sup_{\|x_i\| \leq 1: 1 \leq i \leq m} \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \|A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})\| &\leq \|A\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|A_s\| \leq \|A\|$. ■

Definição 2.2.5. *Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Seja $A : X^m \rightarrow Y$ uma aplicação m -linear. A aplicação A_s definida no teorema 2.2.4 será chamada de simetrização de A .*

Observamos que se $A \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$, X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$, então temos que $A_s = A$. De fato: Para cada $i = 1, \dots, m$, seja $x_i \in X$. Para cada $\sigma \in S_m$

temos que $A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m)$ pois $A \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$. Assim,

$$A_s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m).$$

Assim, se considerarmos a aplicação $\phi : \mathcal{L}({}^m X; Y) \rightarrow \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ definida por $\phi(A) = A_s$ para cada $A \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$. Facilmente vemos que ϕ é linear contínua e sobrejetora.

Quando $A \in \mathcal{L}_a({}^m X; Y)$ e $x = x_1 = \dots = x_n$ vamos denotar $A(x_1, \dots, x_n)$ por Ax^n . Se $n = 0$, $Ax^0 = A$.

Proposição 2.2.6. *Sejam X, Y espaços vetoriais, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}_a({}^m X; Y)$, $k \in \mathbb{N}$. Para cada $x_1, \dots, x_k \in X$ e cada $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ com $n_1 + \dots + n_k = n \leq m$. Definimos a aplicação $A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}) : X^{m-n} \rightarrow Y$ por:*

$$A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k})(x_{n+1}, \dots, x_m) = \begin{cases} A(x_1, \dots, x_k, x_{n+1}, \dots, x_m) & \text{se } n \geq 1 \\ A(x_1, \dots, x_m) & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

então $A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k})$ é $(m - n)$ -linear.

Demonstração: Facilmente vemos que $A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k})$ é $(m - n)$ -linear, pois segue da m -linearidade da aplicação A . ■

No que segue vamos demonstrar um teorema que nos dá a fórmula multinomial, conhecida como Fórmula de Leibniz. Como Leonardo Pellegrini em sua dissertação de mestrado, [[28], teorema 1.13 pg 18], redigiu tal demonstração de maneira muito clara, decidimos aqui apresentar a demonstração redigida por ele. Para isso, tal demonstração precisa da seguinte notação: para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\alpha = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, definimos

$$|\alpha| = n_1 + \dots + n_k \quad \text{e} \quad \alpha! = n_1! \dots n_k!$$

Teorema 2.2.7. (Fórmula de Leibniz)

Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{L}_{as}({}^m X; Y)$. Então, para todo $x_1, \dots, x_k \in X$ temos que

$$A(x_1 + \dots + x_k)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{n_1! \dots n_k!} A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}).$$

onde a soma é sobre todas as k -uplas $\alpha = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ satisfazendo $n_1 + \dots + n_k = m$.

Demonstração: Para $m = 0$ e $m = 1$ o resultado é trivial. Assumindo a fórmula válida para $m \geq 1$, seja $A \in \mathcal{L}_{as}^{(m+1)}(X; Y)$. Podemos escrever

$$A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} = A(x_1 + \dots + x_k)(x_1 + \dots + x_k)^m.$$

Aplicando a hipótese de indução para a m -linear simétrica $A(x_1 + \dots + x_k)$, obtemos

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{n_1! \dots n_k!} A(x_1 + \dots + x_k)(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{n_1! \dots n_k!} A(x_1^{n_1+1} \dots x_k^{n_k}) + \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{n_1! \dots n_k!} A(x_1^{n_1} x_2^{n_2+1} \dots x_k^{n_k}) + \\ &\quad + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{n_1! \dots n_k!} A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k+1}), \end{aligned}$$

onde $\alpha = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ tal que $|\alpha| = m$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, definimos $\beta^{[i]} = (\beta_1^{[i]}, \dots, \beta_k^{[i]}) \in \mathbb{N}^k$ tal que $\beta_i^{[i]} = n_i + 1$ e $\beta_j^{[i]} = n_j$ para $j \neq i, j = 1, \dots, k$. Assim,

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} &= \sum_{|\beta^{[1]}|=m+1} \frac{m!}{(\beta_1^{[1]} - 1)! \beta_2^{[1]}! \dots \beta_k^{[1]}!} A(x_1^{\beta_1^{[1]}} \dots x_k^{\beta_k^{[1]}}) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_{|\beta^{[k]}|=m+1} \frac{m!}{\beta_1^{[k]}! \beta_2^{[k]}! \dots (\beta_k^{[k]} - 1)!} A(x_1^{\beta_1^{[k]}} \dots x_k^{\beta_k^{[k]}}) \\ &= \sum_{|\beta|=m+1; \beta_1 \geq 1} \frac{m!}{(\beta_1 - 1)! \beta_2! \dots \beta_k!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_{|\beta|=m+1; \beta_m \geq 1} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots (\beta_k - 1)!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}) \\ &= \sum_{|\beta|=m+1; \beta_1 \geq 1} \frac{m! \beta_1}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_{|\beta|=m+1; \beta_m \geq 1} \frac{m! \beta_k}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}), \end{aligned}$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{N}^k$. Logo

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} &= \sum_{|\beta|=m+1} m! A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} + \dots + \frac{\beta_k}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} \right) \\ &= \sum_{|\beta|=m+1} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}) (\beta_1 + \dots + \beta_k) \\ &= \sum_{|\beta|=m+1} \frac{(m+1)!}{\beta!} A(x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}), \end{aligned}$$

que é a fórmula que queríamos para $m+1$. ■

O próximo teorema nos mostra que uma aplicação multilinear simétrica depende apenas de seus valores na diagonal do espaço X^m . Ele será útil no estudo dos polinômios.

Teorema 2.2.8. (Fórmula da Polarização)

Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e $A : X^m \rightarrow Y$ uma aplicação m -linear simétrica. Então, para cada $x_1, \dots, x_m \in X$, temos:

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m.$$

Demonstração: Pela fórmula de Leibniz (2.2.7), para cada sequência $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ com $|\alpha| = n_1 + \dots + n_m = m$, temos:

$$\begin{aligned} A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m &= \sum_{|\alpha|} \frac{m!}{n_1! \dots n_m!} A((\epsilon_1 x_1)^{n_1} \dots (\epsilon_m x_m)^{n_m}) \\ &= \sum_{|\alpha|} \frac{m!}{n_1! \dots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_m^{n_m} A(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}), \end{aligned}$$

onde a soma é sobre todas as m -uplas $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ satisfazendo $|\alpha| = n_1 + \dots + n_m = m$. Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \sum_{|\alpha|} \frac{m!}{n_1! \dots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_m^{n_m} A(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{|\alpha|} \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} A(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}). \end{aligned}$$

Se algum $n_i = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} &= \sum_{\epsilon_j = \pm 1, 1 \leq j \leq m, j \neq i} \epsilon_1^{n_1+1} \dots 1 \epsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} + \\ &\quad \sum_{\epsilon_j = \pm 1, 1 \leq j \leq m, j \neq i} \epsilon_1^{n_1+1} \dots (-1) \epsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \\ &= (1 - 1) \sum_{\epsilon_j = \pm 1, 1 \leq j \leq m, j \neq i} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} = 0. \end{aligned}$$

Assim, as parcelas que aparecerão no somatório é quando $n_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, m$, e como $n_1 + \dots + n_m = m$, a única possibilidade é de $n_i = 1$ para cada $i = 1, \dots, m$.

Assim,

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} = \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^2 \dots \epsilon_m^2 = 2^m \cdot 1 = 2^m.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{|\alpha|} \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} A(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{|\alpha|} \frac{1}{n_1! \dots n_m!} 2^m A(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}) \\ &= A(x_1 \dots x_m) = A(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

■

2.3 Polinômios homogêneos

O nosso objetivo nesta seção é definir os polinômios m -homogêneos e polinômios. Aqui vamos estudar a unicidade da correspondência entre o espaço dos polinômios m -homogêneos e o espaço das aplicações m -lineares simétricas, como também a unicidade da representação de um polinômio.

Definição 2.3.1. *Sejam X, Y espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \rightarrow Y$ é dita ser um **polinômio m -homogêneo** se existe uma aplicação m -linear $A : X^m \rightarrow Y$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in X$.*

Exemplo 2.3.2. Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e $P : l_p \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{com } x = (x_j)_j \in l_p,$$

Afirmamos que P é um polinômio 2-homogêneo.

De fato: Tomemos $A : l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{com } x = (x_i)_i \text{ e } y = (y_i)_i \in l_p$$

Facilmente vemos que A é 2-linear e como

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = P(x),$$

temos que P é 2-homogêneo.

Da definição, vemos que um polinômio m -homogêneo pode ser escrito da forma $P = A \circ \Delta_m$, onde $A \in \mathcal{L}_a({}^m X; Y)$ e Δ_m é a aplicação diagonal $\Delta_m : X \rightarrow X^m$ dada por:

$$\Delta_m(x) = (x, \overset{(m)}{\cdot}, x).$$

Facilmente vemos que Δ_m é linear.

Observamos que se $P : X \rightarrow Y$ é um polinômio m -homogêneo, então $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in X$, já que existe $A : X^m \rightarrow Y$ m -linear com $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in X$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_a({}^m X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos de X em Y . Se $m = 0$, $\mathcal{P}_a({}^m X; Y) = Y$.

No próximo teorema vamos provar que se a aplicação m -linear A for simétrica então A é única.

Teorema 2.3.3. Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$. Dado $P \in \mathcal{P}_a({}^m X; Y)$ existe uma única aplicação m -linear simétrica $A_s \in \mathcal{L}_{as}({}^m X; Y)$ tal que $P(x) = A_s x^m$ para cada $x \in X$.

Demonstração: Dado $P \in \mathcal{P}_a({}^mX; Y)$, existe $A \in \mathcal{L}_a({}^mX; Y)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para cada $x \in X$. Tomando a simetrização de A , temos:

$$\begin{aligned} A_s x^m &= A_s(x, \overset{(m)}{!}, x) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x, \overset{(m)}{!}, x) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} Ax^m = Ax^m = P(x) \end{aligned}$$

para qualquer $x \in X$. Para verificar a unicidade, suponhamos que existem $A_1, A_2 \in \mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$ tais que, para cada $x \in X$

$$P(x) = A_1 x^m \quad \text{e} \quad P(x) = A_2 x^m.$$

Assim, $A_1 x^m = A_2 x^m$, logo $(A_1 - A_2)x^m = 0$ para cada $x \in X$.

Segue da fórmula da polarização (2.2.8) que

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2)(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m (A_1 - A_2)(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

para cada $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$. Assim, $A_1(x_1, \dots, x_m) = A_2(x_1, \dots, x_m)$.

Portanto $A_1 = A_2$. ■

Dado $P \in \mathcal{P}_a({}^mX; Y)$, segue dos teoremas 2.2.8 e 2.3.3 que existe uma única $A \in \mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$ tal que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m).$$

Esta única correspondência entre o polinômio m -homogêneo P e a aplicação m -linear simétrica A tal que $P(x) = Ax^m$, vamos denotar por $P = \hat{A}$.

Usando o teorema 2.3.3 podemos mostrar que os espaços $\mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$ e $\mathcal{P}_a({}^mX; Y)$ são isomorfos.

Teorema 2.3.4. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então os espaços vetoriais $\mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$ e $\mathcal{P}_a({}^mX; Y)$ são isomorfos.*

Demonstração: Seja $\phi : \mathcal{L}_{as}({}^mX; Y) \longrightarrow \mathcal{P}_a({}^mX; Y)$ dada por $\phi(A) = \hat{A}$ para cada $A \in \mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$. Assim, ϕ é linear, uma vez que dado $A, B \in \mathcal{L}_{as}({}^mX; Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$:

$$\phi(A + \lambda B)(x) = \widehat{(A + \lambda B)}(x) = (A + \lambda B)x^m = Ax^m + \lambda Bx^m$$

$$= \hat{A}(x) + \lambda \hat{B}(x) = \phi(A)(x) + \lambda \phi(B)(x) = [\phi(A) + \lambda \phi(B)](x).$$

Pelo teorema anterior (2.3.3) segue que ϕ é uma bijeção. ■

Definição 2.3.5. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \rightarrow Y$ é dita ser um **polinômio de grau m** se existem $P_k \in \mathcal{P}_a(kX; Y)$, $k = 0, \dots, m$ tais que $P = P_0 + \dots + P_m$, isto é, $P(x) = P_0(x) + \dots + P_m(x)$ para cada $x \in X$.*

Vamos denotar por $\mathcal{P}_a(X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios de X em Y . Se $Y = \mathbb{K}$ então $\mathcal{P}_a(X; Y) = \mathcal{P}_a(X)$.

No próximo teorema vamos demonstrar a unicidade da representação de P .

Teorema 2.3.6. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja $P : X \rightarrow Y$ um polinômio não-nulo de grau m . Então a representação $P = P_0 + \dots + P_m$ é única.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que se $R = R_0 + \dots + R_m = 0$, então $R_0 = R_1 = \dots = R_m = 0$. Para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} R(\alpha x) &= R_0(\alpha x) + R_1(\alpha x) \dots + R_m(\alpha x) = 0 \\ \Rightarrow \quad \alpha^0 R_0(x) + \alpha^1 R_1(x) \dots + \alpha^m R_m(x) &= 0 \\ \stackrel{\div \alpha^m}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha^m} R_0(x) + \frac{\alpha}{\alpha^m} R_1(x) \dots + \frac{\alpha^m}{\alpha^m} R_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Para α suficientemente grande, segue que $R_m(x) = 0$ para qualquer $x \in X$. Logo $R(x) = R_0(x) + R_1(x) \dots + R_{m-1}(x) = 0$. Com raciocínio análogo, concluímos que $R_0 = R_1 = \dots = R_m = 0$.

Agora consideremos um polinômio qualquer $P : X \rightarrow Y$ não-nulo tal que

$$P = P_0 + \dots + P_m \quad \text{e} \quad P = Q_0 + \dots + Q_m$$

onde $P_k, Q_k \in \mathcal{P}_a(kX; Y)$, $k = 0, \dots, m$. Então,

$$(P_0 - Q_0) + (P_1 - Q_1) + \dots + (P_m - Q_m) = 0$$

e pela parte anterior, temos que

$$P_0 - Q_0 = P_1 - Q_1 = \dots = P_m - Q_m = 0.$$

logo $P_0 = Q_0, P_1 = Q_1, \dots, P_m = Q_m$. Portanto, a representação de P é única. ■

A seguir vamos definir a polarização de uma função $f : X \rightarrow Y$ e estudar a polarização de um polinômio.

Definição 2.3.7. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $x_1, \dots, x_m \in X$. Definimos a aplicação ϕ_m do espaço das funções de X em Y no espaço Y como sendo*

$$\phi_m(f) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m f(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m).$$

Chamamos a aplicação ϕ_m de **polarização de f com respeito a $x_1, \dots, x_m$** .

Teorema 2.3.8. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $A_k : X^k \rightarrow Y$ é uma aplicação k -linear simétrica e $P_k = \hat{A}_k$, então:*

$$\phi_m(P_k) = \begin{cases} A_m(x_1, \dots, x_m) & \text{se } k = m \\ 0 & \text{se } k < m \end{cases}.$$

Demonstração: Se $k = m$, segue da fórmula da polarização de P_m com respeito a $x_1, \dots, x_m \in X$ que,

$$\begin{aligned} \phi_m(P_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m P_m(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m A_m(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \\ &= A_m(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Para $k < m$,

$$\begin{aligned} \phi_m(P_k) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m P_k(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m A_k(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^k. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Leibniz (2.2.7),

$$\begin{aligned} A_k(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^k &= \sum_{|\alpha|} \frac{k!}{n_1! \cdots n_m!} A_k((\epsilon_1 x_1)^{n_1} \cdots (\epsilon_m x_m)^{n_m}) \\ &= \sum_{|\alpha|} \frac{k!}{n_1! \cdots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \cdots \epsilon_m^{n_m} A_k(x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}) \end{aligned}$$

onde a soma é sobre todas as m -uplas $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ satisfazendo $|\alpha| = n_1 + \dots + n_m = k$, logo,

$$\phi_m(P_k) = \frac{k!}{m!2^m} \sum_{|\alpha|} \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} A_k(x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}).$$

Como $n_1 + \dots + n_m = k$, e $k < m$ então $n_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, m$, assim, $\sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} = 0$. Portanto $\phi_m(P_k) = 0$. ■

Seja $P : X \rightarrow Y$ um polinômio de grau m tal que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$ então, pelo teorema acima, temos que $\phi_m(P) = \phi_m(P_m)$.

Se $x = x_1 = \dots = x_m$ então

$$P_m(x) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P((\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m)x).$$

2.4 Polinômios contínuos

Vamos denotar por $\mathcal{P}(^m X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos contínuos de X em Y .

O próximo teorema nos dará uma relação entre os polinômios m -homogêneos contínuos e as aplicações m -lineares contínuas simétricas.

Teorema 2.4.1. *Sejam X, Y espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^m X; Y)$ seja $A \in \mathcal{L}_{as}(^m X; Y)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para cada $x \in X$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $A \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$.
2. $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.
3. P é contínuo na origem.
4. Existe $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ para cada $x \in X$.

Demonstração: $(1 \Rightarrow 2)$ Seja $x_0 \in X$. Dado $\epsilon > 0$, da continuidade de A existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ com $\|(x_1, \dots, x_m) - (x_0, \dots, x_0)\| < \delta$ temos que $\|A(x_1, \dots, x_m) - A(x_0, \dots, x_0)\| < \epsilon$. Em particular, para $(x, \dots, x) \in X^m$ tal que $\|(x, \dots, x) - (x_0, \dots, x_0)\| < \delta$, ou seja, $\|x - x_0\| < \delta$, temos que $\|Ax^m - Ax_0^m\| < \epsilon$.

Consequentemente, $\|P(x) - P(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Portanto P é contínua. (2 $\Rightarrow$ 3) Trivial.

(3 $\Rightarrow$ 4) Seja $x \in X$. Como P é contínuo na origem, dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$ com $\|x\| < \delta$ temos que $\|P(x)\| \leq 1$. Se $x \neq 0$, tomando $y = \frac{\delta x}{2\|x\|}$, temos que $\|y\| = \left\| \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Logo, $\|P(y)\| \leq 1$. Agora como, $\|P(y)\| = \|Ay^m\| = \frac{\delta^m}{2^m} \cdot \frac{\|Ax^m\|}{\|x\|^m}$, temos que $\|Ax^m\| \leq \frac{2^m}{\delta^m} \|x\|^m$. Considerando $M = \frac{2^m}{\delta^m}$, temos que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ para cada $x \in X$ e $x \neq 0$. Como para $x = 0$ a desigualdade vale para todo $M > 0$, segue o resultado.

(4 $\Rightarrow$ 1) Seja $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ para cada $x \in X$. Vamos mostrar que A é contínua. Sejam $x_1, \dots, x_m \in X$, com $\|x_i\| \leq \frac{1}{m}$ para cada $i = 1, \dots, m$, usando a fórmula da polarização (teorema 2.2.8), temos:

$$\begin{aligned}
 \|A(x_1, \dots, x_m)\| &= \left\| \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \right\| \\
 &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} |\epsilon_1| \dots |\epsilon_m| \|A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m\| \\
 &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} \|P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)\| \\
 &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} M \|\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m\|^m \\
 &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} M \left(|\epsilon_1| \|x_1\| + \dots + |\epsilon_m| \|x_m\| \right)^m \\
 &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} M \left(\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \right)^m.
 \end{aligned}$$

Como $\|x_i\| \leq \frac{1}{m}$ para cada $i = 1, \dots, m$ então $\sum_{i=1}^m \|x_i\| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} M \left(\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \right)^m \\
 &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i \pm 1, 1 \leq i \leq m} M = \frac{M}{m!}.
 \end{aligned}$$

Agora para cada $x_1, \dots, x_m \in X^m$, com $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$, considere $y_i = \frac{x_i}{m\|x_i\|}$, e assim

$$\|y_i\| = \left\| \frac{x_i}{m\|x_i\|} \right\| = \frac{1}{m}, \text{ e}$$

$$\|A(y_1, \dots, y_m)\| = \frac{\|A(x_1, \dots, x_m)\|}{m^m \|x_1\| \dots \|x_m\|} \leq \frac{M}{m!},$$

ou seja,

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{M}{m!} m^m \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Assim, para cada $x_i \in X$ com $i = 1, \dots, m$ temos que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq K \|x_1\| \dots \|x_m\|,$$

onde $K = \frac{M}{m!} m^m$. Portanto pelo teorema 2.1.2 a aplicação A é contínua. ■

A cada polinômio $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ associamos um número dado por $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\}$. De maneira análoga a proposição 2.1.3 temos que a função

$$\|\cdot\| : \mathcal{P}(^m X; Y) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$P \longmapsto \|P\| \text{ é uma norma.}$$

No que segue vamos estudar outras maneiras de caracterizar a $\|P\|$ e suas propriedades.

