**Convexidade e Finitude do Número de
Geodésicas em Variedades
Pseudo-riemannianas:
Aplicações à Teoria de Relatividade Geral**

Jaime Sodré de Sousa Filho

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Geometria Diferencial
Orientador: Prof. Dr. Paolo Piccione
– São Paulo, 3 de outubro de 2001 –

Para a realização deste trabalho houve o apoio financeiro do CNPq por meio de dois anos de bolsa de estudos.

Título:
Convexidade e Finitude do Número de Geodésicas
em Variedades Pseudo-riemannianas:
Aplicações à Teoria de Relatividade Geral

São Paulo, 3 de outubro de 2001.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paolo Piccione
Prof. Dr. Francesco Mercuri
Prof. Dr. Daniel Victor Tausk

IME - USP
IMECC - UNICAMP
IME - USP

Aos meus pais, Jaime e Delminda (in memoriam).

Indocti discant et ament meminisse periti.

O saber moderno, espaçando incomensuravelmente as extremas do universo acessível à sonda humana, rasgou ao estudo páramos encantados, revelou à curiosidade imprevistos fabulosos, armou a observação de instrumentos estupendos, variou-nos ao infinito o campo do trabalho. Mas, por isso mesmo, o adscreveu a uma prudência, a uma temperança, a uma humildade, que encerram cada trabalhador nos âmbitos mais estreitos. As sínteses vêm a ser agora de uma vastidão e complexidade inenarravelmente embaraçosas. As análises, de uma particularização, uma severidade e uma delicadeza não menos exigentes. De sorte que, nessa imensidade incalculável, balizada pela imaginação entre dois infinitos, o do invisível sidéreo e o do invisível microbiano, o menor recanto, conscienciosamente explorado, basta a absorver as forças de um talento e a atividade de uma vida.

Rui Barbosa - Discursos, Orações e Conferências, volume 3, Editora Iracema 1966.

No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus.

Ele estava no princípio com Deus.

Todas as coisas foram feitas por intermédio dele, e, sem ele, nada do que foi feito se fez.

Evangelho de **João** 1-3.

Agradecimentos

Muitas foram as pessoas que direta e/ou indiretamente contribuíram e me ajudaram, por diversos meios, para a conclusão desse trabalho. Foram três anos e meio de um contínuo esforço e aprendizado que me conduziram a conhecimentos e descobertas inimagináveis a alguns anos atrás.

Primeiramente ao professor Paolo Piccione, pela sua orientação, que foi essencial para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho, com suas sugestões, disciplina, correções e indicações de artigos, inclusive alguns dos seus, dois dos quais serviram de base para este trabalho.

Ao professor Francisco Rui Tavares Almeida pelo aconselhamento e conversas construtivas.

Ao professor Antonio Carlos Asperti, pelas sugestões preciosas.

Ao professor Plínio Amarante Quirino Simões pelo incentivo e sugestões bibliográficas.

Ao professor Frank Michael Forger, em cujas aulas em Teoria Geométrica de Campos aprendi muito sobre Geometria Diferencial de Espaços-tempos.

Ao amigo Mário Salles, sempre presente para uma palavra de incentivo e para conversas inteligentes e construtivas.

Ao amigo Marcone Correa Pereira, pelo seu exemplo de vida cristã.

Aos professores do IME, sempre solícitos, e a nos servir de exemplo de dedicação e a nos incentivar a prosseguir em busca por novos horizontes.

Aos colegas de estudo, sempre dispostos a ajudar e a perguntar, com que tenho compartilhado o caminho de minha jornada de estudos, nem sempre presentes nos momentos difíceis, algumas vezes presentes nos momentos mais necessários, mas sempre a nos inspirar a progredir e vencer obstáculos, e compartilhar os entusiasmos para o porvir. Em especial, ao Albetã, Alexandre, Célia, Cinthia, Claus, Daniel, Jefferson, Jocerey, Oswaldo, Regina, Ronaldo, Samuel, Sandro.

Aos funcionários do IME, em especial ao Feijão, Pinho e Francisca, pelas ajudas com as dúvidas burocráticas.

Aos meus irmãos em Cristo da Igreja Assembléia de Deus Bereana da Vila Mariana.

Ao meu pai, que tem sido essencial provedor e amigo.

Ao meu Deus, que me sustém.

Resumo

De acordo com a relatividade geral, raios de luz sofrem uma deflexão ao passar por um corpo maciço denso. Dependendo das circunstâncias, pode ocorrer de um observador ver duas ou mais imagens de uma fonte de luz distante da sua esfera celeste. Este é o assim chamado efeito de lente gravitacional com multiplicidade de imagens. Motivado por tal interesse físico, nesta tese estudamos alguns modelos matemáticos relativamente simples de espaços-tempos relativísticos, embora relevantes, variedades lorentzianas conformemente estacionárias, e fornecemos alguns resultados qualitativos sobre o número de imagens observadas em uma situação de lente gravitacional.

Um problema natural para os astrofísicos é o da contagem do número de imagens que podem ser observadas em uma situação de lente gravitacional. Em terminologia matemática, uma situação de lente gravitacional pode ser modelada do seguinte modo. Consideramos uma variedade lorentziana (M, g) como modelo matemático para um espaço-tempo, fixamos uma curva temporal γ como linha de mundo de uma fonte de luz, e um ponto p onde ocorre uma observação. Agora, o número de imagens vistas por um observador é igual ao número de segmentos geodésicos do tipo nulo que apontem para o futuro e que liguem γ a p . Quando quer que haja dois ou mais de tais segmentos geodésicos, estamos numa situação de lente gravitacional com multiplicidade. Deste ponto de vista, pode-se perguntar se existem algumas propriedades topológicas e métricas de um espaço-tempo que garantam a finitude do número de imagens observadas no caso não-conjugado. Nesta tese é provado que se uma variedade riemanniana admitir uma função estritamente convexa, então o número de segmentos geodésicos que liguem dois pontos não-conjugados é finito.

Nesta tese, introduzimos o conceito de função estritamente convexa do tipo nulo, damos alguns exemplos de variedades estacionárias e estáticas que admitem este tipo de função, e provamos que a existência de função estritamente convexa do tipo nulo implica a finitude do número de segmentos geodésicos do tipo nulo que apontem para o futuro e que liguem p e γ .

Abstract

According to general relativity, light rays undergo a deflection if they pass by a heavy mass. Circumstances permitted, this might lead to the effect that an observer sees two or more images of a distant light source at his or her celestial sphere. This is the so-called multiple imaging by the gravitational lens (GL) effect. Motivated by such a strong physical interest, in this thesis we study some relatively simple, yet relevant, mathematical models of a relativistic spacetime, conformally stationary Lorentzian manifolds, and we give some qualitative results on the number of images observed in a gravitational lensing situation.

A natural problem for astrophysicists is to count the number of images that can be observed in a gravitational lensing situation. In mathematical terminology, a gravitational lensing situation can be modelled in the following way. We consider a Lorentzian manifold $(\mathcal{M}, g)$ as a mathematical model for the spacetime, we fix a timelike curve γ as the worldline of a light source and a point p where the observation takes place. Now, the number of images seen by the observer equals the number of future-pointing lightlike geodesics from γ to p . Whenever there are two or more such geodesics, we are in a gravitational lensing situation. From this point of view, one can ask whether there exists some topological and metrical properties of the spacetime that guarantees the finiteness of the number of observed images in the nonconjugate case. In this thesis it is proven that if a Riemannian manifold admits a strictly convex function, then the number of geodesics joining two nonconjugate points is finite.

In this thesis we introduce the concept of light-convex function, we give some examples of static and stationary manifolds that admit this kind of function, and we prove that the existence of a light convex function implies the finiteness of the number of future pointing light rays between p and γ .

Sumário

Prefácio	xxi
Introdução	xxiii
Capítulo 1. Variedades Pseudo-riemannianas	1
1.1. Variedades Lorentzianas	9
1.2. Variedades Lorentzianas Estacionárias	14
1.3. Variedades Globalmente Hiperbólicas	18
1.4. Curvatura Seccional	22
Capítulo 2. Funções Convexas	27
2.1. Funções Convexas em $\mathbb{R}$	27
2.2. Convexidade de Funções Contínuas	40
2.3. Funções Convexas em Variedades Riemannianas	44
2.4. Funções Convexas e Métricas Conformemente Planas	56
2.5. Funções Convexas em Variedades Pseudo-riemannianas	58
2.6. Convexidade e subgradientes	59
2.7. Convexidade Causal	63
2.8. Curvatura e Funções Convexas	64
2.9. Função de Busemann	74
Capítulo 3. Teoremas de Finitude	89
3.1. Número de Geodésicas em Variedades Riemannianas	89
3.2. Número de Geodésicas em Variedades Lorentzianas	93
3.3. Variedades Conformemente Estacionárias	103
Apêndice A	115
Posfácio	119
Referências Bibliográficas	121
Índice Remissivo	123

Prefácio

Esta dissertação é composta por três capítulos, 1 – Variedades Pseudo-riemannianas, 2 – Funções Convexas e 3 – Teoremas de Finitude. Basicamente são estudados exemplos clássicos em geometria pseudo-riemanniana e funções convexas, tendo em vista os resultados principais do capítulo 3.

O primeiro capítulo é composto por definições, resultados básicos e subsidiários para os capítulos subsequentes. A maioria das demonstrações podem ser encontradas nos livros do Manfredo do Carmo [3], do O'Neill [17] e do Beem [1].

O segundo capítulo trata de funções convexas em $\mathbb{R}$, em espaços vetoriais e em variedades pseudo-riemannianas. Neste capítulo são estudadas as funções de Busemann em variedades riemannianas.

O terceiro capítulo contém os resultados principais e, em particular, teoremas de finitude para o caso riemanniano e para o caso lorentziano estacionário, além de uma extensão ao caso conformemente estacionário.

Basicamente este trabalho é uma adjunção dos artigos [10] e [11] que tratam, respectivamente, da finitude do número de geodésicas para o caso riemanniano e lorentziano estacionário. Como os teoremas principais requerem funções estritamente convexas, então uma atenção especial foi dada a elas, o que está registrado no capítulo 2. Mais do que funções de Busemann para variedades riemannianas, encontrou-se no livro do Udrişte [23] um método para a construção de funções convexas a partir de seqüências de subconjuntos fechados cuja distância a um ponto fixado tenda ao infinito.

Quanto ao nível lingüístico, por se tratar de um texto de Matemática, com sua exigência lógica e suas características conceituais, o que muitas vezes exige períodos mais curtos e concisos, procurei manter um registro com preferência por termos mais conhecidos e aceitos, para não haver prejuízo ao entendimento do texto. Nos casos em que foi necessário, não hesitei em utilizar termos que exprimam com mais exatidão os conceitos pertinentes, mesmo sendo pouco utilizados em textos matemáticos conhecidos. Por exemplo, utilizei o "sendo" em vez do "onde" em períodos explicativos, tendo a convicção de estar autorizado pelas melhores gramáticas da língua portuguesa.

Este trabalho foi redigido com o $\text{\LaTeX}$, o que explica eventualmente o abuso por referências dentro do texto, das quais o leitor pode se beneficiar para localização de definições, fórmulas, lemas, proposições e teoremas. Por exemplo, para fazer referência a uma proposição do segundo capítulo, com

o respectivo número de ordem, situada na página 53 escrevi proposição 2.82 (pg. 53). No caso de referência a uma página contígua, omiti o número da página, e citei apenas o número referente à referência.

Procurei corrigir o mais que pude, embora seja possível que haja erros. Espero que os erros eventualmente remanescentes não prejudiquem muito a qualidade deste trabalho.

Introdução

De acordo com a teoria de relatividade geral, raios de luz sofrem uma deflexão ao passar perto de corpos maciços densos, fenômeno chamado efeito de lente gravitacional. Devido à esta deflexão, um observador pode observar mais de uma imagem de uma mesma fonte de luz (ou de radiação eletromagnética). Diz-se, então, que há multiplicidade de imagens. Espaços-tempos são modelados por meio de variedades lorentzianas temporalmente orientadas $(\mathcal{M}, g)$. Neste contexto, geodésicas do tipo nulo, $(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0)$, são identificadas a trajetórias de fótons ($m = 0$), enquanto que geodésicas temporais, $(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0)$, são identificadas a trajetórias de partículas em queda livre ($m > 0$). Uma curva temporal pode ser identificada a trajetória de um observador ou de uma fonte de radiação eletromagnética. Em $(\mathcal{M}, g)$, multiplicidade de imagens observadas corresponde a multiplicidade do número de segmentos geodésicos do tipo nulo que apontem para o futuro que partam de um ponto p e cheguem a uma curva temporal γ , ou, equivalentemente, a multiplicidade do número de segmentos geodésicos do tipo nulo que apontem para o futuro que partam de uma curva γ e cheguem a um ponto p . Interessa-nos saber quais são as condições topológicas e métricas para haver finitude do número de segmentos geodésicos do tipo nulo que apontem para o futuro que partam de um ponto p e cheguem a uma curva temporal γ . Este problema em variedades lorentzianas é análogo ao problema de finitude de segmentos geodésicos que liguem um par de pontos de uma variedade riemanniana.

Mais precisamente, um espaço-tempo da relatividade geral é modelado por meio de uma variedade $\mathcal{M}$ munida de uma métrica g de assinatura $(+, \dots, +, -)$ que está relacionada ao campo gravitacional pelas *equações de Einstein*:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = 8\pi T$$

sendo g uma métrica lorentziana, Ric a curvatura de Ricci, R a curvatura escalar, T um tensor energia-momento e Λ a constante cosmológica. O tensor energia-momento T é determinado experimentalmente e, portanto, depende das características físicas do sistema que se estiver a estudar. Geralmente, os espaços-tempos da teoria de relatividade são variedades lorentzianas de dimensão 4, sendo três dimensões referentes ao espaço e uma dimensão referente ao tempo.

No espaço tangente a um ponto p de uma variedade pseudo-riemanniana $(\mathcal{M}, g)$, segundo o seu caráter causal, há uma tripartição, em vetores espaciais ($g(V, V) > 0$), temporais ($g(V, V) < 0$) e do tipo nulo ($g(V, V) = 0$). Analogamente, há uma tripartição para geodésicas que passem por um dado ponto. O caráter causal de uma geodésica não muda, pois $\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$.

As variedades lorentzianas fazem parte de uma classe mais ampla de variedades denominadas variedades pseudo-riemannianas, as quais se caracterizam por uma métrica não-degenerada (campo diferenciável simétrico de tensores não-degenerados), não necessariamente positiva.

Quanto mais complexa a topologia de uma variedade, por exemplo, em termos de seu grupo fundamental e grupos de homologia, mais complexa a geometria em termos de segmentos geodésicos que liguem um par específico de pontos. No caso de haver uma geodésica fechada, $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$, então, para um par de pontos, $p, q \in \gamma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$, existe um número infinito de segmentos geodésicos que liguem p e q . Uma variedade não-contrátil pode apresentar uma geodésica fechada, como, por exemplo, o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$, como também pode não apresentar nenhuma geodésica fechada, como por exemplo, a superfície no $\mathbb{R}^3$ dada por $x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$.

Para a obtenção de resultados sobre finitude do número de segmentos geodésicos que incidam em um par de pontos, será utilizada análise de convexidade e existência de função estritamente convexa. Em uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}, g)$, para um subconjunto totalmente convexo $A \subset \mathcal{M}$, diz-se que $F : A \subset \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ é convexa se, para todo segmento geodésico definido em um intervalo fechado I , $\gamma : I \mapsto A$, a composta $f(t) = F \circ \gamma : I \mapsto \mathbb{R}$ for convexa. Em uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$, diz-se que $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ é convexa do tipo nulo em um aberto $B \subset \mathcal{M}$ se, para todo segmento geodésico do tipo nulo $\gamma : I \mapsto B$, a composta $f = F \circ \gamma : I \mapsto \mathbb{R}$ for convexa.

A existência de uma função convexa ou de uma função estritamente convexa fornece informação adicional sobre uma variedade $\mathcal{M}$. Algumas variedades, com ou sem métrica, são refratárias à admissão de função convexa não-trivial e/ou função estritamente convexa. As variedades compactas não admitem nenhuma função convexa não-trivial. Uma variedade simplesmente conexa pode não admitir nenhuma função convexa não-trivial, como, por exemplo, a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com a métrica euclidiana induzida. O $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana admite a função estritamente convexa $F(x) = \text{dist}(x, p)^2$, $p \in \mathbb{R}^n$. Uma variedade pode admitir uma função convexa e não admitir nenhuma função estritamente convexa. O cilindro, acima definido, admite uma função convexa, mas não admite nenhuma função estritamente convexa, pois contém uma geodésica fechada e toda função convexa deve ser constante ao longo de uma geodésica fechada. A inexistência de função estritamente convexa não se restringe a variedades não-contráteis como o

cilindro; variedades contráteis também podem não admitir função estritamente convexa: basta considerar a variedade construída com a adjunção do semi-cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$ e uma calota esférica de modo a constituir uma variedade contrátil, munida com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$. Neste caso, há uma geodésica fechada, o que demonstra a inexistência de função estritamente convexa. Observe-se com este exemplo que pode haver infinitos segmentos geodésicos que liguem um par de pontos de uma variedade completa, contrátil e simplesmente conexa.

Número de segmentos geodésicos que incidam em um par de pontos está relacionado à métrica, logo, à curvatura e ao comportamento de geodésicas que partam de um ponto fixado. Geodésicas que partam de um ponto tendem a se aproximar se $K > 0$ e a se afastar se $K < 0$. A curvatura é definida a partir do tensor de curvatura, o qual, por sua vez, é definido a partir da conexão de Levi-Civita de uma métrica. Segundo o teorema de Hadamard-Cartan, para cada par de pontos de uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura $K \leq 0$, passa somente uma geodésica. Há finitude do número de segmentos geodésicos também em variedades com curvatura $K > 0$ como, por exemplo, o parabolóide $z = x^2 + y^2$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$.

Para toda variedade não-compacta $\mathcal{M}$ existe uma métrica g e uma função diferenciável não-constante $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, que seja convexa relativamente à métrica g . Um exemplo é dado pela função de Greene-Shiohama definida no capítulo 2.

Uma variedade riemanniana não-compacta $(\mathcal{M}, g)$ pode não admitir nenhuma função convexa não-trivial. Existem exemplos já em $\mathbb{R}^3$ de superfícies com a métrica euclidiana induzida que não admitem nenhuma função convexa. Para criar um exemplo basta proceder a uma construção com o n -toro, ajuntar algumas alças, e levar n ao infinito.

Dada uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}, g)$, com algumas condições adicionais sobre a curvatura seccional, curvatura radial ou existência de pólo, pode-se garantir a existência de função convexa. Por exemplo, uma variedade riemanniana completa com curvatura radial $K_r \leq 0$ e um pólo p , a função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \text{dist}(x, p)^2$, é estritamente convexa. Se $(\mathcal{M}, g)$ for completa, simplesmente conexa e $K \leq 0$, então, para uma subvariedade fechada e totalmente convexa A , a função $F(x) = \text{dist}(x, A)^2$ é convexa.

Como o teorema de finitude para o caso riemanniano requer função estritamente convexa, assim como para o caso lorentziano, então faz-se necessário uma busca por tais funções. Dados uma variedade riemanniana completa $(\mathcal{M}, g)$, não-compacta e com curvatura $K \geq 0$, e uma coleção de subconjuntos fechados, $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(p, C_n) = +\infty$, e as funções $F_n(x) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, C_n)$, tem-se que a função $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$, a menos de subsequência, é convexa. Como para cada ponto p de uma variedade riemanniana completa e não-compacta existe um raio γ que passe por p , então, para a coleção de conjuntos fechados

$\{\gamma(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, pode-se construir uma função, a chamada função de Busemann. Para toda variedade riemanniana completa $(\mathcal{M}, g)$ não-compacta e com curvatura $K \geq 0$, a função de Busemann, $b_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \text{dist}(x, \gamma(t)))$ relativa a um raio $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\gamma(0) = p$ é convexa. Se $K > 0$, então a função de Busemann b_γ é estritamente convexa.

Se a curvatura de Killing relativamente a um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ de uma variedade for estritamente negativa, (definida como o supremo das curvaturas dos planos $\{X, Y\}$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$), então a função energia de X , $F(p) = g(X(p), X(p))$ é estritamente convexa.

Uma variedade riemanniana completa $(\mathcal{M}, g)$ que admita uma função de classe $\mathcal{C}^2$, $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, com hessiano $H^F(p)[X, X] > 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $v \in T_p \mathcal{M}$, e com um ponto de mínimo não-degenerado, admite apenas um número finito de segmentos geodésicos que incidam em um par genérico de pontos não-conjugados. Para a prova deste teorema, demonstra-se que todo segmento geodésico que ligue um par de pontos não-conjugados possui energia limitada, e que, nestas condições, se houver uma coleção infinita de segmentos geodésicos com energia limitada que liguem o par de pontos em consideração, então os pontos devem ser conjugados, e, assim, chega-se a uma contradição que prova o teorema. Este teorema pode ser estendido ao caso em que $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ seja estritamente convexa com um ponto crítico não-degenerado. Para a demonstração deste teorema, utiliza-se o fato de que a exponencial $\exp_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é própria, que q é um valor regular de $\exp_p$ e $\{q\}$ é um conjunto limitado e fechado, logo, compacto, de modo que $A = \exp_p^{-1}(\{q\})$ seja um conjunto discreto contido num compacto, o que implica que A é finito e, portanto, há finitude do número de segmentos geodésicos que liguem p e q .

Consideramos variedades lorentzianas estacionárias, que, por definição, são aquelas que admitem um campo de Killing temporal $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ globalmente definido. Neste caso, dado o fluxo de Y , $\varphi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, a aplicação $\varphi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é conforme. Não é toda variedade que admite um campo de Killing. Em particular, estudamos variedades lorentzianas estáticas padrão $(\mathcal{M}, g)$, as quais são o produto distorcido de uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}_0, g_0)$ por $(I, -dt^2)$, com a métrica definida por $g((\xi, \tau)(\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) - \beta(x)\tau^2$, sendo $\beta : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, e $(\xi, \tau) \in T\mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$. Além destas, estudamos variedades lorentzianas estacionárias padrão $(\mathcal{M}, g)$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times I$, sendo $(\mathcal{M}_0, g_0)$ uma variedade riemanniana e $g((\xi, \tau), (\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) + 2g_0(\xi, \delta(x)) - \beta(x)\tau^2$, $\delta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_0)$, $\beta : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(\xi, \tau) \in T\mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$. Consideramos variedades globalmente hiperbólicas, que são aquelas que admitem uma superfície de Cauchy, de modo que não haja curvas causais fechadas. Exemplos de variedades lorentzianas estacionárias são os espaços-tempos de Minkowski, de Schwarzschildt, de Kerr, de Reissner-Nordström, de de Sitter, os espaços-tempos de Robertson-Walker e o universo estático de Einstein n -dimensional. Alguns dos espaços-tempos mais importantes não são variedades globalmente hiperbólicas, embora o sejam localmente. Exemplos de espaços-tempos

globalmente hiperbólicos são os espaços-tempos de Minkowski, os espaços-tempos de Robertson-Walker, o de de Sitter, e os universos estáticos de Einstein.

Para se estudar finitude do número de segmentos geodésicos no caso lorentziano, é necessário utilizar o conceito específico de geodésica do tipo nulo e, em vez de se considerar dois pontos, considerar um ponto e uma curva temporal. No caso de variedades lorentzianas estáticas padrão, há uma correspondência entre as geodésicas da variedade riemanniana que liguem um par de pontos de $(\mathcal{M}_0, g_0)$ e as geodésicas do tipo nulo de $(\mathcal{M}, g)$ que liguem um ponto a uma curva temporal. Neste caso, um problema de se demonstrar finitude do número de segmentos geodésicos que incidam em um ponto e uma curva em uma variedade lorentziana, reduz-se ao problema de se demonstrar finitude do número de segmentos geodésicos que incidam em um par de pontos de uma variedade riemanniana. Por exemplo, para a variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times I$ com a métrica $g = g_0 - \beta(x)dt^2$, sendo I um intervalo aberto, $(\mathcal{M}_0, g_0)$ uma variedade riemanniana completa, $\beta : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}^+$, por um par de pontos $p, q \in \mathcal{M}_0$ passa um número finito de segmentos geodésicos se, e somente se, houver um número finito de segmentos geodésicos que liguem o ponto $(p_0, 0) \in \mathcal{M}$ e a curva temporal $\gamma(t) = (p_1, t)$.

Fazendo-se as adaptações necessárias, o teorema de finitude do número de segmentos geodésicos que liguem um par de pontos de uma variedade riemanniana pode ser estendido a um teorema sobre finitude do número de segmentos geodésicos do tipo nulo que liguem um ponto e uma curva temporal de uma variedade lorentziana.

CAPÍTULO 1

Variedades Pseudo-riemannianas

Neste capítulo são apresentados conceitos subsidiários, terminologia, notações e convenções utilizados em todo o restante do texto.

Serão consideradas apenas variedades diferenciáveis $\mathcal{M}$ que sejam conexas, cuja topologia satisfaça ao axioma de separação de Hausdorff e ao segundo axioma de enumerabilidade.

Definição 1.1. Um *tensor* do tipo (r, s) , $r, s \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$ e/ou $s \neq 0$, definido num $\mathcal{K}$ -módulo $\mathcal{V}$, é uma função multilinear sobre um anel $\mathcal{K}$, $\tau : (\mathcal{V}^*)^r \times \mathcal{V}^s \longrightarrow \mathcal{K}$.

Notação $\mathcal{D}(\mathcal{M}) =$ classe das funções diferenciáveis em $\mathcal{M}$.

$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) =$ classe dos campos diferenciáveis em $\mathcal{M}$.

Definição 1.2. Um *campo de tensores* ω numa variedade $\mathcal{M}$ é um tensor sobre o $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ -módulo $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. ω é do tipo (r, s) se for uma função $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ -multilinear $\omega : \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})^r \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})^s \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M})$, ou seja, dados r 1-formas $\theta_1, \dots, \theta_r$, e s campos de vetores $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, a função $\omega(\theta_1, \dots, \theta_r, X_1, \dots, X_s) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, sendo $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ a classe das funções diferenciáveis em $\mathcal{M}$.

Definição 1.3. Uma *métrica pseudo-riemanniana* g é um campo diferenciável simétrico de tensores não-degenerados do tipo $(0, 2)$ em $\mathcal{M}$.

Uma métrica é dita não-degenerada se, para todo $p \in \mathcal{M}$ e para todo vetor $V \in T_p\mathcal{M}$, $V \neq 0$, existir $W \in T_p\mathcal{M}$ tal que $g(V, W) \neq 0$.

Dada uma métrica pseudo-riemanniana g , para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, está definido um produto interno não-degenerado $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ de assinatura $(-\dots - + \dots +)$. Sabe-se que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ possui uma base ordenada de vetores tal que a matriz de uma forma bilinear simétrica g seja diagonal. Dado um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, x)$, com a base natural, uma métrica pode ser escrita como $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$, sendo g_{ij} os coeficientes da métrica, com $g_{ij} = g_{ji}$ (g é simétrica) e $\det(g_{ij}) \neq 0$ (g é não-degenerada).

Se g for não-degenerada, então a matriz de g em todo ponto não possui nenhum autovalor nulo. Como o número de autovalores positivos, assim como o de autovalores negativos, é invariante por mudança de base, então o índice de uma métrica pode ser definido como o número de autovalores negativos da matriz da métrica em um ponto. O índice de uma métrica pseudo-riemanniana de uma variedade pseudo-riemanniana de dimensão n pode ser um inteiro de 1 a n .

Prova-se que matriz de uma métrica num ponto é invertível se, e somente se, a métrica for não-degenerada.

Definição 1.4. Uma *variedade pseudo-riemanniana* $(\mathcal{M}, g)$ é uma variedade $\mathcal{M}$ munida de uma métrica pseudo-riemanniana g .

Em variedades pseudo-riemannianas $(\mathcal{M}, g)$ tem-se três classes notáveis distintas de vetores, assim como de geodésicas, curvas, subvariedades e campos: temporal, espacial e do tipo nulo. Um vetor $V \in T_p\mathcal{M}$ é dito temporal (do tipo temporal) se $g(V, V) < 0$, espacial (do tipo espacial) se $g(V, V) > 0$ e do tipo nulo se $g(V, V) = 0$. Um vetor não-espacial também é chamado de causal. Uma curva diz-se causal se o seu vetor tangente for um vetor causal. Geodésicas temporais representam trajetórias de partículas em queda livre ($m > 0$), enquanto que geodésicas do tipo nulo representam trajetórias de radiações eletromagnéticas ($m = 0$), as quais têm comportamento de luz.

Definição 1.5. Uma *conexão afim*, ∇ , numa variedade diferenciável $(\mathcal{M}, g)$ é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definida por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisfaça às propriedades:

$$(i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$$

$$(ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

sendo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Seja $(x = (x_1, \dots, x_n), \mathcal{U})$ um sistema de coordenadas em uma variedade pseudo-riemanniana. Os coeficientes de uma conexão, ou os *símbolos de Christoffel* da conexão são definidos por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

sendo $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ a base natural relativa ao sistema de coordenadas $(x, \mathcal{U})$.

Proposição 1.6. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência, denominada derivada covariante, que associa a um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ tal que:*

$$(a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, sendo V um campo diferenciável de vetores ao longo de γ e f uma função diferenciável em I .

(c) Se V for um campo de vetores ao longo de γ induzido por um campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, i.é, se $V(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} Y(\gamma(t))$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha-se que exista uma derivada covariante que satisfaça (a), (b) e (c). Seja $(x, \mathcal{U})$ um sistema de coordenadas e $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$

uma curva, com expressão local $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $t \in I$. Pode-se expressar o campo V como $V = \sum_j v_j X_j$, sendo $X_j = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Por (a) e (b) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt} \left(\sum_{j=1}^n v_j X_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{D}{dt} (v_j X_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{dv_j}{dt} X_j + v_j \frac{D}{dt} X_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \frac{D}{dt} X_j . \end{aligned}$$

Por (c) e (i) da definição 1.5 tem-se

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_j = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \nabla_{(\sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{dv_k}{dt} + \left(\sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \right) X_k . \end{aligned}$$

Portanto, obtem-se a seguinte expressão para a derivada covariante:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{dv_k}{dt} + \left(\sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \right) X_k .$$

□

Proposição 1.7. Para um sistema de coordenadas $(x = (x_1, \dots, x_n), \mathcal{U})$ tem-se:

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k a_j \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} . \\ (2) \quad \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\} . \end{aligned}$$

Estas equações mostram como os coeficientes da conexão são determinados pelos coeficientes da métrica.

Definição 1.8. Um campo de vetores $V : I \mapsto T\mathcal{M}$ ao longo de uma curva $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ é dito *paralelo* se $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Definição 1.9. Uma conexão é *compatível com a métrica* se para todo par de campos de vetores paralelos $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e toda curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$, $g(V, W)$ for constante ao longo de γ .

Tem-se a seguinte caracterização para a compatibilidade com a métrica:

Proposição 1.10. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade pseudo-riemanniana. Uma conexão ∇ é compatível com a métrica se e somente se para todo par V, W de campos de vetores ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ tiver-se*

$$\frac{d}{dt}(g(V, W)) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right).$$

(Ver a referência [3, prop.3.2, pg.52].)

A seguinte caracterização é a mais útil para o que se segue:

Corolário 1.11. *Uma conexão é compatível com a métrica se, e somente se, $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ para toda terna $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.*

Definição 1.12. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $X = \sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Y = \sum_{j=1}^n v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$. O *colchete de Lie* dos vetores X, Y é um campo de vetores que age em funções diferenciáveis f por
 $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$

Utilizando-se coordenadas, tem-se

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^n v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n u_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n v_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j(x) - v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Dado um vetor $V \in T_p \mathcal{M}$ e um campo $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, a conexão ∇ induz uma derivação $\nabla_V W$, denominada a *derivada covariante* de W na direção de V .

Seja uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$. Então, considerando-se W como restrito à curva γ , tem-se que
 $\nabla_V W = \frac{DW}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} W.$

Teorema 1.13. *Existe uma única conexão, ∇ , numa variedade pseudo-riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ tal que valem*

- (4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$.
 (5) $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$
 para todo $X, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que ∇ seja uma conexão que satisfaça a (4) e (5).

Considere-se a fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, X) &= \\ &= V(g(W, X)) + W(g(V, X)) - X(g(V, W)) - g(V, [W, X]) \\ &\quad - g(W, [V, X]) + g(X, [V, W]) . \end{aligned}$$

Utilizando-se o fato de que a conexão ∇ é compatível com a métrica e é simétrica, e procedendo-se à substituição no lado direito da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} &V(g(W, X)) + W(g(X, V)) - X(g(V, W)) - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) \\ &+ g(X, [V, W]) = g(\nabla_V W, X) + g(W, \nabla_V X) + g(\nabla_W X, V) + g(X, \nabla_W V) \\ &- g(\nabla_X V, W) - g(V, \nabla_X W) - g(V, \nabla_W X - \nabla_X W) \\ &+ g(X, \nabla_V W - \nabla_W V) + g(W, \nabla_X V - \nabla_V X) = 2g(\nabla_V W, X) . \end{aligned}$$

Logo, ∇ satisfaz à fórmula de Koszul e, portanto, a conexão ∇ para $(\mathcal{M}, g)$ se existir é única.

A existência é dada pela própria fórmula de Koszul. Provemos que para ∇ , dada pela fórmula de Koszul, vale (4).

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W - \nabla_W V, X) &= 2g(\nabla_V W, X) - 2g(\nabla_W V, X) \\ &= V(g(W, X)) + W(g(X, X)) - X(g(V, W)) \\ &\quad - g(V, [W, X]) - g(W, [V, X]) + g(X, [V, W]) \\ &\quad - [W(g(V, X)) + V(g(W, X)) - X(g(V, W)) \\ &\quad - g(W, [V, X]) - g(V, [W, X]) + g(X, [W, V])] = 2g(X, [V, W]) . \end{aligned}$$

Logo, $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$.

Provemos que vale (5).

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X V, W) + 2g(V, \nabla_X W) &= \\ &= X(g(V, W)) + V(g(X, W)) - W(g(X, V)) \\ &\quad - g(X, [V, W]) - g(V, [X, W]) + g(W, [X, V]) \\ &\quad + X(g(W, V)) + W(g(X, V)) - V(g(X, W)) \\ &\quad - g(X, [W, V]) - g(W, [X, V]) + g(V, [X, W]) = 2X(g(V, W)) . \end{aligned}$$

Portanto, $X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$. $\square$

A conexão ∇ do teorema 1.13 é chamada *conexão de Levi-Civita* de $(\mathcal{M}, g)$. O item (4) interpreta-se como uma simetria, enquanto que o item (5) interpreta-se como uma compatibilidade com a métrica.

Definição 1.14. Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de F no ponto $p \in \mathcal{M}$ é o único vetor $\nabla F(p) \in T_p\mathcal{M}$ definido por

$$g(\nabla F(p), v) = dF(p)[v].$$

∇F é um campo diferenciável de vetores definido em $\mathcal{M}$.

Definição 1.15. Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ em torno de $p \in \mathcal{M}$. O hessiano da F no ponto p é definido por $H^F(p)[V, W] = g(\nabla_V(\nabla F), W)$, para todo par $V, W \in T_p\mathcal{M}$.

Lema 1.16. Se $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ for uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, então

$$H^F(p)[v, v] = \left. \frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) &= g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \\ \frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) &= \frac{d}{dt}(g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))) \\ &= g\left(\frac{D}{dt}(\nabla F(\gamma(t))), \dot{\gamma}(t)\right) + g(\nabla F(\gamma(t)), \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t)) \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\nabla F(\gamma(t))), \dot{\gamma}(t)) + g(\nabla F(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)) \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\nabla F(\gamma(t))), \dot{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} &= g(\nabla_{\dot{\gamma}(0)}(\nabla F(p)), \dot{\gamma}(0)) \\ &= g(\nabla_v(\nabla F(p)), v) = H^F(p)[v, v]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$H^F(p)[v, v] = \left. \frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

□

Definição 1.17. O tensor de curvatura riemanniana de uma variedade pseudo-riemanniana é a aplicação $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \mapsto \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definida por $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$.

Definição 1.18. Sejam $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e ω um tensor do tipo $(0, n)$. A derivada de Lie de ω na direção de X num ponto $p \in \mathcal{M}$ é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_n) &= \\ &= X(\omega(X_1, \dots, X_n)) - \omega([X, X_1], X_2, \dots, X_n) - \dots \\ &\quad - \omega(X_1, \dots, X_{n-1}, [X, X_n]), \end{aligned}$$

sendo $X_1, \dots, X_n \in T_p\mathcal{M}$.

Definição 1.19. Um campo diferenciável de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ numa variedade $(\mathcal{M}, g)$ é dito um *campo de Killing* se $\mathcal{L}_X g = 0$, i.e., se a derivada de Lie da métrica na direção X for igual a zero.

Proposição 1.20. As seguintes condições a respeito de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ são equivalentes:

- (1) X é um campo de Killing.
- (2) $X(g(V, W)) = g([X, V], W) + g(V, [X, W])$ para todo par $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.
- (3) $g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 0$ para todo par $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) $\Leftrightarrow$ (2) :

$$(\mathcal{L}_X g)(V, W) = X(g(V, W)) - g([X, V], W) - g([X, W], V) = 0$$

$$\Leftrightarrow X(g(V, W)) = g([X, V], W) + g(V, [X, W])$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) :

Pela compatibilidade da conexão com a métrica,

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$$

e pela nulidade da torção,

$$\begin{cases} [X, V] = \nabla_X V - \nabla_V X \\ [X, W] = \nabla_X W - \nabla_W X \end{cases}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} X(g(V, W)) &= g([X, V], W) + g(V, [X, W]) \\ &= g(\nabla_X V - \nabla_V X, W) + g(V, \nabla_X W - \nabla_W X) \\ &= g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W) - g(\nabla_V X, W) + g(V, \nabla_W X) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$X(g(V, W)) = g([X, V], W) + g(V, [X, W])$$

$$\Leftrightarrow g(\nabla_V X, W) + g(V, \nabla_W X) = 0 .$$

□

Um dos conceitos básicos da Geometria é geodésica.

Definição 1.21. Numa variedade pseudo-riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ uma *geodésica* é uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ que satisfaça à equação

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de $(\mathcal{M}, g)$. Se I for um intervalo, então diz-se que γ é um segmento geodésico. Diz-se que γ está normalizada se γ estiver parametrizada pelo comprimento de arco, i.e., $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$. γ é uma pré-geodésica se houver uma reparametrização $h : J \rightarrow I$, $t = h(s)$ tal que $\beta(s) = \gamma(h(s))$ seja uma geodésica.

Esta condição é essencial para se provar convergência uniforme de sequência de vetores em compactos.

Corolário 1.22. Seja $(x = (x_1, \dots, x_n), \mathcal{U})$ um sistema de coordenadas. Uma curva $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma geodésica se, e somente se,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Definição 1.23. Diz-se que uma geodésica $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ é *inestendível* ou *maximal* se o domínio I for o maior possível, i.e., se $\bar{\gamma} : J \mapsto \mathcal{M}$ for um segmento geodésico e houver $t \in I \cap J$ tal que $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$ e $\dot{\gamma}(t) = \dot{\bar{\gamma}}(t)$, então $J \subset I$.

Definição 1.24. Seja $\gamma :]a, b[\mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica. Um *campo de Jacobi* ao longo de γ é um campo de vetores $J \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ que satisfaça à equação de Jacobi,

$$J'' + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0$$

na qual $J'' = \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}J)$.

Um campo de Jacobi descreve um comportamento das geodésicas próximas à geodésica γ .

Lema 1.25. Sejam $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo de Killing e $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica. Então $g(X, \dot{\gamma})$ é constante ao longo de γ .

DEMONSTRAÇÃO. Como X é de Killing, então pela compatibilidade com a métrica, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g(X, \dot{\gamma})) &= g(\nabla_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma}) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma}) = -g(\nabla_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma}) . \end{aligned}$$

Logo, $\frac{d}{dt}g(X, \dot{\gamma}) = 0$. Portanto, $g(X, \dot{\gamma})$ é constante. $\square$

Lema 1.26. Um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ restrito a uma geodésica γ é um campo de Jacobi.

Definição 1.27. $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ diz-se uma curva integral de $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ se $Y(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ para todo $t \in I$.

Proposição 1.28. Todo campo de Killing X definido numa variedade riemanniana completa $(\mathcal{M}, g)$ é completo, no sentido de que toda curva integral de X está definida em todo o $\mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ uma curva integral maximal de X .

A função quadrado da norma de X ao longo de γ , $f(t) = g(X(\gamma(t)), X(\gamma(t)))$, é constante, pois

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2g(\nabla_X X(\gamma(t)), X(\gamma(t))) \\ &= 2g(\nabla_X X(\gamma(t)), X(\gamma(t))) = 0 \end{aligned}$$

e X é de Killing.

Suponha-se, por absurdo, que $b < +\infty$ seja a extremidade direita do intervalo I . Como X é limitado, então $\gamma([0, b])$ é um conjunto limitado e, portanto, é relativamente compacto, pois $(\mathcal{M}, g)$ é completa. Mas isto contradiz a maximalidade de γ . $\square$

Definição 1.29. O *fluxo* de um campo vetorial completo $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é a aplicação $\psi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $\psi(p, t) = \gamma_p(t)$, sendo γ_p a curva integral maximal de V que passa por p .

Definição 1.30. Seja $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Um *fluxo local* de V em $p \in \mathcal{M}$ é uma aplicação $\psi : U_p \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathcal{M}$, sendo U_p uma vizinhança de p tal que, para cada $q \in U_p$, a aplicação $\psi_q :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathcal{M}$, definida por $\psi_q(t) = \psi(q, t)$, seja a curva integral de V que passa por q em $]-\epsilon, \epsilon[$.

Proposição 1.31. Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é de Killing se, e somente se, as aplicações $\psi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definidas por $\psi_t(x) = \psi(t, x)$ forem isometrias.

As seguintes propriedades são essenciais para o que se segue:

(1) Num campo de Killing X , $g(X, X)$ é constante ao longo de toda curva integral de X .

(2) As aplicações $\psi_{t_0} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ são isometrias locais, i.e.,

$$g(d\psi(p, t_0)v, d\psi(p, t_0)w)_{\psi(p, t_0)} = g(v, w)_p.$$

(3) $g(\nabla_V X, W) = -g(\nabla_W X, V)$.

Em particular, como $g(\nabla_V X, V) = -g(\nabla_V X, V)$, então $g(\nabla_V X, V) = 0$ para todo $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

1.1. Variedades Lorentzianas

Definição 1.32. Uma *variedade lorentziana* é uma variedade munida de uma métrica pseudo-riemanniana de índice 1 (assinatura $(- + \dots +)$).

Definição 1.33. Sejam $(\mathcal{M}, m)$ uma variedade lorentziana, $(\mathcal{N}, h)$ uma variedade riemanniana, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, $\pi : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ a projeção $\pi(x, y) = x$, e $\eta : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ a projeção $\eta(x, y) = y$. O *produto lorentziano distorcido* de $(\mathcal{M}, m)$ por $(\mathcal{N}, h)$ pela função f é a variedade lorentziana $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, g)$, sendo g a métrica lorentziana num ponto $p \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ definida por $g(v, w) = m(d\pi(p)[v], d\pi(p)[w]) + f(\pi(p))h(d\eta(p)[v], d\eta(p)[w])$, sendo $v, w \in T_p(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$.

Notação : $\mathcal{M} \times_f \mathcal{N}$ denota o produto lorentziano distorcido $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, g)$ com função de distorcimento f , sendo g a métrica dada na definição de produto distorcido.

Muitas das variedades que aparecem no estudo de espaços-tempos são produtos distorcidos. Os produtos lorentzianos distorcidos, definidos ulteriormente, são exemplos de variedades lorentzianas.

Definição 1.34. Um produto distorcido com função de distorcimento $f \equiv 1$ é chamada de *produto lorentziano*.

(Alternativamente poder-se-ia considerar produtos da forma $\mathcal{N} \times_f \mathcal{M}$.)

Definição 1.35. O produto pseudo-riemanniano distorcido é a variedade $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, g)$, sendo $(\mathcal{M}, m)$ e $(\mathcal{N}, h)$ variedades pseudo-riemannianas, e a métrica g definida como no caso do produto lorentziano distorcido.

No caso pseudo-riemanniano, o índice de g é a soma dos índices de m e h , por isso, um produto pseudo-riemanniano distorcido não é necessariamente uma variedade lorentziana.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz não vale em geometria lorentziana; o que vale é o seguinte.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida

Lema 1.36. *Sejam u e v vetores não-espaciais de uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$. Então $g(u, v)^2 \geq g(u, u)g(v, v)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como u, v são não-espaciais, então $g(u, u) \leq 0$ e $g(v, v) \leq 0$.

Seja $w \in u^\perp$.

Pode-se escrever $v = au + w$ ($u, v, w \in T_p\mathcal{M}$).

Deste modo, tem-se

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(au + w, au + w) = a^2g(u, u) + g(w, w) \leq 0 \\ g(u, v)^2 &= g(u, au + w)^2 = (ag(u, u) + g(u, w))^2 \\ &= a^2g(u, u)^2 = \frac{(g(v, v) - g(w, w))}{g(u, u)}g(u, u)^2 \\ &= g(v, v)g(u, u) - g(w, w)g(u, u) \geq g(v, v)g(u, u). \end{aligned}$$

Portanto, $g(u, v)^2 \geq g(u, u)g(v, v)$. $\square$

A desigualdade de Minkowski não vale na geometria pseudo-riemanniana; o que vale é o seguinte.

