IMERSÕES SUB-RIEMANNIANAS
EM
FORMAS ESPACIAIS COMPLEXAS

Albetã Costa Mafra

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração: Geometria Diferencial
Orientador: Prof. Dr. José Antonio Verderesi

São Paulo, Fevereiro de 2001

IMERSÕES SUB-RIEMANNIANAS
EM
FORMAS ESPACIAIS COMPLEXAS

Este trabalho corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por Albetã Costa Mafra
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 05 de Maio de 2001

Banca examinadora:

Prof. Dr José Antônio Verderesi (Orientador) - IME-USP

Prof. Dr Renato Pedrosa - IMECC-UNICAMP

Prof. Dr Antônio Carlos Asperti - IME-USP

Agradecimentos

- ao Prof. José Antonio Verderesi pela paciência e seriedade durante os quatro anos de orientação acadêmica: 2 de iniciação científica e 2 de mestrado em matemática.
- ao Verderesi, amigo.
- ao Prof. e amigo Carlos Alberto Knudsen pelos incentivos diretos e indiretos.
- aos amigos do CRUSP, em especial aos que moraram comigo e ao apartamento B511.
- ao amigo Vilhena.
- à Prof^a. Leilá Figueiredo, de quem uma pergunta me fez mudar a forma de pensar.
- em especial àqueles aos quais mais amo neste mundo: meus pais.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar teoremas de rigidez para um tipo especial de variedades sub-Riemannianas isometricamente imersas em um espaço de formas complexas.

Definimos e estudamos algumas características de um tipo especial de geometria sub-Riemanniana. Provamos a existência e unicidade de uma conexão associada à estrutura sub-Riemanniana e a relacionamos com uma determinada conexão de Levi-Civita.

Após uma breve revisão da teoria de uma hipervariiedade isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana e do estudo de um caso particular de submersão Riemanniana, provamos alguns teoremas de rigidez para uma hipervariiedade sub-Riemanniana isometricamente imersa em uma forma espacial complexa. Finalizamos analisando o caso de imersões de variedades sub-Riemannianas homogêneas tridimensionais e fazemos alguns exemplos de imersões isométricas.

Abstract

The purpose of this work is to study rigidity theorems for a special type of sub-Riemannian hypersurfaces that are isometrically immersed in complex space forms.

We define and study a special type of sub-Riemannian manifold. We prove the existence and uniqueness of a connection associated with that sub-Riemannian structure and we also relate it to the Levi-Civita connection of a metric which is naturally defined from the sub-Riemannian one.

After doing a brief review of the theory of isometric immersions of hypersurfaces in Riemannian manifolds and examining a special type of Riemannian submersion we prove theorems related to the rigidity of isometric immersions of sub-Riemannian hypersurfaces in complex space forms. We finish this work studying the tridimensional homogeneous sub-Riemannian case and showing some examples of isometric immersions in complex space forms.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Espaços de curvatura holomorfa constante	4
1.1 Espaços vetoriais quase-complexos e variedades complexas	4
1.2 O espaço projetivo complexo	11
1.3 O espaço hiperbólico complexo	18
2 Geometria sub-Riemanniana	20
2.1 Definições e a conexão sub-Riemanniana	20
2.2 Propriedades da conexão sub-Riemanniana	23
2.3 Exemplos de variedades sub-Riemannianas homogêneas	25
2.4 Relação entre as conexões Riemanniana e sub-Riemanniana	34
3 Imersões Isométricas sub-Riemannianas	36
3.1 Hipervariedades	36
3.2 Submersões	38
3.3 O caso sub-Riemanniano	46

3.4	O caso sub-Riemanniano tridimensional	60
3.5	Imersões isométricas de S_r^3 em $N(c)$	68
3.6	Imersão isométrica de Q_r^3 em $N(c)$	75
3.7	Imersão isométrica de H^3 em $N(c)$	78

Introdução

Geometria sub-Riemanniana pode ser entendida como uma generalização do que é classicamente conhecido como geometria Riemanniana. Em resumo, geometria sub-Riemanniana é a geometria de uma distribuição métrica, isto é, a geometria de uma variedade diferenciável M a qual associamos um sub-fibrado $\mathcal{D}$, do fibrado tangente TM , o qual esta munido com uma métrica g . Este tipo de estrutura $(M, \mathcal{D}, g)$ tem aparecido nos mais diferentes ramos da matemática pura e aplicada. O caso $\mathcal{D} = TM$ resgata a geometria Riemanniana enquanto que $\mathcal{D} \neq TM$ e integrável nos levará a teoria das folheações. Ambos os casos foram e são bastante estudados. Porém, apesar do caso Riemanniano e de folheações, com folhas munidas com uma métrica, poderem ser considerados sub-Riemannianos é mais comum associar o nome sub-Riemanniano ao caso no qual $\mathcal{D}$ é um sub-fibrado não integrável. Alguns casos desta geometria nos quais $\mathcal{D}$ é não integrável são amplamente estudados, podemos citar, entre outros, o caso de contacto, isto é, o caso em que $\mathcal{D}$ tem co-dimensão 1 e a aplicação bilinear

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\longrightarrow TM/\mathcal{D} \\ (X, Y) &\longrightarrow [X, Y] \text{ mod } \mathcal{D}\end{aligned}$$

é não degenerada. Neste caso estão associados à distribuição $\mathcal{D}$ uma 1-forma diferenciável θ e um campo diferenciável ξ de tal modo que: $\mathcal{D} = \ker \theta$, $(d\theta|_{\mathcal{D}})^n = 2^n n! dV$, $\theta(\xi) = 1$ e $d\theta(\xi, \cdot) \equiv 0$, sendo dV a forma volume em $\mathcal{D}$ e $2n$ a dimensão de $\mathcal{D}$.

Em nosso trabalho faremos uso de uma estrutura sub-Riemanniana que engloba as de contacto. Tal estrutura é dada por $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$, sendo ξ um campo diferenciável, globalmente definido e transversalmente orientável. Este caso é equivalente a tomar um sub-fibrado do fibrado tangente de uma variedade Riemanniana M . Em verdade, definindo uma métrica $\tilde{g}$ em TM da seguinte forma: $\tilde{g}|_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} = g$, $\tilde{g}(\xi, \mathcal{D}) \equiv 0$ e $\tilde{g}(\xi, \xi) = 1$ transforma-

se M em uma variedade Riemanniana. Uma forma de se conseguir tais estruturas sub-Riemannianas é partir de uma variedade M de dimensão $2n + 1$ e imergi-la em uma forma espacial complexa $N(c)$ de curvatura holomorfa c e definir $\mathcal{D} = TM \cap J(TM)$. desta maneira, $\mathcal{D}$ terá dimensão $2n$ e ficará definida em $\mathcal{D}$ uma estrutura quase-complexa induzida pela estrutura quase-complexa do ambiente $N(c)$. Em essência, o que faremos neste trabalho pode ser relacionado com estruturas de Cauchy-Riemann e variedades Sasakianas [22].

Uma pergunta natural, para geômetras, é: Dadas duas variedades sub-Riemannianas $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$ e $(\hat{M}, \hat{\mathcal{D}}, \hat{g}, \hat{\xi})$ isometricamente imersas em uma forma espacial complexa $N(c)$, em que condições elas diferem por uma isometria complexa Ψ do ambiente $N(c)$, de forma que $\hat{M} = \Psi(M)$ e $\hat{\mathcal{D}} = \Psi(\mathcal{D})$? Para a resposta desta pergunta utilizamos os trabalhos de R. Takagi e outros em [14], [15], [16], [17] e [18] que detêm resultados relativos a rigidez de hipervariedades no espaço projetivo complexo. Também fazemos uso dos trabalhos de J. A. Verderesi em [19] e [20] que tratam de teoremas de rigidez em termos dos invariantes sub-Riemannianos.

No primeiro capítulo fazemos algumas definições e teoremas concernentes aos espaços vetoriais quase complexos e às variedades complexas. Também nesse capítulo fazemos toda construção do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ a partir da esfera de raio r . Demonstramos também que certos planos no espaço tangente de $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ invariantes pela estrutura quase-complexa possuem as curvaturas seccionais constantes e iguais a $\frac{1}{r^2}$. O mesmo cálculo, fazendo algumas pequenas mudanças, leva-nos a verificar que os planos do espaço tangente do espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ possuem curvaturas seccionais constantes e iguais a $\frac{-1}{r^2}$.

No segundo capítulo definimos o que é uma geometria sub-Riemanniana, enunciamos e demonstramos a existência e unicidade de uma conexão associado à estrutura $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$, estudamos algumas de suas propriedades e a relacionamos com a conexão de Levi-Civita de $\tilde{g}$. Nesta parte também discutimos o caso de grupos de Lie tridimensionais com métricas invariantes à esquerda.

O terceiro capítulo, o mais relevante acredito, começa com uma breve recordação da teoria de uma imersão isométrica Riemanniana para uma hipervariiedade, lá expressamos as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi para uma hipervariiedade. Como o $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ e o $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ estão relacionados com espaços de curvaturas seccionais constantes de forma que uma destas relações é um caso particular de submersão Riemanniana, fazemos um pouco da teoria desta submersão Riemanniana com o objetivo de transportar para $N(c)$

resultados dos espaços de curvaturas seccionais constante. Tratamos então o problema sub-Riemanniano e reescrevemos as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi para este caso, a seguir enunciamos e demonstramos alguns teoremas de rigidez e analisamos o caso de imersões, em $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{r^2})$ e $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{r^2})$, de variedades sub-Riemannianas homogêneas tridimensionais. Finalizamos este capítulo com exemplos de algumas imersões .

Espaços de curvatura holomorfa constante

Começaremos o nosso trabalho descrevendo os espaços nos quais iremos trabalhar. Estes terão algumas propriedades essenciais para o que pretendemos fazer e serão construídos a partir de variedades diferenciáveis bem conhecidas como o $\mathbb{R}^{2n}$, a esfera de raio r (S_r^{2n+1}) e a quádrlica Q_r^{2n+1} .

