**Hipoelipticidade Gevrey
de uma classe de
sistemas sobredeterminados**

Jairo Eloy Castellanos Ramos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

-São Paulo, 5 de outubro de 2001-

Hipoelipticidade Gevrey de uma classe de sistemas sobredeterminados

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e defendida
por Jairo Eloy Castellanos Ramos
e aprovada pela comissão julgadora.

-São Paulo, 5 de outubro de 2001-

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) (-IME-USP)
- Prof. Dr. Oscar Fortunato Vilcachagua Erazo (-IME-USP)
- Prof. Dr. Gerson Petronilho (-UFSCar)
- Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco (-UFSCar)
- Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho (-UFSCar)

Ao meu filho Santiago.
Aos meus pais Julio e Altagracia.
À minha irmã Claudia (In memoriam) e
À Sandra, companheira de todas as jornadas.

Agradecimentos

Primeiramente, eu gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro pela sugestão inicial e pelas sugestões subseqüentes, ao longo do processo que deu origem a este trabalho. Agradeço pela orientação e paciência durante estes cinco anos. Impossível descrever aqui o quanto aprendi enquanto estive sob sua orientação.

Agradeço

Ao prof. Dr. Oscar Vilcachagua Erazo pela boa vontade que sempre teve para discutir assuntos relacionados a este trabalho.

Aos meus colegas de Mestrado e Doutorado que muito me ajudaram e estimularam, com palavras e ações. Em especial, àqueles que comigo participaram do seminário sobre equações diferenciais parciais lineares, o qual se revelou muito útil na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos do IME, em especial Regina e Héilton, Claudia e Edwin, Alice e Leandro, Deborah, Laura, Sebastião, Júlio, Mário, Celso.

Aos meus amigos colombianos, Liliam, Luz Estela, Patricia, Ivonne, Gladys, Paola, Alvaro, Hernan, Leonardo e Juan Diego. Em especial, agradeço a Sandra, ao Domingo e Mauricio pelo apoio e força, que me ajudaram a nunca desistir.

Um parágrafo especial quero dedicar aos meus professores que tive na Colômbia, com quem aprendi muito, e que para mim foram exemplo de dedicação ao trabalho. Por terem feito com que eu gostasse cada vez mais de matemática, e sobretudo com que eu aprendesse cada vez mais, agradeço aos professores Jorge Mejía, Pedro Isaza, Volker Stallbohm e Gilberto Garcia.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Finalizando, agradeço ao amor da Sandra, sua compreensão e apoio que tornaram mais fácil esta tarefa.

Jeloy

Resumo

Neste trabalho apresentamos o estudo da hipoelipticidade Gevrey de uma classe de sistemas sobredeterminados de campos vetoriais utilizando as idéias de H. M. Maire. O sistema em questão é dado por $\mathbb{D} = d_t + d_t B(t, D_x)$, onde $B(t, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{R}^m)$.

Abstract

In this work we present the study of the hypoellipticity Gevrey of a class of overdetermined system of vector fields using the ideas of H. M. Maire. The system we are dealing with is $\mathbb{D} = d_t + d_t B(t, D_x)$, where $B(t, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{R}^m)$.

Sumário

Introdução	1
1 Hipoeleptividade $\mathbb{G}^s$ -Global	3
1.1 Notações e Definições	3
1.2 O conceito de hipoeleptividade $\mathbb{G}^s$	4
1.3 Uma caracterização da hipoeleptividade $\mathbb{G}^s$	6
1.4 Uma condição necessária e suficiente para hipoeleptividade $\mathbb{G}^s$	14
2 Hipoeleptividade Gevrey quando a Estrutura é Tubular	28
2.1 Classes de Gevrey	28
2.2 Estruturas localmente integráveis e seu complexo. Estruturas tubulares e estruturas hipocomplexas	30
2.3 As classes G_{ML}^s	33
2.4 O conceito de hipoeleptividade Gevrey	34
2.5 O teorema principal	35
2.5.1 Demonstração do teorema principal: Preliminares	36
2.5.2 Demonstração do teorema principal: Conclusão.	39
3 Exemplo de um sistema que é analítico hipoeleptico, não hi- poelíptico $\mathcal{C}^\infty$ e não G^s hipoeleptico para $s > 1$	49

Introdução

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a regularidade Gevrey das soluções do operador diferencial

$$\mathbb{D} = d_t + d_t B(t, D_x),$$

onde $t \in \Theta \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^m$ e $B(t, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{R}^m)$. A pesquisa feita apoiou-se fortemente no trabalho [M] da bibliografia.

No capítulo I apresentamos uma condição necessária e suficiente para que $\mathbb{D}$ seja $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico; dizemos que $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico se $u \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ e $\widehat{\mathbb{D}u} \in \Lambda^1 \mathcal{W}^s(\Theta, P)$ implica $u \in \mathcal{W}^s(\Theta, P)$. Mostramos que uma condição necessária e suficiente para que $\mathbb{D}$ seja $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico é que a função $B(t, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, S^{m-1})$ satisfaça a condição (R) (Definição 1.6).

No capítulo II, introduzimos os espaços de funções Gevrey $G_{\mathbf{M}}^{s,h}$. Isto é, dada uma carta $(\Omega; Z)$ centrada na origem onde $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável, a valores em $\mathbb{C}^m$, com diferenciais $dZ_1, \dots, dZ_m$

$\mathbb{C}$ -linearmente independentes sobre Ω . Coordenadas especiais $(x, t) = (x_1, \dots,$

$x_m, t_1, \dots, t_n$) em Ω permitem expressar $Z(x, t)$ na forma $x + i\Phi(x, t)$ tornando Ω difeomorfo ao traço $\Sigma \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ da aplicação $(x, t) \mapsto (Z(x, t), t)$. Damos especial destaque para a base (M, L) de $\mathbb{C}T\Omega$ dual da base $(dZ, dt) = (dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n)$ de $\mathbb{C}T^*\Omega$, constituída por derivações $M_1, \dots, M_m, L_1, \dots, L_n$ satisfazendo a dualidade $M_k t_j = 0, L_j Z_k = 0, M_k Z_{k'} = \delta_{kk'}, L_j t_{j'} = \delta_{jj'}$; aqui δ é a função *delta de Kronecker*. Funções $u = u(x, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $U \subset\subset \Omega$ da origem, cumprindo a estimativa

$$\sup_{\bar{U}} |M^\alpha L^\gamma u| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|+|\gamma|} \cdot (|\alpha| + |\gamma|)!^s, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n},$$

para uma amplitude $h > 0$, constituem espaços de Banach $G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$ com a respectiva norma $\|u\|_{s,h,U}$ determinada pelo ínfimo das constantes na estimativa. Como no caso usual, as inclusões $G_{\text{ML}}^{s,h}(U) \hookrightarrow G_{\text{ML}}^{s,h+}(U)$ são compactas para todo $h < h_+$, tornando $G_{\text{ML}}^s(U) = \lim_{h \rightarrow \infty} G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$ Hausdorff e Montel com a topologia de limite indutivo.

O principal resultado deste capítulo afirma que se $L = d_t - id\Phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ e Φ uma função C^∞ aberta satisfazendo a estimativa (2.8) então L é G_{ML}^s -hipoelítico para todo $s \geq 1$ (cf. Teorema 2). Segue que se $\mathcal{V}$ é uma estrutura hipocomplexa tubular sobre Ω com $m = 1$ então $\mathcal{V}$ é G^s -hipoelítico para todo $s \geq 1$ (cf. Corolário 2.1), onde G^s é o espaço de funções Gevrey usual.

Finalmente, no capítulo III, damos um exemplo de um sistema $L = \{L_1, L_2\}$ para o qual não se cumpre a propriedade:

$$u \in C^0, Lu \in \wedge^1 G^s \Rightarrow u \in C^1, \quad s > 1.$$

Capítulo 1

Hipoelipticidade $\mathbb{G}^s$ -Global

1.1 Notações e Definições

Iniciamos esta seção introduzindo alguns espaços de funções.

Definição 1.1 *Dados os números reais $s \geq 1$, $c > 0$ e o conjunto compacto $P \subset S^{m-1}$, define-se o espaço de Hilbert $\mathbf{H}^{s,c}(P)$ como sendo o espaço das funções u pertencentes a $\mathbf{L}^2(\Gamma(P), e^{2c|\xi|^{1/s}} d\xi)$ com $\Gamma(P)$ o cone de base P em $\mathbf{R}^m$.*

Observação 1 *As inclusões*

$$\mathbf{H}^{s,c}(P) \hookrightarrow \mathbf{H}^{s,c'}(P) \quad , \quad c' < c$$

são contínuas com norma ≤ 1 e portanto são fracamente compactas.

Segue da *Observação 1* e de ([Ko], Th. 6 (pág. 372)) que os espaços

$$\mathbf{H}^s(P) = \lim_{c \searrow 0} \mathbf{H}^{s,c}(P) \tag{1.1}$$

são Hausdorff, reflexivos, completos, (DF) e bornológicos com a topologia de limite indutivo.

Definição 1.2 *Sejam $\Theta \subset \mathbf{R}^n$ aberto, $P \subset S^{m-1}$ compacto, $s \geq 1$ e $c > 0$. Chamamos de $\mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em Θ a valores no espaço de Hilbert $\mathbf{H}^{s,c}(P)$.*

A topologia em $\mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ é dada pelas semi-normas

$$\mathcal{P}_{l,K}^{s,c}(u) = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\alpha u(t, \xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}, \quad K \subset\subset \Theta, \quad l \in \mathbf{Z}_+,$$

que torna $\mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ um espaço de Fréchet.

Definição 1.3 *Sejam Θ , P e s como na Definição 1.2. Vamos denotar por $\mathcal{W}^s(\Theta, P)$ o espaço das funções que pertencem a $\mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ para algum $c > 0$.*

Explicitando

$$\mathcal{W}^s(\Theta, P) \doteq \bigcup_{c>0} \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P) \subset \mathcal{C}^\infty(\Theta, H^s(P)),$$

e vamos considerar em $\mathcal{W}^s(\Theta, P)$ a topologia induzida por $\mathcal{C}^\infty(\Theta, H^s(P))$.

1.2 O conceito de hipoelipticidade $\mathbb{G}^s$

Iniciamos introduzindo o operador $\mathbb{D}$ amplamente estudado por **F. Treves** em [T] . Sejam $\Theta \subset \mathbf{R}^n$ aberto e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{R}^m)$. Vamos considerar o operador

$$\mathbb{D} : \mathcal{D}'(\Theta \times \mathbf{R}^m) \longrightarrow \wedge^1 \mathcal{D}'(\Theta \times \mathbf{R}^m),$$

onde $\mathbb{D}u = d_t u + d_x B(t, D_x)u$, $t \in \Theta$, $x \in \mathbf{R}^m$ e $B(t, \xi) = \phi(t) \cdot \xi$. Observe que a equação

$$\mathbb{D}u = f = \sum_{j=1}^n f_j(t, x) dt_j \tag{1.2}$$

é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} + \frac{\partial B}{\partial t_j}(t, D_x)u = f_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Explicitando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_j} + \frac{\partial B}{\partial t_j}(t, D_x)u &= \frac{\partial u}{\partial t_j} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \cdot D_x \right) u \\ &= \frac{\partial u}{\partial t_j} + \frac{1}{i} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ &= f_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Definição 1.4 Dizemos que o operador $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -Globalmente Hipoelíptico no índice s em $\Theta \times P$ se para $u \in C^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$,

$$\widehat{\mathbb{D}}u \in \wedge^1 \mathcal{W}^s(\Theta, P) \implies u \in \mathcal{W}^s(\Theta, P),$$

onde $\widehat{\mathbb{D}} = e^{-B(t, \xi)} d_t e^{B(t, \xi)}$.

Observação 2 Se $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}; \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$, então $\mathbb{D}u \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}; \mathbf{L}^2(\Gamma(P))) \implies u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}; \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$. A prova consiste em aproveitar-se das equações (1.2), agora assumidas válidas em $\mathcal{O}$, onde $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}; \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$, para obter regularidade arbitrariamente alta com respeito a t da solução u .

Definição 1.5 O operador $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -Hipoelíptico em $\Theta \times P$ se $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico em cada subconjunto $\mathcal{O} \times P$ de $\Theta \times P$ com $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto.

1.3 Uma caracterização da hipoelipticidade $\mathbb{G}^s$

Vamos agora a estudar uma caracterização da hipoelipticidade $\mathbb{G}$ do operador $\mathbb{D}$, na sua demonstração usaremos os seguintes Lemas:

Lema 1 *Seja $s \geq 1$. Dada $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ com $\widehat{\mathbb{D}}\psi \in \wedge^1 \mathcal{W}^s(\Theta, P)$, existem $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(\Theta; \mathbf{L}_c^2(\Gamma(P)))$ tais que $\psi_j \rightarrow \psi$ em $\mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ e $\widehat{\mathbb{D}}\psi_j \rightarrow \widehat{\mathbb{D}}\psi$ em $\wedge^1 \mathcal{W}^s(\Theta, P)$.*

Demonstração :

- ▷ Seja $\mathcal{X}_j$ a função característica do conjunto $\Gamma(P) \cap \{|\xi| \leq j\}$ e considerando as funções $\psi_j = \psi(t, \xi) \mathcal{X}_j(\xi)$, $t \in \Theta$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, $j = 1, 2, \dots$. Vê-se facilmente que $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(\Theta; \mathbf{L}_c^2(\mathbf{R}^m))$ e $\psi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \psi$ em $\mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$.