Desigualdade de Minkowski invertida

Lema 1.37. *Sejam u, v vetores não-espaciais de uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$. Então, tem-se $\|u + v\|^2 \geq \|u\| + \|v\|$.*

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= -g(u + v, u + v) = -(g(u, u) + g(v, v) + 2g(u, v)) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(u, v) \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2g(u, v) \\ &\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$. $\square$

Definição 1.38. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ e $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ duas variedades. Diz-se que as métricas g e $\tilde{g}$ são *conformes* se existir uma função diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\tilde{g} = \phi g$.

Lema 1.39. *Sejam $\tilde{g} = \phi g$ métricas conformes, e $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável. Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita das métricas g e $\tilde{g}$. Nestes termos, tem-se*

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_V W, X) &= \\ g(\nabla_V W, X) &+ \frac{1}{2\phi(\zeta)} [g(W, X)V(\phi(\zeta)) + g(X, V)W(\phi(\zeta)) \\ &- g(V, W)X(\phi(\zeta))] . \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Desenvolvendo-se a fórmula de Koszul para $\tilde{g}$, obtem-se

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W, X) &= \\ &= V(\tilde{g}(W, X)) + W(\tilde{g}(X, V)) - X(\tilde{g}(V, W)) \\ &- \tilde{g}(V, [W, X]) + \tilde{g}(W, [X, V]) + \tilde{g}(X, [V, W]) \\ &= V(\phi(\zeta)g(W, X)) + W(\phi(\zeta)g(X, V)) - X(\phi(\zeta)g(V, W)) \\ &- \phi(\zeta)g(V, [W, X]) + \phi(\zeta)g(W, [X, V]) + \phi(\zeta)g(X, [V, W]) \\ &= [g(W, X)V(\phi(\zeta)) + g(X, V)W(\phi(\zeta)) - g(V, W)X(\phi(\zeta))] \\ &+ [\phi(\zeta)V(g(W, X)) + \phi(\zeta)W(g(X, V)) - \phi(\zeta)X(g(V, W)) \\ &- \phi(\zeta)g(V, [W, X]) + \phi(\zeta)g(W, [X, V]) + \phi(\zeta)g(X, [V, W])] \\ &= 2\phi(\zeta)g(\nabla_V W, X) + [g(W, X)V(\phi(\zeta)) + g(X, V)W(\phi(\zeta)) \\ &- g(V, W)X(\phi(\zeta))] . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W, X) &= \\ &2\phi(\zeta)g(\nabla_V W, X) + [g(W, X)V(\phi(\zeta)) \\ (1.1.1) \quad &+ g(X, V)W(\phi(\zeta)) - g(V, W)X(\phi(\zeta))] . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(1.1.2) \quad 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W, X) = 2\phi(\zeta)g(\tilde{\nabla}_V W, X) .$$

Igualando-se 1.1.1 e 1.1.2, obtem-se

$$\begin{aligned} 2\phi(\zeta)g(\tilde{\nabla}_V W, X) &= 2\phi(\zeta)g(\nabla_V W, X) \\ &+ [g(W, X)V(\phi(\zeta)) + g(X, V)W(\phi(\zeta)) - g(V, W)X(\phi(\zeta))] . \end{aligned}$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_V W, X) &= g(\nabla_V W, X) \\ &+ \frac{1}{2\phi(\zeta)} [g(W, X)V(\phi(\zeta)) + g(X, V)W(\phi(\zeta)) - g(V, W)X(\phi(\zeta))] . \end{aligned}$$

que é a relação entre as conexões de Levi-Civita relativas às métricas conformes g e $\tilde{g}$. $\square$

Lema 1.40. *Se $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ for uma geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}, g)$, então existe uma função diferenciável $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) = \phi(t)\dot{\gamma}(t)$, sendo $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita relativamente à uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g .*

DEMONSTRAÇÃO. Substituindo-se $X = V = W = \dot{\gamma}$ na expressão do lema 1.39 (pg. 11), tem-se

$$g(\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) .$$

Logo, $g(\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, pois γ é uma geodésica em relação a ∇ .

Seja $\tilde{\gamma} = \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$. Provemos que $\tilde{\gamma} = \phi\dot{\gamma}$.

Se $\tilde{\gamma}$ e $\dot{\gamma}$ forem linearmente independentes, então existe um vetor espacial $v \in T_p\mathcal{M}$ tal que $\dot{\gamma} - c\tilde{\gamma} = v$, para algum $c > 0$. Mas $g(v, v) = g(\dot{\gamma} - c\tilde{\gamma}, \dot{\gamma} - c\tilde{\gamma}) = g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - 2cg(\dot{\gamma}, \tilde{\gamma}) + c^2g(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) = 0$. Portanto, para cada $t_0 \in \mathbb{R}^+$ existe $\phi(t_0) \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t_0) = \phi(t_0)\dot{\gamma}(t_0)$.

Portanto, existe $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \phi(t)\dot{\gamma}(t)$. $\square$

Lema 1.41. *Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita referentes às métricas conformes g e $\tilde{g}$ em $\mathcal{M}$. $(\mathcal{M}, g)$ e $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ possuem, a menos de reparametrização, as mesmas geodésicas do tipo nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica para ∇ , i.e., $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, e seja $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ para todo $t \in I$. Então, pelo lema 1.40, para $p = \gamma(t)$, tem-se

$$(1.1.3) \quad \tilde{\nabla}_{X_p}X = \phi(t)X_p .$$

Seja $F(t) = \exp(\psi(t))$, sendo $\psi'(t) = \phi(t)$ de modo que

$$(1.1.4) \quad \frac{dF}{dt} = \psi'(t) \exp(\psi(t)) = \phi(t)F(t) .$$

Seja $\tilde{X}$ o campo vetorial tal que

$$(1.1.5) \quad \tilde{X}(\gamma(t)) = \frac{1}{F(t)}X(\gamma(t)) = \frac{1}{F(t)}\dot{\gamma}(t) .$$

Então, por 1.1.3 e 1.1.4 obtem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_p}\tilde{X} &= \tilde{\nabla}_{\frac{1}{F(t)}X_p}\frac{1}{F(t)}X \\ &= \frac{1}{F(t)}\tilde{\nabla}_{X_p}\frac{1}{F(t)}X = \frac{1}{F(t)}\left[X_p\left(\frac{1}{F(t)}\right)X_p + \frac{1}{F(t)}\tilde{\nabla}_{X_p}X\right] \\ &= \frac{1}{F(t)}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{F(t)}\right)X_p + \frac{1}{F(t)}\phi(t)X_p\right] \\ &= \frac{1}{F(t)}\left[-\frac{1}{F(t)^2}\frac{dF}{dt}(t)X_p + \frac{1}{F(t)^2}\frac{dF}{dt}X_p\right] = 0 . \end{aligned}$$

Seja $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$ uma reparametrização de $\gamma(t)$, sendo $t = h(s)$. Nestes termos, $s = h^{-1}(t)$ e $\tilde{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(h(s))\frac{dh}{ds}(s)$ e $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(h^{-1}(t))$.

Para $\frac{1}{F(s)} = \frac{dh}{ds}(s)$ tem-se que

$$\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \dot{\gamma}(h(s)) \frac{dh}{ds}(s) = \dot{\gamma}(t) \frac{dh}{ds}(h^{-1}(t)) = \frac{1}{F(h^{-1}(t))} \dot{\gamma}(t) = \tilde{X}(\gamma(t)).$$

Portanto, $\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{\gamma}(s) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_p} \tilde{X}(\gamma(t)) = 0$.

Portanto, γ é uma pré-geodésica em relação a $\tilde{\nabla}$. Portanto, as geodésicas do tipo nulo são invariantes, a menos de reparametrização, por variação conforme da métrica. $\square$

Portanto, se uma curva γ for uma geodésica em $(\mathcal{M}, g)$ então γ é uma pré-geodésica em $(\mathcal{M}, \tilde{g})$, sendo $\tilde{g} = \phi g$ uma métrica conforme à métrica g .

Definição 1.42. Diz-se que uma aplicação $F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ é conforme em uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$ se, a menos de um fator conforme, a sua diferencial preservar a métrica, i.e., $g(dF(p)v, dF(p)w) = \phi(p)g(v, w)$ para todo par $v, w \in T_p\mathcal{M}$ e todo $p \in \mathcal{M}$, sendo $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável.

Lema 1.43. Seja $F : (\mathcal{M}_1, g_1) \mapsto (\mathcal{M}_2, g_2)$ uma aplicação conforme que seja um difeomorfismo. Então $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}_1$ é uma pré-geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}_1, g_1)$ se, e somente se, $F \circ \gamma$ for uma pré-geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}_2, g_2)$.

DEMONSTRAÇÃO. F é uma aplicação conforme, i.e., existe $\phi : \mathcal{M}_1 \mapsto \mathbb{R}^+$ tal que $g_1(v, w) = \phi(p)g_2(dF(p)v, dF(p)w)$ para todo par $v, w \in T_p\mathcal{M}$.

Seja $F^{-1} : (\mathcal{M}_2, g_2) \mapsto (\mathcal{M}_1, g_1)$. F^{-1} é uma aplicação conforme, pois

$$\begin{aligned} g_2(v, w) &= g_2(dF(p)\bar{v}, dF(p)\bar{w}) \\ &= \frac{1}{\phi(p)} g_1(\bar{v}, \bar{w}) = \frac{1}{\phi(F^{-1}(q))} g_1(dF^{-1}(q)v, dF^{-1}(q)w) \end{aligned}$$

sendo $q = F(p)$, $v = dF(p)\bar{v}$ e $w = dF(p)\bar{w}$. Além disso, F^{-1} é um difeomorfismo.

Portanto, para $\psi(q) = \frac{1}{\phi(F^{-1}(q))}$, tem-se

$g_2(v, w) = \psi(q)g_1(dF^{-1}(q)v, dF^{-1}(q)w)$, para todo $q \in \mathcal{M}_2$ e para todo par $v, w \in T_q\mathcal{M}$.

Portanto, basta provar que se $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}_1$ for uma geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}_1, g_1)$, então $\sigma(t) = (F \circ \gamma)(t)$ é uma pré-geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}_2, g_2)$, i.e., que σ pode ser reparametrizada para ser uma geodésica do tipo nulo. A aplicação $\bar{F} : (\mathcal{M}_1, g_1) \mapsto (\mathcal{M}_2, \bar{g})$ é uma isometria, sendo $\bar{g}$ a métrica induzida pela F , ou seja, $\bar{g}(v, w) = g(dF^{-1}(q)v, dF^{-1}(q)w)$. Portanto, $\bar{g}$ é uma métrica conforme a g_2 . Como σ é uma geodésica em relação a $\bar{g}$, então pode-se aplicar o lema 1.40 (pg. 12).

σ é uma curva do tipo nulo pois, como γ é uma geodésica do tipo nulo e F é uma aplicação conforme, então

$$\begin{aligned} g_1(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) &= \phi(\gamma(t))g_2(dF(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), dF(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)) \\ &= \phi(\gamma(t))g_2\left(\frac{d}{dt}((F \circ \gamma)(t)), \frac{d}{dt}((F \circ \gamma)(t))\right) \\ &= \phi(\gamma(t))g_2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)). \end{aligned}$$

Como $g_1(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ e $\phi(\gamma(t)) > 0$, então $g_2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = 0$ para todo $t \in I$, i.e., σ é uma curva do tipo nulo.

Resta provar que σ pode ser reparametrizada para ser uma geodésica do tipo nulo.

Como $\sigma(t)$ é uma geodésica em $(\mathcal{M}, \bar{g})$, então pelo lema 1.40 (pg. 12), existe uma função diferenciável $\phi : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$\tilde{\nabla}_\sigma \dot{\sigma}(t) = \phi(t)\dot{\sigma}(t)$ (1), sendo $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita relativa à métrica $\bar{g}$. Como $(\mathcal{M}_2, g_2)$ e $(\mathcal{M}_2, \bar{g})$ são conformes, então, pelo lema 1.41 (pg. 12), (1) é equivalente a σ ser uma pré-geodésica. $\square$

1.2. Variedades Lorentzianas Estacionárias

Nesta secção são apresentados alguns exemplos de espaços-tempos estacionários.

Definição 1.44. Uma *variedade lorentziana* $(\mathcal{M}, g)$ diz-se *estacionária* se ela admitir um campo diferenciável temporal de vetores de Killing globalmente definido.

Um espaço-tempo é uma variedade lorentziana estacionária, temporalmente orientada. Exemplos de variedades lorentzianas estacionárias são os espaços-tempos de Minkowski, de Schwarzschild, de Kerr, o universo estático de Einstein e os espaços-tempos de Robertson-Walker, os quais serão considerados a seguir.

Serão apresentados alguns exemplos de variedades lorentzianas estacionárias $(\mathcal{M}, g)$, sendo $\mathcal{M}$ uma variedade e g uma métrica lorentziana.

As variedades estacionárias, ou espaços-tempos, são modelos matemáticos para universos que podem ser o vácuo (espaço-tempo de Minkowski), o espaço-tempo gerado por um corpo maciço com simetria radial (espaços-tempos de Schwarzschild e de Kerr), ou por um fluido ideal (espaço-tempo de Robertson-Walker).

Exemplo 1.45. Espaço-tempo de Minkowski

Um espaço-tempo de Minkowski é uma variedade $(\mathcal{M}, g)$, sendo $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ e $g = -dt^2 + \sum_{j=2}^n dx_j^2$.

Notação: $\mathbb{R}_1^n$

O espaço-tempo de Minkowski $(\mathcal{M}, g)$ é o produto lorentziano distorcido de $(\mathbb{R}, -dt^2)$ por $(\mathbb{R}^{n-1}, h)$, com função de distorcimento $f \equiv 1$ sendo h a

métrica euclidiana do $\mathbb{R}^{n-1}$. Para $n = 4$ este é o espaço-tempo do vácuo, ou seja, de um espaço tridimensional destituído de matéria. $(\mathcal{M}, g)$ além de ser um espaço-tempo plano, é a variedade dos espaços tangentes a um ponto de uma variedade lorentziana de dimensão n .

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal de Killing.

Um espaço-tempo de Minkowski é um caso particular do seguinte.

Exemplo 1.46. Espaço-tempo pseudo-euclidiano

Um espaço-tempo pseudo euclidiano é uma variedade $(\mathcal{M}, g)$, sendo $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ e $g = \sum_{j=1}^r -dx_j^2 + \sum_{j=r+1}^n dx_j^2$.

Notação : $\mathbb{R}_r^n$

Exemplo 1.47. Espaços-tempos de Schwarzschild

Seja $\mathcal{M}_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r > 2m\}$.

Utilizando-se coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\phi), \\ w = t, \end{cases} \quad \begin{matrix} r > 2m, \quad t \in \mathbb{R} \\ \phi \in [0, \pi[, \quad \theta \in [0, 2\pi[\end{matrix}$$

tem-se a métrica de Schwarzschildt

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

$(\mathcal{M}, g)$ é o espaço-tempo de Schwarzschildt, sendo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal de Killing, pois o termo que multiplica dt^2 é menor que zero. As curvas integrais de Y são as curvas $\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0, t)$.

Este é o espaço-tempo exterior a um corpo maciço de alta densidade tal como uma estrela ou um buraco negro sem rotação. Ele é assintoticamente plano.

Exemplo 1.48. Espaço-tempo de Reissner-Nordström

Seja $\mathcal{M}_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r = |x| > m + \sqrt{m^2 - e^2} \text{ e } m^2 \geq e^2\}$, sendo $m, e > 0$ constantes.

Em coordenadas (t, r, θ, ϕ) tem-se a métrica de Reissner-Nordström

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

$(\mathcal{M}, g)$ é o espaço-tempo de Reissner-Nordström, sendo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$.

Este é o espaço-tempo exterior a um corpo esférico maciço carregado eletricamente.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal de Killing, pois o termo que multiplica dt^2 é menor que zero.

As curvas integrais de Y são $\gamma(t) = (x, y, z, t)$.

Observar que para $e = 0$ tem-se exatamente a métrica de Schwarzschildt.

Exemplo 1.49. Espaço-tempo de Kerr

Em coordenadas (t, r, θ, ϕ) tem-se a métrica de Kerr apresenta-se sob a forma

$$g = -dt^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{A} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2$$

sendo $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $A = r^2 - 2mr + a^2$ (m representa massa e a constante ma representa o momento angular).

Pra $a = 0$, tem-se $\rho^2 = r^2$ e $A = r^2 - 2mr$. Logo,

$$\begin{aligned} g &= -dt^2 + r^2 \left(\frac{1}{r^2 - 2mr} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{2mr}{r^2} dt^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \end{aligned}$$

que é exatamente a métrica de Schwarzschildt.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal, pois $g(Y, Y) = -1$.

Este é o espaço-tempo dos pontos exteriores a um buraco negro em rotação, o qual apresenta um momento angular constante.

Exemplo 1.50. Universo estático de Einstein

O universo estático de Einstein n -dimensional é o produto lorentziano distorcido $\mathcal{M}_0 \times_f H$, com função de distorcimento $f \equiv 1$, sendo $\mathcal{M}_0 = \mathbb{R}$ com a métrica $-dt^2$ e $H = S^{n-1}$ com a métrica euclidiana induzida g_0 . $g = -dt^2 + g_0$.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal pois $g(Y, Y) = -1$, e é de Killing, pois os fluxos locais ψ_t são isometrias.

As curvas integrais de Y são $\gamma(t) = (t, x_2, \dots, x_n)$.

Definição 1.51. Seja $I(H)$ o grupo das isometrias de (H, h) . O grupo de isotropia do ponto $p \in H$ é $I_p(H) = \{\phi \in I(H) \mid \phi(p) = p\}$.

Definição 1.52. Seja $S_p H = \{v \in T_p H \mid \|v\| = 1\}$. Seja $I_p(H)$ o grupo de isotropia de (H, h) em $p \in H$. Diz-se que uma variedade riemanniana (H, h) é *isotrópica* se $I_p(H)$ agir transitivamente em $S_p H$, i.e., dados um par $v, w \in S_p H$, existir uma isometria $\phi \in I_p(H)$ tal que $d\phi(p)v = w$.

Definição 1.53. Diz-se que uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ é *homogênea* se para todo par $p, q \in \mathcal{M}$, existe uma isometria $\phi \in I(\mathcal{M})$, tal que $q = \phi(p)$. Diz-se que $(\mathcal{M}, g)$ é *homogênea de dois pontos* se para toda quadra $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{M}$, tal que $\text{dist}(p_1, p_2) = \text{dist}(q_1, q_2)$, existe uma isometria $\phi \in I(\mathcal{M})$ tal que $\phi(p_1) = q_1$ e $\phi(p_2) = q_2$.

Exemplo 1.54. Espaço-tempo de Robertson-Walker

Um espaço-tempo de Robertson-Walker é um produto lorentziano distorcido de $(\mathcal{M}_0, -dt^2)$, sendo $\mathcal{M}_0 =]a, b[$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, com (H, h) , uma variedade riemanniana isotrópica, e $f : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função de distorcimento, isto é, $g = -dt^2 + f(t)^2 h$.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal de Killing.

As curvas integrais de Y são $\gamma(t) = (p, t)$, $p \in \mathcal{M}_0$.

Os espaços-tempos de Robertson-Walker, pela isotropia, são variedades de curvatura constante. Estão incluídos nesta classe os modelos cosmológicos do "big bang", modelados com uma métrica baseada na dinâmica de um fluido ideal e o universo estático de Einstein.

O campo $\frac{\partial}{\partial t}$ é de Killing.

Em particular, um espaço-tempo de Robertson-Walker é uma variedade lorentziana estacionária.

Por exemplo, um espaço-tempo de Robertson-Walker de dimensão quatro é topologicamente $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R} \times S^3$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^3$.

Observação 1.55. Uma variedade riemanniana é isotrópica se, e somente se, ela for homogênea de dois pontos. Logo, em espaços-tempos de Robertson-Walker, a variedade espacial (H, h) é homogênea de dois pontos. Como homogeneidade de dois pontos implica homogeneidade, então (H, h) é homogênea. Além disso, homogeneidade implica completude geodésica, logo, (H, h) é completa.

A condição de isotropia de (H, h) é muito restritiva. Por isso, é conveniente definir um espaço-tempo sem esta condição, o que é feito a seguir.

Exemplo 1.56. Espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado

Um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado é um produto lorentziano distorcido de $(\mathcal{M}_0, -dt^2)$, sendo $\mathcal{M}_0 =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, (H, h) uma variedade riemanniana, e $f : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de distorcimento, isto é, $g = -dt^2 + f(t)^2 h$.

Definição 1.57. Diz-se que uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ é *localmente isotrópica* se, para cada $p \in \mathcal{M}$, houver uma vizinhança aberta $A_p \subset \mathcal{M}$ e uma isotropia $J_p : A_p \rightarrow A_p$, $J_p \in I_p(A_p)$.

Em vez de se considerar uma variedade riemanniana isotrópica no espaço-tempo de Robertson-Walker, pode-se considerar (H, h) como uma variedade riemanniana localmente isotrópica. Deste modo, há uma extensão do espaço-tempo de Robertson-Walker e, logo, há um número mais elevado de exemplos de variedades, segundo o que é definido a seguir.

Exemplo 1.58. Espaço-tempo de Robertson-Walker estendido

Um espaço-tempo de Robertson-Walker estendido é um produto lorentziano distorcido de $(\mathcal{M}_0, -dt^2)$, sendo $\mathcal{M}_0 =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, com (H, h) , uma variedade riemanniana localmente isotrópica, e $f : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de distorcimento, i.e., $g = -dt^2 + f(t)h$.

Exemplo 1.59. Espaço-tempo de Robertson-Walker estendido que não é um espaço-tempo de Robertson-Walker usual.

Sejam $\mathcal{M}_0 =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e (H, g_0) o toro plano. O espaço-tempo de Robertson-Walker estendido é $(\mathcal{M}_0 \times H, g)$, sendo $g = -dt^2 + g_0$.

(H, g_0) é localmente isotrópica, mas não é isotrópica. Em todo caso, (H, g_0) é completa.

(H, g_0) não pode ser imerso no $\mathbb{R}^3$, mas pode ser imerso no $\mathbb{R}^4$ com a parametrização $\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$

Observação 1.60. Uma variedade isotrópica é localmente isotrópica, mas uma variedade localmente isotrópica não é necessariamente, isotrópica. Por exemplo, $\mathcal{M} = S^2 \setminus \overline{C}$ com a métrica euclidiana induzida, sendo C uma calota de S^2 .

Exemplo 1.61. Espaço-tempo de de Sitter

O espaço-tempo de de Sitter é a variedade

$\mathcal{M} = S_1^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 = r^2\}$ com a métrica pseudo-euclidiana de $\mathbb{R}_1^{n+1}$, $g = -dt^2 + \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2$.

Exemplo 1.62. O espaço-tempo anti-de Sitter é o recobrimento universal do espaço-tempo

$H_1^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x_1)^2 - (x_2)^2 + (x_3)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 = -r^2\}$ com a métrica pseudo-euclidiana de $\mathbb{R}_1^{n+1}$, dada por $g = -dt^2 + \sum_{j=2}^{n+1} dx_j^2$, sendo $z = (x_1, \dots, x_{n+1})$.

1.3. Variedades Globalmente Hiperbólicas

Numa variedade pseudo-riemanniana genérica não é conhecido nenhum resultado geral como o teorema de Hopf-Rinow para variedades riemannianas, particularmente no que concerne a conexidade por geodésicas. Portanto, é necessário se considerar classes de variedades que possuam certas características específicas. No estudo de variedades lorentzianas, restringir-se-á a variedades globalmente hiperbólicas, definidas a seguir, as quais possuem propriedades convenientes, tal como conexidade por geodésicas de pontos causalmente relacionados ($p \leq q$).

Definição 1.63. Uma variedade diz-se causal se não houver nenhuma curva causal fechada.

Definição 1.64. Uma variedade lorentziana é chamada *fortemente causal* se para todo $x \in \mathcal{M}$ e toda vizinhança aberta de x , V_x , existir uma outra vizinhança de x , $U_x \subset V_x$, tal que, para cada par $p, q \in U_x$, todo segmento de curva causal que incidir em p e em q estiver contido em V_x .

Interpretando-se de outro modo, uma variedade é fortemente causal se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{M}$ e para qualquer curva causal γ que passe por x , existir uma vizinhança U_x de x tal que γ , ao passar por x , e sair de U_x , nunca mais torna a esta vizinhança. Observe-se que numa variedade fortemente causal, nenhuma curva causal pode estar contida num compacto. Notação: $p < q$ indica que q está no futuro causal de p , i.e., existe uma curva causal apontante para o futuro que liga $p, q \in \mathcal{M}$.

$p \leq q$ indica que $p < q$ ou $p = q$.

$p << q$ indica que q está no futuro cronológico de p .

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^+ &= \{q \in \mathcal{M} \mid p \leq q\} . \\ \mathcal{I}^- &= \{q \in \mathcal{M} \mid q \leq p\} .\end{aligned}$$

Definição 1.65. Diz-se que uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ é *globalmente hiperbólica* se ela for uma variedade lorentziana fortemente causal, e se $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(q)$ for um conjunto compacto, para todo par $p, q \in \mathcal{M}$ com $p \ll q$.

Em particular, variedades globalmente hiperbólicas são causais.

Definição 1.66. Uma *superfície de Cauchy* é uma hipersuperfície espacial mergulhada $\Sigma \subset \mathcal{M}$ que satisfaça à propriedade de toda curva causal inestendível em $\mathcal{M}$ interceptar Σ uma única vez.

Similarmente, uma variedade é globalmente hiperbólica se, e somente se ela admitir uma superfície de Cauchy. Prova-se que uma variedade globalmente hiperbólica é homeomorfa a um produto cartesiano $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$, sendo a hipersuperfície $\Sigma \times \{t\}$ uma superfície de Cauchy para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver [1], teorema 3.17, pg. 65, [5]).

Os espaços-tempos de Minkowski, de Robertson-Walker generalizado e de Sitter, e o universo estático de Einstein são globalmente hiperbólicos. Os espaços-tempos de Schwarzschildt, de Kerr, de Reissner-Nordström e anti-de Sitter não são globalmente hiperbólicos.

Exemplo 1.67. Variedade globalmente hiperbólica.

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$, munida de a métrica $g = -dt^2 + \beta(x, y, z)g_0$, sendo $\mathcal{M}_0 = \mathbb{R}^3$, $g_0 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, e $\beta : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\beta(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

O campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é temporal pois $g(Y, Y) = -1$, e é de Killing pois os fluxos locais ψ_t , $t \in \mathbb{R}$, são isometrias.

$\gamma(t) = (x, y, z, t)$ são curvas integrais de Y que passam por (x, y, z) .

$\Sigma = \{(x, y, z, t_0) \in \mathcal{M} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é uma superfície de Cauchy:

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t), t)$ uma curva causal, i.e.,

$$\begin{aligned}g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) &= g((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, 1), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, 1)) \\ &= -1 + \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} g_0((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})),\end{aligned}$$

com $g_0((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})) \leq 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Nestas condições, $\alpha(t)$ intercepta Σ uma única vez. Portanto, Σ é uma superfície de Cauchy. Portanto, $(\mathcal{M}, g)$ é globalmente hiperbólica.

A seguir serão construídos exemplos de variedades globalmente hiperbólicas por meio de produtos lorentzianos distorcidos, sendo as componentes espaciais constituídas por grupos de Lie.

Proposição 1.68. *Sejam $(\mathcal{H}, h)$ uma variedade riemanniana e $\mathcal{M} =]a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$, com a métrica $-dt^2$, e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável. Então, o produto lorentziano distorcido $(\mathcal{M} \times_f \mathcal{H}, g)$ é globalmente hiperbólico se, e somente se, $(\mathcal{H}, h)$ for completa (ver [1]).*

Pela observação 1.55, todo espaço-tempo de Robertson-Walker é globalmente hiperbólico, pois, neste caso, a subvariedade espacial (H, h) é completa.

Proposição 1.69. *Sejam $(\mathcal{H}, h)$ uma variedade riemanniana e $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ com a métrica de produto lorentziano $-dt^2 \otimes h$. Então, são equivalentes:*

- (1) $(\mathcal{H}, h)$ é geodesicamente completa.
- (2) $(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, -dt^2 \otimes h)$ é geodesicamente completa.
- (3) $(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, -dt^2 \otimes h)$ é globalmente hiperbólica.

DEMONSTRAÇÃO. Pela proposição 1.68, tem-se $(1) \Leftrightarrow (3)$.

Provemos, então, que $(1) \Leftrightarrow (2)$. Mas, isso é consequência do fato que as geodésicas de $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ com a métrica $-dt \otimes h$, a menos de reparametrizações, são da forma $\gamma(t) = (\lambda t, c(t))$ ou $(\lambda_0, c(t))$ ou $(\lambda t, h_0)$, sendo λ e λ_0 constantes, $h_0 \in \mathcal{H}$ e $c : J \rightarrow \mathcal{H}$ uma geodésica normalizada em $\mathcal{H}$. $\square$

Proposição 1.70. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ um espaço-tempo e $(\mathcal{H}, h)$ uma variedade riemanniana. Então o produto lorentziano distorcido $(\mathcal{M} \times_f \mathcal{H}, g)$ é globalmente hiperbólico se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

- (1) $(\mathcal{M}, g)$ é uma variedade lorentziana globalmente hiperbólica.
- (2) $(\mathcal{H}, h)$ é uma variedade riemanniana completa (ver [1]).

Definição 1.71. Um espaço simétrico é uma variedade conexa $(\mathcal{M}, g)$ tal que, para cada $p \in \mathcal{M}$, existe uma isometria $I_p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, com $I_p(p) = p$, e, se $\gamma :]-a, a[\rightarrow \mathcal{M}$ for uma geodésica com $\gamma(0) = p$, então $I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Notação: No que se segue, para uma função $I : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, I_* denotará a derivada de I , até o fim desta secção.

Lema 1.72. *Todo espaço simétrico é geodesicamente completo.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $p \in \mathcal{M}$ e γ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $q = \gamma(c)$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e isometrias I_p e I_q tais que $I_p(p) = p$, $I_q(q) = q$ e que invertam geodésicas, no sentido de que $I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Seja $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t + c)$. Então $\bar{\gamma}$ é uma geodésica e $\bar{\gamma}(0) = q$.

$$\begin{aligned} I_q I_p(\gamma(t)) &= I_q(\gamma(-t)) = I_q(\bar{\gamma}(-t - c)) \\ &= \bar{\gamma}(t + c) = \gamma(t + 2c). \end{aligned}$$

Se $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ for paralelo ao longo de γ , então $I_{p*}(V)$ também é paralelo, pois I_p é uma isometria. Além disso, $I_{p*}[V(t)] = V(t + 2c)$. Portanto, $\gamma : [0, \lambda] \rightarrow \mathcal{M}$ pode ser estendida a uma geodésica $\bar{\gamma} : [0, 2\lambda] \rightarrow \mathcal{M}$, escolhendo-se $q = \gamma(\frac{\lambda}{2})$ e definindo-se $\bar{\gamma}(t) = I_q I_p(\gamma(t - \lambda))$ para $t \in [\lambda, 2\lambda]$. Portanto, γ pode ser estendida a $\mathbb{R}$. $\square$

Definição 1.73. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo tal que a aplicação $\phi : G \times G \rightarrow G$, dada por $\phi(x, y) = xy^{-1}$, seja diferenciável.

Definição 1.74. Seja G um grupo de Lie. Para cada $a \in G$, define-se a *translação à esquerda* (respectivamente, *translação à direita*) como a aplicação $L_a : G \rightarrow G$ (respectivamente, $R_a : G \rightarrow G$) definida por $L_a(x) = ax$ (respectivamente, $R_a(x) = xa$) para $x \in G$.

Notação: As derivadas de L_a e R_a serão denotadas por L_{a*} e R_{a*} .

Definição 1.75. Diz-se que uma métrica g é *invariante à esquerda* (respectivamente, *invariante à direita*) se $g(L_{p*}[v], L_{p*}[w]) = g(v, w)$ (respectivamente, $g(R_{p*}[v], R_{p*}[w]) = g(v, w)$) para todo $p \in G$ e todo par $v, w \in T_p G$. Se g for invariante tanto à esquerda como à direita, então, diz-se que g é *biinvariante*.

Proposição 1.76. Seja (G, g_1) um grupo de Lie munido de uma métrica lorentziana biinvariante, e (H, g_2) um grupo de Lie munido de uma métrica riemanniana biinvariante. Então, a métrica produto $g = g_1 \otimes g_2$ é uma métrica lorentziana biinvariante para o grupo de Lie produto $G \times H$ e, por isso, $(G \times H, g)$ é um espaço simétrico lorentziano e, em particular, é geodesicamente completo.

DEMONSTRAÇÃO. Como g_1 e g_2 são biinvariantes, então para $\sigma = (r, s) \in G \times H$ e $\xi_1 = (v_1, w_1), \xi_2 = (v_2, w_2) \in T_\sigma(G \times H)$, tem-se

$$\begin{aligned} g(L_{\sigma*}[\xi_1], L_{\sigma*}[\xi_2]) &= g((L_{r*}[v_1], L_{s*}[w_1]), (L_{r*}[v_2], L_{s*}[w_2])) \\ &= g_1(L_{r*}[v_1], L_{r*}[v_2]) \otimes g_2(L_{s*}[w_1], L_{s*}[w_2]) \\ &= g_1(v_1, v_2) \otimes g_2(w_1, w_2) = g(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}$$

logo, g é invariante à esquerda. Do mesmo modo, g é invariante à direita, pois

$$\begin{aligned} g(R_{\sigma*}[\xi_1], R_{\sigma*}[\xi_2]) &= g((R_{r*}[v_1], R_{s*}[w_1]), (R_{r*}[v_2], R_{s*}[w_2])) \\ &= g_1(R_{r*}[v_1], R_{r*}[v_2]) \otimes g_2(R_{s*}[w_1], R_{s*}[w_2]) \\ &= g_1(v_1, v_2) \otimes g_2(w_1, w_2) = g(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Portanto, g é biinvariante.

Mostremos que para cada $\sigma \in G \times H$, existe uma isometria $I_\sigma : G \times H \rightarrow G \times H$ que fixe σ e tal que, para cada geodésica γ em $G \times H$ com $\gamma(0) = \sigma$, tenha-se $I_\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ para todo t . Isto é equivalente a mostrar que a derivada $I_{\sigma*} : T_\sigma(G \times H) \rightarrow T_\sigma(G \times H)$, é a aplicação $I_{\sigma*}[\xi] = -\xi$, o que implica que $I_{\sigma*}^2 = Id$.

Sejam e a unidade de $G \times H$, $I_e : G \times H \rightarrow G \times H$ definida por $I_e(\sigma) = \sigma^{-1}$. Então, $I_{e*} : T_e(G \times H) \rightarrow T_e(G \times H)$ é dada por $I_{e*}[v] = -v$. Como $I_e = R_{\sigma^{-1}} I_e L_{\sigma^{-1}}$, então $I_{e*} : T_\sigma(G \times H) \rightarrow T_{\sigma^{-1}}(G \times H)$ é uma isometria. Logo, $I_e : G \times H \rightarrow G \times H$ é uma isometria.

Como g é biinvariante, então, tanto uma translação à esquerda quanto uma translação à direita são isometrias.

Como $I_{e*}|_\sigma = R_{\sigma^{-1}}|_e I_{e*}|_e L_{\sigma^{-1}}|_\sigma$ e $I_{e*}|_e$ é uma isometria de $T_e(G \times H)$, então $I_{e*} : T_\sigma(G \times H) \rightarrow T_{\sigma^{-1}}(G \times H)$ é uma isometria. Portanto, $I_e : G \times H \rightarrow G \times H$ é tal que $I_e(e) = e$ e $I_e(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Sejam $\sigma \in G$ e $I_\sigma : G \times \mathcal{H} \mapsto G \times \mathcal{H}$ dada por $I_\sigma = R_\sigma I_e R_{\sigma^{-1}}$. Pela biinvariância de g , tem-se que R_σ e $R_{\sigma^{-1}}$ são isometrias, logo, I_σ é uma isometria. Como $I_\sigma(x) = (x\sigma^{-1})^{-1}\sigma = \sigma x^{-1}\sigma$, então $I_\sigma(\sigma) = \sigma$.

Para cada $\xi \in T_\sigma(G \times \mathcal{H})$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{\sigma*}[\xi] &= R_{\sigma*}(I_{e*}(R_{\sigma^{-1}*}[\xi])) \\ &= R_{\sigma*}(-R_{\sigma^{-1}*}[\xi]) \\ &= -(R_{\sigma*}R_{\sigma^{-1}*})[\xi] = -(R_\sigma R_{\sigma^{-1}})_*[\xi] = -\xi. \end{aligned}$$

Portanto, I_σ inverte geodésicas em σ . Portanto, $(G \times \mathcal{H}, g)$ é um espaço simétrico. Pelo lema 1.72, $(G \times \mathcal{H}, g)$ é geodesicamente completo. $\square$

Proposição 1.77. *Sejam $(\mathbb{R}, -dt^2)$ com a estrutura de grupo usual e (G, g_1) um grupo de Lie munido de uma métrica riemanniana biinvariante. Então, a métrica produto $g = -dt^2 \otimes g_1$ é uma métrica lorentziana biinvariante para o grupo de Lie produto $\mathbb{R} \times G$. Deste modo, $(\mathbb{R} \times G, g)$ é um espaço-tempo geodesicamente completo e globalmente hiperbólico.*

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação $(a, b) \mapsto a + b$ define uma operação de grupo de Lie em $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ é uma variedade com parametrização $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = t$ e $\{\frac{\partial}{\partial t}\}$ é a base natural correspondente à parametrização ϕ .

A translação à esquerda $L_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e a translação à direita $R_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ são dadas, respectivamente, por $L_a(x) = a+x$ e $R_a(x) = x+a$, logo, $L_a = R_a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam L_{a*} e R_{a*} respectivamente as derivadas de L_a e R_a . Então, para cada $v = \lambda \frac{\partial}{\partial t}|_r \in T_r \mathbb{R}$ tem-se que $L_{a*}[v]$ e $R_{a*}[v]$ são dados por $L_{a*}[v] = R_{a*}[v] = \lambda \frac{\partial}{\partial t}|_{a+r}$. Logo, para $v_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}|_r$ e $v_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}|_r$ tem-se

$$\begin{aligned} -dt^2(L_{a*}[v_1], L_{a*}[v_2]) &= -dt^2(R_{a*}[v_1], R_{a*}[v_2]) \\ &= -dt^2\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{a+r}, \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{a+r}\right) = -\lambda_1 \lambda_2 = -dt^2(v_1, v_2), \end{aligned}$$

de modo que $-dt^2$ é invariante à esquerda e à direita.

Se $\sigma = (r, s) \in \mathbb{R} \times G$ e $\xi = (v, w) \in T_\sigma(\mathbb{R} \times G) \cong T_r \mathbb{R} \times T_s G$, então $L_{\sigma*}[\xi] = (L_{r*}[v], L_{s*}[w])$ e $R_{\sigma*}[\xi] = (R_{r*}[v], R_{s*}[w])$. Logo, a métrica $g = -dt^2 \otimes g_1$, dada por

$g(\xi_1, \xi_2) = g((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = -v_1 v_2 + g_1(w_1, w_2)$, é lorentziana biinvariante, sendo $\xi_1, \xi_2 \in T_\sigma(\mathbb{R} \times G)$. Pela proposição 1.76, $(\mathbb{R} \times G, g)$ é geodesicamente completa. Como (G, g_1) é uma variedade riemanniana completa, então, pela proposição 1.69, $(\mathbb{R} \times G, g)$ é um espaço-tempo globalmente hiperbólico. $\square$

1.4. Curvatura Seccional

Nesta secção estuda-se curvatura seccional em variedades pseudo-riemannianas, denotadas por $(\mathcal{M}, g)$.

Definição 1.78. A *curvatura seccional* em um ponto p de um subespaço bidimensional não-degenerado $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$ é o número real

$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{Q(X, Y)}$, sendo $\{X, Y\}$ qualquer base de σ e $Q : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X, Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$.

Cabe observar que a curvatura seccional somente está definida nos *planos não-degenerados*. K não está definida nos planos degenerados σ , pois, neste caso, existem vetores $X, Y \in \sigma$ tal que $Q(X, Y) = 0$.

Lema 1.79. *Seja $\mathcal{V} \subset T_p\mathcal{M}$ um subespaço vetorial de dimensão 2. Então existem vetores $x, y \in \mathcal{V}$ linearmente independentes tal que $g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y) = 0$ se, e somente se g for degenerada em $\mathcal{V}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha-se que g seja degenerada em $\mathcal{V}$. Então existe $y \in \mathcal{V}$, $y \neq 0$ tal que $g(y, w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{V}$.

Logo, $g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y) = 0$

Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ linearmente independentes tal que

$g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y) = 0$.

Por outro lado, seja Q como na definição 1.78 acima.

$$\begin{aligned} Q(x, x+y) &= g(x, x+y)^2 - g(x, x)g(x+y, x+y) \\ &= (g(x, x) + g(x, y))^2 - g(x, x)g(x+y, x+y) \\ &= g(x, x)^2 + g(x, y)^2 + 2g(x, x)g(x, y) - g(x, x)(g(x, x) + 2g(x, y) \\ &\quad + g(y, y)) \\ &= g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y) = 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(y, x+y) &= g(y, x+y)^2 - g(y, y)g(x+y, x+y) \\ &= g(x, y)^2 + g(y, y)^2 + 2g(x, y)g(y, y) - g(y, y)(g(x, x) + 2g(x, y) \\ &\quad + g(y, y)) \\ &= g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y) = 0 . \end{aligned}$$

Seja $v = ax + by \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
Q(v, x + y) &= q(ax + by, x + y) \\
&= g(ax + by, x + y)^2 - g(ax + by, ax + by)g(x + y, x + y) \\
&= (ag(x, x) + ag(x, y) + bg(x, y) + bg(y, y))^2 \\
&\quad - (a^2g(x, x) + 2abg(x, y) + b^2g(y, y))(g(x, x) + g(y, y) + 2g(x, y)) \\
&= (a^2g(x, x)^2 + a^2g(x, y)^2 + 2a^2g(x, x)g(x, y) + b^2g(x, y)^2 \\
&\quad + b^2g(y, y)^2 + 2b^2g(x, y)g(y, y) + 2abg(x, x)g(x, y) + abg(x, x)g(y, y) \\
&\quad + abg(x, y)^2 + abg(x, y)g(y, y)) - (a^2g(x, x)^2 + a^2g(x, x)g(y, y) \\
&\quad + 2a^2g(x, x)g(x, y) + 2abg(x, y)g(x, x) + 2abg(x, y)g(y, y) + 4abg(x, y)^2 \\
&\quad + b^2g(y, y)g(x, x) + b^2g(y, y)^2 + 2b^2g(y, y)g(x, y)) \\
&= a^2(g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y))^2 + b^2(g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y)) \\
&\quad - 2ab(g(x, y)^2 - g(x, x)g(y, y)) = (a - b)^2 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $w = x + y \neq 0$ é tal que $g(v, w) = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$. Portanto g é degenerada em $\mathcal{V}$. $\square$

Notação : $(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ para toda quadra de campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Lema 1.80. *Seja $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$ um plano não-degenerado. $K(\sigma)$ não depende da base escolhida:*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{X, Y\}$ uma base de σ . Como σ é não-degenerada, então $Q(X, Y) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Q(X + \lambda Y, Y) &= \\
&= Q(Y, X + \lambda Y) = g(X + \lambda Y, X + \lambda Y)g(Y, Y) - g(X + \lambda Y, Y)^2 \\
&= (g(X, X) + 2\lambda g(X, Y) + \lambda^2 g(Y, Y))g(Y, Y) - (g(X, Y)^2 + \lambda^2 g(Y, Y)^2 \\
&\quad + 2\lambda g(X, Y)g(Y, Y)) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 = Q(X, Y).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&g(R(X + \lambda Y, Y)(X + \lambda Y), Y) = g(R(X + \lambda Y, Y)X \\
&\quad + \lambda R(X + \lambda Y, Y)Y, Y) \\
&= g(R(X, Y)X + \lambda R(Y, Y)X + \lambda R(X, Y)Y + \lambda^2 R(Y, Y)Y, Y) \\
&= g(R(X, Y)X, Y) + \lambda g(Y, Y, X, Y) + (X, Y, Y, Y) + \lambda^2 g(Y, Y, Y, Y) \\
&= g(R(X, Y)X, Y).
\end{aligned}$$

Portanto, $K(X + \lambda Y, Y) = K(X, Y)$.

$$K(Y, X) = \frac{(Y, X, Y, X)}{Q(Y, X)} = -\frac{(Y, Y, X, X)}{Q(X, Y)} = -\frac{(X, X, Y, Y)}{Q(X, Y)} = \frac{(X, Y, X, Y)}{Q(X, Y)}.$$

Portanto, $K(Y, X) = K(X, Y)$.

$$\begin{aligned} Q(\lambda X, Y) &= g(\lambda X, \lambda X)g(Y, Y) - g(\lambda X, Y)^2 \\ &= \lambda^2 g(X, X)g(Y, Y) - \lambda^2 g(X, Y)^2 \\ &= \lambda^2 (g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2) = \lambda^2 Q(X, Y) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\lambda X, Y) &= \frac{g(R(\lambda X, Y)\lambda X, Y)}{\lambda^2 Q(X, Y)} = \frac{g(R(\lambda X, Y)\lambda X, Y)}{\lambda^2 Q(X, Y)} \\ &= \frac{g(\lambda R(X, Y)\lambda X, Y)}{\lambda^2 Q(X, Y)} = \frac{\lambda^2 R(X, Y)\lambda X, Y}{\lambda^2 Q(X, Y)} \\ &= \frac{\lambda^2 g(R(X, Y)X, Y)}{\lambda^2 Q(X, Y)} = \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{Q(X, Y)} \\ &= \frac{(X, Y, X, Y)}{Q(X, Y)} = K(X, Y) . \end{aligned}$$

Portanto, $K(\lambda X, Y) = K(X, Y)$.