Proposição 2.4.2. *Sejam X, Y espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ então:*

$$\begin{aligned} 1. \quad \|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\} = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m\}. \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Para cada } x \in X, \text{ temos que } \|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m.$$

Demonstração: (1) É imediato que

$$\sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Vamos mostrar o outro lado da desigualdade. Seja $x \in B_X$. Se $x \neq 0$, tomando $y = \frac{x}{\|x\|}$ e A a aplicação m -linear associada a P , temos que

$$\|P(y)\| = \|Ay^m\| = \frac{\|Ax^m\|}{\|x\|^m} \geq \frac{\|Ax^m\|}{\|x\|^m} = \|P(x)\|,$$

uma vez que $\|x\| \leq 1$. Logo $\sup\{\|P(w)\| : \|w\| = 1\} \geq \|P(x)\|$ para cada $x \in B_X$. Se $x = 0$, a desigualdade também vale. Assim, segue que

$$\sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\} \geq \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Portanto, temos que

$$\sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Seja $M \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$ para todo $x \in X$. Se $\|x\| = 1$ então $\|P(x)\| \leq M$. Assim $\sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\} \leq M$, e consequentemente

$$\sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m\}.$$

Para verificar a outra desigualdade, seja $x \in X$, $x \neq 0$, e considere $y = \frac{x}{\|x\|}$, então temos que

$$\|P(y)\| = \left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| = 1\}.$$

Logo, $\|P(x)\| \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| = 1\} \|x\|^m$. Como a desigualdade também vale quando $x = 0$, concluímos que

$$\inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m\} \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| = 1\}.$$

Portanto temos a igualdade

$$\sup\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\} = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M \|x\|^m\}.$$

Seja $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$. Se $x \neq 0$, então

$$\|P(x)\| \leq \frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} \leq \sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\},$$

logo $\sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\}$. Para termos o outro lado da desigualdade, dado $x \neq 0$, tomando $y = \frac{x}{\|x\|}$, temos que

$$\|P(y)\| = \left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| \leq 1\}. \text{ Se } \|x\| \geq 1 \text{ então}$$

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} \leq \frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| \leq 1\}. \text{ Logo,}$$

$$\sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\} \leq \sup\{\|P(z)\| : \|z\| \leq 1\}. \text{ Portanto, temos a igualdade}$$

$$\sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\} = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

(2) Seja $x \in X$. Se $x = 0$, vale a igualdade. Se $x \neq 0$ então

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} \leq \sup\left\{\frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} : x \neq 0\right\} = \|P\|.$$

Logo $\|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m$. ■

O próximo teorema foi provado por Martin. Ele nos dá uma relação entre $\|\hat{A}\|$ e $\|A\|$.

Teorema 2.4.3. (Martin - 1932)

Sejam X, Y espaços normados e $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ e $\mathcal{P}(^m X; Y)$ são topologicamente isomorfos e

$$\| \hat{A} \| \leq \| A \| \leq \frac{m^m}{m!} \| \hat{A} \|.$$

Demonstração: Seja ϕ a aplicação dada no teorema 2.3.4, então tomando $\psi = \phi|_{\mathcal{L}_s(^m X; Y)}$ temos que ψ é um isomorfismo. Vamos provar a seguinte desigualdade

$$\| \hat{A} \| \leq \| A \| \leq \frac{m^m}{m!} \| \hat{A} \|,$$

para cada $A \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$. Se $m = 0$, e $m = 1$, temos que $\psi(A) = A$, logo temos que

$$\| \hat{A} \| = \| \psi(A) \| = \| A \| \leq \frac{m^m}{m!} \| \hat{A} \|.$$

Seja $m > 1$, então

$$\| \hat{A}(x) \| = \| \psi(A)(x) \| = \| P(x) \| = \| Ax^m \| \leq \| A \| \| x \|^m,$$

concluimos que

$$\| \hat{A} \| = \sup\{\| \hat{A}(x) \| : \| x \| = 1\} \leq \sup\{\| A \| \| x \|^m : \| x \| = 1\} = \| A \|.$$

Resta mostrar o outro lado da desigualdade.

Seja $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, pela fórmula da polarização (2.2.8), temos que

$$\begin{aligned} \| A(x_1, \dots, x_m) \| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \| A(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \| \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \| P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \| \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \| \psi(A)(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \| \psi(A) \| \cdot \| (\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \|^m \end{aligned}$$

pelo teorema 2.4.2, pois $\psi(A) \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, logo

$$\begin{aligned} \| A(x_1, \dots, x_m) \| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \| \psi(A) \| \left(\| x_1 \| + \dots + \| x_m \| \right)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \cdot 2^m \| \psi(A) \| \left(\| x_1 \| + \dots + \| x_m \| \right)^m. \end{aligned}$$

Então, se para cada $i = 1, \dots, m$, $\|x_i\| = 1$, temos que:

$$\|A\| \leq \frac{1}{m!} \|\psi(A)\| (1 + \binom{m}{1} + 1)^m = \frac{1}{m!} \|\psi(A)\| m^m.$$

Portanto $\|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|$. ■

Corolário 2.4.4. *Sejam X um espaço normado e Y um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Segue da proposição 2.2.3 e do teorema 2.4.3. ■

A constante $\frac{m^m}{m!}$ é a melhor possível, como mostra o seguinte exemplo dado por Nachbin.

Exemplo 2.4.5. *Sejam l_1 e $x = (x_n)_n \in l_1$. Seja $P : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $P(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$. Pelo exemplo 2.1.6 temos que $P \in \mathcal{P}({}^m l_1)$. Se $(e_i)_i$ é a base canônica de l_1 então*

$$A(e_1, \dots, e_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i e_i\right) = \frac{1}{m!}.$$

Assim $\|A\| \geq \frac{1}{m!}$. Por outro lado, se $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq 1$, e como

$$|x_1| \dots |x_m| \leq \frac{1}{m^m} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|\right)^m$$

temos que $|\hat{A}(x)| \leq \frac{1}{m^m}$. Se $x = (\frac{1}{m}, \binom{m}{1}, \frac{1}{m}, 0, \dots)$ então $\hat{A}(x) = \frac{1}{m^m}$. Logo $\|\hat{A}\| = \frac{1}{m^m}$, e assim $\|A\| = \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|$.

Teorema 2.4.6. *Sejam X, Y, Z espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $P : X \rightarrow Y$ um polinômio m -homogêneo contínuo, $T : Z \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Z$ aplicações lineares contínuas. Então $P \circ T \in \mathcal{P}({}^m Z; Y)$ e $S \circ P \in \mathcal{P}({}^m X; Z)$.*

Demonstração: Como P é um polinômio m -homogêneo, existe $B : X^m \rightarrow Y$ m -linear tal que $P(x) = Bx^m$ para cada $x \in X$.

Seja $C_1 : Z^m \rightarrow Y$ dado por:

$$C_1(z_1, \dots, z_m) = B(T(z_1), \dots, T(z_m))$$

para cada $(z_1, \dots, z_m) \in Z^m$, então C_1 é m-linear e $(P \circ T)(z) = C_1 z^m$ para cada $z \in Z$. Logo $P \circ T \in \mathcal{P}(^m Z; Y)$.

Seja $C_2 : X^m \rightarrow Z$ dado por:

$$C_2(x_1, \dots, x_m) = S\left(B(x_1, \dots, x_m)\right)$$

para cada $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$. Então C_2 é m-linear e $(S \circ P)(x) = C_2 x^m$ para cada $x \in X$. Logo $S \circ P \in \mathcal{P}(^m X; Z)$. ■

Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Vamos denotar por $\mathcal{P}(X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios contínuos de X em Y . Se $Y = \mathbb{K}$, então denotamos $\mathcal{P}(X; Y) = \mathcal{P}(X)$.

O próximo teorema nos dará critérios para a continuidade do polinômio P .

Teorema 2.4.7. *Sejam X, Y espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Seja $P : X \rightarrow Y$ um polinômio de grau m dado por $P = P_0 + \dots + P_m$. Então são equivalentes:*

1. $P_0, \dots, P_m$ são contínuos.
2. P é contínuo.
3. P é contínuo na origem.
4. P é limitado em B_X .

Demonstração: $(1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3)$ é imediato.

$(2 \Rightarrow 1)$ Suponhamos que P é contínuo. Vamos mostrar que P_j é contínuo para cada $j = 0, \dots, m$. A prova será feita por indução sobre m . Para $m = 0$ é evidente. Vamos supor que vale para $m - 1$. Vamos mostrar que é válido para m . Para todo $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$(1) \quad \sum_{j=0}^m P_j(x) = P(x) \quad \text{e} \quad (2) \quad \sum_{j=0}^m P_j(\alpha x) = P(\alpha x).$$

Multiplicando (1) por $\alpha^m \in \mathbb{K}$ e subtraindo (2) temos que

$$\alpha^m P(x) - P(\alpha x) = \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha^m - \alpha^j) P_j(x)$$

para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Como P é contínuo, temos que $\alpha^m P(x) - P(\alpha x)$ é contínuo para cada $x \in X$. Assim,

se $\alpha \in \mathbb{K}$ é tal que $\alpha^m - \alpha^j \neq 0$ para cada $j = 0, \dots, m-1$, temos que $\sum_{j=0}^{m-1} Q_j(x)$ é um polinômio contínuo, onde $Q_j = (\alpha^m - \alpha^j)P_j \in \mathcal{P}_a(jX; Y)$ para cada $j = 0, \dots, m-1$. Da hipótese de indução, segue que Q_j é contínuo para todo $j = 0, \dots, m-1$. Assim $P_0, \dots, P_{m-1}$ são contínuos, e como P também é contínuo, segue que $P - \sum_{j=0}^{m-1} P_j = P_m$ é contínuo.

(3 $\Rightarrow$ 4) Se P é contínuo na origem, então, pela equivalência $1 \iff 2$, temos que P_j é contínuo na origem para cada $j = 0, \dots, m$. Assim segue do teorema 2.4.1 que para cada $j = 0, \dots, m$, existe $M_j > 0$ tal que $\|P_j(x)\| \leq M_j$ para qualquer $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$. Como $\|P(x)\| \leq \sum_{j=0}^m \|P_j(x)\|$, temos que

$$\|P(x)\| \leq \sum_{j=0}^m M_j$$

para qualquer $x \in B_X$. Portanto P é limitado na bola unitária fechada.

(4 $\Rightarrow$ 1) Seja $P = P_0 + \dots + P_m \in \mathcal{P}_a(jX; Y)$ limitado na bola unitária fechada. Como P_0 é contínuo, podemos considerar $P_0 = 0$, isto é, $P = P_1 + \dots + P_m$. Então pela polarização de P com respeito a quaisquer $x_1, \dots, x_m \in X$ (teorema 2.3.8) segue que

$$\phi_m(P) = \phi_m(P_0) + \phi_m(P_1) + \dots + \phi_m(P_m) = A_m(x_1, \dots, x_m),$$

pois $\phi_m(P_i) = 0$ para cada $i < m$. Como P é limitado em B_X , existe $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M$ para qualquer $x \in B_X$. Assim para $x_1, \dots, x_m \in X$ com $\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|A_m(x_1, \dots, x_m)\| &= \|\phi_m(P)\| \\ &= \left\| \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \right\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \left\| \sum_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq m} P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \right\| \leq \frac{M}{m!}, \end{aligned}$$

pois $\|\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m\| \leq 1$. Logo $\|A_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{M}{m!}$ se $\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \leq 1$. Agora, vamos considerar qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Vamos definir $y_i = \frac{x_i}{m\|x_i\|}$ para cada $i = 1, \dots, m$. Então $\|y_1\| + \dots + \|y_m\| \leq 1$ e pelo resultado provado acima, obtemos que

$$\|A_m(y_1, \dots, y_m)\| = \frac{1}{m^m \|x_1\| \dots \|x_m\|} \|A_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{M}{m!}.$$

Portanto

$$\|A_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{m^m M}{m!} \|x_1\| \dots \|x_m\|$$

para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$. Então se $K = \frac{m^m M}{m!}$, temos que $\|P_m(x)\| \leq K \|x\|^m$ para qualquer $x \in X$. Assim, segue do teorema 2.4.1 que P_m é contínuo e $P - P_m$ é limitado na bola unitária fechada. Repetindo o mesmo raciocínio para $P_1, \dots, P_{m-1}$, podemos concluir que $P_{m-1}, \dots, P_1$ são contínuos. ■

O próximo teorema foi obtido por Mazur e Orlicz em 1934. Ele é do tipo Banach-Steinhaus para polinômios homogêneos contínuos.

Teorema 2.4.8. (Banach-Steinhaus para polinômios)

Sejam X, Y espaços de Banach e $(P_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{P}(^m X; Y)$. Se P é o limite pontual da sequência $(P_n)_n$ então $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.

Demonstração: Seja $(P_n)_n \subset \mathcal{P}(^m X; Y)$ uma sequência que converge pontualmente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $A_n \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ a aplicação m-linear simétrica associada a $P_n \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. Se P é o limite pontual da sequência $(P_n)_n$, então pela fórmula da polarização (teorema 2.2.8),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1, \dots, x_m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A_n(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m) \end{aligned}$$

para qualquer $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$. Consequentemente, para qualquer $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ a sequência $(A_n(x_1, \dots, x_m))_n$ é convergente. Consideremos A o limite pontual da sequência $(A_n)_n$. Então claramente $A \in \mathcal{L}_{as}(^m X; Y)$. Como $\mathcal{L}(^m X; Y)$ é isomorfo a $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(^{m-1} X; Y))$, a sequência $(A_n)_n$ pode ser vista como uma sequência em $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(^{m-1} X; Y))$. Assim, pelo teorema de Banach-Steinhaus para aplicações lineares (teorema 1.2.10), temos que $A \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(^{m-1} X; Y))$. Como para qualquer $x \in X$

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, \overset{(n)}{\cdot}, x) = A(x, \overset{(n)}{\cdot}, x),$$

concluimos que $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. ■

Exemplo 2.4.9. Seja $P : l_p \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \quad \text{com } x = (x_j)_j \in l_p.$$

Afirmamos que $P \in \mathcal{P}(^2l_p)$.

De fato: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $P_n : l_p \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{com } x = (x_j)_j \in l_p.$$

Sabemos do exemplo 2.3.2 que $P_n \in \mathcal{P}(^2l_p)$, e para cada $x = (x_j)_j \in l_p$,

$$P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(x),$$

logo, pelo teorema acima $P \in \mathcal{P}(^2l_p)$.

Teorema 2.4.10. Sejam X, Y espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$. Então P é uniformemente contínuo sobre os limitados.

Demonstração: Sejam $P : X \rightarrow Y$ um polinômio m -homogêneo e $A \in \mathcal{L}(^mX; Y)$ a aplicação m -linear associada a P . Sejam $W \subset X$ limitado e $r > 0$ tal que $W \subset B[0; r]$. Para cada $x, z \in W$ temos que:

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(z)\| &= \|A(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - A(z, \overset{(m)}{\cdot}, z)\| \\ &= \|A(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - A(z, x, \overset{(m-1)}{\cdot}, x) + A(z, x, \overset{(m-1)}{\cdot}, x) - A(z, z, x, \overset{(m-2)}{\cdot}, x) \\ &\quad - A(z, z, x, \overset{(m-2)}{\cdot}, x) - \dots - A(z, \overset{(m-1)}{\cdot}, z, x) + A(z, \overset{(m-1)}{\cdot}, z, x) - A(z, \overset{(m)}{\cdot}, z)\| \\ &\leq \|A(x - z, \overset{(m-1)}{\cdot}, x)\| + \|A(z, x - z, x, \overset{(m-2)}{\cdot}, x)\| + \dots \\ &\quad + \|A(z, \overset{(m-1)}{\cdot}, z, x - z)\| \leq m \|A\| r^{m-1} \|x - z\|. \end{aligned}$$

Tomando $M = m \|A\| r^{m-1}$ temos que $\|P(x) - P(z)\| \leq M \|x - z\|$. Seja $\epsilon > 0$, para $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, temos que $\|P(x) - P(z)\| < \epsilon$ sempre que $x, y \in W$ e $\|x - z\| < \delta$. Portanto P é uniformemente contínuo em cada conjunto limitado de X . ■

Corolário 2.4.11. Sejam X, Y espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(X; Y)$. Então P é uniformemente contínuo sobre os limitados.

Demonstração: Para cada $P \in \mathcal{P}(X; Y)$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $P_k \in \mathcal{P}(^k X; Y)$, $k = 0, 1, \dots, m$, tais que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$. Para cada $k = 0, \dots, m$ temos que P_k é uniformemente contínuo sobre os limitados (pelo teorema acima). Então dado $\epsilon > 0$ e $W \subset X$ limitado existe $\delta_k > 0$ tais que se $x, y \in W$ e $\|x - y\| < \delta_k$ temos que $|P_k(x) - P_k(y)| < \frac{\epsilon}{m}$. Agora, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ e considerando que $x, y \in W$ tais que $\|x - y\| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |P(x) - P(y)| &\leq |P_0(x) - P_0(y)| + |P_1(x) - P_1(y)| + \dots + |P_m(x) - P_m(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{m} + \binom{m}{1} \frac{\epsilon}{m} + \frac{\epsilon}{m} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto P é uniformemente contínuo sobre os limitados.

2.5 Polinômios de tipo finito, fracamente contínuos e compactos

Nesta seção vamos estudar alguns tipos de polinômios, os quais serão utilizados nos capítulos 3 e 4.

Definição 2.5.1. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que um polinômio m -homogêneo $P : X \rightarrow Y$ é fracamente compacto (respectivamente, compacto) se leva conjuntos limitados de X em conjuntos relativamente fracamente compactos (respectivamente, relativamente compactos) de Y .*

Exemplos 2.5.2. 1. *As aplicações lineares compactas dadas no capítulo 1, pg 13 são polinômios 1-homogêneos compactos.*

2. *Sejam $k \in \mathbb{N}$, X, Y espaços de Banach com Y reflexivo, cada polinômio k -homogêneo contínuo $P : X \rightarrow Y$ é fracamente compacto.*

De fato: Pelo teorema 2.4.7 temos que para cada $W \subset X$ limitado, $P(W)$ é limitado. Como Y é reflexivo, pelo teorema de Eberlein-Smulian (1.2.24) $P(W)$ é relativamente fracamente compacto.

Se $X = Y = l_2$ o polinômio $P : l_2 \rightarrow l_2$ definido por

$$P((x_n)_n) = \left(\frac{1}{n} x_n^k \right)_n$$

para todo $(x_n)_n \in l_2$, é fracamente compacto, pois l_2 é um espaço reflexivo.

3. Para cada $k \geq 2$ definimos $Q : l_2 \rightarrow l_1$ por $Q((x_n)_n) = (x_n^k)_n$ para todo $(x_n)_n \in l_2$. O polinômio assim definido não é fracamente compacto. (ver por exemplo Hissadomi, [21], pg 54).

Proposição 2.5.3. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}_a(mX; Y)$. P é fracamente compacto (respectivamente, compacto) se e somente se P leva B_X em um conjunto relativamente fracamente compacto (respectivamente, relativamente compacto) de Y .*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial, por definição.

$(\Leftarrow)$ Seja $W \subset X$ limitado, então existe $r > 0$ tal que $W \subset B[0, r]$ em X . Logo

$P(W) \subset P(B[0, r])$. Mas, $P(B[0, r]) = r^m P(B_X)$ e consequentemente

$\overline{P(W)}^\omega \subset r^m \overline{P(B_X)}^\omega$. Como por hipótese $P(B_X)$ é relativamente fracamente compacto em Y , segue que $r^m P(B_X)$ é relativamente fracamente compacto, e como

$\overline{P(W)}^\omega \subset r^m \overline{P(B_X)}^\omega$ temos que $\overline{P(W)}^\omega$ é fracamente compacto. ■

Definições 2.5.4. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(mX; Y)$.*

1. Dizemos que P é **fracamente contínuo sobre os limitados** se para cada $W \subset X$ limitado, cada $x \in W$ e $\epsilon > 0$ existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $\|P(x) - P(y)\| < \epsilon$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $y \in W$ e $i = 1, \dots, n$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_w(mX; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos contínuos de X em Y tais que restritos aos conjuntos limitados são fracamente contínuos.

2. Dizemos que P é **fracamente uniformemente contínuo sobre os limitados** se para cada $W \subset X$ limitado e para cada $\epsilon > 0$ existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $\|P(x) - P(y)\| < \epsilon$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $x, y \in W$ e $i = 1, \dots, n$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_{wu}(mX; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos contínuos de X em Y tais que restritos aos conjuntos limitados são fracamente uniformemente contínuos.

3. Dizemos que P é **fracamente sequencialmente contínuo** em X se para cada $x \in X$ e cada sequência $(x_n)_n$ de X tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ temos que $P(x_n) \rightarrow P(x)$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_{wsc}(mX; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos de X em Y que são fracamente sequencialmente contínuos em cada $x \in X$.

Proposição 2.5.5. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então $P \in \mathcal{P}_w(mX; Y)$ se e somente se $P|_{B_X}: B_X \rightarrow Y$ é fracamente contínuo.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial, por definição.

$(\Leftarrow)$ Seja $W \subset X$ limitado, então existe $r > 0$ tal que $W \subset B[0, r]$ em X . Logo $P(W) \subset P(B[0, r])$. Mas $P(B[0, r]) = r^m P(B_X)$. Seja $x \in W$ e $\epsilon > 0$, como $\frac{x}{r} \in B_X$ e $P|_{B_X}: B_X \rightarrow Y$ é fracamente contínuo existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tal que $\|P(\frac{x}{r}) - P(y)\| < \epsilon \cdot r^m$ sempre que $|\phi_i(\frac{x}{r} - y)| < \delta$ com $y \in B_X$ e $i = 1, \dots, n$. Tomando $\delta' = r\delta$ temos que se $|\phi_i(x - z)| < \delta'$ com $x, z \in W$, para cada $i = 1, \dots, n$. Logo $\frac{1}{r} |\phi_i(x - z)| < \frac{1}{r} \delta'$, ou seja, $|\phi_i(\frac{x}{r} - \frac{z}{r})| < \delta$, onde $\frac{x}{r}, \frac{z}{r} \in B_X$, assim, por hipótese, $\|P(\frac{x}{r}) - P(\frac{z}{r})\| < r^m \epsilon$. Mas $\|P(\frac{x}{r}) - P(\frac{z}{r})\| = \frac{1}{r^m} \|P(x) - P(z)\|$. Assim $\|P(x) - P(z)\| < \epsilon$ sempre que $|\phi_i(x - z)| < \delta'$ para $i = 1, \dots, n$ com $x, z \in W$. Portanto $P \in \mathcal{P}_w(mX; Y)$. ■

Proposição 2.5.6. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então $P \in \mathcal{P}_{wu}(mX; Y)$ se e somente se $P|_{B_X}: B_X \rightarrow Y$ é fracamente uniformemente contínuo.*

Demonstração: Analogamente a proposição anterior. ■

A seguir, o nosso objetivo é estudar o fato de que o espaço $\mathcal{P}_w(mX; Y)$ coincide com o espaço $\mathcal{P}_{wu}(mX; Y)$, $m \geq 1$. Para isso, vamos trabalhar com a aplicação linear associada ao polinômio P . Tal aplicação será também importante no estudo de alguns resultados apresentados no capítulo 4.