Por outro lado, observe que $\widehat{\mathbb{D}}\psi \in \wedge^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ para algum $c > 0$. Então, para $c' < c$, $c' > 0$, $K \subset \Theta$ compacto e $l \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{l,K}^{s,c'}(\widehat{\mathbb{D}}\psi - \widehat{\mathbb{D}}\psi_j) &= \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c'|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha [\widehat{\mathbb{D}}\psi - \widehat{\mathbb{D}}\psi_j](t, \xi) \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c'|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}}\psi(t, \xi) \right|^2 |1 - \mathcal{X}_j(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2(c'-c)|\xi|^{1/s}} e^{2c|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}}\psi(t, \xi) \right|^2 |1 - \mathcal{X}_j(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2(c'-c)|j|^{1/s}} e^{2c|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}}\psi(t, \xi) \right|^2 |1 - \mathcal{X}_j(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
 &\leq e^{(c'-c)|j|^{1/s}} \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}}\psi(t, \xi) \right|^2 d\xi \right]^{1/2},
 \end{aligned}$$

que tende a zero quando $j \rightarrow \infty$, pois $\widehat{\mathbb{D}}\psi \in \wedge^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$. $\square$

Lema 2 *Seja G um espaço localmente convexo, Hausdorff e seja $\{E_n\}$ uma seqüência de espaços de Fréchet. Seja F um espaço de Fréchet e assuma dadas aplicações lineares contínuas $u_n : E_n \longrightarrow G$, $u : F \longrightarrow G$ tais que*

$$u(F) \subset \bigcup_n u_n(E_n).$$

Então existe k tal que $u(F) \subset u_k(E_k)$.

Demonstração :

▷ Ver [G]. Teorema 1, pág. 198. □

Notação: Para $L \subset \Theta$ compacto e l inteiro não negativo denotamos por

$$\mathcal{Q}_{l,L}(f) = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{t \in L} \|\partial_t^\alpha f(t, \cdot)\|_{L^2(\Gamma(P))}.$$

Proposição 1.1 *O operador $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico em $\Theta \times P$ se e só se para cada $c > 0$, existe $c' > 0$ tal que para todo inteiro não negativo m e todo compacto $K \subset \Theta$ existem $m' \in \mathbb{N}$, $K' \subset \Theta$ compacto e $C > 0$ constante com*

$$\mathcal{P}_{m,K}^{s,c'}(g) \leq C \left(\mathcal{Q}_{m',K'}(g) + \mathcal{P}_{m',K'}^{s,c}(\widehat{\mathbb{D}}g) \right), \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, L_c^2(\Gamma(P))). \quad (1.3)$$

Demonstração :

▷ [$\implies$]. Seja $F \doteq \{w \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, L^2(\Gamma(P))) : \widehat{\mathbb{D}}w \in \wedge^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)\}$.

Afirmção: *Existe $c' > 0$ tal que $F \subset \mathcal{W}^{s,c'}(\Theta, P)$.* A afirmação se segue do Lema 2. De fato, F é um espaço de Fréchet com a topologia do gráfico e as aplicações inclusões Π de F em $\mathcal{C}^\infty(\Theta, L^2(\Gamma(P)))$ e $J_n : \mathcal{W}^{s,1/n}(\Theta, P) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Theta, L^2(\Gamma(P)))$ são contínuas, e por hipótese

$$\Pi(F) \subset \bigcup J_n(\mathcal{W}^{s,1/n}(\Theta, P)).$$

Assim, pelo Lema 2, existe $c' > 0$ tal que $F \subset \mathcal{W}^{s,c'}(\Theta, P)$.

Por outro lado, pelo teorema do gráfico fechado $F \hookrightarrow \mathcal{W}^{s,c'}(\Theta, P)$ é contínua. Portanto se cumpre a condição (1.3).

[$\Leftarrow$]. Seja $w \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ tal que $\widehat{\mathbb{D}}w \in \Lambda^1 \mathcal{W}^s(\Theta, P)$. Logo existe $c > 0$ tal que $\widehat{\mathbb{D}}w \in \Lambda^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$. Pelo *Lema 1* existem $w_j \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}_c^2(\Gamma(P)))$ tais que $w_j \rightarrow w$ em $\mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ e $\widehat{\mathbb{D}}w_j \rightarrow \widehat{\mathbb{D}}w$ em $\Lambda^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$. Aplicando a desigualdade (1.3) para a função $w_j - w_k$ obtemos que existe $c' > 0$ tal que dados m inteiro não negativo e $K \subset \Theta$ compacto existem $m' \in \mathbb{N}$, $K' \subset \Theta$ compacto e $C > 0$ constante com

$$\mathcal{P}_{m,K}^{s,c'}(w_j - w_k) \leq C \left(\mathcal{Q}_{m',K'}(w_j - w_k) + \mathcal{P}_{m',K'}^{s,c}(\widehat{\mathbb{D}}[w_j - w_k]) \right).$$

Como $\{w_j\}$ e $\{\widehat{\mathbb{D}}w_j\}$ são Cauchy em $\mathcal{C}^\infty(\Theta; \mathbf{L}_c^2(\Gamma(P)))$ e $\Lambda^1 \mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$ respectivamente, $\forall(m, K)$

$$\mathcal{P}_{m,K}^{s,c'}(w_j - w_k) \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0,$$

e assim $\{w_j\}$ é Cauchy em $\mathcal{W}^{s,c'}(\Theta, P)$.

Portanto $w_j \rightarrow w^\bullet$ em $\mathcal{W}^{s,c'}(\Theta, P) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Theta; \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$ e assim $w = w^\bullet$. $\square$

Proposição 1.2 *O operador $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoeĺıptico em $\Theta \times P$ se e só se para cada $c > 0$ existe $c' > 0$ tal que para todo $K \subset \Theta$ compacto existem $K' \subset \Theta$ compacto, $m' > 0$ inteiro e $C > 0$ constante tais que*

$$e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| \leq C \left\{ \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha dv(t)| \right\}, \quad (1.4)$$

$$\forall \rho > 0, \quad \forall \dot{\xi} \in P, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Theta).$$

Demonstração :

Começaremos demonstrando que a propriedade (1.4) é equivalente a:

Para cada $c > 0$ existe $c' > 0$ tais que para todo $K \subset \Theta$ compacto e $m \in \mathbb{N}$ existem $K' \subset \Theta$ compacto, $m^ > 0$ inteiro e $C^* > 0$ constante tal que*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha v(t)| \leq C^* \left\{ \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| \right. \\ \left. + \sum_{|\alpha| \leq m^*} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha dv(t)| \right\}, \quad \rho > 0, \dot{\xi} \in P, v \in C^\infty(\Theta). \quad (1.5)$$

É imediato que (1.5) implica (1.4), basta tomar $m = 0$.

Veamos que (1.4) implica (1.5). Basta provar que para $|\gamma| \leq m$

$$e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\gamma v(t)| \leq C^* \left\{ \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| \right. \\ \left. + \sum_{|\alpha| \leq m^*} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha dv(t)| \right\}. \quad (1.6)$$

Aplicando (1.4) com $\partial_t^\gamma v$ em lugar de v obtemos que para $c > 0$ existe $c' > 0$ tal que para cada $K \subset \Theta$ compacto existem $K' \subset \Theta$ compacto, $m' > 0$ inteiro e $C > 0$ constante tais que

$$e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\gamma v(t)| \leq C \left\{ \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\gamma v(t)| \right. \\ \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^{\gamma+\alpha} dv(t)| \right\},$$

e portanto, existem C^* e $m^* = m' + m$ tal que

$$e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\gamma v(t)| \leq C^* \sum_{|\alpha| \leq m^*} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha dv(t)|.$$

Podemos agora demonstrar a proposição: Basta provar que (1.5) é equivalente a (1.3).

Vejamos que (1.5) implica (1.3). Escolha v dependendo de $\xi = \rho\dot{\xi}$:

$$v(t, \xi) = e^{B(t, \xi)} u(t, \xi), \quad u \in C^\infty(\Theta, L_c^2(\Gamma(P))).$$

Seja $c > 0$ e escolha $c^* < c$. Com estas escolhas de v e c^* , (1.5) implica que existe c^{**} tal que dados $K \subset \Theta$ compacto e $m \in \mathbb{N}$ existem $K' \subset \Theta$ compacto, $m^* > 0$ inteiro e $C^* > 0$ constante tais que

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m} e^{c^{**}|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} \left| \partial_t^\alpha e^{\rho B(t, \dot{\xi})} u(t, \xi) \right| \\ & \leq C^* \left\{ \sup_{t \in K'} |u(t, \xi)| + \sum_{|\alpha| \leq m^*} e^{c^*|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} \left| \partial_t^\alpha d_t e^{B(t, \xi)} u(t, \xi) \right| \right\} \\ & = C^* \left\{ \sup_{t \in K'} |u(t, \xi)| + \sum_{|\alpha| \leq m^*} e^{c^*|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} \left| \partial_t^\alpha e^{\rho B(t, \dot{\xi})} \widehat{\mathbb{D}} u(t, \xi) \right| \right\} \\ & \leq C_1 \left\{ \sup_{t \in K'} |u(t, \xi)| + \sum_{|\alpha| \leq m''} \rho^{m''} e^{c^*|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}} u(t, \xi) \right| \right\} \\ & \leq C_1 \left\{ \sup_{t \in K'} |u(t, \xi)| + \sum_{|\alpha| \leq m''} e^{c|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}} u(t, \xi) \right| \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

para certos $C_1 > 0$ e $m'' \in \mathbb{Z}_+$ onde $\widehat{\mathbb{D}} = e^{-B(t, \xi)} d_t e^{B(t, \xi)}$.

Por outro lado, observe que para $c' < c^{**}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m} e^{c'|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K} |\partial_t^\alpha u(t, \xi)| \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq m} e^{c^{**}|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} \left| \partial_t^\alpha e^{\rho B(t, \dot{\xi})} u(t, \xi) \right|. \end{aligned}$$

Portanto, usando (1.7), obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} e^{c'|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K} |\partial_t^\alpha u(t, \xi)| \leq C_1 \left\{ \sup_{t \in K'} |u(t, \xi)| + \sum_{|\alpha| \leq m''} e^{c|\xi|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}}u(t, \xi) \right| \right\}.$$

A desigualdade (1.3) segue disto, depois de tomar o quadrado e integrar sobre $\Gamma(P)$.

Vejamos que (1.3) implica (1.5). Sejam $c > 0$ e

$$u(t, \xi) = e^{-B(t, \xi)} v(t) \phi(\xi), \quad v \in \mathcal{C}^\infty(\Theta),$$

e $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ com suporte em $\Gamma(P)$.

Aplicando a propriedade (1.3) para $c^* < c$ e u , temos que $\forall (K, m)$ existem (K', m') tais que

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{t \in K} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c^*|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \xi)} v(t)) \phi(\xi) \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ & \leq C \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m'} \sup_{t \in K'} \left[\int_{\Gamma(P)} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \xi)} v(t)) \right|^2 |\phi(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} \sup_{t \in K'} \left[\int_{\Gamma(P)} e^{2c|\xi|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha \widehat{\mathbb{D}} e^{-B(t, \xi)} v(t) \right|^2 |\phi(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Para qualquer $\dot{\xi}_0 \in P$, $\rho > 0$ tomando, na desigualdade anterior, a seqüência $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$ com suporte contido em $\Gamma(P)$ tal que $\text{supp } \phi_j \rightarrow \{\rho \dot{\xi}_0\}$ e $\phi_j^2 \rightarrow \delta(\xi - \rho \dot{\xi}_0)$ quando $j \rightarrow \infty$ em $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^m)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{t \in K} \left[e^{2c^*|\rho|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t)) \right|^2 \right]^{1/2} \\
& \leq C \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m'} \sup_{t \in K'} \left[\left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t)) \right|^2 \right]^{1/2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} \sup_{t \in K'} \left[e^{2c^*|\rho|^{1/s}} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} dv(t)) \right|^2 \right]^{1/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Assim para $\rho > 1$ temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\alpha| \leq m} e^{c^*|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t)) \right| \\
& \leq C \left\{ \sup_{t \in K'} \sum_{|\alpha| \leq m'} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t)) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c^*|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} dv(t)) \right| \right\} \\
& \leq C_1 \left\{ \rho^{m'} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c^*|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \partial_t^{\alpha-\beta} (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)}) \partial_t^\beta dv(t) \right| \right\} \\
& \leq C_1 \left\{ \rho^{m'} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c^*|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \rho^{\alpha-\beta} e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} \partial_t^\beta dv(t) \right| \right\} \\
& \leq C_2 \left\{ \rho^{m'} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} \rho^{m'} e^{c^*|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} \partial_t^\alpha dv(t) \right| \right\} \\
& \leq C_2 \left\{ \rho^{m'} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} \partial_t^\alpha dv(t) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $c' < c^*$, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} e^{c'|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K} \left| \partial_t^\alpha (e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t)) \right| &\leq C_2 \left\{ \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} v(t) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c|\rho|^{1/s}} \sup_{t \in K'} \left| e^{-B(t, \rho \dot{\xi}_0)} \partial_t^\alpha dv(t) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Quando $0 < \rho \leq 1$ (1.5) segue trivialmente. Assim, segue (1.5) no ponto $\rho \dot{\xi}_0$ com uma constante válida para qualquer $\rho > 0$, $\dot{\xi} \in P$. $\square$

1.4 Uma condição necessária e suficiente para hipoelipticidade $\mathbb{G}^s$

Agora introduzimos as funções F_K e $E_{K,\mu}$ necessárias para medir a variação de B , que servirão para dar uma condição necessária e suficiente sobre B para a $\mathbb{G}^s$ -hipoelipticidade de $\mathbb{D} = d_t + d_t B(t, D_x)$.