Se $\{X', Y'\}$ for uma outra base, então

$$\begin{cases} X' = \lambda_1 X + \lambda_2 Y \\ Y' = \lambda_3 X + \lambda_4 Y . \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} K(X', Y') &= K(\lambda_1 X + \lambda_2 Y, \lambda_3 X + \lambda_4 Y) \\ &= K\left((\lambda_1 X + \lambda_2 Y) + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_4}\right)(\lambda_3 X + \lambda_4 Y), \lambda_3 X + \lambda_4 Y\right) \\ &= K\left(\left(\lambda_1 - \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_4}\right)\right)X, \lambda_3 X + \lambda_4 Y\right) = K(X, \lambda_3 X + \lambda_4 Y) \\ &= K(\lambda_3 X + \lambda_4 Y, X) = K\left(\lambda_4 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right)X + \lambda_4 Y, X\right) \\ &= K\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right)X + Y, X\right) = K(Y, X) = K(X, Y) \end{aligned}$$

para toda base $\{X', Y'\}$ de σ .

Portanto, a curvatura seccional não depende da base de σ escolhida. $\square$

Seja $(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$. No próximo lema serão utilizadas as seguintes identidades.

- (a) $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$.
- (b) $(X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$.
- (c) $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$.
- (d) $(X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$.

O tensor de curvatura é totalmente determinado pelo conhecimento das curvaturas seccionais $K(\sigma)$ para todo $\sigma \in T_p \mathcal{M}$.

Lema 1.81. *Sejam $(X, Y, Z, X) = g(R(X, Y)Z, W)$, $(X, Y, Z, W)' = g(R'(X, Y)Z, W)$ e $\sigma \in T_p\mathcal{M}$ o subespaço bidimensional gerado por $\{X, Y\}$. Nestas condições, se $K(\sigma) = K'(\sigma)$ para todo σ , então $R = R'$:*

$$\begin{aligned} \text{DEMONSTRAÇÃO. } K(\sigma) = K'(\sigma) &\Rightarrow \frac{(X, Y, X, Y)}{Q(X, Y)} = \frac{(X, Y, X, Y)'}{Q(X, Y)} \\ &\Rightarrow \frac{g(R(X, Y, X), Y)}{Q(X, Y)} = \frac{g(R'(X, Y)X, Y)}{Q(X, Y)} . \\ (X + Z, Y, X + Z, Y) &= (X + Z, Y, X + Z, Y)' \\ &\Rightarrow (X + Z, Y, X + Z, Y) = (X, Y, X + Z, Y) + (Z, Y, X + Z, Y) \\ &= (X, Y, X, Y) + (X, Y, Z, Y) + (Z, Y, X, Y) + (Z, Y, Z, Y) \\ &= (X, Y, X, Y) + 2(X, Y, Z, Y) + (Z, Y, Z, Y) \\ &= (X, Y, X, Y)' + 2(X, Y, Z, Y)' + (Z, Y, Z, Y)' . \end{aligned}$$

Portanto, $(X, Y, Z, Y) = (X, Y, Z, Y)'$ para toda terna $X, Y, Z, W \in V$.

Em particular tem-se,

$$\begin{aligned} (X, Y + W, Z, Y + W) &= (X, Y + W, Z, Y + W)' \\ &\Rightarrow (X, Y, Z, Y) + (X, W, Z, Y) + (X, Y, Z, W) + (X, W, Z, W) \\ &= (X, Y, Z, Y)' + (X, W, Z, Y)' + (X, Y, Z, W)' + (X, W, Z, W)' \\ &\Rightarrow (X, W, Z, Y) + (X, Y, Z, W) = (X, W, Z, Y)' + (X, Y, Z, W)' \\ &\Rightarrow (X, Y, Z, W) - (X, Y, Z, W)' = -(X, W, Z, Y) + (X, W, Z, Y)' \\ &\Rightarrow (X, Y, Z, W) - (X, Y, Z, W)' = (Y, Z, X, W) - (Y, Z, X, W)' . \end{aligned}$$

Logo a expressão $(X, Y, Z, W) - (X, Y, Z, W)'$ é invariante por permutações cíclicas dos vetores X, Y, Z .

Pelo item (a) tem-se que $3((X, Y, Z, W) - (X, Y, Z, W)') = 0$.

Logo $(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, W)'$ para toda quadra $X, Y, Z, W \in V$

Portanto, $g(R(X, Y)Z, W) = g(R'(X, Y)Z, W)$ para toda quadra $X, Y, Z, W \in V$.

Portanto $R = R'$. □

Na secção sobre funções convexas e curvatura será estudada a relação entre curvatura e funções convexas, e apresentados alguns exemplos.

CAPÍTULO 2

Funções Convexas

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos, alguns resultados que serão úteis posteriormente nas demonstrações dos teoremas principais do próximo capítulo, e alguns exemplos de funções convexas, definidas no conjunto dos números reais, em espaços vetoriais, em variedades riemannianas e em variedades lorentzianas.

Ao se estudar funções convexas em variedades, pela própria definição, muitas vezes se depara com funções convexas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, por isso, é conveniente começar pelo estudo de funções convexas definidas em $\mathbb{R}$.

2.1. Funções Convexas em $\mathbb{R}$

Cabe lembrar que um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se, para cada par $x, y \in U$, o segmento $\overline{xy}$ estiver contido em U .

I denota, a menos de menção explícita do contrário, um intervalo fechado.

Definição 2.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e para todo par $x, y \in I$.

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* se esta desigualdade for estrita para todo $\lambda \in]0, 1[$.

Uma interpretação geométrica para a convexidade de uma função é o fato que uma função é convexa se, e somente se, o conjunto $E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ for convexo.

Lema 2.2. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, então f é contínua em I .

DEMONSTRAÇÃO. Provemos que f é contínua em um ponto $x \in I$.

Sejam $I =]a, b[$ e $s, x, y, t \in]a, b[$ com $a < s < x < y < t < b$. Sejam $S = (s, f(s))$, $X = (x, f(x))$, $Y = (y, f(y))$ e $T = (t, f(t))$. O ponto X está abaixo do segmento SY , assim como o ponto Y está abaixo do segmento XT , pois f é convexa. Fazendo-se y convergir a x , Y converge a X . Resultado análogo vale para o limite à esquerda. Logo, $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Portanto, f é contínua no ponto x .

Como o ponto x foi escolhido arbitrariamente, então, f é contínua em I . $\square$

Definição 2.3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada à esquerda e a derivada à direita são definidas, respectivamente, por

$$f'_-(x) = \lim_{y \rightarrow x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ e } f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Lema 2.4. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, então as derivadas laterais $f'_-(t)$ e $f'_+(t)$ existem para todo $t \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $a, x, y, z, b \in I$ tal que $a < x < y < z < b$.

Como f é convexa, então

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y}$$

o que prova que $y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ é monótona à esquerda e à direita.

Sejam $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência crescente que convirja a t_0 e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência decrescente que convirja a t_0 . $f'_-(t_0)$ existe, pois $\frac{f(t_0) - f(x_n)}{t_0 - x_n}$ constitui uma seqüência crescente de números reais limitada por $\frac{f(b) - f(t_0)}{b - t_0}$. $f'_+(t_0)$ existe, pois $\frac{f(z_n) - f(t_0)}{z_n - t_0}$ constitui uma seqüência decrescente de números reais limitada por $\frac{f(t_0) - f(a)}{t_0 - a}$. $\square$

Lema 2.5. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^1 . Então f é convexa se, e somente se, a sua derivada for uma função não-decrescente, i.e., $f'(x) \leq f'(y)$ para todo par $x, y \in I$ com $x < y$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $t = (1 - \lambda)x + \lambda y$ um ponto do intervalo $[x, y]$, $x < y$, com $\lambda \in [0, 1]$. Tem-se $\lambda = \frac{t - x}{y - x}$.

Como f é convexa, obtem-se $\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}$.

Por passagem ao limite, obtem-se que $f'(x) \leq f'(y)$ para todo par $x, y \in I$, $x < y$.

Portanto, a derivada de uma função convexa é uma função não-decrescente.

Por outro lado, $f'(x) \leq f'(y)$ implica que $f''(t) \geq 0$ para todo t no intervalo $[x, y]$, pois se $f''(t_0) < 0$, então f estaria abaixo da reta $y(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ o que não pode ocorrer pois f é convexa. $\square$

Corolário 2.6. Uma função de classe C^2 , $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente convexa. A afirmação inversa não vale, como mostra o exemplo da função $f(x) = x^4$, que é estritamente convexa, mas $f''(0) = 0$.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de funções convexas ou estritamente convexas.

Exemplo 2.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = ax + b$ é convexa, mas não é estritamente convexa:

$$f'(x) = a$$

$$f''(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(2) $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$, é estritamente convexa em $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2a_2x + 4a_4x^3 + \dots + 2na_{2n}x^{2n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 12a_4x^2 + \dots + 2n(2n-1)a_{2n}x^{2n-2} > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(3) $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

(4) $f(x) = \exp(x)$ é estritamente convexa:

$$f'(x) = \exp(x)$$

$$f''(x) = \exp(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(5) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} \exp\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

$$(6) f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f é convexa, pois

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \\ &= |\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \\ &= \lambda|x| + (1-\lambda)|y| = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

Entretanto, f não é diferenciável em $x = 0$.

Lema 2.8. *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$, uma seqüência de funções convexas que convirja pontualmente a f . Então f é convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Dados $x, y \in I$ e fixado um ponto $\lambda x + (1-\lambda)y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$, tem-se

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda f_n(x) + (1-\lambda)f_n(y)) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) + (1-\lambda) \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.9. *O supremo de funções convexas é uma função convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{f_t\}_{t \in J}$, $f_t : I \rightarrow \mathbb{R}$, uma coleção de funções convexas.

A função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sup\{f_t(x) \mid t \in J\}$ é convexa pois, pela convexidade e continuidade em abertos das f_t , tem-se

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sup\{f_t(\lambda x + (1 - \lambda)y) \mid t \in J\} \\ &\leq \sup\{\lambda f_t(x) + (1 - \lambda)f_t(y) \mid t \in J\} \\ &\leq \sup\{\lambda f_t(x) \mid t \in J\} + \sup\{(1 - \lambda)f_t(y) \mid t \in J\} \\ &\leq \sup\lambda\{f_t(x) \mid t \in J\} + \sup(1 - \lambda)\{f_t(y) \mid t \in J\} \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

□

Cabe observar que não há nenhum resultado análogo para o ínfimo de funções convexas.

Nos teoremas principais surgem alguns argumentos nas demonstrações, os quais, é conveniente que sejam demonstrados, dentre os quais, encontra-se os lemas a seguir.

Lema 2.10. *Uma função convexa diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que tenha dois pontos críticos a e b , $a < b$, num intervalo I , deve ser constante em $[a, b]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como a e b são pontos críticos, então $f'(a) = f'(b) = 0$. Como a derivada f' é uma função não-decrescente, então $0 = f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto, $f(x)$ é constante em $[a, b]$. □

Lema 2.11. *Uma função estritamente convexa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assume valor máximo somente em $t = a$ e/ou em $t = b$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $t = \lambda a + (1 - \lambda)b$ um ponto do intervalo $[a, b]$. Como f é estritamente convexa, então

$$\begin{aligned} f(t) &= f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \\ &\leq \lambda f(d) + (1 - \lambda)f(d) = f(d), \end{aligned}$$

sendo $d \in \{a, b\}$ tal que $f(d) = \max\{f(a), f(b)\}$. Logo, $f(t) < f(d)$ para todo $t \in]a, b[$. Portanto, f assume ponto de máximo em $\{a, b\}$. □

Lema 2.12. *Seja $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 estritamente convexa e estritamente crescente, definida num intervalo aberto I . Então $\rho'(t) > 0$ e $\rho''(t) > 0$ para todo $t \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $t \in I$. Se $\rho'(t) = 0$, então t seria um ponto de mínimo local. Como ρ é estritamente convexa e estritamente crescente, então ρ não possui nenhum ponto de mínimo local, logo, $\rho'(t) > 0$ para todo $t \in I$.

Suponhamos, por absurdo, que $\rho''(t) = 0$. Seja a fórmula de Taylor com resto de Lagrange em torno de a , com $a < t < b$, dada por $\rho(b) = \rho(a) + \rho'(a)(b-a) + \rho''(a)(b-a)^2$. Como ρ é estritamente convexa, então $\rho'(a) < \frac{\rho(b)-\rho(a)}{b-a}$. Logo,

$$\begin{aligned}\rho(b) &= \rho(a) + \rho'(a)(b-a) < \rho(a) + \left(\frac{\rho(b)-\rho(a)}{b-a}\right)(b-a) \\ &= \rho(a) + \rho(b) - \rho(a) = \rho(b)\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $\rho''(t) > 0$ para todo $t \in I$. $\square$

Lema 2.13. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ para todo par $x, y \in I$ se, e somente se, $f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$ para toda n -upla $x, y, x_1, \dots, x_n \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $n = 4$.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+\dots+x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leq \frac{1}{4}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) .\end{aligned}$$

Para $n = 2^k$, por indução, vale que $f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$.
Seja $n \neq 2^k$, $2^{m-1} < n < 2^m$.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{2^m}\left(x_1+\dots+x_n + (2^m-n)\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2^m}\left(f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^m-n)f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)\right) \\ &\Rightarrow \frac{n}{2^m}f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{2^m}(f(x_1) + \dots + f(x_n)) .\end{aligned}$$

Portanto, $f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$.

Obtem-se a outra implicação pondo-se $n = 2$. $\square$

Lema 2.14. *$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ para todo par $x, y \in I$ se, e somente se, $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ para toda n -upla $x_1, \dots, x_n \in I$ e números racionais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ (desigualdade de Jensen).*

DEMONSTRAÇÃO. Para $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, obtem-se $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$.

Provemos a outra implicação.

Pelo lema 2.13, obtem-se $f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f(x_i)$.

Seja $\alpha_i = \frac{u_i}{d}$, d o mínimo múltiplo comum dos α_i .

Como $d = \sum_{i=1}^n u_i$, então

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) &= f\left(\frac{u_1}{d} x_1 + \dots + \frac{u_n}{d} x_n\right) \\ &= f\left(\frac{1}{d} ((x_1 + \dots + x_1) + \dots + (x_n + \dots + x_n))\right) \\ &\leq \frac{1}{d} u_1 f(x_1) + \dots + \frac{1}{d} u_n f(x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n). \end{aligned}$$

□

Lema 2.15. *Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. f é contínua e $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ para todo par $x, y \in]a, b[$, $x \leq y$, se, e somente se, f for convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f for convexa, então f é contínua pelo lema 2.2 (pg. 27). Para $t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, obtem-se $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$.

Por outro lado, suponhamos que a f seja contínua e que $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ para todo par $x, y \in]a, b[$, $x < y$. Pelo lema 2.14 vale a desigualdade de Jensen. Como o conjunto

$A = \{\frac{k}{2^j} \mid k = 0, \dots, 2^j, j \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0, 1]$, então, para cada $\lambda \in [0, 1]$, existe uma sequência de números racionais $\lambda_n \in A$ tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$.

Como f é contínua, então, utilizando-se a desigualdade de Jensen, obtem-se

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} [\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)] = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

□

A seguir introduzimos o conceito de "reta-suporte" a uma função em um ponto, e mostraremos que função convexa pode ser caracterizada pela existência de "reta-suporte" em cada ponto.

Definição 2.16. Diz-se que uma função afim, $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, é uma *reta-suporte* para a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ em $t_0 \in I$ se $r(t_0) = f(t_0)$ e $f(t) \geq r(t)$ para $t \neq t_0$.

Lema 2.17. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, f admitir uma *reta-suporte* em cada ponto de I .

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f'_-(t_0)$ e $f'_+(t_0)$, respectivamente, a derivada à esquerda e a derivada à direita da f em t_0 . Se f for convexa, então, para $m \in [f'_-(t_0), f'_+(t_0)]$, tem-se $\frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0} \geq m$ se $x > t_0$, e $\frac{f(t_0) - f(x)}{t_0 - x} \leq m$ se $x < t_0$. De qualquer modo, $f(x) - f(t_0) \geq m(x - t_0)$, ou seja, $f(x) \geq f(t_0) + m(x - t_0)$, de modo que $r(x) = f(t_0) + m(x - t_0)$ é uma *reta-suporte* para a f em t_0 . Como t_0 foi arbitrariamente escolhido, então f admite uma *reta-suporte* em cada ponto de I .

Por outro lado, se f admitir uma reta-suporte em cada ponto, então dados quaisquer $x, y \in I$, e $\lambda \in [0, 1]$, existe uma reta-suporte da f em $t_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y \in [x, y]$ dada por $r(t) = f(t_0) + m(t - t_0)$. Logo,

$$\begin{aligned} f(t_0) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = r(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &= \lambda r(x) + (1 - \lambda)r(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa. $\square$

Lema 2.18. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)} \geq 0$ para toda tripla de pontos distintos $x_1, x_2, x_3 \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, sem prejuízo à generalidade, que $x_1 < x_2 < x_3$. Se f for convexa, então $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Logo, $(x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) + (x_2 - x_3)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0$. Como x_1, x_2 e x_3 são distintos e $x_1 < x_2 < x_3$, então $(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) > 0$. Portanto, $\frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)} \geq 0$ para toda tripla de pontos distintos.

Para demonstrar a implicação inversa, basta obter-se, pelos cálculos acima, que $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$, o que implica a convexidade da f . $\square$

Definição 2.19. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *localmente convexa* se, para cada $t \in \mathbb{R}$, existir um intervalo aberto A_t que contenha t , no qual f seja convexa.

No caso de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ser de classe $\mathcal{C}^2$, pelo corolário 2.6 (pg. 28), f é convexa se, e somente se, $f''(t) \geq 0$ para todo $t \in I$. Neste caso, convexidade pode ser substituída por convexidade local, pois convexidade (global) é equivalente a convexidade local, o que mostraremos a seguir, no lema 2.25.

Proposição 2.20. Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, então, para cada $c \in]a, b[$, tem-se $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_-(t) dt = \int_c^x f'_+(t) dt$, para todo $x \in]a, b[$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $c, x \in]a, b[$ e P uma partição de $[c, x]$, dada por $c = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$. Fixado k , sejam $y_1, y_2, y_3 \in [c, x]$ de modo que $y_1 < x_{k-1} < y_2 < x_k < y_3$. Como f é convexa, então tem-se as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{k-1}) - f(y_1)}{x_{k-1} - y_1} &\leq \frac{f(y_2) - f(x_{k-1})}{y_2 - x_{k-1}} \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \\ &\leq \frac{f(x_k) - f(y_2)}{x_k - y_2} \leq \frac{f(y_3) - f(x_k)}{y_3 - x_k}. \end{aligned}$$

Destas desigualdades, obtém-se que

$$f'_-(x_{k-1}) \leq f'_+(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_-(x_k) \leq f'_+(x_k).$$

Como $f(x) - f(c) = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$, então, multiplicando-se as desigualdades acima por $(x_k - x_{k-1})$ e somando-se, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f'_-(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) &\leq \sum_{k=1}^n f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(x) - f(c) \leq \sum_{k=1}^n f'_-(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n f'_+(x_k)(x_k - x_{k-1}) . \end{aligned}$$

Por passagem ao limite, refinando-se a partição P , obtém-se $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_-(t)dt = \int_c^x f'_+(t)dt$. $\square$

Observação 2.21. Pela demonstração do lema acima, obtém-se que as derivadas laterais f'_- e f'_+ de uma função convexa (estritamente convexa) são funções não-decrescentes (estritamente crescentes).

Lema 2.22. Se $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ for localmente convexa, então f'_+ e f'_- são não-decrescentes.

DEMONSTRAÇÃO. Como f é localmente convexa, então para cada $t \in]a, b[$, existe uma vizinhança $V_t \subset]a, b[$ tal que $f|_{V_t}$ seja convexa. Logo, f'_+ e f'_- são não-decrescentes em V_t . Como f é contínua e f'_+ e f'_- são não-decrescentes em cada V_t , então f'_+ e f'_- são não-decrescentes em $]a, b[$. $\square$

Lema 2.23. $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ é convexa (estritamente convexa) se, e somente se, existir uma função não-decrescente (estritamente crescente) $g :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ tal que, para cada $c \in]a, b[$, tenha-se $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$, para todo $x \in]a, b[$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que f seja convexa. Seja $g = f'_+$ que existe pelo lema 2.4 (pg. 28) e é não-decrescente. Pelo lema 2.20, tem-se $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t)dt = \int_c^x g(t)dt$.

Se f for estritamente convexa, então, pela observação 2.21, $g = f'_+$ é estritamente crescente.

Por outro lado, suponhamos que para cada $c \in]a, b[$ exista g não-decrescente e tal que $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$, para todo $x \in]a, b[$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Para $a < x < y < b$, como g é

não-decrescente, então

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y) - f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) &= \lambda_1 f(c) + \lambda_1 \int_c^x g(t) dt \\
 &+ \lambda_2 f(c) + \lambda_2 \int_c^y g(t) dt - f(c) - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_c^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} g(t) dt \\
 &= \lambda_2 \int_{\lambda_1 x + \lambda_2 y}^y g(t) dt - \lambda_1 \int_x^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} g(t) dt \\
 &\geq \lambda_2 g(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(y - \lambda_1 x - \lambda_2 y) - \lambda_1 g(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(\lambda_1 x + \lambda_2 y - x) \\
 &= g(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(\lambda_2 y - \lambda_1 \lambda_2 x - \lambda_2^2 y - \lambda_1^2 x - \lambda_1 \lambda_2 y + \lambda_1 x) \\
 &= g(\lambda_1 x + \lambda_2 y)((1 - \lambda_1)y - \lambda_1(1 - \lambda_1)x - (1 - \lambda_1)^2 y \\
 &\quad - \lambda_1^2 x - \lambda_1(1 - \lambda_1)y + \lambda_1 x) = 0 .
 \end{aligned}$$

Portanto, $f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$.

Analogamente, obtem-se que se g for estritamente crescente, então f é estritamente convexa. $\square$

Lema 2.24. *Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então f é convexa (estritamente convexa) se, e somente se, f' for não-decrescente (estritamente crescente).*

DEMONSTRAÇÃO. A implicação direta segue-se do lema 2.4 (pg. 28).

Suponha-se que f' seja não-decrescente (estritamente crescente). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se, para cada $c \in]a, b[$, $f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt$. Pelo lema 2.23, f é convexa (estritamente convexa). $\square$

Lema 2.25. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, f for localmente convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. A convexidade local segue-se da convexidade global, por $]a, b[$ ser uma vizinhança aberta de cada ponto.

Supondo-se que f seja localmente convexa, pelo lema 2.22 tem-se que f'_+ é não-decrescente em $]a, b[$.

Para cada $t \in]a, b[$, existe uma vizinhança aberta $V_t =]t - \delta_t, t + \delta_t[$, $\delta_t > 0$, na qual f é convexa. Pelo lema 2.20 (pg. 33), tem-se que $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t) dt$, para $x \in V_t$ e $c \in V_t$ fixado. Dadas duas vizinhanças V_{t_1} e V_{t_2} , $V_{t_1} \cap V_{t_2} \neq \emptyset$ como acima, obtem-se que $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t) dt$, para $x \in V_{t_1} \cup V_{t_2}$ e $c \in V_{t_1}$ fixado, pois

$$\begin{aligned}
 \int_c^x f'_+(t) dt &= \int_c^y f'_+(t) dt + \int_y^{c_2} f'_+(t) dt + \int_{c_2}^x f'_+(t) dt \\
 &= (f(y) - f(c)) - (f(y) - f(c_2)) + (f(x) - f(c_2)) = f(x) - f(c),
 \end{aligned}$$

sendo $c_2 \in V_{t_2}$ e $y \in V_{t_1} \cap V_{t_2}$.

Dado um par de pontos $x, y \in]a, b[$, como $[x, y]$ é compacto, então $[x, y]$ pode ser recoberto por um número finito de abertos $V_{t_1}, \dots, V_{t_n}$ nos quais

f é convexa. Portanto, para cada $c \in V = V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_n}$, tem-se $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t) dt$, para todo $x \in V$. Pelo lema 2.23, f é convexa em V . Como $x, y \in]a, b[$ são arbitrários, então f é convexa em $]a, b[$. $\square$

Definição 2.26. Diz-se que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de intervalos disjuntos $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$, com $\sum_{j=1}^n |y_j - x_j| < \delta$, tiver-se $\sum_{j=1}^n |f(y_j) - f(x_j)| < \epsilon$.

Definição 2.27. Diz-se que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *singular* em $[a, b]$ se, a menos de um subconjunto de medida zero de $[a, b]$, $f'(t) = 0$.

Lema 2.28. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for lipschitziana, então f é absolutamente contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Como f é lipschitziana, então existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq M(y - x)$ para todo par $x, y \in [a, b]$ com $x < y$. Dados $\epsilon > 0$ e intervalos disjuntos $[x_j, y_j]$, $a \leq x_j \leq y_j \leq b$, $j = 1, \dots, n$, com $\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta$, obtem-se

$$\sum_{j=1}^n |f(y_j) - f(x_j)| \leq \sum_{j=1}^n M(y_j - x_j) = M \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < M\delta < \epsilon$$

para $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Portanto, f é absolutamente contínua. $\square$

Lema 2.29. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, então f é absolutamente contínua em $[a, b] \subset \text{int}(I)$ (interior de I).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\epsilon > 0$, de modo que $[a - \epsilon, b + \epsilon] \subset \text{int}(I)$. Sejam $x, y \in [a, b]$ fixados, com $x < y$. Seja $z = y + \epsilon$ e

$\lambda = \frac{|y-x|}{\epsilon + |y-x|} \in [0, 1]$. Então $z \in [a, b + \epsilon]$.

Multiplicando-se por λ , obtem-se

$$\frac{|y-x|}{\epsilon + |y-x|} z = \frac{|y-x|}{\epsilon + |y-x|} y + \frac{\epsilon(y-x)}{\epsilon + |y-x|} = \frac{y(\epsilon + |y-x|) - \epsilon x}{\epsilon + |y-x|}.$$

Logo, $y = \frac{|y-x|}{\epsilon + |y-x|} z + \frac{\epsilon x}{\epsilon + |y-x|} = \lambda z + (1 - \lambda)x$.

Como f é convexa, tem-se

$f(y) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda)f(x) = \lambda(f(z) - f(x)) + f(x)$. Logo, $f(y) - f(x) \leq \lambda(M - m) < \frac{|y-x|}{\epsilon}(M - m)$, sendo M um majorante da f e m um minorante da f em $[a - \epsilon, b + \epsilon]$. Portanto, f é lipschitziana com constante de Lipschitz $k = \frac{M-m}{\epsilon}$. Pelo lema 2.28, f é absolutamente contínua. $\square$

Lema 2.30. Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, então o conjunto E no qual f' não existe é enumerável. Além disso, f' é contínua em $]a, b[\setminus E$.

DEMONSTRAÇÃO. Como f é convexa, então, pela observação 2.21 (pg. 34) e lema 2.20, tem-se que f'_- e f'_+ são funções não-decrescentes. Como uma função não-decrescente possui apenas um conjunto enumerável de pontos de

descontinuidade, então a união dos pontos de descontinuidades de f'_- e de f'_+ é um conjunto enumerável.

Se $x \in]a, b[$ for um ponto de continuidade da f'_- e f'_+ , então, como $f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$, para $x < y$, fazendo-se y tender a x , tem-se $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$. $\square$

Notação : m^* denota a medida exterior de Lebesgue.

Definição 2.31. Seja $\mathcal{J}$ uma coleção de intervalos. Diz-se que $\mathcal{J}$ recobre um conjunto E no sentido de Vitali se, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in E$, existir um intervalo $I_x \in \mathcal{J}$ que contenha x e que possua comprimento $l(I_x) < \epsilon$.

Lema 2.32. *Sejam E com medida exterior finita e $\{I_j\}_{j \in \Lambda}$ uma coleção de intervalos que recubra E no sentido de Vitali. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma subcoleção disjunta finita $\{I_1, \dots, I_n\}$ de intervalos tais que $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j) < \epsilon$ (ver [19]).*

A seguir enunciamos o Teorema da Convergência Monótona, que é subsidiário para um resultado ulterior.

lema 2.33. *Sejam $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-decrescente de funções mensuráveis, $f_n \geq 0$, e $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ em todo ponto do domínio. Então, $\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$ (ver [19]).*

A seguir são apresentados alguns resultados subsidiários para a demonstração de que a continuidade absoluta de uma função é equivalente a ela ser uma integral indefinida.

Lema 2.34. *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) E é mensurável.
- (2) Dado $\epsilon > 0$ existe um aberto $O \supset E$ com $m^*(O \setminus E) < \epsilon$.
- (3) Dado $\epsilon > 0$, existe um fechado $F \subset E$ com $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.
- (4) Existe G em G_δ com $E \subset G$ e $m^*(G \setminus E) = 0$.
- (5) Existe F em F_σ com $F \subset E$ e $m^*(E \setminus F) = 0$.

Se $m^(E)$ for finita, então as afirmações acima são equivalentes a*

- (6) Dado $\epsilon > 0$, existe uma união finita U de intervalos abertos tal que $m^*((U \setminus E) \cup (E \setminus U)) < \epsilon$ (ver [19]).

Lema 2.35. *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrável, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo subconjunto $A \subset E$ com $m(A) < \delta$, tem-se $\int_A f(t) dt < \epsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \leq n \\ n, & \text{se } f(x) > n \end{cases}.$$

Cada f_n é limitada por n .

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a f .

Pelo lema 2.33, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_E f_n(t)dt > \int_E f(t)dt - \frac{\epsilon}{2}$, ou, equivalentemente, $\int_E (f - f_n)(t)dt < \frac{\epsilon}{2}$, para todo inteiro $n \geq n_0$.

Seja $\delta < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Se $m(A) < \delta$, então

$$\begin{aligned} \int_A f(t)dt &= \int_A (f - f_{n_0})(t)dt + \int_A f_{n_0}(t)dt \\ &< \int_E (f - f_{n_0})(t)dt + n_0 m(A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

A seguir enunciamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Proposição 2.36. *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções mensuráveis definidas em um conjunto E de medida finita. Supondo-se que haja um número real M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$, se $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ para cada $x \in E$, então $\int_E f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x)dx$ (ver [19]).*

Lema 2.37. *Se g for uma função Lebesgue integrável em $[a, b]$, então $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ é absolutamente contínua em $[a, b]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\epsilon > 0$ e intervalos disjuntos $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$, $x_j < y_j$, $j = 1, \dots, n$, com $\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta$.

Como g é integrável, então, pelo lema 2.35 e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |G(y_j) - G(x_j)| &= \sum_{j=1}^n \left| \int_a^{y_j} g(t)dt - \int_a^{x_j} g(t)dt \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_j}^{y_j} g(t)dt \right| \leq \left| \int_{\cup [x_j, y_j]} g(t)dt \right| \leq \int_{\cup [x_j, y_j]} |g(t)| dt \leq \epsilon \end{aligned}$$

se $\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta$.

Portanto, G é absolutamente contínua em $[a, b]$. □

Proposição 2.38. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente. Então f é derivável em quase todos $x \in [a, b]$. A derivada f' é mensurável e $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$ (ver [19]).*

Notação : Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Sejam $p = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1}))_+$, $n = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1}))_-$ e $t = n + p = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$. $(r(x))_+ = \max\{r(x), 0\}$, $(r(x))_- = |r| - r_+ = \max\{-r(x), 0\}$.

$P = \sup p$, $N = \sup n$ e $T = \sup t$ são, respectivamente, as variações positiva, negativa e total. Para se enfatizar o domínio e a função, pode-se utilizar as notações P_a^b , N_a^b , T_a^b , $P_a^b(f)$, $N_a^b(f)$ e $T_a^b(f)$.

Definição 2.39. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f possui variação limitada em $[a, b]$ se $T_a^b < \infty$.*

Lema 2.40. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ possuir variação limitada, então $T_a^b = P_a^b + N_a^b$ e $f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$ (ver [19]).

Lema 2.41. Uma função $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ possui variação limitada se, e somente se, f for a diferença de duas funções não-decrescentes em $[a, b]$ a valores reais (ver [19]).

Corolário 2.42. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ possuir variação limitada, então $f'(x)$ existe para quase todos $x \in [a, b]$.

Lema 2.43. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for integrável, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua e possui variação limitada (ver [19]).

Lema 2.44. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for integrável e $\int_a^x f(t)dt = 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $f(t) = 0$ para quase todos $t \in [a, b]$ (ver [19]).

Lema 2.45. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for limitada, mensurável e $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$, então $F'(x) = f(x)$ para quase todos $x \in [a, b]$ (ver [19]).

Lema 2.46. Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função integrável tal que, para cada $x \in [a, b]$, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. Então $F'(x) = f(x)$ para quase todos $x \in [a, b]$ (ver [19]).

Lema 2.47. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for absolutamente contínua, então f possui variação limitada em $[a, b]$ (ver [19]).

Corolário 2.48. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for absolutamente contínua, então f possui derivada em quase todos os pontos.

Lema 2.49. Se $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ for absolutamente contínua e $f'(x) = 0$ para quase todos $x \in [a, b]$, então f é constante (ver [19]).

Proposição 2.50. $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ é uma integral indefinida se, e somente se, F for absolutamente contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Se F for uma integral indefinida, então F é absolutamente contínua pelo lema 2.37 (pg. 38).

Suponhamos que F seja absolutamente contínua em $[a, b]$. Então, pelo lema 2.47, f possui variação limitada em $[a, b]$, e pelo lema 2.41, F pode ser escrita como $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$, sendo F_1 e F_2 funções não-decrescentes. Logo, pelo corolário 2.42, $F'(x)$ existe em quase todos os pontos e $|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x)$. Logo, pelo lema 2.38 (pg. 38), $\int |F'(x)|dx \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$ e, portanto, $F'(x)$ é integrável.

Seja $G(x) = \int_a^x F'(t)dt$. G é absolutamente contínua e, portanto, $f = F - G$ é absolutamente contínua. Pelo corolário 2.48, $f'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ para quase todos $x \in [a, b]$. Pelo lema 2.49, f é constante. Portanto, $F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$. $\square$

Corolário 2.51. Toda função absolutamente contínua é a integral indefinida de sua derivada.

Corolário 2.52. *Toda função convexa é a integral indefinida de sua derivada.*

Observação 2.53. Seja a função de Cantor-Lebesgue definida por

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) &= \frac{1}{2}, \quad f\left(\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]\right) = \frac{1}{2^2}, \quad f\left(\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]\right) = \frac{3}{2^2}, \\ f\left(\left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]\right) &= \frac{1}{2^3}, \quad f\left(\left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right]\right) = \frac{3}{2^3}, \quad f\left(\left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right]\right) = \frac{5}{2^3} \\ f\left(\left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]\right) &= \frac{7}{2^3}, \end{aligned}$$

e assim por diante, e $f(x) = \sup\{f(y) \mid y \in [0, 1] \setminus C, y < x\}$ se $x \in C$, sendo C o conjunto de Cantor ternário.

f é contínua pois f é contínua em cada ponto $x \in [0, 1] \setminus C$, visto que f é constante em uma vizinhança aberta de x , e é contínua em cada $x \in C$, pois f é não-decrescente e $\lim_{y \rightarrow x-} f(y) = \lim_{y \rightarrow x+} f(y) = f(x)$.

Como $f'(t) = 0$ em $[0, 1] \setminus C$, e C possui medida zero, então $\int_c^x f'_+(t) dt = \int_c^x f'_-(t) dt = 0 \neq f(x) - f(c)$ para $x = 1$ e $c = 0$. Portanto, não vale o Teorema Fundamental do Cálculo para a f .

f não é absolutamente contínua, pois, sendo $C_k = \bigcup_j [a_{jk}, b_{jk}]$ os subintervalos remanescentes na k -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, tem-se que $\sum_j |f(b_{jk}) - f(a_{jk})| = 1$, embora a medida de C_k convirja a zero.

2.2. Convexidade de Funções Contínuas

Sabemos, pela proposição 2.6 (pg. 28) que a convexidade de uma função de classe $\mathcal{C}^2$, $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, é equivalente a $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$. Queremos estudar condições suficientes para convexidade de funções contínuas, as quais, não necessariamente possuem derivada primeira ou derivada segunda como, por exemplo, uma função de Busemann em uma variedade riemanniana, cuja convexidade se objetiva demonstrar numa secção ulterior. A seguir, utilizamos um operador que age numa classe mais ampla do que a classe das funções contínuas definidas num intervalo, o que é essencial para se contornar o problema da ausência de derivada segunda.

Seja M uma classe de funções definidas em $]a, b[$ a valores reais. Seja D um operador sobre M tal que, para cada $f \in M$, $D(f)$ seja uma função de $]a, b[$ em $[-\infty, +\infty]$ e satisfaça às seguintes condições:

- (1) Se $f, g \in M$, então $f + g \in M$.
- (2) $D(f + g) \geq D(f) + D(g)$ se o lado direito não apresentar indeterminação do tipo $\infty - \infty$.
- (3) Se f admitir derivada segunda contínua f'' em $]a, b[$, então $f \in M$ e $f'' \leq D(f) < +\infty$.
- (4) Se $f \in M$ e $x_0 \in]a, b[$ for um ponto de máximo local da f , então $D(f)(x_0) \leq 0$.

Proposição 2.54. *Se D em M satisfizer às condições (1), (2), (3) e (4), f for contínua e $D(f) \geq 0$ em $]a, b[$, então f é convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. A função $t \mapsto \epsilon t^2$, $\epsilon > 0$, pelo item (3), pertence a M pois possui derivada segunda contínua. Logo, pelo item (1), $h = f + \epsilon t^2 \in M$.

Mostremos que a função $h(t) = f(t) + \epsilon t^2$ é convexa. Pelos itens (2) e (3), obtem-se

$$\begin{aligned} D(h) &= D(f + \epsilon t^2) \geq D(f) + D(\epsilon t^2) \\ &\geq D(f) + (\epsilon t^2)'' = D(f) + 2\epsilon > 0. \end{aligned}$$

$h \in M$ e $D(h) > 0$ implicam que h não possui máximo local, pois, pelo item (4), se x_0 for um ponto de máximo local da h , então $D(h)(x_0) \leq 0$.

Se $h \in M$ e $r = r(t)$ for uma função afim, então

$D(h+r) \geq D(h) + D(r) \geq D(h) + r'' = D(h)$. Mas, por outro lado, $D(h) = D(h+r-r) \geq D(h+r) + D(-r) \geq D(h+r) + (-r)'' = D(h+r)$. Logo, $D(h+r) = D(h)$. Portanto, se $D(h) > 0$, então a função $h-r = h + (-r)$ é tal que $D(h-r) > 0$, logo, $h-r$ não possui máximo local.

Sejam $x, y \in]a, b[$ e $r(t) = h(x) + \frac{(h(y)-h(x))}{y-x}(t-x)$ a única função afim que passa pelos pontos $(x, h(x))$ e $(y, h(y))$. $g = h-r$ é contínua como soma de funções contínuas. g é tal que $g(x) = g(y) = 0$. $g(t) \leq 0$ em $[x, y]$, pois senão haveria um ponto de máximo local em $[x, y]$. Portanto, $h(t) \leq r(t)$ para todo $t \in [x, y]$. Como os pontos x e y são arbitrários, então h é convexa.

Fazendo ϵ convergir a zero, obtem-se uma seqüência pontualmente convergente a f de funções convexas. Pelo lema 2.8 (pg. 29), concluímos que a f é convexa. $\square$

Exemplo 2.55. Sejam M a classe constituída por todas as funções $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ e D o operador definido por

$$D(f)(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \text{ que age em } M.$$

Sejam $f, g \in M$.

$$\begin{aligned} D(f+g)(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(t+h) + (f+g)(t-h) - 2(f+g)(t)}{h^2} \\ &= \liminf_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{g(t+h) + g(t-h) - 2g(t)}{h^2} \right) \right] \\ &\geq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \\ &\quad + \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) + g(t-h) - 2g(t)}{h^2} = D(f)(t) + D(g)(t). \end{aligned}$$

Se f possuir derivada segunda, então, utilizando-se fórmula de Taylor da f em t , obtem-se

$$\begin{aligned} D(f)(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\left(f(t) + hf'(t) + \frac{h^2 f''(t)}{2} \right)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(f(t) - hf'(t) + \frac{h^2 f''(t)}{2} \right) - 2f(t) + o(3)}{h^2} \right] \\ &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f''(t)}{h^2} = f''(t) . \end{aligned}$$

Se $f \in M$ e x_0 for um ponto de máximo local da f , então

$$\begin{aligned} D(f)(x_0) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) + (f(x_0 - h) - f(x_0))}{h^2} \leq 0 . \end{aligned}$$

Portanto, D operando em M satisfaz às condições (1), (2), (3) e (4) acima.

Exemplo 2.56. Sejam M a classe das funções mensuráveis definidas em $]a, b[$ e D o operador definido por $D(f)(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h f(x+t)dt - 6hf(x)}{h^3}$.
 M é fechado para a soma, pois soma de funções mensuráveis é uma função mensurável.

Sejam $f, g \in M$.

$$\begin{aligned} D(f+g)(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h (f+g)(x+t)dt - 6h(f+g)(x)}{h^3} \\ &= \liminf_{h \rightarrow 0} \left[\frac{3 \int_{-h}^h f(x+t)dt - 6hf(x)}{h^3} + \frac{3 \int_{-h}^h g(x+t)dt - 6hg(x)}{h^3} \right] \\ &\geq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h f(x+t)dt - 6hf(x)}{h^3} + \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h g(x+t)dt - 6hg(x)}{h^3} \\ &= D(f)(x) + D(g)(x) . \end{aligned}$$

Se f possuir derivada segunda, então, utilizando-se fórmula de Taylor da f em x , obtem-se

$$\begin{aligned}
D(f)(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h \left(f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)t^2}{2} + o(3) \right) dt - 6hf(x)}{h^3} \\
&= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \left(2hf(x) + \frac{h^3 f''(x)}{3} \right) - 6hf(x)}{h^3} \\
&= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 f''(x)}{h^3} = f''(x) .
\end{aligned}$$

Se x_0 for um ponto de máximo da f , então

$$\begin{aligned}
D(f)(x_0) &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{3 \int_{-h}^h f(x_0) dt - 6hf(x_0)}{h^3} \\
&= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{6hf(x_0) - 6hf(x_0)}{h^3} = 0 .
\end{aligned}$$

Portanto, D operando em M satisfaz às condições (1), (2), (3) e (4) acima.

Lema 2.57. $f :] - a, a[\mapsto \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, f for contínua e a segunda derivada simétrica

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \geq 0$$

em $] - a, a[$.

DEMONSTRAÇÃO. Se f for convexa, então f é contínua pelo lema 2.2 (pg. 27). Pelo lema 2.15 (pg. 32),
 $f(t) = f\left(\frac{1}{2}(t+h) + \frac{1}{2}(t-h)\right) \leq \frac{1}{2}f(t+h) + \frac{1}{2}f(t-h)$. Logo,
 $f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) \geq 0$ para todo $t \in] - a, a[$ e todo $h \in \mathbb{R}$ tal que
 $]t-h, t+h[\subset] - a, a[$. Portanto,

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \geq 0$$

em $] - a, a[$.

Por outro lado, se f for contínua e

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} \geq 0,$$

então, pela proposição 2.54, f é convexa. $\square$

Observação 2.58. A equivalência da convexidade global e convexidade local como demonstrada no lema 2.25 (pg. 35) pode ser demonstrada muito mais concisamente a partir do lema 2.57, considerando-se o fato que se $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ for localmente convexa, então f é contínua e $D(f)(t) \geq 0$ para todo $t \in]a, b[$.

Pode-se estender o conceito de convexidade para espaços vetoriais, o que fazemos a seguir.

Definição 2.59. Um subconjunto U de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é dito convexo se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ para todo par $x, y \in U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Definição 2.60. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $U \subset \mathcal{V}$ um subconjunto convexo. $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa se $F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$, para todo par $x, y \in U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$.

F é estritamente convexa se esta desigualdade for estrita para todo $\lambda \in]0, 1[$.

Lema 2.61. A função norma de um espaço vetorial normado é uma função convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x, y \in \mathcal{V}$, $\lambda \in [0, 1]$. Seja $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ uma norma.