Proposição 2.5.7. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(mX; Y)$. Seja $T_P: X \rightarrow \mathcal{L}_s(m-1X; Y)$ dada por:*

$$T_P(x)(x_2, \dots, x_m) = A(x, x_2, \dots, x_m),$$

onde A é a aplicação m -linear contínua simétrica associada ao polinômio P . Então T_P é linear e contínua.

Demonstração: Facilmente vemos que a aplicação T_P é linear, pois segue diretamente da multilinearidade da aplicação A .

Seja $x \in X$, então:

$$\|T_P(x)\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1; 2 \leq i \leq m} \|T_P(x)(x_2, \dots, x_m)\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1; 2 \leq i \leq m} \|A(x, x_2, \dots, x_m)\|.$$

Mas $\|A(x, x_2, \dots, x_m)\| \leq \|A\| \|x\| \|x_2\| \dots \|x_m\|$. Então $\|T_P(x)\| \leq \|A\| \|x\|$. Portanto T_P é contínua. ■

Observação: A aplicação linear T_P definida acima é denominada de *aplicação linear associada ao polinômio P* . Como A é única então T_P também é única.

O próximo teorema foi demonstrado por Aron, Hervés & Valdivia em [4]. Ele nos dá uma relação entre os polinômios fracamente contínuos com a sua aplicação linear associada.

Teorema 2.5.8. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Seja $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ e seja $T_P : X \rightarrow \mathcal{L}_s(^{m-1} X; Y)$ a aplicação linear associada ao polinômio P . Então $P \in \mathcal{P}_w(^m X; Y)$ se e somente se T_P é compacto.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $P \in \mathcal{P}_w(^m X; Y)$. Pela proposição 1.2.31 basta mostrar que T_P é fracamente contínua sobre os limitados de X .

Sejam $W \subset X$ limitado, $x \in W$ e $\epsilon > 0$. Como $P \in \mathcal{P}_w(^m X; Y)$ existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tal que $\|P(x) - P(y)\| < \frac{m!}{m^m} \epsilon$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $y \in W$ e $i = 1, \dots, n$. Sejam A a aplicação m -linear simétrica associada ao polinômio P e $z_2, \dots, z_m \in W$, pela fórmula da Polarização temos

$$\begin{aligned} [T_P(x) - T_P(y)](z_2, \dots, z_m) &= A(x, z_2, \dots, z_m) - A(y, z_2, \dots, z_m) \\ &= \frac{m^m}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \left[P\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) - P\left(\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) \right]. \end{aligned}$$

Como, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\phi_i\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} - \frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) = \phi_i\left(\frac{\epsilon_1}{m}(x - y)\right)$$

então

$$\left| \phi_i\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} - \frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) \right| = \frac{1}{m} |\phi_i(x - y)|.$$

Logo, tomando $\delta^* = m\delta$ se $y \in W$ é tal que $|\phi_i(x - y)| < \delta^*$ para cada $i = 1, \dots, n$, temos que

$$\left| \phi_i\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} - \frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) \right| < \delta,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, logo

$$\begin{aligned} \|T_P(x) - T_P(y)\| &\leq \\ \frac{m^m}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \left\| P\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) - P\left(\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) \right\| \end{aligned}$$

$$< \frac{m^m}{m!2^m} 2^m \frac{1}{m^m} m! \epsilon = \epsilon.$$

Assim, $\|T_P(x) - T_P(y)\| < \epsilon$.

Desta maneira, T_P é fracamente contínua. Portanto T_P é compacta.

($\Leftarrow$) Sejam $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ e A a aplicação m-linear simétrica contínua associada ao polinômio P . Vamos supor que T_P é compacto e provemos que P é fracamente contínuo sobre os limitados. Pela proposição 2.5.5, basta mostrar que P é fracamente contínua em B_X . Sejam $x \in B_X$ e $\epsilon > 0$. Como T_P é compacto, então pelo teorema 1.2.31, T_P é fracamente contínuo sobre B_X , logo existem $\delta > 0$ e $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ tal que $\|T_P(x) - T_P(y)\| < \frac{\epsilon}{m}$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $y \in B_X$. Mas

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\| &= \|A(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - A(y, \overset{(m)}{\cdot}, y)\| \\ &\leq \|A(x - y, x, \overset{(m-1)}{\cdot}, x)\| + \|A(x, x - y, x, \overset{(m-2)}{\cdot}, x)\| \\ &\quad + \dots + \|A(y, \overset{(m-1)}{\cdot}, y, x - y)\|. \end{aligned}$$

Como A é simétrica, então

$$\begin{aligned} A(x, \dots, x - y, x, \dots, x) &= T_P(x - y)(x, \dots, x, y, \dots, y) \\ &= (T_P(x) - T_P(y))(x, \dots, x, y, \dots, y). \end{aligned}$$

Assim, se $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $y \in B_X$ para todo $i = 1, \dots, n$, temos que

$$\|P(x) - P(y)\| < \frac{m\epsilon}{m} = \epsilon.$$

Logo P é fracamente contínua sobre B_X . Portanto $P \in \mathcal{P}_w(^m X; Y)$. ■

Corolário 2.5.9. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mathcal{P}_{wu}(^m X; Y) = \mathcal{P}_w(^m X; Y).$$

Demonstração: A inclusão $\mathcal{P}_{wu}(^m X; Y) \subset \mathcal{P}_w(^m X; Y)$ é imediata.

Sejam $P \in \mathcal{P}_w(^m X; Y)$ e T_P a aplicação linear associada ao polinômio P . Pelo teorema 2.5.8 temos que T_P é compacta, logo pelo teorema 1.2.31 temos que T_P é fracamente uniformemente contínua sobre os limitados. Assim dado $\epsilon > 0$ existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ e $\delta > 0$ tal que $\|T_P(x) - T_P(y)\| < \frac{\epsilon}{m}$ sempre que $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $x, y \in B_X$ e $i = 1, \dots, n$. Seja A a aplicação m-linear simétrica contínua associada ao polinômio P , então:

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \|A(x, x - y, x, \overset{(m-2)}{\cdot}, x)\| + \dots + \|A(y, \overset{(m-1)}{\cdot}, y, x - y)\|.$$

Como A é simétrica, então:

$$\begin{aligned} A(x, \dots, x - y, x, \dots, x) &= T_P(x - y)(x, \dots, x, y, \dots, y) \\ &= (T_P(x) - T_P(y))(x, \dots, x, y, \dots, y). \end{aligned}$$

Assim, se $|\phi_i(x - y)| < \delta$ com $x, y \in B_X$ para todo $i = 1, \dots, n$, temos que $\|P(x) - P(y)\| < \frac{m\epsilon}{m} = \epsilon$. Logo P é fracamente uniformemente contínuo sobre B_X . Portanto $\mathcal{P}_{wu}(^m X; Y) = \mathcal{P}_w(^m X; Y)$. ■

Proposição 2.5.10. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mathcal{P}_{wu}(^m X; Y) \subset \mathcal{P}_{wsc}(^m X; Y).$$

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}_{wu}(^m X; Y)$ e $(x_n)_n \subset X$ uma sequência fracamente convergente para x . Assim $W = \{x_n, x : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado em X e consequentemente $P|_W$ é fracamente uniformemente contínuo. Logo dado $\epsilon > 0$ existem $\phi_1, \dots, \phi_k \in X^*$ e $\delta > 0$ tais que $\|P(y) - P(z)\| < \epsilon$ sempre que $|\phi_i(y - z)| < \delta$ ($i = 1, \dots, k$) e $y, z \in W$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$, para cada $i = 1, \dots, k$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi_i(x_n) - \phi_i(x)| < \delta$ para todo $n \geq n_i$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ temos que para cada $i = 1, \dots, k$, $|\phi_i(x_n) - \phi_i(x)| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $\|P(x_n) - P(x)\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(x)$. ■

No próximo exemplo, mostramos que nem sempre vale a igualdade.

Exemplo 2.5.11. *Seja $P \in \mathcal{P}(^2 l_1)$ ou $P \in \mathcal{P}(^2 l_2)$ dado por:*

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Afirmamos que:

1. $P \notin \mathcal{P}_{wsc}(^2 l_2)$.
2. $P \in \mathcal{P}_{wsc}(^2 l_1)$.
3. $P \notin \mathcal{P}_{wu}(^2 l_1)$.

De fato: (1) Seja $(e_j)_j$ a base canônica de l_2 , então $e_j \xrightarrow{w} 0$. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que $P(e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{jn}^2 = 1^2 = 1$. Portanto $P \notin \mathcal{P}_{wsc}(^2 l_2)$.

(2) Sejam $x \in X$ e $(x_n)_n \subset l_1$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Como l_1 é Schur então

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e conseqüentemente $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(x)$. Portanto $P \in \mathcal{P}_{wsc}(^2l_1)$.

(3) Seja $(e_j)_j$ a base canônica de l_1 e considere a sequência $\left(\frac{1}{2}e_j\right)_j$. Então

$e_j - \frac{1}{2}e_j = \frac{1}{2}e_j \xrightarrow{\omega} 0$. Para cada $\delta > 0$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset l_1^*$ finita, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k = 1, \dots, n$, $|\phi_k(e_j) - \phi_k(\frac{1}{2}e_j)| < \delta$ para todo $j \geq n_0$. Agora, para a bola unitária fechada B_{l_1} , tomando $\epsilon = \frac{1}{4}$ temos que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$|P(e_j) - P(\frac{1}{2}e_j)| = \left|1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right| = \frac{3}{4} \geq \epsilon$, ou seja, P não uniformemente contínuo sobre B_{l_1} . Portanto $P \notin \mathcal{P}_{wu}(^2l_1)$.

Definição 2.5.12. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$. Dizemos que P é um **polinômio de tipo finito** se P é uma combinação linear finita da coleção de funções*

$$\{\phi^m \otimes y : \phi \in X^*, y \in Y\}$$

onde para cada $x \in X$, $(\phi^m \otimes y)(x) = \phi^m(x) \cdot y$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_f(^mX; Y)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mX; Y)$ formado pelos polinômios m -homogêneos de tipo finito. E $\mathcal{P}_f(X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios contínuos de tipo finito, ou seja,

$$\mathcal{P}_f(X; Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_f(^mX; Y)$$

Exemplos 2.5.13. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, sejam $P : l_2 \rightarrow \mathbb{K}$ e $Q : l_2 \rightarrow \mathbb{K}$ dados por:*

$$P(x) = \sum_{j=1}^m x_j^2 \quad e \quad Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$$

para cada $x = (x_j)_j \in l_2$. Afirmamos que P é um polinômio de tipo finito e Q não é de tipo finito.

De fato: Para cada $j = 1, \dots, m$ seja $f_j \in l_2^*$ dado por $f_j(x) = f_j((x_i)_i) = x_j$ para cada $x = (x_i)_i \in l_2$. Assim,

$$P(x) = \sum_{j=1}^m x_j^2 = \sum_{j=1}^m f_j^2(x)$$

Portanto P é um polinômio de tipo finito.

De maneira análoga ao item (3) do exemplo 2.5.11 temos que Q não é fracamente uniformemente contínuo em B_{l_2} , ou seja, $Q \notin \mathcal{P}_{wu}({}^2l_2)$. Como l_2^* tem a propriedade da aproximação segue de [[4], corolário 2.11] que $Q \notin \mathcal{P}_f({}^2l_2)$. Portanto Q não é um polinômio de tipo finito. ■

Um dos primeiros resultados relacionando polinômios (ou aplicações multilineares) com as propriedades de convergência fraca de sequências foi feito por Littlewood em [26], onde ele mostrou que toda aplicação bilinear limitada $A : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ é aproximável por aplicações de tipo finito. Estes resultados foram estendidos por Bogdanowzki e Pelczynski para aplicações m -lineares, para cada $m \geq 1$. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.5.14. *Seja $m \in \mathbb{N}$ então o subespaço $\mathcal{P}_f({}^m c_0)$ é denso no espaço $\mathcal{P}({}^m c_0)$.*

É conhecido como teorema de *Littlewood-Bogdanowzki-Pelczynski*. A demonstração do teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [17].

Capítulo 3

Propriedade P

3.1 Introdução

Neste capítulo temos por objetivo estudar uma propriedade que foi introduzida por Aron, Choi & Llavona em [2] denominada de **propriedade P**. No desenvolvimento do trabalho, vamos estudar as relações da **propriedade P** com outras propriedades de espaços de Banach, tais como: propriedade de Schur, Dunford-Pettis e polinomialmente Schur. Também apresentamos exemplos de espaços de Banach que possuam a **propriedade P** e um exemplo de um espaço de Banach que não possui tal propriedade.

As propriedades Dunford-Pettis e polinomialmente Schur foram estudadas por Diestel [14] e Farmer & Johnson [16], Ryan [29] respectivamente. Estas propriedades também foram tema de dissertação de mestrado de Adriana J. Hissadomi [21], e este é um texto que estudamos e vamos utilizá-lo como referência para as demonstrações dos resultados citados.

A seguir apresentamos as definições de tais resultados e principais teoremas que vamos utilizar neste nosso trabalho.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é um espaço polinomialmente Schur se para cada sequência $(x_n)_n$ em X com $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(X)$ temos que $\|x_n\| \rightarrow 0$.*

A seguir vamos dar alguns exemplos de espaços que são polinomialmente Schur e espaços que não são.

Exemplos 3.1.2. 1. Os espaços c_0 , l_∞ , $L_1[0, 1]$ e $L_\infty[0, 1]$ não são polinomialmente Schur.

2. Para p , $1 \leq p < \infty$, l_p é polinomialmente Schur.

3. Para q , $2 \leq q < \infty$, $L_q[0, 1]$ é polinomialmente Schur.

4. Seja X um espaço de Banach. Se X é de tipo não-trivial então X é polinomialmente Schur.

As demonstrações de que os espaços descritos nos itens 1, 2 e 3 são (ou não são) polinomialmente Schur se encontram em Hissadomi, [21] pgs 103 e 120, 110 e 113 respectivamente. E a afirmação 4 foi demonstrada por Farmer & Jonshon em [16].

Definição 3.1.3. (Dunford-Pettis)

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade Dunford-Pettis se dado qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear fracamente compacta

$A : X \longrightarrow Y$ A aplica sequências fracamente Cauchy de X em sequências de Cauchy em Y .

Proposição 3.1.4. *Seja X um espaço de Banach.*

1. *Se X é reflexivo então X tem a propriedade Dunford-Pettis se e somente se $\dim X < \infty$.*
2. *Se X é Schur então X tem a propriedade Dunford-Pettis.*

Demonstração: Ver corolários 3.4 e 3.6, pgs 63 e 64 respect/, de Hissadomi, [21]. ■

Teorema 3.1.5. *Seja X um espaço de Banach. Então X é Schur se e somente se X tem a propriedade Dunford-Pettis e é polinomialmente Schur.*

Demonstração: Ver teorema 4.19, pg 120, de Hissadomi, [21]. ■

Apresentamos agora alguns exemplos de espaços que têm a propriedade Dunford-Pettis e espaços que não a possuem.

Exemplos 3.1.6. 1. Os espaços c_0 , l_1 , l_∞ , $L_\infty[0, 1]$, $L_1[0, 1]$, $L_1[0, 2\pi]$ e $C[0, 1]$ têm a propriedade Dunford-Pettis.

2. Para $1 < p < \infty$, os espaços l_p e $L_p[0, 1]$ não têm a propriedade Dunford-Pettis.

As demonstrações de (1) e (2) se encontram em Hissadomi, [21].

Proposição 3.1.7. *Seja X um espaço de Banach com a propriedade Dunford-Pettis. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *Todo polinômio contínuo $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ é fracamente sequencialmente contínuo, isto é, $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_{wsc}(X)$.*
2. *Para cada $r \geq 1$, se para cada par de seqüências $(P_n)_n \subset \mathcal{P}({}^r X)$ e $(x_n)_n \subset X$, com $P_n \xrightarrow{\omega} 0$ e $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(X)$, temos que $P_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Demonstração: Para 1) ver Hissadomi, [21] corolário 3.46 e para 2) ver [8]. ■

3.2 Propriedade P

A motivação que originou a definição da **propriedade P** é a seguinte:

Sejam X, Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde B_X, B_Y são as bolas unitárias fechadas de X e Y respectivamente, e $g : B_X \rightarrow B_Y$ uma função que satisfaz a seguinte propriedade $(\star)$:

$(\star)$ Para qualquer polinômio contínuo $P : Y \rightarrow \mathbb{K}$, $P \circ g : B_X \rightarrow \mathbb{K}$ é uniformemente contínua.

Seria g necessariamente uniformemente contínua ?

Se g satisfaz $(\star)$, Aron, Choi & Llavona, no artigo [2], observaram que o problema tem resposta positiva se a seguinte condição é satisfeita:

$(\star\star)$: Dados duas seqüências limitadas $(u_n)_n, (v_n)_n$ em Y , se $|P(u_n) - P(v_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(Y)$ segue que $\|u_n - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Mostramos tal observação na seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde B_X, B_Y são as bolas unitárias fechadas de X e Y respectivamente, e $g : B_X \rightarrow B_Y$ uma função tal que satisfaz a propriedade $(\star)$. Se Y satisfaz a propriedade $(\star\star)$ então g é uniformemente contínua.*

Demonstração: Sejam $(x_n)_n, (y_n)_n$ sequências em B_X tais que $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Como g satisfaz a propriedade $(\star)$ então do teorema 1.2.29 segue que para cada $P \in \mathcal{P}(Y)$, $|P(g(x_n)) - P(g(y_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Por hipótese, Y satisfaz $(\star\star)$, então $\|g(x_n) - g(y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e consequentemente, pelo teorema 1.2.29, temos que g é uniformemente contínua. ■

No que segue vamos apresentar uma proposição que nos fornece um exemplo de uma função g que não é uniformemente contínua, mas que $P \circ g$ é uniformemente contínua para todo polinômio. Na demonstração da proposição vamos usar o fato de que o espaço $\mathcal{P}_f(m_{c_0})$ é denso no espaço $\mathcal{P}(m_{c_0})$, $m \geq 1$ (ver teorema 2.5.14).

Proposição 3.2.2. *Seja $g : B_{c_0} \rightarrow B_{c_0}$ a função dada por*

$$g(x) = g((x_n)) = (x_n^n) \quad \text{para cada } x = (x_n) \in c_0.$$

Então valem as seguintes afirmações:

1. *A função g não é uniformemente contínua.*
2. *Para quaisquer duas sequências $(u_j)_j, (v_j)_j \in B_{c_0}$ com $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ temos que $g(u_j) - g(v_j) \xrightarrow{\omega} 0$. Além disso, $f^p \circ g(u_j) - f^p \circ g(v_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $f \in c_0^*$ e cada $p \geq 2$.*
3. *A função g satisfaz a condição $(\star)$.*

Demonstração: (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja e_n o n -ésimo elemento da base canônica de c_0 , então temos que:

As sequências $(e_n)_n, ((1 + \frac{1}{n})e_n)_n$ são limitadas e

$$\left\| e_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n \right\| = \left\| \frac{1}{n} e_n \right\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left\| g(e_n) - g\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)e_n\right) \right\| = \sup_n \left\| (\delta_{in}^i)_i - \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\delta_{in}^i\right)_i \right\|.$$

Assim,

$$\left\| g(e_n) - g\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)(e_n)\right) \right\| = \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right|.$$

Como $(1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$, então

$$\left\| g(e_n) - g\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)(e_n)\right) \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |1 - e| > 0.$$

Portanto g não é uniformemente contínua.

(2) Sejam $f \in c_0^*$ e $(u_j)_j, (v_j)_j \in B_{c_0}$ tais que $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como $c_0^* \cong l_1$, $f = (f_1, f_2, \dots) \in l_1$, $f((x_l)_l) = \sum_{l=1}^{\infty} x_l f_l$ para cada $(x_l)_l \in c_0$ e $\sum_{l=1}^{\infty} |f_l| < \infty$, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f_l| < M$ para cada $l \in \mathbb{N}$ e para $\epsilon > 0$ existe $n_f \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n_f+1}^{\infty} |f_k| < \frac{\epsilon}{4}$. Considere $\epsilon^* = \frac{\epsilon}{M n_f(n_f+1)}$, como $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_j - v_j\| < \epsilon^*$ para cada $j \geq j_0$. Se denotarmos $u_j = (u_{jk})_k, v_j = (v_{jk})_k$, temos que $|u_{jk} - v_{jk}| < \epsilon^*$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $j \geq j_0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, valem as seguintes desigualdades:

$$|f(g(u_j)) - f(g(v_j))| \leq \sum_{k=1}^{n_f} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \cdot |f_k| + \sum_{k=n_f+1}^{\infty} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \cdot |f_k|$$

$$\text{e} \quad \sum_{k=1}^{n_f} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \cdot |f_k| \leq M \sum_{k=1}^{n_f} |u_{jk}^k - v_{jk}^k|.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{jk}^k - v_{jk}^k| = |u_{jk} - v_{jk}| \cdot |u_{jk}^{k-1} + u_{jk}^{k-2} v_{jk} + \dots + v_{jk}^{k-1}|.$$

Por hipótese, $u_j \in B_{c_0}$ e $v_j \in B_{c_0}$, logo para cada $j \geq j_0$,

$$M \sum_{k=1}^{n_f} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \leq M \sum_{k=1}^{n_f} k |u_{jk} - v_{jk}| < M \frac{n_f(n_f+1)}{2} \cdot \epsilon^* = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{e} \quad \sum_{k=n_f+1}^{\infty} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \cdot |f_k| \leq \sup_{n_f+1 \leq k \leq \infty} |u_{jk}^k - v_{jk}^k| \sum_{k=n_f+1}^{\infty} |f_k| < 2 \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para cada $j \geq j_0$,

$$|f(g(u_j)) - f(g(v_j))| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $g(u_j) - g(v_j) \xrightarrow{\omega} 0$.