1.1 Espaços vetoriais quase-complexos e variedades complexas

O espaço $\mathbb{C}^n$: Consideremos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ e J a transformação linear $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que se $\{e_1; \dots; e_{2n}\}$ é a base canônica usual de $\mathbb{R}^{2n}$ teremos

$$\begin{aligned} J(e_j) &= e_{n+j} & \text{se } j &= 1, 2, \dots, n \\ J(e_j) &= -e_{j-n} & \text{se } j &= n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Podemos transformar $(\mathbb{R}^{2n}, J)$ em um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. De fato, se $(a + ib) \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$, definimos $(a + ib)v = av + bJ(v)$. Com esta multiplicação de escalares em $\mathbb{C}$ por vetores em $\mathbb{C}^n$ verifica-se que teremos satisfeitos todos os axiomas de espaço vetorial, sendo a soma igual a mesma do $\mathbb{R}^{2n}$. Ao espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ obtido denotamos por $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}^n$ possui uma métrica natural que é a do $\mathbb{R}^{2N}$, que também pode ser obtida tomando-se a parte real da forma sesquilinear canônica do $\mathbb{C}^n$ expressa por $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$.

Em geral, para um espaço vetorial real V com uma estrutura quase-complexa J , isto é, $J : V \rightarrow V$ é linear e $J^{-1} = -J$, podemos fazer o produto tensorial de V por $\mathbb{C}$ ($V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$,

$\mathbb{C}$ como um $\mathbb{R}$ espaço vetorial) que claramente é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Além disso, J se estende de maneira natural a uma $\tilde{J} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{J}(u \otimes a) = (Ju) \otimes a.$$

A partir de agora $\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$. Como $\tilde{J}^2 = -I$, segue que os auto-valores de $\tilde{J}$ são i e $-i$. Se denotarmos

$$\begin{aligned} V[i] &= \{u \in V \otimes \mathbb{C} \mid \tilde{J}(u) = iu\}, \\ V[-i] &= \{u \in V \otimes \mathbb{C} \mid \tilde{J}(u) = -iu\}, \end{aligned}$$

teremos que $V \otimes \mathbb{C} = V[i] \oplus V[-i]$. Um cálculo simples nos mostra que

$$\begin{aligned} V[i] &= \{X - iJ(X) : X \in V\}, \\ V[-i] &= \{X + iJ(X) : X \in V\}. \end{aligned}$$

A aplicação $J : V \rightarrow V$ induz uma $J^* : V^* \rightarrow V^*$ por

$$(J^*w)(v) = w(Jv).$$

Claramente $J^* = (J^*)^{\vee} - 1 = -I$. De forma totalmente análoga a $V \otimes \mathbb{C}$, temos que

$$V^* \otimes \mathbb{C} = V^*[i] \oplus V^*[-i].$$

Usando algumas propriedades do produto tensorial (ver [1]) temos que

$$\begin{aligned} (V \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V \otimes \mathbb{C}) &\cong (V[i] \otimes_{\mathbb{C}} V[i]) \oplus (V[i] \otimes_{\mathbb{C}} V[-i]) \oplus (V[-i] \otimes_{\mathbb{C}} V[i]) \\ &\quad \oplus (V[-i] \otimes_{\mathbb{C}} V[-i]) \\ (V^* \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V^* \otimes \mathbb{C}) &\cong (V^*[i] \otimes_{\mathbb{C}} V^*[i]) \oplus (V^*[i] \otimes_{\mathbb{C}} V^*[-i]) \oplus (V^*[-i] \\ &\quad \otimes_{\mathbb{C}} V^*[i]) \oplus (V^*[-i] \otimes_{\mathbb{C}} V^*[-i]) \\ (V^* \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V \otimes \mathbb{C}) &\cong (V^*[i] \otimes_{\mathbb{C}} V[i]) \oplus (V^*[-i] \otimes_{\mathbb{C}} V[-i]) \oplus (V^*[-i] \\ &\quad \otimes_{\mathbb{C}} V[i]) \oplus (V^*[i] \otimes_{\mathbb{C}} V[-i]). \end{aligned}$$

Usaremos bastante em nosso trabalho formas lineares a valores complexos. Definamo-las precisamente tendo em mente que $\Lambda^k V$ é o espaço das k -formas reais para o espaço vetorial real V .

Definição 1.1.1 *Uma forma a valores complexos sobre um espaço vetorial real V é um elemento de $(\Lambda^k V) \otimes \mathbb{C}$. O produto exterior em $(\Lambda^k V) \otimes \mathbb{C}$ é dado pela extensão linear do produto exterior de $\Lambda^k V$.*

Proposição 1.1.2 $\Lambda^k V \otimes \mathbb{C} \cong \Lambda^k(V \otimes \mathbb{C})$.

Demonstração: é imediata a partir das definições de $\Lambda^k V \otimes \mathbb{C}$ e de $\Lambda^k(V \otimes \mathbb{C})$. $\square$

Como consequência teremos que: tomando $\Lambda^k(V \otimes \mathbb{C})$ o espaço das k -formas alternadas sobre $V \otimes \mathbb{C}$ e denotando por $\Lambda(V \otimes \mathbb{C}) = \sum_{r=0}^n \Lambda^r(V \otimes \mathbb{C})$, então

$$\Lambda(V \otimes \mathbb{C}) = \sum_{r=0}^n \sum_{p+q=r} \Lambda^p(V[i]) \wedge \Lambda^q(V[-i]).$$

Em um espaço vetorial V de dimensão $2n$ com uma estrutura quase-complexa J podemos definir um produto interno h da seguinte forma: tomemos $e_1 \in V \setminus \{0\}$ e $e_{n+1} = Je_1$. É fácil verificar que $\{e_1, Je_1\}$ é L.I. Tomemos $e_2 \in V \setminus [e_1, Je_1]$ e $e_{n+2} = Je_2$, analogamente ao primeiro caso $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ é L.I., pois $\{e_1, Je_1, e_2\}$ é L.I. por construção. É suficiente continuar nesta direção. Construída a base $\{e_1, e_2, \dots, e_n, Je_1, Je_2, \dots, Je_n\}$, é suficiente impor que ela seja ortonormal ao produto interno, isto é,

$$\begin{aligned} h(e_j, e_k) &= \delta_j^k, \\ h(e_j, Je_k) &= 0, \\ h(Je_j, Je_k) &= \delta_k^j. \end{aligned}$$

Se $X = \sum_{j=1}^n X^j e_j + X^{j+n} Je_j$ e $Y = \sum Y^j e_j + Y^{j+n} Je_j$,

$$\begin{aligned} h(JX, JY) &= h\left(\sum_j (-X^{j+n} e_j + X^j Je_j), \sum_j (-Y^{j+n} e_j + Y^j Je_j)\right) \\ &= \sum_j X^{j+n} Y^{j+n} + X^j Y^j = h(X, Y). \end{aligned}$$

Definição 1.1.3 A um produto interno h sobre um espaço vetorial V com uma estrutura complexa J que possui J como isometria denominamos *Hermitiano*.

Associado a h temos uma forma bilinear ω definida por

$$\omega(X, Y) = h(X, JY).$$

Proposição 1.1.4 A 2-forma ω definida acima é alternada.

Demonstração:

$$\omega(Y, X) = h(Y, JX) = -h(J^2 Y, JX) = -h(JY, X) = -h(X, JY) = -\omega(X, Y).$$

$\square$

Em coordenadas ω é dada por

$$\begin{aligned}\omega(X, Y) &= h\left(\sum X^j e_j + X^{j+n} J e_j, \sum -Y^{j+n} e_j + Y^j J e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (X^{j+n} Y^j - X^j Y^{j+n}).\end{aligned}$$

Já sabemos que J possui uma extensão natural para $V \otimes \mathbb{C}$. Por linearidade podemos estender h a uma $\tilde{h}$ sobre $V \otimes \mathbb{C}$ e portanto faz sentido

$$\tilde{\omega}(X, Y) = \tilde{h}(X, \tilde{J}Y) \quad \text{para } X, Y \in V \otimes \mathbb{C}.$$

De $V \otimes \mathbb{C} = V[i] \oplus V[-i]$ e do fato facilmente verificado que $V[i] = \{X - iJX \mid X \in V\}$ e $V[-i] = \{X + iJX \mid X \in V\}$ teremos que

$$\left\{ \frac{e_j - iJ e_1}{2}, \dots, \frac{e_h - iJ e_n}{2}, \frac{e_j + iJ e_1}{2}, \dots, \frac{e_n + iJ e_n}{2} \right\} (*)$$

é base de $V \otimes \mathbb{C}$. Seja $\{\theta^1, \dots, \theta^{2n}\}$ a base dual de $\{e_1, \dots, e_n, J e_1, \dots, J e_n\}$, $-J^* \theta^j(J e_j) = -\theta^j(-e_j) = 1$ e $J^* \theta^j(J e_k) = 0$ se $k \neq j$ e $J^* \theta^j(e_k) = 0$. Portanto, $\theta^{n+j} = -J^* \theta^j$. Logo, $\{\theta^1 - iJ^* \theta^1, \dots, \theta^n - iJ^* \theta^n, \theta^1 + iJ^* \theta^1, \dots, \theta^n + iJ^* \theta^n\}$ é a base dual a $(*)$. Voltando a $\tilde{\omega}$ teremos, fazendo $f_j = e_j - iJ e_j$, $\bar{f}_j = e_j + iJ e_j$, $\omega^j = \theta^j + iJ^* \theta^j$ e $\bar{\omega}^j = \theta^j + iJ^* \theta^j$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(X, Y) &= \tilde{h}(X, \tilde{J}Y) = \tilde{h}\left(\sum_j \omega^j(X) f_j + \bar{\omega}^j(X) \bar{f}_j, i \left(\sum_j \omega^j(Y) f_j - \bar{\omega}^j(Y) \bar{f}_j\right)\right) \\ &= 2 \sum_j \sum_k i[\omega^j(X) \bar{\omega}^k(Y) - \omega^j(Y) \bar{\omega}^k(X)] \tilde{h}(f_j, \bar{f}_k).\end{aligned}$$

Portanto, denotando $h_{j\bar{k}} = \tilde{h}(f_j, \bar{f}_k)$ teremos $\tilde{\omega} = 2i \sum_{j \leq k} h_{j\bar{k}} \omega^j \wedge \bar{\omega}^k$.