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| \\ &= |\lambda| \|x\| + |1 - \lambda| \|y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\|. \end{aligned}$$

□

Lema 2.62. A função distância a um ponto p fixado de um espaço vetorial normado, $d : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x) = \text{dist}(x, p) = \|x - p\|$, é uma função convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - p\| \\ &= \|\lambda(x - p) + (1 - \lambda)(y - p)\| \leq |\lambda| \|x - p\| + |1 - \lambda| \|y - p\| \\ &= \lambda d(x) + (1 - \lambda)d(y) \end{aligned}$$

□

Em particular, a função distância à origem no $\mathbb{R}^n$,

$$\text{dist}(x, O) = \|x - O\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2},$$

é convexa, e a função

$$\text{dist}(x, O)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j)^2$$

é estritamente convexa.

2.3. Funções Convexas em Variedades Riemannianas

Nesta secção, $(\mathcal{M}, g)$ denota uma variedade riemanniana completa e não-compacta, a não ser por menção explícita do contrário. A seguir são apresentados alguns resultados e exemplos sobre funções convexas em variedades riemannianas que serão utilizados ulteriormente.

Definição 2.63. Um conjunto $A \subset \mathcal{M}$ diz-se *totalmente convexo* se, para todo par $p, q \in A$, todo segmento geodésico γ_{pq} em $\mathcal{M}$ que ligar os pontos p e q estiver contido em A .

Para um espaço euclidiano esta definição coincide com a definição de conjunto convexo, pois, neste caso, existe apenas uma reta (geodésica) que liga dois pontos distintos. Em variedades riemannianas pode haver multiplicidade de geodésicas que liguem dois pontos distintos. Para o estudo de funções convexas, basta a definição de convexidade total dada. Como $(\mathcal{M}, g)$ é completa, então, assumindo-se o teorema de Hopf-Rinow, $(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente conexa. Portanto, existe, pelo menos, um segmento geodésico que ligue cada par $p, q \in A$.

Lema 2.64. *Sejam $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo com interior não-vazio e $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então,*

(i) *F é contínua em $\text{int}(A)$.*

(ii) *Se $p \in A$ for um ponto de fronteira, então $\liminf_{x \rightarrow p} F(x) \leq F(p)$.*

DEMONSTRAÇÃO. (i) Seja $p \in \text{int}(A)$ e $B(p, r)$ a bola aberta centrada em p e com raio $r \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $F^c = \{x \in A \mid F(x) \leq c\}$ contenha $B(p, r)$. Seja $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \overline{B(p, r)} \subset A$ uma geodésica normalizada tal que $\gamma(-1) = x_1$, $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = x_2$.

Seja $\gamma(t) = x$, sendo $t = \frac{\text{dist}(p, x)}{r} \in [0, 1]$.

Como F é convexa, então

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &\leq (1-t)F(p) + tF(x_2) \\ &\leq (1-t)F(p) + tc \end{aligned}$$

i.e.,

$$(2.3.1) \quad F(x) - F(p) \leq t(c - F(p)).$$

O segmento geodésico que liga x_1 e x é a restrição $\gamma(u)$, $u \in [-1, t]$. Definindo-se $u = -1 + s(t+1)$, obtem-se a reparametrização $\alpha(s) = \gamma(-1 + s(t+1))$, $s \in [0, 1]$. Logo, $\alpha(0) = \gamma(-1) = x_1$, $\alpha(\frac{1}{1+t}) = \gamma(0) = p$, $\alpha(1) = \gamma(t) = x$.

Como F é convexa, então

$$F(\alpha(s)) \leq sF(x_1) + (1-s)F(p) \leq (1-s)c + sF(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(p) &= F\left(\alpha\left(\frac{1}{1+t}\right)\right) \leq \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)c + \frac{1}{1+t}F(x) \\ &= \frac{t}{1+t}c + \frac{1}{1+t}F(x) \\ &\Rightarrow (1+t)F(p) \leq tc + F(x) \end{aligned}$$

$$(2.3.2) \quad \Rightarrow F(x) - F(p) \geq tF(p) - tc = t(F(p) - c).$$

Por 2.3.1 e 2.3.2, tem-se $-t(c - F(p)) \leq F(x) - F(p) \leq t(c - F(p))$.

Logo, $|F(x) - F(p)| \leq t(c - F(p))$.

Como $t = \frac{\text{dist}(p, x)}{r}$, então

$$|F(x) - F(p)| \leq \frac{\text{dist}(p, x)}{r}(c - F(p))$$

e, portanto, $\lim_{x \rightarrow p} F(x) = F(p)$.

Portanto, F é contínua.

(ii) Sejam $p \in \partial A$ e $\gamma_{xp} : [0, 1] \mapsto A$ um segmento geodésico que ligue p e x . Então

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow p} F(x) &\leq \lim_{t \rightarrow 1-} F(\gamma_{xp}(t)) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 1-} (tF(p) + (1-t)F(x)) = F(p). \end{aligned}$$

Em particular, como $\mathcal{M}$ é totalmente convexa, então toda função convexa em $\mathcal{M}$ é contínua. $\square$

Definição 2.65. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana, $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo, $F : A \subset \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, e I um intervalo fechado. Diz-se que F é convexa se para todo segmento geodésico não-trivial $\gamma : I \mapsto A$, a função composta $F \circ \gamma$ for convexa em I .

Nestas condições, diz-se que F é estritamente convexa se $F \circ \gamma$ for estritamente convexa no interior de I para todo segmento geodésico não-trivial $\gamma : I \mapsto A$.

Observe-se que a convexidade de uma função definida em $\mathcal{M}$ depende das geodésicas de $(\mathcal{M}, g)$, logo, da métrica g . Uma função pode ser convexa relativamente a uma métrica e não o ser relativamente a uma outra métrica.

Lema 2.66. *Seja $F : A \subset \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa definida num subconjunto fechado totalmente convexo A . Então F admite ponto de máximo na fronteira de A . Se F for estritamente convexa, então F admite ponto de máximo somente na fronteira de A .*

DEMONSTRAÇÃO. Como A é totalmente convexo, então para todo par $x, y \in \partial A$, existe um segmento geodésico $\gamma_{xy} : [0, 1] \mapsto A$ que liga x e y .

Se F for convexa, então

$$F(\gamma_{xy}(t)) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \leq \max\{F(x), F(y)\}, \text{ logo, a fronteira de } A \text{ contém ponto de máximo.}$$

Se F for estritamente convexa, então

$$F(\gamma_{xy}(t)) < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \leq \max\{F(x), F(y)\}.$$

Logo, $F(\gamma_{xy}(t)) < \max\{F(x), F(y)\}$, e, portanto, os pontos de máximo estão necessariamente na fronteira de A . $\square$

Portanto, nenhum ponto interior pode ser ponto de máximo de uma função estritamente convexa.

Lema 2.67. *Se uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ possuir uma geodésica fechada γ , então uma função convexa $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ deve ser constante ao longo de γ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ uma geodésica fechada. Suponha-se que $\gamma(a) = \gamma(b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Pode-se supor que $\gamma(a)$ seja ponto de mínimo da F restrita a γ , pois $\gamma(\mathbb{R})$ é compacto e F é contínua, logo, $F|_{\gamma(\mathbb{R})}$ é contínua e, portanto, $F|_{\gamma(\mathbb{R})}$ assume máximo e mínimo em $\gamma(\mathbb{R})$. A função $f = (F \circ \gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por definição é convexa com ponto de mínimo em $t = a$ e $t = b$. Portanto, pelo lema 2.10 (pg. 30), f é constante em $[a, b]$. Portanto, F é constante em $\gamma([a, b])$. Logo, F é uma função constante em $\gamma(\mathbb{R})$. $\square$

A seguir são apresentados alguns exemplos de funções convexas e estritamente convexas.

Exemplo 2.68. Seja $\mathcal{M}$ o parabolóide $z = x^2 + y^2$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$, denotada por g . Seja $F(x, y, z) = \frac{1}{2}z$. Provemos que F é estritamente convexa com ponto de mínimo em $p = (0, 0, 0)$ (ponto crítico não-degenerado).

$\mathcal{M}$ é uma superfície de revolução com parametrização $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dada por

$$\begin{cases} x = v \cos(u) \\ y = v \sin(u) \\ z = v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+.$$

Derivando-se, tem-se:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (v \cos(u), v \sin(u), v^2) \\ X_u &= (-v \sin(u), v \cos(u), 0) \\ X_v &= (\cos(u), \sin(u), 2v). \end{aligned}$$

Seja $\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = (v(t) \cos(u(t)), v(t) \sin(u(t)), v(t)^2)$ uma curva. γ é uma geodésica se $g(\ddot{\gamma}, V) = 0$ para todo $V \in T_p \mathcal{M}$. Como $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p \mathcal{M}$, então γ é uma geodésica se $g(X_u, \ddot{\gamma}) = 0$ e $g(X_v, \ddot{\gamma}) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (v' \cos(u) - v u' \sin(u), v' \sin(u) + v u' \cos(u), 2v v') \\ \ddot{\gamma}(t) &= (v'' \cos(u) - v' u' \sin(u) - (v' u' + v u'') \sin(u) - v (u')^2 \cos(u), \\ &\quad v'' \sin(u) + v' u' \cos(u) + (v' u' + v u'') \cos(u) - v (u')^2 \sin(u), \\ &\quad 2((v')^2 + v v'')). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\ddot{\gamma}(t), X_u) &= \\ &= -v v'' \sin(u) \cos(u) + v v' u' (\sin(u))^2 + v (v' u' + v u'') (\sin(u))^2 \\ &\quad + v^2 \sin(u) \cos(u) + v v'' \sin(u) \cos(u) + v v' u' (\cos(u))^2 \\ &\quad + v (v' u' + v u'') (\cos(u))^2 - v^2 (u')^2 \sin(u) \cos(u) \\ &= v v' u' + v (v' u' + v u''). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\ddot{\gamma}(t), X_v) &= \\
&= v''(\cos(u))^2 - v'u'\sin(u)\cos(u) - (v'u' + vv'')\sin(u)\cos(u) \\
&\quad - v(u')^2(\cos(u))^2 + v''(\sin(u))^2 + v'u'\sin(u)\cos(u) \\
&\quad + (v'u' + vv'')\sin(u)\cos(u) - v(u')^2(\sin(u))^2 \\
&\quad + 4v((v')^2 + vv'') \\
&= v'' - v(u')^2 + 4v((v')^2 + vv'') \\
&= v''(1 + 4v^2) - v(u')^2 + 4v(v')^2.
\end{aligned}$$

Chega-se assim às equações geodésicas:

$$\begin{cases} u'' + \frac{2u'v'}{v} = 0 \\ v'' - \frac{v}{1+4v^2}(u')^2 + \frac{4v}{1+4v^2}(v')^2 = 0. \end{cases}$$

Seja $f(t) = (F \circ \gamma)(t) = \frac{v(t)^2}{2}$. Derivando-se, tem-se:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= v(t)v'(t) \\
f''(t) &= v'(t)^2 + v(t)v''(t) = v'^2 + v \left(\frac{v(u')^2}{1+4v^2} - \frac{4v(v')^2}{1+4v^2} \right) \\
&= (v')^2 + \frac{v^2}{1+4v^2}((u')^2 - (v')^2) = \frac{(1+4v^2)(v')^2 - v^2(v')^2 + v^2(u')^2}{1+4v^2} \\
&= \frac{(v')^2 + v^2(u')^2 + 3v^2(v')^2}{1+4v^2} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, $f''(t) > 0$ para toda geodésica γ . Portanto, F é uma função estritamente convexa. $p = (0, 0, 0)$ é um ponto de mínimo global isolado.

Exemplo 2.69. Seja $\mathcal{M} = S^2$ a esfera com a métrica euclidiana induzida. As únicas funções convexas definidas em S^2 são as funções constantes, pois as geodésicas de S^2 são os grandes círculos, que são geodésicas fechadas e, portanto, qualquer função convexa deve ser constante ao longo deles.

Neste caso não existe nenhuma função estritamente convexa, pois se uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ contiver uma geodésica fechada, então uma função convexa $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g(t) = (F \circ \gamma)(t)$ é constante ao longo de toda geodésica γ e, por isso, $g''(t) = 0$ para todo t .

Definição 2.70. Um espaço topológico $\mathcal{M}$ é dito *contrátil* se ele for homotópico a um ponto p , i.e., existir uma função contínua (homotopia) $H : \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = p$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Pode-se cogitar que uma variedade admita uma função estritamente convexa se, e somente se, ela for contrátil, i.e., o seu grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{M}, p_0) = \{0\}$ para todo $p_0 \in \mathcal{M}$. Isto não é verdade, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.71. Seja $\mathcal{M}$ a superfície de revolução dada por $x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$, denotada por g , com a parametrização

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos(u) \\ y(u, v) = v \sin(u) \\ z(u, v) = \frac{1}{v} \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} .$$

$\mathcal{M}$ admite uma função estritamente convexa, $F(x, y, z) = \frac{1}{z} = v$.

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \left(v \cos(u), v \sin(u), \frac{1}{v} \right) \\ X_u &= (-v \sin(u), v \cos(u), 0) \\ X_v &= \left(\cos(u), \sin(u), -\frac{1}{v^2} \right) . \end{aligned}$$

Seja $\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = \left(v(t) \cos(u(t)), v(t) \sin(u(t)), \frac{1}{v(t)} \right)$ uma geodésica.

γ é uma geodésica não-trivial se, e somente se, $g(\ddot{\gamma}, X_u) = 0$ e $g(\ddot{\gamma}, X_v) = 0$. Derivando-se γ , obtem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \left(v' \cos(u) - v \sin(u), v' \sin(u) + v u' \cos(u), -\frac{v'}{v^2} \right) \\ \ddot{\gamma}(t) &= \left(v'' \cos(u) - v' u' \sin(u) - (v' u' + v u'') \sin(u) - v (u')^2 \cos(u), \right. \\ &\quad \left. v'' \sin(u) + v' u' \cos(u) + (v' u' + v u'') \cos(u) - v (u')^2 \sin(u), \right. \\ &\quad \left. \frac{-v'' v^2 + 2v(v')^2}{v^4} \right) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X_u, \ddot{\gamma}) &= -v v'' \sin(u) \cos(u) + v v' u' (\sin(u))^2 \\ &\quad + v (v' u' + v u'') (\sin(u))^2 + v^2 (u')^2 \sin(u) \cos(u) + v v'' \sin(u) \cos(u) \\ &\quad + v v' u' (\cos(u))^2 + v (v' u' + v u'') (\cos(u))^2 - v^2 (u')^2 \sin(u) \cos(u) \\ &= v v' u' + v (v' u' + v u'') . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X_v, \ddot{\gamma}) &= v'' (\cos(u))^2 - v' u' \sin(u) \cos(u) - (v' u' + v u'') \sin(u) \cos(u) \\ &\quad - v (u')^2 (\cos(u))^2 + v'' (\sin(u))^2 + v' u' \sin(u) \cos(u) \\ &\quad + (v' u' + v u'') \sin(u) \cos(u) - v (u')^2 (\sin(u))^2 + \frac{v'' v^2 - 2v(v')^2}{v^6} \\ &= v'' - v (u')^2 + \frac{v'' v^2 - 2v(v')^2}{v^6} . \end{aligned}$$

Chega-se assim às equações geodésicas

$$\begin{cases} u'' + 2 \frac{u' v'}{v} = 0 \\ v'' - \frac{v^5}{1+v^4} (u')^2 - \frac{2}{v(1+v^4)} (v')^2 = 0 . \end{cases}$$

Seja $f(t) = (F \circ \gamma)(t) = v(t)$.

$$f'(t) = v'(t)$$

$$f''(t) = v''(t) = \frac{v^5}{1+v^4}(u')^2 + \frac{2}{v(1+v^4)}(v')^2 > 0$$

pois $v > 0$.

Como $f''(t) > 0$ para toda geodésica γ , então F é uma função estritamente convexa.

Este exemplo mostra que mesmo sendo difeomorfa ao cilindro, que não admite nenhuma função estritamente convexa, uma variedade pode admitir uma função estritamente convexa. Portanto, a existência de função estritamente convexa não é invariante por difeomorfismo.

Exemplo 2.72. Seja $(\mathcal{M}, g)$ o hiperbolóide de uma folha $z^2 = x^2 + y^2 - 1$, com a métrica g induzida da métrica euclidiana do $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{M}$ é uma superfície de revolução com as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos(u) - v \operatorname{sen}(u) \\ y = \operatorname{sen}(u) + v \cos(u) \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R} .$$

Considere-se a seguinte parametrização:

$$X(u, v) = (\cos(u) - v \operatorname{sen}(u), \operatorname{sen}(u) + v \cos(u), v)$$

$$X_u = (-\operatorname{sen}(u) - v \cos(u), \cos(u) - v \operatorname{sen}(u), 0)$$

$$X_v = (-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 1) .$$

Seja γ a curva diferenciável, dada por

$$\gamma(t) = (\cos(u(t)) - v(t) \operatorname{sen}(u(t)), \operatorname{sen}(u(t)) + v(t) \cos(u(t)), v(t)) .$$

γ é geodésica se $g(\ddot{\gamma}, X_u) = 0$ e $g(\ddot{\gamma}, X_v) = 0$. Derivando-se γ , tem-se

$$\dot{\gamma}(t) = (-u' \operatorname{sen}(u) - v' \operatorname{sen}(u) - u' v \cos(u), u' \cos(u) + v' \cos(u) - u' v \operatorname{sen}(u), v')$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) = & (u'' \operatorname{sen}(u) - (u')^2 \cos(u) - v'' \operatorname{sen}(u) - (v')^2 \cos(u) \\ & - (u'' v + u' v') \cos(u) + (u')^2 v \operatorname{sen}(u), \\ & u'' \cos(u) - (u')^2 \operatorname{sen}(u) + v'' \cos(u) - (v')^2 \operatorname{sen}(u) - (u u' v + u' v') \operatorname{sen}(u) \\ & - (u')^2 v \cos(u), v'') . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(X_u, \ddot{\gamma}) &= u'' \operatorname{sen}(u)^2 + (u')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) + v'' \operatorname{sen}(u)^2 \\
&\quad + (v')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) + (u''v + u'v') \operatorname{sen}(u) \cos(u) - (u')^2 v \operatorname{sen}(u)^2 \\
&\quad + v u'' \operatorname{sen}(u) \cos(u) + v (u')^2 \cos(u)^2 + v v'' \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&\quad + v (v')^2 \cos(u)^2 + v (u''v + u'v') \cos(u)^2 - (u')^2 v^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&\quad + u'' \cos(u)^2 - (u')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) + v'' \cos(u)^2 \\
&\quad - (v')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) - (u''v + u'v') \operatorname{sen}(u)^2 - (u')^2 v \cos(u)^2 \\
&\quad - v u'' \operatorname{sen}(u) \cos(u) + (u')^2 v \operatorname{sen}(u)^2 - v v'' \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&\quad + v (v')^2 \operatorname{sen}(u)^2 + v (u''v + u'v') \operatorname{sen}(u)^2 + v^2 (u')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&= u'' + v'' - (u')^2 v + v (u')^2 + v (v')^2 + v (u''v + u'v') \\
&= u' + v'' + v ((v')^2 + u'v' + u''v) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(X_v, \ddot{\gamma}) &= u'' \operatorname{sen}(u)^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) + v'' \operatorname{sen}(u)^2 + (v')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&\quad + (u''v + u'v') \operatorname{sen}(u) \cos(u) - (u')^2 v \operatorname{sen}(u)^2 + u'' \cos(u)^2 \\
&\quad - (u')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) + v'' \cos(u)^2 - (v')^2 \operatorname{sen}(u) \cos(u) \\
&\quad - (u''v + u'v') \operatorname{sen}(u) \cos(u) - (u')^2 v \cos(u)^2 + v'' \\
&= u'' + v'' + v'' - (u')^2 v = u'' + 2v'' - (u')^2 v .
\end{aligned}$$

Chega-se, assim, às equações geodésicas:

$$\begin{cases} u'' + v'' + v((v')^2 + u'v' + u''v) = 0 \\ u'' + 2v'' - (u')^2 v = 0 . \end{cases}$$

Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) \\
&= (\cos(u) - v \operatorname{sen}(u))^2 + (\operatorname{sen}(u) + v \cos(u))^2 \\
&= \cos(u)^2 + v^2 \operatorname{sen}(u)^2 - 2v \operatorname{sen}(u) \cos(u) + \operatorname{sen}(u)^2 + v^2 \cos(u)^2 \\
&\quad + 2v \operatorname{sen}(u) \cos(u) = 1 + v^2 \\
\phi'(t) &= 2v(t)v'(t) \\
\phi''(t) &= 2v'(t)^2 + 2v(t)v''(t) = 2v'(t)^2 + (u'(t))^2 v(t)^2 - u''(t)v(t) .
\end{aligned}$$

Como $2v'(t)^2 + u'(t)^2 v(t)^2 \geq 0$, se $u''(t) = 0$, então tem-se que $\phi''(t) \geq 0$ e, portanto $(\mathcal{M}, g)$ admite uma função convexa. Entretanto, $(\mathcal{M}, g)$ não admite nenhuma função estritamente convexa, pois contém uma geodésica fechada. De fato, para $v = 0$, tem-se $\phi''(t) = 0$.

Observar que nas subvariedades $\mathcal{M}_1 = \{z \in \mathcal{M} \mid z > 0\}$ e $\mathcal{M}_2 = \{z \in \mathcal{M} \mid z < 0\}$ não existem geodésicas fechadas. Se $v'(t) \neq 0$ e $u'' = 0$, então $g''(t) = 2v'(t)^2 + u'(t)^2 v(t)^2 > 0$. Portanto, nestas condições, F é estritamente convexa nessas subvariedades.

Uma variedade riemanniana pode admitir uma função convexa não-constante e não admitir nenhuma função estritamente convexa. Por exemplo, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no $\mathbb{R}^3$ com a métrica euclidiana induzida. Seja a geodésica fechada $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$. Qualquer função convexa F

no cilindro é tal que $f = F \circ \gamma$ é constante. Logo, $f' = f'' = 0$. Portanto, nenhuma função pode ser estritamente convexa no cilindro.

Na secção sobre curvatura e funções convexas são exibidos outros exemplos de funções convexas, dentre os quais a função de Busemann, o quadrado da função distância a um ponto, o quadrado da função distância a um conjunto totalmente convexo e a função energia de um campo de Killing.

Lema 2.73. *Uma função de classe C^2 , $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, é convexa se, e somente se, $H^F(p)[V, V] \geq 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$ e para todo $V \in T_p\mathcal{M}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$.

Como F é convexa, então $\phi(t) = (F \circ \gamma)(t)$ é convexa para toda geodésica γ . Pelo corolário 2.6 (pg. 28), ϕ é convexa se, e somente se, $\phi(t)'' \geq 0$. Como $H^F(p)[V, V] = \phi''(t)|_{t=0}$, então F é convexa se, e somente se, $H^F(p)[V, V] \geq 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $V \in T_p\mathcal{M}$. $\square$

Definição 2.74. Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^1 . Diz-se que $p \in \mathcal{M}$ é um *ponto crítico* se $dF_p = 0$, $dF : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$. Em coordenadas $(x = (x_1, \dots, x_n), \mathcal{U})$, $p \in \mathcal{U}$ é um ponto crítico se $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$.

Definição 2.75. Diz-se que $p \in \mathcal{M}$ é um *ponto crítico não-degenerado* de uma função de classe C^2 , $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, se $H^F(p)$ for não-degenerada.

Proposição 2.76. *Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^2 . Se F possuir um ponto crítico não-degenerado $p_0 \in \mathcal{M}$, então p_0 é um ponto de mínimo global, e é único.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $p_0 \in \mathcal{M}$ um ponto crítico não-degenerado da F , e $q \in \mathcal{M}$, $q \neq p_0$. Como $\mathcal{M}$ é completa, então, assumindo-se o teorema de Hopf-Rinow, $(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente conexa. Portanto, existe um segmento geodésico $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{M}$ que liga p_0 e q , com $\gamma(a) = p_0$ e $\gamma(b) = q$. Por definição, a função $f(t) = (F \circ \gamma)(t)$ é convexa em $[a, b]$.

A função f possui um ponto crítico isolado em a , pois $f''(a) = H^F(p_0)[\dot{\gamma}(a), \dot{\gamma}(a)] \neq 0$. Logo, f possui um ponto de mínimo global em a e, deste modo, $F(p_0) = f(a) \leq f(b) = F(q)$, ou seja, p_0 é um ponto de mínimo global da F . Como o ponto crítico p_0 é não-degenerado, então o operador hessiano $H^F(p_0)$ é invertível e possui autovalores positivos, de modo que $H^F(p_0)[v, v] > 0$, para todo $v \in T_{p_0}\mathcal{M} \setminus \{0\}$.

Resta demonstrar que o ponto p_0 é o único ponto crítico não-degenerado.

Suponha-se, por absurdo, que haja um outro ponto crítico não-degenerado q_0 . Neste caso, existiria um segmento geodésico $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{M}$, com $\gamma(a) = p_0$ e $\gamma(b) = q_0$ tal que $f(t) = (F \circ \gamma)(t)$ seria convexa e teria dois pontos críticos, em a e em b . Logo, $f(t)$ seria constante em $[a, b]$. Portanto, $H^F(p)[\dot{\gamma}(a), \dot{\gamma}(a)] = f''(a) = 0$. Contradição, pois F é não-degenerada em p_0 .

Portanto, o ponto crítico, caso exista, é único. $\square$

Definição 2.77. A aplicação exponencial $\exp_p : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ é definida por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, sendo $\gamma_v : I \mapsto \mathcal{M}$ um segmento geodésico tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ e $1 \in I$.

Definição 2.78. Diz-se que $q \in \mathcal{M}$ é um ponto conjugado ao ponto $p \in \mathcal{M}$ se q for um valor crítico da aplicação exponencial $\exp_p : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$.

Definição 2.79. Dada uma vizinhança V da origem de $T_p\mathcal{M}$, diz-se que $U = \exp_p(V)$ é uma vizinhança normal de $p \in \mathcal{M}$, se $\exp_p : V \mapsto U$ for difeomorfismo.

Definição 2.80. Diz-se que $F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ é própria se, para todo compacto $K \subset \mathcal{N}$, $F^{-1}(K)$ for compacto.

Notação : Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ se, para toda seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, p) = +\infty$, tiver-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(F(x_n), q) = +\infty$, para cada par $p \in \mathcal{M}$ e $q \in \mathcal{N}$, de pontos fixados.

Lema 2.81. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ e $(\mathcal{N}, h)$ variedades riemannianas completas. Uma função contínua $F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ é própria se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ e $K \subset \mathcal{N}$ seja compacto. Como F é contínua, então $F^{-1}(K)$ é fechado. $F^{-1}(K)$ é limitado pois $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ e K é compacto. Logo, $F^{-1}(K)$ é compacto para todo $K \subset \mathcal{N}$. Portanto, F é própria.

Suponhamos que F seja própria. Provemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

Suponhamos, por absurdo, que exista uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(p, x_n) = \infty$, $p \in \mathcal{M}$ fixado, tal que $F(x_n) \subset A$, sendo $A \subset \mathcal{N}$ um conjunto limitado. $\bar{A}$ é compacto, visto que é fechado e limitado. Como F é própria, então $F^{-1}(A)$ é compacto, e, portanto, limitado. Isto contradiz o fato que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, p) = \infty$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. $\square$

Proposição 2.82. Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável de classe C^2 . Se F tiver um ponto crítico não-degenerado (que pela proposição 2.76 é um mínimo global e é único), então $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $p_0 \in \mathcal{M}$ o único ponto de mínimo de F , e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathcal{M}$, uma seqüência divergente em $\mathcal{M}$, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, p_0) = +\infty$. É preciso demonstrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = +\infty$.

Seja B uma vizinhança aberta fixa de p_0 cujo fecho esteja contido numa vizinhança convexa A de p_0 , de modo que para todo par $a, b \in A$ exista uma geodésica que ligue a e b . Escolha-se A suficientemente pequena, de modo que se possa supor que o fecho $\bar{B}$ de B e a fronteira $\partial B = \bar{B} \setminus B$ sejam subconjuntos compactos de $\mathcal{M}$.

Seja a função $\phi(x) = g(\nabla F(x), \dot{\gamma}_x(d_x))$, sendo $\gamma_x : [0, d_x] \mapsto A$ a única geodésica maximal com vetor tangente unitário que ligue p_0 e $x \in A$. Pela

diferenciabilidade de ∇F , e pela aplicação exponencial $\exp_{p_0}$, a função ϕ é diferenciável em A . Observar que $\phi(p_0) = 0$ e $\phi(x) = \frac{d}{dt} F(\gamma_x(t))|_{t=d_x}$. Em particular, como a derivada de uma função convexa é não-decrescente, então $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in A$.

Seja

$$\delta_0 = \min_{x \in \partial B} \phi(x).$$

Tem-se que $\delta_0 > 0$, pois se existisse um $x \in \partial B$ tal que $\phi(x) = 0$, então a função convexa $(F \circ \gamma_x) : [0, d_x] \rightarrow \mathbb{R}$ teria derivada nula nos dois extremos e, portanto, deveria reduzir-se a uma função constante em $[0, d_x]$. Isto acarretaria que $(F \circ \gamma_x)''(0) = H^F(p_0)[\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)] = 0$, o que está em contradição com a hipótese de não-degeneração da F em p_0 e, logo, do hessiano $H^F(p_0)$. Portanto, $\delta_0 > 0$.

Sejam

$$\epsilon_0 = \max_{x \in \partial B} \text{dist}(x, p_0) < +\infty \text{ e } f_0 = \min_{x \in \partial B} F(x) > -\infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\gamma_n : [0, b_n] \rightarrow \mathcal{M}$ uma geodésica minimal que ligue p_0 e x_n , parametrizada pelo comprimento de arco. Como $\mathcal{M}$ é completa, então γ_n existe para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $g_n(t) = (F \circ \gamma_n)(t)$. Pela convexidade de A , para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um único $t_n \in [0, b_n]$ tal que $\gamma_n(t_n) = p_n \in \partial B$. Pela convexidade da F , tem-se

$$\begin{aligned} F(x_n) &= F(\gamma_n(b_n)) = g_n(b_n) \geq g_n(t_n) + g'_n(t_n)(b_n - t_n) \\ &= F(p_n) + g(\nabla F(p_n), \dot{\gamma}_n(t_n)) \text{dist}(p_n, x_n) \\ &= F(p_n) + \phi(\gamma_n(t_n)) \text{dist}(p_n, x_n) \\ &\geq f_0 + \delta_0(\text{dist}(x_n, p_0) - \epsilon_0). \end{aligned}$$

Como $\delta_0 > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, p_0) = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = +\infty$, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2.83. *Se uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ admitir uma função convexa F que possua um ponto de mínimo não-degenerado, então $\mathcal{M}$ é contrátil.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p_0 \in \mathcal{M}$ o ponto de mínimo não-degenerado.

Seja $\eta : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ o fluxo do campo $-\nabla F$, i.e., a aplicação contínua tal que $\eta(x, 0) = x$ e tal que a curva $t \mapsto \eta(x, t)$ seja a curva integral $\gamma_x(t)$ do campo $-\nabla F$, i.e., $\dot{\gamma}_x(t) = -\nabla F(\gamma_x(t))$.

Como os subníveis F^c são compactos, pois são fechados e limitados em uma variedade completa, e como F possui apenas um ponto de mínimo p_0 , então afirmamos que para todo $x \in \mathcal{M}$ tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(x, t) = p_0$. (1)

De fato, $h(t) = F(\eta(x, t))$ é decrescente pois, fixado x , tem-se

$$\begin{aligned} h'(t) &= dF(\gamma_x(t))[\dot{\gamma}_x(t)] = g(\nabla F(\gamma_x(t)), \dot{\gamma}_x(t)) \\ &= -g(\dot{\gamma}_x(t), \dot{\gamma}_x(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\eta(x, t)$ está contida em F^c , sendo $c = F(x)$. Se (1) não valer, então $\eta(x, t) \in F^c \setminus F^\delta$ para algum $\delta > 0$, e, como p_0 é o único ponto crítico de F ,

então $g(\nabla F(\eta(x, t)), \nabla F(\eta(x, t))) \geq \nu_0 > 0$ para todo $t \geq 0$. Isto implicaria que $h'(t) = -g(\dot{\gamma}_x(t), \dot{\gamma}_x(t)) \leq -\nu_0 < 0$, para todo t , logo,
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(\eta(x, t)) = -\infty$.

Isto contradiz a hipótese de p_0 ser um ponto de mínimo global. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta(x, t) = p_0.$$

Tem-se, portanto, a aplicação contínua $\tilde{\eta} : \mathcal{M} \times [0, +\infty] \rightarrow \mathcal{M}$ definindo-se $\tilde{\eta}(x, +\infty) = p_0$, $\tilde{\eta}(x, t) = \gamma_x(t)$, sendo $\gamma_x(t)$ a única curva integral do campo $-\nabla F$ que passa por x , com $\gamma_x(0) = x$ e $[0, +\infty]$ o compactificado de um ponto, que é homeomorfo ao intervalo $[a, b]$.

$\tilde{\eta}$ é uma homotopia entre $\mathcal{M}$ e p_0 , o que prova que $\mathcal{M}$ é contrátil. $\square$

Observação 2.84. Se $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ for um homeomorfismo, então, F é uma aplicação própria.

Proposição 2.85. Se uma variedade riemanniana completa $(\mathcal{M}, g)$ admitir uma função estritamente convexa com um ponto crítico não-degenerado, $m \in \mathcal{M}$, então, para cada $p \in \mathcal{M}$ e cada $v \in T_p \mathcal{M}$, a geodésica $\gamma_v : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{M}$, $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$, é tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_v(t) = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema 2.76, $m \in \mathcal{M}$ é um ponto de mínimo global e é único.

Para provar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_v(t) = \infty$, provaremos que γ_v não pode estar contido em nenhum compacto $F^d = \{x \in \mathcal{M} \mid F(x) \leq d\}$, $d \in \mathbb{R}$.

Suponhamos, por absurdo, que para um $p \in \mathcal{M}$ e um $v \in T_p \mathcal{M}$, a geodésica γ_v esteja contida em F^d , para algum $d \in \mathbb{R}$. Como F^d é compacto, então a sequência $\{\gamma_v(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência, $\{\gamma_v(k_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergente a algum ponto $q \in F^d$. Como F é contínua, então a sequência $\{F(\gamma_v(k_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $F(q) \in \mathbb{R}$.

Seja $f(t) = (F \circ \gamma_v)(t)$. Tem-se, portanto, uma sequência $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$, tal que $\{f(k_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $F(q)$. Como f é estritamente convexa, então $F(k_n) \geq F(q)$ pois, senão, $\{f(k_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ seria limitada superiormente. Logo, $\{f(k_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve ser decrescente. Observar que, em uma vizinhança de q , γ_v intercepta $S_r(m) = \{x \in \mathcal{M} \mid F(x) = r\}$ de modo a apontar para níveis mais baixos, pois f é decrescente. Seja $V(q)$ uma vizinhança normal de q . Como $L(\gamma_v) = \int_{t_0}^{t_q} \sqrt{g(\dot{\gamma}_v(t), \dot{\gamma}_v(t))} dt \leq c_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $F(\gamma_v(t_q)) = F(q)$, e $\gamma_v(t) \in V(q)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_v(t_1) = q$ e $\dot{\gamma}_v(t_1) \neq 0$. Portanto, existe $t_2 > t_1$ tal que $f(t_2) < F(q)$. Portanto, para cada $d \in \mathbb{R}$, para cada $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p \mathcal{M}$, a geodésica $\gamma_v : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}$ é tal que, para um $s \in \mathbb{R}$, $\gamma_v(t) \notin F^d$, para $t \geq s$. Portanto,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_v(t) = \infty$. $\square$

Corolário 2.86. Se $(\mathcal{M}, g)$ admitir uma função estritamente convexa de classe C^2 com um ponto crítico não-degenerado, então, dado $p \in \mathcal{M}$, a exponencial $\exp_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma aplicação própria.

DEMONSTRAÇÃO. Pela proposição 2.85, tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_p tv = \infty$ para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $v \in T_p \mathcal{M}$. Logo, $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \exp_p(v) = \infty$. Portanto, pelo lema 2.81, $\exp_p$ é uma aplicação própria. $\square$

2.4. Funções Convexas e Métricas Conformemente Planas

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.87. Diz-se que uma métrica g em $\mathcal{M}$ é *conformemente plana* se ela for conformemente equivalente à métrica euclidiana do $\mathbb{R}^n$, i.e., se existir uma função diferenciável $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$ tal que $g = \phi g_0$, sendo g_0 a métrica euclidiana do $\mathbb{R}^n$.

A seguir é dada uma condição para garantir a existência de uma função estritamente convexa em $(\mathcal{M}, g)$, sendo g uma métrica conformemente plana.

Lema 2.88. Se uma função diferenciável $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ satisfizer $\phi(x) - \frac{3}{2} \|\nabla \phi(x)\| \|x\| > 0$, então a função $F(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$ possui hessiano estritamente positivo em todo ponto de $\mathcal{M}$, e, por isso, é uma função estritamente convexa em $(\mathcal{M}, g)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\|\cdot\|$ a norma, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno induzido por g_0 , e ∇ o gradiente do $\mathbb{R}^n$.

Seja $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica em $\mathcal{M}$.

Derivando-se a integral de ação $E_\phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \phi(\gamma(t)) \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$, obtem-se

$$\begin{aligned} E'_\phi(\gamma) &= \frac{1}{2} \phi(\gamma(t)) \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ E''_\phi(\gamma) &= \frac{1}{2} \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \phi(\gamma(t)) \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \nabla \phi(\gamma(t)) + \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t) + \phi(\gamma(t)) \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, as equações geodésicas para a métrica ϕg_0 são

$$(2.4.1) \quad \frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \nabla \phi(\gamma) - \langle \nabla \phi(\gamma), \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} - \phi(\gamma) \ddot{\gamma} = 0.$$

Seja γ uma geodésica normalizada em $\mathcal{M}$. Seja

$$\begin{aligned} \rho(t) &= F(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \|\gamma(t)\|^2 = \frac{1}{2} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \\ \rho'(t) &= \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

$$(2.4.2) \quad \rho''(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle \gamma(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle.$$

Substituindo-se 2.4.1 em 2.4.2 obtém-se

$$\begin{aligned}\rho''(t) &= \|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \left\langle \gamma(t), \frac{1}{2\phi(\gamma(t))} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \nabla \phi(\gamma(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\phi(\gamma(t))} \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t) \right\rangle \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \frac{1}{2\phi(\gamma(t))} \langle \gamma(t), \nabla \phi(\gamma(t)) \rangle \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\phi(\gamma(t))} \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle .\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$\begin{cases} \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \leq \|\nabla \phi(\gamma(t))\| \|\gamma(t)\| \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \\ \langle \gamma(t), \nabla \phi(\gamma(t)) \rangle \leq \|\gamma(t)\| \|\nabla \phi(\gamma(t))\| . \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\rho''(t) &\geq \|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}{2\phi(\gamma(t))} \langle \gamma(t), \nabla \phi(\gamma(t)) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\phi(\gamma(t))} \|\nabla \phi(\gamma(t))\| \|\gamma(t)\| \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \\ &\geq \|\dot{\gamma}(t)\|^2 - \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}{\phi(\gamma(t))} \|\gamma(t)\| \|\nabla \phi(\gamma(t))\| \\ &\quad - \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}{2\phi(\gamma(t))} \|\gamma(t)\| \|\nabla \phi(\gamma(t))\| \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \left(1 - \frac{3}{2\phi(\gamma(t))} \|\gamma(t)\| \|\nabla \phi(\gamma(t))\| \right) .\end{aligned}$$

Portanto, se $(\phi(\gamma(t)) - \frac{3}{2} \|\gamma(t)\| \|\nabla \phi(\gamma(t))\|) > 0$, então $\rho''(t) > 0$.

Portanto, F é estritamente convexa se $\phi(x) - \frac{3}{2} \|x\| \|\nabla \phi(x)\| > 0$. $\square$

Exemplo 2.89. Seja a métrica conforme em $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ dada por $g = \psi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})(dx_1^2 + dx_2^2)$, sendo $\psi : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável que satisfaça:

$$\begin{cases} (a) \ b \leq \psi(r) \leq b+1, & \text{se } r \in [0, r_1]; \\ (b) \ a \leq \psi(r) \leq a+1, & \text{se } r \in [r_2, +\infty[; \\ (c) \ \psi'(r) \leq 0, & \text{para todo } r \geq 0; \\ (d) \ \psi'(r) > -2\frac{(b-a+1)}{r_2-r_1}, & \text{se } r \in [0, r_2] \\ (e) \ \psi'(r) > -\frac{2a}{3r}, & \text{se } r \in]r_2, +\infty[, \text{ para constantes } r_1, r_2, a \text{ e } b \\ & \text{com } 0 < r_1 < r_2 \text{ e } 1 < a+1 < b \text{ e tal que:} \\ (f) \ a - 3\frac{(b-a+1)}{r_2-r_1}r_2 > 0. \end{cases}$$

A condição (f) é satisfeita, por exemplo, com a escolha $r_1 = 1, r_2 = 7, a = 11$ e $b = 13$.

Para $x = (x_1, x_2)$, $\phi(x) = \psi(\|x\|)$, tem-se $\nabla \phi(x) = \psi'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}$.

A desigualdade do lema 2.88 (pg. 56) é satisfeita, logo, a função $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ é estritamente convexa em $\mathcal{M}$ e tem ponto de mínimo global em $x = 0$.

2.5. Funções Convexas em Variedades Pseudo-riemannianas

Alguns resultados que valem para variedades riemannianas podem ser estendidos a variedades pseudo-riemannianas.

Definição 2.90. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade pseudo-riemanniana, $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, e I um intervalo fechado. Diz-se que F é convexa se para todo segmento geodésico não-trivial $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$, a função composta $F \circ \gamma$ for convexa em I .

Nestas condições, F é estritamente convexa se $F \circ \gamma$ for estritamente convexa no interior de I para todo segmento geodésico não-trivial $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$.

Diz-se que uma função é (estritamente) convexa do tipo nulo, temporal ou espacial se, respectivamente, forem considerados apenas segmentos geodésicos do tipo nulo ou temporais ou espaciais.

Em particular, no próximo capítulo será utilizado o conceito de função estritamente convexa do tipo nulo para estender um resultado sobre finitude de número de geodésicas, do caso riemanniano ao caso lorentziano.

A definição de conjunto totalmente convexo para variedades pseudo-riemanniana é, *ipsis literis*, a definição dada anteriormente para o caso riemanniano. O lema 2.66 (pg. 46) pode ser estendido ao caso pseudo-riemanniano: Seja $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo. Se $F : A \subset \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ for uma função convexa, então F admite ponto de máximo na fronteira de A . Se F for estritamente convexa, então F admite ponto de máximo somente na fronteira de A .

Lema 2.91. *Uma variedade pseudo-riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ é conexa se, e somente se, ela for geodesicamente conexa por partes.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $(\mathcal{M}, g)$ for geodesicamente conexa por partes, então $\mathcal{M}$ é conexa. Suponhamos que $\mathcal{M}$ seja conexa. Sejam $p \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{C}_p$ o conjunto dos pontos que podem ser ligados a p por geodésicas por partes. Seja U_q uma vizinhança normal de $q \neq p$. $U_q \subset \mathcal{C}_p$ ou $U_q \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}_p$. Logo, $\mathcal{C}_p$ é aberto, e é fechado, pois $\mathcal{M} \setminus \mathcal{C}_p$ é aberto. Como $\mathcal{M}$ é conexa, então $\mathcal{C}_p = \mathcal{M}$. □

Ao contrário de uma variedade riemanniana completa, uma variedade pseudo-riemanniana completa pode não ser geodesicamente conexa, como, por exemplo, o espaço-tempo anti-de Sitter bidimensional, em que $\mathcal{M} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ e $g = \frac{1}{\cos(x)^2}(-dt^2 + dx^2)$ (ver [1] pg. 199), no qual existem dois pontos cronologicamente relacionados e não existe nenhuma geodésica temporal que os ligue.

Se $(\mathcal{M}, g)$ for geodesicamente completa, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ for uma geodésica, e $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ for estritamente convexa, então ou $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F \circ \gamma)(t) = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F \circ \gamma)(t) = +\infty$. Este fato, é essencial para a demonstração dos teoremas principais.

Lema 2.92. *Se uma função de classe C^2 , $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, for convexa do tipo nulo, não-constante ao longo de todo segmento geodésico do tipo nulo, e se $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for estritamente crescente e estritamente convexa de classe C^2 , então a função $G = \rho \circ F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa do tipo nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ um segmento geodésico do tipo nulo. Seja $f(t) = \rho(F(\gamma(t)))$. Mostraremos que $f''(t) > 0$ para todo $t \in I$.

$$\begin{aligned} f(t) &= G(\gamma(t)) = (\rho \circ F)(\gamma(t)) = \rho(F(\gamma(t))) \\ f'(t) &= \rho'(F(\gamma(t)))g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \\ f''(t) &= \rho''(F(\gamma(t))) (g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))^2 \\ &\quad + \rho'(F(\gamma(t)))H^F(\gamma(t))[\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)] . \end{aligned}$$

Pelo lema 2.12 (pg. 30), tem-se que $\rho'(t) > 0$ e $\rho''(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pelo lema 2.10 (pg. 30) $F \circ \gamma$ possui no máximo um ponto crítico em I pois $F \circ \gamma$ é uma função convexa e F é não-constante ao longo de todo segmento geodésico do tipo nulo. Portanto, $f''(t) > 0$, a não ser, eventualmente, num ponto crítico de $F \circ \gamma$, o que implica que a f é estritamente convexa.