Agora como para cada $f \in c_0^*$, cada $p \geq 2$ e cada $j \in \mathbb{N}$ temos que:

$$f^p \circ g(u_j) - f^p \circ g(v_j) =$$

$$\left[f(g(u_j)) - f(g(v_j)) \right] \cdot \left[f^{p-1}(g(u_j)) + f^{p-2}(g(u_j))f(g(v_j)) + \dots + f^{p-1}(g(v_j)) \right],$$

e $g(u_j), g(v_j) \in B_{c_0}$, segue que

$$|f^p \circ g(u_j) - f^p \circ g(v_j)| \leq p \cdot \|f\|^{p-1} |f(g(u_j)) - f(g(v_j))|.$$

Consequentemente $f^p \circ g(u_j) - f^p \circ g(v_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para todo $f \in c_0^*$, uma vez que $g(u_j) - g(v_j) \xrightarrow{\omega} 0$.

(3) Seja $P : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ um polinômio contínuo. Vamos mostrar que $P \circ g$ é uniformemente contínua, isto é, se $(u_j)_j$ e $(v_j)_j$ são sequências em B_{c_0} tais que $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, vamos provar que $|P \circ g(u_j) - P \circ g(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Por definição de polinômio, existem $m \in \mathbb{N}$ e $P_r \in \mathcal{P}(^r c_0)$, $r = 0, 1, \dots, m$, tais que

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_m \quad (3.1)$$

Para cada $P_r \in \mathcal{P}(^r c_0)$ existe uma sequência $(P_i)_i \subset \mathcal{P}_f(^r c_0)$ tal que $P_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} P_r$, uma vez que o espaço $\mathcal{P}_f(^r c_0)$ é denso no espaço $\mathcal{P}(^r c_0)$ (ver teorema 2.5.14). Assim, para $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{n_0} - P_r\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Como $P_{n_0} \in \mathcal{P}_f(^r c_0)$, segue que $P_{n_0}(x) = \sum_{s=1}^{t_{n_0}} \lambda_s f_s^r(x)$, com $\lambda_s \in \mathbb{K}$, $f_s \in c_0^*$ para cada $s = 1, \dots, t_{n_0}$ e para cada $x \in c_0$. Agora por (2) segue que $f_s^r \circ g(u_j) - f_s^r \circ g(v_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $f_s \in c_0^*$ e $s = 1, \dots, t_{n_0}$. Consequentemente,

$$P_{n_0} \circ g(u_j) - P_{n_0} \circ g(v_j) = \sum_{s=1}^{t_{n_0}} \lambda_s \left[(f_s^r \circ g)(u_j) - (f_s^r \circ g)(v_j) \right] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \quad (3.2)$$

isto é, existe $j_{n_0} \in \mathbb{N}$ tal que $|P_{n_0}(g(u_j)) - P_{n_0}(g(v_j))| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $j \geq j_{n_0}$. Como $|P_r(g(u_j)) - P_r(g(v_j))| =$

$$|P_r(g(u_j)) - P_{n_0}(g(u_j)) + P_{n_0}(g(u_j)) - P_r(g(v_j)) - P_{n_0}(g(v_j)) + P_{n_0}(g(v_j))|$$

$$\leq |P_{n_0}(g(u_j)) - P_r(g(u_j))| + |P_{n_0}(g(v_j)) - P_r(g(v_j))| + |P_{n_0}(g(u_j)) - P_{n_0}(g(v_j))|$$

temos que $|P_r(g(u_j)) - P_r(g(v_j))| \leq \epsilon$ para cada $j \geq j_{n_0}$, uma vez que vale 3.2 e

$$|P_{n_0}(g(u_j)) - P(g(u_j))| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{e } |P_{n_0}(g(v_j)) - P(g(v_j))| < \frac{\epsilon}{3},$$

pelo fato de $\|g(u_j)\| \leq 1$ e $\|g(v_j)\| \leq 1$. Logo,

$$|P_r(g(u_j)) - P_r(g(v_j))| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (3.3)$$

Seja $\delta > 0$. Como a demonstração não dependeu do grau de homogeneidade de P_r , temos que para cada $r \in \{0, \dots, m\}$, de 3.3 existe $j_r \in \mathbb{N}$ tal que $|P_r(g(u_j)) - P_r(g(v_j))| \leq \frac{\delta}{m+1}$

para cada $j \geq j_r$. Seja $\hat{j} = \max\{j_0, \dots, j_m\}$. Para cada $j \geq \hat{j}$, de 3.1 temos que:

$$\begin{aligned} & |P(g(u_j)) - P(g(v_j))| = \\ & |P_0(g(u_j)) - P_0(g(v_j)) + P_1(g(u_j)) - P_1(g(v_j)) + \dots + P_m(g(u_j)) - P_m(g(v_j))| \\ & \leq |P_0(g(u_j)) - P_0(g(v_j))| + \dots + |P_m(g(u_j)) - P_m(g(v_j))| \\ & \leq \frac{\delta}{m+1} + \binom{m}{1} \frac{\delta}{m+1} = \delta, \end{aligned}$$

logo $|P(g(u_j)) - P(g(v_j))| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto $P \circ g$ é uniformemente contínua. ■

Para poder determinar sob que condições os espaços de Banach têm a *propriedade* $(\star\star)$, Aron, Choi & Llavana em [2] introduziram a seguinte propriedade mais fraca que $(\star\star)$:

Definição 3.2.3. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade **P**, se para quaisquer duas seqüências limitadas $(u_j)_j, (v_j)_j$ em X tais que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}({}^n X)$ $|P(u_j) - P(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ segue que $|Q(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $m \geq 1$ e cada $Q \in \mathcal{P}({}^m X)$.*

A seguir vamos apresentar os resultados estudados abordando as referidas propriedades. Tais resultados foram demonstrados por Aron, Choi & Llavana em [2].

Teorema 3.2.4. *Seja X um espaço de Banach. Considere as seguintes afirmações:*

- (a) X tem a propriedade $(\star\star)$.
- (b) X é polinomialmente Schur.
- (c) X tem a propriedade Dunford-Pettis.
- (d) X tem a propriedade **P**.

Então temos as seguintes implicações: (a) $\Rightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (d), (c) $\Rightarrow$ (d) e (b) e (d) $\Rightarrow$ (a).

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $(x_j)_j$ uma sequência em X tal que para cada $m \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}^m(X)$ temos que $P(x_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Assim, $x_j \xrightarrow{\omega} 0$, e consequentemente $(x_j)_j$ é limitada. Agora como para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$|P(x_j)| = |P(x_j) - P(0)|,$$

e X tem a propriedade $(\star\star)$ então $\|x_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X é polinomialmente Schur.

(a) $\Rightarrow$ (d)

Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ sequências limitadas em X . Suponhamos que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}^n(X)$ temos que $|P(u_j) - P(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como X tem a propriedade $(\star\star)$ então $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}^m(X)$, como Q é contínua então $|Q(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X tem a **propriedade P**.

(c) $\Rightarrow$ (d)

Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ sequências limitadas em X tais que para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $P \in \mathcal{P}^m(X)$, $|P(u_j) - P(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Em particular para $m = 1$ e cada $f \in \mathcal{P}^1(X) = X^*$, $|f(u_j) - f(v_j)| = |f(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, ou seja, $u_j - v_j \xrightarrow{\omega} 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}^n(X)$. Como $u_j - v_j \xrightarrow{\omega} 0$ e X tem a propriedade Dunford-Pettis, então pela proposição 3.1.7(1) temos que $|Q(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X tem a **propriedade P**.

[(b) e (d)] $\Rightarrow$ (a)

Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ sequências limitadas em X tais que para cada $P \in \mathcal{P}(X)$, $|P(u_j) - P(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como X tem a **propriedade P** então para cada $n \in \mathbb{N}$, e cada $Q \in \mathcal{P}^n(X)$ temos que $|Q(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, logo $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, pois X é polinomialmente Schur. Portanto X satisfaz a propriedade $(\star\star)$. ■

Corolário 3.2.5. *Sejam X, Y espaços de Banach com B_X, B_Y as bolas unitárias fechadas de X e Y respectivamente. Seja $g : B_X \rightarrow B_Y$ uma função que verifica a propriedade $(\star)$. Se Y é um espaço polinomialmente Schur e tem a **propriedade P**, então g é uniformemente contínua.*

Demonstração: Pelo teorema acima, temos que Y tem a propriedade $(\star\star)$. Logo, pelo teorema 3.2.1, g é uniformemente contínua. ■

Corolário 3.2.6. *Seja X um espaço de Banach. Se X é Schur então X tem a propriedade $(\star\star)$.*

Demonstração: Suponhamos que X é Schur, então pelo teorema 3.1.5 X é polinomialmente Schur e tem a propriedade Dunford-Pettis. Logo, pelo teorema 3.2.4 temos que

X tem a propriedade **P**, e assim, X tem a propriedade $(\star\star)$. ■

Exemplo 3.2.7. O espaço l_1 tem a propriedade $(\star\star)$, pois l_1 é Schur.

Exemplos 3.2.8. Os espaços c_0 , l_1 , l_∞ , $L_\infty[0, 1]$, $L_1[0, 1]$, $L_1[0, 2\pi]$ e $C[0, 1]$ têm a propriedade **P** uma vez que têm a propriedade Dunford-Pettis. A demonstração de que tais espaços têm a propriedade Dunford-Pettis pode ser encontrada em [21].

A seguir apresentamos alguns exemplos de espaços de Banach, os quais nos mostram que as únicas relações entre as afirmações (a), (b), (c) e (d) do teorema 3.2.4 são as fornecidas pelo mesmo.

Exemplos 3.2.9. Os espaços $L_1[0, 1]$, c_0 , l_∞ e $L_\infty[0, 1]$ não satisfazem a propriedade $(\star\star)$, pois não são polinomialmente Schur (ver por exemplo [21]). Assim, (d) não implica (a) no teorema 3.2.4, pois estes espaços têm a propriedade **P**.

No teorema 3.2.4 a hipótese (d) não implica (c), pois os espaços l_p e $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, não são Dunford-Pettis, e a seguir vamos estudar resultados que garantem que estes espaços têm a propriedade **P**.

Definição 3.2.10. Dizemos que um espaço de Banach X pertence a classe W_p , $1 < p < \infty$, quando cada sequência limitada $(x_n)_n \subset X$ admite uma subsequência $(x_{n_k})_k$ fracamente p -convergente, isto é, existe $x \in X$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^*(x_{n_k} - x)\|^p < \infty$ para todo $x^* \in X^*$.

O próximo teorema foi demonstrado por Aron, Choi & Llavona, em [2].

Teorema 3.2.11. Seja X um espaço de Banach tal que $X^* \in W_p$ para algum $p \in (1, \infty)$. Então X tem a propriedade $(\star\star)$, e consequentemente a propriedade **P**.

Demonstração: Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências limitadas em X tais que para cada $P \in \mathcal{P}(X)$ temos que $\|P(x_n) - P(y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\|x_n - y_n\| \not\rightarrow 0$, então existem $\delta > 0$ e subsequências de $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, que vamos denotar, sem perda de generalidade, por $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ respectivamente, tais que $\|x_n - y_n\| > \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, a subsequência $(x_n - y_n)_n$ converge fracamente a zero, assim pelo teorema Bessaga-Pelczynski (1.2.32), admite uma subsequência básica, que vamos

denotar por $(x_n - y_n)_n$ (daqui em diante, nesta demonstração, vamos trabalhar com esta sequência). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam $z_n = x_n - y_n$ e Z o subespaço fechado de X gerado pela sequência $(z_n)_n$. Seja $(z_n^*)_n \subset Z^*$ os coeficientes funcionais associados a sequência $(z_n)_n$. Assim pelo teorema 1.2.14, para cada $n \in \mathbb{N}$, z_n^* é um funcional limitado em Z^* , logo pelo teorema de Hahn-Banach (1.2.6), existe $\hat{z}_n^* \in X^*$ tal que

$$\|z_n^*\| = \|\hat{z}_n^*\|. \quad (3.4)$$

Como $\inf_n \|z_n\| > 0$ então, pelo teorema 1.2.14, $(\hat{z}_n^*)_n$ é limitada em X^* . Agora, por hipótese, $X^* \in W_p$ então existem $y^* \in X^*$ e uma subsequência de $(\hat{z}_n^*)_n$, que vamos denotar por $(\hat{z}_{n_j}^*)_j$, tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x^{**}(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)|^p < \infty \quad \text{para cada } x^{**} \in X^{**}. \quad (3.5)$$

Como para cada $x \in X$, a função $J_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ dada por: $J_x(y^*) = y^*(x)$ para cada $y^* \in X^*$, pertence a X^{**} , segue que para cada $x \in X$, $\sum_{j=1}^{\infty} |J_x(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)|^p < \infty$. Mas

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |J_x(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)|^p &= \sum_{j=1}^{\infty} |(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x)|^p. \text{ Logo} \\ \sum_{j=1}^{\infty} |(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x)|^p &< \infty \quad \text{para cada } x \in X. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, para $\epsilon > 0$ e cada $x \in X$, temos que existe $j_x \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=j_x}^{\infty} |(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x)|^p < \epsilon^p$.

Logo $|(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x)|^p < \epsilon^p$ para cada $j \geq j_x$, ou seja,

$$\text{para cada } x \in X, \quad (\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x) \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Agora, para cada $z \in Z$, existe uma única sequência de escalares $(a_n)_n$ tal que $z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$, uma vez que $(z_n)_n$ é base para Z . Tal sequência $(a_n)_n \in l_1$, isto segue da unicidade de $(a_n)_n$ e do teorema de Banach-Mazur (1.2.2) que garante a existência de uma aplicação linear, contínua e sobrejetora $T : l_1 \rightarrow Z$ dada por: $T((\alpha_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n$. Como para cada $j \in \mathbb{N}$

$$|\hat{z}_{n_j}^*(z)| = \left| \hat{z}_{n_j}^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \hat{z}_{n_j}^*(z_i) \right| = |a_{n_j}|, \quad \text{então}$$

$$\hat{z}_{n_j}^*(z) \rightarrow 0 \quad \text{para cada } z \in Z. \quad (3.8)$$

Assim, por 3.7 e 3.8 temos que $y^*(z) = 0$ para cada $z \in Z$.

Considere $m \in \mathbb{N}$ fixo, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos:

$$(\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x_m) - (\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(y_m) = \hat{z}_{n_j}^*(z_m) - y^*(z_m) = \delta_{n_j m} = \begin{cases} 1 & \text{se } n_j = m \\ 0 & \text{se } n_j \neq m \end{cases}. \quad (3.9)$$

A sequência $((\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x_{n_j}))_j$ é limitada em $\mathbb{K}$, onde os n_j s são os índices correspondentes aos índices da sequência $(\hat{z}_{n_j}^*)_j$, logo admite uma subsequência convergente, que vamos denotar por $((\hat{z}_{n_{j_l}}^* - y^*)(x_{n_{j_l}}))_l$, e digamos que $(\hat{z}_{n_{j_l}}^* - y^*)(x_{n_{j_l}}) \rightarrow a$ para algum $a \in \mathbb{K}$. A sequência $((\hat{z}_{n_{j_l}}^* - y^*)(y_{n_{j_l}}))_l$ é limitada em $\mathbb{K}$, onde os n_{j_l} s são os índices correspondentes aos índices da sequência $((\hat{z}_{n_{j_l}}^* - y^*)(x_{n_{j_l}}))_l$, logo admite uma subsequência convergente, que vamos denotar por $((\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(y_{n_{j_{l_s}}}))_s$, e digamos que

$$(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(y_{n_{j_{l_s}}}) \rightarrow b \quad \text{para algum } b \in \mathbb{K}. \quad (3.10)$$

Para os índices $n_{j_{l_s}}$ s, a sequência $((\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(x_{n_{j_{l_s}}}))_s$ é uma subsequência de $((\hat{z}_{n_{j_l}}^* - y^*)(x_{n_{j_l}}))_l$, logo

$$(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(x_{n_{j_{l_s}}}) \rightarrow a. \quad (3.11)$$

Afirmamos que $a \neq b$, pois

$$\begin{aligned} a - b &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(x_{n_{j_{l_s}}}) - (\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(y_{n_{j_{l_s}}}) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^*)(x_{n_{j_{l_s}}}) = 1, \end{aligned}$$

por 3.9. Assim, para cada número natural q ímpar temos que $|a^q - b^q| > 0$. Desta maneira, escolhendo um $q > p$ ímpar, temos que $|a^q - b^q| = R > 0$, $l_p \subset l_q$ e $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ logo,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| (\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(x) \right|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| (\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x) \right|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| (\hat{z}_{n_j}^* - y^*)(x) \right|^p < \infty,$$

ou seja, a série é absolutamente convergente para cada $x \in X$.

Assim, definindo $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$P(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^*)(x) \right]^q \quad \text{para cada } x \in X,$$

afirmamos que $P \in \mathcal{P}({}^qX)$. De fato: para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $P_k : X \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$P_k(x) = \sum_{s=1}^k \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(x) \right]^q \quad \text{para cada } x \in X.$$

Temos que $P_k \in \mathcal{P}({}^qX)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in X$, $P_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P(x)$. Logo, pelo teorema de Banach-Steinhaus para polinômios (teorema 2.4.8) temos que $P \in \mathcal{P}({}^qX)$.

Para cada $t \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \left| P(x_{n_{j_{l_t}}}) - P(y_{n_{j_{l_t}}}) \right| &= \left| \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(x_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q - \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(y_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q \right| \\ &= \left| \sum_{s=1}^{t-1} \left[\left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(x_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q - \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(y_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q \right] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{s=t+1}^{\infty} \left[\left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(x_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q - \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_s}}}^* - y^* \right)(y_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[\left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_t}}}^* - y^* \right)(x_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q - \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_t}}}^* - y^* \right)(y_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q \right] \right| \\ &= \left| \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_t}}}^* - y^* \right)(x_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q - \left[\left(\hat{z}_{n_{j_{l_t}}}^* - y^* \right)(y_{n_{j_{l_t}}}) \right]^q \right|. \end{aligned}$$

Logo, por 3.9, 3.10 e 3.11 temos que

$$\left| P(x_{n_{j_{l_t}}}) - P(y_{n_{j_{l_t}}}) \right| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} |a^q - b^q| = R > 0,$$

que contradiz a hipótese inicial. Portanto $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, para as sequências iniciais $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, ou seja, X tem a propriedade $(\star\star)$. Logo pelo teorema 3.2.4 X tem a propriedade P. ■

Corolário 3.2.12. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Se X é super-reflexivo então X tem a propriedade $(\star\star)$, e consequentemente a propriedade P.*

Demonstração: Seja X um espaço super-reflexivo de dimensão infinita. Pelo teorema 1.3.4 temos que $X^* \in W_p$ para algum $p > 1$. Logo, pelo teorema 3.2.11, temos que X tem a propriedade $(\star\star)$, e consequentemente, X tem a propriedade P. ■

Exemplo 3.2.13. *Os espaços l_p e $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, são super-reflexivos (ver exemplo 1.3.9), logo, pelo corolário acima, eles têm a propriedade $(\star\star)$ e consequentemente, têm a propriedade P.*

No próximo teorema vamos mostrar que a **propriedade P** é preservada por isomorfismos.

Teorema 3.2.14. *Sejam X, Y espaço de Banach. Se X tem a propriedade **P** e Y é isomorfo a X então Y tem a propriedade **P**.*

Demonstração: Sejam $(u_j)_j$ e $(v_j)_j$ seqüências limitadas em Y tais que para cada $m \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}^m(Y)$ temos que $\|P(u_j) - P(v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como Y é isomorfo a X , existe $T : Y \rightarrow X$ um isomorfismo. Assim, existem $(x_j)_j$ e $(y_j)_j$ seqüências limitadas em X tais que

$$(T(u_j))_j = (x_j)_j \quad \text{e} \quad (T(v_j))_j = (y_j)_j.$$

Agora, para cada $m \geq 1$ e cada $Q^* \in \mathcal{P}^m(X)$, pelo teorema 2.4.6, temos que $Q^* \circ T \in \mathcal{P}^m(Y)$, logo, por hipótese, $\|Q^* \circ T(u_j) - Q^* \circ T(v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como X tem a **propriedade P** então $\|Q(x_j - y_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}^n(X)$ e $n \geq 1$.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $P^* \in \mathcal{P}^N(Y)$. Vamos provar que $\|P^*(u_j - v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Para isso, definamos $R : X \rightarrow \mathbb{K}$ por $R(x) = (P^* \circ T^{-1})(x)$ para cada $x \in X$. Assim, pelo teorema 2.4.6, temos que $R \in \mathcal{P}^N(X)$, e conseqüentemente, temos que $\|R(x_j - y_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, ou seja, $\|(P^* \circ T^{-1})(x_j - y_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Mas para cada $j \in \mathbb{N}$, $\|(P^* \circ T^{-1})(x_j - y_j)\| = \|P^*(u_j - v_j)\|$. Logo, $\|P^*(u_j - v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto Y tem a **propriedade P**. ■

Na demonstração de que espaços de Banach com a propriedade Dunford-Pettis tem a **propriedade P** usamos fortemente a proposição 3.1.7(1). A seguir vamos estudar o fato de que espaços com propriedades mais fracas que a Dunford-Pettis têm a **propriedade P**, dentre elas, são os espaços onde cada polinômio é fracamente sequencialmente contínuo em um determinado ponto.