Proposição 1.1.5 *A forma ω definida acima é tal que $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ é um múltiplo da forma volume do $\mathbb{R}^{2n}$.*

Demonstração: a proposição é imediata a partir do fato que: em relação à base $\{\theta^1, \dots, \theta^{2n}\}$, ω se escreve da seguinte forma

$$\omega = \theta^1 \wedge \theta^{n+1} + \theta^2 \wedge \theta^{n+2} + \dots + \theta^n \wedge \theta^{2n}$$

□

Da forma como foi definido o $\mathbb{C}^n$ possui uma topologia natural: a topologia do $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição 1.1.6 *Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre o aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é denominada holomorfa se como uma aplicação de $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^2$ ela é C^∞ e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{Re}(f))}{\partial x_j} &= \frac{\partial(\operatorname{Im}(f))}{\partial y_j} \\ \frac{\partial(\operatorname{Re}(f))}{\partial y_j} &= -\frac{\partial(\operatorname{Im}(f))}{\partial x_j} \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$. Uma aplicação de $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ será denominada holomorfa se cada uma de suas componentes é holomorfa.

Definição 1.1.7 *Dada uma aplicação de f de um aberto de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^m$ dizemos que ela é compatível com as estruturas complexas de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ se*

$$df \circ J = J \circ df$$

sendo df a diferencial da aplicação f .

Lema 1.1.8 *Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, C^∞ como uma aplicação do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2m}$, será holomorfa se e somente se ela for compatível com as estruturas complexas de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$.*

Demonstração: Imediata □

Definição 1.1.9 *Uma estrutura complexa sobre uma variedade M de classe C^∞ e dimensão par é uma família maximal de cartas $\{(\varphi_\lambda, U_\lambda) : \varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}$ tal que $\bigcup U_\lambda = M$ e satisfazem a condição de transição holomorfa, isto é, para todo par de índices λ e μ teremos*

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

é uma aplicação holomorfa quando considerada como uma aplicação de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.1.10 *Uma variedade complexa M é uma variedade diferenciável M sobre a qual é dada uma estrutura complexa. As cartas que compõem a estrutura complexa denominamos de cartas holomorfas.*

Definição 1.1.11 *Uma estrutura quase-complexa em uma variedade diferenciável M consiste em um campo tensorial J , C^∞ de tipo $(1,1)$, tal que $J^2 = -I$.*

Lema 1.1.12 *Qualquer conjunto de cartas cujo domínio cobre a variedade M e satisfaz a propriedade de transição holomorfa determina uma única estrutura quase-complexa sobre M .*

Demonstração: para uma variedade complexa M seja $T_p M$ o seu espaço tangente (do ponto de vista real) no ponto p e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma carta holomorfa tal que $p \in U$. Podemos então definir um operador linear J_p de $T_p M$ em $T_p M$ da seguinte maneira

$$J_p = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \circ J_{\mathbb{R}} \circ d\varphi_p$$

É imediato que J_p independe da carta pela qual ele foi definido. Portanto, temos um campo tensorial J_M de tipo $(1,1)$ definido sobre M e ele é tal que $J_M^2 = -I$. $\square$

Definição 1.1.13 *Sejam M e N duas variedades complexas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ . Dizemos que f é holomorfa se $df \circ J_M = J_N \circ df$.*

Não demonstraremos neste trabalho, mas é verdadeiro que se uma função $f : M \rightarrow N$, entre duas variedades complexas M e N , é holomorfa no sentido da definição acima, então para todos os pares de cartas holomorfas φ de M e ψ de N para os quais faz sentido

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

esta será holomorfa no sentido da definição 1.1.6.

Sendo $\Lambda^k M$ o conjunto das k -formas diferenciais da variedade M temos:

Definição 1.1.14 *Uma k -forma a valores complexos sobre uma variedade diferenciável M é um elemento de $(\Lambda^k M) \otimes \mathbb{C}$. O produto exterior em $(\Lambda^k M) \otimes \mathbb{C}$ é dado pela extensão linear do produto exterior de $\Lambda^k M$.*

Exemplos:

$\mathbb{C}^n$: Identificando $p \in \mathbb{R}^{2n}$ com suas coordenadas canônicas, isto é, $p = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ podemos definir $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por $\varphi(v) = v$. Também podemos representar $p \in \mathbb{C}^n$ da seguinte forma:

$$p = \sum_{j=1}^n x_j e_j + \sum_{j=1}^n y_j e_{n+j} = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + y_j J e_j) = \sum_{j=1}^n (x_j + i y_j) e_j = (z_1, \dots, z_n),$$

sendo $z_j = x_j + i y_j$ e logo teremos, se olharmos φ como uma aplicação de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, $\varphi(p) = (z_1, \dots, z_n)$ se $p = (z_1, \dots, z_n)$ como $\varphi\varphi^{-1}$ é a identidade, segue que $\mathbb{C}^n$ é uma variedade complexa.

Superfícies orientáveis: Toda superfície orientável pode ser dotada de uma estrutura complexa unidimensional. De fato, podemos assumir a existência de uma métrica Riemanniana g e de coordenadas tais que, localmente

$$g = \lambda(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

para uma certa função λ positiva. É suficiente definir $\phi(p) = x + i y$ para p no domínio das coordenadas (x, y) . Se ψ é outra carta e $z = x + i y$, teremos

$$\lambda dz \wedge d\bar{z} = \mu dw \wedge d\bar{w}$$

supondo que ϕ e ψ determinam a mesma orientação obtém-se $dw = f(z)dz$, para uma certa função holomorfa f .

Toros complexos: Sejam $v_1, \dots, v_{2n}$ vetores de $\mathbb{C}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ e Γ um grupo discreto de transformações da forma

$$z \longrightarrow z + \sum_{\alpha=1}^{2n} N_{\alpha} v_{\alpha}$$

sendo, N_{α} tomado em $\mathbb{Z}$. Definamos em $\mathbb{C}^n$ a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{C}^n$, $z \sim z'$ se existe uma transformação f em Γ tal que $z' = f(z)$. O conjunto $\mathbb{C}^n/\Gamma$ das classes de equivalências possui uma estrutura de variedade complexa. Em verdade, verifica-se que existe para todo ponto $z \in \mathbb{C}^n$ uma vizinhança $\tilde{U}$ satisfazendo $h(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ para todo $h \in (\Gamma - \{e\})$. Portanto, a projeção canônica π restrita a $\tilde{U}$ é injetora. Supondo $\tilde{U}$ conexo é suficiente definir as cartas (U, ψ) em $\mathbb{C}^n/\Gamma$ por $U = \pi(\tilde{U})$ e $\psi = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$.

1.2 O espaço projetivo complexo

Seja $\mathbb{C}^{n+1}$ o espaço complexo $n+1$ -dimensional. Definamos $S_r^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{2n+1} \mid \langle z, z \rangle = z_0 \bar{z}_0 + \dots + z_n \bar{z}_n = r^2\}$. É fato assumido neste trabalho que S^{2n+1} possui uma estrutura de variedade diferenciável para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos também verificar que a aplicação que associa a cada $(z, \lambda) \in S^{2n+1} \times S^1$ o elemento $R(z, \lambda) = \lambda z \in S^{2n+1}$ é uma ação à direita do grupo de Lie S^1 sobre S^{2n+1} . De fato, $R(z, 1) = z$, $R(R(w, \zeta)\lambda) = R(\zeta w, \lambda) = \lambda \zeta w = \zeta \lambda w = R(w, \zeta \lambda)$. Que a ação R pertence à $\mathcal{C}^\infty(S_r^{2n+1} \times S^1, S_r^{2n+1})$ é óbvio. É imediato também que fixado $\lambda \in S^1$, $R_\lambda : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ é um difeomorfismo. Sob esta ação R , S^1 age livremente sobre S^{2n+1} , isto é, se $R(z, \lambda) = z$ para algum $z \in S_r^{2n+1}$, então $\lambda = 1$. Em outras palavras, se definirmos $[z] = \{w \in S_r^{2n+1} \mid w = R(z, \lambda) \text{ para algum } \lambda \in S^1\}$ teremos para z e z' em S_r^{2n+1} diferentes $[z] = [z']$ ou $[z] \cap [z'] = \emptyset$. De fato, se existe λ tal que $z' = R(z, \lambda)$ e $w \in [z']$, então por definição $w = R(z', \zeta)$ para algum ζ , portanto $w = R(z', \zeta) = R(R(z, \lambda), \zeta) = R(z, \lambda \zeta) \in [z]$, isto é, $[z'] \subset [z]$. De $z = R(z', \frac{1}{\lambda})$ segue que $[z] \subset [z']$, isto é, $[z] = [z']$. Se não existe $\lambda \in S^1$ tal que $z' = R(z, \lambda)$ e $[z] \cap [z'] \neq \emptyset$, teremos, tomando w em $[z] \cap [z']$, que existem $(\lambda_1, \lambda_2) \in S^1 \times S^1$, tal que $R(z, \lambda_1) = w = R(z', \lambda_2)$, portanto $R(w, \frac{1}{\lambda_1}) = R(R(z, \lambda_1), \frac{1}{\lambda_1}) = R(z, 1) = z$. Por outro lado, $R(w, \frac{1}{\lambda_1}) = R(R(z', \lambda_2), \frac{1}{\lambda_1}) = R(z', \frac{\lambda_2}{\lambda_1})$, o que é um absurdo. Podemos então definir o seguinte conjunto $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}) = \{[z] \mid z \in S_r^{2n+1}\}$ e $\pi : S_r^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ por $\pi(z) = [z]$. Dotamos $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ da seguinte topologia: um subconjunto $U \subset \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em S_r^{2n+1} . É fácil verificar que isto realmente dota $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ de uma topologia. Podemos ir ainda mais longe e dotar $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ de uma estrutura complexa.