Como γ foi escolhido arbitrariamente e f é estritamente convexa, então a função $G = \rho \circ F$ é estritamente convexa do tipo nulo em $\mathcal{M}$. $\square$

A mesma demonstração serve para o caso de funções convexas temporais e funções convexas espaciais.

2.6. Convexidade e subgradientes

Nesta secção procede-se a uma caracterização de funções convexas em termos de subgradientes e subdiferenciais.

Seja $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo. Sejam $X_p \in T_p A$ e $\gamma : I \rightarrow A$, $0 \in I$, uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$, e $F : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.93. O limite $DF(p, X_p) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(\gamma(t)) - F(p)}{t}$ se existir, é a derivada direcional unilateral de F em p na direção do vetor X_p .

Como $-DF(p, -X_p) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{F(\gamma(t)) - F(p)}{t}$, então a derivada direcional unilateral $DF(p, X_p)$ é bilateral se, e somente se, $DF(p, -X_p)$ existir e $DF(p, -X_p) = -DF(p, X_p)$.

Lema 2.94. Se $F : A \mapsto \mathbb{R}$ for convexa e $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ for uma geodésica para a qual $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$, então:

- (1) Para um vetor X_p fixado, a função $Q : I \cap]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $Q(t) = \frac{F(\gamma(t)) - F(p)}{t}$ é não-decrescente;
 (2) $DF(p, X_p)$ existe e é igual a $\inf_{t>0} Q(t)$;
 (3) $DF(p, \cdot)$ é convexa. Além disso, $DF(p, O_p) = 0$ e $-DF(p, -X_p) \leq DF(p, X_p)$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Dada uma função $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, para $x < t$ vale $\frac{\phi(t) - \phi(x)}{t - x} \leq \frac{\phi(y) - \phi(t)}{y - t}$ (ver demonstração do lema 2.5 (pg. 28).

A função $\phi(t) = F(\gamma(t))$ é convexa, logo, para $t_1 < t_2$ obtem-se

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{\phi(t_2) - \phi(t)}{t_2 - t}.$$

Para $t = 0$ obtem-se

$$\frac{\phi(t_1) - \phi(0)}{t_1} \leq \frac{\phi(t_2) - \phi(0)}{t_2}.$$

Como $\phi(0) = F(\gamma(0)) = F(p)$ e $\phi(t) = F(\gamma(t))$, então,
 $Q(t_1) = \frac{F(\gamma(t_1)) - F(p)}{t_1} \leq \frac{F(\gamma(t_2)) - F(p)}{t_2} = Q(t_2)$.

Portanto, a função $Q(t)$ é não-decrescente.

(2) Como $Q(t)$ é não-decrescente, então $\lim_{t \rightarrow 0+} Q(t)$ existe e é igual a $DF(p, X_p)$.

(3) Seja $\tau(s, t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq t_0$, uma homotopia de curvas tal que valham

(a) $\tau(s, 0) = p$;

(b) $\tau(0, t) = \alpha(t) = \exp(tX_p)$, $\tau(1, t) = \beta(t) = \exp(tY_p)$, $X_p, Y_p \in T_p A$.

(c) para cada $t \in [0, t_0]$, a função $s \mapsto \tau(s, t)$ é um segmento geodésico normalizado.

τ existe se t_0 for suficientemente pequeno.

Pela condição (c), tem-se que o campo $t \mapsto \frac{\partial}{\partial s} \tau(s, t)$ é de Jacobi ao longo da geodésica $t \mapsto \tau(s, t)$.

Por (a) e pela equação de Jacobi obtem-se $\nabla_s \nabla_s \frac{\partial}{\partial t} \tau(s, t) = 0$. Por (b) tem-se que $\frac{\partial}{\partial t} \tau(0, 0) = \dot{\alpha}(0) = X_p$, $\frac{\partial}{\partial t} \tau(1, 0) = \dot{\beta}(0) = Y_p$. Logo, $\frac{\partial}{\partial t} \tau(s, 0) = (1 - s)X_p + sY_p$.

Portanto, como F é convexa, obtem-se

$$\begin{aligned} D(p, (1 - s)X_p + sY_p) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(\tau(s, t)) - F(p)}{t} \right] \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0+} \left[\frac{sF(\tau(0, t)) + (1 - s)F(\tau(1, t)) - F(p)}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left[\frac{sF(\alpha(t)) + (1 - s)F(\beta(t)) - sF(p) - (1 - s)F(p)}{t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0_+} \left[\frac{s(F(\alpha(t)) - F(p)) + (1-s)(F(\beta(t)) - F(p))}{t} \right] \\
&= s \lim_{t \rightarrow 0_+} \left[\frac{F(\alpha(t)) - F(p)}{t} \right] + (1-s) \lim_{t \rightarrow 0_+} \left[\frac{F(\beta(t)) - F(p)}{t} \right] \\
&= sDF(p, X_p) + (1-s)DF(p, Y_p) .
\end{aligned}$$

□

Notação: $\Gamma(p, y)$ = coleção dos segmentos geodésicos que liguem os pontos $p, y \in \mathcal{M}$.

Definição 2.95. Seja $F : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa. Diz-se que uma 1-forma $w_p \in T_p^*A$ é um *subgradiente* da F em p se $F(y) \geq F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$, para todo $y \in A$ e para todo segmento geodésico $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Definição 2.96. Seja $F : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa. O conjunto de todos os subgradientes da F em p é dito a *subdiferencial* da F em p . (Notação: $\partial F(p)$)

A aplicação $p \mapsto \partial F(p)$ é dita a *subdiferencial* da F .

Lema 2.97. Se uma função $F : A \mapsto \mathbb{R}$ for convexa, então o conjunto $\partial F(p) \subset T_p^*A$ possui pelo menos um elemento.

DEMONSTRAÇÃO. Como F é convexa, então

$$F(y) - F(p) \geq \frac{F(\gamma_{py}(t)) - F(p)}{t} \geq DF(p, X_p), \text{ sendo } t > 0 \text{ e } X_p = \dot{\gamma}_{py}(0).$$

T_p^*A é um subconjunto convexo em $T_p^*\mathcal{M}$ e a função $X_p \mapsto DF(p, X_p)$ é convexa pelo lema 2.94. Logo, existe $w_p \in T_p^*\mathcal{M}$ tal que $w_p(X_p) \leq DF(p, X_p)$, logo, $F(y) - F(p) \geq DF(p, X_p) \geq w_p(X_p)$, ou seja, $w_p \in \partial F(p)$. □

Lema 2.98. Se $F : A \mapsto \mathbb{R}$ for convexa, então o conjunto $\partial F(p)$ é convexo e compacto.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $w_p, \bar{w}_p \in \partial F(p)$. Por definição, tem-se

$$\begin{cases} F(y) \geq F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{py}(0)) \\ F(y) \geq F(p) + \bar{w}_p(\dot{\gamma}_{py}(0)) \end{cases}$$

para todo $y \in A$ e para toda $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Multiplicando-se a primeira desigualdade acima por $(1-s)$ e a segunda desigualdade por $s \in [0, 1]$, e somando-se, obtem-se

$$\begin{aligned}
F(y) &\geq F(p) + (1-s)w_p(\dot{\gamma}_{py}(0)) + s\bar{w}_p(\dot{\gamma}_{py}(0)) \\
&= F(p) + [(1-s)w_p + s\bar{w}_p](\dot{\gamma}_{py}(0)) .
\end{aligned}$$

Portanto, $\partial F(p)$ é convexa.

Seja $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial F(p)$ uma seqüência de subgradientes da F em p que convirja a w_p . Suponha-se que $w_p \notin \partial F(p)$, i.e., que existam $\epsilon > 0$, $z \in \mathcal{M}$

e γ_{pz} tal que $F(z) + \epsilon = F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{pz}(0))$ (Se não existir um tal ϵ então w_p é automaticamente um subgradiente). Nestes termos, subtraindo-se as seguintes expressões,

$$\begin{cases} F(z) \geq F(p) + w_n(\dot{\gamma}_{pz}(0)) \\ F(z) + \epsilon = F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{pz}(0)) \end{cases}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} -\epsilon &\geq (w_n - w_p)(\dot{\gamma}_{pz}(0)) \\ \epsilon &\leq \|w_p - w_n\| \|\dot{\gamma}_{pz}(0)\| . \end{aligned}$$

Portanto, $\|w_p - w_n\| \geq \frac{\epsilon}{\|\dot{\gamma}_{pz}(0)\|} > 0$, o que contradiz o fato que a sequência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a w_p . Logo, $w_p \in \partial F(p)$. Portanto, $\partial F(p)$ é fechado.

Seja $w_p \in \partial F(p)$, i.e., $w_p(\dot{\gamma}_{py}(0)) + F(p) \leq F(y)$, ou $\|w_p\| \|\dot{\gamma}_{py}(0)\| \cos(\theta) + F(p) \leq F(y)$ para todo $y \in A$ e para toda $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Logo, $\|w_p\|$ é limitado. Logo, $\partial F(p)$ é limitado. Portanto, $\partial F(p)$ é compacto. $\square$

Lema 2.99. *Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. $O_p \in \partial F(p)$ se, e somente se, $F(y) \geq F(p) + O_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$ para todo $y \in A$ e todo segmento geodésico $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$, i.e., se, e somente se, p for um ponto de mínimo da F .*

Lema 2.100. *Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. $w_p \in \partial F(p)$ se, e somente se, $DF(p, X_p) \geq w_p(X_p)$ para todo $X_p \in T_p A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $w_p \in \partial F(p)$, i.e., $F(y) \geq F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$ para todo $y \in A$ e para toda $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Seja $\gamma_{py} : [0, 1] \rightarrow A$ um segmento geodésico tal que $\dot{\gamma}_{py}(0) = X_p$.

Reparametrizando-se γ_{py} tal que $y = \gamma_{py}(st)$, $s > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} F(y) - F(p) &= F(\gamma_{py}(st)) - F(p) \\ &\geq w_p \left(\frac{d}{dt} \gamma_{py}(st) \right) = s w_p(\dot{\gamma}_{py}(st)) \\ \overline{X}_p &= s \dot{\gamma}_{py}(st) . \end{aligned}$$

Logo, $\frac{F(\gamma_{py}(st)) - F(p)}{s} \geq w_p(X_p)$.

Por passagem ao limite, obtem-se que $DF(p, X_p) \geq w_p(X_p)$. Por outro lado, se $DF(p, X_p) \geq w_p(X_p)$, então

$F(y) - F(p) \geq \frac{F(\gamma_{py}(t)) - F(p)}{t} \geq DF(p, X_p)$, o que implica que $F(y) - F(p) \geq w_p(X_p)$ e, portanto, $w_p \in \partial F(p)$. $\square$

Corolário 2.101. *Um ponto p é de mínimo para a F se, e somente se, $DF(p, X_p) \geq 0$ para todo $X_p \in T_p A$.*

Lema 2.102. *Seja A um subconjunto aberto totalmente convexo. Uma função $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para cada $p \in A$, existir*

$w_p \in T_p^*A$ tal que para todo $y \in A$ e para todo $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$ tiver-se $F(y) - F(p) \geq w_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, então pelo lema 2.97 (pg. 61) para todo $p \in A$ existe um elemento $w_p \in T_p^*A$ tal que $F(y) \geq F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$ para todo $y \in A$ e para toda $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Suponha-se que para todo $p \in A$, exista $w_p \in T_p^*A$ tal que

$$(2.6.1) \quad F(y) \geq F(p) + w_p(\dot{\gamma}_{py}(0))$$

para todo $y \in A$ e para toda $\gamma_{py} \in \Gamma(p, y)$.

Neste caso, permutando-se p e y , tem-se

$$(2.6.2) \quad F(p) \geq F(y) + w_y(\dot{\gamma}_{yp}(0)),$$

sendo $\gamma_{yp}(t) = \gamma_{py}(1-t)$ $t \in [0, 1]$ um segmento geodésico que ligue y e p . Pondo-se $u = t + s(1-t)$, $s \in [0, 1]$, obtem-se a reparametrização $\alpha(s) = \gamma_{py}(u(s)) = \gamma_{py}(t + s(1-t))$, $s \in [0, 1]$, sendo $\alpha(0) = \gamma_{py}(t)$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0) = (1-t)\dot{\gamma}_{py}(t)$.

A restrição $\gamma_{yp}(u) = \gamma_{py}(1-u)$, $u \in [1-t, 1]$ é um segmento geodésico que liga $\gamma_{py}(t)$ e p . Pondo-se $u = 1-t+st$, $s \in [0, 1]$ tem-se a reparametrização $\beta(s) = \gamma_{yp}(1-t+st) = \gamma_{py}(t-st)$, $s \in [0, 1]$, sendo $\beta(0) = \gamma_{py}(t)$, $\frac{d\beta}{ds}(0) = -t\dot{\gamma}_{py}(t)$.

Substituindo-se em 2.6.1 p por $\gamma_{py}(t)$ e $\dot{\gamma}_{py}(0)$ por $\frac{d\alpha}{ds}$, obtem-se

$$(2.6.3) \quad F(y) - F(\gamma_{py}(0)) \geq (1-t)w_{\gamma_{py}(t)}(\dot{\gamma}_{py}(t)).$$

Do mesmo modo, substituindo-se em 2.6.2 y por $\gamma_{py}(t)$ e $\dot{\gamma}_{yp}(0)$ por $\frac{d\beta}{ds}(0)$ obtem-se

$$(2.6.4) \quad F(p) - F(\gamma_{py}(t)) \geq -tw_{\gamma_{py}(t)}(\dot{\gamma}_{py}(t)).$$

Multiplicando-se 2.6.1 por t e 2.6.3 por $(1-t)$ e somando-se, obtem-se $F(\gamma_{py}(t)) \leq (1-t)F(p) + tF(y)$.

Como t foi escolhido arbitrariamente em $[0, 1]$, então conclui-se que F é convexa. $\square$

2.7. Convexidade Causal

O conceito de convexidade pode ser estudado de acordo com o *carácter causal* das geodésicas de uma variedade. Em particular, será utilizada a seguinte definição específica de função convexa, que é essencial para a demonstração do teorema sobre finitude do número de geodésicas para o caso lorentziano estacionário.

Definição 2.103. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana e $B \subset \mathcal{M}$ um aberto. Diz-se que uma função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa do tipo nulo em B se para todo segmento geodésico do tipo nulo $\gamma : [a, b] \rightarrow B$, a função composta $F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa.*

Se $F \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ for estritamente convexa para todo segmento geodésico do tipo nulo $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$, então diz-se que F é estritamente convexa do tipo nulo.

Define-se analogamente função (estritamente)convexa temporal e função (estritamente)convexa espacial.

As geodésica γ mantêm o seu caráter causal pois $\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right) = 0$ e, portanto, $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$ é constante. Portanto, se uma geodésica $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ for temporal em um ponto qualquer $p = \gamma(t_0)$, então γ é temporal em todos os pontos $\gamma(t)$ com $t \in I$.

Lema 2.104. *Sejam $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo com interior não-vazio de uma variedade fortemente causal $\mathcal{M}$ e $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa do tipo nulo. Então F é uma função contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabe-se que as seguintes propriedades são equivalentes:

(1) $(\mathcal{M}, g)$ é fortemente causal.

(2) A topologia de Alexandrov induzida em $\mathcal{M}$ concorda com a topologia da variedade $\mathcal{M}$.

(3) A topologia de Alexandrov é Hausdorff. (ver [1] e referências)

Dado um ponto $p \in \mathcal{M}$, considere-se um aberto

$$I =]F(p) - \epsilon, F(p) + \epsilon[\subset Im(F).$$

Como F é estritamente convexa do tipo nulo, então dado qualquer segmento geodésico do tipo nulo γ_{xy} que ligue os pontos $x, y \in F^{-1}]F(p) - \epsilon, F(p) + \epsilon[$, F assume ponto de máximo ou em x ou em y ao longo do segmento γ_{xy} . Constrói-se um aberto de Alexandrov V que contenha p , que é, pela equivalência acima, união de abertos de $\mathcal{M}$. Neste caso, existe um aberto U de $\mathcal{M}$, tal que $U \subset V \subset F^{-1}(]F(p) - \epsilon, F(p) + \epsilon[)$. Logo, $F(U) \subset]F(p) - \epsilon, F(p) + \epsilon[$.

Portanto, F é contínua. $\square$

2.8. Curvatura e Funções Convexas

Nesta secção será investigada a relação entre curvatura seccional e existência de função convexa e, principalmente, existência de função estritamente convexa, para o estudo da finitude do número de geodésicas que passem por dois pontos. Serão dados alguns exemplos de funções convexas em variedades com curvatura seccional $K \geq 0$, $K > 0$, $K \leq 0$ e $K < 0$. Sabe-se que em uma variedade $(\mathcal{M}, g)$ com curvatura seccional $K \leq 0$, não há pontos conjugados ao longo de qualquer geodésica (ver [16] pg.100).

O teorema de Hopf-Rinow é enunciado a seguir, sendo essencial para garantir a existência de segmentos geodésicos, o que constitui recurso amplamente utilizado nas demonstrações por vir.

Teorema de Hopf-Rinow 2.105. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana e $p \in \mathcal{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) A função $\exp_p$ está definida em todo o $T_p\mathcal{M}$.
- (b) Os subconjuntos limitados e fechados de $\mathcal{M}$ são compactos.
- (c) $(\mathcal{M}, g)$ é completa como espaço métrico.
- (d) $(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente completa.
- (e) Existe uma seqüência de compactos $K_n \subset \mathcal{M}$, $K_n \subset K_{n+1}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{M}$, tais que para $q_n \notin K_n$, tem-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(q_n, p) = +\infty$. Além disso, cada uma das afirmações acima implica a seguinte afirmação:
- (f) Para todo $q \in \mathcal{M}$ existe um segmento geodésico, γ_{pq} , que liga os pontos p e q , com comprimento $L(\gamma_{pq}) = \text{dist}(p, q)$.

O teorema de Hadamard-Cartan, o qual é enunciado a seguir, é utilizado várias vezes em demonstrações e exemplos.

Teorema de Hadamard-Cartan 2.106. *Se $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana for completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional $K \leq 0$ em todo ponto, então $\mathcal{M}$ é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Além disso, para todo par $p, q \in \mathcal{M}$, existe somente um segmento geodésico que os une.*

Este é um caso particular de um resultado mais geral que afirma que se uma variedade riemanniana $\mathcal{M}$ completa e simplesmente conexa possuir um pólo, ou seja, um ponto que não admita nenhum ponto conjugado, então $\mathcal{M}$ é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

Uma variedade nestas condições admite apenas um segmento geodésico que passe por dois pontos, logo, para uma tal variedade, há finitude do número de geodésicas que passem por dois pontos. Variedades riemannianas completas, não-compactas, com curvatura seccional $K > 0$, admitem uma função estritamente convexa, a saber, $\phi = \psi \circ b_\gamma$, sendo $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente e estritamente convexa e b_γ uma função de Busemann. Por outro lado, nas variedades riemannianas com um pólo e curvatura seccional $K \leq 0$, a função $x \mapsto \text{dist}(p, x)^2$ é estritamente convexa, sendo $p \in \mathcal{M}$.

Se $(\mathcal{M}, g)$ for completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional $K \leq 0$, então, pelo teorema de Hadamard-Cartan, todo ponto $p \in \mathcal{M}$ é um pólo. Não somente variedades com curvatura negativa contém pólo. O parabolóide $z = x^2 + y^2$ contém um pólo, o ponto $p = (0, 0, 0)$, embora seja, com a métrica euclidiana induzida, uma variedade de curvatura $K > 0$.

Variedades com um pólo são completas e não-compactas pois, neste caso, $\exp_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo global.

Definição 2.107. Diz-se que a curvatura radial $K_p \geq c$ se, dado um ponto base $p \in \mathcal{M}$, para toda geodésica minimizante γ que parta de p , e qualquer plano σ que seja tangente a γ , a curvatura seccional $K(\gamma(t), \sigma) \geq c$.

Define-se curvatura radial $K_p \leq c$ analogamente.

Contudo, funções estritamente convexas podem existir em variedades riemannianas mesmo se a curvatura mudar de sinal:

Exemplo 2.108. Seja $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ com a métrica $g = dr^2 + f(r)d\theta^2$ em coordenadas polares (r, θ) , e $f(r)$ uma função diferenciável que satisfaça $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$ se $r > 0$.

Dados um ponto $p \in \mathcal{M}$ e um vetor $v \in T_p\mathcal{M}$ que seja ortogonal ao raio op , com $\text{dist}(o, p) = r$, a função distância é tal que

$$H^p[v, v] = \frac{f'(r)}{f(r)} \text{ e } K(x) = \frac{-f''(r)}{f(r)}.$$

Logo, se f for estritamente crescente e se f'' mudar de sinal, então $H^p[v, v] \geq 0$ e K muda de sinal. Neste caso, f é convexa com um ponto de mínimo em o . Compondo-se com uma função estritamente convexa ψ , tem-se uma função estritamente convexa $\phi = \psi \circ \rho$.

Se uma variedade possuir uma geodésica fechada γ , então há infinitude do número de segmentos geodésicos que incidam em dois pontos distintos. Não é verdade que se $\mathcal{M}$ não for simplesmente conexa, i.e., o grupo fundamental de uma variedade $\mathcal{M}$ for não-trivial, então $\mathcal{M}$ possui uma geodésica fechada. A superfície dada por $x^2 + y^2 = \frac{1}{z}$ não é simplesmente conexa e não possui nenhuma geodésica fechada.

A seguir, prova-se que convexidade de funções é preservada por isometrias, com a métrica induzida pela ϕ .

Lema 2.109. *Sejam $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ uma isometria e $F : A \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa definida num subconjunto totalmente convexo. Então, $F \circ \phi^{-1} : \phi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Como ϕ é uma isometria, então, se γ for uma geodésica em $(\mathcal{M}, g)$, então $\phi(\gamma)$ também é geodésica em $(\mathcal{M}, g)$.

Como ϕ é uma isometria, então $\phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ é um segmento geodésico que liga os pontos $\phi(x)$ e $\phi(y)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (F \circ \phi^{-1})(\phi(\gamma(t))) &= \\ &= F(\gamma(t)) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \\ &= \lambda F(\phi^{-1}(\phi(x))) + (1 - \lambda)F(\phi^{-1}(\phi(y))) \\ &= \lambda(F \circ \phi^{-1})\phi(x) + (1 - \lambda)(F \circ \phi^{-1})\phi(y). \end{aligned}$$

Portanto, $F \circ \phi^{-1}$ é convexa em $\phi(A)$, para toda isometria, ou seja, convexidade de função é invariante por isometria. $\square$

Considerando-se a métrica induzida por um difeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, de $(\mathcal{M}, g)$ em $(\mathcal{M}, \bar{g})$, tem-se que ϕ é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} \bar{g}(d\phi(p)[V], d\phi(p)[W]) &= g(d\phi^{-1}d\phi[V], d\phi^{-1}d\phi[W]) \\ &= g(V, W) \end{aligned}$$

e ϕ é bijetora, pois é difeomorfismo. Neste caso particular, convexidade de função é preservada por difeomorfismo.

A convexidade estrita de uma função não é preservada por difeomorfismos: O cilindro é difeomorfo à superfície definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{z}$. No

entanto, com a métrica euclidiana induzida, enquanto aquela não admite nenhuma função estritamente convexa, esta o admite, como foi mostrado no exemplo 2.71 (pg. 49).

Exemplo 2.110. Superfície de revolução.

Seja a parametrização $X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), h(v))$ de uma superfície de revolução $\mathcal{M}$ com a métrica euclidiana induzida g_0 do $\mathbb{R}^3$.

Calculemos as geodésicas de $(\mathcal{M}, g_0)$.

Derivando-se, tem-se

$$\begin{aligned} X_u &= (-f(v)\sin(u), f(v)\cos(u), 0) \\ X_v &= (f'(v)\cos(u), f'(v)\sin(u), h'(v)) \\ X_{uv} &= (-f'(v)\sin(u), f'(v)\cos(u), 0) . \end{aligned}$$

Seja $\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = (f(v(t))\cos(u(t)), f(v(t))\sin(u(t)), h(v(t)))$ uma curva diferenciável. γ é uma geodésica se $g(\ddot{\gamma}, X_u) = 0$ e $g(\ddot{\gamma}, X_v) = 0$.

Derivando-se γ , tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= (f'(v)v'\cos(u) - u'f(v)\sin(u), f'(v)v'\sin(u) + u'f(v)\cos(u), g'(v)v') \\ \ddot{\gamma} &= ((f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\cos(u) - f'(v)v'u'\sin(u) \\ &\quad + (-u''f(v) - 2u'v'f'(v))\sin(u) - (u')^2f(v)\cos(u), \\ &\quad (f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\sin(u) + f'(v)v'u'\cos(u) \\ &\quad + (u''f(v) + 2u'v'f'(v))\cos(u) - (u')^2f(v)\sin(u), h''(v)(v')^2 + h'(v)v'') . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X_u, \ddot{\gamma}) &= -f(v)(f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\sin(u)\cos(u) \\ &\quad - f'(v)(-u''f(v) - 2u'v'f'(v))\sin(u)^2 + (u')^2f(v)^2\sin(u)\cos(u) \\ &\quad + f(v)(f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\sin(u)\cos(u) + f(v)(u''f(v) \\ &\quad + 2u'v'f'(v))\cos(u)^2 - (u')^2f(v)^2\sin(u)\cos(u) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X_v, \ddot{\gamma}) &= f'(v)(f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\cos(u)^2 \\ &\quad + f'(v)(-u''f(v) - 2u'v'f'(v))\sin(u)\cos(u) - f'(v)(u')^2f(v)\cos(u)^2 \\ &\quad + f'(v)(f''(v)(v')^2 + f'(v)v'')\sin(u)^2 \\ &\quad + f'(v)(u''f(v) + 2u'v'f'(v))\sin(u)\cos(u) - f'(v)(u')^2f(v)\sin(u)^2 \\ &\quad + h'(v)h''(v)(v')^2 + h'(v)^2v'' . \end{aligned}$$

Para $g(X_u, \ddot{\gamma}) = 0$, tem-se $f(v)(u''f(v) + 2u'v'f'(v)) = 0$. Como $f \neq 0$, então $u'' + 2\frac{f'(v)}{f(v)}u'v' = 0$.

Para $g(X_v, \tilde{\gamma}) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} & f'(v)(f''(v)(v')^2 + f'(v)v'') - f(v)f'(v)(u')^2 + h'(v)h''(v)(v')^2 \\ & + h'(v)^2v'' = 0 \\ & v''(h'(v)^2 + f'(v)^2) - f(v)f'(v)(u')^2 + (f'(v)f''(v) + h'(v)h''(v))(v')^2 = 0 \\ & v'' - \frac{f(v)f'(v)(u')^2}{f'(v)^2 + h'(v)^2} + \frac{f'(v)f''(v) + h'(v)h''(v)(v')^2}{f'(v)^2 + h'(v)^2} = 0. \end{aligned}$$

(Como $h(v) = f(v)^2$, então $h'(v) = 2f(v)f'(v)$ e $f'(v)^2 + h'(v)^2 = f'(v)^2 + 4f(v)^2f'(v)^2 = (1 + 4f(v))^2f'(v) \neq 0$, por isso pode-se dividir por $f'(v)^2 + h'(v)^2$).

Portanto, γ é uma geodésica se

$$\begin{cases} u'' + 2\frac{f'(v)}{f(v)}u'v' = 0 \\ v'' - \frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + h'(v)^2}(u')^2 + \frac{f'(v)f''(v) + h'(v)h''(v)}{f'(v)^2 + h'(v)^2}(v')^2 = 0. \end{cases}$$

Para $f(v) = v$, tem-se $X(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), h(v))$.

Com a métrica euclidiana induzida, a função $F(x, y, z) = x^2 + y^2 = v^2$ é convexa:

Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ uma geodésica e $\phi(t) = (F \circ \gamma)(t) = v(t)^2$.

Derivando-se, tem-se

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= 2v(t)v'(t) \\ \phi''(t) &= 2v'(t)^2 + 2v(t)v''(t) \\ &= 2v'(t)^2 + \frac{2v(t)}{1 + h'(v(t))^2}(v(t)u'(t)^2 - h'(v(t))h''(v(t))v'(t)^2) \\ &= 2v'(t)^2 + \frac{2v(t)^2u'(t)^2}{1 + h'(v(t))^2} - 2\frac{v(t)h'(v(t))h''(v(t))v'(t)^2}{1 + h'(v(t))^2}. \end{aligned}$$

Logo, se $v(t)h'(v(t))h''(v(t)) \leq 0$, então $\phi''(t) \geq 0$. A condição $v(t) > 0$ impõe que $h'(v(t))h''(v(t)) \leq 0$.

Se a curvatura seccional for estritamente negativa, então a superfície de revolução admite função estritamente convexa, pois $h'(v(t))h''(v(t)) < 0$, supondo-se $h'(v(t)) \neq 0$ e $h''(v(t)) \neq 0$.

Lema 2.111. *Numa variedade riemanniana não-compacta e completa $(\mathcal{M}, g)$, por todo ponto $p \in \mathcal{M}$ passa pelo menos um raio.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $(\mathcal{M}, g)$ é completa, então, pelo teorema de Hopf-Rinow (pg. 65), $(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente conexa, logo, para todo par de pontos $x, y \in \mathcal{M}$ existe um segmento geodésico normalizado γ_{xy} que os liga e tal que $\text{dist}(x, y) = L(\gamma_{xy})$.

Considere-se uma sequência de pontos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, divergente ao infinito, e segmentos geodésicos normalizados γ_{pp_n} que liguem p e p_n tal que $\text{dist}(p, p_n) = L(\gamma_{pp_n})$.

A seqüência $\{\dot{\gamma}_{pp_n}(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui um ponto de acumulação $v \in T_p \mathcal{M}$, pois os segmentos geodésicos γ_{pp_n} são normalizados e a seqüência de segmentos $\{\dot{\gamma}_{pp_n}(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência infinita num compacto, a qual possui um ponto de acumulação pela propriedade de Bolzano-Weierstrass. Sejam $\{\gamma_{pp_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência que convirja a γ_v e $\gamma_v : [0, +\infty[\mapsto \mathcal{M}$ a geodésica que passa por p com vetor tangente v . $g(v, v) = 1$ pois $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\gamma}_{pp_n}(0)$ e $g(\dot{\gamma}_{pp_n}(0), \dot{\gamma}_{pp_n}(0)) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(\mathcal{M}, g)$ é completa, então, pelo teorema de Hopf-Rinow (pg. 65), existe uma seqüência de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{M}$ e uma seqüência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $p_n \notin K$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(p, p_n) = +\infty$. Logo, $\{\gamma_{pp_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a γ_v em K_j para todo $j \in \mathbb{N}$ fixado. Logo, γ_v é um segmento geodésico normalizado, minimante em todo K_j , $j \in \mathbb{N}$.

Portanto, γ_v é um raio. Portanto, por todo ponto de $\mathcal{M}$ passa um raio. $\square$

Exemplo 2.112. Função quadrado da distância a um ponto.

Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade completa com um pólo p , com curvatura radial $K_r \leq 0$ e dist a função distância induzida pela g . Nestes termos, a função $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \text{dist}(p, x)^2$ é uma função estritamente convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F = \rho^2 \circ \exp^{-1}$, sendo $\rho : T_p \mathcal{M} \mapsto [0, +\infty[$ definida por $\rho^2(X) = g(X, X) = \|X\|^2$.

Para cada $d \in \mathbb{R}$, $F^d = F^{-1}(]-\infty, d]) = \overline{B(p, \sqrt{d})}$ é compacto, pois, pelo teorema de Hopf-Rinow, os subconjuntos fechados e limitados são compactos.

Seja $x \in \mathcal{M} \setminus \{p\}$ e $X \in T_x \mathcal{M}$. Será demonstrado que $X \neq 0$ implica $H^F[X, X] > 0$.

Seja $\tau : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ uma geodésica $\tau(0) = x$, $\dot{\tau}(0) = X$, e para $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, sejam $\gamma_s : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ o segmento geodésico que liga p a $\tau(s)$, i.e., $\gamma_s(0) = p$, $\gamma_s(1) = \tau(s)$, e $L(s)$ o comprimento de γ_s . Seja γ o segmento geodésico que liga p e x , e X o campo variacional ao longo de γ da variação $\alpha : [0, 1] \times]-\epsilon, \epsilon[\mapsto \mathcal{M}$, com $\alpha(t, s) = \gamma_s(t)$ e $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$. Então

$$\begin{aligned} H^F(x)[X, X] &= \frac{d^2}{ds^2}(F \circ \tau) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2}(\text{dist}(p, \gamma_s(1))^2) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d^2}{ds^2} L(s)^2 \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

Como γ_s é uma geodésica, então $\|\dot{\gamma}_s(t)\|$ é constante. Logo, $L(s)^2 = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt = (\int_0^1 \|\dot{\gamma}_s(t_0)\|^2 dt)^2$.

Seja $X(t) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha(t, s) \Big|_{s=0}$. Então $X(0) = 0$, $X = X(1)$ e

$$\begin{aligned}
 H^F(x)[X, X] &= \frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \Big|_{s=0} dt = \frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 g(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} g(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) dt = 2 \int_0^1 \frac{d}{ds} g(\nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\
 &= 2 \int_0^1 [g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) + g(\nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \nabla_X \dot{\gamma}_s(t))] \Big|_{s=0} dt \\
 &= 2 \int_0^1 [g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) + g(\nabla_{\dot{\gamma}_s} X, \nabla_{\dot{\gamma}_s} X)] \Big|_{s=0} dt \\
 &= 2 \int_0^1 [g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) + g(\nabla_X \dot{\gamma}_s(t), \nabla_X \dot{\gamma}_s(t))] \Big|_{s=0} dt \\
 &= 2 \int_0^1 [\|\dot{X}(t)\|^2 + g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))] dt
 \end{aligned}$$

sendo $\dot{X}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}} X(t)$.

X e $\dot{\gamma}$ são campos de vetores coordenados da variação geodésica em consideração, logo, $[X, \dot{\gamma}] = \nabla_X \dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ e, portanto, o tensor de curvatura apresenta-se como

$$\begin{aligned}
 R(X, \dot{\gamma})X &= \nabla_X \nabla_{\dot{\gamma}} X - \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_X X = \nabla_X \nabla_X \dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_X X, \text{ ou} \\
 \nabla_X \nabla_X \dot{\gamma} &= R(X, \dot{\gamma})X + \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_X X.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt &= \int_0^1 g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))X(t) + \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_X X(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\
 &= \int_0^1 -g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) + \frac{d}{dt} g(\nabla_X X(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\
 &= - \int_0^1 g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) dt + g(\nabla_X X(t), \dot{\gamma}(t)) \Big|_0^1 \\
 &= - \int_0^1 g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) dt
 \end{aligned}$$

pois $X(0) = 0$ e $\nabla_X X(1) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \dot{\gamma} = 0$, visto que τ é uma geodésica e $\gamma_s(0) = p$ para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.

Como $K(\dot{\gamma}(t), X(t)) = \frac{g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t))}{Q(X(t), \dot{\gamma}(t))}$, $Q(X(t), \dot{\gamma}(t)) > 0$ e $K_r \leq 0$, então $g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) \leq 0$. Logo, pela expressão do hessiano obtida, obtem-se

$$\begin{aligned} H^F(x)[X, X] &= 2 \int_0^1 (\|\dot{X}(t)\|^2 + g(\nabla_X \nabla_X \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))) dt \\ &= 2 \int_0^1 \|\dot{X}(t)\|^2 - g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), X(t)) dt \\ &= 2 \int_0^1 \|\dot{X}(t)\|^2 dt + 2 \int_0^1 g(R(X(t), \dot{\gamma}(t))X(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\ &\geq 2 \int_0^1 \|\dot{X}(t)\|^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Nestas condições, $H^F(x)[X, X] \geq 0$ para todo $X \neq 0$ e, portanto, F é, pelo menos, convexa.

Se $\dot{X}(0) = 0$ e $X(0) = 0$, então $X(t) = 0$. $H^F(x)[X, X] > 0$ se $X \neq 0$. Na verdade, $H^F(p)[X, X] = 2g(X, X)$.

De fato, se $X \in T_p \mathcal{M}$ e se γ for uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$, então

$$\text{dist}(p, \gamma(t)) = \int_0^t \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))} ds = \|\dot{\gamma}(t)\|t = \|X\|t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} H^F(x)[X, X] &= \frac{d^2}{dt^2} (F \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (\text{dist}(p, \gamma(t))^2) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} (\|X\|^2 t^2) \Big|_{t=0} = 2\|X\|^2 \\ &= 2g(X, X). \end{aligned}$$

Isto vale, independentemente de p ser um pólo ou não.

Portanto, $H^F(x)[X, X] > 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$, com $X \neq 0$.

Portanto, F é estritamente convexa. $\square$

Observe-se que no exemplo acima, pode-se substituir curvatura seccional por curvatura radial.

Exemplo 2.113. (Exemplo de Bishop e O'Neill).

Sejam $(\mathcal{M}, g)$ um espaço euclidiano ($K = 0$) e $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável. A matriz $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ é positiva semidefinida e as

1-formas $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_j$, $i = 1, \dots, n$ são exatas.

Por outro lado, seja (F_{ij}) uma matriz positiva semidefinida e simétrica de funções tais que $F_{ij} dx_j$, $j = 1, \dots, n$, sejam exatas. Então a função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{x_0 x} \left(\int_{x_0 x} F_{ij} dx_j \right) dx_i + a_i x_i + b$ é solução da equação $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F = F_{ij}$, logo, é convexa.

Exemplo 2.114. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, e com curvatura seccional $K \leq 0$, e $dist$ a função distância induzida pela g . Seja $A \subset \mathcal{M}$ uma subvariedade fechada totalmente convexa. Então a função $F_A : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_A(x) = dist(x, A)^2$ é convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Como $(\mathcal{M}, g)$ é completa, simplesmente conexa e $K \leq 0$, então, pelo teorema de Hopf-Rinow (pg. 65), existem segmentos geodésicos que incidem em quaisquer dois pontos de $\mathcal{M}$. Seja $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ o único segmento geodésico minimizante de x a A . Então $F_A(x) = L(\gamma_x)^2$.

Seja γ a geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X \in T_x \mathcal{M} \setminus \{0\}$.

$H^{F_A}(x)[X, X] = L''(0)$, a segunda variação do quadrado do comprimento de arco relativamente à variação $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, da geodésica γ , dada por $\alpha(0, t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, $\alpha(s, 0) = x$ para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.

Seja $L(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right|^2 dt$, $s \in]-\epsilon, \epsilon[$. Seja $V(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, t)|_{s=0}$.

$F_A(x) = \frac{1}{2} L(\gamma_x) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\dot{\gamma}_x(s), \dot{\gamma}_x(s)) ds = E(0)$.

$$\begin{aligned} H^{F_A}(x)[X, X] &= (L^2)''(0) \\ &= 2 \int_0^1 \left[\left\| \frac{D}{dt} V(t) \right\|^2 + g(R(\dot{\gamma}(t), V(t))\dot{\gamma}(t), V(t)) \right] dt \\ &\quad - g\left(\frac{D}{\partial s} V, \dot{\gamma}\right)\Big|_{t=0} + g\left(\frac{D}{\partial s} V, \dot{\gamma}\right)\Big|_{t=1} \\ &\geq \int_0^1 \left[\left\| \frac{DV}{dt} \right\|^2 + g(R(\dot{\gamma}(t), V(t))\dot{\gamma}(t), V(t)) \right] dt \geq 0 \end{aligned}$$

pois $K \leq 0$.

Portanto, F_A é convexa. $\square$

Observação 2.115. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional $K \leq 0$, e $A, B \subset \mathcal{M}$ subconjuntos fechados totalmente convexos. Então

(1) A função $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $F(x, y) = dist(x, y)^2$ é convexa de classe C^∞ .

(2) $A \times B \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ é totalmente convexo.

(3) Se existir, o mínimo de F é assumido em um ponto $(x, y) \in A \times B$ tal que o segmento geodésico γ_{xy} que ligue x e y incida perpendicularmente em A e em B (ver [23] pg. 107).

Lema 2.116. (Exemplo de Greene e Shiohama)

Para cada variedade não-compacta (paracompacta) de dimensão n , existe uma métrica riemanniana completa g em $\mathcal{M}$ e uma função diferenciável não-constante $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que F seja convexa relativamente a g .

DEMONSTRAÇÃO. Seja um aberto $U \subset \mathcal{M}$ com fronteira diferenciável tal que U seja difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e $\overline{U}$ seja difeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n \in \mathbb{R} \mid x_n \geq 0\}$.

Se $H : \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n \in \mathbb{R} \mid x_n \geq 0\} \mapsto \overline{U}$ for um difeomorfismo, então a função

$$F(p) = \begin{cases} 0, & p \in (\mathcal{M} \setminus \overline{U}) \cup H(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n \leq 1\}) \\ \int_0^{x_n-1} \exp(-\frac{1}{t^2}) dt, & \text{se } p \in H(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 1\}) \end{cases}$$

é diferenciável. Além disso, F é convexa relativamente a qualquer métrica riemanniana completa em $\mathcal{M}$ que possua a propriedade de H em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n \in \mathbb{R} \mid x_n > \frac{1}{2}\}$ ser isometria em relação à métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e à métrica $g|_{H(\mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n \in \mathbb{R} \mid x_n > \frac{1}{2}\})}$. $\square$

Exemplo 2.117. (Função de Rosenbrock)

Seja $(\mathbb{R}^2, g_0)$, e g_0 a métrica euclidiana. Com a parametrização $X(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$ tem-se a base natural

$$\begin{cases} e_1 = \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) = (1, 0) \\ e_2 = \frac{\partial X}{\partial y_2}(y_1, y_2) = (0, 1) \end{cases}.$$

A função de Rosenbrock, $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, definida por $F(y_1, y_2) = 100y_2^2 + y_1^2$ é convexa, pois as geodésicas são dadas por $\gamma(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)$ e

$$\begin{aligned} \phi(t) &= F(\gamma(t)) = 100(a_2t + b_2)^2 + (a_1t + b_1)^2 \\ \phi'(t) &= 200a_2(a_2t + b_2) + 2a_1(a_1t + b_1) \\ \phi''(t) &= 200a_2^2 + 2a_1^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Seja a mudança de variáveis

$$\begin{cases} y_1 = 1 - x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1^2 \end{cases}.$$

Tem-se a parametrização

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) &= X(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) \\ &= X(1 - x_1, x_2 - x_1^2) = (1 - x_1, x_2 - x_1^2) \end{aligned}$$

com a sua correspondente base natural

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1}(x_1, x_2) = (-1, -2x_1) \\ f_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (0, 1) \end{cases}.$$

Logo, a métrica g_0 é transformada na métrica g dada por

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 + 4x_1^2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A variedade $(\mathbb{R}^2, g_0)$ é deste modo, transformada na variedade $(\mathbb{R}^2, g)$.

Uma geodésica em $(\mathbb{R}^2, g)$ é dada por

$$\gamma(t) = Z(x_1(t), x_2(t)) = (1 - x_1(t), x_2(t) - x_1(t)^2) .$$

Derivando-se, obtem-se

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (-x_1'(t), x_2'(t) - 2x_1(t)x_1'(t)) \\ \ddot{\gamma}(t) &= (-x_1''(t), x_2''(t) - 2x_1'(t)^2 - 2x_1(t)x_1''(t)) .\end{aligned}$$

Se γ for geodésica, então $g(\ddot{\gamma}(t), f_1) = g(\ddot{\gamma}(t), f_2) = 0$, logo, $g(\ddot{\gamma}(t), e_1) = g(\ddot{\gamma}(t), e_2) = 0$. Portanto,

$$\begin{cases} x_1'' = 0 \\ x_2''(t) - 2(x_1'(t))^2 = 0 . \end{cases}$$

Deste sistema, obtem-se que $x_1(t) = a + bt$ e $x_2(t) = b^2t^2 + ct + d$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (1 - a - bt, b^2t^2 + ct + d - (a^2 + b^2t^2 + 2abt)) \\ &= (1 - a - bt, (c - 2ab)t + d - a^2) .\end{aligned}$$

Seja $F(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= F(\gamma(t)) = 100(x_2(t) - x_1(t)^2)^2 + (1 - x_1(t))^2 \\ \phi'(t) &= 200(x_2(t) - x_1(t)^2)(x_2'(t) - 2x_1(t)x_1'(t)) - 2(1 - x_1(t))x_1'(t) \\ \phi''(t) &= 200[(x_2' - 2x_1x_1')(x_2' - 2x_1x_1') + (x_2 - x_1^2)(x_2'' - 2x_1'^2 - 2x_1x_1'')] \\ &\quad + 2x_1^2 - 2(1 - x_1)x_1'' \\ &= 200(c - 2ab)^2 + 2b^2 \geq 0 .\end{aligned}$$

Portanto, F é convexa em $(\mathbb{R}^2, g)$.

2.9. Função de Busemann

Em uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ completa, não compacta, com curvatura seccional $K \geq 0$, pode-se construir uma função convexa, como limite de funções associadas a uma coleção de conjuntos fechados cuja distância a um ponto fixado divirja para o infinito. A função de Busemann relativa a um raio γ que parta de um ponto $p \in \mathcal{M}$ é construída a partir da coleção de fechados $\{\gamma(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, sendo ainda provada a sua convexidade. Com um pouco mais de esforço, prova-se a convexidade estrita da função de Busemann para $K > 0$, que é exatamente o tipo de função contemplada nos teoremas de finitude do próximo capítulo.