Teorema 3.2.15. *Seja X um espaço de Banach. Suponhamos que todo $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ é fracamente sequencialmente contínuo na origem. Então X tem a propriedade **P**.*

Demonstração: Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ seqüências limitadas em X tais que para cada $m \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}^m(X)$ temos que $\|P(u_j) - P(v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, logo $u_j - v_j \xrightarrow{\omega} 0$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $Q \in \mathcal{P}^n(X)$, como Q é fracamente sequencialmente contínuo na origem então $\|Q(u_j - v_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X tem a **propriedade P**. ■

Por outro lado, o espaço l_2 tem a **propriedade P** e o polinômio 3-homogêneo Q dado por:

$$Q((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$$

com $(x_n)_n \in l_2$, não é fracamente sequencialmente contínuo na origem, uma vez que para cada $j \in \mathbb{N}$, e_j é o j -ésimo elemento da base canônica de l_2 , temos que $e_j \xrightarrow{w} 0$, mas $|Q(e_j)| = 1 > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Do teorema, segue imediatamente:

Corolário 3.2.16. *Seja X um espaço de Banach. Suponhamos que $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_{wsc}(X)$ então X tem propriedade P.*

A seguir apresentamos mais um exemplo de um espaço que tem a **propriedade P** e não tem a Dunford-Pettis.

Em [31], Tsirelson descreveu um método de como construir uma classe de espaços com propriedades especiais. Não descrevemos aqui a construção de tais espaços, mas sim as propriedades que o espaço original de Tsirelson T^* possui. O espaço T^* é um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita, que não contém subespaços isomorfos a c_0 ou quaisquer l_p ($1 \leq p < \infty$).

Exemplo 3.2.17. *O espaço original de Tsirelson T^* tem a propriedade P, não tem Dunford-Pettis e não tem a propriedade $(\star\star)$.*

De fato: Alencar, Aron & Dineen em [1] provaram que cada polinômio contínuo sobre o espaço original de Tsirelson T^* é fracamente sequencialmente contínuo, logo, pelo corolário 3.2.16, T^* tem a **propriedade P**. Agora T^* não tem a propriedade Dunford-Pettis, pois não satisfaz a condição 1 da proposição 3.1.4.

Jaramillo & Prieto em [[23], proposição 1], mostraram que o espaço T^* não é polinomialmente Schur, logo, pelo teorema 3.2.4, T^* não tem a propriedade $(\star\star)$.

A seguir, o nosso objetivo é estudar resultados que garantem que os espaços de tipo não-trivial (definido no capítulo 1, seção 3) têm a **propriedade P**.

O próximo teorema foi demonstrado por Biström, Jaramillo & Lindström em [8].

Teorema 3.2.18. *Seja X um espaço de Banach tal que $l_1 \not\hookrightarrow X^*$ e X^* tem a propriedade S_p para algum p , $1 < p < \infty$. Então X tem a propriedade $(\star\star)$, e consequentemente, X tem a propriedade P.*

Demonstração: Sejam $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ seqüências limitadas em X tais que para cada $P \in \mathcal{P}(X)$ temos que $|P(x_n) - P(y_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Suponhamos que $\|x_n - y_n\| \not\rightarrow 0$, então existem $\epsilon > 0$ e subsequências de $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, que vamos denotar por $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ respectivamente, tais que $\|x_n - y_n\| > \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como a subsequência $x_n - y_n \xrightarrow{\omega} 0$, pelo teorema de Bessaga-Pelczynski (1.2.32), $(x_n - y_n)_n$ admite uma subsequência básica, que vamos denotar por $(x_n - y_n)_n$, a qual será usada daqui em diante nesta demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z_n = x_n - y_n$, logo $\|z_n\| \geq \epsilon$ e $z_n \xrightarrow{\omega} 0$. Sejam Z o subespaço fechado de X gerado por $(z_n)_n$ e $(z_n^*)_n$ a seqüência de funcionais associados a $(z_n)_n$. Pelo teorema 1.2.14, para cada $n \in \mathbb{N}$, z_n^* é limitado em Z , logo pelo teorema de Hahn-Banach (1.2.6) existe $\hat{z}_n^* \in X^*$ tal que $\|\hat{z}_n^*\| = \|z_n^*\|$. Assim, pelo teorema 1.2.14 $(z_n^*)_n$ é limitada em X^* . Como $l_1 \not\hookrightarrow X^*$ então pelo teorema de Rosenthal (1.2.33), $(\hat{z}_n^*)_n$ admite uma subsequência, que vamos denotar por $(\hat{z}_{n_j}^*)_j$, que é fracamente Cauchy. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ considere $\varphi_j := \hat{z}_{n_{2j+1}}^* - \hat{z}_{n_{2j}}^*$, então $\varphi_j \xrightarrow{\omega} 0$, ou seja, para cada $\psi \in X^{**}$ temos que

$$|\psi(\varphi_j)| = |\psi(\hat{z}_{n_{2j+1}}^*) - \psi(\hat{z}_{n_{2j}}^*)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

pois $(\hat{z}_{n_j}^*)_j$ é fracamente Cauchy. Definamos $(w_k)_k$ uma subsequência de $(z_{n_j})_j$ da seguinte maneira: para cada $k \in \mathbb{N}$, $w_k = z_{n_{2k+1}}$ então

$$\varphi_j(w_k) = (\hat{z}_{n_{2j+1}}^* - \hat{z}_{n_{2j}}^*)(z_{n_{2k+1}}) = \hat{z}_{n_{2j+1}}^*(z_{n_{2k+1}}) - \hat{z}_{n_{2j}}^*(z_{n_{2k+1}}) = \delta_{jk} - 0 = \delta_{jk}.$$

Como X^* tem a propriedade S_p , existe uma subsequência $(\varphi_{j_l})_l$ de $(\varphi_j)_j$ tal que $(\psi(\varphi_{j_l}))_l \in l_q$ para cada $\psi \in X^{**}$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Para cada $x \in X$, considere a função $J_x \in X^{**}$ dado por: $J_x(y^*) = y^*(x)$.

Assim, para cada $x \in X$,

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\varphi_{j_l}(x)|^q = \sum_{l=1}^{\infty} |J_x(\varphi_{j_l})|^q < \infty.$$

Definindo uma aplicação linear contínua $T : X \rightarrow l_q$ por:

$$T(x) = (J_x(\varphi_{j_l}))_l$$

temos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T(w_k) = (J_{w_k}(\varphi_{j_l}))_l = (\varphi_{j_l}(w_k))_l = (\delta_{jlk})_l = e_k$$

onde e_k é o k -ésimo elemento da base canônica de l_q . Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $P \in \mathcal{P}(^m l_q)$ então, pelo teorema 2.4.6, $P \circ T \in \mathcal{P}(^m X)$, pois T é linear contínua. Assim, por hipótese, temos que $\|P \circ T(x_n) - P \circ T(y_n)\| \rightarrow 0$, ou seja,

$$\|P(T(x_n)) - P(T(y_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

As sequências $(T(x_n))_n, (T(y_n))_n$ são limitadas em l_q . Como o espaço l_q tem a propriedade $(\star\star)$ temos que $\|T(x_n) - T(y_n)\|_q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|T(x_n) - T(y_n)\|_q = \|T(z_n)\|_q$, logo para qualquer subsequência de $(T(z_n))_n$ convergente em norma teríamos que converge a zero em norma, em particular, $(T(w_k))_k$ converge a zero em norma. Desta maneira, $\|e_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, contradição, pois $\|e_k\| = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Logo $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para as sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ iniciais, ou seja, X tem a propriedade $(\star\star)$. Portanto, pelo teorema 3.2.4, temos que X tem a **propriedade P**. ■

Observamos que se um espaço de Banach X é super-reflexivo então ele satisfaz as condições do teorema acima, pois $X^* \in S_p$ para algum $1 < p < \infty$ (ver por exemplo [10]) e pelo teorema de Eberlein-Smulian (1.2.24) temos que cada sequência $(x_n^*)_n \subset X^*$ limitada admite uma subsequência $(x_{n_j}^*)_j$ fracamente Cauchy, logo, pelo teorema de Rosenthal (1.2.33), $l_1 \not\hookrightarrow X^*$.

Farmer & Jonhson em [16] provaram que todo espaço de Banach com tipo não-trivial é polinomialmente Schur. Agora, no resultado que segue, tais estes espaços têm a **propriedade P**. Lembramos que um espaço de Banach é de tipo não-trivial se ele é de tipo p , para algum $p > 1$ (que se encontra definido no capítulo 1, seção 3).

Usando o resultado provado por Gonzalo & Jaramillo em [19] que nos diz que se X tem tipo p , $p \in (1, 2]$, então $X \in S_r$ para todo $r < p$, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.19. *Seja X um espaço de Banach. Se X é de tipo não-trivial então X tem a propriedade $(\star\star)$, e consequentemente, X tem a **propriedade P**.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach de tipo não-trivial, então pelo teorema 1.3.12 temos que $X^* \in S_r$ para todo $r < p$. Se $l_1 \hookrightarrow X^*$ então l_1 teria tipo $p > 1$, absurdo, pois l_1 não tem tipo não-trivial (ver o exemplo 1.3.11). Assim, pelo teorema 3.2.18, X tem a propriedade $(\star\star)$ e consequentemente, X tem a **propriedade P**. ■

No próximo teorema vamos estudar a **propriedade P** no espaço $X \times Y$, onde X tem a propriedade Dunford-Pettis e Y tem a **propriedade P**. A demonstração encontra-se em [8].

Teorema 3.2.20. *Sejam X, Y espaços de Banach tais que X tem a propriedade Dunford-Pettis e Y tem a propriedade **P**, então $X \times Y$ tem a propriedade **P**.*

Demonstração: No espaço $X \times Y$ vamos considerar o norma dada pelo sup. Sejam $(x_n, y_n)_n$ e $(z_n, w_n)_n$ seqüências limitadas em $X \times Y$ tais que para cada $l \in \mathbb{N}$ e cada $P \in \mathcal{P}^l(X \times Y)$ temos que $\|P((x_n, y_n)) - P((z_n, w_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Vamos mostrar que $\|S((x_n, y_n) - (z_n, w_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $S \in \mathcal{P}^r(X \times Y)$ e cada $r \in \mathbb{N}$. Primeiramente, vamos mostrar que :

1. $\|Q(x_n - z_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}^m(X)$ e $m \geq 1$.
2. $\|R(y_n - w_n)\| \rightarrow 0$ para cada $R \in \mathcal{P}^m(Y)$ e $m \geq 1$.

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $Q_1 \in \mathcal{P}^k(X)$. Definamos $P_1 : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$P_1(x, y) = (Q_1 \circ \Pi_1)(x, y) \quad \text{para cada } (x, y) \in X \times Y$$

onde Π_1 é a aplicação projeção de $X \times Y$ em X dada por $\Pi_1((x, y)) = x$.

Então, pelo teorema 2.4.6, $P_1 \in \mathcal{P}^k(X \times Y)$ e por hipótese,

$\|P_1((x_n, y_n)) - P_1((z_n, w_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \|P_1((x_n, y_n)) - P_1((z_n, w_n))\| &= \|(Q_1 \circ \Pi_1)((x_n, y_n)) - (Q_1 \circ \Pi_1)((z_n, w_n))\| \\ &= \|Q_1(x_n) - Q_1(z_n)\| \end{aligned}$$

e assim $\|Q_1(x_n) - Q_1(z_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Como X tem a propriedade Dunford-Pettis segue do teorema 3.2.4 que X tem a **propriedade P** então

$$\|Q(x_n - z_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para cada } Q \in \mathcal{P}^m(X) \quad \text{e} \quad m \geq 1. \quad (3.12)$$

Analogamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $R_2 \in \mathcal{P}^k(Y)$, definindo $P_2 : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$P_2(x, y) = (R_2 \circ \Pi_2)(x, y) \quad \text{para cada } (x, y) \in X \times Y$$

onde Π_2 é a aplicação projeção de $X \times Y$ em Y dada por $\Pi_2((x, y)) = y$ temos que $\|R_2(y_n) - R_2(w_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e como Y tem a **propriedade P** então

$$\|R(y_n - w_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para cada } R \in \mathcal{P}^m(Y) \quad \text{e} \quad m \geq 1. \quad (3.13)$$

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $S \in \mathcal{P}^r(X \times Y)$. Seja A a aplicação r -linear contínua associada ao polinômio S .

$$\begin{aligned} S((x_n, y_n) - (z_n, w_n)) &= A((x_n, y_n) - (z_n, w_n), \overset{(r)}{.}, (x_n, y_n) - (z_n, w_n)) \\ &= A((x_n - z_n, 0), \overset{(r)}{.}, (x_n - z_n, 0)) + A((0, y_n - w_n), \overset{(r)}{.}, (0, y_n - w_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{r-1} A((x_n - z_n, 0), \cdot^{(j)}, (x_n - z_n, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n)) \\
& = S((x_n - z_n, 0)) + S((0, y_n - w_n)) + \\
& \sum_{j=1}^{r-1} A((x_n - z_n, 0), \cdot^{(j)}, (x_n - z_n, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que cada componente da soma acima converge a zero quando $n \rightarrow \infty$. Primeiramente, vamos definir o polinômio $Q^* : X \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$Q^*(x) = S(x, 0) \quad \text{para cada } x \in X,$$

então $Q^* \in \mathcal{P}(^r X)$. Assim, de 3.12 temos que $|Q^*(x_n - z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Q^*(x_n - z_n) = S((x_n - z_n, 0))$, logo,

$$|S((x_n - z_n, 0))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.14)$$

Com argumentos análogos, definindo $R^* : Y \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$R^*(y) = S(0, y) \quad \text{para cada } y \in Y,$$

temos que

$$|S((0, y_n - w_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.15)$$

Para as demais componentes da soma, para cada $j \in \{1, \dots, r-1\}$ vamos definir uma sequência $(P_n^{[j]})_n \in \mathcal{P}(X)$ tal que $P_n^{[j]} \xrightarrow{\omega} 0$.

Para cada $j \in \{1, \dots, r-1\}$, seja $(P_n^{[j]})_n$ a sequência dada da seguinte maneira:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{[j]} : X \rightarrow \mathbb{K}$ é dado por:

$$P_n^{[j]}(x) = A((x, 0), \cdot^{(j)}, (x, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))$$

para cada $x \in X$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{[j]}$ é um polinômio j -homogêneo contínuo.

Vamos mostrar que $P_n^{[j]} \xrightarrow{\omega} 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $\phi \in \mathcal{P}(^j X)^*$. Definamos

$Q^{[j]} : Y \rightarrow \mathcal{P}(^j X)$ por:

Para cada $y \in Y$ e cada $x \in X$

$$Q^{[j]}(y)(x) = A((x, 0), \cdot^{(j)}, (x, 0), (0, y), \cdot^{(r-j)}, (0, y)).$$

Assim, $Q^{[j]}$ é um polinômio $(r-j)$ -homogêneo contínuo, logo $\phi \circ Q^{[j]} \in \mathcal{P}(^{r-j} Y)$.

Como Y tem a **propriedade P**, então por 3.13 temos que $|(\phi \circ Q^{[j]})(y_n - w_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Mas

$$\begin{aligned}
(\phi \circ Q^{[j]})(y_n - w_n) &= \phi(Q^{[j]}(y_n - w_n)) = \\
&= \phi(A((\cdot, 0), \cdot^{(j)}, (\cdot, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))) = \phi(P_n^{[j]}).
\end{aligned}$$

Assim, $|\phi(P_n^{[j]})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ou seja, $P_n^{[j]} \xrightarrow{\omega} 0$.

Como X tem a propriedade Dunford-Pettis e vale 3.12, então, pelo teorema 3.1.7(2), $|P_n^{[j]}(x_n - z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Logo, para cada $j \in \{1, \dots, r-1\}$

$$|A((x_n - z_n, 0), \cdot^{(j)}, (x_n - z_n, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.16)$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos: de 3.14 existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S((x_n - z_n, 0))| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \geq m_0$. De 3.15 existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|S((0, y_n - w_n))| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \geq m_1$. De 3.16, para cada $j \in \{1, \dots, r-1\}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$|A((x_n - z_n, 0), \cdot^{(j)}, (x_n - z_n, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))| < \frac{\epsilon}{3(r-1)}$$

para todo $n \geq n_j$. Mas para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |S((x_n, y_n) - (z_n, w_n))| &\leq |S((x_n - z_n, 0))| + |S((0, y_n - w_n))| + \\ &\sum_{j=1}^{r-1} |A((x_n - z_n, 0), \cdot^{(j)}, (x_n - z_n, 0), (0, y_n - w_n), \cdot^{(r-j)}, (0, y_n - w_n))|. \end{aligned}$$

Agora, tomando $n_0 = \sup\{m_0, m_1, n_1, \dots, n_{r-1}\}$, temos que para cada $n \geq n_0$,

$$|S((x_n, y_n) - (z_n, w_n))| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (r-1)\frac{\epsilon}{3(r-1)} = \epsilon$$

logo $|S((x_n, y_n) - (z_n, w_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Portanto $X \times Y$ tem a propriedade P. ■

Aron, Choi & Llavona em [2] colocaram a seguinte pergunta:

Existe um espaço de Banach que não tem a propriedade P ?

Choi & Kim em [12] conseguiram encontrar condições suficientes para que um espaço não tenha a propriedade P. Tais condições são dadas no seguinte teorema:

Teorema 3.2.21. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Se X é polinomialmente Schur e se para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^n X)$ é separável então X não tem a propriedade P.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, então podemos escolher uma sequência $(x_j)_j \subset X$ tal que $\|x_j\| = 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e

$\|x_s - x_r\| > \frac{1}{2}$ para cada $r \neq s$. Para $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathcal{P}(^n X)$ é separável, então existe $\{P_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(^n X)$ enumerável denso em $\mathcal{P}(^n X)$. Assim, para cada $P \in \mathcal{P}(^n X)$

e cada $\epsilon > 0$ existe $P_{k_0} \in \{P_k, k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\|P_{k_0} - P\| < \frac{\epsilon}{3}$. Agora, o conjunto $\{P_{k_0}(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $\mathbb{K}$, uma vez que

$$\|P_{k_0}(x_j)\| \leq \|P_{k_0}\| \cdot \|x_j\|^n = \|P_{k_0}\|$$

para cada x_j (teorema 2.4.2), logo podemos escolher uma subsequência $(y_j)_j$ de $(x_j)_j$ tal que $(P_{k_0}(y_j))_j$ é convergente.

Definamos as sequências $(a_j)_j$ e $(b_j)_j$ da seguinte maneira:

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $a_j = y_{2j}$ e $b_j = y_{2j+1}$.

Logo,

$$\|P_{k_0}(a_j) - P_{k_0}(b_j)\| = \|P_{k_0}(y_{2j}) - P_{k_0}(y_{2j+1})\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{k_0}(a_j) - P_{k_0}(b_j)\| < \frac{\epsilon}{3}$ para cada $j \geq j_0$.

Como $\|P_{k_0} - P\| < \frac{\epsilon}{3}$ temos que para cada $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$, $\|P_{k_0}(x) - P(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$.

Logo, para cada $j \geq j_0$, temos que:

$$\|P(a_j) - P(b_j)\| \leq \|P_{k_0}(a_j) - P(a_j)\| + \|P_{k_0}(b_j) - P(b_j)\| + \|P_{k_0}(a_j) - P_{k_0}(b_j)\| < \epsilon,$$

ou seja, $\|P(a_j) - P(b_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que $\|a_j - b_j\| = \|y_{2j} - y_{2j+1}\| > \frac{1}{2}$ e como X é polinomialmente Schur, existe $Q \in \mathcal{P}(^n X)$ tal que $Q(a_j - b_j) \not\rightarrow 0$. Portanto X não tem a **propriedade P**. ■

No trabalho [9], Castillo, García & Gonzallo conseguiram exibir um exemplo de um espaço de Banach que não possui a **propriedade P**. Tal espaço é dado por $X \times Y$ onde X e Y tem a **propriedade P**. O exemplo trabalha com o espaço de sequências de Lorentz e seu predual (ambos definidos no capítulo 1, seção 2).

Castillo, Garcia & Gonzallo, em [9] demonstraram que nos espaços $d_*(w; 1)$ e $d(w; 1)$, onde para cada $p > 1$, $w = (w_i)_i$ satisfaz (Δ) :

$$(\Delta) \quad 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N^{1/p}} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N^{1/p}} = \infty$$

valem as seguintes afirmações:

$$\mathcal{P}(d_*(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d_*(w; 1))$$

$$\mathcal{P}(d(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d(w; 1)).$$

Tais igualdades serão utilizadas na demonstração do próximo teorema.