Sejam $\Theta \subset \mathbf{R}^n$ aberto, K um conjunto compacto em Θ e $(t, \dot{\xi}) \in K \times S^{m-1}$; para $r \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} K(t, \dot{\xi}; r) &= \{s \in K; B(s, \dot{\xi}) \leq B(t, \dot{\xi}) + r\}, \\ K(t, \dot{\xi}) &= K(t, \dot{\xi}; 0). \end{aligned}$$

Estes são subconjuntos de sub níveis fechados de $s \mapsto B(s, \dot{\xi})$ em K de altura $B(t, \dot{\xi}) + r$. Denotamos por $K_0(t, \dot{\xi}; r)$ a componente conexa de t em $K(t, \dot{\xi}; r)$. Fazemos

$$\begin{aligned} F_K(t, \dot{\xi}; r) &= \sup_{s \in K_0(t, \dot{\xi}; r)} (B(t, \dot{\xi}) - B(s, \dot{\xi})) \\ F_K(t, \dot{\xi}) &= F_K(t, \dot{\xi}; 0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Observe que a função $r \mapsto F_K(t, \dot{\xi}; r)$ é não decrescente e não negativa. Além disso, se $d_t B(t, \dot{\xi}) \neq 0$ e t é um ponto interior de K , então $F_K(t, \dot{\xi}) > 0$.

Observação 3 A função $t \mapsto F_K(t, \dot{\xi})$, em geral, não é contínua, nem semi-contínua inferiormente; este fato não permite inferir que $\inf_t F_K(t, \dot{\xi}) > 0$ mesmo que $F_K(t, \dot{\xi}) > 0$ em cada ponto de um conjunto compacto.

Lema 3 [M] *Seja $(t_0, \dot{\xi}_0) \in \Theta \times S^{m-1}$ e considere:*

1. $t \rightarrow B(t, \dot{\xi}_0)$ tem um mínimo local em t_0 ;
2. Existe uma vizinhança compacta $K \subset \Theta$ de t_0 tal que $F_K(t_0, \dot{\xi}) = 0$.

Então (1) implica (2) e o recíproco vale se $K(t_0, \dot{\xi}_0)$ tem só um número finito de componentes conexas.

Demonstração :

- ▷ É evidente que 1. implica 2.. Vamos provar a outra parte; para $t_0 \in \Theta$, K como em 2., a hipótese adicional implica a existência de uma vizinhança U de t_0 tal que $U \cap K(t_0, \dot{\xi}_0) = U \cap K_0(t_0, \dot{\xi}_0)$. Então $B(t, \dot{\xi}_0) \geq B(t_0, \dot{\xi}_0)$ para $t \in U$ porque $F_K(t_0, \dot{\xi}_0) = 0$ implica $B(t, \dot{\xi}_0) = B(t_0, \dot{\xi}_0)$ para $t \in K(t_0, \dot{\xi}_0)$ e $B(t, \dot{\xi}_0) > B(t_0, \dot{\xi}_0)$ em $K/K(t_0, \dot{\xi}_0)$. $\square$

Observação: Se $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -hipoelíptico em $\Theta \times P$, então para todo $\dot{\xi} \in P$ a aplicação $t \mapsto B(t, \dot{\xi})$ não pode ter um mínimo local em Θ . De fato, a *Proposição 1.2* mostra isto facilmente: Suponha que $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -hipoelíptico e $B(t_0, \dot{\xi}_0) \leq B(t, \dot{\xi}_0)$ para t em uma vizinhança $\mathcal{O}$ de t_0 . Aplicando a condição (1.4) com $v = 1$, obtemos que para $c = 1$ existe $c' > 0$ tal que para $K = \{t_0\}$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t_0, \dot{\xi}_0)} \leq C \sup_{t \in \mathcal{O}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi}_0)} = C e^{-\rho B(t_0, \dot{\xi}_0)},$$

e assim

$$e^{c'\rho^{1/s}} \leq C \quad \forall \rho > 0,$$

o que é um absurdo.

Lema 4 *Seja K_0 um subconjunto compacto conexo de Θ , $B(t)$ uma função Lipschitz contínua e a valores reais em Θ , β o máximo de B sobre K_0 . Existe uma constante $C = C(B, K_0) > 0$ tal que, dado quaisquer numero ϵ , $0 < \epsilon < \inf(1, \text{dist}(K_0, \partial\Theta))$, e qualquer dois pontos t, t' de K_0 , existe um caminho de integração γ , linear por partes, contido em Θ , juntando t a t' e tendo as seguintes propriedades:*

1. γ esta contido numa ϵ -vizinhança de K_0 ;
2. para todo $s \in \gamma$, $B(s) \leq \beta + \epsilon$;
3. o comprimento de γ não excede $C \epsilon^{1-n}$.

Demonstração :

▷ Ver [T]. Lema III.3.1., pág. 309. □

Proposição 1.3 *Seja $\mathcal{O}$ um conjunto aberto de Θ e suponha que para cada compacto $K \subset \mathcal{O}$, existe um compacto $\tilde{K} \subset \mathcal{O}$ contendo K e $a > 0$ tais que*

$$F_{\tilde{K}}(t, \dot{\xi}) \geq a, \quad \forall (t, \dot{\xi}) \in K \times P. \quad (1.9)$$

Então $\mathbb{D}$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico em $\mathcal{O} \times P$.

Demonstração :

▷ Para $c > 0$ tomamos $c' < c$ e $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$. Escolhemos $s_0 \in \tilde{K}_0(t, \dot{\xi}; 0)$ tal que

$$B(t, \dot{\xi}) - B(s_0, \dot{\xi}) \geq a. \quad (1.10)$$

Observemos que o máximo de $B(\cdot, \dot{\xi})$ em $\tilde{K}_0(t, \dot{\xi}; 0)$ é $B(t, \dot{\xi})$. Assim, aplicando o Lema 4 para $K_0 = \tilde{K}_0(t, \dot{\xi}; 0) \subset \tilde{K}$, $B(s, \dot{\xi})$ e $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1+\rho}$ com $\epsilon_0 = \inf(1, \text{dist}(K_0, \partial\Theta))$, obtemos a existência de um caminho

de integração linear por partes γ_{t,s_0} , juntando t e s_0 , contido numa vizinhança compacta K' de $\tilde{K}$ contida em $\mathcal{O}$ sobre a qual

$$B(s, \dot{\xi}) \leq B(t, \dot{\xi}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \rho}, \quad \rho > 0. \quad (1.11)$$

Além disso, existe $C > 0$ tal que o comprimento de γ_{t,s_0} é limitado por $C(\frac{1+\rho}{\epsilon_0})^{n-1}$.

Seja $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$. Integrando dv sobre γ_{t,s_0} obtemos

$$-\int_{\gamma_{t,s_0}} dv(s) = v(t) - v(s_0).$$

Portanto, multiplicando por $e^{-\rho B(t, \dot{\xi})}$, temos que:

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} v(t) &= e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s_0, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s_0, \dot{\xi})} v(s_0) \\ &\quad - \int_{\gamma_{t,s_0}} e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} dv(s). \end{aligned}$$

Assim de (1.10) e (1.11):

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq e^{-\rho a} \sup_{s \in \tilde{K}} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C \left(\frac{1 + \rho}{\epsilon_0} \right)^{n-1} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

Multiplicando agora por $e^{c'\rho^{1/s}}$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq e^{c'\rho^{1/s} - a\rho} \sup_{s \in \tilde{K}} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C \left(\frac{1 + \rho}{\epsilon_0} \right)^{n-1} e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

Como $e^{c'\rho^{1/s} - a\rho} \leq 1$ e $C(\frac{1+\rho}{\epsilon_0})^{n-1} e^{c'\rho^{1/s}} \leq C_1 e^{c\rho^{1/s}}$ para alguma constante C_1 segue que

$$e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| \leq \sup_{s \in \tilde{K}} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| + C_1 e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|.$$

□

Vamos agora introduzir uma seqüência de funções obtidas de F_K por processo iterativo. Para $\mu \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, K subconjunto compacto de Θ e $(t, \dot{\xi}) \in K \times S^{m-1}$ definimos

$$\begin{aligned} E_{K,\mu}^0(t, \dot{\xi}) &= F_K(t, \dot{\xi}) , \\ E_{K,\mu}^j(t, \dot{\xi}) &= F_K(t, \dot{\xi}; \mu E_{K,\mu}^{j-1}(t, \dot{\xi})) , \quad j \geq 1 , \\ E_{K,\mu}(t, \dot{\xi}) &= \sup_{j \geq 0} E_{K,\mu}^j(t, \dot{\xi}) . \end{aligned}$$

Note que esta última função está bem definida, pois de (1.8)

$$F_K(t, \dot{\xi}, r) \leq B(t, \dot{\xi}) - \inf_{s \in K} B(s, \dot{\xi}).$$

Algumas propriedades das $E_{K,\mu}^j$ são:

$$0 \leq E_{K,\mu}^0 \leq E_{K,\mu}^1 \leq \dots , \quad (1.12)$$

$$E_{K,\mu}^0(t, \dot{\xi}) = 0 \Rightarrow E_{K,\mu}^j(t, \dot{\xi}) = 0 \quad , \quad \forall j \geq 0 \quad , \quad (1.13)$$

$$E_{K,\mu}^{j+1}(t, \dot{\xi}) = E_{K,\mu}^j(t, \dot{\xi}) \Rightarrow E_{K,\mu}^{j'}(t, \dot{\xi}) = E_{K,\mu}^j(t, \dot{\xi}), \forall j' \geq j. \quad (1.14)$$

Definição 1.6 [M]. *Sejam $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto e $P \subset S_{m-1}$ compacto. Dizemos que a função $B \in \mathcal{C}^\infty(\Theta \times S^{m-1})$ satisfaz a condição (R) em $\mathcal{O} \times P$ se, para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{O}$ existe um compacto $K' \subset \mathcal{O}$ contendo K e $\mu' \geq 0$, $a > 0$ tais que*

$$(t, \dot{\xi}) \in K \times P, \quad E_{K',\mu'}(t, \dot{\xi}) \neq 0 \Rightarrow E_{K',\mu'}(t, \dot{\xi}) \geq a. \quad (1.15)$$

Observação 4 1. *Se $B(t, \dot{\xi})$ não tivesse mínimo local em $\mathcal{O}$ e $K'(t, \dot{\xi})$ tivesse um número finito de componentes então, pelo Lema 3 e (1.12), a condição (1.15) se reduziria para*

$$E_{K',\mu'}(t, \dot{\xi}) \geq a \quad , \quad \forall (t, \dot{\xi}) \in K \times P.$$

2. Se $B(t, \dot{\xi})$ só tivesse pontos críticos não degenerados em $\mathcal{O}$ para $\dot{\xi} \in P$ então B satisfaria (R) em $\mathcal{O} \times P$ se e só se $B(\cdot, \dot{\xi})$ não tivesse mínimo local em $\mathcal{O}$, para $\dot{\xi} \in P$. De fato, suponha que 0 é um ponto crítico não degenerado de $B(t, \dot{\xi})$ em $\mathcal{O}$ para $\dot{\xi} \in P$. Aplicando o lema de Morse podemos assumir que

$$B(t, \dot{\xi}) = B(0, \dot{\xi}) + Q(t), \quad (1.16)$$

com

$$Q(t) = -t_1^2 - \cdots - t_l^2 + t_{l+1}^2 + \cdots + t_n^2,$$

em uma vizinhança $U \times V$ de $(0, \dot{\xi}_0) \in \mathcal{O} \times P$, onde o número l é o índice do ponto 0.

Seja K uma vizinhança compacta de 0. Pela condição (R) existem K' e $a > 0$ tal que $F_{K'}(0, \dot{\xi}) \geq a$. Portanto $l \neq 0$ e assim 0 não é mínimo local. Reciprocamente, se 0 não é mínimo local, $l \neq 0$ e assim (1.16) implica que $F_{K'}(0, \dot{\xi}) \geq a$.

3. Se $n = 1$ e $d_t B = \frac{\partial B}{\partial t} = b$ não se anula em intervalos abertos não vazios contidos em Θ , isto é a condição (Q) de [T1], então (R) se satisfaz em qualquer $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto se e só se b não muda de sinal de $-$ para $+$ em Θ . Seja $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto. Se B satisfaz (R) em $\mathcal{O}$ então $B(t, \dot{\xi})$ não tem mínimo local em $\mathcal{O}$ e assim b não muda de sinal de $-$ para $+$. Reciprocamente, suponha que b não muda de sinal de $-$ para $+$ em Θ . Seja $\mathcal{O} \subset \Theta$ aberto. Dado $(t_0, \dot{\xi}) \in \mathcal{O} \times S^{m-1}$, existe uma vizinhança $U \times V$ dele e um conjunto compacto $K' \subset \mathcal{O}$ tal que $F_K(t, \dot{\xi}) \geq a' > 0$ para $(t, \dot{\xi}) \in U \times V$.

Proposição 1.4 *Sejam $\mathcal{O} \subset \Theta$ e $P \subset S^{m-1}$ compacto. Se o operador $\mathbb{D} = d_t + d_t B(t, D_x)$ é $\mathbb{G}^s$ -globalmente hipoelíptico em $\mathcal{O} \times P$ então a função B satisfaz a condição (R) em $\mathcal{O} \times P$.*

Para a prova desta proposição precisamos do seguinte lema.

Lema 5 [M]. *Sejam K', K'' subconjuntos compactos de $\mathcal{O}$, $K' \subset \text{int } K''$ e P aberto em S^{m-1} . Então para cada $l \in \mathbb{N}$, existe $A_l > 0$ tal que dados $\delta > 0$ e $(t, \dot{\xi}) \in K' \times P$, existe $v \in C^\infty(\mathcal{O})$ com as seguintes propriedades:*

1. $0 \leq v \leq 1$, $v(t) = 1$, $\text{supp } v \subset K''_0(t, \dot{\xi}; \delta)$;
2. para $s \in K' \cap \text{supp } dv$, $B(s, \dot{\xi}) \geq B(t, \dot{\xi}) + \delta/4$ e $\sum_{|\alpha| \leq l} |\partial_t^\alpha v(s)| \leq A_l / \delta^l$.