Definição 2.118. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de funções a valores complexos em um espaço métrico M com função distância ρ . Diz-se que $\mathcal{F}$ é *equicontínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo par de pontos $x, y \in M$ tal que $\rho(x, y) < \delta$.

Diz-se que $\mathcal{F}$ é *pontualmente limitada* se, para todo $x \in M$ existir $c(x) \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < c(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

O teorema de Arzela-Ascoli, a seguir, é utilizado para se provar a existência de uma seqüência conveniente que será utilizada para se definir uma função convexa, e a própria função de Busemann.

Teorema de Arzela-Ascoli 2.119. *Suponha-se que $\mathcal{F}$ seja uma coleção equicontínua, pontualmente limitada de funções a valores complexos definidas em um espaço métrico M , e que M contenha um subconjunto enumerável e denso E . Nestes termos, toda seqüência $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}$ contém uma subseqüência que converge uniformemente em todo subconjunto compacto de M .*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [20].

Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa e não-compacta, e $\{C_t\}_{t \in I}$ uma coleção de subconjuntos fechados tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(p, C_t) = +\infty$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de índices ilimitado superiormente, e $p \in \mathcal{M}$ um ponto fixado.

Sejam $F_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in I$, definidas por $F_t(x) = \text{dist}(p, C_t) - \text{dist}(x, C_t)$. As funções F_t são lipschitzianas, com constante de Lipschitz igual a 1, pois supondo-se, sem prejuízo à generalidade, que $\text{dist}(x, C_t) = \text{dist}(x, p_1) \geq \text{dist}(y, p_2) = \text{dist}(y, C_t)$, tem-se

$$\begin{aligned} |F_t(x) - F_t(y)| &= |\text{dist}(p, C_t) - \text{dist}(x, C_t) - \text{dist}(p, C_t) + \text{dist}(y, C_t)| \\ &= |\text{dist}(y, C_t) - \text{dist}(x, C_t)| = |\text{dist}(y, p_2) - \text{dist}(x, p_1)| \\ &\leq |\text{dist}(y, p_1) - \text{dist}(x, p_1)| \leq |\text{dist}(y, x) + \text{dist}(x, p_1) - \text{dist}(x, p_1)| \\ &= \text{dist}(x, y) . \end{aligned}$$

Além disso, para cada $x \in \mathcal{M}$ tem-se $|F_t(x)| \leq \text{dist}(p, x)$, pois

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \text{dist}(p, C_t) - \text{dist}(x, C_t) = \text{dist}(p, C_t) - \text{dist}(x, q_t) \\ &\leq \text{dist}(p, q_t) - \text{dist}(x, q_t) \leq \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q_t) - \text{dist}(x, q_t) \\ &= \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, C_t) - \text{dist}(x, C_t) = \text{dist}(p, x) . \end{aligned}$$

sendo $q_t \in C_t$ um ponto tal que $\text{dist}(x, C_t) = \text{dist}(x, q_t)$.

Logo, $\{F_t\}_{t \in I}$ é uma coleção equicontínua e pontualmente limitada em subconjuntos compactos. Pelo teorema de Arzela-Ascoli, existe uma subseqüência $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da coleção $\{F_t\}_{t \in I}$ que converge a uma função contínua $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo a convergência uniforme em compactos de $\mathcal{M}$.

Definição 2.120. Sejam $X \in T_x \mathcal{M}$, com $\|X\| = 1$ e $\gamma :]-1, 1[\rightarrow A$ um segmento geodésico tal que $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = X$, sendo $A \subset \mathcal{M}$ um subconjunto totalmente convexo. Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Sejam definidos, então

$$\begin{aligned} CF(x, X) &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(\gamma(0))] \\ CF(x) &= \inf_{\|X\|=1} CF(x, X) . \end{aligned}$$

Lema 2.121. *Seja $X \in T_x \mathcal{M}$, $\|X\| = 1$ e $\gamma :]-1, 1[\mapsto A$ um segmento geodésico tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Sejam A um subconjunto aberto totalmente convexo, e $F : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em torno de $x \in A$. Então*

$$CF(x, X) = H^F(x)[X, X] \text{ e}$$

$$CF(x) = \min_{\|X\|=1} H^F(x)[X, X].$$

DEMONSTRAÇÃO. Considerando-se as fórmulas de Taylor

$$\begin{cases} (F \circ \gamma)(t) = (F \circ \gamma)(0) + t(F \circ \gamma)'(0) + \frac{t^2}{2}(F \circ \gamma)''(0) + o(3), \\ (F \circ \gamma)(-t) = (F \circ \gamma)(0) - t(F \circ \gamma)'(0) + \frac{t^2}{2}(F \circ \gamma)''(0) + o(3), \end{cases}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} CF(x, X) &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [(F \circ \gamma)(t) + (F \circ \gamma)(-t) - 2(F \circ \gamma)(0)] \\ &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left[(F \circ \gamma)(0) + t(F \circ \gamma)'(0) + \frac{t^2}{2}(F \circ \gamma)''(0) \right. \\ &\quad \left. + (F \circ \gamma)(0) - t(F \circ \gamma)'(0) + \frac{t^2}{2}(F \circ \gamma)''(0) - 2(F \circ \gamma)(0) + o(3) \right] \\ &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [t^2(F \circ \gamma)''(0)] = (F \circ \gamma)''(0) = H^F(x)[X, X] \\ CF(x) &= \inf_{\|x\|=1} CF(x, X) = \inf_{\|X\|=1} (F \circ \gamma)''(0) \\ &= \min_{\|X\|=1} H^F(x)[X, X]. \end{aligned}$$

□

Lema 2.122. $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $CF(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $F : A \mapsto \mathbb{R}$ for convexa, então

$F \circ \gamma : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ é convexa, i.e.,

$(F \circ \gamma)(\lambda t + (1 - \lambda)s) \leq \lambda(F \circ \gamma)(t) + (1 - \lambda)(F \circ \gamma)(s)$ para todo par $t, s \in [-1, 1]$ e $\lambda \in [0, 1]$, sendo γ uma geodésica em $(\mathcal{M}, g)$.

Ao se fixar $\lambda = \frac{1}{2}$ e $t + s = 0$, obtem-se

$$F(\gamma(0)) = (F \circ \gamma) \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(-t) \right) \leq \frac{1}{2}(F(\gamma(t)) + \frac{1}{2}F(\gamma(-t))).$$

Logo,

$$2F(\gamma(0)) \leq F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) \text{ para todo } t \in [-1, 1]$$

para toda geodésica γ . Logo, $CF(x, X) \geq 0$, sendo $x = \gamma(0)$ e $X = \dot{\gamma}(0)$.

Portanto, $CF(x) \geq 0$.

Suponha-se que $CF(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Seja $\psi(t) = (F \circ \gamma)(t)$, sendo γ uma geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. ψ é contínua como composta de funções contínuas.

Como $CF(x) \geq 0$, então $CF(x, X) \geq 0$ e, portanto,
 $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h) + \psi(-h) - 2\psi(0)}{h^2} \geq 0$. Logo, por reparametrização, obtem-se que
 $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h) + \psi(t-h) - 2\psi(t)}{h^2} \geq 0$.

Como $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h) + \psi(t-h) - 2\psi(t)}{h^2} \geq 0$ em $[-1, 1]$,
então, pelo lema 2.57 (pg. 43), F é convexa. $\square$

Definição 2.123. Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, sendo
 $A \subset \mathcal{M}$ totalmente convexo. Uma função $\bar{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$ é um *suporte* para
a F em $x \in \mathcal{M}$ se, e somente se, $\bar{F}$ for contínua numa vizinhança aberta V
de x , $\bar{F}(x) = F(x)$ e $\bar{F}(z) \leq F(z)$ para todo $z \in A$.

Lema 2.124. Se $\bar{F}$ for um suporte para a F em x , então
 $C\bar{F}(x) \leq CF(x)$. Se, em todo ponto $x \in A$, F admitir uma função convexa
que lhe seja suporte, então F é convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma :]-1, 1[\rightarrow A$ um segmento geodésico tal que
 $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = X$ e $\|\dot{\gamma}(0)\| = 1$. Como $\bar{F} \leq F$ e $\bar{F}(x) = F(x)$, então

$$\begin{aligned} CF(x, X) - C\bar{F}(x, X) &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(x)] \\ &\quad - \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [\bar{F}(\gamma(t)) + \bar{F}(\gamma(-t)) - 2\bar{F}(x)] \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(x)] \\ &\quad - \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} [F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(x)] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $CF(x, X) \geq C\bar{F}(x, X)$ para todo $X \in T_x A$.

Suponha-se que em cada ponto $x \in \mathcal{M}$, exista uma função convexa $\bar{F}$
que sirva de suporte para a F . Pelo lema 2.122, tem-se que
 $C\bar{F}(x) \geq 0$. Logo, para todo ponto $x \in \mathcal{M}$ existe uma função $\bar{F}$ tal que
 $CF(x) \geq C\bar{F}(x) \geq 0$.

Portanto, pelo lema 2.122, F é convexa. $\square$

Portanto, para se provar que uma função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, basta,
para cada $x \in \mathcal{M}$, encontrar uma função convexa que sirva de suporte para
a F .

Lema 2.125. Sejam $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções contínuas que
converja uniformemente a F e $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais que
converja a ϵ . Se $CF_n \geq \epsilon_n$, então $CF \geq \epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam fixados $x \in \mathcal{M}$, $X \in T_x \mathcal{M}$ e uma geodésica
 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ tais que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X$.

Por definição,
 $CF_n(x, X) = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \{F_n(\gamma(t)) + F_n(\gamma(-t)) - 2F_n(x)\}$. Como as F_n
são contínuas, então $\phi(t) = \frac{F_n(\gamma(t)) + F_n(\gamma(-t)) - 2F_n(x)}{t^2}$, $t \neq 0$, é contínua, logo,

existe um número real $\eta > 0$ e um aberto $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, tal que $F_n(\gamma(t)) + F_n(\gamma(-t)) - 2F_n(x) > t^2(CF_n(x, X) - \eta) \geq t^2(\epsilon_n - \eta)$.

Como $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a F e $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ϵ , então, por passagem ao limite, obtem-se

$$F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(x) \geq t^2(\epsilon - \eta).$$

Como η pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, então $\frac{1}{t^2} \{F(\gamma(t)) + F(\gamma(-t)) - 2F(x)\} \geq \epsilon$, logo, $CF(x, X) \geq \epsilon$. Portanto, $CF(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. $\square$

Lema 2.126. *Seja $\gamma : [0, +\infty[\mapsto \mathcal{M}$ o raio tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Então, $(F \circ \gamma)(t) = t + F(x)$, para todo $t \in [0, +\infty[$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, C_n), \text{ então } (F \circ \gamma)(t) - F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\text{dist}(x, C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n)].$$

Seja fixado t . Pela definição de γ , existe uma seqüência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty[$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t_n) = \gamma(t)$. Como as geodésicas γ_n são normalizadas, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) &= L(\gamma_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) \\ &= L(\gamma_n|_{[0, t_n]}) + L(\gamma_n|_{[t_n, L_n]}) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) \\ &= t_n + \text{dist}(\gamma_n(t_n), C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) \end{aligned}$$

sendo $L_n = \text{dist}(x, p_n) = \text{dist}(x, C_n)$. Logo, $\text{dist}(x, C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) - t_n = \text{dist}(\gamma_n(t_n), C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n)$.

Logo,

$$\begin{aligned} |(F \circ \gamma)(t) - F(x) - t| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\text{dist}(x, C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n) - t_n| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\text{dist}(\gamma_n(t_n), C_n) - \text{dist}(\gamma(t), C_n)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |\text{dist}(\gamma_n(t_n), \gamma(t))| = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(F \circ \gamma)(t) = F(x) + t$. $\square$

Lema 2.127. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $D = \{x \in \mathcal{M} \mid F(x) < a\}$. Então, para todo $x \in D$, tem-se que $F(x) = a - \text{dist}(x, \partial D)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja fixado $x \in D$ e seja $F(x) = b$. Tem-se de provar que $a - b = \text{dist}(x, \partial D)$.

$$a - b \leq \text{dist}(x, \partial D) :$$

Escolha-se $y \in \partial D$ tal que $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, \partial D)$. Por definição de F_n , existe $z_n \in C_n$ tal que $\text{dist}(y, C_n) = \text{dist}(y, z_n)$. Deste modo,

$F_n(y) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(y, z_n)$ e $F_n(x) \geq \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, z_n)$.
Logo,

$$\begin{aligned}
 a - b &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n(y) - F_n(x)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} ((\text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(y, z_n)) - (\text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, z_n))) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{dist}(x, z_n) - \text{dist}(y, z_n)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{dist}(x, z_n) - \text{dist}(y, z_n)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z_n) - \text{dist}(y, z_n)) \\
 &= \text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, \partial D) .
 \end{aligned}$$

$a - b \geq \text{dist}(x, \partial D)$:

Sejam γ um raio que parta de x como no lema 2.126, e $y_0 = \gamma(a - b)$.

Então, pelo lema 2.126, $F(y_0) = a$, e, como γ é um raio, tem-se que $\text{dist}(x, y_0) = a - b$.

$F(y_0) = F(\gamma(a - b)) = a - b + F(x) = a - b + b = a$, o que implica que $y_0 \in \partial D$, logo, $\text{dist}(x, \partial D) \leq \text{dist}(x, y_0) = a - b$. $\square$

Lema 2.128. *Sejam $p \in \mathcal{M}$, $C \subset \mathcal{M}$ um subconjunto fechado, $x \in \mathcal{M}$ um ponto fixado, e $\gamma : [0, L] \mapsto \mathcal{M}$ um segmento geodésico minimizante normalizado que ligue x e $z \in C$. Seja $\zeta :] - 1, 1[\mapsto \mathcal{M}$ um segmento geodésico normalizado, com $\zeta(0) = x$. Seja $V(t)$, $t \in [0, L]$, o transporte paralelo do vetor $X = \dot{\zeta}(0)$ ao longo de γ . Seja $W(t) = (1 - \frac{t}{L}) V(t)$. Seja $\alpha : [0, L] \times] - \delta, \delta[\mapsto \mathcal{M}$ a variação de γ relativa ao campo variacional W tal que $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$, $\alpha(0, s) = \zeta(s)$, $\alpha(L, s) = z$, e $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, s)|_{s=0} = W(t)$. Seja $f :] - \delta, \delta[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \text{dist}(p, C) - \int_0^L \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right\| dt$. Nestas condições,*

$$f''(0) = \int_0^L \left[g(R(\dot{\gamma}(t), W(t))W(t), \dot{\gamma}(t)) - \|\dot{W}(t)\|^2 + \left(\frac{d}{dt} g(W(t), \dot{\gamma}(t)) \right)^2 \right] dt.$$

DEMONSTRAÇÃO. Derivando-se $f(s)$, obtem-se

$$\begin{aligned}
 f'(s) &= -\frac{d}{ds} \int_0^L g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= -\int_0^L \frac{g \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)}{g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)^{\frac{1}{2}}} dt .
 \end{aligned}$$

Derivando-se $f'(s)$, obtem-se

$$\begin{aligned}
 f''(s) &= - \int_0^L \left[g \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right) g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad + g \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right) g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left. - \frac{g \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right) g \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right)}{\left(g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right) \right)^{\frac{3}{2}}} \right] dt . \\
 f''(0) &= - \int_0^L \left[(g(\nabla_W \nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + g(\nabla_W \dot{\gamma}, \nabla_W \dot{\gamma})) g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - g(\nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) g(\nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{-\frac{3}{2}} \right] dt \\
 &= \int_0^L \left[-g(\nabla_W \nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - g(\nabla_{\dot{\gamma}} W, \nabla_{\dot{\gamma}} W) + g(\nabla_{\dot{\gamma}} W, \dot{\gamma})^2 \right] dt \\
 &= \int_0^L \left[-g(\nabla_W \nabla_{\dot{\gamma}} W, \dot{\gamma}) - \|\dot{W}\|^2 + \left(\frac{d}{dt} g(W, \dot{\gamma}) \right)^2 \right] dt \\
 &= \int_0^L \left[-g(\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_W W + R(W, \dot{\gamma}) W, \dot{\gamma}) - \|\dot{W}\|^2 + \left(\frac{d}{dt} g(W, \dot{\gamma}) \right)^2 \right] dt \\
 &= \int_0^L \left[g(R(\dot{\gamma}, W) W, \dot{\gamma}) - \|\dot{W}\|^2 + \left(\frac{d}{dt} g(W, \dot{\gamma}) \right)^2 \right] dt .
 \end{aligned}$$

□

Proposição 2.129. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa, não-compacta e com curvatura seccional $K \geq 0$. Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção de subconjuntos fechados de $\mathcal{M}$, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(p, C_n) = +\infty$. Sejam $F_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $F_n(x) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, C_n)$. Nestas condições, considerando-se uma subsequência se necessário, a função $F = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ é convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Será mostrado que $CF(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Pelo teorema de Arzela-Ascoli, podemos considerar $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente convergente em compactos.

Seja B uma bola aberta que contenha x , que pode ser definida pois $\mathcal{M}$ é um espaço métrico com a distância induzida pela métrica g .

Seja $\zeta :]-a, a[\rightarrow B$ um segmento geodésico normalizado tal que $\zeta(0) = x$. Como F_n converge uniformemente a F em B , então, pelo lema 2.125 (pg. 77) e pela definição de CF , é suficiente provar a existência de uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que ϵ_n dependa somente de B , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$, e $C(F_n \circ \zeta) \geq \epsilon_n$, para todo segmento geodésico normalizado ζ em B .

Fixe-se um $n \in \mathbb{N}$ e escolha-se $\zeta :] - a, a[\mapsto B$ tal que $\zeta(0) = x$. Escolha-se $p_n \in C_n$ tal que $\text{dist}(x, p_n) = \text{dist}(x, C_n) = L_n$. A função $F_n \circ \zeta$ é dada por $(F_n \circ \zeta)(s) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(\zeta(s), C_n)$ ($p_n \in C_n$ pois C_n é fechado). Defina-se a função $f :] - 1, 1[\mapsto \mathbb{R}$ por $f(s) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(\zeta(s), p_n)$. A função f é um suporte para $F_n \circ \zeta$ em $s = 0$, pois $f(0) = \text{dist}(p, C_n) - \text{dist}(x, p_n) = F_n(\zeta(0))$ e $f(s) \leq (F_n \circ \zeta)(s)$ visto que $\text{dist}(\zeta(s), p_n) \geq \text{dist}(\zeta(s), C_n)$. Pelo lema 2.124 (pg. 77), tem-se que $Cf(0) \leq C(F_n \circ \zeta)(0)$.

Um limite inferior de $Cf(0)$ será calculado por meio de uma função diferenciável $\bar{f}$ que seja um suporte para a f em 0 e, então, encontrando-se uma estimativa para $\bar{f}''(0)$.

Construção da função de suporte $\bar{f}$:

Seja $\gamma_n : [0, L_n] \mapsto \mathcal{M}$ um segmento geodésico normalizado que ligue x e p_n , sendo L_n o comprimento de γ_n . γ_n existe pois $(\mathcal{M}, g)$ é completa. Ambos $\dot{\gamma}_n$ e $\dot{\zeta}$ são vetores com norma um. Seja $V(t)$ o transporte paralelo de $\dot{\zeta}(0)$ na direção de $\dot{\gamma}_n(t)$, ao longo de γ_n em $t \in [0, L_n]$. Para $W(t) = \left(1 - \frac{t}{L_n}\right) V(t)$ tem-se $W(0) = \dot{\zeta}(0)$ e $W(L_n) = 0$.

Seja α a variação da γ_n que tenha $W(t)$ como campo variacional, i.e., $\alpha : [0, L_n] \times] - \delta, \delta[\mapsto \mathcal{M}$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\begin{cases} (i) \alpha(t, 0) = \gamma_n(t), \text{ para todo } t \in [0, L_n]; \\ (ii) \alpha(0, s) = \zeta(s), \text{ para todo } s \in] - \delta, \delta[\cap] - a, a[; \\ (iii) \alpha(L_n, s) = p_n, \text{ para todo } s \in] - \delta, \delta[; \\ (iv) \text{ para cada } t \in [0, L_n], \text{ o vetor tangente à curva } s \mapsto \alpha(t, s) \\ \text{ em } s = 0 \text{ é } W(t). \end{cases}$$

Tal variação pode ser obtida, por exemplo, com a aplicação exponencial ao longo de γ_n .

Defina-se $\bar{f} :] - \delta, \delta[\mapsto \mathbb{R}$ por $\bar{f}(s) = \text{dist}(p, C_n) - \int_0^{L_n} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right\| dt$.

Segue-se que $\bar{f} \leq f$ em $] - \delta, \delta[\cap] - a, a[$ e $\bar{f}(0) = f(0)$ devido a (i). Logo, $\bar{f}$ é uma função que serve de suporte para a f em $s = 0$. Utilizando-se os lemas 2.124 (pg. 77) e 2.121 (pg. 76), obtem-se que $\bar{f}''(0) = C\bar{f}(0) \leq Cf(0)$.

Para provar que $CF(x) \geq 0$, é suficiente mostrar que existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\bar{f}''(0) \geq \epsilon_n$, ϵ_n só dependa de B e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$.

Pelas definições de $\bar{f}$ e α , observa-se que $-\bar{f}''$ é exatamente a segunda variação do comprimento de arco da coleção de geodésicas induzida por $W(t)$. Logo, pelo lema 2.128, tem-se

$$\bar{f}''(0) = \int_0^{L_n} \left[g(R(\dot{\gamma}_n, W)W, \dot{\gamma}_n) - \|\dot{W}\|^2 + \left(\frac{d}{dt}(g(W, \dot{\gamma}_n)) \right)^2 \right] dt,$$

sendo $\dot{W} = \nabla_{\dot{\gamma}_n} W$. Por hipótese, $g(R(\dot{\gamma}_n, W)W, \dot{\gamma}_n) \geq 0$, pois a curvatura seccional $K \geq 0$ e $g(\dot{\gamma}_n, \dot{\gamma}_n)g(W, W) - g(\dot{\gamma}_n, W)^2 \geq 0$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, e pela definição de curvatura seccional (pg. 23).

Como V é um transporte paralelo ao longo de γ_n , então $\dot{V} = \nabla_{\dot{\gamma}_n} V \equiv 0$.
 $\dot{W} = \nabla_{\dot{\gamma}_n} W = \dot{V}(t) \left(1 - \frac{t}{L_n}\right) - \frac{1}{L_n} V(t)$. Como $\|V\| = 1$, então
 $\|\dot{W}(t)\|^2 = \frac{1}{L_n^2}$.

Como $\|\dot{W}\|^2 = \frac{1}{L_n^2}$, então $\bar{f}''(0) \geq -\frac{1}{L_n}$.

Por hipótese, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(p, C_n) = +\infty$ o que implica que
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(x, C_n) = +\infty$.

Para cada ponto $x \in B$, tem-se $L_n \geq \text{dist}(B, C_n)$, com
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(B, C_n) = +\infty$.

Portanto, $\epsilon_n = -\frac{1}{\text{dist}(B, C_n)}$ é uma seqüência tal que $\bar{f}''(0) \geq -\frac{1}{L_n} \geq \epsilon_n$
e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$. Logo, $C(F_n \circ \zeta)(0) \geq Cf(0) \geq \bar{f}''(0) \geq \epsilon_n$. Como ζ
foi escolhido arbitrariamente, então $CF_n(x) \geq \epsilon_n$. Como x foi escolhido
arbitrariamente, então $CF_n(x) \geq \epsilon_n(x)$ para cada $x \in \mathcal{M}$. Portanto, pelo
lema 2.125 (pg. 77), obtem-se que $CF(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{M}$.

Portanto, F é convexa. $\square$

Observação 2.130. Se $K > 0$, então para cada $x \in \mathcal{M}$ existe uma
vizinhança compacta B de x e um aberto A , de modo que
 $x \in \text{int}(B) \subset A \subset \mathcal{M}$, tal que $K > \delta_B > 0$ em B . Nestes termos, F é
estritamente convexa. De fato, na demonstração da convexidade da F basta
considerar a seqüência $\epsilon_n = \delta_B - \frac{1}{\text{dist}(B, C_n)}$. $CF_n(x) \geq \epsilon_n$, com
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \delta_B > 0$, para todo segmento geodésico ζ contido em B , com
 $\zeta(0) = x$. Pelo lema 2.125 (pg. 77), conclui-se que $CF(x) > 0$ para todo
 $x \in \mathcal{M}$.

Exemplo 2.131. Função de Busemann.

Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa, conexa, não-compacta
e com curvatura seccional $K \geq 0$. Sejam $p \in \mathcal{M}$ e $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}$ um raio
com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, seja $C_t = \{\gamma(t)\}$. $\{C_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é
uma coleção de conjuntos fechados que contém uma seqüência, $\{\gamma(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$,
cuja distância a p diverge ao infinito. Nestas condições, pela proposição
2.129 (pg. 80), a seqüência $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,
 $F_n(x) = \text{dist}(p, \gamma(n)) - \text{dist}(x, \gamma(n)) = n - \text{dist}(x, \gamma(n))$ converge a uma
única função convexa $F(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \text{dist}(x, \gamma(t)))$. A função F é de-
nominada *função de Buseman* associada ao raio γ .

Observe-se que se $K > 0$, então a função de Busemann é estritamente
convexa.

A família $\{F_t\}_{t \in I}$ é uniformemente limitada nos subconjuntos limitados
de $\mathcal{M}$. Para os pontos x , $\gamma(s)$ e $\gamma(t)$, pela desigualdade triangular, tem-se

$$\text{dist}(x, \gamma(s)) + \text{dist}(\gamma(s), \gamma(t)) \geq \text{dist}(x, \gamma(t)).$$

Logo, para $t > s$, tem-se

$$\begin{aligned} F_t(x) - F_s(x) &= t - s + \text{dist}(x, \gamma(s)) - \text{dist}(x, \gamma(t)) \\ &= \text{dist}(\gamma(t), \gamma(s)) + \text{dist}(\gamma(s), x) - \text{dist}(x, \gamma(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

logo, a coleção $\{F_t\}_{t \in I}$ é crescente. Portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x) = F(x)$, e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos. Em particular, a função de Busemann é contínua. Observe-se que $F_t(\gamma(t)) = t$, e, para cada t fixado, o conjunto $F_t(x) = \text{constante}$ coincide com uma esfera geodésica do ponto $\gamma(t)$.

Exemplo 2.132. Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa, não-compacta com curvatura seccional $K > 0$. Seja fixado um ponto $p \in \mathcal{M}$. Seja B a classe dos raios que partam do ponto p . A função $b_s(x) = \sup_{\gamma \in B} \{b_\gamma(x) \mid \gamma \in B\}$ é uma função convexa, sendo b_γ a função de Busemann relativamente ao raio γ que parta de p .

Utilizando-se o fato que b_γ é convexa, a função b_s é convexa, pois o sup de funções convexas é convexa, como foi demonstrado na proposição 2.9 (pg. 30) da secção sobre funções convexas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.133. Função de Busemann no $\mathbb{R}^2$.

Seja o raio $\gamma(t) = (t, 0)$ que parte do ponto $p = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} F_t(x, y) &= \text{dist}(p, \gamma(t)) - \text{dist}((x, y), \gamma(t)) \\ &= t - \text{dist}((x, y), \gamma(t)) = t - \|(x - t, y)\| \\ &= t - \sqrt{(x - t)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_\gamma(x, y) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \sqrt{(x - t)^2 + y^2}) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - (t - x)) = x. \end{aligned}$$

Portanto, $b_\gamma(x, y) = x$ é a função de Busemann relativamente ao raio γ que parte de p .

Exemplo 2.134. Função de Busemann no $\mathbb{R}^n$.

Sejam $p = (0, \dots, 0)$ e o raio $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$ que parte de p .

$$F_t(x) = F_t(x_1, \dots, x_n) = \text{dist}(p, \gamma(t)) - \text{dist}(x, \gamma(t)) = t - \text{dist}(x, \gamma(t))$$

$$= t - \|(x_1 - t, x_2, \dots, x_n)\| = t - \sqrt{(x_1 - t)^2 + \sum_{j=2}^n (x_j)^2}$$

$$\begin{aligned} b_\gamma(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t - \sqrt{(x_1 - t)^2 + \sum_{j=2}^n (x_j)^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - (t - x_1)) = x_1. \end{aligned}$$

Portanto, $b_\gamma(x_1, \dots, x_n) = x_1$ é a função de Busemann relativamente ao raio γ que passa pelo ponto p .

Observe-se que, neste caso, existem infinitas funções de Busemann, o contrário do que ocorre no exemplo do cilindro, a seguir, que admite apenas uma função de Busemann.

Exemplo 2.135. Função de Busemann no cilindro.

Uma geodésica normalizada no cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com a métrica euclidiana induzida, é uma curva $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$ $t \in \mathbb{R}$. Logo, as geodésicas são retas se $a = 0$, círculos se $c = 0$ e $a \neq 0$, ou hélices se $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Destas, só as semi-retas são raios.

Sejam o ponto $p = (1, 0, 0) \in \mathcal{M}$ e $\gamma(t) = (1, 0, t)$, $t \in [0, +\infty[$ um raio que parte de p .

Neste caso

$$\begin{aligned} & \text{dist}((x, y, z), \gamma(t)) = \\ & = \text{dist}((x, y, z), (1, 0, t)) = \begin{cases} |z - t|, & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0 \\ |\arcsen(y)|, & \text{se } (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0) \text{ e } t = z \\ \frac{|t-z|\sqrt{a^2+c^2}}{|c|}, & \text{outros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} F_t(x, y, z) &= \text{dist}(p, \gamma(t)) - \text{dist}((x, y, z), \gamma(t)) = \text{dist}((0, 0, 0), (1, 0, t)) \\ &- \text{dist}((x, y, z), (1, 0, t)) = t - \text{dist}((x, y, z), (1, 0, t)), \end{aligned}$$

então, tem-se que

$$F_t(x, y, z) = \begin{cases} 2t - z, & \text{se } x = 1, y = 0 \text{ e } t \leq z \\ z, & \text{se } x = 1, y = 0 \text{ e } t > z \\ t - |\arcsen(y)|, & \text{se } (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0) \text{ e } t = z \\ t \left(1 + \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{|c|}\right) - \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{|c|}z, & \text{se } (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0) \text{ e } t \leq z \\ t \left(1 - \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{|c|}\right) + \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{|c|}z, & \text{se } (x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0) \text{ e } t > z. \end{cases}$$

Observe-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a = 0$. Como $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{|c|} = 1$, então, obtem-se que $b_\gamma(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x, y, z) = z$.

Portanto, a função de Busemann do cilindro relativamente ao raio γ que parte de p é $b_\gamma(x, y, z) = z$.

Definição 2.136. Um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é *irrotacional* em $(\mathcal{M}, g)$ se $g(\nabla_V X, W) - g(\nabla_W X, V) = 0$ para todo par $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Exemplo 2.137. A função energia $F(p) = \frac{1}{2}g(X(p), X(p))$ de um campo vetorial irrotacional X é convexa se, e somente se $g(R(X, Y)X, Y) \geq -g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_Y X, \nabla_Y X)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

DEMONSTRAÇÃO. Calculando-se o hessiano na direção de um campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, tem-se

$$H^F(p)[Y, Y] = \frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0}$$

sendo $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = Y(p)$. Logo,

$$\begin{aligned} H^F(p)[Y, Y] &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} g(X, X) \right) = \frac{d}{dt} (g(\nabla_Y X, X)) \\ &= \frac{d}{dt} (g(\nabla_X X, Y)) = g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) + g(\nabla_X X, \nabla_Y Y) \\ &= g(R(X, Y)X + \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} X, Y) + g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) \\ &= g(R(X, Y)X, Y) + g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_Y X, \nabla_X Y) \\ &\quad + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) + g(\nabla_Y X, \nabla_X Y) \\ &= g(R(X, Y)X, Y) + g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X). \end{aligned}$$

Logo, $H^F(p)[Y, Y] = g(R(X, Y)X, Y) + g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X)$.

Portanto, F é convexa se, e somente se

$$g(R(X, Y)X, Y) \geq -g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(\nabla_Y X, \nabla_Y X). \quad \square$$

Um tipo especial de campo irrotacional é o campo irrotacional concorrente.

Definição 2.138. Diz-se que um campo irrotacional $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é concorrente em $(\mathcal{M}, g)$ se $\nabla_Y X = Y$ para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Exemplo 2.139. A função energia $F(p) = \frac{1}{2}g(X(p), X(p))$ de um campo irrotacional concorrente é estritamente convexa.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} H^F(p)[Y, Y] &= \frac{d^2}{dt^2} (F \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} g(X, X) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (2g(\nabla_Y X, X)) = \frac{d}{dt} (g(X, Y)) \\ &= g(\nabla_Y X, Y) + g(X, \nabla_Y Y) \\ &= g(Y, Y) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, F é estritamente convexa. $\square$

Lema 2.140. Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo de Killing. Então, $g(\nabla_X \nabla_Z X, Z) = -g(\nabla_Z X, \nabla_X Z)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como X é de Killing, então $g(\nabla_Z X, Z) = -g(\nabla_Z X, Z)$, logo, $g(\nabla_Z X, Z) = 0$. Portanto, considerando-se a derivada covariante relativamente ao campo X , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g(\nabla_Z X, Z)) &= 0 \\ &= g(\nabla_X \nabla_Z X, Z) + g(\nabla_Z X, \nabla_X Z) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $g(\nabla_X \nabla_Z X, Z) = -g(\nabla_Z X, \nabla_X Z)$. $\square$

Exemplo 2.141. Energia de um campo de Killing.

Sejam $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo de Killing e $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ a função energia do campo de Killing, dada por $F(p) = \frac{1}{2}g(X(p), X(p))$. Se

$g(R(X, Z)X, Z) \leq g(\nabla_Z X, \nabla_Z X)$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, então F é uma função convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $S = \frac{1}{2}Z(Z(g(X, X))) + g(R(X, Z)X, Z)$.

Como X é um campo de Killing, então $g(\nabla_Z X, X) = -g(\nabla_X X, Z)$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}Z(2g(\nabla_Z X, X) + g(R(X, Z)X, Z)) \\ &= Z(-g(\nabla_X X, Z)) + g(R(X, Z)X, Z) \\ &= -g(\nabla_Z \nabla_X X, Z) - g(\nabla_X X, \nabla_Z Z) + g(R(X, Z)X, Z). \end{aligned}$$

Como $R(X, Z)X = \nabla_X \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_X X - \nabla_{[X, Z]}X$, então

$$\begin{aligned} S &= -g(-R(X, Z)X + \nabla_X \nabla_Z X - \nabla_{[X, Z]}X, Z) - g(\nabla_X X, \nabla_Z Z) \\ &\quad + g(R(X, Z)X, Z) \\ &= -g(\nabla_X \nabla_Z X, Z) + g(\nabla_{[X, Z]}X, Z) + 2g(R(X, Z)X, Z) \\ &= -g(\nabla_X \nabla_Z X, Z) - g(\nabla_Z X, [X, Z]) + 2g(R(X, Z)X, Z) \\ &= g(\nabla_Z X, \nabla_X Z) - g(\nabla_Z X, \nabla_X Z) + g(\nabla_Z X, \nabla_Z X) + 2g(R(X, Z)X, Z) \\ &= g(\nabla_Z X, \nabla_Z X) + 2g(R(X, Z)X, Z). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}Z(Z(g(X, X))) + g(R(X, Z)X, Z) = g(\nabla_Z X, \nabla_Z X) + 2g(R(X, Z)X, Z).$$

Portanto, $H^F[Z, Z] = g(\nabla_Z X, \nabla_Z X) + g(R(X, Z)X, Z)$.

Portanto, F é convexa se, e somente se,

$$g(R(X, Z)Z, X) \leq g(\nabla_Z X, \nabla_Z X).$$

Portanto, F é convexa se a curvatura relativa ao campo de Killing X e ao campo Z for limitado por $g(\nabla_Z X, \nabla_Z X)$. $\square$

Definição 2.142. Sejam $x \in \mathcal{M}$, com $X(x) \neq 0$, sendo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo de Killing. Por *curvatura de Killing* em $x \in \mathcal{M}$ entende-se o supremo da curvatura seccional dos vetores $\{X(x), Y(x)\}$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Lema 2.143. Se a curvatura de Killing for estritamente negativa, então F , a função energia do campo X , é estritamente convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Se a curvatura de Killing for negativa, então

$g(R(X, Y)Y, X) \leq 0$. Pelo exemplo acima, tem-se que

$H^F(p)[Y, Y] = g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) + g(R(X, Y)X, Y)$. Como $g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \geq 0$, então $H^F(p)[Y, Y] \geq 0$.

Se a curvatura Killing for estritamente negativa, então $H^F(p)[Y, Y] > 0$, logo, neste caso, F é estritamente convexa. $\square$

Em particular, F é convexa se a curvatura seccional $K \leq 0$, pois, $g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \geq 0$, logo, $g(R(X, Z)Z, X) \leq 0 \leq g(\nabla_Z X, \nabla_Z X)$, e as condições do exemplo acima estariam satisfeitas.

Definição 2.144. Diz-se que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é afim se $\nabla_Y \nabla_Z X = R(X, Y)Z$ para todo par $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Exemplo 2.145. A função energia $F(p) = \frac{1}{2}g(X(p), X(p))$ de um campo afim é convexa se, e somente se, $g(R(X, Y)X, Y) \leq g(\nabla_Y X, \nabla_Y X)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ um segmento geodésico tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = Y(p)$.

$$\begin{aligned} H^F(p)[Y, Y] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} (F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2}g(X, X) \right) = \frac{1}{2}(2g(\nabla_Y X, X)) \\ &= Y(g(\nabla_Y X, X)) = g(\nabla_Y \nabla_Y X, X) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \\ &= g(R(X, Y)Y, X) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) . \end{aligned}$$

Logo, $H^F(p)[Y, Y] \geq 0$ se, e somente se, $g(R(X, Y)Y, X) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \geq 0$. Portanto, F é convexa se, e somente se, $g(R(X, Y)X, Y) \leq g(\nabla_Y X, \nabla_Y X)$. $\square$

Observe-se que, neste caso, se $g(R(X, Y)X, Y) < g(\nabla_Y X, \nabla_Y X)$, então F é estritamente convexa.

Como $g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \geq 0$, então, se a curvatura seccional for negativa, a função F é, pelo menos, convexa. Se a curvatura seccional for estritamente positiva, então F é estritamente convexa, pois, neste caso, $H^F(p)[Y, Y] > 0$.

CAPÍTULO 3

Teoremas de Finitude

Neste capítulo são apresentados os resultados principais, concernente à finitude do número de geodésicas. O teorema 3.3 refere-se ao caso riemanniano, enquanto que o teorema 3.18 refere-se ao caso lorentziano estacionário.

3.1. Número de Geodésicas em Variedades Riemannianas

Nesta secção estudaremos finitude do número de geodésicas que incidam em um par genérico de pontos de uma variedade riemanniana completa e não-compacta. Neste contexto, podemos assumir como válido o teorema de Hopf-Rinow e utilizar as equivalências lá enunciadas para obter resultados subsidiários ao teorema principal. A demonstração do teorema principal desta secção foi decomposta em duas partes, registradas nas duas proposições que o precedem.

Proposição 3.1. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana completa e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $H^F(p)[X, X] > 0$ para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p M$, e que possua um ponto de mínimo não-degenerado. Nestes termos, todo segmento que ligue um par de pontos não-conjugados possui energia limitada por $c_0 \in \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam p e q dois pontos distintos não-conjugados. Provemos que existe uma constante $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < c_0$ para todo segmento geodésico γ que ligue p e q , isto é, que parta do ponto p e chegue ao ponto q .

Sabe-se que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ é constante pois

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Todos os segmentos geodésicos que liguem p e q estão contidos no compacto $F^d = \{x \in M \mid F(x) \leq d\}$, sendo $d = \max\{F(p), F(q)\}$, pois a função F é estritamente convexa e, portanto, a função composta $g(t) = (F \circ \gamma)(t)$ é estritamente convexa e, por isso, assume valor máximo necessariamente na fronteira do intervalo em que estiver definida, ou seja, F^d é um subconjunto totalmente convexo.

O conjunto F^d é compacto:

F^d é limitado, pois se F^d não fosse limitado, haveria uma seqüência de pontos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F^d$ com distância arbitrariamente elevada de um ponto p fixado. Suponha-se, por absurdo, que haja um tal seqüência. Como

$(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente completa, então, pelo teorema de Hopf-Rinow (pg. 65), $(\mathcal{M}, g)$ é geodesicamente conexa, portanto, existiria uma seqüência de segmentos geodésicos $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n : [0, L_n] \mapsto \mathcal{M}$, com $g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) = 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = +\infty$, que partiriam do ponto p e chegariam ao ponto $p_n \in F^d$. Os segmentos geodésicos z_n estariam contidos em F^d pois $g_n(t) = (F \circ z_n)(t)$ é estritamente convexa e, por isso, assume valor máximo em $t = 0$ e/ou $t = L_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 2.82 (pg. 53), tem-se que $\lim_{p_n \rightarrow +\infty} F(p_n) = +\infty$. Chega-se assim a uma contradição. Portanto, o conjunto F^d deve, a fortiori, ser limitado.

F^d é um conjunto fechado, pois é a imagem inversa do conjunto fechado $[F(m), d] \subset \mathbb{R}$ pela função contínua F , sendo $m \in \mathcal{M}$ o ponto de mínimo da F . Portanto, o conjunto F^d é compacto. Suponha-se, por absurdo, que exista uma seqüência de segmentos geodésicos $z_n : I \mapsto \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, sendo $I = [0, 1]$, com $z_n(0) = p$ e $z_n(1) = q$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) = +\infty$. Considere-se a seqüência de segmentos geodésicos com vetores tangentes unitários $w_n : [0, L_n] \mapsto \mathcal{M}$, definidos por $w_n(t) = z_n\left(\frac{t}{L_n}\right)$. Os vetores $\dot{w}_n$ são unitários, pois

$$\begin{aligned} g(\dot{w}_n(t), \dot{w}_n(t)) &= g\left(\frac{1}{L_n} \dot{z}_n\left(\frac{t}{L_n}\right), \frac{1}{L_n} \dot{z}_n\left(\frac{t}{L_n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{L_n^2} g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) = \frac{L_n^2}{L_n^2} = 1. \end{aligned}$$

A menos de subsequências, pelo teorema da dependência contínua de soluções dos dados iniciais para sistema de equações diferenciais ordinárias, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a uma geodésica w que ligue os pontos p e q .

Os segmentos geodésicos $w_n : [0, L_n] \mapsto F^d \subset \mathcal{M}$ estão contidas no compacto F^d , pois as imagens das z_n e das w_n coincidem. Observar que como $g(\dot{w}_n, \dot{w}_n)$ é constante, então

$$L_n^2 = L(w_n)^2 = \left(\int_0^{L_n} g(\dot{w}_n, \dot{w}_n) dt\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{g(\dot{z}_n, \dot{z}_n)} dt\right)^2 = g(\dot{z}_n, \dot{z}_n).$$

O limite uniforme da seqüência de geodésicas $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma geodésica $w : [0, +\infty[\mapsto \mathcal{M}$ com vetores tangentes unitários:

Sejam os pontos médios $p_n = w_n\left(\frac{L_n}{2}\right)$, e os vetores tangentes $v_n = \dot{w}_n\left(\frac{L_n}{2}\right)$ nestes pontos. A menos de subsequências, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são convergentes pela propriedade de Bolzano-Weierstrass: toda seqüência infinita num compacto admite subsequência convergente. Tem-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n\left(\frac{L_n}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p_0 = \gamma(a)$, sendo $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n}{2}$. Como $v_n = \dot{w}_n\left(\frac{L_n}{2}\right)$, a menos de subsequências, permanece dentro de um compacto de $T\mathcal{M}$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 \in T_{p_0}\mathcal{M}$. Como v_0 é o limite de uma seqüência que converge uniformemente, então $g(v_0, v_0) = 1$.

Cada w_n é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \nabla \dot{w}_n = 0 \\ w_n(\frac{L_n}{2}) = p_n \\ \dot{w}_n(\frac{L_n}{2}) = v_n . \end{cases}$$

Passando-se ao limite, sendo w o limite uniforme da seqüência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, w é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \nabla \dot{w} = 0 \\ w(a) = p_0 \\ \dot{w}(a) = v_0 . \end{cases}$$

que existe pelo teorema de existência e unicidade de solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Portanto, w é uma geodésica com vetor tangente unitário.

Pela proposição 2.76 (pg. 52), o ponto crítico da F é único. Como F^d é compacto, então o fibrado tangente

$TF_u^d = \{(p, v) \in TF^d \mid p \in F^d, v \in T_p F^d, \|v\| = 1\}$ é compacto e, portanto, a função $H^F : TF^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H^F(p, v) = H^F(p) \left[\frac{v}{\sqrt{g(v, v)}}, \frac{v}{\sqrt{g(v, v)}} \right]$

possui ponto de mínimo, $\lambda_0 > 0$, em TF_u^d .

Logo, $H^F(p, v) = H^F(p) \left[\frac{v}{\sqrt{g(v, v)}}, \frac{v}{\sqrt{g(v, v)}} \right] \geq \lambda_0 > 0$ para todo $p \in F^d$ e para todo $v \in T_p \mathcal{M}$. Logo, $H^F(p, v) = \frac{1}{g(v, v)} H^F(p)[v, v] \geq \lambda_0 > 0$. Portanto, $H^F(p)[v, v] \geq \lambda_0 g(v, v) > 0$ para todo $p \in F^d$ e todo $v \in T_p \mathcal{M}$.