Teorema 3.2.22. *Seja $d(w; 1)$ o espaço de seqüências de Lorentz tal que para cada $p > 1$, $w = (w_i)_i$ satisfaz (Δ) . Então o espaço $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ não tem a propriedade P.*

Demonstração: Vamos considerar em $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ a norma dada pelo sup. Sejam $(e_n)_n$ a base canônica de $d(w; 1)$ e $(e_n^*)_n$ a base de $d_*(w; 1)$ associada a $(e_n)_n$. Então as seqüências $((e_n^*, 0))_n$ e $((0, e_n))_n$ são limitadas em $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$, $e_n^* \xrightarrow{\omega} 0$ e $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ (ver [[9], teorema 5.4]. Assim, para cada $Q \in \mathcal{P}(d_*(w; 1) \times d(w; 1))$ afirmamos que

$$|Q((e_n^*, 0)) - Q((0, e_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De fato: dado $Q \in \mathcal{P}(d_*(w; 1) \times d(w; 1))$ considere $S : d_*(w; 1) \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $S(x) = Q(x, 0)$ para cada $x \in d_*(w; 1)$. Assim $S \in \mathcal{P}(d_*(w; 1))$ e como $e_n^* \xrightarrow{\omega} 0$ e $\mathcal{P}(d_*(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d_*(w; 1))$ temos que $S(e_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Logo $Q((e_n^*, 0)) \xrightarrow{\omega} 0$.

Analogamente, definindo o polinômio $R : d(w; 1) \rightarrow \mathbb{K}$ por $R(y) = Q((0, y))$ para cada $y \in d(w; 1)$ temos que $R(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pois $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ e $\mathcal{P}(d(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d(w; 1))$. Logo $Q((0, e_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Q((e_n^*, 0)) - Q((0, e_n))] = 0,$$

ou seja,

$$|Q((e_n^*, 0)) - Q((0, e_n))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

No que segue, vamos construir um polinômio P de modo que $|P((e_n^*, 0) - (0, e_n))| \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Para isso, vamos tomar a aplicação

$A : (d_*(w; 1) \times d(w; 1)) \times (d_*(w; 1) \times d(w; 1)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$A((x, y), (u, v)) = \langle x, v \rangle.$$

Facilmente vemos que A é 2-linear, pois é consequência imediata das propriedades do produto interno sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Sejam $(x, y), (u, v) \in d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ então:

$$|A((x, y), (u, v))| = |\langle x, v \rangle| \leq \|x\| \cdot \|v\| \leq \|(x, y)\| \cdot \|(u, v)\|.$$

Logo A é contínuo.

Agora, definamos $P : d_*(w; 1) \times d(w; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$P((x, y)) = A((x, y), (x, y))$$

então P é um polinômio 2-homogêneo e contínuo.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|P((e_n^*, 0) - (0, e_n))| = |P(e_n^*, -e_n)| = |\langle e_n^*, -e_n \rangle| = 1.$$

Portanto $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ não tem a propriedade P. ■

Como $\mathcal{P}(d_*(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d_*(w; 1))$ e $\mathcal{P}(d(w; 1)) = \mathcal{P}_{wsc}(d(w; 1))$ então, pelo corolário 3.2.16, os espaços $d(w; 1)$ e $d_*(w; 1)$ têm a **propriedade P**. Em [9], Castillo, Garcia & Gonzalo mostram que os espaços $d(w; 1)$ e $d_*(w; 1)$, onde $w = (w_i)_i$ satisfaz (Δ) , não são Dunford-Pettis. Assim, temos mais dois exemplos de espaços de Banach que não satisfazem $(d) \implies (a)$ no teorema 3.2.4.

O espaço $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ não é polinomialmente Schur, pois como vimos na demonstração do teorema 3.2.22, para a sequência $((0, e_n))_n$, $Q((0, e_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}(d_*(w; 1) \times d(w; 1))$, mas para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\| (0, e_n) \|_\infty = \| (0, e_n) \|_p = 1,$$

logo, pelo teorema 3.2.4 temos que o espaço $d_*(w; 1) \times d(w; 1)$ não tem a propriedade $(\star\star)$.

Sejam $(e_n)_n$ a base canônica de $d(w; 1)$ e $(e_n^*)_n$ a base de $d_*(w; 1)$ associada a $(e_n)_n$. Como $e_n^* \xrightarrow{w} 0$ e $e_n \xrightarrow{w} 0$ então $P(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(d(w; 1))$ e $Q(e_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}(d_*(w; 1))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$ e $\|e_n^*\| = 1$. Assim, os espaços $d(w; 1)$ e $d_*(w; 1)$ não são polinomialmente Schur, logo, pelo teorema 3.2.4, $d(w; 1)$ e $d_*(w; 1)$ não satisfazem a propriedade $(\star\star)$.

Capítulo 4

Recíproca da propriedade P

4.1 Propriedade RP

Neste capítulo temos por objetivo estudar a recíproca da **propriedade P**, que Aron, Choi & Llavona em [2] denotaram por **RP**. Vamos estudar as suas relações com as propriedades Dunford-Pettis, polinomialmente Schur como também resultados que garantem que os espaços $L_\infty[0, 1]$, l_∞ , $L_1[0, 1]$, $L_1[0, 2\pi]$ e $C[0, 1]$ não têm a **propriedade RP**.

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade RP se para quaisquer duas seqüências $(u_j)_j, (v_j)_j$ limitadas em X tais que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}(^n X)$, $|P(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ temos que $|Q(u_j) - Q(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}(^m X)$ e $m \geq 1$.*

Em outras palavras, dizemos que um espaço de Banach X tem a **propriedade RP** se para cada polinômio $P \in \mathcal{P}(X)$ e cada $W \subset X$ limitado $P|_W$ é uniformemente sequencialmente contínuo na topologia polinomial fraca.

No que segue vamos apresentar alguns resultados estudados. O seguinte teorema encontra-se demonstrado em [2].

Teorema 4.1.2. *Seja X um espaço de Banach. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se X é polinomialmente Schur então X tem a propriedade RP.*
2. *Se $X = c_0$, então X tem a propriedade RP.*

Demonstração: (1) Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ seqüências limitadas em X e suponhamos que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}({}^n X)$, $|P(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como X é polinomialmente Schur, então $\|u_j - v_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}({}^m X)$. Como Q uniformemente contínuo sobre os limitados (ver teorema 2.4.10), segue do teorema 1.2.29 que $|Q(u_j) - Q(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X tem a **propriedade RP**.

(2) Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ seqüências limitadas em c_0 e suponhamos que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}({}^n c_0)$ temos que $|P(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Consequentemente, $u_j - v_j \xrightarrow{\omega} 0$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}({}^m c_0)$, então pelo teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pelczynski (2.5.14) existe uma seqüência $(Q_n)_n \subset \mathcal{P}_f({}^m c_0)$ tal que $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q$. Logo dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Q_{n_0} - Q\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como $Q_{n_0} \in \mathcal{P}_f({}^m c_0)$, segue que $Q_{n_0}(x) = \sum_{i=1}^{r_{n_0}} \lambda_i \psi_i^m(x)$ com $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\psi_i \in c_0^*$ para cada $i = 1, \dots, r_{n_0}$ e cada $x \in c_0$. Consequentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |Q_{n_0}(u_j) - Q_{n_0}(v_j)| &= \left| \sum_{i=1}^{r_{n_0}} \lambda_i (\psi_i^m(u_j) - \psi_i^m(v_j)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{r_{n_0}} |\lambda_i| \cdot |\psi_i^m(u_j) - \psi_i^m(v_j)|. \end{aligned}$$

De maneira análoga a proposição 3.2.2(2) temos que para cada $i = 1, \dots, r_{n_0}$ e cada $\psi_i \in c_0^*$, $|\psi_i^m(u_j) - \psi_i^m(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, logo, $|Q_{n_0}(u_j) - Q_{n_0}(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|Q_{n_0}(u_j) - Q_{n_0}(v_j)| < \frac{\epsilon}{3}$ para cada $j \geq j_0$. Como

$$|Q(u_j) - Q(v_j)| \leq |Q(u_j) - Q_{n_0}(u_j)| + |Q_{n_0}(u_j) - Q_{n_0}(v_j)| + |Q_{n_0}(v_j) - Q(v_j)|$$

temos que

$$|Q(u_j) - Q(v_j)| < \epsilon$$

para cada $j \geq j_0$, uma vez que $|Q_{n_0}(u_j) - Q(u_j)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ e $|Q_{n_0}(v_j) - Q(v_j)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ para cada $j \geq j_0$. Logo $|Q(u_j) - Q(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto, c_0 tem a **propriedade RP**. ■

A recíproca do item (1) do teorema acima não vale, pois o espaço c_0 não é polinomialmente Schur, mas tem a **propriedade RP**.

No que segue, vamos dar alguns exemplos de espaços de Banach que têm a **propriedade RP**.

Exemplos 4.1.3. 1. Para p , $1 \leq p < \infty$, os espaços l_p têm a **propriedade RP**, pois estes espaços são polinomialmente Schur.

2. Para q , $2 \leq q < \infty$, os espaços $L_q[0, 1]$ têm a propriedade RP, pois estes espaços são polinomialmente Schur.
3. Seja X um espaço de Banach.
 - (a) Se X é de tipo não-trivial então X tem a propriedade RP, pois ele é polinomialmente Schur.
 - (b) Se X é Schur então X tem a propriedade RP.

No capítulo anterior vimos que espaços com a propriedade Dunford-Pettis tem a **propriedade P**. A seguir vamos estudar o fato de que certos espaços com a Dunford-Pettis tem a **propriedade RP**.

Proposição 4.1.4. *Seja X um espaço de Banach tal que X tem a propriedade Dunford-Pettis, então X tem a propriedade RP se e somente se dadas quaisquer duas seqüências limitadas $(x_j)_j, (y_j)_j$ em X tais que $x_j - y_j \xrightarrow{\omega} 0$ temos que $|P(x_j) - P(y_j)| \rightarrow 0$ para cada $P \in \mathcal{P}^n(X)$ e todo $n \geq 1$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam $(x_j)_j, (y_j)_j$ seqüências limitadas em X tais que $x_j - y_j \xrightarrow{\omega} 0$. Por hipótese, X tem a propriedade Dunford-Pettis então, pela proposição 3.1.7(1), temos que $|P(x_j - y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}^n(X)$ e cada $n \geq 1$. E como X possui a **propriedade RP**, segue que $|P(x_j) - P(y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}^n(X)$ e todo $n \geq 1$. $(\Leftarrow)$ Sejam $(x_j)_j, (y_j)_j$ seqüências limitadas em X tais que para cada $n \geq 1$ e cada $P \in \mathcal{P}^n(X)$, temos que $|P(x_j - y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, em particular, $x_j - y_j \xrightarrow{\omega} 0$. Sejam $m \geq 1$ e $Q \in \mathcal{P}^m(X)$, logo por hipótese, temos que $|Q(x_j) - Q(y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto X tem a propriedade RP. ■

Análogo a propriedade P, a propriedade RP também é preservada por isomorfismos.

Teorema 4.1.5. *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço isomorfo a X . Se X tem a propriedade RP então Y também tem a propriedade RP.*

Demonstração: Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ seqüências limitadas em Y tais que $|P(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}^n(Y)$ e $n \geq 1$. Como X é isomorfo a Y existe $T : Y \rightarrow X$ um isomorfismo. Assim, existem seqüências limitadas $(x_j)_j$ e $(y_j)_j$ em X tais que

$$(T(u_j))_j = (x_j)_j \quad \text{e} \quad (T(v_j))_j = (y_j)_j,$$

Agora, para cada $m \geq 1$ e cada $Q^* \in \mathcal{P}({}^m X)$, pelo teorema 2.4.6, temos que

$Q^* \circ T \in \mathcal{P}({}^m Y)$. Logo, por hipótese, $|Q^* \circ T(u_j - v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, ou seja,

$|Q^*(x_j - y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Como X tem a **propriedade RP** então $|Q(x_j) - Q(y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $Q \in \mathcal{P}({}^n X)$ e $n \geq 1$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $P^* \in \mathcal{P}({}^m Y)$. Vamos provar que $|P^*(u_j) - P^*(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Para isso, definamos $R : X \rightarrow \mathbb{K}$ por $R(x) = (P^* \circ T^{-1})(x)$ para cada $x \in X$. Assim, pelo teorema 2.4.6, temos que $R \in \mathcal{P}({}^m X)$, e consequentemente temos que $|R(x_j) - R(y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, ou seja, $|(P^* \circ T^{-1})(x_j) - (P^* \circ T^{-1})(y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Mas para cada $j \in \mathbb{N}$, $|(P^* \circ T^{-1})(x_j) - (P^* \circ T^{-1})(y_j)| = |P^*(u_j) - P^*(v_j)|$.

Logo, $|P^*(u_j) - P^*(v_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Portanto Y tem a **propriedade RP**. ■

4.2 Funções polinomialmente contínuas sobre os limitados

Nesta seção vamos fazer um breve estudo sobre as funções que são polinomialmente contínuas sobre os limitados e estudar resultados que garantem que o espaço original de Tsirelson T^* (ver construção em [31]), espaços com Dunford-Pettis têm a **propriedade RP**.

As funções polinomialmente contínuas sobre os limitados foram estudadas por Aron, Choi & Llavona em [2] e [18].

Abaixo definimos funções que são polinomialmente contínuas sobre os limitados e vamos estudar os seus principais resultados, os quais se encontram em [18].

Definição 4.2.1. *Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é polinomialmente contínua sobre os limitados se para cada $\epsilon > 0$ e cada $W \subset X$ limitado, existem $\delta > 0$ e um conjunto finito $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que para cada $x, y \in W$ satisfazendo $|P_j(x - y)| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$ temos que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.*

Em outras palavras, uma função $f : X \rightarrow Y$ é polinomialmente contínua sobre os limitados se a função f restrita a qualquer conjunto limitado é uniformemente contínua na topologia polinomial fraca.

Observações 4.2.2. (a) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função polinomialmente contínua sobre os limitados, então dado $\epsilon > 0$ e $W \subset X$ limitado existem $\delta > 0$ e um conjunto finito $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que para cada $x, y \in W$ satisfazendo $|P_j(x - y)| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$ temos que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$. Agora, para cada $j = 1, \dots, n$ existem $m_j \in \mathbb{N}$ e $P_k^{[j]} \in \mathcal{P}({}^k X)$, $k = 0, 1, \dots, m_j$ tais que $P_j = P_0^{[j]} + P_1^{[j]} + \dots + P_{m_j}^{[j]}$. Assim, se $x, y \in W$ são tais que para cada $j = 1, \dots, n$, $|P_k^{[j]}(x - y)| < \frac{\delta}{m_j + 1}$ para cada $k = 0, 1, \dots, m_j$, então temos que

$$|P_j(x - y)| \leq |P_0^{[j]}(x - y)| + \dots + |P_{m_j}^{[j]}(x - y)| < \delta$$

para cada $j = 1, \dots, n$.

- (b) Se para cada $i = 1, \dots, n$, P_i for 1-homogêneo então f é uma função fracamente uniformemente contínua sobre os limitados. Este caso especial foi estudado por Aron & Prolla em [5] obtendo o espaço das funções que são fracamente uniformemente contínuas sobre os limitados.

Facilmente vemos que se $f : X \rightarrow Y$ é uma função fracamente uniformemente contínua sobre os limitados então f é polinomialmente contínua sobre os limitados. Assim, se uma aplicação linear $A : X \rightarrow Y$ é compacta então A é polinomialmente contínua sobre os limitados, uma vez que uma aplicação linear A é compacta se e somente se A é fracamente uniformemente contínua sobre os limitados (ver teorema 1.2.31).

- (c) Se para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que cada $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados, então todo $Q \in \mathcal{P}(X)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados. De fato: Seja $Q \in \mathcal{P}(X)$, então existem $m \in \mathbb{N}$ e $P_k \in \mathcal{P}({}^k X)$, $k = 0, 1, \dots, m$ tais que $Q = P_0 + P_1 + \dots + P_m$. Sejam $\epsilon > 0$ e $W \subset X$ limitado. Para cada $k = 1, \dots, m$, P_k é polinomialmente contínuo sobre os limitados, logo existem $\delta_k > 0$ e um conjunto finito $\{P_k^1, \dots, P_k^{n_k}\}$ de polinômios contínuos tais que se $x, y \in W$ e $|P_k^j(x - y)| < \delta_k$ para cada $j = 1, \dots, n_k$ temos que $|P_k(x) - P_k(y)| < \frac{\epsilon}{m}$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ e $F = \{P_{kj} : P_{kj} = P_k^j\}$ o conjunto formado pelos polinômios contínuos encontrados acima, se $x, y \in W$ são tais que $|P_{kj}(x - y)| < \delta$ para cada $P_{kj} \in F$ e como

$$|Q(x) - Q(y)| \leq |P_0(x) - P_0(y)| + |P_1(x) - P_1(y)| + \dots + |P_m(x) - P_m(y)|$$

então $|Q(x) - Q(y)| < \epsilon$. Portanto Q é polinomialmente contínuo sobre os limitados.

- (d) Se uma função $f : X \rightarrow Y$, com X, Y espaços de Banach, é polinomialmente contínua sobre os limitados então temos que f é uniformemente contínua sobre os limitados. De fato: Sejam $\epsilon > 0$ e $W \subset X$ limitado, então existem $\delta > 0$ e

$\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que para cada $x, y \in W$ satisfazendo $|P_j(x - y)| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$ segue que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$. Agora, para cada $j = 1, \dots, n$, existem $m_j \in \mathbb{N}$ e $P_k^{[j]} \in \mathcal{P}^k(X)$, $k = 0, 1, \dots, m_j$ tais que $P_j = P_0^{[j]} + P_1^{[j]} + \dots + P_{m_j}^{[j]}$. Assim, se $x, y \in W$ são tais que $\|x - y\| < \delta^*$, com

$$\delta^* = \min \left\{ \left(\frac{\delta}{(m_j+1)\|P_k^{[j]}\|} \right)^{\frac{1}{k}} \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, m_j \right\}, \text{ então para cada } j = 1, \dots, n \text{ e cada } k = 0, 1, \dots, m_j$$

$$\|P_k^{[j]}(x - y)\| \leq \|P_k^{[j]}\| \|x - y\|^k < \frac{\delta}{m_j + 1},$$

e por (a) segue que $|P_j(x - y)| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$ e por hipótese, $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

No que segue, vamos mostrar que no caso de um polinômio P , para verificar a continuidade polinomial sobre os limitados basta verificar a sua continuidade polinomial na bola unitária fechada.

Proposição 4.2.3. *Sejam X, Y espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}^m(X; Y)$. Então P é polinomialmente contínuo sobre os limitados se e somente se P é polinomialmente contínuo sobre B_X .*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Seja $W \subset X$ limitado. Se $W \subset B_X$ segue o resultado. Caso contrário, existe $r > 1$ tal que $W \subset B[0, r]$. Seja $\epsilon > 0$, então existem $\delta > 0$ e $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que $\|P(x) - P(y)\| < \frac{\epsilon}{r^m}$ sempre que $|P_j(x - y)| < \delta$, $j = 1, \dots, n$, com $x, y \in B_X$. Agora, para cada $j = 1, \dots, n$ existem $m_j \in \mathbb{N}$ e $P_k^{[j]} \in \mathcal{P}^k(X)$, $k = 0, 1, \dots, m_j$ tais que $P_j = P_0^{[j]} + P_1^{[j]} + \dots + P_{m_j}^{[j]}$. Seja $\delta^* = \min \left\{ \frac{\delta}{m_j+1} \mid 1 \leq j \leq n \right\}$ e sejam $z, w \in W$ tais que para cada $j = 1, \dots, n$, $|P_k^{[j]}(z - w)| < \delta^*$ para cada $k = 0, 1, \dots, m_j$. Assim, para cada $j = 1, \dots, n$, $|P_k^{[j]}(z - w)| < \frac{\delta}{m_j+1}$ para cada $k = 0, 1, \dots, m_j$. Mas para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $k = 0, 1, \dots, m_j$ temos que

$$\left| P_k^{[j]} \left(\frac{z}{r} - \frac{w}{r} \right) \right| = \left| P_k^{[j]} \left(\frac{1}{r} (z - w) \right) \right| < |P_k^{[j]}(z - w)|.$$

Assim, $\left| P_k^{[j]} \left(\frac{z}{r} - \frac{w}{r} \right) \right| < \frac{\delta}{m_j+1}$ para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $k = 0, 1, \dots, m_j$, e, pela observação 4.2.2(a) temos que $\left| P_j \left(\frac{z}{r} - \frac{w}{r} \right) \right| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$, e por hipótese, $\left\| P \left(\frac{z}{r} \right) - P \left(\frac{w}{r} \right) \right\| < \frac{\epsilon}{r^m}$. Mas

$$\left\| P \left(\frac{z}{r} \right) - P \left(\frac{w}{r} \right) \right\| = \frac{1}{r^m} \|P(z) - P(w)\|,$$

logo, $\|P(z) - P(w)\| < r^m \cdot \frac{\epsilon}{r^m} = \epsilon$. Portanto, P é polinomialmente contínuo sobre os limitados. ■

A demonstração do próximo resultado encontra-se em [[18], teorema 3.1.11], o qual nos dá uma relação de um polinômio polinomialmente contínuo sobre os limitados e a sua aplicação linear associada.

Proposição 4.2.4. *Sejam X, Y espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados se e somente se a aplicação linear associada ao polinômio P , $T_P : X \rightarrow \mathcal{L}(^{m-1} X; Y)$ definida na proposição 2.5.7, é polinomialmente contínua sobre os limitados.*

Demonstração: Aqui nesta demonstração vamos denotar por $\hat{P}$ a aplicação $\hat{P} \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ tal que $\hat{P}(x, \overset{m}{\cdot}, x) = P(x)$ para cada $x \in X$, e no espaço X^{m-1} vamos considerar a norma dada pelo sup. Pela proposição anterior, basta verificar a continuidade polinomial na bola unitária fechada B_X .