Começamos a construção da estrutura definindo $U_i = \{[z] \in \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}) \mid z_i \neq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. U_i é aberto. Com efeito, $\pi^{-1}(U_j) = \{z \in S_r^{2n+1} \mid z_j \neq 0\}$. Definamos $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\varphi_j([z]) = \frac{1}{z_j}(z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{n+1}).$$

φ_j está bem definida, φ é claramente injetora, pois e $[w] = [z]$, teremos $w = \lambda z$ e portanto

$$\begin{aligned} \varphi_j([w]) &= \frac{1}{w_j}(w_1, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_{n+1}) = \frac{1}{\lambda z_j}(\lambda z_1, \dots, \lambda \hat{z}_j, \dots, \lambda z_{n+1}) \\ &= \frac{1}{z_j}(z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{n+1}) = \varphi_j([z]). \end{aligned}$$

Em $U_k \cap U_j = \{[z] \in \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}) \mid z_k \neq 0 \text{ e } z_j \neq 0\}$ fará sentido $\varphi_k(U_k \cap U_j)$ e este conjunto é igual a $\mathbb{C}^n \setminus \{(z_1, \dots, \hat{z}_k, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0\}$, que é aberto. Faz sentido então $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \mathbb{C}^n \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ e $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{z_j}(z_1, \dots, 1, \dots, z_n)$ é claramente $\mathcal{C}^\infty$. Na verdade, $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ é mais do que diferenciável, ela é holomorfa. Como

$\bigcup_{j=1}^n U_j = \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ e $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ é diferenciável se $i \neq j$, tomando a família maximal de cartas que contêm $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ teremos uma estrutura complexa sobre $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$.

$(S_r^{2n+1}, S^1, \pi, \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}))$ esta quadra possui algumas propriedades que explicitaremos. Já sabemos que a ação à direita R do S^1 sobre S_r^{2n+1} age livremente e diferenciavelmente. π é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ de S_r^{2n+1} sobre $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$. De fato, esta afirmação decorre do fato que a aplicação de $S^{2n+1}/\{z \mid z_i = 0\}$ em $\mathbb{C}^n$, que associa a cada $z, \frac{1}{z_i}(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{n+1})$ é diferenciável e igual a $\varphi_i \circ \pi$. Também é evidente que S^1 age transitivamente sobre $\pi^{-1}([z])$ para todo $[z] \in \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$. Menos evidente que as propriedades acima é a trivialidade local para a quadra $(S_r^{2n+1}, S^1, \pi, \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}))$, isto é, para todo $[z] \in \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ podemos tomar um aberto $U_i \subset \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ tal que $[z] \in U_i$ e $\pi^{-1}(U_i)$ e $U_1 \times S^1$ são difeomorfas. Em verdade, podemos definir uma $f : \pi(U_j) \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = (\pi(z), F(z))$, sendo $F_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow S^1$ uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ tal que $F_j(R(w, \lambda)) = F_j(w)\lambda$, dada por $F_j(z) = z_j/|z_j|$. A quadra $(S_r^{2n+1}, S^1, \pi, \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2}))$ com as propriedades anteriores é o que se denomina de um fibrado principal.

Para $z \in S_r^{2n+1}$ determinaremos $T_z S^{2n+1}$. Se $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^{2n+1}$ é uma curva tal que $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = v$ teremos, diferenciando $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = r^2$, $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$, para $t = 0$ obteremos $\langle z, v \rangle + \langle v, z \rangle = 0$ ($Re\langle z, v \rangle = 0$). Reciprocamente, se $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $Re\langle z, v \rangle = 0$ para $z \in S_r^{2n+1}$, então $v \in T_z S_r^{2n+1}$. Em verdade, façamos $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_r^{2n+1}$ tal que $\gamma(t) = r \frac{z + tv}{\|z + tv\|}$. Um cálculo simples nos mostra que $\gamma'(0) = v$ e portanto $T_z S_r^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid Re\langle z, v \rangle = 0\}$. Podemos em S^{2n+1} definir uma distribuição $\mathcal{D}$ como sendo $\mathcal{D}(z) = \{v \in T_z S_r^{2n+1} \mid \langle z, v \rangle = 0\}$, teremos então que $\dim \mathcal{D}(z) = 2n$ sobre $\mathbb{R}$. Um fato que será muito usado é que se $v \in \mathcal{D}(z)$, então $iv \in \mathcal{D}(z)$.

Fazendo $\xi_z = \frac{iz}{r}$, teremos $\langle z, \xi_z \rangle = \frac{i}{r} \langle z, z \rangle = i\|z\|^2$ e portanto $\xi_z \in T_z S^{2n+1}$ e $\xi_z \notin \mathcal{D}(z)$. Para a aplicação π temos associado $d\pi_z : T_z S_r^{2n+1} \rightarrow T_{[z]} \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$. $d\pi_z(\xi_z) = 0$, pois se $\gamma(t) = e^{it}z$, $\gamma'(0) = r\xi_z$. Por definição teremos

$$d\varphi_j \pi_z(\xi_z) = \frac{d}{dt}(\varphi_j \pi \circ \gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi_j \pi(e^{it}z)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi_j([z])|_{t=0} = 0.$$

Podemos então concluir que $d\pi_z|_{\mathcal{D}(z)} : \mathcal{D}(z) \rightarrow T_{[z]} \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ é um isomorfismo e isto nos possibilitará munir $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ com um produto sesquilinear do qual obteremos uma métrica sobre $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$. Para $[z] \in \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ a aplicação $[z] \rightarrow z \in \mathbb{C}^{n+1}$ denomina-se coordenada homogênea de $[z]$, enquanto $[z] \in U_i \rightarrow \frac{1}{z_i}(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^n$ denomina-se coordenada não-homogênea de $[z] \in U_i$. Tomemos uma curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_r^{2n+1}$, com $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = v$. $\tilde{\gamma}(t) = \pi \circ \gamma(t)$ é uma curva $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$. Para vetores $u, v \in T_{[z]} \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$ sabemos que existem $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_z S^{2n+1}$ tais que $u = d\pi_z(\tilde{u})$ e $v = d\pi_z(\tilde{v})$. Portanto, podemos definir a aplicação bilinear $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ por $\langle\langle u, v \rangle\rangle_{[z]} = \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_z$. Este produto

está bem definido. Com efeito, se $w \in S_r^{2n+1}$ e $\pi(w) = [z]$, então existem $\tilde{u}_1$ e $\tilde{v}_1 \in T_w S_r^{2n+1}$ tais que $u = d\pi_w(\tilde{u}_1)$ e $v = d\pi_w(\tilde{v}_1)$. Portanto, basta mostrar que $\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_z = \langle \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 \rangle_w$, o que é elementar, pois $w = \lambda z$ para algum $\lambda \in S^1$ e como R_λ é tal que $dR_\lambda(v) = \lambda v$, segue o que queremos, isto é, $\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_z = \langle \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 \rangle$. Escreveremos agora $\langle\langle v, v \rangle\rangle_{[z]}$ em coordenadas. Para tal, seja $\tilde{v} \in T_z S_r^{2n+1}$ tal que $d\pi_z(\tilde{v}) = v$ e seja $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_r^{2n+1}$ tal que $\gamma(0) = z$ e $\gamma'(0) = \tilde{v}$. A componente de $\gamma'(0)$ em $\mathcal{D}(z)$ é dada por $\gamma'(0) - \langle \gamma'(0), \xi_z \rangle \xi_z$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle\langle v, v \rangle\rangle &= \langle \gamma'(0) - \langle \gamma'(0), \xi_z \rangle \xi_z, \gamma'(0) - \langle \gamma'(0), \xi_z \rangle \xi_z \rangle \\ &= \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle - |\langle \gamma'(0), \xi_z \rangle|^2 \\ &= \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle - \frac{1}{r^2} |\langle \gamma'(0), z \rangle|^2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se tomarmos uma curva $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\gamma(t) = r \frac{\tilde{\gamma}(t)}{\|\tilde{\gamma}(t)\|}$,

$$\gamma'(t) = r \frac{2\|\tilde{\gamma}(t)\|^2 \tilde{\gamma}'(t) - (\langle \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle + \langle \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle) \tilde{\gamma}(t)}{2\|\tilde{\gamma}\|^3}$$

e portanto para $\langle\langle , \rangle\rangle$ obteremos

$$\langle\langle d\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), d\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \rangle\rangle = r^2 \frac{\|\tilde{\gamma}(t)\|^2 \|\tilde{\gamma}'(t)\|^2 - |\langle \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle|^2}{\|\tilde{\gamma}(t)\|^4}.$$

Formalmente, podemos escrever

$$\pi^* \langle\langle , \rangle\rangle = r^2 \frac{\langle z \wedge dz, z \wedge dz \rangle}{\|z\|^4},$$

sendo $\langle z \wedge dz, z \wedge dz \rangle = \langle z, z \rangle \langle dz, dz \rangle - \langle z, dz \rangle \langle dz, z \rangle$.