Seja $\rho(t) = F(w(t))$.

$$\begin{aligned} \rho''(t) &= H^F(w(t))[\dot{w}(t), \dot{w}(t)] = g(H^F(w(t))\dot{w}(t), \dot{w}(t)) \geq \lambda_0 g(\dot{w}(t), \dot{w}(t)) \\ &= \lambda_0 > 0 \text{ para todo } t > 0. \end{aligned}$$

Como w_n está contida no compacto F^d , então w está contida em F^d . Mas isto é impossível pois a função $\rho(t) = (F \circ w)(t)$ é estritamente convexa (com um ponto de mínimo não-degenerado), logo, pela proposição 2.82 (pg. 53) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = +\infty$ e a geodésica w não pode estar contida num compacto. Chega-se assim a uma contradição. Portanto, $g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) < c_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma constante $c_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposição 3.2. *Sejam $p, q \in \mathcal{M}$, $p \neq q$. Com as condições da proposição 3.1, se existir uma seqüência infinita de segmentos geodésicos com energia limitada que liguem p e q , então p e q são conjugados.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, que haja uma seqüência infinita de segmentos geodésicos $z_n : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ tais que $z_n(0) = p$ e $z_n(1) = q$, e tais que $g(\dot{z}_n(t), \dot{z}_n(t)) < c_0 < \infty$. Pela proposição 3.1, existe um compacto $K = F^d$ que contém o traço dos segmentos geodésicos z_n , $n \in \mathbb{N}$.

Como $g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) < c_0$, $n \in \mathbb{N}$, então, tem-se, a menos de subsequências, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_n(0) = v$, para algum $v \in T_p \mathcal{M}$, pois $(p, \dot{z}_n(0)) \in \{(x, v) \in T\mathcal{M} \mid x \in K, v \in T_x \mathcal{M}, \text{ e } g(v, v) < c_0\}$ que é

compacto. Se q fosse um valor regular de $\exp_p$, então haveria uma vizinhança de v em $T_p\mathcal{M}$ que seria levada difeomorficamente em uma vizinhança de q . Como v é um ponto de acumulação dos $\dot{z}_n(0)$, então toda vizinhança que contenha v , contém um $\dot{z}_n(0)$. Logo, q é um ponto crítico de $\exp_p$. Portanto, p e q são conjugados. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa. Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $H^F(p)[X, X] > 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $X \in T_p\mathcal{M}$, e com um ponto de mínimo local não-degenerado. Nestas condições, existe apenas um número finito de segmentos geodésicos que incidam em um par arbitrário de pontos não-conjugados.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela proposição 3.1, toda seqüência de segmentos geodésicos que ligue um par de pontos não-conjugados, sob as hipóteses aqui consideradas, possui energia limitada.

Pela proposição 3.2, se um par de pontos admitir uma seqüência infinita de segmentos geodésicos com energia limitada que os ligue, então esses pontos são conjugados. Portanto, por um par de pontos não-conjugados passa somente um número finito de segmentos geodésicos. $\square$

Sabe-se que a existência de um campo de Jacobi J , $J \neq 0$, ao longo de um segmento geodésico $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $J(0) = J(1) = 0$ é equivalente a existir uma variação geodésica ao longo de γ , $x : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, tal que $x(s, t) = x_s(t)$ seja uma geodésica que ligue os pontos p e q . Além disso, a existência de uma seqüência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de geodésicas com energia limitada que liguem os pontos p e q induz uma variação geodésica em torno de γ .

Como exemplo de variedade que satisfaz às condições do teorema acima tem-se o parabolóide $z = x^2 + y^2$ com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$ e a função altura $H(x, y, z) = z$ estudada no exemplo 2.68 (pg. 47).

O cilindro $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ admite a função convexa $F(x, y, z) = z$. Esta é a função de Busemann do cilindro, relativa a um ponto $p \in \mathcal{M}$ e ao raio que parte de p para $+\infty$ (ver exemplo 2.135 pg. 84). Portanto, a existência de uma função convexa não é suficiente para garantir finitude do número de geodésica que incidem em dois pontos prefixados, como, por exemplo $p = (1, 0, 0)$ e $q = (0, 1, 1)$. Observar que a função F não é estritamente convexa, pois a curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma geodésica e $(F \circ \gamma)(t) = 1$ é constante. Logo, $\frac{d^2}{dt^2}(F \circ \gamma)(t) = 0$ e a função F não pode ser estritamente convexa.

Observação 3.4. Se $K > \delta > 0$, então $\text{Ric} > \delta > 0$. Neste caso, $\mathcal{M}$ é compacta pelo teorema de Bonnet-Myers. Portanto, existe uma geodésica fechada, γ , e um par de pontos, $p = \gamma(t_0)$ e $q = \gamma(t_1)$, tal que existem infinitos segmentos geodésicos que incidam em p e em q .

A seguir, estendemos o teorema 3.3, no qual consideramos como condição a positividade estrita do hessiano, ao teorema seguinte, no qual consideramos como condição a existência de uma função estritamente convexa. Esta condição é menos restritiva do que aquela: Pode ocorrer de uma função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ser estritamente convexa e existir um ponto no qual $H^F(p) = 0$, como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^4$.

Teorema 3.5. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade riemanniana completa, e que admita uma função estritamente convexa com um ponto de mínimo não-degenerado. Nestes termos, para cada par de pontos não-conjugados, existe apenas um número finito de segmentos geodésicos que os ligue.*

DEMONSTRAÇÃO. $\mathcal{M}$ é contrátil, pela proposição 2.83 (pg. 54).

Sejam $\exp_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ a aplicação exponencial e, para um par $p, q \in \mathcal{M}$ de pontos não-conjugados, o conjunto $A = \{v \in T_p\mathcal{M} \mid \exp_p(v) = q\}$. Assumindo-se o teorema de Hopf-Rinow, como $(\mathcal{M}, g)$ é completa, então $\exp_p$ está definida em todo o $T_p\mathcal{M}$.

Como p e q são não-conjugados, então o ponto q é um valor regular de $\exp_p$. Logo, $A = \exp_p^{-1}(\{q\})$ é um conjunto discreto.

Como $\exp_p$ é contínua, então o conjunto A é fechado. A é limitado, pois A é a imagem inversa de um compacto pela exponencial, que é, pelo corolário 2.86 (pg. 55), uma aplicação própria. Portanto, A é um conjunto discreto contido em um compacto. Portanto, A é finito.

Portanto, existe apenas um número finito de segmentos geodésicos que liguem os pontos p e q . $\square$

Pode-se conjecturar que a existência de uma função estritamente convexa de classe $\mathcal{C}^2$ com um ponto de mínimo não-degenerado em uma variedade conexa e completa seja suficiente para garantir finitude do número de geodésicas que incidam em dois pontos.

3.2. Número de Geodésicas em Variedades Lorentzianas

Nesta secção, $(\mathcal{M}, g)$ denotará uma variedade lorentziana, conexa e não-compacta. g é uma métrica pseudo-riemanniana com assinatura $(+, \dots, +, -)$. Y denota um campo temporal de Killing globalmente definido. $\mathcal{M}$ é temporalmente orientada pelo campo Y . Diz-se, então, que um vetor $v \in T\mathcal{M}$ aponta para o futuro se $g(v, Y) < 0$. Do mesmo modo, uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ é apontante para o futuro se o vetor $\dot{\gamma}(t)$ apontar para o futuro para todo $t \in I$.

Seja a seguinte relação de equivalência definida em $\mathcal{M}$: dois pontos p e q pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, eles pertencerem à mesma curva integral do campo Y . O conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}$, quociente de $\mathcal{M}$ por esta relação de equivalência pode ser considerado como uma hipersuperfície espacial. Define-se então a projeção $\pi_Y : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ como sendo a intersecção da curva integral γ_p do campo Y que passa pelo ponto p , e a hipersuperfície $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Definição 3.6. Um subconjunto $A \subset \mathcal{M}$ é dito *espacialmente compacto* se $\pi_Y(A)$ for compacto em $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Definição 3.7. Uma função $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ é dita *espacialmente própria* se $F^d = \{x \in \mathcal{M} \mid F(x) \leq d\}$ for espacialmente compacto para todo $d \in \mathbb{R}$.

No que se segue, será utilizada a *métrica riemanniana auxiliar* associada ao campo vetorial temporal Y definida por

$$g^r(v_1, v_2) = g(v_1, v_2) - 2 \frac{g(Y, v_1)g(Y, v_2)}{g(Y, Y)}.$$

Lema 3.8. *A métrica g^r é positiva.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $v \in T_p\mathcal{M}$ for espacial, então
 $g^r(v, v) = g(v, v) - 2 \frac{g(Y, v)^2}{g(Y, Y)} \geq g(v, v) \geq 0.$

Seja $v \in T_p\mathcal{M}$ um vetor causal. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida (pg. 10), tem-se

$$\begin{aligned} g^r(v, v) &= g(v, v) - 2 \frac{g(Y, v)^2}{g(Y, Y)} \\ &\geq g(v, v) - 2 \frac{g(v, v)g(Y, Y)}{g(Y, Y)} = -g(v, v) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.9. *Se Y for um campo de Killing relativamente a g , então Y também é um campo de Killing relativamente a g^r .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja γ uma curva integral do campo de Killing Y , relativamente a g .

Sejam X_1, X_2 campos de vetores ao longo de γ .

Utilizando-se o fato que $g(\nabla_{X_1}Y, X_2) = -g(\nabla_{X_2}Y, X_1)$ (ver pg. 7), $[Y, X] = \nabla_Y X - \nabla_X Y$, e $Y(g(X_1, X_2)) = g(\nabla_Y X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_Y X_2)$,

(teorema 1.13 (pg. 4)) obtem-se

$$\begin{aligned}
g^r(X_1, X_2) &= g(X_1, X_2) - 2 \frac{g(X_1, Y)g(X_2, Y)}{g(Y, Y)} . \\
\mathcal{L}_Y g^r(X_1, X_2) &= Y(g^r(X_1, X_2)) - g^r([Y, X_1], X_2) - g^r(X_1, [Y, X_2]) \\
&= Y(g(X_1, X_2)) - \frac{2}{g(Y, Y)} Y(g(X_1, Y)g(X_2, Y)) \\
&\quad - g^r(\nabla_Y X_1 - \nabla_{X_1} Y, X_2) - g^r(X_1, \nabla_Y X_2 - \nabla_{X_2} Y) \\
&= g(\nabla_Y X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_Y X_2) \\
&\quad - \frac{2}{g(Y, Y)} [(g(\nabla_Y X_1, Y) + g(X_1, \nabla_Y Y))g(X_2, Y) \\
&\quad + (g(\nabla_Y X_2, Y) + g(X_2, \nabla_Y Y))g(X_1, Y)] - g(\nabla_Y X_1 - \nabla_{X_1} Y, X_2) \\
&\quad + 2 \frac{g(\nabla_Y X_1 - \nabla_{X_1} Y, Y)g(X_2, Y)}{g(Y, Y)} - g(X_1, \nabla_Y X_2 - \nabla_{X_2} Y) \\
&\quad + 2 \frac{g(X_1, Y)g(\nabla_Y X_2 - \nabla_{X_2} Y, Y)}{g(Y, Y)} \\
&= \frac{2}{g(Y, Y)} [(-g(\nabla_Y X_1, Y) - g(X_1, \nabla_Y Y))g(X_2, Y) \\
&\quad - (g(\nabla_Y X_2, Y) - g(X_2, \nabla_Y Y))g(X_1, Y) \\
&\quad + (g(\nabla_Y X_1, Y) - g(\nabla_{X_1} Y, Y))g(X_2, Y) + (g(\nabla_Y X_2, Y) \\
&\quad - g(\nabla_{X_2} Y, Y))g(X_1, Y)] \\
&= \frac{2}{g(Y, Y)} [(-g(\nabla_{X_1} Y, Y) - g(X_1, \nabla_Y Y))g(X_2, Y) - (g(\nabla_{X_2} Y, Y) \\
&\quad - g(X_2, \nabla_Y Y))g(X_1, Y) + (g(\nabla_{X_1} Y, Y) - g(\nabla_{X_1} Y, Y))g(X_2, Y) \\
&\quad + (g(\nabla_{X_2} Y, Y) - g(\nabla_{X_2} Y, Y))g(X_1, Y)] = 0 .
\end{aligned}$$

Portanto, o campo Y é de Killing relativamente à métrica g^r . $\square$

Lema 3.10. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana estacionária, conexa e globalmente hiperbólica, e Y um campo diferenciável de vetores temporais de Killing em $\mathcal{M}$. Dado um ponto $p \in \mathcal{M}$ e uma curva integral maximal γ de Y , existe pelo menos um segmento geodésico do tipo nulo apontante para o futuro que ligue p e γ em $\mathcal{M}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, será provado que dados um ponto $p \in \mathcal{M}$ e uma curva temporal γ arbitrários, tem-se $\mathcal{I}^+(p) \cap \gamma \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{M}$ é conexa, então existe uma curva diferenciável $w : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ não necessariamente causal, tal que $w(0) = p$ e $w(1) \in \gamma$. (Como $\mathcal{M}$ é globalmente hiperbólica e, portanto, para cada ponto $x \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ admite uma superfície de Cauchy que passe por x , então w pode ser considerada como uma curva espacial).

Seja a curva $z(t) = \psi(w(t), \lambda_w(w(t)))$, sendo ψ o fluxo local de Y , com

$$\lambda_w(t) = \int_0^t \frac{g(\dot{w}, Y(w)) + \sqrt{g(\dot{w}, Y(w))^2 - g(\dot{w}, \dot{w})g(Y(w), Y(w))}}{g(Y(w), Y(w))} ds .$$

Observe-se que a expressão sob a raiz quadrada é positiva devido à desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida (pg. 10).

z é uma curva do tipo nulo apontante para o futuro que liga p e γ :

Derivando-se, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \psi_x(w(t), \lambda_w(w(t)))\dot{w}(t) + \psi_y(w(t), \lambda_w(w(t)))\lambda'_w(w(t)) \\ &= \psi_x(w(t), \lambda_w(w(t)))\dot{w}(t) + Y(w(t))\lambda'_w(w(t)) . \end{aligned}$$

O quadrado da norma do vetor tangente a z é:

$$\begin{aligned} g(\dot{z}, \dot{z}) &= g(\psi_x(w, \lambda_w(w))\dot{w} + Y(w)\lambda'_w(w), \psi_x(w, \lambda_w(w))\dot{w} \\ &\quad + Y(w)\lambda'_w(w)) \\ &= \psi_x(w, \lambda_w(w))^2 g(\dot{w}, \dot{w}) + 2\psi_x(w, \lambda_w(w))\lambda'_w(w)g(\dot{w}, Y(w)) \\ &\quad + \lambda'_w(w)^2 g(Y(w), Y(w)) . \end{aligned}$$

Desta expressão, pode-se calcular λ'_w ,

$$\begin{aligned} \lambda'_w(w) &= \frac{2\psi_x(w, \lambda_w(w))g(\dot{w}, Y(w))}{2g(Y(w), Y(w))} + \\ &\quad \frac{\sqrt{4\psi_x(w, \lambda_w(w))^2 g(\dot{w}, Y(w))^2 - 4g(Y(w), Y(w))\psi_x(w, \lambda_w(w))^2 g(\dot{w}, \dot{w})}}{2g(Y(w), Y(w))} . \end{aligned}$$

Após integração em relação a t , obtem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_w(w) &= 2 \int_0^t \psi_x(w, \lambda_w(w)) \left[\frac{g(\dot{w}, Y(w))}{g(Y(w), Y(w))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{g(\dot{w}, Y(w))^2 - g(Y(w), Y(w))g(\dot{w}, \dot{w})}}{g(Y(w), Y(w))} \right] ds . \end{aligned}$$

Para $\psi_x(w, \lambda_w(w)) = \frac{1}{2}$, tem-se exatamente a expressão de $\lambda_w(w)$. Portanto, $\lambda'_w(w)$ é raiz da equação polinomial acima. Portanto, $g(\dot{z}, \dot{z}) = 0$, i.e., a curva $z(t)$ é do tipo nulo.

Isto prova que $\mathcal{I}^+(p) \cap \gamma \neq \emptyset$. Ainda é necessário provar que dada uma curva do tipo nulo que ligue p e γ , existe uma geodésica do tipo nulo que liga p e γ . Isto é provado em [7]. $\square$

Lema 3.11. *Suponha-se que $(\mathcal{M}, g)$ seja uma variedade lorentziana estacionária, Y seja um campo diferenciável temporal de Killing em $\mathcal{M}$, e que exista uma função estritamente convexa do tipo nulo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja Y -invariante e espacialmente própria. Então, com as notações do lema 3.10, todos os segmentos geodésicos do tipo nulo que partam de p e cheguem a γ permanecem dentro de um subconjunto espacialmente compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Os conjuntos $F^a = \{x \in \mathcal{M} \mid F(x) \leq a\}$ são espacialmente compactos para todo $a \in \mathbb{R}$, pois a função F é espacialmente própria.

Seja $d = \max\{F(p), F(\gamma(t))\}$. Como F é Y -invariante, então $F(\gamma(t))$ é constante.

Todos os segmentos geodésicos do tipo nulo que partam de p e cheguem à γ permanecem dentro de F^d :

Como a função F é estritamente convexa, então para todo segmento geodésico do tipo nulo $z : [0, 1] \mapsto F^d \subset \mathcal{M}$, a função $f = F \circ z : [0, 1] \mapsto F^d \subset \mathbb{R}$ é estritamente convexa. Como f assume o valor máximo em $t = 0$ ou em $t = 1$ (ver lema 2.11 (pg. 30)) então $f(t) \leq \max\{f(0), f(1)\} = d$. Logo, $f(t) \in F^d$ para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto, z permanece contida em F^d , que é espacialmente compacto, pois F é espacialmente própria. $\square$

Lema 3.12. *Com as condições e notações do lema 3.11, existem duas constantes M_1 e M_2 , que dependem de p e de γ , tal que $M_1 \|\dot{z}(0)\| \leq L(z) \leq M_2 \|\dot{z}(0)\|$ para todo segmento geodésico do tipo nulo com parametrização afim $z : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ que ligue p e γ .*

DEMONSTRAÇÃO. O comprimento de arco da geodésica z em relação à métrica riemanniana g^r é

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_0^1 \sqrt{g^r(\dot{z}, \dot{z})} dt = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{z}, \dot{z}) - 2 \frac{g(\dot{z}, Y)^2}{g(Y, Y)}} dt \\ &= \sqrt{2} |g(\dot{z}, Y)| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-g(Y, Y)}} dt. \end{aligned}$$

Como $g(Y, Y)$ é constante ao longo de cada curva integral de Y , então a função $h : \widetilde{\mathcal{M}} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $h(p) = g(Y(p), Y(p))$ é contínua. Como F é espacialmente própria, então F^d é espacialmente compacto, logo, $\Pi(F^d) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ é compacto. Como pelo lema 3.11 todo segmento geodésico do tipo nulo que parta de p e chegue a γ permanece dentro de um subconjunto espacialmente compacto K , então tem-se que $0 < \nu \leq -g(Y(q), Y(q)) \leq \mu < +\infty$ para todo $q \in K$, pois toda função contínua definida num compacto assume valor máximo e valor mínimo. Logo,

$$\frac{\sqrt{2} |g(Y, \dot{z})|}{\sqrt{\mu}} \leq L(z) \leq \frac{\sqrt{2} |g(Y, \dot{z})|}{\sqrt{\nu}}.$$

$$\begin{aligned}
\|\dot{z}(t)\| &= \sqrt{g^r(\dot{z}(t), \dot{z}(t))} = \sqrt{g(\dot{z}(t), \dot{z}(t)) - 2 \frac{g(\dot{z}(t), Y(z(t)))^2}{g(Y(z(t)), Y(z(t)))}} \\
&= \sqrt{2} \frac{|g(\dot{z}(t), Y)|}{\sqrt{-g(Y(z(t)), Y(z(t)))}} \\
\Rightarrow |g(\dot{z}(t), Y)| &= \frac{\|\dot{z}(t)\| \sqrt{-g(Y(z(t)), Y(z(t)))}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{2} \|\dot{z}\| \sqrt{-g(Y(z), Y(z))}}{\sqrt{2} \sqrt{\mu}} \leq L(z) \leq \frac{\sqrt{2} \|\dot{z}\| \sqrt{-g(Y(z), Y(z))}}{\sqrt{2} \sqrt{\nu}}.$$

Como $\|\dot{z}(t)\|$ é constante, então tem-se

$$\frac{\|\dot{z}(0)\| \sqrt{-g(Y, Y)}}{\sqrt{\mu}} \leq L(z) \leq \frac{\|\dot{z}(0)\| \sqrt{-g(Y, Y)}}{\sqrt{\nu}}.$$

Portanto,

$$M_1 \|\dot{z}(0)\| \leq L(z) \leq M_2 \|\dot{z}(0)\|,$$

com $M_1 = \sqrt{\frac{-g(Y, Y)}{\mu}}$ e $M_2 = \sqrt{\frac{-g(Y, Y)}{\nu}}$. □

Definição 3.13. Seja $z : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ um segmento geodésico. Diz-se que os pontos $z(0)$ e $z(1)$ são *conjugados* ao longo de z se existir um campo de Jacobi J ao longo de z , $J \neq 0$, tal que $J(0) = J(1) = 0$.

Definição 3.14. Diz-se que um ponto $p \in \mathcal{M}$ e uma curva $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ são *conjugados por geodésicas do tipo nulo* se existir um ponto $q \in \gamma(I)$ e um segmento geodésico do tipo nulo $z : I \mapsto \mathcal{M}$ com $z(0) = p$ e $z(1) = q$ tal que os pontos p e q sejam conjugados ao longo de z .

Definição 3.15. Dados um ponto $p \in \mathcal{M}$, uma curva temporal $\gamma : I \mapsto \mathcal{M}$ e um segmento geodésico $z : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ tal que $z(0) = p$ e $z(1) \in \gamma(I)$, define-se o *funcional tempo-de-chegada* de z por $\tau_\gamma(z) = \gamma^{-1}(z(1))$.

Definição 3.16. Uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $T : A \mapsto \mathbb{R}$, definida em um aberto $A \subset \mathcal{M}$ de uma variedade lorentziana diz-se uma *função-tempo* se o campo gradiente ∇T for temporal para todo $p \in A$.

Lema 3.17. Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana globalmente hiperbólica, temporalmente orientada, $p \in \mathcal{M}$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ uma curva temporal inestendível. Seja $z_n : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de segmentos geodésicos do tipo nulo apontantes para o futuro, com $z_n(0) = p$, $z_n(1) \in \gamma(I)$ e suponha-se que $\tau_\gamma(z_n)$ seja limitado superiormente. Então existe uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia $\mathcal{C}^2$ a um segmento geodésico do tipo nulo, apontante para o futuro, que liga p e γ . Em particular, p e γ são conjugados por geodésicas do tipo nulo.

DEMONSTRAÇÃO. Como γ é inestendível e $(\mathcal{M}, g)$ é globalmente hiperbólica, então $\tau_\gamma(z_n)$ também é limitado inferiormente. Pela hiperbolicidade global, existe um compacto $K \subset \mathcal{M}$ e uma curva contínua $z : [0, 1] \rightarrow K \subset \mathcal{M}$ tal que $z_n([0, 1]) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, a menos de reparametrização, existe uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente a z .

É possível construir, pela causalidade forte, uma função-tempo diferenciável $T : A \rightarrow \mathbb{R}$, de um aberto $A \supset z(I)$, tal que $T(z)(s) = s$, para todo $s \in [0, 1]$. O gradiente ∇T da função T é um campo temporal.

Considerando-se a subsequência $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, para n_k suficientemente elevado, tem-se que $z_{n_k}([0, 1]) \subset A = \text{dom}(T)$. Reparametrize-se γ numa vizinhança de $z(1)$ de modo que $T(\gamma(s)) = s$ para $s \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$. Deste modo, tem-se que

$$\tau_\gamma(z_n) = \int_0^1 g(\nabla T(z_n), \dot{z}_n) dt.$$

Pela limitação superior, a integral acima é limitada.

Considere-se a métrica riemanniana g^r e substitua-se Y por ∇T . Como se está considerando curvas em K , então pode-se supor que g^r seja completa.

$$\begin{aligned} L(z_n) &= \int_0^1 \sqrt{g^r(\dot{z}_n, \dot{z}_n)} dt = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{z}_n, \dot{z}_n) - 2 \frac{g(\nabla T, \dot{z}_n)^2}{g(\nabla T(z_n), \nabla T(z_n))}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} \frac{g(\nabla T(z_n), \dot{z}_n)}{\sqrt{-g(\nabla T(z_n), \nabla T(z_n))}} dt = \int_0^1 g(\nabla T(z_n), \dot{z}_n) dt = \tau_\gamma(z_n) \end{aligned}$$

para $g(\nabla T, \nabla T) = -2$.

Logo, as curvas z_n são diferenciáveis numa variedade riemanniana completa com ponto inicial fixo e comprimento limitado. Isto implica que existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$ tal que $\{z_{n_k}(s_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja convergente a algum ponto $p_0 \in \mathcal{M}$ e $\{\dot{z}_{n_k}(s_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja convergente a algum vetor $v_0 \in T_{p_0}\mathcal{M}$ que aponte para o futuro.

Então, pelo teorema da dependência contínua dos dados iniciais de solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, segue-se que $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente na topologia $\mathcal{C}^2$ à solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{z}} \dot{z} = 0 \\ z(0) = p_0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \end{cases}$$

que é, de fato, pelo teorema de existência e unicidade de solução, uma geodésica do tipo nulo apontante para o futuro, e que liga p e γ . Além disto, p e γ são conjugados por geodésicas do tipo nulo. $\square$

Para uma variedade lorentziana estacionária, tem-se o seguinte resultado, que estende para o caso lorentziano, com as devidas adaptações, o resultado sobre finitude do número de segmentos geodésicos obtido para o caso riemanniano.

Utilizamos o conceito de função estritamente convexa do tipo nulo, que é essencial para o resultado de finitude no caso lorentziano, do mesmo modo que o conceito de função estritamente convexa foi essencial para a obtenção do resultado de finitude para o caso riemanniano.

Teorema 3.18. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana estacionária, conexa e globalmente hiperbólica e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo diferenciável temporal de Killing. Suponha-se que $\mathcal{M}$ admita uma função estritamente convexa do tipo nulo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja Y -invariante e espacialmente própria. Nestas condições, dados $p \in \mathcal{M}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva integral maximal de Y , que não sejam conjugados por geodésicas do tipo nulo, existe apenas um número finito de geodésicas do tipo nulo que incidam em p e em γ . Além disso, este número é maior ou igual a um.*

DEMONSTRAÇÃO. O campo de Killing Y existe pois $(\mathcal{M}, g)$ é uma variedade lorentziana estacionária.

Sejam $p \in \mathcal{M}$ e $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva integral do campo de Killing Y , que não sejam conjugados por geodésicas do tipo nulo. Suponha-se que haja uma seqüência infinita $z_n : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, de geodésicas do tipo nulo apontantes para o futuro que partam de p e cheguem a γ . Pelo lema 3.17 deduz-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_\gamma(z_n) = +\infty$ pois se $\tau_\gamma(z_n)$ fosse limitado, então p e γ seriam conjugados por geodésicas do tipo nulo, o que contraria a hipótese de p e γ não serem conjugados por geodésicas do tipo nulo.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_\gamma(z_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L(z_n) = +\infty$ pois, pelo lema 3.12 (pg. 97), existe uma constante M_1 tal que $M_1 \|\dot{z}_n(0)\| \leq L(z_n)$ e, portanto, $\{\|\dot{z}_n(0)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ seria limitada. Se $L(z_n)$ fosse limitada, então $\{\|z_n(0)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ seria limitada. Isto implicaria que z_n seria convergente a z na topologia $\mathcal{C}^2$, a menos de reparametrizações, e $\tau_\gamma(z_n)$ seria limitado. Então, pelo lema 3.17, p e γ seriam conjugados por geodésicas do tipo nulo, o que contraria a hipótese de não haver conjugação. Pelo lema 3.12 (pg. 97), obtem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{z}_n(0)\| = +\infty$.

Sejam a seqüência $b_n = \|\dot{z}_n(0)\|$ e as reparametrizações afins de z_n , $w_n : [0, L(z_n)] \rightarrow \mathcal{M}$, dadas por $w_n(t) = z_n\left(\frac{t}{b_n}\right)$. (1)

$$\|\dot{w}_n(0)\|^2 = g^r(\dot{w}_n(0), \dot{w}_n(0)) = g^r\left(\frac{1}{b_n}\dot{z}_n(0), \frac{1}{b_n}\dot{z}_n(0)\right) = \frac{b_n^2}{b_n^2} = 1.$$

Como $\|\dot{w}_n(0)\| = 1$, então, a menos de subsequências, pode-se supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{w}_n(0) = v$ (2), sendo $v \in T_p\mathcal{M}$, $v \neq 0$, um vetor do tipo nulo que aponte para o futuro. Seja w_v a geodésica maximal que passa por p com vetor tangente v . $w_v = \exp_p tv$, $t \geq 0$, sendo $\exp_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ a exponencial com respeito à métrica lorentziana g . Por (1) e (2), tem-se que w_v está definida em $[0, +\infty[$ e, além disto, pelo teorema da dependência contínua de soluções dos dados iniciais para sistema de equações diferenciais ordinárias, w_n converge uniformemente a w_v em cada compacto de $[0, +\infty[$.

Como F é Y -invariante e γ é uma curva integral do campo Y , então $F(\gamma(t)) = c_0 \in \mathbb{R}$.

Como no lema 3.11 (pg. 96), para $d = \max\{F(p), F(\gamma)\}$, tem-se $\sup F(z_n) = \sup F(w_n) \leq d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, $\sup F(w_v(t)) \leq d$. (3)

A função $\rho(t) = F(w_v(t))$ é estritamente convexa em $[0, +\infty[$, pois F é estritamente convexa do tipo nulo e w_v é uma geodésica do tipo nulo.

Para concluir a demonstração, será mostrado a seguir que a função ρ não pode ser limitada.

Seja Σ uma superfície de Cauchy em $\mathcal{M}$ —que existe pois $(\mathcal{M}, g)$ é globalmente hiperbólica— e seja K um subconjunto espacialmente compacto de $\mathcal{M}$ que contenha todas as geodésicas do tipo nulo que incidam em p e em γ . K existe pelo lema 3.11 (pg. 96). Tem-se que $\Sigma \cap K$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{M}$.

Defina-se a projeção π_Σ em $\Sigma \cap K$ de molde que $\pi_\Sigma(q)$ seja o único ponto da intersecção de γ_q e Σ , sendo γ_q a única curva integral de Y que passa pelo ponto q . π_Σ está bem definida, pois Σ é uma superfície de Cauchy e, portanto, a curva causal γ_q intercepta Σ uma única vez. Observe-se que existe uma aplicação contínua $\lambda : K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_\Sigma(q) = \psi(q, \lambda(q))$, sendo ψ o fluxo local de Y .

Como w_v está definida em $[0, +\infty[$, então se pode considerar as seqüências $w_v(n) \in \mathcal{M}$ e $\dot{w}_v(n) \in T\mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Ao menos para subsequências, pode-se supor que $q_n = \pi_\Sigma(w_v(n))$ seja convergente a algum ponto $\hat{q} \in \Sigma \cap K$ e que a seqüência $v_n = d_x \psi(w_v(n), \lambda(w_v(n)))[\dot{w}_v(n)]$ seja convergente a algum vetor $\hat{v} \in T_{\hat{q}}\mathcal{M}$. O vetor $\hat{v}$ é do tipo nulo, pois $\dot{w}_v(n)$ é do tipo nulo e $d_x \psi$ é uma isometria. Além disso, pela fórmula de g^r e pela propriedade de Killing de Y , tem-se que $\|\dot{w}_v(n)\| \neq 0$. Como $d_x \psi$ também é uma isometria com relação à métrica g^r , segue-se que $\|d_x \psi(w_v(n), \lambda(w_v(n)))[\dot{w}_v(n)]\| \neq 0$ e, assim, $\hat{v} \neq 0$.

Defina-se $\hat{w}_n(t) = \exp_{q_n}(tv_n)$, $t \in [-n, +\infty[$. Considere-se a geodésica do tipo nulo maximal $z_{\hat{v}}$ que passa por $\hat{q}$ com velocidade $\hat{v}$. $z_{\hat{v}}$ está definida em $\mathbb{R}$ e ela é o limite uniforme em compactos da seqüência de geodésicas do tipo nulo $\{\hat{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como F é constante nos fluxos de Y , e Y é de Killing, então $F(\hat{w}_n(t)) = F(w_v(t-n)) \leq d$, e, assim, $F(z_{\hat{v}}(t)) \leq d$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas $\hat{\rho}(t) = F(z_{\hat{v}}(t))$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ de modo que ela não pode ser limitada.

Esta contradição conclui a demonstração da finitude do número de geodésicas do tipo nulo que liguem p e γ . Além disto, pelo lema 3.10 (pg. 95), existe pelo menos uma geodésica que liga p e γ . $\square$

O ser espacialmente própria, como requerido no teorema 3.18, é automaticamente satisfeito se a função estritamente convexa considerada possuir um ponto de mínimo.

Proposição 3.19. *Suponha-se que a variedade lorentziana estacionária $(\mathcal{M}, g)$ seja globalmente hiperbólica e $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função estritamente convexa do tipo nulo, Y -invariante, e que possua um ponto de mínimo (local) em $\tilde{\mathcal{M}}$. Então F é espacialmente própria.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $(\mathcal{M}, g)$ é globalmente hiperbólica, então existe uma superfície de Cauchy Σ . Suponha-se que Σ seja não-compacta, pois senão $\Pi_\Sigma(F^d)$ seria compacto para todo $d \in \mathbb{R}$ e, portanto, F já seria espacialmente própria. Além disso, Σ com a métrica induzida pela g é uma variedade riemanniana completa.

Seja $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de curvas integrais que diverge para o infinito, i.e., para todo subconjunto espacialmente compacto S existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que γ_n não intercepta S .

Seja $q \in \mathcal{M}$ de modo que γ_q , a curva integral de Y que passa por q , seja um ponto de mínimo de F em $\widetilde{\mathcal{M}}$. Pela proposição 3.10 (pg. 95), tem-se que $\mathcal{I}^+(q) \cap \gamma_n \neq \emptyset$, logo, pela hiperbolicidade global, pode-se achar uma subseqüência $z_n : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ de segmentos geodesicos do tipo nulo apontantes para o futuro que liga q a γ_n . Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{z}_n(0)\| = +\infty$, pois, caso contrário, a menos de subseqüência, ter-se-ia $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_n(0) = v_\infty$ para algum vetor $v_\infty \in T_q \mathcal{M}$, $v_\infty \neq 0$. Definindo-se $z_\infty = \exp_q(tv_\infty)$, por continuidade, z_∞ está definido no intervalo $[0, 1]$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(1) = z_\infty(1)$. Isto é impossível, pois dado qualquer subconjunto S espacialmente compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n(1) \in \gamma_n$ e γ_n não intercepta S . Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{z}_n(0)\| = +\infty$.

Com o mesmo argumento utilizado no teorema 3.18, pode-se reparametrizar z_n de modo afim e obter uma seqüência de geodésicas do tipo nulo apontantes para o futuro $w_n : [0, L_n] \mapsto \mathcal{M}$ de q a γ_n tal que $\|\dot{w}_n(t)\| = \|\dot{w}_n(0)\| = 1$.

A menos de subseqüência, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{w}_n(0) = v$ para algum vetor do tipo nulo $v \in T_q \mathcal{M}$. Seja z_v a geodésica do tipo nulo apontante para o futuro que parta de q com vetor tangente inicial v . Se $F(\gamma_n) \leq d$, $n \in \mathbb{N}$, para algum $d \in \mathbb{R}$, então, por continuidade, ter-se-ia que $F(z_v(t)) \leq d$ para todo $t \in [0, +\infty[$. Mas $\rho(t) = F(z_v(t))$ é uma função estritamente convexa em $[0, +\infty[$ que tem um ponto de mínimo em $t = 0$, logo, ρ não pode ser limitada em $[0, +\infty[$. Logo, F^d é um subconjunto limitado. Logo, F^d é espacialmente compacto para todo $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, F é espacialmente própria. $\square$

Observação 3.20. Se uma função $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ não possuir ponto de mínimo, então, nas condições da proposição 3.19, F pode não ser espacialmente própria como, por exemplo, no caso da variedade $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$, sendo $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}$, munida da métrica de Minkowski plana $g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$. A função $F(x, y, z, t) = \frac{1}{z}$ é estritamente convexa do tipo nulo, pois a restrição da F à variedade $\mathcal{M}_0$ é estritamente convexa, como calculado no exemplo 2.71 (pg. 49), e F é invariante nas curvas integrais γ do campo $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ que é de Killing. As curvas integrais do campo Y são $\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0, t)$, pois $\dot{\gamma}(t) = (0, 0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial t}$. $F(\gamma(t)) = \frac{1}{z_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. No entanto, F não é espacialmente própria, pois F^d não é espacialmente compacto, para todo $d \in \mathbb{R}$.

A existência de uma função estritamente convexa do tipo nulo em uma variedade revela características da topologia da variedade.

Proposição 3.21. *Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana estacionária que satisfaça às hipóteses do teorema 3.18 (pg. 100). Então $\mathcal{M}$ é contrátil.*

DEMONSTRAÇÃO. A variedade $(\mathcal{M}, g)$ ser globalmente hiperbólica e $\mathcal{M}$ não ser contrátil implica que o número de segmentos geodésicos do tipo nulo que liguem p a uma curva temporal γ é infinito. Como pelo teorema 3.18 (pg. 100) o número de segmentos geodésicos é finito, então $\mathcal{M}$ deve, a fortiori, ser contrátil. $\square$

3.3. Variedades Conformemente Estacionárias

A seguir estudaremos estabilidade da convexidade estrita de uma função por mudança conforme de uma métrica estacionária.

Pela proposição 1.41, a hiperbolicidade global é invariante por mudança conforme de métrica, ou seja, se $(\mathcal{M}, g)$ for globalmente hiperbólica, então $(\mathcal{M}, \phi g)$, $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciável, também é globalmente hiperbólica. Equivalentemente, se $(\mathcal{M}, g)$ admitir uma superfície de Cauchy, então $(\mathcal{M}, \phi g)$ também o admite. Logo, o desenvolvimento de Cauchy é todo o $\mathcal{M}$, e o horizonte de Cauchy é vazio para ambas as métricas.

Definição 3.22. Diz-se que um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é *conformemente Killing* se o seu fluxo $\psi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\psi_t(x) = \psi(t, x)$ for uma aplicação conforme para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.23. Uma variedade lorentziana conformemente estacionária é uma variedade lorentziana que admita um campo de vetores temporal conformemente Killing. Alternativamente, $(\mathcal{M}, g_c)$ é conformemente estacionária se, e somente se, g_c for uma métrica conformemente estacionária, i.e., se houver uma métrica lorentziana estacionária g e uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g_c = \phi g$.

Pela proposição 1.41 (pg. 12), geodésicas do tipo nulo são invariantes por mudança conforme de métrica. Pode-se cogitar a respeito das conclusões do teorema 3.18 serem invariantes por mudança conforme de métrica. Sabe-se que hiperbolicidade global é invariante por mudança conforme de métrica (ver [1], teorema 7.2). Além disso, um conjunto espacialmente compacto K continua espacialmente compacto por mudança conforme de métrica, pois $\pi_Y(K)$ é fechado e limitado em relação a métrica $g_c = \phi g$. Resta ainda demonstrar a estabilidade conforme da existência de função estritamente convexa do tipo nulo e espacialmente própria, o que é feito na próxima proposição.

Proposição 3.24. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana conformemente estacionária e Y um campo vetorial temporal conformemente Killing em $\mathcal{M}$. Seja $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma aplicação diferenciável e g_1 uma outra métrica, conformemente estacionária em $\mathcal{M}$, dada por $g_1 = \phi g$. Sejam*

$p \in \mathcal{M}$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ uma curva temporal. Suponha-se que a derivada da aplicação $\log \phi$ seja limitada em toda curva integral de Y que intercepte $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(\gamma)$. Então $(\mathcal{M}, g)$ admite uma função diferenciável estritamente convexa do tipo nulo e espacialmente própria definida em um subconjunto aberto de $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(\gamma)$ se, e somente se, $(\mathcal{M}, g_1)$ também o admitir.

DEMONSTRAÇÃO. Pela simetria das afirmações, basta provar uma das implicações.

Como $\left| \frac{d}{dt} \log(\phi(t)) \right| = \left| \frac{1}{\phi(t)} \phi'(t) \right| < \infty$, então ϕ é limitada em cada trecho das curvas integrais do campo Y em $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(\gamma)$.

Seja $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa do tipo nulo e espacialmente própria em $(\mathcal{M}, g)$. Procura-se uma função $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de modo que $F_1 = \psi \circ F$ seja estritamente convexa do tipo nulo e espacialmente própria, sendo ψ uma função diferenciável estritamente crescente apropriada a ser determinada, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Se F for Y -invariante, então F_1 também o é, pois $F_1(\gamma(t)) = \psi(F(\gamma(t))) = \psi(c_0)$ é constante, para toda curva integral γ do campo Y . Além disso, como ψ é estritamente crescente, então, F ser espacialmente própria implica que F_1 também é espacialmente própria.

Seja $\|\cdot\|$ a norma da métrica riemanniana

$$g^r(v_1, v_2) = g(v_1, v_2) - 2 \frac{g(v_1, Y)g(v_2, Y)}{g(Y, Y)}.$$

Sejam $\nabla \rho$ o gradiente e H^ρ o hessiano da função diferenciável $\rho : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$. Se $\gamma_v : I \mapsto \mathcal{M}$ for uma geodésica tal que $\gamma(0) = q$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, então $g(H^\rho[v], v) = \frac{d^2}{dt^2}(\rho(\gamma_v(t)))$.

Dada uma geodésica do tipo nulo com parâmetro afim $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ em $(\mathcal{M}, g_1)$, existe uma única geodésica do tipo nulo com parâmetro afim $\lambda : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$ em $(\mathcal{M}, g)$ tal que $\gamma(t) = \lambda(\sigma(t))$ para todo $t \in [0, 1]$, sendo σ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma'(t) = c\phi(\gamma(t))^{-1} \\ \sigma(0) = 0, \quad c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Derivando-se σ' , obtem-se

$$\begin{aligned} \sigma''(t) &= \frac{d}{dt} \sigma' = c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\phi(\gamma(t))} \right) = -\frac{c}{\phi(\gamma(t))^2} \frac{d}{dt}(\phi(\gamma(t))) \\ &= -\frac{c}{\phi(\gamma(t))^2} g(\nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = -\frac{c}{\phi(\gamma(t))^2} g(\nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t))) \sigma' \\ &= -\frac{c^2}{\phi(\gamma(t))^3} g(\nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t))) \quad . \end{aligned}$$

A condição para que F_1 seja estritamente convexa do tipo nulo em $(\mathcal{M}, g_1)$ é $\frac{d^2}{dt^2} F_1(\gamma(t)) > 0$ para toda geodésica do tipo nulo em $(\mathcal{M}, g_1)$.

Derivando-se $F_1 = \psi \circ F$, com $\gamma(t) = \lambda(\sigma(t))$ $t \in [0, 1]$, obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_1(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}((\psi \circ F)(\gamma(t))) = \psi'(F(\gamma(t))) \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) \\
&= \psi'(F(\gamma(t)))dF(\gamma(t))[\dot{\gamma}(t)] = \psi'(F(\gamma(t)))g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \\
&= \psi'(F(\gamma(t)))g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t)))\sigma'(t) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}F_1(\gamma(t)) &= \psi''(F(\gamma(t)))g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2\sigma'(t)^2 \\
&+ \psi'(F(\gamma(t))) \left[g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t)))\sigma''(t) + \sigma'(t) \frac{d}{dt}(g(\nabla F(\gamma(t)), \dot{\lambda}(\sigma(t)))) \right] \\
&= \psi''(F(\lambda(\sigma(t))))g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2\sigma'(t)^2 \\
&+ \psi'(F(\lambda(\sigma(t))))[g(H^F(\lambda(\sigma(t))))[\dot{\lambda}(\sigma(t))], \dot{\lambda}(\sigma(t))]\sigma'(t)^2 \\
&+ g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))\sigma''(t) .
\end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões de σ' e de σ'' nesta equação, obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}F_1(\gamma(t)) &= \frac{c^2}{\phi(\lambda(\sigma))^2} \{ \psi''(F(\lambda(\sigma(t))))g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2 \\
&+ \psi'(F(\lambda(\sigma(t))))[g(H^F(\lambda(\sigma(t))))[\dot{\lambda}(\sigma(t))], \dot{\lambda}(\sigma(t))] \\
&- g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))g\left(\frac{\nabla\phi(\lambda(\sigma(t)))}{\phi(\lambda(\sigma(t)))}, \dot{\lambda}(\sigma(t))\right) \}
\end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int ab \right| = \left| (\epsilon a) \left(\frac{b}{\epsilon} \right) \right| \leq \frac{\epsilon^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon^2}, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R},$$

obtem-se

$$\left| g(\nabla F(\lambda), \dot{\lambda})g\left(\frac{\nabla\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)}, \dot{\lambda}\right) \right| \leq \frac{1}{2\epsilon^2}g(\nabla F(\lambda), \dot{\lambda})^2 + \frac{\epsilon^2}{2}g\left(\frac{\nabla\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)}, \dot{\lambda}\right)^2$$

para todo $\epsilon > 0$. (1)

Pelo lema 3.11 (pg. 96), os segmentos geodésicos apontantes para o futuro que partam de p e cheguem a γ permanecem dentro de um subconjunto espacialmente compacto. Como $\frac{\nabla\phi}{\phi}$ é por hipótese limitado em cada curva integral de Y que intercepte $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(\gamma)$, então, por continuidade, tem-se uma constante positiva M tal que $\left| \frac{\nabla\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} \right| \leq M$, para todo segmento geodésico do tipo nulo que parta de p e chegue a γ . Como F é estritamente convexa do tipo nulo, então existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$g(H^F(\lambda(\sigma(t)))[\dot{\lambda}(\sigma(t))], \dot{\lambda}(\sigma(t))) - \frac{\epsilon^2}{2}g\left(\frac{\nabla\phi(\lambda(\sigma))}{\phi(\lambda(\sigma))}, \dot{\lambda}(\sigma(t))\right)^2 > 0$$

para um segmento geodésico do tipo nulo que parta de p e chegue a γ .