($\Rightarrow$) Suponhamos que $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ é polinomialmente contínuo sobre B_X e seja $\epsilon > 0$, então existem $\delta > 0$ e $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que $\|P(x) - P(y)\| < m\epsilon$ sempre que $|P_j(x - y)| < \delta$ para $j = 1, \dots, n$ e $x, y \in B_X$. Agora, para cada $j = 1, \dots, n$ existem $m_j \in \mathbb{N}$ e $P_k^{[j]} \in \mathcal{P}(^k X)$, $k = 0, 1, \dots, m_j$ tais que $P_j = P_0^{[j]} + P_1^{[j]} + \dots + P_{m_j}^{[j]}$. Seja $\delta^* = \min \left\{ \frac{\delta}{m_j+1} \mid 1 \leq j \leq n \right\}$ e sejam $z, w \in B_X$ tais que para cada $j = 1, \dots, n$, $|P_k^{[j]}(z - w)| < \delta^*$ para cada $k = 0, 1, \dots, m_j$. Assim, para cada $j = 1, \dots, n$, $|P_k^{[j]}(z - w)| < \frac{\delta}{m_j+1}$ para cada $k = 0, 1, \dots, m_j$ e sejam $z_2, \dots, z_m \in B_X$. Assim,

$$(T_P(x) - T_P(y))(z_2, \dots, z_m) = \hat{P}(x, z_2, \dots, z_m) - \hat{P}(y, z_2, \dots, z_m).$$

Pela fórmula da Polarização (ver teorema 2.2.8), temos que:

$$\begin{aligned} & (T_P(x) - T_P(y))(z_2, \dots, z_m) = \\ & \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \left[\hat{P}(\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m)^m - \hat{P}(\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m)^m \right] \\ & = \frac{m^m}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1; 1 \leq i \leq m} \epsilon_1 \dots \epsilon_m \left[P\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) - P\left(\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}\right) \right] \end{aligned}$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $k = 0, 1, \dots, m_j$ temos que

$$\left| P_k^{[j]} \left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} - \frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right) \right| = \left| P_k^{[j]} \left(\frac{\epsilon_1}{m} (x - y) \right) \right|$$

$$\leq |P_k^{[j]}(x - y)| < \frac{\delta}{m_j + 1}.$$

E como $\left\| \frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right\| \leq 1$ e $\left\| \frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right\| \leq 1$, temos que, $\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m}$, $\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \in B_X$, logo, pela observação 4.2.2(a) temos que

$\left| P_j \left[\left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right) - \left(\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right) \right] \right| < \delta$ para cada $j = 1, \dots, n$, e por hipótese:

$$\left\| P \left(\frac{\epsilon_1 x + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right) - P \left(\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 z_2 + \dots + \epsilon_m z_m}{m} \right) \right\| < m! \epsilon.$$

Desta maneira,

$$\left\| (T_P(x) - T_P(y))(z_2, \dots, z_m) \right\| \leq \frac{m^m}{m! 2^m} 2^m m! \epsilon = \epsilon.$$

Assim,

$$\|T_P(x) - T_P(y)\| = \sup_{\|z_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq m} \left\| (T_P(x) - T_P(y))(z_2, \dots, z_m) \right\| \leq \epsilon.$$

Portanto T_P é polinomialmente contínuo sobre B_X .

($\Leftarrow$) Suponhamos que T_P é polinomialmente contínua sobre B_X e seja $\epsilon > 0$, então existem $\delta > 0$ e $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que $\|T_P(x) - T_P(y)\| < \frac{\epsilon}{m}$ sempre que $|P_j(x - y)| < \delta$ com $x, y \in B_X$ para cada $j = 1, \dots, n$. Sejam $x, y \in B_X$ satisfazendo as condições acima, então:

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= \hat{P}(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - \hat{P}(y, \overset{(m)}{\cdot}, y) \\ &= \hat{P}(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - \hat{P}(x, y, x, \dots, x) + \hat{P}(x, y, x, \dots, x) \\ &\quad - \hat{P}(x, y, y, x, \dots, x) + \hat{P}(x, y, y, x, \dots, x) \\ &\quad + \dots - \hat{P}(x, y, \dots, y) + \hat{P}(x, y, \dots, y) - \hat{P}(y, \overset{(m)}{\cdot}, y) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\| &\leq \|\hat{P}(x, \overset{(m)}{\cdot}, x) - \hat{P}(x, y, x, \dots, x)\| \\ &\quad + \|\hat{P}(x, y, x, \dots, x) - \hat{P}(x, y, y, x, \dots, x)\| + \dots + \|\hat{P}(x, y, \dots, y) - \hat{P}(y, \overset{(m)}{\cdot}, y)\| \\ &= \|(T_P(x) - T_P(y))(x, \overset{(m-1)}{\cdot}, x)\| + \|(T_P(x) - T_P(y))(y, x, \dots, x)\| \\ &\quad + \dots + \|(T_P(x) - T_P(y))(y, \overset{(m-1)}{\cdot}, y)\|. \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\| &\leq \|T_P(x) - T_P(y)\| + \overset{(m)}{\cdot} \|T_P(x) - T_P(y)\| \\ &< m \cdot \|T_P(x) - T_P(y)\| < \frac{\epsilon}{m} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto P é polinomialmente contínuo sobre B_X . ■

Proposição 4.2.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ e vamos assumir que $\frac{1}{p} + \frac{1}{2m} = 1$. Então cada $P \in \mathcal{P}(^2l_p)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados.*

Demonstração: Seja $P \in \mathcal{P}(^2l_p)$ e consideremos a aplicação linear associada T_P ao polinômio P . A aplicação $T_P : l_p \rightarrow l_p^* = l_{2m}$ é tal que $P(x) = \langle T_P(x), x \rangle$ para cada $x = (x_i)_i \in l_p$. Pela proposição 4.2.4 basta mostrar que T_P é polinomialmente contínua sobre os limitados. Assim, dado $\epsilon > 0$ e $W \subset l_p$ limitado consideremos $\delta = \epsilon^{2m}$ e $R \in \mathcal{P}(^{2m}l_p)$ dado por $R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (T_P(x_i))^{2m}$ para cada $x = (x_i)_i \in l_p$. Para cada $x = (x_i)_i, y = (y_i)_i \in W$ tais que $|R(x - y)| < \delta$ temos que

$$\begin{aligned} \|T_P(x) - T_P(y)\|_{l_{2m}} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} (T_P(x_i) - T_P(y_i))^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}} \\ &= |R(x - y)|^{\frac{1}{2m}} < \delta^{\frac{1}{2m}} = \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, T_P é polinomialmente contínua sobre os limitados. ■

De maneira análoga ao exemplo 2.5.11(3), temos que $P : l_2 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ para cada $x = (x_i)_i \in l_2$ não é fracamente uniformemente contínua sobre os limitados. Como $P \in \mathcal{P}(^2l_2)$, pela proposição acima (4.2.5), P é polinomialmente contínuo sobre os limitados. Assim, o espaço das funções que são polinomialmente contínuas sobre os limitados e o espaço das funções fracamente uniformemente contínuas sobre os limitados, em geral, são diferentes.

No que segue temos por objetivo estudar o fato que o espaço original de Tsirelson T^* , como também certos espaços de Banach com a propriedade Dunford-Pettis têm a **propriedade RP**. Para isso, vamos utilizar o seguinte teorema:

Teorema 4.2.6. *Seja X um espaço de Banach e suponhamos que $l_1 \not\hookrightarrow X$. Então para cada espaço de Banach Y e cada $m \in \mathbb{N}$ temos que $\mathcal{P}_{wu}(^m X; Y) = \mathcal{P}_{wsc}(^m X; Y)$.*

Demonstração: Ver por exemplo [4], proposição 2.12 pg 197. ■

Teorema 4.2.7. *Seja X um espaço de Banach. Se todo $P \in \mathcal{P}(X)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados então X tem a **propriedade RP**.*

Demonstração: Sejam $(u_j)_j, (v_j)_j$ seqüências limitadas em X tais que $|P(u_j - v_j)| \rightarrow 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(^k X)$ e cada $k \in \mathbb{N}$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}(^m X)$, sendo $(u_j)_j, (v_j)_j$

sequências limitadas em X , então existe $B \subset X$ limitado tal que $(u_j)_j, (v_j)_j \subset B$. Por hipótese Q é polinomialmente contínuo sobre os limitados, então, dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tais que se $u, v \in B$ com $|P_i(u - v)| < \delta$, para $i = 1, \dots, n$ temos que $|Q(u) - Q(v)| < \epsilon$. Como $|P(u_j - v_j)| \rightarrow 0$ para cada $P \in \mathcal{P}^k(X)$ e cada $k \in \mathbb{N}$, em particular, $|P_i(u_j - v_j)| \rightarrow 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Logo, para o δ encontrado acima existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|P_i(u_j - v_j)| < \delta$ para todo $j \geq j_0$ e para cada $i = 1, \dots, n$, logo, por hipótese, temos que $|Q(u_j) - Q(v_j)| < \epsilon$ para cada $j \geq j_0$. Portanto X tem a **propriedade RP**. ■

Corolário 4.2.8. *Seja X um espaço de Banach. Se X tem a propriedade Dunford-Pettis e $l_1 \not\hookrightarrow X$ então X tem a propriedade RP.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach com a propriedade Dunford-Pettis, então, pelo teorema 3.1.7(1), para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que $\mathcal{P}^m(X) = \mathcal{P}_{wsc}^m(X)$. Como $l_1 \not\hookrightarrow X$ então pelo teorema 4.2.6, para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que $\mathcal{P}_{wsc}^m(X) = \mathcal{P}_{wu}^m(X)$, logo, cada polinômio $P \in \mathcal{P}(X)$ é polinomialmente contínuo sobre os limitados. Portanto, pelo teorema 4.2.7, X tem a **propriedade RP**. ■

Observamos que o teorema 4.2.7 nos dá uma outra maneira de mostrar que c_0 tem a **propriedade RP** pois $l_1 \not\hookrightarrow c_0$ e c_0 tem a propriedade Dunford-Pettis.

Corolário 4.2.9. *O espaço original de Tsirelson T^* tem a propriedade RP.*

Demonstração: Alencar, Aron & Dineen em [1] provaram que para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^m(T^*) = \mathcal{P}_{wsc}^m(T^*)$. Como $l_1 \not\hookrightarrow T^*$, pelo teorema 4.2.6, temos que cada polinômio contínuo sobre T^* é polinomialmente contínuo sobre os limitados. Portanto, pelo teorema 4.2.7, T^* tem a **propriedade RP**. ■

No seguinte exemplo vamos ver que a recíproca do teorema 4.2.7 não vale.

Exemplo 4.2.10. *Seja $P \in \mathcal{P}(^2l_1)$ dado por:*

$$P(x) = \sum \{x_j x_k : j \text{ par}, 1 \leq k < j\}$$

para cada $x = (x_i)_i \in l_1$. O polinômio P assim definido não é polinomialmente contínuo sobre os limitados.

De fato: Aron, Cole & Gamelin em [3], pg 83, provaram que o operador associado T_P ao polinômio P não é fracamente compacto. Agora, usando o resultado provado por

Gutiérrez & Llavona, [[20], teorema 3], o qual diz que todo operador polinomialmente contínuo sobre os limitados é fracamente compacto, temos que T_P não é polinomialmente contínuo sobre os limitados, logo, pela proposição 4.2.4 temos que P não é polinomialmente contínuo sobre os limitados. E o espaço l_1 tem a propriedade RP.

4.3 Exemplos de alguns espaços que não possuem a propriedade RP

Nesta seção temos por objetivo estudar alguns espaços de Banach que não tem a propriedade RP.

A seguir vamos estudar a demonstração de um lema que utilizamos na demonstração de que os espaços $L_\infty[0, 1] \approx l_\infty$ não possuem a propriedade RP. Tais demonstrações foram feitas por Aron, Choi & Llavona em [2].

Lema 4.3.1. *Seja $(I_j)_j$ uma sequência de intervalos disjuntos de $[0, 1]$, onde para cada $j \in \mathbb{N}$, I_j não é um conjunto unitário. Então $(\chi_{I_j})_j$ converge fracamente para zero em $L_\infty[0, 1]$, onde para cada $j \in \mathbb{N}$, χ_{I_j} é a função característica, $\chi_{I_j} : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ dada por:*

$$\chi_{I_j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in I_j \\ 0 & \text{se } t \notin I_j \end{cases}.$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $(\chi_{I_j})_j$ não converge fracamente para zero em $L_\infty[0, 1]$, então existe $\varphi \in (L_\infty[0, 1])^*$ tal que $\varphi(\chi_{I_j}) \not\rightarrow \varphi(0) = 0$. Desta maneira, existem uma subsequência de $(\chi_{I_j})_j$, que vamos denotar por $(\chi_{I_j})_j$, e $\epsilon > 0$ tais que $|\varphi(\chi_{I_j})| \geq \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|\varphi\| = 1$.

Mas para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(\chi_{I_j}) = |\varphi(\chi_{I_j})| \cdot e^{i\theta} \quad \text{para algum } \theta \in [0, 2\pi).$$

Tomemos φ_1 tal que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_1(\chi_{I_j}) = \varphi(\chi_{I_j}) \cdot e^{-i\theta}$$

então $\varphi_1 \in (L_\infty[0, 1])^*$ e $\varphi_1(\chi_{I_j}) \geq \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e

$$\|\varphi_1\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(\chi_{I_j})| \cdot |e^{-i\theta}| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(\chi_{I_j})| \cdot 1 = \|\varphi\| = 1.$$

Seja $f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j}$ então $f \in L_{\infty}[0, 1]$ e $\|f\|_{\infty} = 1$.

De fato:

Seja $a \in [0, 1]$ então $f(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in I_j \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } a \notin I_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \end{cases}$, logo f é limitada, mensurável e $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_1(f) &= \varphi_1\left(\sum_{j=1}^n \chi_{I_j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right) = \sum_{j=1}^n \varphi_1(\chi_{I_j}) + \varphi_1\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \epsilon + \varphi_1\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right) = n\epsilon + \varphi_1\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right) = n\epsilon + \left|\varphi_1\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right)\right| \\ &\geq n\epsilon - \left|\varphi_1\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{I_j}\right)\right| \geq n\epsilon - \|\varphi_1\| = n\epsilon - 1. \end{aligned}$$

Logo $|\varphi_1(f)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e isto contradiz o fato de $|\varphi_1(f)| \leq \|\varphi_1\| = 1$.

Portanto $(\chi_{I_j})_j$ converge fracamente a zero em $L_{\infty}[0, 1]$. ■

Teorema 4.3.2. *O espaço $L_{\infty}[0, 1] \approx l_{\infty}$ não tem a propriedade RP.*

Demonstração: Seja $I_j = \left(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}\right)$ $j = 1, 2, \dots$, e seja $(r_j(t))_j$ as funções de Rademacher sobre $[0, 1]$ definidas por $r_j(t) = \text{sign}(\sin 2^j \pi t)$ para cada $t \in [0, 1]$ (para mais detalhes ver capítulo 1, seção 2 definição 1.2.35).

Definamos $A : L_{\infty}[0, 1] \times L_{\infty}[0, 1] \times L_{\infty}[0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$A(f, g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^j \int_{I_j} f dx\right) \cdot \langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle$$

onde $\langle g, r_j \rangle = \int_0^1 g \cdot r_j dx$ para cada $g \in L_{\infty}[0, 1]$.

Sejam $f, g, h \in L_{\infty}[0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \left(2^j \int_{I_j} f dx\right) \cdot \langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle \right| &\leq \sum_{j=1}^n \left| 2^j \int_{I_j} f dx \right| \cdot |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(2^j \int_{I_j} |f(x)| dx\right) \cdot |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{j=1}^n \left(2^j \int_{I_j} \|f\|_{\infty} dx \right) \cdot |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \\
 &= \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^n \left(2^j \int_{I_j} dx \right) \cdot |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \\
 &= \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^n \left(2^j \cdot \frac{1}{2^j} \right) \cdot |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \\
 &= \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^n |\langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle| \leq \|f\|_{\infty} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\langle g, r_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\langle h, r_j \rangle|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da desigualdade de Hölder. Como $L_{\infty}[0, 1] \subset L_2[0, 1]$ e $(r_n)_n$ forma um sistema ortonormal em $L_2[0, 1]$ (proposição 1.2.36) usando a desigualdade de Bessel, $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, r_j \rangle|^2 \leq \|g\|^2 < \infty$ para cada $g \in L_{\infty}[0, 1]$, temos que

$$|A(f, g, h)| \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_2 \cdot \|h\|_2,$$

e $A(f, g, h) \in \mathbb{K}$, consequentemente

$$|A(f, g, h)| \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty} \cdot \|h\|_{\infty},$$

uma vez que

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \|g\|_{\infty}^2 dt \right)^{1/2} = \|g\|_{\infty}.$$

Agora, é fácil ver que a aplicação A é 3-linear e pelo teorema 2.1.2 temos que é contínua. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja:

$$s_j = \chi_{I_j}, \quad x_j = r_j, \quad y_j = r_j + s_j.$$

Por definição, $(x_j)_j$ e $(y_j)_j$ são seqüências limitadas em $L_{\infty}[0, 1]$. Como $y_j - x_j = s_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, segue do lema 4.3.1 que $y_j - x_j \xrightarrow{\omega} 0$. Assim para cada $P \in \mathcal{P}(^n L_{\infty}[0, 1])$ e $n \geq 1$, temos que $|P(x_j - y_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ uma vez que $L_{\infty}[0, 1]$ tem a propriedade Dunford-Pettis.

Seja $Q \in \mathcal{P}(^3 L_{\infty}[0, 1])$ definido por: $Q(f) = A(f, f, f)$ para cada $f \in L_{\infty}[0, 1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_{I_j} r_n dx = \begin{cases} \frac{1}{2^j} & \text{se } j \geq n+1 \\ -\frac{1}{2^j} & \text{se } j = n \\ 0 & \text{se } 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

onde r_n é a função de Rademacher. Então,

$$Q(x_n) = Q(r_n) = A(r_n, r_n, r_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^j \int_{I_j} r_n dx \right) \cdot \langle r_n, r_j \rangle \cdot \langle r_n, r_j \rangle.$$

Como, $\langle r_n, r_j \rangle = 0$ se $j \neq n$ e $\langle r_n, r_j \rangle = 1$ se $j = n$, então:

$$Q(x_n) = 2^n \int_{I_n} r_n dx = 2^n \cdot \left(\frac{-1}{2^n} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} Q(y_n) &= A(y_n, y_n, y_n) = A(r_n + s_n, r_n + s_n, r_n + s_n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^j \int_{I_j} (r_n + s_n) dx \right) \cdot \langle r_n + s_n, r_j \rangle^2 \end{aligned}$$

Como

$r_n + s_n = r_n$ sobre I_j quando $j < n$ ou $j > n$

$r_n + s_n = 0$ sobre I_j quando $j = n$. Assim:

$$\begin{aligned} Q(y_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} 2^j \left(\int_{I_j} r_n dx \right) \langle r_n + s_n, r_j \rangle^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^j \left(\int_{I_j} r_n dx \right) \langle r_n + s_n, r_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^j \left(\frac{1}{2^j} \right) \langle r_n + s_n, r_j \rangle^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle r_n + s_n, r_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\langle r_n, r_j \rangle + \langle s_n, r_j \rangle \right)^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle s_n, r_j \rangle^2 \end{aligned}$$

Mas $\langle s_n, r_j \rangle = \int_0^1 s_n r_j dx = \int_{I_n} r_j dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \geq n+1 \\ -\frac{1}{2^n} & \text{se } j = n \end{cases}$ logo, $Q(y_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $|Q(x_n) - Q(y_n)| = |-1 - 0| = 1$. Desta maneira,

$$|Q(x_n) - Q(y_n)| \not\rightarrow 0.$$

Portanto $L_{\infty}[0, 1]$ não possui a propriedade RP. ■

Teorema 4.3.3. *O espaço $C[0, 1]$ não possui a propriedade RP.*

Demonstração: Seja $I_j = \left(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}} \right)$, $j = 1, 2, \dots$ e seja $(r_j(t))_j$ as funções de Rademacher sobre $[0, 1]$ definidas por $r_j(t) = \text{sign}(\sin 2^j \pi t)$.

Definamos $A : C[0, 1] \times C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$A(f, g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} f \left(\frac{1}{2^j} \right) \langle g, r_j \rangle \cdot \langle h, r_j \rangle.$$

Sejam $f, g, h \in C[0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f\left(\frac{1}{2^j}\right) \langle g, r_j \rangle \langle h, r_j \rangle \right| &\leq \sum_{j=1}^n \left| f\left(\frac{1}{2^j}\right) \right| \cdot |\langle g, r_j \rangle \langle h, r_j \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|f\|_{\infty} |\langle g, r_j \rangle \langle h, r_j \rangle| \leq \|f\|_{\infty} \left(\sum_{j=1}^n |\langle g, r_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\langle h, r_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder, pois $C[0, 1] \subset L_{\infty}[0, 1]$ e $(\langle g, r_j \rangle)_j \in l_2$ e $(\langle h, r_j \rangle)_j \in l_2$. Com argumentos análogos ao teorema 4.3.2 temos que $A(f, g, h) \in \mathbb{K}$, e vale a seguinte desigualdade:

$$|A(f, g, h)| \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_2 \cdot \|h\|_2 \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty} \cdot \|h\|_{\infty}.$$

Não é difícil ver que A é 3-linear e segue do teorema 2.1.2 que é contínua.