Como já sabemos, $d\pi_z|_{\mathcal{D}_z} : \mathcal{D}_z \rightarrow T_{[z]} \mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2})$ é um isomorfismo. Também sabemos que se $v \in \mathcal{D}_z$ o mesmo é verdade para iv , isso nos leva a definir um campo tensorial J do tipo (1,1) sobre $\mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2})$ da seguinte maneira: $J_{[z]}(d\pi_z(v)) = d\pi_z(iv)$. J definido desta forma é um tensor $\mathcal{C}^\infty$ e $J^2(d\pi(v)) = d\pi(v)$ e, portanto, uma estrutura quase-complexa de $\mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2})$. A estrutura quase-complexa induzida pelas cartas holomorfas do $\mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2})$ e a induzida por $d\pi$ são equivalentes. É um fato, não difícil de demonstrar, que toda variedade que possui um tensor J de tipo (1,1) que é $\mathcal{C}^\infty$ e $J^2 = -I$ é orientável e portanto $\mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2})$ é orientável. Uma orientação é dada pela seguinte forma volume. Defina $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{C}P^n(\frac{4}{r^2}))$ por

$$\omega(X, Y) = \langle\langle X, JY \rangle\rangle$$

e façamos $\eta = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n -vezes).

Sejam $\{e_0; \dots; e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^{n+1}$ e $U(n+1)$ o grupo unitário. Podemos então definir $n+1$ funções de $U(n+1)$ em S^{2n+1} ,

$$\begin{aligned} U(n+1) &\xrightarrow{b_j} S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \\ g &\longrightarrow g(e_j) = \sum_{k=0}^n g_j^k e_k \end{aligned}$$

A $\{b_0; \dots; b_n\}$ denominaremos um referencial unitário. Podemos então diferenciar b_j , do ponto de vista complexo, e obteremos

$$db_j = \sum_{k=0}^n \omega_j^k \otimes b_k, \quad j = 0, \dots, n,$$

sendo ω_j^k 1-formas complexas, isto é, $(\omega_j^k)_g$ é uma forma $\mathbb{C}$ -linear. Verifica-se que $\omega_j^k + \overline{\omega_k^j} = 0$. Em geral, para referenciais unitários temos que $\langle b_j(g), b_k(g) \rangle = \delta_j^k$, diferenciando a última igualdade e aplicando em $v \in T_g U(n+1)$, temos que

$$\langle (db_j)_g(v), b_k(g) \rangle + \langle b_j(g), (db_k)_g(v) \rangle = 0.$$

Portanto, $(\omega_j^k)_g(v) + \overline{(\omega_k^j)_g(v)} = 0$. Diferenciando exteriormente $db_j = \sum \omega_j^k \otimes b_k$, teremos levando em consideração que $b_j = b_j^l e_l$

$$\begin{aligned} db_j &= \sum_k \omega_j^k \otimes b_k = \sum_{k,l} \omega_j^k b_k^l \otimes e_l, \\ db_j^l &= \sum_k \omega_j^k b_k^l, \\ d(db_j^l) &= \sum_k d\omega_j^k b_k^l - \omega_j^k \wedge db_k^l, \\ \sum_k \left[b_k^l d\omega_j^k - \sum_m b_m^l \omega_j^k \wedge \omega_k^m \right] &= 0, \\ \sum_l \left\{ \sum_k b_k^l d\omega_j^k - \sum_{k,m} b_m^l \omega_j^k \wedge \omega_k^m \right\} \otimes e_l &= 0, \\ \sum_k d\omega_j^k \otimes b_k - \sum_{k,m} \omega_j^k \wedge \omega_k^m \otimes b_m &= 0, \\ \sum_k \left(d\omega_j^k - \sum_m \omega_j^m \wedge \omega_m^k \right) \otimes b_k &= 0, \\ d\omega_j^k - \sum_m \omega_j^m \wedge \omega_m^k &= 0. \end{aligned}$$

Seja agora $\pi : U(n+1) \rightarrow S_r^{2n+1}$ dado por $\pi(g) = g(re_0) = rb_0$. Mostraremos que $(U(n+1), U(n), S^{2n+1}, \pi)$ é um $U(n)$ -fibrado principal. Para tal fim, necessitamos verificar os seguintes fatos:

1º - $U(n)$ age à direita em $U(n+1)$.

$$R : U(n+1) \times U(n) \rightarrow U(n+1)$$

$$R(g, h) = g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Esta ação é livre, isto é, se $g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = g$, então $h = I_k$ em $U(n)$. Também temos que a ação acima é $\mathcal{C}^\infty$. Que a ação é transitiva nas fibras decorre do fato que: dados dois pontos f e g na mesma fibra, isto é, na órbita de um $g_0 \in U(n+1)$, então

$$f = g_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad g = g_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

portanto, temos $g = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1}k \end{pmatrix}$

2º - A ação é localmente trivial. Seja $w = (w_0, \dots, w_n) \in S_r^{2n+1}$. Como $w \neq 0$ existe um $w_j \neq 0$, suponhamos que seja w_0 , os outros casos são análogos. Consideremos então $U_0 = \{z \in S_r^{2n+1} : z_0 \neq 0\}$ é um aberto e contém w . Fazendo $(w_0, \dots, w_n) = (w_0, z)$ teremos

$$U_0 \times U(n) \xrightarrow{f} \pi^{-1}(U_0)$$

$$((w_0, z), h) \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} w_0 & z \\ \frac{1}{w_0} h \bar{z}^t & h \end{pmatrix}$$

Não é difícil mostrar que f é um difeomorfismo.

Tomemos $g : S_r^{2n+1} \rightarrow U(n+1)$ tal que $\pi \circ g(x) = x$ e $g \in \mathcal{C}^\infty(S_r^{2n+1}, U(n+1))$, isto é, g é uma secção do fibrado principal acima. A partir do que fizemos, temos que

$$(x, b_1[g(x)], \dots, b_n[g(x)])$$

é um referencial unitário tangente a S^{2n+1} . Temos também que

$$T_{re_0} S^{2n+1} = [\{ie_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}].$$

De $\pi \circ g(x) = x$ tiramos que

$$g(x) : T_{re_0} S^{2n+1} \rightarrow T_x S^{2n+1}$$

e portanto

$$\{g(x)(ie_0), g(x)(e_1), \dots, g(x)(e_n)\}$$

é uma base de $T_x S^{2n+1}$. De $x = rb_0[g(x)]$, diferenciando, obtemos

$$\begin{aligned} dx &= r(db_0)_{g(x)} \circ dg(x), \\ dx &= r \left[\sum (\omega_0^k)_{g(x)} (b_k)_{g(x)} \right] \circ g(x), \\ dx &= r \sum g^*(\omega_0^k)_{g(x)} (b_k)_{g(x)} \end{aligned}$$

e logo $\{rg^*\omega_0^0, rg^*\omega_0^1, \dots, rg^*\omega_0^n\}$ e $\{b_0 \circ g, \dots, b_n \circ g\}$ são bases duais. Denotando $\theta = -irg^*\omega_0^0$ e por $\theta^j = rg^*\omega_0^j$ poderemos escrever

$$dx = \theta \otimes (ib_0) + \theta^1 \otimes b_1 + \dots + \theta^n \otimes b_n.$$

Diferenciando as formas θ e θ^j teremos

$$\begin{aligned} d\theta &= -irg^*[d\omega_0^0] = -ir \sum g^*\omega_0^l \wedge g^*\bar{\omega}_0^l = -\frac{i}{r} \sum \theta^l \wedge \bar{\theta}^l, \\ d\theta^j &= rg^*[d\omega_0^j] = -r \sum (g^*\omega_l^j) \wedge (g^*\omega_0^l) = -\frac{1}{r} \sum \eta_l^j \wedge \theta^l - \frac{i}{r} \theta^j \wedge \theta, \\ d\theta^j + \frac{1}{r} \sum (\eta_l^j - i\delta_l^j \theta) \wedge \theta^l &= 0, \quad \eta_l^j = rg^*\omega_l^j. \end{aligned}$$

Já sabemos que para as 1-formas ω_k^j

$$d\omega_k^j + \sum \omega_l^j \wedge \omega_k^l = 0.$$

Vejamos então qual é a expressão de Ω_k^j :

$$\Omega_k^j = d\theta_k^j + \sum_{l=1}^n \theta_l^j \wedge \theta_k^l,$$

sendo $\theta_l^j = \frac{1}{r}(\eta_l^j - i\delta_l^j \theta)$, $l, j = 1, 2, \dots, n$ e $\theta_0^j = \frac{1}{r}\eta_0^j$.

$$\begin{aligned} d\theta_k^j &= \frac{1}{r}(d\eta_k^j - i\delta_k^j d\theta) = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \sum_{l=0}^n \eta_l^j \wedge \eta_k^l - \frac{\delta_k^j}{r} \sum_{l=0}^n \theta^l \wedge \bar{\theta}^l \right), \\ d\theta_k^j &= -\frac{1}{r^2} \sum_{l=0}^n \left[(r\theta_l^j + i\delta_l^j \theta) \wedge (r\theta_k^l + i\delta_k^l \theta) + \delta_k^j \theta^l \wedge \bar{\theta}^l \right], \\ d\theta_k^j + \sum_{l=1}^n \theta_l^j \wedge \theta_k^l &= \theta_0^j \wedge \theta_0^k - \frac{\delta_k^j}{r^2} \sum_{l=1}^n \theta^l \wedge \bar{\theta}^l + \frac{i}{r^2} \sum_{l=1}^n \theta \wedge (\delta_k^l \theta_l^j - \delta_l^j \theta_k^l), \\ d\theta_k^j + \sum \theta_l^j \wedge \theta_k^l &= \frac{1}{r^2} \left[\theta^j \wedge \bar{\theta}^k - \delta_k^j \sum \theta^l \wedge \bar{\theta}^l \right]. \end{aligned}$$

ou em uma forma equivalente,

$$\Omega_j^k = \frac{1}{r^2} \left(\theta^k \wedge \bar{\theta}^j - \delta_j^k \sum_{l=1}^n \theta^l \wedge \bar{\theta}^l \right).$$

Lembremos que todas as 1-formas que apareceram até agora são complexas.