Utilizando-se esta expressão junto com (1) e a expressão de $\frac{d^2}{dt^2}(F_1(\gamma(t)))$, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} F_1(\gamma(t)) &> \frac{c^2}{\phi(\lambda(\sigma(t)))^2} \{ \psi''(F(\lambda(\sigma(t)))) g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2 \\ &+ \psi'(F(\lambda(\sigma(t)))) \left[\frac{\epsilon^2}{2} g \left(\frac{\nabla \phi(\lambda(\sigma(t)))}{\phi(\lambda(\sigma(t)))}, \dot{\lambda}(\sigma(t)) \right)^2 \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\epsilon^2} g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2 - \frac{\epsilon^2}{2} g \left(\frac{\nabla \phi(\lambda(\sigma(t)))}{\phi(\lambda(\sigma(t)))}, \dot{\lambda}(\sigma(t)) \right)^2 \right] \} \\ &= \frac{c^2}{\phi(\lambda(\sigma(t)))^2} g(\nabla F(\lambda(\sigma(t))), \dot{\lambda}(\sigma(t)))^2 [\psi''(F(\lambda(\sigma(t)))) \\ &- \frac{1}{2\epsilon^2} \psi'(F(\lambda(\sigma(t))))] . \end{aligned}$$

Logo, $\frac{d^2}{dt^2}(F(\gamma(t))) > 0$ se $\psi''(F(\lambda(\sigma(t)))) \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \psi'(F(\lambda(\sigma(t))))$.

Um exemplo de uma função estritamente crescente e estritamente convexa que satisfaz a esta condição é $\psi(t) = 2\epsilon^2 \exp\left(\frac{t}{2\epsilon^2}\right)$.

Portanto, F_1 é estritamente convexa do tipo nulo em $(\mathcal{M}, g_1)$. $\square$

Observação 3.25. Para métricas conformes g e $\tilde{g} = \phi g$, $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^+$, há invariância da propriedade de ser de Killing para campos de vetores $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tais que ϕ seja constante ao longo das curvas integrais de Y , pois, pelo lema 1.39 obtem-se

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V Y, X) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) &= \phi g(\tilde{\nabla}_V Y, X) + \phi g(\tilde{\nabla}_X Y, V) \\ &= \left[\phi g(\nabla_V Y, X) + \frac{1}{2} (g(Y, X)V(\phi) + g(X, V)Y(\phi) - g(V, Y)X(\phi)) \right] \\ &+ \left[\phi g(\nabla_X Y, V) + \frac{1}{2} (g(Y, V)X(\phi) + g(V, X)Y(\phi) - g(X, Y)V(\phi)) \right] \\ &= \phi [g(\nabla_V Y, X) + g(\nabla_X Y, V)] + g(X, V)Y(\phi) . \end{aligned}$$

Variedades lorentzianas estacionárias que admitem uma função estritamente convexa do tipo nulo.

Nesta secção são considerados mais alguns exemplos de variedades lorentzianas estacionárias que admitam funções estritamente convexas do tipo nulo. Em particular, são consideradas variedades estacionárias padrão e estáticas padrão.

Definição 3.26. Diz-se que uma *variedade lorentziana* $(\mathcal{M}, g)$ é *estática* se ela for estacionária e houver uma hipersuperfície espacial que seja ortogonal ao campo de Killing definido em $\mathcal{M}$.

Definição 3.27. Uma *variedade lorentziana estática padrão* é o produto distorcido de uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}_0, g_0)$ por $(I, -dt^2)$, com métrica definida por $g((\xi, \tau), (\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) - \beta(x)\tau^2$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $(\xi, \tau) \in T\mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$ e $\beta : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável.

Observe-se que a definição imediatamente acima corresponde a uma definição alternativa do produto lorentziano distorcido dado na página 9.

O campo de vetores $\frac{\partial}{\partial t}$ é de Killing, pois seu fluxo local $\psi_t(x)$ é uma aplicação conforme. Se uma curva $z(s) = (x(s), t(s))$ for uma geodésica do tipo nulo, então o componente espacial $x(s)$ é uma pré-geodésica na variedade riemanniana $(M_0, \beta^{-1}g_0)$. Logo, para variedades lorentzianas estáticas, a existência de função convexa do tipo nulo que seja constante ao longo das curvas integrais do campo Y se reduz à existência de função convexa em M_0 munida da métrica $\beta^{-1}g_0$. Portanto, tem-se o seguinte corolário do teorema 3.18 (pg. 100):

Corolário 3.28. *Seja $M = M_0 \times I$ munida da métrica lorentziana estática padrão $g((\xi, \tau), (\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) - \beta(x)\tau^2$. Suponha-se que a variedade riemanniana $(M_0, \beta^{-1}g_0)$ seja completa e que admita uma função estritamente convexa. Então, se x_0 e x_1 forem não-conjugados em $(M_0, \beta^{-1}g_0)$, para cada $t_0 \in I$, existe somente um número finito de segmentos geodésicos do tipo nulo (apontantes para o futuro) que partam de $p = (x_0, t_0)$ e cheguem à curva temporal $\gamma(t) = (x_1, t)$ em M , com $t \in I$.*

Este resultado generaliza-se ao caso em que seja considerado somente funções convexas diferenciáveis em variedades lorentzianas estáticas padrão.

Sejam (M_0, g_0) uma variedade lorentziana, $(I, -dt^2)$ um intervalo aberto com métrica negativa e $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ uma função diferenciável.

Seja $M_0 \times_f I$ o espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado. Cabe lembrar que a métrica deste espaço-tempo é $g_f = f(t)^2g_0 - dt^2$ como visto no exemplo 1.54 (pg. 16).

Com a mudança de variáveis, $ds = \frac{dt}{f(t)}$, a métrica g_f acima se torna $g_f = f(t)^2g_0 - f(t)^2ds^2 = f(t)^2(g_0 - ds^2)$, i.e., g_f é conformemente equivalente à métrica estática $g_1 = g_0 - ds^2$. Por isso, nos espaços-tempos de Robertson-Walker generalizados, pelo lema 1.43 (pg. 13), as geodésicas do tipo nulo relativamente à métrica g_f coincidem, a menos de reparametrização, com as geodésicas do tipo nulo relativamente à métrica g_1 . Além disso, com a métrica g_1 , as geodésicas do tipo nulo são da forma $\gamma(t) = (x(t), s(t))$, sendo $x(t)$ uma geodésica em (M_0, g_0) e $s(t) = a + bt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Em particular, para um ponto $p = (x_0, s_0) \in M_0 \times_f I$ fixado, e uma curva temporal $\gamma(s) = (x_1, s)$, a menos de reparametrização, uma geodésica do tipo nulo em $M_0 \times_f I$ que ligue p e γ apresenta-se sob a forma $z(t) = (x(t), s_{\pm}(t))$, $t \in [0, 1]$, sendo $x(t)$ uma geodésica em (M_0, g_0) que ligue x_0 e x_1 e $s_{\pm}(t) = s_0 \pm \int_0^t g_0(\dot{x}, \dot{x})dr$.

Se for considerada em $M_0 \times_f I$ a orientação temporal pelo campo $\frac{\partial}{\partial t}$ (ou, equivalentemente, por $\frac{\partial}{\partial s}$), então, a aplicação $x \mapsto (x, s_+)$ (respectivamente, $x \mapsto (x, s_-)$) define uma bijeção entre as geodésicas em (M_0, g_0) de x_0 a x_1 e as geodésicas do tipo nulo apontantes para o futuro (respectivamente, apontantes para o passado) em $M_0 \times_f I$ que liguem p à curva γ .

Observe-se que se $x : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}_0$ for uma geodésica e se J_0 for um campo de Jacobi ao longo de x , então $J = (J_0, 0)$ é um campo de Jacobi ao longo das geodésicas $z(t) = (x(t), s_{\pm}(t))$ em $\mathcal{M}_0 \times I$ com a métrica lorentziana $g_0 - ds^2$. Além disso, a noção de ponto conjugado ao longo de uma curva do tipo nulo de uma variedade lorentziana, pelo lema 1.43 (pg. 13), é invariante por mudança conforme da métrica. Em particular, o ponto $p = (x_0, t_0)$ e a curva $\gamma(s) = (x_1, s)$ são não-conjugados por geodésicas do tipo nulo no produto distorcido $\mathcal{M}_0 \times_f I$ se, e somente se, os pontos x_0 e x_1 forem não-conjugados em $(\mathcal{M}_0, g_0)$. Logo, tem-se o seguinte:

Proposição 3.29. *Seja $\mathcal{M}_0 \times_f I$ o espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado, sendo $(\mathcal{M}_0, g_0)$ uma variedade riemanniana e $F : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável de classe C^2 com hessiano H^F estritamente positivo em todo ponto, e que tenha um ponto de mínimo (que é necessariamente não-degenerado). Então, se $p = (x_0, t_0) \in \mathcal{M}$ e $\gamma(t) = (x_1, t)$ forem não-conjugados por geodésicas do tipo nulo, então existe apenas um número finito de segmentos geodésicos do tipo nulo, apontantes para o futuro (ou para o passado), que partam de p e cheguem a γ .*

Observe-se que o resultado acima se torna trivial no caso de espaços-tempos de Robertson-Walker padrão de dimensão quatro. Especificamente, pela proposição 2.83 (pg. 54) e pelo corolário 5.12 de [1], para toda variedade que admita uma função estritamente convexa que satisfaça às condições do teorema 3.3 (pg. 92), a fibra $\mathcal{M}_0$ é simplesmente conexa com curvatura negativa constante. Então, pelo teorema de Hadamard-Cartan (pg. 65) existe uma única geodésica que ligue p e γ em $\mathcal{M}_0 \times_f I$.

O resultado da proposição 3.29 pode ser estendido a espaços-tempos conformemente estáticos mais genéricos, como se faz a seguir.

Definição 3.30. Uma distribuição $\Delta \subset T\mathcal{M}$ diz-se *integrável segundo Frobenius* se para todo ponto $p \in \mathcal{M}$ houver uma subvariedade mergulhada $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ tal que $p \in \mathcal{N}$ e Δ_x seja uma base de $T_x\mathcal{N}$, para todo $x \in \mathcal{N}$.

Definição 3.31. Diz-se que um campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é *irrotacional* se a distribuição ortogonal $\Delta = Y^\perp$ for integrável no sentido de Frobenius. Uma distribuição Δ de co-dimensão 1 em $\mathcal{M}$ é dita *globalmente integrável* se existir uma função de classe C^1 , $T : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, tal que as hipersuperfícies $\Sigma_c = \{x \in \mathcal{M} \mid T(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, sejam variedades integrais de Δ .

Se Y for irrotacional e $\Delta = Y^\perp$ for globalmente integrável, então Y é um múltiplo do vetor gradiente ∇T .

Definição 3.32. Diz-se que uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$ é um espaço-tempo *conformemente estático* se ela admitir um campo vetorial temporal, irrotacional e conforme Y . Um espaço-tempo $\mathcal{M}$ conformemente estático é dito padrão se Y for completo e $\Delta = Y^\perp$ for globalmente integrável em $\mathcal{M}$.

Tem-se a seguinte generalização da proposição 3.29.

Proposição 3.33. *Sejam $(\mathcal{M}, g)$ um espaço-tempo conformemente estático e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo temporal irrotacional conforme em $\mathcal{M}$. Sejam $\mathcal{M}_0$ uma subvariedade integral maximal de $\Delta = Y^\perp$ e g_0 a restrição da métrica g a $\mathcal{M}_0$. Suponha-se que a variedade riemanniana $(\mathcal{M}_0, g_0)$ admita uma função diferenciável F de classe $\mathcal{C}^2$, e com hessiano estritamente positivo com um ponto de mínimo não-degenerado, e que p_0 e q_0 sejam pontos não-conjugados em $\mathcal{M}_0$. Então, existe apenas um número finito de segmentos geodésicos do tipo nulo que passem por p_0 e por γ_{q_0} , sendo γ_{q_0} a curva integral do campo Y que passa pelo ponto q_0 em $\mathcal{M}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\psi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ o fluxo de Y e $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujas hipersuperfícies de nível sejam subvariedades integrais de Δ . Pode-se supor que $\mathcal{M}_0 = T^{-1}(0)$.

Como Y é completo e $\mathcal{M}_0$ é uma subvariedade integral de Δ , então, para cada $p \in \mathcal{M}$ existe pelo menos um $t_p \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(p, t_p) \in \mathcal{M}_0$. Além disso, como T é estritamente crescente nas curvas integrais de Y , então segue-se que, para cada $p \in \mathcal{M}$, tal t_p é único. Logo, tem-se uma aplicação bem definida $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$ definida por $p \mapsto \psi(p, t_p)$.

F é sobrejetora pois $F(p) = p$ para todo $p \in \mathcal{M}_0$.

Como $\mathcal{M}_0$ é ortogonal a Y e Y é conforme, então para cada geodésica do tipo nulo z em $\mathcal{M}$ que ligue os pontos p e q , a curva $w = F \circ z$ é uma pré-geodésica em $(\mathcal{M}_0, g_0)$ que liga os pontos $F(p)$ e $F(q)$. Além disso, p e q são conjugados ao longo de z em $\mathcal{M}$ se, e somente se, $F(p)$ e $F(q)$ forem conjugados ao longo de w em $\mathcal{M}_0$.

Para terminar a demonstração será mostrado que, para cada geodésica w que ligue os pontos $p_0, q_0 \in \mathcal{M}$ existem exatamente duas geodésicas, z_1 e z_2 , que ligam p_0 e γ_{q_0} , tal que $F \circ z_i = w$, $i = 1, 2$, sendo γ_{q_0} a curva integral de Y que passa por q_0 .

De fato, suponha-se que w seja uma curva diferenciável em $\mathcal{M}_0$ que ligue os pontos p_0 e q_0 , com $g_0(\dot{w}, \dot{w}) > 0$. Afirmamos que existem exatamente duas curvas do tipo nulo, $z_1, z_2 \subset \mathcal{M}$ que ligam p_0 e γ_{q_0} tal que $F \circ z_i = w$, $i = 1, 2$. De fato, qualquer curva z em $\mathcal{M}$ que parta de p_0 e tal que $F(z) = w$ é da forma

$$(3.3.1) \quad z(s) = \psi(w(s), t(s))$$

para alguma função $t(s)$ tal que $t(0) = 0$.

Derivando-se $\dot{z}(s)$ obtém-se

$$\dot{z}(s) = \frac{\partial \psi}{\partial w}(w(s), t(s))\dot{w}(s) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(w(s), t(s))t'(s).$$

Como $\frac{\partial \psi}{\partial t}(w(s), t(s)) = Y(w(s))$, para $\frac{\partial \psi}{\partial w} = 1$, obtém-se $\dot{z}(s) = \dot{w}(s) + Y(w(s))t'(s)$.

Como $g(Y, \dot{w}) = 0$, então

$$\begin{aligned} g(\dot{z}(s), \dot{z}(s)) &= g(\dot{w}(s) + Y(w(s))t'(s), \dot{w}(s) + Y(w(s))t'(s)) \\ &= g_0(\dot{w}(s), \dot{w}(s)) + t'(s)^2 g(Y(w(s)), Y(w(s))). \end{aligned}$$

Portanto, a curva $z(s)$ é do tipo nulo se

$$(3.3.2) \quad g_0(\dot{w}(s), \dot{w}(s)) + t'(s)^2 g(Y(w(s)), Y(w(s))) \equiv 0.$$

Observar que, como $g_0(\dot{w}, \dot{w}) > 0$ e $g(Y, Y) < 0$, por 3.3.2 tem-se que $t'(s) \neq 0$ em todo ponto, e, pela continuidade de t , ou $t'(s) > 0$ ou $t'(s) < 0$ em todo ponto. Logo, a equação 3.3.2 tem exatamente duas soluções para t' , e com a condição $t(0) = 0$, a fórmula 3.3.1 fornece duas curvas com as propriedades requeridas.

Por outro lado, suponha-se que w seja uma geodésica em $\mathcal{M}_0$ que ligue p_0 e q_0 . Como Y é conforme, então, se t_i for solução do problema de Cauchy

$$t'_i(s) = (-1)^i \sqrt{-\frac{g_0(\dot{w}(s), \dot{w}(s))}{g(Y(w(s)), Y(w(s)))}}, \quad t_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

então, as curvas resultantes $z_i(s) = \psi(w(s), t_i(s))$ são pre-geodésicas do tipo nulo em $\mathcal{M}$ que ligam p_0 e q_0 e tal que $F \circ z_i = w$. Observar que z_1 aponta para o passado e z_2 aponta para o futuro com respeito à orientação de $\mathcal{M}$ definida por Y , isto é, $g(\dot{z}_1, Y) > 0$ e $g(\dot{z}_2, Y) < 0$.

Portanto, como há finitude do número de geodésicas que passem por p_0 e q_0 em $\mathcal{M}_0$, então, pelo exposto acima, há finitude do número de geodésicas que liguem p_0 e q_0 . $\square$

A hipótese de integrabilidade global não pode ser omitida das hipóteses da proposição 3.33, para a distribuição ortogonal $\Delta^\perp$, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.34. Seja $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times S^1$ munida da métrica lorentziana $ds^2 = 2dx d\theta$. O campo vetorial $Y = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}$ é temporal. Além disso, como os coeficientes da métrica não dependem das variáveis x e θ , então os campos $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ são de Killing, assim como Y .

A distribuição $\Delta = Y^\perp$ é localmente integrável. Especificamente, Y é o gradiente das funções localmente definidas, $(x, \theta) \mapsto x - \theta$. Observar que θ só pode ser definida localmente em $\mathcal{M}$ como função real. Logo, a distribuição integral $\mathcal{M}_0$ de Δ é dada por soluções da equação $x = \theta \pmod{2\pi}$ que é difeomorfa a $\mathbb{R}$, mergulhada como hélice no cilindro $\mathbb{R} \times S^1$. Além disso, a métrica induzida em $\mathcal{M}_0$ é $ds_0^2 = 2dx^2$, logo, $\mathcal{M}_0$ é isométrica a uma reta euclidiana.

A função x^2 em $\mathcal{M}_0$ satisfaz às hipóteses do teorema 3.3 (pg. 92). Deste modo, todas as hipóteses da proposição 3.33 estão satisfeitas, exceto a integrabilidade global de Δ . Pode-se ver que a conclusão da proposição 3.33 (pg. 109) é falsa. A curva $\gamma(t) = (-t, t \pmod{2\pi})$ é uma curva integral de Y (cuja imagem é uma hélice do cilindro) e para $\theta_0 \in S^1$ fixado, a curva $z(t) = (t, \theta_0)$ é uma geodésica do tipo nulo em $\mathcal{M}$ que intercepta γ em infinitos pontos. Portanto, existem infinitas geodésicas do tipo nulo que passam por $p_0 = (\theta_0, \theta_0)$ e γ .

Corolário 3.35. *Seja $\mathcal{M}_0 \times I$ munida da métrica lorentziana estática padrão $g((\xi, \tau), (\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) - \beta(x)\tau^2$. Suponha-se que a variedade riemanniana $(\mathcal{M}_0, \beta^{-1}g_0)$ seja completa e que tenha curvatura seccional $K \geq 0$. Então, se x_0 e x_1 forem não-conjugados em $(\mathcal{M}_0, \beta^{-1}g_0)$, para cada $t_0 \in I$, existe somente um número finito de segmentos geodésicos do tipo nulo apontantes para o futuro que partam do ponto $p = (x_0, t_0)$ e cheguem à curva temporal $\gamma(t) = (x_1, t)$, $t \in I$ em $\mathcal{M}$.*

No restante desta secção, serão apresentados resultados sobre estabilidade de existência de função estritamente convexa do tipo nulo por pequenas perturbações de métricas lorentzianas estacionárias. Deste modo, pode-se construir exemplos de variedades lorentzianas que não sejam estáticas, mas que admitam função estritamente convexa do tipo nulo.

Definição 3.36. Uma variedade *estacionária padrão* é uma variedade lorentziana da forma $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times I$, sendo $\mathcal{M}_0$ uma variedade munida de uma métrica riemanniana g_0 , $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, e g definida por $g((\xi, \tau)(\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) + 2g_0(\delta(x), \xi)\tau - \beta(x)\tau^2$, sendo δ um campo diferenciável de vetores em $\mathcal{M}_0$, $\beta : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma aplicação diferenciável, $x \in \mathcal{M}_0$, $\xi \in T_x\mathcal{M}_0$ e $\tau \in \mathbb{R}$.

A seguir provamos a estabilidade da positividade estrita do hessiano de uma função por variações conformes diminutas de uma métrica.

Lema 3.37. *Sejam $(\mathcal{M}_0, g_0)$ uma variedade riemanniana, e $\phi : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com hessiano estritamente positivo tal que $H^\phi(x)[v, v] \geq \lambda_0(x)g_0(v, v)$ para todo $x \in \mathcal{M}_0$, $v \in T_x\mathcal{M}_0$, sendo $\lambda_0 : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua. Sejam $\rho : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável e h_0 a métrica conforme a g_0 definida por $h_0 = \exp(\rho)g_0$. Nessas condições, se $g_0(\nabla\rho, \nabla\rho)$ for suficientemente "pequeno" em $C^0(\mathcal{M}_0, \mathbb{R})$, então ϕ também é estritamente convexa em relação à métrica h_0 .*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}_0$ uma geodésica em $(\mathcal{M}_0, g_0)$, e $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ um campo de Killing.

Utilizando-se a fórmula de Koszul (pg. 5) da métrica h_0 ,

$$\begin{aligned} 2h_0(Z, \nabla_Y X) &= \{Y(h_0(X, Z)) + X(h_0(Y, Z)) - Z(h_0(X, Y)) \\ &\quad - h_0([X, Z], Y) - h_0([Y, Z], X) - h_0([X, Y], Z)\} \end{aligned}$$

para $X = Y = \dot{x}$ obtém-se

$$\begin{aligned} h_0(Z, \nabla_{\dot{x}} \dot{x}) &= \exp(\rho(x))g_0(Z, \nabla_{\dot{x}} \dot{x}) \\ &= \frac{1}{2}\{2\dot{x}(\exp(\rho(x))g_0(\dot{x}, Z)) - Z(\exp(\rho(x))g_0(\dot{x}, \dot{x}))\} \\ &= \dot{x}(\exp(\rho(x))g_0(\dot{x}, Z)) - \frac{1}{2}Z(\exp(\rho(x))g_0(\dot{x}, \dot{x})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\rho(x))\dot{x}(g_0(\dot{x}, Z)) + \dot{x}(\exp(\rho(x)))g_0(\dot{x}, Z) \\
&\quad - \frac{1}{2}\exp(\rho(x))Z(g_0(\dot{x}, \dot{x})) - \frac{1}{2}Z(\exp(\rho(x)))g_0(\dot{x}, \dot{x}) \\
&= \dot{x}(\exp(\rho(x)))g_0(\dot{x}, Z) - \frac{1}{2}Z(\exp(\rho(x)))g_0(\dot{x}, \dot{x}) \\
&= dF(x)[\dot{x}]g_0(\dot{x}, Z) - \frac{1}{2}dF(x)[Z]g_0(\dot{x}, \dot{x}), \quad (F(x) = \exp(\rho(x))) \\
&= g_0(\nabla F(x), \dot{x})g_0(\dot{x}, Z) - \frac{1}{2}g_0(\nabla F(x), Z)g_0(\dot{x}, \dot{x}) \\
&= \exp(\rho(x))g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})g_0(\dot{x}, Z) - \frac{1}{2}\exp(\rho(x))g_0(\nabla \rho(x), Z)g_0(\dot{x}, \dot{x}) \\
&= \exp(\rho(x))g_0(Z, g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})\dot{x} - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})\nabla \rho(x)) \\
&= h_0(Z, g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})\dot{x} - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})\nabla \rho(x)) .
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})\dot{x} - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})\nabla \rho(x)$. (1)

Mostremos que ϕ é estritamente convexa em relação à métrica h_0 .

Seja $f(t) = \phi(x(t))$.

$$\begin{aligned}
f'(t) &= g_0(\nabla \phi(x(t)), \dot{x}(t)) \\
f''(t) &= g_0(\nabla_{\dot{x}}\nabla \phi, \dot{x}) + g_0(\nabla \phi, \nabla_{\dot{x}}\dot{x}) \\
&= H^\phi(x(t))[\dot{x}(t), \dot{x}(t)] + g_0(\nabla \phi(x(t)), \nabla_{\dot{x}}\dot{x}(t)) \quad (2) .
\end{aligned}$$

Substituindo-se (1) em (2), obtem-se

$$\begin{aligned}
f''(t) &= H^\phi(x(t))[\dot{x}(t), \dot{x}(t)] + g_0(\nabla \phi(x(t)), g_0(\nabla \rho(x), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \\
&\quad - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}(t), \dot{x}(t))\nabla \rho(x)) \\
&= H^\phi(x)[\dot{x}, \dot{x}] + g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})g_0(\nabla \phi(x), \dot{x}) \\
&\quad - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla \phi(x), \nabla \rho(x)) \\
&\geq H^\phi(x)[\dot{x}, \dot{x}] - |g_0(\nabla \rho(x), \dot{x})| |g_0(\nabla \phi(x), \dot{x})| \\
&\quad - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x}) |g_0(\nabla \phi(x), \nabla \rho(x))| \\
&\geq H^\phi(x)[\dot{x}, \dot{x}] - g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla \rho(x), \nabla \rho(x))^{\frac{1}{2}}g_0(\nabla \phi(x), \nabla \phi(x))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla \phi(x), \nabla \phi(x))^{\frac{1}{2}}g_0(\nabla \rho(x), \nabla \rho(x))^{\frac{1}{2}} \\
&= H^\phi(x)[\dot{x}, \dot{x}] - \frac{3}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla \rho(x), \nabla \rho(x))^{\frac{1}{2}}g_0(\nabla \phi(x), \nabla \phi(x))^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Logo, $f''(t) \geq H^\phi[\dot{x}, \dot{x}] - \frac{3}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla \rho(x), \nabla \rho(x))^{\frac{1}{2}}g_0(\nabla \phi(x), \nabla \phi(x))^{\frac{1}{2}}$.

Como $H^\phi \geq \lambda_0(x)g_0(\dot{x}, \dot{x})$, então

$$f''(t) \geq \lambda_0(x)g_0(\dot{x}, \dot{x}) - \frac{3}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x})g_0(\nabla\rho(x), \nabla\rho(x))^{\frac{1}{2}}g_0(\nabla\phi(x), \nabla\phi(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Se $g_0(\nabla\rho(x), \nabla\rho(x)) < \frac{4}{9}\lambda_0(x)^2g_0(\nabla\phi(x), \nabla\phi(x))^{-1}$, então

$$\begin{aligned} f''(t) &> \lambda_0(x)g_0(\dot{x}, \dot{x}) \\ &\quad - \frac{3}{2}g_0(\dot{x}, \dot{x}) \left(\frac{2}{3}\lambda_0(x)g_0(\nabla\phi(x), \nabla\phi(x))^{-\frac{1}{2}} \right) g_0(\nabla\phi, \nabla\phi)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda_0(x)g_0(\dot{x}, \dot{x}) - \lambda_0(x)g_0(\dot{x}, \dot{x}) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, neste caso, ϕ é estritamente convexa em relação a h_0 . $\square$

A estabilidade da convexidade do tipo nulo na seguinte proposição é demonstrada em [11].

Proposição 3.38. *Sejam $(\mathcal{M}_0, g_0)$ uma variedade riemanniana e $\phi : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com hessiano positivo tal que $H^\phi(x)[v, v] \geq \lambda_0(x)g_0(v, v)$ para todo ponto $x \in \mathcal{M}_0$ e todo vetor $v \in T_x\mathcal{M}_0$. Sejam δ um campo de vetores em $\mathcal{M}_0$, $\beta : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável e $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade lorentziana estacionária padrão, com $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$ e g a métrica*

$$g((\xi, \tau)(\xi, \tau)) = g_0(\xi, \xi) + 2g_0(\delta(x), \xi)\tau - \beta(x)\tau^2.$$

Se δ for suficientemente " C^1 -pequeno", i.e., se existir uma função $\epsilon \in C^0(\mathcal{M}_0, \mathbb{R}^+)$ suficientemente "pequena" tal que $g_0(\delta(x), \delta(x)) \leq \epsilon(x)$ e $g_0(\nabla_v\delta(x), \nabla_v\delta(x)) \leq \epsilon(x)g_0(v, v)$ para todo $x \in \mathcal{M}_0$ e para todo $v \in T_x\mathcal{M}_0$, e se $g_0\left(\frac{\nabla\beta}{\beta}, \frac{\nabla\beta}{\beta}\right)$ for suficientemente "pequeno" em $C^0(\mathcal{M}_0, \mathbb{R})$, então a função $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x)$ é estritamente convexa do tipo nulo (apontante para o futuro ou apontante para o passado) em $(\mathcal{M}, g)$.

Apêndice A

Resumo histórico

Em 1704, Isaac Newton, em seu livro *Opticks*, conjecturou que a luz poderia ser defletida por corpos maciços e que esta deflexão poderia ser, *ceteris paribus*, mais intensa a menores distâncias. Cabe igualmente recordar o célebre experimento da refração da luz, também realizado por Newton. Em 1783, John Michell, geólogo e astrônomo inglês, conjecturou que um corpo massivo suficientemente longe do sol poderia, ao ser atraído por este, atingir a velocidade da luz, e, portanto, seria invisível na direção do sol, tornando-se um corpo negro, pois a luz não conseguiria escapar dele. Em 1796, Peter Simon Laplace, aparentemente independente, notou que a força gravitacional de um corpo poderia ser tão intensa que nem a luz poderia escapar. De fato, considerando-se a expressão da velocidade de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

sendo M a massa dum corpo esférico maciço de raio R , se o raio for suficientemente pequeno, então v_e pode, de fato, ser mais alta do que a da luz (ver [21]). Michell e Laplace, com efeito, postularam a possibilidade de existência dos chamados buracos negros. Da expressão acima, para $v_e = c$, sendo c a velocidade da luz no vácuo, para $R < R_S$

$$R_S = \frac{2GM}{\sqrt{c}}$$

a luz não pode escapar, sendo R_S o raio de Schwarzschild, notação adotada em honra ao descobridor da solução das equações de Einstein no caso de simetria esférica no vácuo. Se uma partícula provém de longe de um corpo maciço, com uma velocidade inicial v , então esta partícula sofre uma deflexão de um ângulo α , dado por

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{GM}{v^2 r}$$

e, para α suficientemente pequeno tem-se

$$\alpha \simeq \frac{2GM}{v^2 r}$$

calculado por John Soldner. Desconhecendo o resultado de Soldner, Einstein obteve o mesmo valor para o ângulo de deflexão, assumindo o princípio de equivalência e a métrica espacial euclidiana. Posteriormente, com as equações da relatividade geral, Einstein obteve como valor o dobro do obtido no caso euclidiano:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 r} = \frac{2R_S}{r}$$

o qual foi confirmado com a visualização de um eclipse solar logo após a Primeira Guerra Mundial, sendo uma das observações confirmatórias feitas no Brasil pela equipe de Einstein durante um eclipse. A partir destas evidências experimentais da deflexão da luz, houve um desenvolvimento da idéia das lentes gravitacionais, ou seja, de corpos ou aglomerados de corpos maciços agirem como lentes, defletindo raios luminosos, e, em particular, a possibilidade de ocorrer a formação de imagens múltiplas de um mesmo objeto. A.S.Eddington parece que foi o primeiro a citar que imagens múltiplas podem ocorrer se duas estrelas estiverem alinhadas: analogamente a lentes da ótica geométrica, teríamos uma fonte de luz, um elemento defletor e um observador. Chwolson observou que se as duas estrelas estiverem perfeitamente alinhadas, então formar-se-iam figuras em forma de anel, o que hoje são chamados de anéis de Einstein. Einstein, além disto, observou que a luminosidade aparente também poderia ser alterada pela deflexão gravitacional da luz, e se houvesse um perfeito alinhamento entre fonte, defletor e observador, então a luminosidade poderia ser fortemente magnificada. Einstein concluiu, provavelmente devido à qualidade dos instrumentos de observação da época, que a observação de um efeito de multiplicidade de imagens seria muito difícil de ser realizada, problema que veio a ser solucionado com a construção de radiotelescópios. Com os radiotelescópios, tornou-se possível a detecção do efeito de lente gravitacional para outras frequências de ondas eletromagnéticas que tem o mesmo comportamento de propagação da luz. Já em 1913 Einstein estava interessado no efeito de lente gravitacional e no ângulo de deflexão de luz produzido pelo Sol. Ele procurou o diretor do Mt. Wilson Observatory, e perguntou se seria possível medir a posição de estrelas perto do Sol durante o dia, a fim de se medir o ângulo de deflexão da luz pelo Sol. Recentemente foram encontrados escritos de Einstein de 1912 (antes, portanto, da elaboração final da teoria de relatividade geral) em que ele cita a possibilidade de existência de multiplicidade, assim como de magnificação de imagens detectadas de fontes distantes. A formação de imagens múltiplas depende da existência de defletores apropriados, com densidade suficientemente alta, de distância apropriada entre observador e defletor, e de distância apropriada entre defletor e fonte. Se houver um ou mais elementos defletores, que eventualmente ajam em diversos pontos da trajetória da luz, então pode-se visualizar objetos luminosos que seriam invisíveis sem os elementos defletores, sendo a visualização propiciada pela própria deflexão, ou pela magnificação de luminosidade, pois, por exemplo, a luz oriunda de uma estrela dentro de uma galáxia ou aglomerado de estrelas poderia ser

retirada pela atuação de um defletor. Até 1979 houve apenas conjecturas a respeito das lentes gravitacionais e imagens múltiplas, até que D. Walsh, R.F. Carswell e Weymann anunciaram a detecção do primeiro candidato a lente gravitacional, a fonte 0957+561 (obtida por radiotelescópio), o qual aparece como uma duplicata de um quasar (objeto quase estelar). Depois desta primeira observação, houve muitas outras, inclusive de arcos e de anéis (quase fechados) que deixam poucas dúvidas a respeito da natureza de lente gravitacional (com formação de imagens múltiplas) de muitas das observações realizadas. Recentemente houve observações de efeitos de lentes gravitacionais cujas fontes e defletores são galáxias.

Um modelo matemático para o fenômeno das lentes gravitacionais é encontrado em [7, 8].

Posfácio

No concernente ao problema da finitude do número de geodésicas para o caso riemanniano, surgiu a questão de a existência de uma função estritamente convexa $F : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ com um ponto crítico não-degenerado ser ou não suficiente para garantir a finitude do número de segmentos geodésicos que incidam em um par genérico de pontos, mesmo que conjugados. Esta questão, pelo que sei, ainda não está resolvida. Eu ainda não a consegui demonstrar, nem encontrar um contra-exemplo.

Referências Bibliográficas

- [1] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1996.
- [2] R. L. Bishop, B. O'Neill, *Manifold of Negative Curvature*, Tran. Am. Math. S., 145, 1-49, 1969.
- [3] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [4] J. Cheeger, D. Gromoll, *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math. (2)96, 413-443, 1972.
- [5] R. P. Geroch, *Domain of Dependence*, J. Math. Phys. 11, 437-449, 1972.
- [6] D. Gromoll, W. Meyer, *On Complete Manifolds of Positive Curvature*, Ann. of Math. 90, 75-90, 1969.
- [7] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *A Variational Theory for Light Rays in Stably Causal Lorentzian Manifolds : regularity and multiplicity results*, Commun. Math. Phys. 187, 375-415, 1997.
- [8] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *A Morse Theory for Light Rays in Stably Causal Lorentzian Manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré, 69, 359-412, 1998.
- [9] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *A Morse Theory for Massive Particles and Photons by Fermat Principles in General Relativity*, aceito no Journal of Geometry and Physics, 1999 (LANL math-ph/9905009).
- [10] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *Convexity and Finiteness of the Number of Geodesics. Applications to the Multiple-Image Effect*, Class. Quantum Grav., 16, 731-748, 1999.
- [11] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *On the Finiteness of the Light Rays Between a Source and an Observer for Conformally Stationary Metrics* (prestes a ser publicado na revista Gen. Rel.Grav.).
- [12] S.W.Hawking, G.F.Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- [13] I. Kovner, *Fermat Principle in Arbitrary Gravitational Fields*, Astrophys.J., 351, 114-120.
- [14] A. Masiello, *Variational Methods in Lorentzian Geometry*, Pitman Research Notes in Mathematics 309, Longman, London 1994.
- [15] S.X.Mendonça, P. Piccione, *Convexity, Curvature and Geodesics in Riemannian Geometry*, preprint.
- [16] Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1973.
- [17] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [18] A.W. Roberts, D.E.Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, 1973.
- [19] H.L. Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, 1968.
- [20] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [21] P. Schneider, J. Ehlers, E. Falco, *Gravitational Lenses*, Springer Verlag.
- [22] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, Publish or Perish, Inc., Boston, 1970.
- [23] C. Udriste, *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, Kluwer, 1994.

- [24] D.Walsh, R.Carlswell, R. Weymann, Nature 279, 381-384, 1979.

Índice Remissivo

- Aplicação conforme, 13, 102
- Assinatura, 1, 90
- Campo conformemente Killing, 99
- Campo de Jacobi, 8
- Campo de Killing, 7, 9, 85
- Campo de tensores, 1
- Campo do tipo nulo, 2
- Campo espacial, 2
- Campo gradiente, 5
- Campo irrotacional, 83, 104
- Campo temporal, 2
- Campo temporal de Killing, 90
- Caráter causal, 63
- Cilindro, 53, 89
- Colchete de Lie, 4
- Coleção equicontínua, 74
- Coleção pontualmente limitada, 74
- Conexão afim (∇), 2
- Conexão compatível com a métrica, 4
- Conexão de Levi-Civita, 4
- Conjunto convexo em $\mathcal{V}$, 45
- Conjunto espacialmente compacto, 90
- Conjunto totalmente convexo em $\mathcal{M}$, 46
- Contrátil, 50
- Convexidade global, 35
- Convexidade local, 33, 35
- Curva causal, 2
- Curva do tipo nulo, 2
- Curva espacial, 2, 92
- Curva integral, 8, 55
- Curva temporal, 2
- Curva temporal inestendível, 95
- Curvatura de Killing, 85
- Curvatura radial (K_p), 65
- Curvatura seccional (K), 22
- Derivada covariante, 2, 4
- Derivada de Lie, 6
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida, 10
- Desigualdade de Minkowski invertida, 10
- Difeomorfismo, 66
- Distribuição globalmente integrável, 104
- Distribuição integrável segundo Frobenius, 104
- Distribuição localmente integrável, 106
- Distribuição ortogonal, 104
- Energia de um campo de Killing, 85
- Equação de Jacobi, 8
- Equações geodésicas, 7
- Esfera, 49
- Espaço simétrico, 20
- Espaço topológico contrátil, 50
- Espaço-tempo
 - anti-de Sitter bidimensional, 58
 - conformemente estático, 104
 - de de Sitter, 18
 - de Kerr, 15
 - de Minkowski, 14
 - de Reissner-Nordström, 15
 - de Robertson-Walker, 16
 - de Robertson-Walker generalizado, 17
 - de Schwarzschildt, 15
 - pseudo-euclidiano, 15
- Espaço-tempo de Robertson-Walker estendido, 17
- Fórmula de Koszul, 5, 107
- Fluxo, 8
- Fluxo local, 9, 92
- Função
 - absolutamente contínua, 36, 39
 - convexa, 40
 - de Cantor-Lebesgue, 40
 - de variação limitada, 38
 - estritamente convexa do tipo nulo, 57

- estritamente convexa espacial, 57
- estritamente convexa temporal, 57
- lipschitziana, 36
- singular, 36
- Função Y -invariante, 93
- Função altura, 89
- Função convexa
 - do tipo nulo, 63
 - em $(\mathcal{M}, g)$, 47, 57
 - em $\mathcal{V}$, 45
 - em $\mathbb{R}$, 27
 - espacial, 63
 - temporal, 63
- Função de Busemann, 73, 81
- Função de Busemann
 - no $\mathbb{R}^2$, 82
 - no $\mathbb{R}^n$, 82
 - no cilindro, 83
- Função energia, 83, 84, 86
- Função espacialmente própria, 90
- Função estritamente
 - convexa temporal, 63
- Função estritamente convexa
 - do tipo nulo, 63
 - em $(\mathcal{M}, g)$, 47, 57
 - em $\mathcal{V}$, 45
 - em $\mathbb{R}$, 27
 - espacial, 63
- Função norma em $\mathcal{V}$, 45
- Função quadrado da distância a um conjunto, 71
- Função quadrado da distância a um ponto, 68
- Função suporte, 76
- Função-tempo, 94
- Funcional tempo-de-chegada, 94
- Futuro causal, 18

- Geodésica, 7
- Geodésica causal, 2
- Geodésica do tipo nulo, 2
- Geodésica espacial, 2
- Geodésica fechada, 48
- Geodésica inestendível, 8
- Geodésica maximal, 8
- Geodésica normalizada, 7
- Geodésica temporal, 2
- Gradiente, 5
- Grupo de isometrias, 16
- Grupo de isotropias, 16
- Grupo de Lie, 20

- Hessiano, 6

- Hiperbolóide de uma folha, 51
- Hipersuperfície espacial, 90
- Homotopia, 50

- Índice de uma métrica, 1
- Integral indefinida, 39, 40
- Invariância por difeomorfismo, 66
- Invariância por isometria, 66
- Isometria, 66

- Métrica biinvariante, 21
- Métrica conforme, 10, 57
- Métrica conformemente estacionária, 99
- Métrica conformemente plana, 55
- Métrica de Kerr, 15
- Métrica de Minkowski, 14, 98
- Métrica de Reissner-Nordström, 15
- Métrica de Robertson-Walker, 16
- Métrica de Schwarzschildt, 15
- Métrica invariante à direita, 21
- Métrica invariante à esquerda, 21
- Métrica não-degenerada, 1
- Métrica pseudo-euclidiana, 15
- Métrica pseudo-riemanniana, 1
- Métrica riemanniana auxiliar, 90
- Medida Exterior de Lebesgue, 37
- Modelos cosmológicos, 16

- Pólo, 64
- Parabolóide, 48
- Ponto crítico, 53
- Ponto crítico não-degenerado, 53
- Ponto de mínimo, 53
- Ponto de mínimo global, 53
- Pontos conjugados, 94
- Pontos conjugados por geodésicas do tipo nulo, 94
- Pré-geodésica, 7
- Problema de Cauchy, 88, 95
- Produto lorentziano, 9
- Produto lorentziano distorcido, 9
- Produto pseudo-riemanniano distorcido, 9

- Raio, 68
- Raio fugiente, 68
- Recobrimento à Vitali, 37
- Reta-suporte, 32

- Símbolos de Christoffel, 2
- Segmento geodésico, 7
- Segmentos apontantes para o futuro, 95
- Subdiferencial, 61
- Subgradiente, 60

- Subvariedade isotrópica, 16
- Subvariedades, 2
- Superfície de Cauchy, 19, 97
- Superfície de revolução, 48, 50, 66
- Tensor, 1
- Tensor de curvatura, 6
- Teorema da Convergência Monótona, 37
- Teorema da dependência contínua, 95, 96
- Teorema de Arzela-Ascoli, 74
- Teorema de finitude para o caso riemanniano, 87
- Teorema de Hadamard-Cartan, 64
- Teorema de Hopf-Rinow, 64
- Topologia de Alexandrov, 63
- Translação à direita, 20
- Translação à esquerda, 20
- Transporte paralelo, 3
- Universo estático de Einstein, 16
- Varição geodésica, 69, 89
- Variedade
 - causal, 18
 - fortemente causal, 18
 - globalmente hiperbólica, 18, 92
 - isotrópica, 16
 - lorentziana, 9
 - lorentziana conformemente estacionária, 99
 - lorentziana estacionária, 14
 - lorentziana estática, 102
 - lorentziana estática padrão, 102
 - lorentziana estacionária, 93
 - lorentziana estacionária padrão, 106
 - pseudo-riemanniana, 2
- Vetor causal, 2
- Vetor do tipo nulo, 2
- Vetor espacial, 2
- Vetor temporal, 2