Para cada $n \geq 2$ e $t \in [0, 1/2]$, seja:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq t \leq \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n+1} \left(t - \frac{1}{2^{n+1}}\right) & : \frac{1}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{1}{2^n} \\ -2^{n+1} \left(t - \frac{3}{2^{n+1}}\right) & : \frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{3}{2^{n+1}} \\ 0 & : \frac{3}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para $\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{j}{2^{n+1}}$, onde $j = 1, 2, \dots, 2^n$, seja:

$$f_n(t) = \begin{cases} -2^{n+1} \left(t - \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2^{n+1}}\right)\right) & : j \equiv 0 \pmod{4} \\ -2^{n+1} \left(t - \left(\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2^{n+1}}\right)\right) & : j \equiv 1 \pmod{4} \\ 2^{n+1} \left(t - \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2^{n+1}}\right)\right) & : j \equiv 2 \pmod{4} \\ 2^{n+1} \left(t - \left(\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2^{n+1}}\right)\right) & : j \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Para cada $n \geq 2$, seja

$$g_n = -f_n \chi_{[0, 1/2]} + f_n \chi_{[1/2, 1]}.$$

As seqüências $(f_n)_{n=2}^{\infty}$ e $(g_n)_{n=2}^{\infty}$ são limitadas em $C[0, 1]$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $-1 \leq f_n(t) \leq 1$ e $-1 \leq g_n(t) \leq 1$ para cada $t \in [0, 1]$, e para cada $n \geq 2$ temos

$$f_n - g_n = 2f_n \chi_{[0, 1/2]} \quad \text{e} \quad \|f_n - g_n\| = \|2f_n \chi_{[0, 1/2]}\| \leq 2 \|f_n\| \cdot \|\chi_{[0, 1/2]}\| \leq 2,$$

logo, a sequência $(f_n - g_n)_n$ é limitada em $C[0, 1]$. Seja $t \in [0, 1]$: Se $t \in [1/2, 1]$ então $(f_n - g_n)(t) = (2f_n \chi_{[0, 1/2]})(t) = 0$ para cada $n \geq 2$. Se $t \in [0, 1/2]$ existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{2^{n_t+1}} \leq t$, logo $f_n(t) = 0$ para todo $n \geq n_t$. Assim, $(f_n - g_n)(t) = (2f_n \chi_{[0, 1/2]})(t) = 0$ para todo $n \geq n_t$. Desta maneira, $(f_n - g_n)(t) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para cada $t \in [0, 1]$, logo, $f_n - g_n \xrightarrow{\omega} 0$ em $C[0, 1]$. Como $C[0, 1]$ tem a propriedade Dunford-Pettis então pelo teorema 3.1.7(1) $\|P(f_n - g_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}({}^m C[0, 1])$, $m \geq 1$. Seja $Q \in \mathcal{P}({}^3 C[0, 1])$ dado por: $Q(f) = A(f, f, f)$ para cada $f \in C[0, 1]$. Para cada $n \geq 2$ temos:

$$\begin{aligned} Q(f_n) - Q(g_n) &= A(f_n, f_n, f_n) - A(g_n, g_n, g_n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{2^j} \right) \langle f_n, r_j \rangle^2 - \sum_{j=1}^{\infty} g_n \left(\frac{1}{2^j} \right) \langle g_n, r_j \rangle^2. \\ &= f_n \left(\frac{1}{2^n} \right) \langle f_n, r_n \rangle^2 - g_n \left(\frac{1}{2^n} \right) \langle g_n, r_n \rangle^2 \\ &= \langle f_n, r_n \rangle^2 + \langle g_n, r_n \rangle^2 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle f_n, r_n \rangle &= \int_0^1 f_n r_n dx = \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{3}{2^{n+1}}} f_n r_n dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} f_n r_n dx + \dots + \int_{1 - \frac{1}{2^n}}^1 f_n r_n dx \\ &= 2^{n-1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} f_n r_n dx = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^2} \\ \text{e } \langle g_n, r_n \rangle &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f_n r_n dx = \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

logo, para cada $n \geq 2$

$$Q(f_n) - Q(g_n) = \left(\frac{1}{2^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^2} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, $C[0, 1]$ não tem a propriedade RP. ■

Teorema 4.3.4. *O espaço $L_1[0, 2\pi]$ não possui a propriedade RP.*

Demonstração: Seja $I_j = \left(\frac{2\pi}{2^j}, \frac{2\pi}{2^{j-1}} \right)$, $j = 1, 2, \dots$ e seja $(r_j(t))_j$ as funções de Rademacher sobre $[0, 2\pi]$ definidas por $r_j(t) = \text{sign}(\sin 2^{j-1}t)$.

Definamos $A : L_1[0, 2\pi] \times L_1[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$ por:

Para cada $f, g \in L_1[0, 2\pi]$

$$A(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{I_j} f r_j dx \right) \langle g, r_j \rangle.$$

Sejam $f, g \in L_1[0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j=1}^n \left(\int_{I_j} f r_j dx \right) \langle g, r_j \rangle \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{I_j} f r_j dx \right| \cdot |\langle g, r_j \rangle| \\
 & \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{I_j} |f r_j| dx \right) \cdot |\langle g, r_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{I_j} |f| \cdot |r_j| dx \right) \cdot \left| \int_0^1 g r_j dx \right| \\
 & \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{I_j} \|f\|_1 \cdot \|r_j\|_1 dx \right) \cdot \int_0^1 |g| \cdot |r_j| dx \\
 & \leq \sum_{j=1}^n \|f\|_1 \int_{I_j} dx \cdot \|g\|_1 \int_0^1 dx \\
 & = \|f\|_1 \|g\|_1 \sum_{j=1}^n \int_{I_j} = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1
 \end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$|A(f, g)| \leq \|f\|_1 \|g\|_1,$$

e $A(f, g) \in \mathbb{K}$. É fácil ver que A é 2-linear e consequentemente, pelo teorema 2.1.2 é contínua.

Para cada $j \geq 2$, seja:

$$f_j = -\text{sen}2^{j-1}t + 2\chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t + 2\chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t + \frac{2^j}{2\pi} \cdot \chi_{I_j}$$

$$g_j = -2\text{sen}2^{j-1}t + 2\chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t + 2\chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t + \frac{2^j}{2\pi} \cdot \chi_{I_j}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$ f_j e g_j são funções contínuas e

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |f_j(t)| dt & \leq \int_0^{2\pi} |\text{sen}2^{j-1}t| dt + 2 \int_0^{2\pi} |\chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t| dt \\
 & + 2 \int_0^{2\pi} |\chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \cdot \text{sen}2^{j-1}t| dt + \int_0^{2\pi} \left| \frac{2^j}{2\pi} \cdot \chi_{I_j} \right| dt \\
 & = \int_0^{2\pi} |\text{sen}2^{j-1}t| dt + 2 \int_0^{\frac{2\pi}{2^j}} |\text{sen}2^{j-1}t| dt \\
 & + 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^j}}^{2\pi} |\text{sen}2^{j-1}t| dt + \int_{I_j} \left| \frac{2^j}{2\pi} \right| dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{j-1} \int_0^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt + 2 \int_0^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt - 2 \int_{\frac{2\pi}{2^j}}^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt \\
&\quad + 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^j}}^{2\pi - \frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt - 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^{j-1}}}^{2\pi} \text{sen} 2^{j-1} t dt + \int_{I_j} \frac{2^j}{2\pi} dt \\
&= -\frac{2^2}{2^{j-1}} + 1 < 1, \quad \text{para cada } j \geq 2
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |g_j(t)| dt &\leq 2 \int_0^{2\pi} |\text{sen} 2^{j-1} t| dt + 2 \int_0^{2\pi} |\chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \cdot \text{sen} 2^{j-1} t| dt \\
&\quad + 2 \int_0^{2\pi} |\chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \cdot \text{sen} 2^{j-1} t| dt + \int_0^{2\pi} \left| \frac{2^j}{2\pi} \cdot \chi_{I_j} \right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} |\text{sen} 2^{j-1} t| dt + 2 \int_0^{\frac{2\pi}{2^j}} |\text{sen} 2^{j-1} t| dt \\
&\quad + 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^j}}^{2\pi} |\text{sen} 2^{j-1} t| dt + \int_{I_j} \left| \frac{2^j}{2\pi} \right| dt \\
&= 2^{j-1} \int_0^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt + 2 \int_0^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt - 2 \int_{\frac{2\pi}{2^j}}^{\frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt \\
&\quad + 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^j}}^{2\pi - \frac{2\pi}{2^{j-1}}} \text{sen} 2^{j-1} t dt - 2 \int_{2\pi - \frac{2\pi}{2^{j-1}}}^{2\pi} \text{sen} 2^{j-1} t dt + \int_{I_j} \frac{2^j}{2\pi} dt \\
&= -\frac{2^2}{2^{j-1}} + 1 < 1, \quad \text{para cada } j \geq 2.
\end{aligned}$$

Assim, as sequências $(f_j)_j$ e $(g_j)_j$ são limitadas em $L_1[0, 2\pi]$.

Para cada $j \geq 2$, $f_j - g_j = \text{sen} 2^{j-1} t$. Assim, a sequência $\left(\|f_j - g_j\| \right)_{j \geq 2}$ é limitada.

Vamos provar que $f_j - g_j \xrightarrow{\omega} 0$ em $L_1[0, 2\pi]$. Como $(f_j - g_j)_j$ é limitada, pelo teorema 1.2.27, basta mostrar que $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E (f_j - g_j)(t) dt = 0$ para qualquer $E \subset [0, 2\pi]$ mensurável.

Primeiro, vamos considerar $E = [a, b]$, onde $0 \leq a < b \leq 1$. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b \text{sen} 2^{j-1} t dt \right| = \left| \frac{-1}{2^{j-1}} \cos 2^{j-1} t \Big|_a^b \right| = \left| \frac{-1}{2^{j-1}} \left(\cos 2^{j-1} b - \cos 2^{j-1} a \right) \right| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{j-2}}$$

Mas $\frac{1}{2^{j-2}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Assim, $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E (f_j - g_j)(t) dt = 0$ para $E = [a, b]$. Logo, se h é uma função escada definida em $[0, 1]$, então, temos que $\int_0^1 h(t)(f_j - g_j)(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, uma vez que $h(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{I_k}(t)$ para cada $t \in [0, 1]$, onde λ_k são constantes e I_k são subintervalos

disjuntos de $[0, 1]$.

Seja $E \subset [0, 1]$ mensurável. Como χ_E é uma função limitada e mensurável, pelo teorema 1.2.26, existe uma sequência $(h_n)_n$ de funções escadas tal que $\int_0^1 |\chi_E(t) - h_n(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int_0^1 |\chi_E(t) - h_{n_0}(t)| dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Como h_{n_0} é uma função escada, temos que $\int_0^1 h_{n_0}(t)(f_j - g_j)(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int_0^1 h_{n_0}(t)(f_{j_0} - g_{j_0})(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$ para qualquer $j \geq j_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \chi_E(t)(f_j - g_j)(t) dt \right| &\leq \left| \int_0^1 (\chi_E(t) - h_{n_0}(t))(f_j - g_j)(t) dt \right| + \left| \int_0^1 h_{n_0}(t)(f_j - g_j)(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\chi_E(t) - h_{n_0}(t)| dt + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ para qualquer } j \geq j_0. \end{aligned}$$

Portanto $f_j - g_j \xrightarrow{\omega} 0$.

Seja $Q \in \mathcal{P}(^2L_1[0, 2\pi])$ definido por: $Q(f) = A(f, f)$ para cada $f \in L_1[0, 2\pi]$.

Seja $j \geq 2$, então:

$$Q(f_j) = A(f_j, f_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{I_i} f_j r_i dt \right) \langle f_j, r_i \rangle$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{I_i} f_j r_i dt &= - \int_{I_i} \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt + 2 \int_{I_i} \chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt \\ + 2 \int_{I_i} \chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt + \int_{I_i} \frac{2^j}{2\pi} \chi_{I_i} r_i dt &= 0 \quad \text{quando } 1 \leq i < j \\ \langle f_j, r_i \rangle &= \int_0^1 f_j r_i dt = - \int_0^1 \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt + 2 \int_0^1 \chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt \\ + 2 \int_0^1 \chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_i dt + \int_0^1 \frac{2^j}{2\pi} \chi_{I_i} r_i dt &= 0 \quad \text{quando } i > j. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(f_j) &= \left(\int_{I_j} f_j r_j dt \right) \langle f_j, r_j \rangle. \\ \langle f_j, r_j \rangle &= \int_0^1 f_j r_j dt = - \int_0^1 \sin 2^{j-1} t \cdot r_j dt + 2 \int_0^1 \chi_{[0, \frac{2\pi}{2^j}]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_j dt \\ &\quad + 2 \int_0^1 \chi_{[2\pi - \frac{2\pi}{2^j}, 2\pi]} \sin 2^{j-1} t \cdot r_j dt + \int_0^1 \frac{2^j}{2\pi} \chi_{I_j} r_j dt \\ &= -2^j \left(\frac{-1}{2^{j-2}} \right) + 2 \left(\frac{-1}{2^{j-2}} \right) + 2 \left(\frac{-1}{2^{j-2}} \right) - 1 = 2^2 - \left(\frac{-1}{2^{j-4}} \right) - 1 \\ \int_{I_j} f_j r_j dt &= - \int_{I_j} \sin 2^{j-1} t \cdot r_j dt - 1 = \int_{I_j} \sin 2^{j-1} t dt - 1 = -\frac{1}{2^{j-2}} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(f_j) &= -\frac{1}{2^{j-4}} + \frac{1}{2^{2j-6}} + \frac{1}{2^{j-2}} - 2^2 + \frac{1}{2^{j-4}} + 1 \\ &= \frac{1}{2^{2j-6}} + \frac{1}{2^{j-2}} - 3 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} Q(g_j) &= \left(\int_{I_j} g_j r_j dt \right) \langle g_j, r_j \rangle. \\ \langle g_j, r_j \rangle &= 2^3 - \frac{1}{2^{j-4}} - 1 \\ \int_{I_j} g_j r_j dt &= -\frac{1}{2^{j-3}} - 1. \\ Q(g_j) &= -\frac{1}{2^{j-6}} + \frac{1}{2^{2j-7}} + \frac{1}{2^{j-3}} - 2^3 + \frac{1}{2^{j-4}} + 1 \\ &= -\frac{1}{2^{j-6}} + \frac{1}{2^{2j-7}} + \frac{1}{2^{j-3}} + \frac{1}{2^{j-4}} - 7. \end{aligned}$$

Assim,

$$Q(f_j) - Q(g_j) = \frac{1}{2^{2j-6}} + \frac{1}{2^{j-2}} - 3 + \frac{1}{2^{j-6}} - \frac{1}{2^{2j-7}} - \frac{1}{2^{j-3}} - \frac{1}{2^{j-4}} + 7 \longrightarrow 4.$$

Portanto $L_1[0, 2\pi]$ não tem a **propriedade RP**. ■

Observamos que o polinômio Q acima definido não é polinomialmente contínuo sobre B_X quando $X = L_1[0, 2\pi]$, pois as sequências $(f_j)_{j=2}^\infty, (g_j)_{j=2}^\infty \subset B_X$, e $L_1[0, 2\pi]$ é Dunford-Pettis então $|P(f_j - g_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(L_1[0, 2\pi])$. Assim, dado $\delta > 0$, para cada família finita $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(L_1[0, 2\pi])$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|P_k(f_j - g_j)| < \delta$ para todo $j \geq j_0$ e cada $k = 1, \dots, n$. Para $0 < \epsilon \leq |Q(f_{j_0}) - Q(g_{j_0}) - 4|$ temos que $|Q(f_{j_0}) - Q(g_{j_0})| \geq 4 \geq \epsilon$. Portanto, o polinômio Q não é polinomialmente contínuo sobre os limitados.

Analogamente vemos que os polinômios construídos nos teoremas 4.3.2 e 4.3.3 também não são polinomialmente contínuos sobre os limitados.

De maneira análoga ao teorema 4.3.4, também podemos provar que o espaço $L_1[0, 1]$ não tem a **propriedade RP**. Basta tomar os intervalos $I_j = (\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}})$, $j = 1, 2, \dots$, $(r_j(t))_j$ a sequência de funções de Rademacher sobre $[0, 1]$ definidas por $r_j(t) = \text{sign}(\sin 2^j \pi t)$ e a aplicação $A : L_1[0, 1] \times L_1[0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por: Para cada $f, g \in L_1[0, 1]$

$$A(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{I_j} f r_j dx \right) \langle g, r_j \rangle$$

Para cada $j \geq 2$, seja:

$$f_j = -\operatorname{sen} 2^j \pi t + 2\chi_{[0, \frac{1}{2^j}]} \cdot \operatorname{sen} 2^j \pi t + 2\chi_{[1-\frac{1}{2^j}, 1]} \cdot \operatorname{sen} 2^j \pi t + 2^j \cdot \chi_{I_j}$$

$$g_j = -2\operatorname{sen} 2^j \pi t + 2\chi_{[0, \frac{1}{2^j}]} \cdot \operatorname{sen} 2^j \pi t + 2\chi_{[1-\frac{1}{2^j}, 1]} \cdot \operatorname{sen} 2^j \pi t + 2^j \cdot \chi_{I_j}$$

e $Q \in \mathcal{P}(^2L_1[0, 1])$ um polinômio dado por: $Q(f) = A(f, f)$ para cada $f \in L_1[0, 1]$.

O polinômio $Q \in \mathcal{P}(^2L_1[0, 1])$ acima definido também não é polinomialmente contínuo sobre os limitados. Vê-se tal fato de maneira análoga ao caso do espaço $L_1[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \\ & \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} \\ & \vdots \\ & \frac{1}{x^n} = x^{-n} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-n} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, R., Aron, R.M. & Dineen, S., *A reflexive of holomorphic functions in infinitely many variables*, Proc. Amer. Math. Soc., 90 (3) (1984) 407-411.
- [2] Aron, R.M., Choi, Y. S. & Llavona, J.G., *Estimates by polynomials*, Bull. Austral. Math. Soc., 52 (1995), 475-486.
- [3] Aron, R.M., Cole, B.J. & Gamelin, T.W., *Spectra of algebras of analytic functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math., 415, (1991), 51-93.
- [4] Aron, R.M., Hervés, C. & Valdivia, M., *Weakly continuous mappings on Banach spaces*, J. Funct. Anal., 52 (1983) 189-204.
- [5] Aron, R.M., & Prolla, J.B., *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math., 313 (1980) 195-216.
- [6] Barra, G., *Introduction to Measure Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974.
- [7] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, Math. Stud. Monogr. Ser., 68, Norh-Holland, Amsterdam, 1985.
- [8] Biström, P., Jaramillo, J. A. & Lindström, M., *Polynomial compactness in Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math., 28 (4) (1998) 1203-1225.
- [9] Castillo, J.M.F., Garcia, R. & Gonzalo, R., *Banach spaces in which all multilinear forms are weakly sequentially continuous*, Studia Math., 136 (2) (1999), 121-145.
- [10] Castillo, J.M.F., & Sanchez, C., *Weakly-p-compact, p-Banach-Saks and super-reflexive Banach spaces*, J.Math.Anal. Appl., 185 (1994) 256-261.
- [11] Chae, S.B., *Holomorphy and Calculus in Normed Spaces*, March Dikker, 1985.
- [12] Choi, Y.S. & Kim, S.G., *Polynomial properties of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 190 (1995) 203-210.

- [13] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, 92 (1984).
- [14] Diestel, J., *A survey of results the Dunford-Pettis property*, Proc. Conference in Integration, Topology and Geometry in Linear Spaces, W. Graves (ed) Contemp. Math. vol2, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1980, 15-60.
- [15] Diestel, J., Jarchow, H. & Tonge, A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 43 (1995).
- [16] Farmer, J. & Johnson, W.B., *Polynomial Schur and polynomial Dunford-Pettis properties*, Contem. Math. 144 (1993) 95-105.
- [17] Gamelin, T.W., *Analytic functions on Banach spaces*, Complex potencial theory (Montreal, PQ, 1993) 187-233, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., 439, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [18] Gonzalez, M., Gutiérrez, J.M. & Llavona J.G., *Polinomial continuity on l_1* , Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997) 1349-1353.
- [19] Gonzalo, R., & Jaramillo, J. A., *Compact polynomials between Banach spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect.A, vol 95A , 213-226 (1995).
- [20] Gutiérrez, J.M. & Llavona, J.G., *Polynomially continuos operators*, Israel J. Math., 102 (1997) 179-187.
- [21] Hissadomi, A.J., *Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial e Espaços Polinomialmente de Schur*, Dissertação de mestrado, IME-USP (1998).
- [22] James, R.C., *Super-reflexive Banach spaces*, Canad. J. Math., vol. XXIV, (5), (1972) 896-904.
- [23] Jaramillo, J.A., & Prieto, A., *Weak-polynomial convergence on a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (2), (1993) 463-468.
- [24] Kreyszig, E. *Introductory Funtional Analysis with Applications*, New York, 1978.
- [25] Lindenstrauss, J. & Tsafiriri, L., *Classical Banach Spaces*, voll1, Springer-Verlag, Berlin, (1977).
- [26] Littlewood, J.E., *On bilinear forms in an infinite number of variables*, Q. J. Math., 1 (1930), 164-174.
- [27] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, Math. Studies 120, North-Holland, Amsterdam, (1986).
- [28] Rodrigues, L.P., *Um Teorema de Hahn-Banach para Polinômios Homogêneos*, Dissertação de mestrado, IME-USP (2001).

- [29] Ryan, R. A., *Dunford-Pettis properties*, Bull. Acad. Polon. Ser. Sci. Math. 27 (1979) 373-379.
- [30] Sargent, W.L.C., *Some sequence space related to the l_p spaces*, J. London Math. Soc. 35 (1960) 161-171.
- [31] Tsirelson, B.S. *Not every Banach space contains an imbedding of l_p or c_0* , Funct. Anal. Appl., 8 (1974), 138-141.