Demonstração da proposição 1.4 :

- ▷ Suponha que B não satisfaz (R) em $\mathcal{O} \times P$. Então existe um conjunto compacto $K \subset \mathcal{O}$ tal que, para cada compacto $K'' \subset \mathcal{O}$ contendo K e para cada $\mu \geq 0$, $a > 0$ existem $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$ com

$$0 < E_{K'', \mu}(t, \dot{\xi}) < a. \quad (1.17)$$

Agora, pela definição de $E_{K'', \mu}$, existe $j \in \mathbb{Z}$, dependendo de $(t, \dot{\xi})$, tal que $E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}) > \frac{1}{2} E_{K'', \mu}(t, \dot{\xi})$ e portanto disto e de (1.12) temos

$$0 < E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}) \leq E_{K'', \mu}^{j+1}(t, \dot{\xi}) < E_{K'', \mu}(t, \dot{\xi}) < 2E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}) < 2a. \quad (1.18)$$

Aplicando a *Proposição 1.2* para $c > 0$ e o conjunto compacto K anterior, obtemos a existência de $c' > 0$ e $K' \subset \mathcal{O}$ compacto, $m' \in \mathbb{Z}^+$ e

$C > 0$ tal que

$$e^{c'\rho^{1/s}} \sup_{t \in K} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| \leq C \left\{ \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| + \sum_{|\alpha| \leq m'} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{t \in K'} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |\partial_t^\alpha dv(t)| \right\}, \quad (1.19)$$

$\forall \rho > 0, \quad \forall \dot{\xi} \in P, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Theta)$, além disso podemos supor $K' \supset K$.

Agora escolhemos o K'' de (1.18) como se fosse uma vizinhança compacta de K' contida em $\mathcal{O}$ (μ e a serão escolhidos depois).

Assim, aplicando o *Lema 5* para os compactos anteriores e com

$$\delta = \mu E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}) \quad (1.20)$$

obtemos a existência de uma função $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ com as propriedades 1. e 2..

Com esta v em particular, (1.19) se verifica. Portanto, levando em conta as propriedades do *Lema 5*, temos:

$$e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} \leq C \left\{ \sup_{s \in K_0''(t, \dot{\xi}; \delta)} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} + \frac{A_{m'}}{\delta^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K' \cap \text{supp } dv} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} \right\} \quad \forall \rho \geq 0.$$

Assim,

$$e^{c'\rho^{1/s}} \leq C \left\{ \sup_{s \in K_0''(t, \dot{\xi}; \delta)} e^{-\rho(B(s, \dot{\xi}) - B(t, \dot{\xi}))} + \frac{A_{m'}}{\delta^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K' \cap \text{supp } dv} e^{-\rho(B(s, \dot{\xi}) - B(t, \dot{\xi}))} \right\} \quad \forall \rho \geq 0.$$

Portanto, pela definição de $F_{K''}$, pelo *Lema 5 parte 2.* e (1.20), segue que

$$\begin{aligned} e^{c'\rho^{1/s}} &\leq C \left\{ e^{\rho F_{K''}(t, \dot{\xi}; \delta)} + \frac{A_{m'}}{\delta^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} e^{-\rho\delta/4} \right\} \\ &= C \left\{ e^{\rho F_{K''}(t, \dot{\xi}; \mu E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}))} + \frac{A_{m'}}{(\mu E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}))^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} e^{-\rho\mu E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi})/4} \right\}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\mu = 16m'c$ e levando em conta (1.18) obtemos que:

$$\begin{aligned} e^{c'\rho^{1/s}} &\leq C \left\{ e^{\rho E_{K'', \mu}^{j+1}(t, \dot{\xi})} + \frac{A_{m'}}{(16m'c E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}))^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} e^{-4m'c\rho E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi})} \right\} \\ &\leq C \left\{ e^{2\rho E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi})} + \frac{A_{m'}}{(16m'c E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi}))^{m'}} e^{c\rho^{1/s}} e^{-4m'c\rho E_{K'', \mu}^j(t, \dot{\xi})} \right\}. \end{aligned}$$

Resumindo e mudando de notações, concluímos que para algum $m' > 0$ e para cada $a > 0$, existem $a' > 0$, $a' < a$ tal que:

$$e^{c'\rho^{1/s}} \leq C_1 \left\{ e^{2a'\rho} + e^{c\rho^{1/s}} \left(\frac{e^{-4a'c\rho}}{a'} \right)^{m'} \right\}, \quad \forall \rho \geq 0, \quad (1.21)$$

e alguma constante $C_1 > 0$.

Agora, se escolhermos

$$a' \doteq g(\rho) \doteq \frac{\ln(\frac{1}{2C} e^{c'\rho^{1/s}})}{2\rho}$$

temos que

$$e^{2\rho g(\rho)} = \frac{1}{2C} e^{c'\rho^{1/s}}.$$

Com isto a desigualdade (1.21) fica como

$$\frac{1}{2} e^{c'\rho^{1/s}} \leq C_1 e^{c\rho^{1/s}} \left(\frac{e^{-4c\rho g(\rho)}}{g(\rho)} \right)^{m'}, \quad \forall \rho \geq 0. \quad (1.22)$$

Observando que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} g(\rho) \rho^{1-1/s} = \frac{c'}{2}$$

concluimos que para ρ grande, g se comporta como $\rho^{1/s-1}$ o qual nos produz uma contradição com (1.22). $\square$

A seguir damos uma condição evidentemente necessária para que $\mathbb{D}$ seja $\mathbb{G}^s$ -Hipoelíptico em $\Theta \times P$.

Lema 6 *Se $\mathbb{D} = D_t + d_t B(t, D_x)$ é $\mathbb{G}^s$ -Hipoelíptico em $\Theta \times P$ então para cada conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \Theta$ e para cada $\dot{\xi} \in P$, $d_t B(\cdot, \dot{\xi})$ não se anula identicamente em $\mathcal{O}$.*

Demonstração :

- ▷ Suponha que para algum conjunto $\mathcal{O} \subset \Theta$ e $\dot{\xi} \in P$ temos que $d_t B|_{\mathcal{O} \times \{\dot{\xi}\}} = 0$. Aplicando a desigualdade (1.4) com K reduzido a qualquer ponto de $\mathcal{O}$ e $v = 1$ em $\mathcal{O}$ nos conduz a um absurdo. Portanto, pela *Proposição 1.2* $\mathbb{D}$ não é $\mathbb{G}^s$ -Globalmente hipoelíptico em $\mathcal{O} \times P$. Assim, $\mathbb{D}$ não é $\mathbb{G}^s$ -Hipoelíptico em $\Theta \times P$. $\square$

Teorema 1 *O operador $\mathbb{D} = D_t + d_t B(t, D_x)$ é $\mathbb{G}^s$ -Hipoelíptico em $\Theta \times P$ se e só se para cada conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \Theta$, a função B satisfaz a condição (R) em $\mathcal{O} \times P$ e $d_t B(\cdot, \dot{\xi})$ não é identicamente zero em $\mathcal{O}$, para cada $\dot{\xi} \in P$.*

Lema 7 *Sejam $K \subset K'$ subconjuntos compactos de $\mathcal{O} \subset \Theta$, $(t, \dot{\xi}) \in K \times S^{m-1}$ e $\rho, \mu' \in \mathbf{R}_+$, $j \in \mathbb{N}$ e $c > 0$. Suponha que*

$$\frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}) \leq \rho^{\frac{1-s}{s}} < \frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^j(t, \dot{\xi}), \quad c'(\mu' + 1) < c. \quad (1.23)$$

Então existem $C > 0$, $\epsilon_0 > 0$ dependendo só de K , K' tais que

$$\begin{aligned} e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \text{ e } t \in K, \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde K'' é uma ϵ_0 -vizinhança de K' .

Demonstração :

▷ Seja $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$. Escolhemos $s_j \in K'_0(t, \dot{\xi}; \mu' E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}))$ tal que

$$B(t, \dot{\xi}) - B(s_j, \dot{\xi}) = E_{K', \mu'}^j(t, \dot{\xi}). \quad (1.25)$$

Aplicando o *Lema 4* para $K'_0(t, \dot{\xi}; \mu' E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}))$, $B(s, \dot{\xi})$ e $\epsilon_0/(\rho + 1)$, onde ϵ_0 é escolhido de tal forma que a vizinhança K' da ordem ϵ_0 de K' esta contida em $\mathcal{O}$, obtemos um caminho de integração γ_{t, s_j} , contido em $\mathcal{O}$, tal que

$$\sup_{s \in \gamma_{t, s_j}} B(s, \dot{\xi}) \leq \sup_{s \in K'_0(t, \dot{\xi}; \mu' E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}))} B(s, \dot{\xi}) + \epsilon_0/(\rho + 1), \quad (1.26)$$

e o comprimento de γ_{t, s_j} é limitado por $C(\frac{\rho+1}{\epsilon_0})^{n-1}$, onde C depende só de K e K' .

Integrando sobre γ_{t, s_j} temos

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} v(t) &= e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s_j, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s_j, \dot{\xi})} v(s_j) \\ &\quad - \int_{\gamma_{t, s_j}} e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} dv(s). \end{aligned}$$

Portanto, de (1.25) e (1.26),

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq e^{-\rho E_{K', \mu'}^j(t, \dot{\xi})} e^{-\rho B(s_j, \dot{\xi})} |v(s_j)| \\ &\quad + C \left(\frac{\rho + 1}{\epsilon_0} \right)^{n-1} e^{\rho(\mu' E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}) + \epsilon_0/(\rho+1))} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

Assim, de (1.23),

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq e^{-c' \rho^{1/s}} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C \left(\frac{\rho + 1}{\epsilon_0} \right)^{n-1} e^{\rho(\mu' c' \rho^{\frac{1-s}{s}} + \epsilon_0/(\rho+1))} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
e^{c'\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\
&\quad + C \left(\frac{\rho + 1}{\epsilon_0} \right)^{n-1} e^{\mu' c' \rho^{1/s} + \epsilon_0} e^{c' \rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)| \\
&= \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| + C' \rho^{n-1} e^{c'(\mu'+1)\rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)| \\
&\leq \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| + C' e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C' > 0$. $\square$

Demonstração do teorema 1 :

- ▷ A *Proposição 1.4* e o *Lema 6* mostram que a condição é necessária para a $\mathbb{G}^s$ -hipoeleptividade. Vamos mostrar que esta é suficiente. Provaremos que dado $\mathcal{O}$ existem $K' \subset \mathcal{O}$, $m' \in \mathbb{N}$, $c' > 0$ e $C > 0$ tais que (1.4) se verifica.

Pela condição (R) existem K' compacto em $\mathcal{O}$, $\mu' \geq 0$ e $a > 0$ tal que (1.15) se satisfaz.

Seja $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$ tal que $E_{K', \mu'}(t, \dot{\xi}) \neq 0$. Portanto, existe um inteiro $k = k(t, \dot{\xi})$ e $a' > 0$ tal que

$$E_{K', \mu'}^k(t, \dot{\xi}) \geq a'/2.$$

Dado $\rho > 0$, com $c'(\mu' + 1) < c$, temos uma das três possibilidades:

1. $\rho^{\frac{1-s}{s}} < \frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^0(t, \dot{\xi})$,
2. $\frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^{j-1}(t, \dot{\xi}) \leq \rho^{\frac{1-s}{s}} < \frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^j(t, \dot{\xi})$, para algum $j \leq k$,
3. $\frac{1}{c'} E_{K', \mu'}^k(t, \dot{\xi}) \leq \rho^{\frac{1-s}{s}}$.

No caso 1., escolhemos $s_0 \in K'_0(t, \dot{\xi}; 0)$ tal que

$$B(t, \dot{\xi}) - B(s_0, \dot{\xi}) = E_{K', \mu'}^0(t, \dot{\xi}) = F_{K'}(t, \dot{\xi}). \quad (1.27)$$

Então, pelo *Lema 4*, existe um caminho de integração linear por partes γ_{t,s_0} , contido numa vizinhança compacta K'' de K' contida em $\mathcal{O}$ sobre a qual

$$B(s, \dot{\xi}) \leq B(t, \dot{\xi}) + \frac{1}{\rho + 1} \quad , \quad (1.28)$$

e o γ_{t,s_0} é limitado por $C(\rho + 1)^{n-1}$.

Dada $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, integrando sobre γ_{t,s_0} obtemos

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} v(t) &= e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s_0, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s_0, \dot{\xi})} v(s_0) \\ &\quad - \int_{\gamma_{t,s_0}} e^{-\rho(B(t, \dot{\xi}) - B(s, \dot{\xi}))} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} dv(s). \end{aligned}$$

De (1.27) e (1.28) segue que

$$\begin{aligned} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq e^{-\rho F_{K'}(t, \dot{\xi})} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C(\rho + 1)^{n-1} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)| \\ &\leq e^{-c' \rho^{1/s}} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C(\rho + 1)^{n-1} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

Como $c - c' > 0$ implica $(\rho + 1)^{n-1} e^{c' \rho^{1/s}} < e^{c \rho^{1/s}}$ para $\rho > 0$ grande, temos que

$$\begin{aligned} e^{c' \rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C(\rho + 1)^{n-1} e^{c' \rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)| \\ &\leq \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \\ &\quad + C e^{c \rho^{1/s}} \sup_{s \in K''} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)|. \end{aligned}$$

O caso 2. segue do *lema 7*.