Da forma como obtivemos $(x, b_1, \dots, b_n)$ segue que $\{b_1(x), \dots, b_n(x)\}$ é uma base de $\mathcal{D}_x$ e logo $\{\theta^1(x), \dots, \theta^n(x)\}$ é base de $\mathcal{D}_x^*$. Podemos então definir $h = \sum_{j=1}^n \theta^j \otimes \bar{\theta}^j$ uma forma sesquilinear sobre $\mathcal{D}$. As θ_j^k nos dão uma boa derivação em $\mathcal{D}$, definida por

$$\nabla b_j = \sum_{k=1}^n \theta_j^k \otimes b_k.$$

É fácil verificar que ∇ é compatível com $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ (usando o isomorfismo $d\pi|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow T_{[z]} \mathbb{CP}^n$).

Como θ_j^k e θ^j são formas complexas, podemos escrevê-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta^j &= \omega^j + i\omega^{j+n}, \\ \theta_k^j &= \omega_k^j + i\omega_k^{j+n}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Teremos então que

$$\begin{aligned} d\omega^j + id\omega^{j+n} + \sum (\omega_k^j + i\omega_k^{j+n}) \wedge (\omega^k + i\omega^{k+n}) &= 0, \\ d\omega^j + \sum_{k=0}^n \omega_k^j \wedge \omega^k - \omega_k^{j+n} \wedge \omega^{k+n} &= 0, \\ d\omega^{j+n} + \sum \omega_k^{j+n} \wedge \omega^k + \omega_k^j \wedge \omega^{k+n} &= 0, \end{aligned}$$

que, usando $\omega_k^{j+n} = -\omega_{j+n}^k$, pode ser reescrita

$$\begin{cases} d\omega^j + \sum \omega_k^j \wedge \omega^k + \omega_{j+n}^k \wedge \omega^{k+n} = 0, \\ d\omega^{j+n} + \sum \omega_k^{j+n} \wedge \omega^k + \omega_k^j \wedge \omega^{k+n} = 0, \\ d\theta = -\frac{i}{r} \sum \theta^j \wedge \bar{\theta}^j = \frac{2}{r} \sum \omega^j \wedge \omega^{j+n}. \end{cases}$$

Para todo $j, k = 1, \dots, n$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k^j &= \Omega_k^j + i\Omega_k^{j+n} = \frac{1}{r^2} \left\{ (\omega^j + i\omega^{j+n}) \wedge (\omega^k - i\omega^{k+n}) \right. \\ &\quad \left. + \delta_k^j \sum (\omega^l + \omega^{l+n})(\omega^l - i\omega) \right\}, \\ \Omega_k^j &= \frac{1}{r^2} (\omega^j \wedge \omega^k + \omega^{j+n} \wedge \omega^{k+n}), \\ \Omega_k^{j+n} &= \frac{1}{r^2} \left\{ \omega^{j+n} \wedge \omega^k - \omega^j \wedge \omega^{k+n} + \delta_k^j 2 \sum_{l=0}^n \omega^{l+n} \wedge \omega^l \right\}. \end{aligned}$$

Em $\mathcal{D}$ temos que todo vetor X é da forma

$$X = X_j b_j, \quad b_j = f_j + i f_{j+n},$$

$$\begin{aligned} \Omega_j^{j+n} &= \frac{1}{r^2} \left\{ 2\omega^{j+n} \wedge \omega^j + 2 \sum_{l=0}^n \omega^{l+n} \wedge \omega^l \right\}, \\ \Omega_j^{j+n} &= -\frac{4}{r^2} \omega^j \wedge \omega^{j+n}, \text{ quando restrita a } a[b_j] \end{aligned}$$

isto é,

$$\Omega_j^{j+n}(f^{j+n}, f^j) = \frac{4}{r^2}.$$

Disto tiramos que as curvaturas seccionais de planos gerados por vetores da forma u e Ju são constantes. A este tipo de plano denominamos planos holomorfos. Portanto, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ possui curvatura dos planos holomorfos constante, resumidamente curvatura holomorfa constante.

1.3 O espaço hiperbólico complexo

O espaço hiperbólico complexo, $\mathbb{C}\mathbb{H}^n(\frac{4}{r^2})$, pode ser obtido de forma totalmente análoga a usada para construir o $\mathbb{C}\mathbb{P}^n(\frac{4}{r^2})$. De fato, consideremos em $\mathbb{C}^{n+1}$ o produto sesquilinear h

$$h(z, w) = z_0 \bar{w}_0 - z_1 \bar{w}_1 - \cdots - z_n \bar{w}_n$$

definamos a seguinte hipervariiedade real do $\mathbb{C}^{n+1}$

$$Q_r^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : h(z, z) = r^2\}.$$

É fácil verificar que isto realmente é uma hipervariiedade. $R : Q^{2n+1} \times S^1 \longrightarrow Q^{2n+1}$ dada por

$$(z, \lambda) \xrightarrow{R} \lambda z$$

é uma ação $\mathcal{C}^\infty$ do S^1 em Q^{2n+1} . Em Q^{2n+1} definimos a seguinte relação de equivalência $\sim$: $z \sim z'$ se existe $\lambda \in S^1$ tal que $z' = \lambda z$. Definimos então

$$\mathbb{C}\mathbb{H}^n(\frac{4}{r^2}) = Q_r^{2n+1} / \sim$$

denotando as classe de equivalência de z por $[z]$ teremos $\mathbb{C}\mathbb{H}^n(\frac{4}{r^2}) = \{[z] : z \in Q_r^{2n+1}\}$. $\mathbb{C}\mathbb{H}^n(\frac{4}{r^2})$ possui uma topologia induzida pela projeção $\pi : Q_r^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{H}^n(\frac{4}{r^2})$ dada por

$\pi(z) = [z]$. A estrutura de variedade diferenciável sobre $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ é obtida definindo a carta (ψ, U) da seguinte forma

$$U = \mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$$

$$\psi([z]) = \frac{1}{z_0}(z_1, \dots, z_n)$$

temos assim um recobrimento de $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ por abertos, é suficiente então pegar a família maximal holomorficamente compatível com este atlas. Repetindo todos os passos feitos para o $\mathbb{CP}^n$ temos que $(Q_r^{2n+1}, \mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2}), S^1, \pi)$ é um fibrado principal com espaço total Q_r^{2n+1} , espaço base $\mathbb{CH}^n$ e fibra S^1 . O espaço tangente de Q_r^{2n+1} em z é dado por

$$T_z Q_r^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} : h(z, v) + \overline{h(v, z)} = 0\}.$$

Também verifica-se que $\xi_z = \frac{iz}{r}$ pertence ao espaço tangente de H^{2n+1} em z . $d\pi|_{\mathcal{D}}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{D}_z$ e o espaço tangente em z do espaço hiperbólico complexo que nos possibilitará munir $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ de uma métrica $\langle\langle, \rangle\rangle$. Em verdade, como $b|_{\text{cal}d \times \mathcal{D}}$ é negativa definida é suficiente defini-la por

$$\langle\langle d\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), d\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \rangle\rangle = r^2 \frac{h(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t))h(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) - |h(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t))|^2}{h(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t))^2}.$$

Formalmente, podemos escrever

$$\pi^* \langle\langle \ , \ \rangle\rangle = r^2 \frac{h(z \wedge dz, z \wedge dz)}{h(z, z)^2}.$$

De forma análoga ao $\mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$, pode-se demonstrar que o $\mathbb{CH}^n(\frac{4}{r^2})$ possui curvaturas holomorfas constantes e negativas.

Geometria sub-Riemanniana

2.1 Definições e a conexão sub-Riemanniana

Agora que já definimos e obtivemos alguns resultados dos espaços nos quais iremos trabalhar, começaremos as definições dos objetos que “habitarão” esses espaços e a busca de alguns de seus principais resultados. Para tal, façamos algumas definições.

Definição 2.1.1 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM o fibrado tangente de M . A um conjunto $\mathcal{D} = \cup_{p \in M} \mathcal{D}_p$, sendo $\mathcal{D}_p$ um subespaço vetorial de $T_p M$, denominamos de distribuição. Se a co-dimensão de $\mathcal{D}_p$ for constante e igual a k dizemos que $\mathcal{D}$ possui co-dimensão k . Dizemos que $\mathcal{D}$ é de classe C^∞ se para todo $p \in M$ existem uma vizinhança U de p e k 1-formas $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k\}$ de classe C^∞ em U tal que $\mathcal{D}_x = \cap_{j=1}^k \ker \theta_x^j$ para todo $x \in U$.*

Quase sempre uma definição em TM nos leva a uma definição no fibrado co-tangente T^*M .

Definição 2.1.2 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e T^*M o fibrado co-tangente de M . A um conjunto $\mathcal{D}^* = \cup_{p \in M} \mathcal{D}_p^*$, sendo $\mathcal{D}_p^*$ um subespaço vetorial do dual de $T_p M$, denominamos de co-distribuição. Se a dimensão de $\mathcal{D}_p^*$ for constante e igual a k dizemos que $\mathcal{D}^*$ possui dimensão k . Dizemos que $\mathcal{D}^*$ é de classe C^∞ se para todo $p \in M$ existem uma vizinhança U de p e $n-k$ campos linearmente independentes e de classe C^∞ em U $\{X^1, X^2, \dots, X^{n-k}\}$ tal que $\mathcal{D}_x^* = \{\omega \in T_x^* M^* : \omega(X_j) = 0, j = 1, \dots, n-k\}$.*

Definição 2.1.3 *Uma variedade sub-Riemanniana consiste em uma terna $(M, \mathcal{D}, g)$, sendo M uma variedade diferenciável, $\mathcal{D}$ uma distribuição C^∞ de co-dimensão k e g uma*

métrica definida sobre $\mathcal{D}$ e tal que, para quaisquer dois campos X e Y (C^∞) em $\mathcal{D}$, $g(X, Y)$ é uma função C^∞ .

Observe que no caso em que $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ integrável) teremos uma decomposição de M em subvariedades integrais maximais de $\mathcal{D}$ (folhas, como são comumente denominadas). Em [21] verifica-se que é possível demonstrar que dotando o conjunto das distribuições C^∞ de uma certa topologia o conjunto das distribuições integráveis será magro.