No caso 3. temos

$$\rho < \left(\frac{2c'}{a'} \right)^{\frac{s}{s-1}} \doteq A,$$

onde A não depende de $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$. Para estes ρ obviamente existe $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} e^{\rho^{1/s}} e^{-\rho B(t, \dot{\xi})} |v(t)| &\leq C \left\{ \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |v(s)| \right. \\ &\quad \left. + e^{c\rho^{1/s}} \sup_{s \in K'} e^{-\rho B(s, \dot{\xi})} |dv(s)| \right\}. \quad (1.29) \end{aligned}$$

Até agora, temos (1.29) válido para todo $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$, $\rho > 0$ tal que $E_{K', \mu'}(t, \dot{\xi}) \neq 0$. Usamos agora o fato que $t \mapsto d_t B(t, \dot{\xi})$ não é identicamente zero em qualquer conjunto aberto. Portanto, dado $(t, \dot{\xi})$ com $E_{K', \mu'}(t, \dot{\xi}) = 0$ existe uma seqüência $\{t_j\}$, $t_j \rightarrow t$, com $E_{K', \mu'}(t_j, \dot{\xi}) \neq 0$. Assim obtemos por continuidade que (1.29) é verdadeira para qualquer $(t, \dot{\xi}) \in K \times P$ e $\rho > 0$. $\square$

Capítulo 2

Hipoelipticidade Gevrey quando a Estrutura é Tubular

2.1 Classes de Gevrey

Definimos as classes de Gevrey de índice $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ sobre o fecho de abertos $U \subset\subset \mathbf{R}^N$ com fronteira $\mathcal{C}^\infty$ como sendo subconjuntos

$$G^{s,h}(\overline{U}) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{U})$$

constituídos pelas funções f infinitamente diferenciáveis em alguma vizinhança aberta de $\overline{U}$, a valores complexos, que satisfazem estimativas do tipo

$$|D^\alpha[f](y)| \leq Ch^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s : \quad \forall y \in \overline{U}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^N \quad (2.1)$$

para alguma constante $C > 0$. Na estimativa acima, usamos a notações

$$D = (D_1, \dots, D_N) \quad , \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad ,$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. Cada classe $G^{s,h}(\overline{U})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ completo em relação à norma definida pelo ínfimo das

constantes C na estimativa (2.1), a saber,

$$\|f\|_{s,h,\bar{U}} = \sup \left\{ \frac{|D^\alpha[f](y)|}{h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s} : y \in \bar{U}, \alpha \in \mathbf{Z}_+^N \right\}.$$

Como exemplo de tais classes destacamos $G^{1,h}(\bar{U})$ que corresponde ao espaço das funções $f = f(y)$ analíticas reais em $\bar{U}$ que possuem extensões $f^\# = f^\#(z)$ holomorfas em $U^\# = \{z \in \mathbb{C}^N : \text{dist}(z, \bar{U}) < h^{-1}\}$.

O produto de funções ponto a ponto geralmente altera a amplitude das classes de Gevrey. Se f e g são funções respectivamente em $G^{s,h_f}(\bar{U})$ e $G^{s,h_g}(\bar{U})$ então podemos garantir que $f \cdot g$ pertence a $G^{s,2\max\{h_f,h_g\}}(\bar{U})$ e

$$\|f \cdot g\|_{s,2\max\{h_f,h_g\},\bar{U}} \leq \|f\|_{s,h_f,\bar{U}} \|g\|_{s,h_g,\bar{U}}. \quad (2.2)$$

As derivações também alteram a amplitude das classes de Gevrey e, portanto, não definem endomorfismos nestas classes. Se $f \in G^{s,h}(\bar{U})$ e se $\beta \in \mathbf{Z}_+^N \setminus \{0\}$ então podemos garantir que $D^\beta[f] \in G^{s,2^{s|\beta|}h}(\bar{U})$ com

$$\|D^\beta[f]\|_{s,2^{s|\beta|}h,\bar{U}} \leq 2^{s(|\beta|-1)!} h^{|\beta|} \|f\|_{s,h,\bar{U}}. \quad (2.3)$$

Segue da estimativa (2.1) que as inclusões

$$G^{s,h}(\bar{U}) \hookrightarrow G^{s,k}(\bar{U}), \quad h \leq k \quad (2.4)$$

são contínuas com norma ≤ 1 .

Afirmção 2.1.1 *As inclusões (2.4) são compactas se $h < k$.*

A compacidade das inclusões (2.4) garante que os espaços

$$G^s(\bar{U}) = \bigcup_{h>0} G^{s,h}(\bar{U}),$$

sejam de Hausdorff com a topologia mais fina, de espaço localmente convexo, que torna tais inclusões contínuas. Mais ainda, os conjuntos limitados

nesta topologia de limite indutivo são necessariamente limitados em alguma classe de amplitude $h > 0$. Com isto, a convergência em conjuntos limitados equivale à convergência em alguma classe de amplitude $h > 0$ fixada.

O espaço das classes Gevrey de índice $s \geq 1$ sobre um aberto $V \subset U$ é dado pelo limite indutivo

$$G^s(V) = \varinjlim_{\overline{V}_0 \supset V} G^s(\overline{V}_0)$$

É rotineiro estender a noção de classes Gevrey de índice $s \geq 1$ a uma variedade analítica real.

Segue de (2.2) e (2.3) que qualquer operador do tipo

$$L = L(yD) = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(y) D^\beta, \quad a_\beta \in G^s(\overline{U})$$

define endomorfismos contínuos em $G^s(\overline{U})$.

2.2 Estruturas localmente integráveis e seu complexo. Estruturas tubulares e estruturas hipocomplexas

Seja Ω uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$, paracompacta, de dimensão N e assumimos sobre Ω uma estrutura localmente integrável $\mathcal{V}$ de dimensão n . Assim $\mathcal{V}$ é um subfibrado vetorial (complexo) de $\mathbb{C}T\Omega$ de posto n tal que seu fibrado ortogonal $T' \subset \mathbb{C}T^*\Omega$ é localmente gerado pelos diferenciais de $m \doteq N - n$ funções $\mathcal{C}^\infty$.

Fixada uma origem O na variedade é possível considerar, (cf. [T2], Sec.I.7), um sistema de coordenadas locais

$$(U, (x, t)) = (U, (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n))$$

centrado na origem na qual

$$Z_k(x, t) = x_k + i\Phi_k(x, t) \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

com $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ infinitamente diferenciável em U , a valores em $\mathbf{R}^m$, satisfazendo

$$\Phi(0, 0) = 0 \quad , \quad \Phi_x(0, 0) = 0 \quad , \quad \|\Phi_x\| < \frac{1}{2} \text{ em } U$$

tais que os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + i \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad j = 1, \dots, n$$

sejam geradores de $\mathcal{V}$ em U , onde

$$(\lambda_{jk}) = -i \sum_{l=1}^m \frac{\partial Z_l}{\partial t_j} \mu_{lk} \text{ com } (\mu_{kl}) = \left[\left(\frac{\partial Z_k}{\partial x_l} \right)^{-1} \right]^t .$$

Introduzindo os campos

$$M_k = \sum_{l=1}^m \mu_{kl}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_l} \quad , \quad k = 1, \dots, m$$

segue que

$$(M, L) = (M_1, \dots, M_m, L_1, \dots, L_n)$$

constitui uma base de $\mathbb{C}T\Omega$ sobre U dual de $(dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n)$. Os M_k e L_j são tais que

$$M_k t_j = 0 \quad , \quad L_j Z_k = 0 \quad , \quad M_k Z_{k'} = \delta_{kk'} \quad , \quad L_j t_{j'} = \delta_{jj'} . \quad (2.6)$$

Aqui δ é a função delta de Kronecker.

Para tais estruturas a derivada exterior em U define, após passagem ao quociente, um complexo de operadores diferenciais sobre U no qual o primeiro operador se escreve como,

$$C^\infty(U) \xrightarrow{d'_0} C^\infty(U, \Lambda^1(\mathbb{C}T^*U/T')).$$

Como $(\mathbb{C}T^*U/T')|_U$ pode ser identificado com o subfibrado vetorial de $\mathbb{C}T^*U$ gerado pelas formas $\{dt_1, \dots, dt_n\}$, podemos identificar, para todo $V \subset U$ aberto, o espaço das seções $\mathcal{C}^\infty(V, \Lambda(\mathbb{C}T^*U/T'))$ com o espaço $\mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^1)$ das formas diferenciais da forma

$$f = \sum_{j=1}^n f_j(x, t) dt_j.$$

Então o complexo em questão se realiza, em dimensão zero e sobre V , da seguinte forma:

$$\mathbb{L} : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda^1)$$

onde

$$\mathbb{L}u = \sum_{j=1}^n \mathbb{L}_j u(x, t) dt_j.$$

Definição 2.1 *Uma estrutura localmente integrável é chamada de estrutura tubular se existem um sistema de coordenadas locais $(U, (x, t))$ e Z como em (2.5) com $\text{Im } Z$ independente de x .*

Existe uma definição intrínseca deste conceito (cf. [T1], definição VI.9.2).

No caso em que a estrutura é tubular sobre $B \times \Theta$, $B \times \Theta \subset \mathbf{R}^{1+n}$ aberto não vazio ($n = 1$) podemos escrever (cf. [T2], Sec. I.12)

$$Z(x, t) = x + i\Phi(t),$$

onde os Φ são funções $\mathcal{C}^\infty$ em Θ e a valores reais, e

$$\mathbb{L}_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Observe que $\mathbb{L}$ pode ser escrito como

$$\mathbb{L} = d_t - i d\Phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

Quando a aplicação

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) : \Theta \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

é de classe $\mathcal{C}^w$ dizemos que a estrutura tubular é analítica.

Definição 2.2 *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável sobre Ω . $\mathcal{V}$ é dita hipocomplexa no ponto P se vale a seguinte propriedade:*

Qualquer que seja $U_0 \subset U$ vizinhança de P , dada $u \in \mathcal{D}'(U_0)$ satisfazendo $\mathbb{L}u = 0$ sobre U_0 existe uma função H holomorfa numa vizinhança de $Z(P)$ em $\mathbb{C}^m$ tal que $u = H \circ Z$ numa vizinhança de P .

Proposição 2.1 *Sejam $\mathcal{V}, P, U$ e Z como na definição 2.2 e suponhamos $m = 1$. Então $\mathcal{V}$ é hipocomplexa em P se e somente se Z é aberta em P (isto é, Z leva vizinhança de P em U em vizinhanças de $Z(P)$ em $\mathbb{C}^1$).*

Demonstração :

▷ Ver [T2]. Corolário III.5.3.

Definição 2.3 *Uma estrutura localmente integrável $\mathcal{V}$ sobre Ω é dita hipocomplexa se ela for hipocomplexa em todo ponto P de Ω .*

2.3 As classes G_{ML}^s

Mantemos as notações introduzidas na seção 2.2. Dados $V \subset\subset U$ um aberto com fronteira $\mathcal{C}^\infty$, $s \geq 1$ e $h > 0$ dizemos que $u \in G_{\text{ML}}^{s,h}(V)$ se $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$ e se existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{\overline{V}} |M^{\alpha_1} L^{\alpha_2} u| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha_1|+|\alpha_2|} (|\alpha_1| + |\alpha_2|)!^s, \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}_+^{m+n}. \quad (2.7)$$

Como em [C], cada $G_{\text{ML}}^{s,h}(V)$ é um espaço de Banach em relação à norma

definida pelo ínfimo das constantes em (2.7), a saber,

$$\|u\|_{s,h,V} = \sup \left\{ \frac{|M^{\alpha_1} L^{\alpha_2} u(x,t)|}{h^{|\alpha_1|+|\alpha_2|}(|\alpha_1|+|\alpha_2|)!^s} : (x,t) \in \overline{V}, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^{m+n} \right\},$$

e as inclusões

$$G_{\text{ML}}^{s,h}(V) \hookrightarrow G_{\text{ML}}^{s,h_+}(V) \quad , \quad h < h_+$$

são compactas. Explicitando,

$$G_{\text{ML}}^{s,h}(V) = \left\{ u \in C^\infty \overline{V} : \|u\|_{s,h,V} < \infty \right\}.$$

Também como em [C], os espaços

$$G_{\text{ML}}^s(V) = \varinjlim_{h \nearrow \infty} G_{\text{ML}}^{s,h}(V)$$

são Hausdorff e Montel com a topologia de limite indutivo. Em particular, seqüências limitadas em algum $G_{\text{ML}}^{s,h}(V)$ admitem subsequências convergentes em $G_{\text{ML}}^{s,h_+}(V)$ para todo $h_+ > h$ e, conseqüentemente, em $G_{\text{ML}}^s(V)$.

Observação 5 *Se $\Phi = 0$ ou, mais geralmente se $\Phi \in C^w$ as classes de funções Gevrey usuais $G^{s,h}$ e as classes $G_{\text{ML}}^{s,h}$ coincidem.*

2.4 O conceito de hipoeipticidade Gevrey

O objetivo desta seção é estudar a regularidade Gevrey das soluções de

$$Lu = f.$$

Para ser mais preciso vamos estudar a hipoeipticidade G^s e a hipoeipticidade G_{ML}^s de L que definimos a seguir.

Definição 2.4 *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável analítica sobre uma variedade analítica real Ω . Dizemos que $\mathcal{V}$ é G^s -hipoeíptica sobre $W \subset \Omega$ aberto arbitrário se dados $W_0 \subset W$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(W_0)$ então*

$$d'_0 u \in \wedge^1 G^s(W_0) \Rightarrow u \in G^s(W_0)$$

Retornemos á notação da seção 2.2.

Definição 2.5 Dizemos que L é G_{ML}^s -hipoelítico em 0 se dada $u \in \mathcal{D}'$ em uma vizinhança aberta da origem a condição $Lu \in \wedge^1 G_{ML}^s$ numa vizinhança da origem implica $u \in G_{ML}^s$ numa vizinhança da origem.

2.5 O teorema principal

O resultado central é o seguinte

Teorema 2 Seja $L = d_t - id_t \Phi \wedge \frac{\partial}{\partial x}$, onde $\Phi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, é uma função C^∞ sem mínimo nem máximo local satisfazendo a seguinte propriedade:

- Existem $M > 0$ e $0 \leq \theta < 1$ tais que

$$|\nabla \Phi| \geq M |\Phi|^\theta \quad \text{em} \quad \Theta. \quad (2.8)$$

Então L é G_{ML}^s -hipoelítico em 0 para todo $s \geq 1$.

Observe que aparentemente a condição (2.8) parece restritiva demais. Entretanto é possível provar (cf. [L], p.92) que toda função analítica real satisfaz uma desigualdade do tipo (2.8):

Proposição 2.2 [L] Seja φ uma função analítica definida em uma vizinhança de um ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$|\nabla \varphi(t)| \geq |\varphi(t) - \varphi(a)|^\theta$$

em uma vizinhança de a .

Corolário 2.1 Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura hipocomplexa tubular analítica sobre Ω com $m = 1$. Então $\mathcal{V}$ é G^s -hipoelítica sobre $W \subset \Omega$ aberto arbitrário para todo $s \geq 1$.

2.5.1 Demonstração do teorema principal: Preliminares

O lema a seguir nos dá o controle do crescimento (e decrescimento) de φ ao longo do fluxo do campo gradiente.

Usaremos as seguintes desigualdades, cuja verificações são imediatas:

Para cada $\sigma \geq 1$ existem constantes $C_\sigma, C'_\sigma > 0$ tais que

$$(x - y)^\sigma \leq C_\sigma(x^\sigma - y^\sigma), \quad \forall x \geq y \geq 0 \quad (2.9)$$

$$x^\sigma + y^\sigma \geq C'_\sigma(x + y)^\sigma \quad \forall x, y \geq 0 \quad (2.10)$$

Lema 8 *Sejam $\Theta \subseteq \mathbf{R}^n$ um aberto e $\varphi \in C^\infty(\overline{\Theta})$ uma função real que satisfaz a condição (2.8). Defina $\Sigma = \{t \in \Theta \mid \nabla\varphi(t) = 0\}$ e considere, para cada $t \in \Theta \setminus \Sigma$, $\gamma_t(\tau)$ solução de*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t(\tau) = -\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}(\gamma_t(\tau)) \\ \gamma_t(0) = t \end{cases}$$

definida em $[0, \delta(t)[$. Então existem constantes $C > 0$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$\varphi(t) - \varphi(\gamma_t(\tau)) \geq C\tau^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[.$$

Observação 6 *A desigualdade acima implica que $\delta(t)$ é uniformemente limitada em Θ .*

Demonstração :

▷ Seja $h_t = \varphi \circ \gamma_t$. Assim

$$\begin{aligned} \dot{h}_t(\tau) &= \nabla\varphi(\gamma_t(\tau)) \cdot \dot{\gamma}_t(\tau) \\ &= -|\nabla\varphi(\gamma_t(\tau))| \\ &\leq -M |\varphi(\gamma_t(\tau))|^\theta \\ &= -M |h_t(\tau)|^\theta, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[. \end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar:

(1⁰) $h_t(0) = \varphi(t) \leq 0$.

Como φ é estritamente decrescente ao longo de γ_t segue que
 $h_t(\tau) \leq 0, \forall \tau \in [0, \delta(t)[$.

Assim

$$\dot{h}_t(\tau) \leq -M(-h_t(\tau))^\theta,$$

ou seja

$$\frac{-\dot{h}_t(\tau)}{(-h_t(\tau))^\theta} \geq M, \quad \forall \tau \in (0, \delta(t)[.$$

Note que não há possibilidade de que $h_t(\tau) = 0$ a menos que $\tau = 0$
e portanto o quociente acima está bem definido.

Integrando de 0 a τ obtemos

$$\frac{1}{1-\theta} \left[(-h_t(\tau))^{1-\theta} - (-h_t(0))^{1-\theta} \right] \geq M\tau$$

donde, usando

$$\sigma = \frac{1}{1-\theta} \geq 1 \tag{2.11}$$

obtemos por (2.9)

$$\begin{aligned} C_\sigma \left[-h_t(\tau) + h_t(0) \right] &\geq \left[(-h_t(\tau))^{1-\theta} - (-h_t(0))^{1-\theta} \right]^\sigma \\ &\geq \left[M(1-\theta)\tau \right]^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \delta(t)[. \end{aligned}$$

(2⁰) $h_t(0) > 0$.

Seja $\alpha \in [0, \delta(t)[$ tal que

$$\begin{aligned} h_t(\tau) &> 0, \quad \forall \tau \in [0, \alpha[\\ h_t(\tau) &\leq 0, \quad \forall \tau \in [\alpha, \delta(t)[. \end{aligned}$$

Observe que α está bem definido porque φ é decrescente ao longo
de γ_t e que no caso $\alpha = \delta(t)$ temos simplesmente que $h_t(\tau) > 0$,

$\forall \tau \in [0, \delta(t)[$.

Se $\tau \in [0, \alpha[$ então

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{\dot{h}_t(s)}{|h_t(s)|^\theta} ds &= \int_0^\tau \frac{\dot{h}_t(s)}{h_t(s)^\theta} ds \\ &\leq -M\tau. \end{aligned}$$

e portanto usando que $\sigma = 1/(1 - \theta)$ obtemos por (2.9)

$$C_\sigma [h_t(0) - h_t(\tau)] \geq [(1 - \theta)M\tau]^\sigma, \quad \forall \tau \in [0, \alpha[.$$

Observe que, por continuidade, fazendo $\tau \nearrow \alpha$ temos

$$h_t(0) - h_t(\alpha) \geq C\alpha^\sigma.$$

Agora se $\tau \in [\alpha, \delta(t)[$ temos

$$\begin{aligned} h_t(0) - h_t(\tau) &= h_t(0) - h_t(\alpha) + h_t(\alpha) - h_t(\tau) \\ &\geq C\alpha^\sigma + h_{\gamma_t(\alpha)}(0) - h_{\gamma_t(\alpha)}(\tau - \alpha) \quad (\text{o sistema é autônomo}) \\ &\geq C[\alpha^\sigma + (\tau - \alpha)^\sigma] \\ &\geq C'\tau^\sigma \quad \text{por (2.10).} \end{aligned}$$

□

Observação 7 (i) Com as hipóteses do Lema existe o limite

$$\lim_{\tau \rightarrow \delta(t)^-} \gamma_t(\tau),$$

para cada $t \in \Theta \setminus \Sigma$.

De fato, seja $(\tau_j) \subset [0, \delta(t)[$ uma seqüência tal que $\tau_j \rightarrow \delta(t) < +\infty$.

Usando que $|\dot{\gamma}_t(\tau)| = 1$, $\forall \tau \in [0, \delta(t)[$ temos

$$|\gamma_t(\tau_j) - \gamma_t(\tau_k)| \leq |\tau_j - \tau_k|$$

o que implica que $(\gamma_t(\tau_j))$ é uma seqüência de Cauchy em Θ e portanto convergente para um ponto $l(t) \in \overline{\Theta}$.

(ii) Note que $l(t)$ não depende da seqüência (τ_j) : se $(\tau'_j) \subset [0, \delta(t)[$ com $\tau'_j \rightarrow \delta(t)$ então

$$|\gamma_t(\tau_j) - \gamma_t(\tau'_j)| \leq |\tau_j - \tau'_j|$$

implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_t(\tau_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_t(\tau'_j) = l(t)$$

uma vez que $\delta(t)$ é finito.

(iii) Note $l(t) \in \partial\Theta \cup \Sigma$ porque caso contrário $\delta(t)$ não seria o extremo direito do intervalo maximal de γ_t .

Usando novamente que φ é estritamente decrescente ao longo de γ_t , se $\varphi(t) < 0$ então $l(t) \in \partial\Theta$ porque $\varphi(t) = 0, \forall t \in \Sigma$. Além disso, se $l(t) \in \Sigma$ então $\varphi(t) > 0$.

2.5.2 Demonstração do teorema principal:

Conclusão.

Demonstração :

▷ No caso $s = 1$ o resultado segue do *teorema 2.1* de [BT1]. Vamos supor $s > 1$. Seja $U =]-a, a[\times \Theta$ uma vizinhança da origem e $u \in \mathcal{D}'(U)$ tal que $Lu \in \wedge^1 G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$. Pelo corolário 4.2.1 de [A] segue-se que $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Nosso objetivo é mostrar que u satisfaz (2.7). Podemos assumir que $\alpha_2 = 0$ pois, caso contrário fazemos $\alpha_2 = \alpha'_2 + e_j$ assim

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{U}} |M^{\alpha_1} L^{\alpha_2} u| &= \sup_{\overline{U}} |M^{\alpha_1} L^{\alpha'_2} f_j| \\ &\leq \text{const} \cdot h^{|\alpha_1| + |\alpha'_2|} (|\alpha_1| + |\alpha'_2|)!^s \\ &\leq \text{const} \cdot h^{|\alpha_1| + |\alpha_2|} (|\alpha_1| + |\alpha_2|)!^s, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}_+^{1+n}. \end{aligned}$$

Seja $g \in G^s(\mathbf{R}) \cap \mathcal{C}_c^\infty(]-a, a[)$ com $g \equiv 1$ para $|x| \leq a'$, $a' < a$. Para $(x, t) \in \mathbf{R} \times \Theta'$, $\Theta' \subset \Theta$, e $\epsilon > 0$ considere as integrais

$$\mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} g(x') \mathcal{L}[u(x', t')] dt' dx' d\xi;$$

$$\mathcal{K}_\epsilon^-(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^0 \int_{-\infty}^\infty \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} g(x') \mathcal{L}[u(x', t')] dt' dx' d\xi,$$

onde γ é uma curva Lipschitz em Θ com ponto inicial t e ponto final t^* . Usando que $g\mathcal{L}u = \mathcal{L}[gu] - u\mathcal{L}[g]$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} \mathcal{L}[g(x')u(x', t')] dt' dx' d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} \mathcal{L}[g(x')]u(x', t') dt' dx' d\xi \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i(x-x')\xi - (\Phi(t)-\Phi(t^*))\xi - \epsilon\xi^2} g(x')u(x', t^*) dx' d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi(x-x') - \epsilon\xi^2} g(x')u(x', t) dx' d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{|x'| \geq a'} \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} \mathcal{L}[g(x')]u(x', t') dt' dx' d\xi \\ &= \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t) - u_\epsilon^+(x, t) - \mathcal{R}_\epsilon^+(x, t). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\mathcal{K}_\epsilon^-(x, t) = \mathcal{H}_\epsilon^-(x, t) - u_\epsilon^-(x, t) - \mathcal{R}_\epsilon^-(x, t).$$

Observe que u_ϵ^+ e u_ϵ^- convergem em $\mathcal{C}^\infty(U)$ respectivamente para funções u^+ e u^- e que $u^+ + u^- = u$. Além disso, existem $U_0 \subset \subset U$ e $h_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\overline{U_0}, \epsilon > 0} |\partial_x^l \mathcal{R}_\epsilon^\pm(x, t)| \leq \text{Const} \cdot h_0^l l!^s \quad \forall l \in \mathbf{Z}_+. \quad (2.12)$$

De fato,

$$\mathcal{R}_\epsilon^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{|x'| > a'} \int_\gamma e^{i[Z(x, t) - Z(x', t')]\xi - \epsilon \xi^2} \mathcal{L}[g(x')] u(x', t') dt' dx' d\xi.$$

Para $|x| < a'/2$, $\xi \in \mathbf{R}_+$ e para cada $\epsilon > 0$ consideremos a seguinte função inteira em $\mathbb{C}$:

$$F_\epsilon(x + iy, t) = \int_0^\infty \int_{|x'| > a'} \int_\gamma e^{i[x + iy + i\Phi(t) - x' - i\Phi(t')]\xi - \epsilon \xi^2} \mathcal{L}[g(x')] u(x', t') dt' dx' d\xi$$

com $|y| < a'/8$. Considerando a deformação do domínio de integração em ξ para $\xi \mapsto \zeta = \xi(1 + i\frac{x-x'}{2|x-x'|})$ obtemos que a parte real do expoente é igual a

$$Q = -\frac{|x - x'|}{2}\xi + (\Phi(t') - \Phi(t))\xi - 3/4 \xi^2 \epsilon - y\xi.$$

Como $|x - x'| \geq a'/2$ e Φ é decrescente ao longo de γ então

$$\begin{aligned} Q &\leq -a'/4 \xi - 3/4 \xi^2 \epsilon - y\xi \\ &= -(a'/4 + y)\xi - 3/4 \xi^2 \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto para $|y| < a'/8$ a integral

$$\begin{aligned} |F_\epsilon(x + iy, t)| &\leq \text{Const.} \int_0^\infty e^{-(a'/4 + y)\xi - 3/4 \xi^2 \epsilon} d\xi \\ &\leq \text{Const.} \end{aligned}$$

Assim pelas estimativas de Cauchy existem $U_0 \subset\subset U$ e $h_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\overline{U_0}, \epsilon > 0} |\partial_x^l \mathcal{R}_\epsilon^+(x, t)| \leq \text{Const} \cdot h_0^l l!^s \quad \forall l \in \mathbf{Z}_+.$$

De forma análoga se obtém a estimativa (2.12) para $\mathcal{R}_\epsilon^-$.