Definição 2.1.4 *Uma distribuição $\mathcal{D}$ em uma variedade diferenciável M é dita completamente não integrável se TM pode ser obtido pela soma de $\mathcal{D}$ com seus colchetes, isto é, $TM = \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}] + [[\mathcal{D}, \mathcal{D}], \mathcal{D}] + \dots$.*

O caso que realmente nos interessa neste trabalho é o obtido quando $\mathcal{D}$ é não integrável, em especial o de co-dimensão um, isto é, $TM = \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$.

Definição 2.1.5 *Uma curva de classe C^∞ $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é dita admissível se o vetor tangente $\dot{\gamma}(t)$ pertence a distribuição $\mathcal{D}$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Enunciaremos abaixo, sem demonstração, um teorema muito importante para a geometria sub-Riemanniana. Esse teorema é a “luz” em muitos problemas de teoria de controle e otimização. Alguns autores atribuem esse teorema ao matemático W. L. Chow enquanto outros a W. L. Chow e P. A. Rashvskii.

Teorema 2.1.6 *Para quaisquer dois pontos p e q em uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ com uma distribuição completamente não integrável $\mathcal{D}$ existe uma curva admissível C^∞ por partes γ ligando p a q , isto é, $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.*

Em nosso trabalho estaremos interessados em um tipo particular de variedade sub-Riemanniana: as que possuem $\mathcal{D}$ de codimensão 1 e um campo ξ globalmente definido e tal que $T_p M = \mathcal{D}_p \oplus \xi_p$, para todo $p \in M$. Neste caso g pode ser estendida a uma métrica $\tilde{g}$ definida em todo espaço tangente de M , na maior parte das vezes denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, isto é feito definindo $\tilde{g} : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear tal que $\tilde{g}|_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} = g$, $\tilde{g}(\xi, \xi) = 1$ e $\tilde{g}(\xi, X) = 0$ se $X \in \mathcal{D}$. Podemos então definir uma 1-forma tal que $\theta(X) = \tilde{g}(\xi, X)$. Desta definição tiramos que $\mathcal{D} = \ker \theta$ e $\theta(\xi) = 1$. $\mathcal{D}$ recebe algumas denominações conforme a forma bilinear $d\theta|_{\mathcal{D}}$ seja não-degenerada ou definida ou nula. Dizemos que $\mathcal{D}$ é de contato se $\theta \wedge d\theta$ é não-degenerada, $\mathcal{D}$ é fortemente pseudo-convexa se $d\theta$ restrita a $\mathcal{D}$ é definida e $\mathcal{D}$

será integrável se $d\theta \equiv 0$ quando restrita a $\mathcal{D}$. Neste último, M é uma variedade folheada. Temos, como em geometria Riemanniana, uma conexão associada à estrutura $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$. A existência e unicidade da conexão adaptada é provada no teorema abaixo.

Teorema 2.1.7 *Existe uma única conexão ∇ sobre $(M, \mathcal{D}, \xi, g)$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\nabla_X Y \in \mathcal{D}$ para todas $X, Y \in \mathcal{D}$;
- (ii) $\nabla_X \xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- (iii) $\nabla_X g = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- (iv) $T(X, Y) = d\theta(X, Y)\xi$ para todo $X, Y \in \mathcal{D}$;
- (v) $T(\xi, X) = \tau(X) + d\theta(\xi, X)\xi$ para todo $X \in \mathcal{D}$.

Demonstração: Seja $\{e_1; \dots; e_n; \xi\}$ um referencial ortonormal (local) em M . Podemos então escrever

$$\begin{aligned} [e_i, e_j] &= \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k + d_{ij}\xi, \\ [\xi, e_j] &= \sum_{k=1}^n C_j^k e_k + d_j\xi. \end{aligned}$$

Sendo ∇ a conexão, poderemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} e_j &= \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k, \\ \nabla_{e_i} \xi &= 0, \\ \nabla_\xi e_j &= \sum_k \Gamma_j^k e_k. \end{aligned}$$

De $T(e_i, e_j) = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j]$ e de (iv) tiramos que $d\theta(e_i, e_j)\xi = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k)e_k - d_{ij}\xi$ e portanto $C_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. De (iii) obtemos que $\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ik}^j = 0$. Conseqüentemente, teremos $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ki}^j - C_{jk}^i)$. Isto prova a existência e unicidade de (i), (ii), (iii) e parte de (iv) e (v). Para determinarmos τ procederemos da mesma maneira.

$$T(\xi, e_j) = \nabla_\xi e_j - [\xi, e_j] = (\Gamma_j^k - C_j^k)e_k - d_j\xi$$

e portanto escrevendo $T(\xi, e_j) = \tau_j^k e_k + d_j\xi$ teremos $\tau_j^k = \Gamma_j^k - C_j^k$. Usando que $d\theta(\xi, X) = -\theta([\xi, X])$ tiramos que $d_j = -d\theta(\xi, X)$ para todo $X \in \mathcal{D}$. Novamente, de (iii), tiramos

que $\Gamma_k^j + \Gamma_j^k = 0$. Da simetria de τ tiramos que $\tau_j^k = \tau_k^j$ e portanto $\Gamma_j^k = \frac{1}{2}(C_j^k - C_k^j)$ e $\tau_j^k = -\frac{1}{2}(C_j^k + C_k^j)$. $\square$

2.2 Propriedades da conexão sub-Riemanniana

Examinemos algumas propriedades da conexão adaptada à estrutura sub-Riemanniana de M . Abaixo, dada uma 2-forma ω , usamos $i_\xi \omega$ para denotar a um forma $i_\xi \omega(X) = \omega(\xi, X)$.

Proposição 2.2.1 *Se ξ é tal que $i_\xi d\theta = 0$, então a derivada de Lie de θ na direção de ξ é nula ($\mathcal{L}_\xi \theta = 0$).*

Demonstração: sabemos que em relação a métrica θ se escreve como $\theta(X) = \langle X, \xi \rangle$. Daí temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \theta)(X) &= \mathcal{L}_\xi \theta(X) - \theta(\mathcal{L}_\xi X) \\ &= \langle \nabla_\xi X, \xi \rangle - \langle \mathcal{L}_\xi X, \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_\xi X - [\xi, X], \xi \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.2.2 *Se $\mathcal{D}$ é de contato, então $\mathcal{L}_\xi \theta(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.*

Demonstração: se $X \in \mathcal{D}$, da proposição anterior

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{L}_\xi X) &= \mathcal{L}_\xi \theta(X) \\ \langle \mathcal{L}_\xi X, \xi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.2.3 *Para campos $\mathcal{C}^\infty X$ e Y em $\mathcal{D}$ temos $\langle \tau(X), Y \rangle = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y)$.*

Demonstração: da substituição de $\tau(X) = \nabla_\xi X - [\xi, X]$ em $g(\tau(X), Y)$

$$\begin{aligned}
 g(\tau(X), Y) &= g(\nabla_\xi X, Y) - g([\xi, X], Y) \\
 &= \xi g(X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + \xi g(X, Y) + g(X, [\xi, Y]) + (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) \\
 &= -g(X, \tau(Y)) + (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) \\
 &= -g(\tau(X), Y) + (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y)
 \end{aligned}$$

e portanto segue que $\langle \tau(X), Y \rangle = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y)$. $\square$

Corolário 2.2.4 *Se ξ é um campo de Killing para g então τ é nula.*

Em geral, para uma variedade sub-Riemanniana de co-dimensão 1 com um ξ globalmente definido e transversalmente orientável, verifica-se que existe um campo tensorial $\tilde{h}$ de tipo (1,1) tal que

$$d\theta(X, Y) = \langle \tilde{h}(X), Y \rangle \quad \text{para campos } X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

e podemos definir o operador h da seguinte forma:

$$h(X) = \tilde{h}(X) - \langle X, \xi \rangle \xi.$$

Portanto, podemos calcular a derivada covariante sub-Riemanniana de $d\theta$ na direção ξ

$$\begin{aligned}
 (\nabla_\xi d\theta)(X, Y) &= \xi d\theta(X, Y) - d\theta(\nabla_\xi X, Y) - d\theta(X, \nabla_\xi Y) \\
 &= g(\nabla_\xi \tilde{h}(X), Y) + g(\tilde{h}(X), \nabla_\xi Y) - g(\tilde{h}(\nabla_\xi X), Y) - g(\tilde{h}(X), \nabla_\xi Y) \\
 &= g((\nabla_\xi \tilde{h})(X) + \tilde{h}(\nabla_\xi X), Y) - g(\tilde{h}(\nabla_\xi X), Y) - g(\tilde{h}(X), \nabla_\xi Y) \\
 &= g((\nabla_\xi \tilde{h})(X), Y).
 \end{aligned}$$

Proposição 2.2.5 *Se τ é paralelo, ao longo do fluxo de ξ , em relação à conexão sub-Riemanniana ∇ , então $\mathcal{L}_\xi \nabla_\xi X = \nabla_\xi \mathcal{L}_\xi X$ para todo X em $\mathcal{D}$.*

Demonstração: sabemos que

$$\begin{aligned}
 (\nabla_\xi \tau)(X) &= \nabla_\xi \tau(X) - \tau(\nabla_\xi X) \\
 &= \nabla_\xi \nabla_\xi X - \nabla_\xi \mathcal{L}_\xi(X) - \nabla_\xi \nabla_\xi X - \mathcal{L}_\xi \nabla_\xi X \\
 &= (\mathcal{L}_\xi \nabla_\xi X - \nabla_\xi \mathcal{L}_\xi(X)).
 \end{aligned}$$

Definição 2.2.6 Dadas duas variedades sub-Riemannianas $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$ e $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{D}}, \widehat{g}, \widehat{\xi})$ e uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \widehat{M}$ dizemos que f é uma isometria sub-Riemanniana local se:

- i) $df(\mathcal{D}) = \widehat{\mathcal{D}}$;
- ii) $\widehat{g}(df(X), df(Y)) = g(X, Y)$;
- iii) $df(\xi) = \widehat{\xi}$;

para campos X e Y em $\mathcal{D}$.