Então para demonstrar o Teorema é suficiente mostrar existe $h > 0$ tais que

$$\sup_{\overline{U_0}, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{K}_\epsilon^\pm(x, t)| \leq \text{Const} \cdot h^l l!^s;$$

$$\sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{H}_\epsilon^\pm(x, t)| \leq \text{Const} \cdot h^l l!^s,$$

De fato, se $h^* = \max\{h_0, h\}$

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l(u_\epsilon^+ + u_\epsilon^-)(x, t)| &\leq \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t)| + \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{K}_\epsilon^-(x, t)| + \\ &\quad + \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)| + \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{H}_\epsilon^-(x, t)| + \\ &\quad + \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{R}_\epsilon^+(x, t)| + \sup_{\overline{U}_0, \epsilon > 0} |M^l \mathcal{R}_\epsilon^-(x, t)| \\ &\leq \text{Const} \cdot h^{*l} l!^s, \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

concluindo assim que

$$u \in G_{\text{ML}}^{s, h^*}(U_0).$$

Para $t \in \Theta'$ vamos tratar dois casos:

1º caso) $t \in \Theta'/\Sigma$ (Σ é o conjunto de pontos críticos de Φ).

Pelo lema 8 existe uma curva γ_t começando em t e finalizando em $l(t)$.

Primeiro vamos considerar $l(t) \in \partial\Theta$.

Defina

$$d' = \frac{\text{dist}(\Theta', \partial\Theta)}{2} > 0.$$

Se $t \in \Theta'/\Sigma$ então, pelo lema 8,

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(l(t)) &\geq C\delta(t)^\sigma \\ &\geq C|l(t) - t|^\sigma \\ &\geq C d'^\sigma \end{aligned}$$

pois γ_t é uma curva parametrizada por comprimento de arco. Vamos definir

$$d = C d'^\sigma > 0. \tag{2.13}$$

Observando que

$$M^l[e^{i\xi[Z(x,t)-Z(x',t')]-\epsilon\xi^2}] = (-1)^l M'^l[e^{i\xi[Z(x,t)-Z(x',t')]-\epsilon\xi^2}],$$

onde M' é o operador M nas variáveis (x', t') , e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}
M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) &= M^l \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{\gamma_t} e^{i\xi[Z(x,t)-Z(x',t')]-\epsilon\xi^2} \right. \\
&\quad \left. \times g(x') \mathcal{L}u(x', t') dx' dt' d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} M^l [e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi-\epsilon\xi^2}] g(x') \mathcal{L}u(x', t') dt' dx' d\xi \\
&= \frac{(-1)^l}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} M'^l [e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi-\epsilon\xi^2}] g(x') \mathcal{L}u(x', t') dt' dx' d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi-\epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
|M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} (1+\xi)^{-2} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi-\epsilon\xi^2} \times \right. \\
&\quad \left. \times [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} (1+\xi)^{-2} e^{[\Phi(t')-\Phi(t)]\xi-\epsilon\xi^2} \times \\
&\quad \times \left| [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] \right| dt' dx' d\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_0^{\delta(t)} (1+\xi)^{-2} e^{-C\tau^\sigma \xi - \epsilon\xi^2} \times \\
&\quad \times \left| [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', \gamma_t(\tau))] \right| d\tau dx' d\xi \\
&\leq \text{const} \cdot \sup_{\bar{U}} |[1 - iM]^2 M^l [g(x) \mathcal{L}u(x, t)]| \int_0^\infty (1+\xi)^{-2} d\xi \\
&\leq \text{Const} \cdot h^{(l+2)} ((l+2)!)^s \leq \text{Const} \cdot h^2 (l+2)^s (l+1)^s h^l (l!)^s \\
&\leq \text{Const} \cdot h^2 (8 \times 4^l)^s h^l (l!)^s \\
&\leq \text{Const} \cdot h^2 8^s (4^s h)^l (l!)^s.
\end{aligned}$$

Agora estimamos $|M^l \mathcal{H}_\epsilon^+|$.

$$\begin{aligned} M^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t) &= \partial_x^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t) \\ &= \partial_x^l \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a e^{i(x-x')\xi - (\Phi(t) - \Phi(l(t)))\xi - \epsilon\xi^2} g(x') u(x', l(t)) dx' d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \partial_x^l \left[e^{i(x-x')\xi - (\Phi(t) - \Phi(l(t)))\xi - \epsilon\xi^2} \right] g(x') u(x', l(t)) dx' d\xi. \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} |M^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a (i)^l \xi^l e^{i(x-x')\xi - d\xi - \epsilon\xi^2} g(x') u(x', l(t)) dx' d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \xi^l e^{-(d\xi + \epsilon\xi^2)} |g(x') u(x', l(t))| dx' d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a (\xi^l e^{-\frac{d}{2}\xi}) e^{-\frac{d}{2}\xi - \epsilon\xi^2} |g(x') u(x', l(t))| dx' d\xi. \end{aligned}$$

Como

$$\xi^l e^{-\frac{d}{2}\xi} \leq \left(\frac{2l}{d}\right)^l e^{-\frac{d}{2}(\frac{2l}{d})}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} |\partial_x^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \left(\frac{2l}{d}\right)^l \xi^l e^{-\frac{d}{2}(\frac{2l}{d})} e^{-\frac{d}{2}\xi - \epsilon\xi^2} |g(x') u(x', l(t))| dx' d\xi \\ &= \left(\frac{2l}{d}\right)^l (2\pi)^{-1} e^{-l} \int_0^\infty \int_{-a}^a e^{-\frac{d}{2}\xi - \epsilon\xi^2} |g(x') u(x', l(t))| dx' d\xi \\ &\leq \left(\frac{2l}{d}\right)^l (2\pi)^{-1} e^{-l} 2a \sup_{\bar{U}} |g(x') u(x', l(t))| \int_0^\infty e^{-\frac{d}{2}\xi - \epsilon\xi^2} d\xi \\ &\leq \left(\frac{2}{d}\right)^l (l! e^l) (2\pi)^{-1} e^{-l} 2a \cdot \text{Const (fórmula de Stirling)} \\ &\leq \text{Const} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^l l!. \end{aligned}$$

Quando $l(t) \in \Sigma$ (e portanto $\Phi(t) > 0$ e $\Phi(l(t)) = 0$), escolhemos t_0 arbitrariamente próximo de $l(t)$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\Phi(t_0) < 0$ (lembre que Φ não tem mínimo local).

- $t_0 \in V$, onde V é uma vizinhança aberta convexa de $l(t)$ na qual $\Phi(s) < \Phi(t)$, $\forall s \in V$.
- Se $\text{dist}(l(t), \partial\Theta) > d'$ então supomos que $\text{dist}(t_0, \partial\Theta) > d'$.

Note que, com a primeira condição acima, $l(t_0) \in \partial\Theta$. Aqui escolhemos $\gamma = \gamma_t \cup [l(t), t_0] \cup \gamma_{t_0}$, onde γ_t e γ_{t_0} são como no lema 8 e $[l(t), t_0]$ é o segmento que une $l(t)$ com t_0 . Então

$$\begin{aligned} M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dx' dt' d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dx' dt' d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{[l(t), t_0]} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dx' dt' d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_{t_0}} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dx' dt' d\xi . \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{[l(t), t_0]} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_{t_0}} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} (1 + \xi)^{-2} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{[l(t), t_0]} (1 + \xi)^{-2} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_{t_0}} (1 + \xi)^{-2} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon\xi^2} [1 - iM']^2 M'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] dt' dx' d\xi \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_t} (1+\xi)^{-2} e^{[\Phi(t')-\Phi(t)]\xi-\epsilon\xi^2} \left| [1-i\mathbf{M}]^2 \mathbf{M}'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] \right| dt' dx' d\xi + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{[l(t), t_0]} (1+\xi)^{-2} e^{[\Phi(t')-\Phi(t)]\xi-\epsilon\xi^2} \left| [1-i\mathbf{M}]^2 \mathbf{M}'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] \right| dt' dx' d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_{t_0}} (1+\xi)^{-2} e^{[\Phi(t)-\Phi(t)]\xi-\epsilon\xi^2} \left| [1-i\mathbf{M}]^2 \mathbf{M}'^l [g(x') \mathcal{L}u(x', t')] \right| dt' dx' d\xi.
\end{aligned}$$

Observando que $\Phi(t') - \Phi(t) < 0$ para $t' \in \gamma_t$, $[l(t), t_0]$ e γ_{t_0} respectivamente, procedendo como no caso anterior obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{M}' \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t)| &\leq \text{const} \cdot \sup_{\bar{U}} |[1-i\mathbf{M}]^2 \mathbf{M}'^l [g(x) \mathcal{L}u(x, t)]| \int_0^\infty (1+\xi)^{-2} d\xi \\
&\leq \text{const} \cdot h^2 8^s (4^s h)^l (l!)^s.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}' \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t) &= \partial_x^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t) \\
&= \partial_x^l \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a e^{i(x-x')\xi - (\Phi(t) - \Phi(l(t_0)))\xi - \epsilon\xi^2} g(x') u(x', l(t_0)) dx' d\xi \right] \quad (2.14) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \partial_x^l \left[e^{i(x-x')\xi - (\Phi(t) - \Phi(l(t_0)))\xi - \epsilon\xi^2} \right] g(x') u(x', l(t_0)) dx' d\xi.
\end{aligned}$$

Como $l(t) \in \Sigma$ segue que $\Phi(t) > 0 > \Phi(t_0)$ e $\Phi(l(t)) = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(l(t_0)) &\geq \Phi(t_0) - \Phi(l(t_0)) \\
&\geq C\delta(l(t_0))^\sigma \\
&\geq C|t_0 - l(t_0)|^\sigma.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\Phi(l(t_0)) \leq 0$ segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(l(t_0)) &\geq \Phi(t) \\
&= \Phi(t) - \Phi(l(t)) \\
&\geq C\delta(t)^\sigma \\
&\geq C|t - l(t)|^\sigma.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi(t) - \Phi(l(t_0)) \geq C \max\{|t_0 - l(t_0)|, |t - l(t)|\}^\sigma.$$

Vamos verificar que

$$\max\{|t_0 - l(t_0)|, |t - l(t)|\} \geq d'.$$

Se $|t - l(t)| < d'$ então $\text{dist}(l(t), \partial\Theta) > d'$ pois $\text{dist}(l(t), \partial\Theta) \geq 2d'$. Portanto, pela nossa escolha de t_0 , temos $\text{dist}(t_0, \partial\Theta) > d'$ e $l(t_0) \in \partial\Theta$ donde $|t_0 - l(t_0)| > d'$.

Logo, usando (2.14) e (2.13),

$$\begin{aligned} |M^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \int_{-a}^a (i)^l \xi^l e^{i(x-x')\xi - d\xi - \epsilon\xi^2} g(x') u(x', l(t_0)) dx' d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \xi^l e^{-(d\xi + \epsilon\xi^2)} |g(x') u(x', l(t_0))| dx' d\xi. \end{aligned}$$

Procedendo como no caso anterior, obtemos que

$$|\partial_x^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)| \leq \text{Const} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^l l!.$$

2º caso) $t \in \Sigma$ (portanto $\Phi(t) = 0$). Neste caso escolhemos t_0 arbitrariamente próximo de t satisfazendo as condições:

- $\Phi(t_0) < 0$ (lembre que Φ não tem mínimo local).
- $t_0 \in V$, onde V é uma vizinhança aberta convexa de t na qual $\Phi(s) < 0$, $\forall s \in V$.
- Se $\text{dist}(t, \partial\Theta) > d'$ então supomos que $\text{dist}(t_0, \partial\Theta) > d'$.

Note que, com a primeira condição acima, $l(t_0) \in \partial\Theta$. Aqui escolhemos $\gamma = [t, t_0] \cup \gamma_{t_0}$, onde γ_{t_0} é como no lema 8 e $[t, t_0]$ é o segmento que une t

com t_0 . Então

$$\begin{aligned} M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_\gamma e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon \xi^2} M^{l'}[g(x')Lu(x', t')] dx' dt' d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{[t, t_0]} e^{i[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon \xi^2} M^{l'}[g(x')Lu(x', t')] dx' dt' d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-a}^a \int_{\gamma_{t_0}} e^{i\xi[Z(x,t)-Z(x',t')]\xi - \epsilon \xi^2} M^{l'}[g(x')Lu(x', t')] dx' dt' d\xi . \end{aligned}$$

Portanto, procedendo como acima obtemos as estimativas para $|M^l \mathcal{K}_\epsilon^+(x, t)|$ e $M^l \mathcal{H}_\epsilon^+(x, t)$.

Raciocínio análogo pode ser aplicado utilizando as curvas dadas pelas soluções de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t = & + \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}(\gamma_t(\tau)) \\ \gamma_t(0) = & t \end{cases}$$

e usando a hipótese que Φ não tem máximo local para obter as estimativas análogas para $M^l \mathcal{K}_\epsilon^-$, $M^l \mathcal{H}_\epsilon^-$. $\square$

Demonstração do corolário :

- ▷ Se Φ for analítico em U então pela proposição 2.2 se satisfaz a condição (2.8) e levando em conta a observação 5 se conclui o corolário. $\square$

Capítulo 3

Exemplo de um sistema que é analítico hipoelíptico, não hipoelíptico $\mathcal{C}^\infty$ e não G^s hipoelíptico para $s > 1$

Na presente seção discutimos a hipoelipticidade G^s do seguinte exemplo, que é conhecido não ser hipoelíptico $\mathcal{C}^\infty$ (cf. [M], exemplo 16 e Proposição 23) mas ser analítico hipoelíptico (cf. [BT], Teorema 6.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{\partial}{\partial t_1} + i \left[3 \frac{\partial}{\partial x_1} - (4t_1 t_2 + 3) t_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right], \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial}{\partial t_2} - i t_1^4 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Em (3.1), $m = n = 2$. Os correspondentes Z_k (cf. (2.5)) são:

$$\begin{aligned} Z_1 &= x_1 - 3it_1, \\ Z_2 &= x_2 + i(t_1 t_2 + 1)t_1^3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Escolhemos Ω vizinhança aberta da origem em $\mathbf{R}^4$ com fronteira $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema 3 *O sistema (3.1) não é G^s -Hipoelíptico em Ω para $s > 1$.*

Lema 9 *Se L é G^s -Hipoelíptico em Ω então para todo $W \subset\subset \Omega$ com fronteira suave e $h > 0$ existem $\sigma > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\sup_{(x,t) \in \overline{W}, |\alpha| > 0} \frac{|\partial^\alpha u(x,t)|}{\sigma^{|\alpha|} |\alpha!|^s} \leq C \left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega}} |u(x,t)| + \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega}, |\alpha| > 0} \frac{|\partial^\alpha Lu(x,t)|}{h^{|\alpha|} |\alpha!|^s} \right\} \quad (3.3)$$

$$\forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Demonstração :

- ▷ Dada $u \in C^0(\Omega)$ com $Lu \in \Lambda^1 G^s(\Omega)$ temos que $u \in G^s(\Omega)$. Assim para todo $W \subset\subset \Omega$ com fronteira suave, $u \in C^0(\overline{\Omega})$ com $Lu \in G^s(\overline{\Omega})$ implica $u \in G^s(\overline{W})$. Dado $h > 0$, denotaremos por

$$F = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : Lu \in \Lambda^1 G^{s,h}(\overline{\Omega})\}$$

munido da topologia do gráfico. Pela hipoelipticidade de L , repetindo o argumento na demonstração da proposição 1.1, existe $\sigma > 0$ tal que $F \subset G^{s,\sigma}(\overline{W})$. Por outro lado, sendo $G^{s,h}(\overline{\Omega})$ um espaço de Banach, o teorema do gráfico fechado implica que $i : F \rightarrow G^{s,\sigma}(\overline{W})$ é contínua. Então existe $C > 0$ tais que se cumpre a desigualdade (3.3). $\square$

Demonstração do teorema :

- ▷ Tomamos

$$u(x,t) = g(t_1) e^{iZ(x,t) \cdot \xi} \quad (3.4)$$

onde $Z(x,t) \in \mathbb{C}^2$ foi definido em (3.2), $\xi \in \mathbf{R}^2$ a ser escolhido depois e $g \in G_c^{s,h_1}(\mathbf{R})$ não negativa, h_1 também a ser escolhida. Temos

$$|u(x,t)| = g(t_1) e^{-\Phi(t) \cdot \xi}. \quad (3.5)$$

Escolhemos $\xi_1 = c^2 \rho$, $\xi_2 = \rho$, $c > 0$ pequeno, $\rho > 0$ grande. Por (3.2)

$$\frac{\Phi(t) \cdot \xi}{\rho} \doteq B(t_1, t_2, c), \quad (3.6)$$

onde usamos a notação

$$B(s, a, c) = s^3 + as^4 - 3c^2s.$$

Note que

$$c^{-3}B(cs, a, c) = s^3 + acs^4 - 3s. \quad (3.7)$$

Vamos descrever brevemente o gráfico da curva $y_2 = c^{-3}B(cy_1, a, c)$ numa vizinhança $V \times U \subset \Omega$ da origem. Dentre as raízes temos 0 e

$$\varrho_{\pm} = \pm\sqrt{3} + \theta_{\pm}(ac),$$

com $\theta_{\pm}$ analítica numa vizinhança de zero e anulando-se em zero. De fato, $c^{-3}B(cy_1, a, c) = s P(s, ac)$ com $P(s, ac) = [(s^2 - 3) + acs^3]$ então temos $p(\pm\sqrt{3}, 0) = 0$ e $\partial P(\pm\sqrt{3}, 0)/\partial s \neq 0$. Assim o resultado segue do teorema da função implícita.

Agora suponha que μ é a quarta raiz, então

$$(s - \mu)(s - \sqrt{3} - \theta_+(ac))(s + \sqrt{3} - \theta_-(ac)) = 0.$$

Portanto

$$\mu(\sqrt{3} + \theta_+(ac))(\sqrt{3} - \theta_-(ac)) = -3/ac$$

e assim a quarta raiz é da ordem de $-\frac{1}{ac}$. Duas das raízes da equação

$$3y_1^2 - 3 + 4acy_1^3 = 0$$

são da forma

$$\gamma_{\pm} = \pm 1 + \psi_{\pm}(ac)$$

com $\psi_{\pm}$ analítica numa vizinhança de zero e anulando-se em zero. A outra raiz é da ordem de $-\frac{3}{4ac}$. A função $y_2 = y_1^3 - 3y_1 + acy_1^4$ tem um mínimo em γ_+ , igual a $-\mu$:

$$\mu = 3\gamma_+ - \gamma_-^3 - ac\gamma_+^4.$$

Limitamos a variação de y_1 ao intervalo $[\gamma_-, 2]$, e c pequeno tal que $-\frac{1}{ac}$ e $-\frac{3}{4ac}$ estão fora deste intervalo e $\gamma_- < 0 < \gamma_+ < \varrho_+ < 2$.

Agora tomamos $g(t_1) = g_0(t_1/c)$, e

$$\text{supp } g_0 \subset]-3/2, +3[, \quad g_0 = 1 \text{ em } [-c, 2c]. \quad (3.8)$$

Por (3.8) e tomando c suficientemente pequeno com $|a| \leq R_0$, R_0 o raio de U , temos:

$$\sup_{s \in \text{supp } g'_0} c^{-3} B(cs, a, c) \geq d_0 > 0. \quad (3.9)$$

Dado $W \subset \subset \Omega$ escolho $K = \{(x, t) \in V \times U; |t_1| \leq b, t_2 = 0, x_2 = 0\} \subset W$, com $b > 0$ pequeno. Para c pequeno o ponto $(c, 0, 0, 0) \in K$ e

$$B(t_1, 0, c) \geq B(c, 0, c) = -2c^3, \quad \forall t_1 \in \text{supp } g$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_{x_2} u(x, t) &= \partial_{x_2} (g(t_1) e^{ix \cdot \xi - \Phi(t) \cdot \xi}) \\ &= i g(t_1) \rho e^{ix \cdot \xi - \Phi(t) \cdot \xi}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\partial_{x_2} u(x, t)| = |g(t_1)| \rho e^{-\Phi(t) \cdot \xi} \quad t_1 \in \text{supp } g.$$

Logo

$$\sup_{(x, t) \in K} |\partial_{x_2} u(x, t)| = \rho \sup_{(x, t) \in K} e^{-\Phi(t) \cdot \xi} = \rho e^{2c^3 \rho}. \quad (3.10)$$

Podemos agora tomar o conjunto $\overline{V} \times \overline{U}$ como sendo da forma $\overline{V'} \times K'_0$, com K'_0 o quadrado $|t_j| \leq R_0$, $j = 1, 2$ e $\overline{V'}$ uma vizinhança compacta da origem. Se $t_1 \in \text{supp } g$ e $t_2 = a$, temos

$$B(t_1, t_2, c) \geq B(\gamma_+, a, c) = -c^3 \mu,$$

e $\mu = 2 + O(c)$. De isto e de (3.5) temos que

$$\sup_{\overline{V'} \times K'_0} |u| \leq e^{2c^3 \rho + O(c^4) \rho}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, seja $\Phi^\#$ extensão holomorfa de $iZ(x, t) \cdot \xi$ definida numa vizinhança complexa de $\overline{V'} \times K'_0$ e seja r suficientemente pequeno a ponto de tornar os poli-discos $\Delta_1(x, r) \times \Delta_2(t, r)$, $(x, t) \in \overline{V'} \times K'_0$, contidos nesta vizinhança complexa.

Da fórmula integral de Cauchy segue que para $(x, t) \in \overline{V'} \times K'_0$,

$$\partial^\beta e^{iZ(x, t) \cdot \xi} = \frac{\beta!}{(2\pi i)^2} \int_{\partial\Delta_1(x, r) \times \partial\Delta_2(t, r)} \frac{e^{\Phi^\#(z)}}{(z - (x, t))^{\beta + (1, 1, 1)}} dz, \quad ,$$

donde

$$|\partial^\beta e^{iZ(x, t) \cdot \xi}| \leq \exp[\sup\{\operatorname{Re} \Phi^\#(z); z \in \partial\Delta_1(x, r) \times \partial\Delta_2(t, r)\}] \cdot r^{-|\beta|} \cdot \beta!.$$

Dado que

$$\begin{aligned} -\sup\{\operatorname{Re} [iZ(x, t) \cdot \xi] &= \rho B(t_1, t_2, c) : t_1 \in \operatorname{supp} g'_0\} \\ &= \rho \sup B(cs, a, c) \quad , |a| \leq R_0, \quad s \in \operatorname{supp} g'_0 \\ &\geq \rho d_0 c^3 \quad , \end{aligned}$$

podemos, por continuidade, diminuindo r (se necessário), assumir que

$$\sup\{\operatorname{Re} \Phi^\#(z) : z \in \partial\Delta_1(x, r) \times \partial\Delta_2(t, r), t_1 \in \operatorname{supp} g'_0\} \leq -\rho d_0 c^3/2.$$

Observe que $Lu = g'(t_1)e^{iZ(x, t) \cdot \xi} = g'(t_1)e^{ix \cdot \xi - \Phi(t) \cdot \xi}$ e portanto

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{V'} \times K'_0} |\partial^\alpha Lu| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{\operatorname{supp} g'} |\partial^\beta g'(t_1)| \sup_{\overline{V'} \times (K'_0 \cap \operatorname{supp} g')} |\partial^{\alpha-\beta} e^{iZ(x, t) \cdot \xi}| \\ &\leq C \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\beta!)^s h_1^{|\beta|} e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}} (\alpha - \beta)! h_2^{|\alpha-\beta|} \quad h_2 = 1/r \\ &\leq C e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}} \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!} (\beta!)^s h_1^{|\beta|} h_2^{|\alpha-\beta|} \\ &\leq C e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}} (\alpha!)^s \max\{h_1, h_2\}^{|\alpha|} C_1^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Seja $h_* = \max\{h_1, h_2, C_1\}$, então

$$|\partial^\alpha \mathbb{L}u| \leq C e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}} h_*^{|\alpha|} (\alpha!)^s.$$

Portanto, se tomamos $h = h_*$, obtemos

$$\sup_{\overline{V'} \times K'_0} \frac{|\partial^\alpha \mathbb{L}u|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s} \leq C e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}}. \quad (3.12)$$

Agora, pelos resultados (3.10), (3.11) e (3.12) vemos que (3.3) implica

$$\rho e^{2c^3 \rho} \leq \sigma C \left\{ e^{2c^3 \rho + O(c^4) \rho} + e^{-\frac{c^3 d_0 \rho}{2}} \right\}$$

assim

$$\rho \leq \sigma C \left\{ e^{O(c^4) \rho} + e^{-(2+d_0/2)c^3 \rho} \right\}$$

Para $\rho = 1/c^4$ e fazendo $c > 0$ ir para zero; o lado direito é limitado, mas isto não é certo para o lado esquerdo.

Simbologia

- as variáveis

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$\dot{\xi} = (\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_m) \in S^{m-1}, t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$$

- os domínios

$$B \ni x, \Theta \ni t, P \ni \xi, U \ni (x, t), \Gamma(P) \ni \xi$$

- os espaços de funções

$\mathbf{H}^{s,c}(P)$	3
$\mathbf{H}^s(P)$	3
$\mathcal{W}^{s,c}(\Theta, P)$	4
$\mathcal{W}^s(\Theta, P)$	4
$\mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathbf{L}^2(\Gamma(P)))$	5

- operador:

$\mathbb{D}$	4
$\widehat{\mathbb{D}}$	5

- Gevrey usual

$$G^{s,h}(\overline{U}), G^s(\overline{U}), G^s(V) \dots\dots\dots 28, 29, 30$$

- Gevrey segundo a estrutura localmente integrável

$$\mathbf{G}_{\text{ML}}^{s,h}(V), \mathbf{G}_{\text{ML}}^s(V) \dots\dots\dots 33, 34$$

Referências Bibliográficas

- [A] C. Asano, *Hipoelipticidade de uma classe de sistemas sobredeterminados*. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, Tese de Mestrado-1991
- [BT] M. S. Baouendi e F. Treves, *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*. ANNALS OF MATH., **113** (1981), 387-421
- [BT1] M. S. Baouendi e F. Treves, *A Microlocal version of Bochner's tube theorem*. INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL, vol. **31**, No. **6** (1982), 885-895
- [C] P. A. Caetano, *Classes de Gevrey em Estruturas Hipo-analíticas*. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, Tese de Doutorado-2000
- [Ch] M. Christ, *Intermediate optimal Gevrey exponents occur*. COMM. IN PARTIAL DIFF. EQ., **22(3&4)**(1997), 359-379
- [G] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*. SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE S. PAULO (3.A EDIÇÃO), São Paulo-1964
- [K] H. Komatsu, *Ultradistributions I. Structures theorems and a characterization*. J. FAC.SCI.UNIV.TOKIO, SEC IA, **19**(1973), 321-352

- [Ko] H. Komatsu, *Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces*. J. MATH. SOC. JAPAN, **19(3)**(1967), 366-383
- [L] S. Lojasiewicz, *Ensembles Semi-Analytiques*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Bures-sur-Yvette (Seine-et-Oise), France. (notas mimeografadas)
- [M] H. M. Maire, *Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations*. COMM. IN PARTIAL DIFF. EQ., **5(4)**(1980), 331-380
- [T] F. Treves, *Study of a model in the theory of complexes of pseudo-differential operators*. ANNALS OF MATH., **104** (1976), 325-356
- [T1] F. Treves, *Hypoelliptic partial differential equations of principal type*. COMM. PURE APPLIED MATH., **24** (1971), 631-670
- [T2] F. Treves, *Hypo-analytic structures (local theory)*. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, Princeton, NJ, 1992