Definição 2.2.7 Uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$ é dita homogênea se o conjunto das isometrias sub-riemannianas de M age transitivamente em M .

2.3 Exemplos de variedades sub-Riemannianas homogêneas

Começaremos os exemplos de variedades sub-Riemannianas homogêneas com as variedades homogêneas mais simples: os grupos de Lie de dimensão 3 com uma métrica (sub-Riemanniana) invariante à esquerda.

Grupos de Lie Tridimensionais

Seja G um grupo de Lie de dimensão 3, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie associada e $\mathcal{D}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$ de dimensão 2. Sendo $\{e_1; e_2\}$ uma base de $\mathcal{D}$, assumamos que $[e_1, e_2] \notin \mathcal{D}$. Poderemos, portanto, definir uma métrica em $\mathcal{D}$ invariante à esquerda sobre o G impondo que e_1 e e_2 são ortonormais. Teremos assim a terna $(G, \mathcal{D}, g)$ sendo uma estrutura sub-Riemanniana sobre G . Se $\{\theta^1; \theta^2; \theta^3\}$ for a base dual à base $\{e_1; e_2; [e_1, e_2]\}$, o elemento de área será dado por $dA = \theta^1 \wedge \theta^2$ e $d\theta^3|_{\mathcal{D}} = \lambda \theta^1 \wedge \theta^2$ para alguma constante $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Poderemos então definir $\theta = \frac{2}{\lambda} \theta^3$. Deste modo teremos $\ker \theta = \mathcal{D}$ e $d\theta = 2\theta^1 \wedge \theta^2$, isto é, θ é o que denomina-se uma forma de contato. Não é difícil mostrar que existe um campo ξ tal que $\theta(\xi) = 1$ e $i_\xi d\theta = 0$. Tomando como base de $\mathfrak{g}$ $\{e_1; e_2; \xi\}$ teremos para os colchetes as seguintes expressões:

$$[e_1, e_2] = \Gamma_1 e_1 + \Gamma_2 e_2 - 2\xi,$$

$$\begin{aligned} [e_2, \xi] &= \Gamma e_1 + \lambda e_2, \\ [\xi, e_1] &= \lambda e_1 + \Upsilon e_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Fazendo uso da conexão associada à distribuição $\mathcal{D}$, poderemos escrever as equações de estrutura para este exemplo:

$$\begin{aligned} \nabla e_1 &= \omega \otimes e_2, \\ \nabla e_2 &= -\omega \otimes e_1, \\ \nabla \xi &= 0. \end{aligned}$$

Para o co-referencial $\{\theta^1; \theta^2; \theta\}$ teremos

$$\begin{aligned} \nabla \theta^1 &= \omega \otimes \theta^2, \\ \nabla \theta^2 &= -\omega \otimes \theta^1, \\ \nabla \theta &= 0, \end{aligned}$$

e portanto em relação a esta base teremos

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \omega \wedge \theta^2 + \tau^1 \wedge \theta, \\ d\theta^2 &= -\omega \wedge \theta^1 + \tau^2 \wedge \theta, \\ d\theta &= 2\theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

Mas, olhando para (2.1) teremos que

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\Gamma_1 \theta^1 \wedge \theta^2 - \Gamma \theta^2 \wedge \theta + \lambda \theta^1 \wedge \theta, \\ d\theta^2 = -\Gamma_2 \theta^1 \wedge \theta^2 - \lambda \theta^2 \wedge \theta + \Upsilon \theta^1 \wedge \theta, \end{cases}$$

e um processo de anti-simetrização em θ^1 e θ^2 nos leva a

$$\begin{cases} d\theta^1 = (-\Gamma_1 \theta^1 - \Gamma_2 \theta^2 + \frac{\Upsilon + \Gamma}{2} \theta) \wedge \theta^2 + (\lambda \theta^1 + \frac{\Upsilon - \Gamma}{2} \theta^2) \wedge \theta \\ d\theta^2 = (\Gamma_1 \theta^1 + \Gamma_2 \theta^2 - \frac{\Upsilon + \Gamma}{2} \theta) \wedge \theta^1 + (\frac{\Upsilon - \Gamma}{2} \lambda \theta^2) \wedge \theta, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \omega &= -\Gamma_1 \theta^1 - \Gamma_2 \theta^2 + \frac{\Upsilon + \Gamma}{2} \theta, \\ \tau^1 &= \lambda \theta^1 + \frac{\Upsilon - \Gamma}{2} \theta^2, \\ \tau^2 &= \frac{\Upsilon - \Gamma}{2} \theta^1 - \lambda \theta^2, \end{aligned}$$

e um cálculo simples nos dará

$$\begin{aligned} d\omega &= (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Upsilon + \Gamma)\theta^1 \wedge \theta^2 - (\lambda\Gamma_1 + \Upsilon\Gamma_2)\theta^1 \wedge \theta + (\Gamma_1\Gamma + \Gamma_2\lambda)\theta^2 \wedge \theta, \\ K &= -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Upsilon + \Gamma), \\ w_1 &= \lambda\Gamma_1 + \Upsilon\Gamma_2, \\ w_2 &= \Gamma_1\Gamma + \lambda\Gamma_2. \end{aligned}$$

K é denominado curvatura seccional sub-Riemanniana.

Para uma melhor análise dos grupos de Lie tridimensionais necessitamos de algumas definições.

Definição 2.3.1 *Um grupo de Lie G será denominado unimodular se qualquer forma volume invariante à esquerda também for invariante à direita.*

Lembremos que $Ad : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ é definida como $Ad(g) = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e$, sendo $L_g(R_g)$ a translação à esquerda (direita).

Lema 2.3.2 *O grupo G é unimodular se e somente se $\det[Ad(g)] = \pm 1$, para todo $g \in G$.*

Demonstração: Seja ω uma forma volume sobre G . Suponhamos que $L_g^*\omega = \omega, \forall g \in G$. De

$$Ad(g) = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e$$

tiramos que

$$\begin{aligned} (dR_g)_{g^{-1}} &= Ad(g^{-1})(dL_g)_{g^{-1}} \\ R_g^*\omega_g(u_1, u_2, u_3) &= \omega_g((dR_g)_{g^{-1}}(u_1), (dR_g)_{g^{-1}}(u_2), (dR_g)_{g^{-1}}(u_3)) \\ &= |\det Ad(g^{-1})|\omega_g((dL_g)_{g^{-1}}(u_1), (dL_g)_{g^{-1}}(u_2), \omega_g((dL_g)_{g^{-1}}(u_3)) \\ &= |\det Ad(g^{-1})|L_g^*\omega_g(u_1, u_2, u_3) \\ &= |\det Ad(g^{-1})|\omega_e(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

portanto, se G for unimodular, da igualdade acima temos que $\det Ad(g) = \pm 1$. E da igualdade acima temos que a recíproca também é verdadeira. $\square$

Lema 2.3.3 *Um grupo de Lie conexo é unimodular se e somente se a aplicação $ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, dada por $ad(X)(Y) = [X, Y]$, possui traço nulo.*

Demonstração: Sabemos que $\exp \mathfrak{g} \rightarrow G$ é C^∞ e que

$$\begin{aligned} Ad(\exp(X)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ad(X)^k}{k!}, \\ \det(ad(\exp(X))) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\text{tr}(ad(X))]^k}{k!}. \end{aligned}$$

Se $\text{tr}(ad(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, então $\det(Ad(g)) = 1$ em uma vizinhança V de e e portanto como $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n$, segue que $\det(Ad(h)) = 1$, para todo $h \in G$. Reciprocamente, se $\det(Ad(g)) = 1$, para todo G , então

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{tr}(ad(X))^k}{k!} \quad \text{implica em} \quad \text{tr}[ad(X)] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

□

Definição 2.3.4 $\mathfrak{g}$ é denominada uma álgebra de Lie unimodular se $\text{tr}[ad(X)] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Para prosseguirmos no exemplo tridimensional, dividiremos o estudo em dois casos: G unimodular e G não-unimodular e usaremos algumas idéias e definições de [8].

Lema 2.3.5 $\mathcal{U} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{tr}[ad(X)] = 0\}$ é um ideal em $\mathfrak{g}$.

Demonstração: De $ad[X, Y] = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X)$ e de $\text{tr}[ad(X) \circ ad(Y)] = \text{tr}[ad(Y) \circ ad(X)]$ segue que $\mathfrak{g}^1 = \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\} \subset \mathcal{U}$ e portanto $\mathcal{U}$ é um ideal. □

Definição 2.3.6 $\mathcal{U}$ é denominado o ideal unimodular de G .

Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G ($\dim G = 3$) podemos, fixado um produto interno em $\mathfrak{g}$ e uma orientação, definir um produto vetorial $\wedge$ em $\mathfrak{g}$ por

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w).$$

Lema 2.3.7 *O colchete $[\cdot, \cdot]$ está relacionado com $\wedge$ pela fórmula $[u, v] = L(u \wedge v)$, sendo L uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ definida univocamente. O grupo de Lie G será unimodular se e somente se L é auto-adjunta ($L = L^t$).*

Demonstração: escolhamos $\{e_1; e_2; e_3\}$ como sendo uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Definamos L , como em [8], uma aplicação linear tal que

$$\begin{aligned} L(e_1) &= [e_2, e_3], \\ L(e_2) &= [e_3, e_1], \\ L(e_3) &= [e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Se $X^j = X_1^j e_1 + X_2^j e_2 + X_3^j e_3$, $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} L(X^1 \wedge X^2) &= L[(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1)e_1 + (X_3^1 X_1^2 - X_3^2 X_1^1)e_2 + (X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1)e_3] \\ &= (X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1)[e_2, e_3] + (X_3^1 X_1^2 - X_3^2 X_1^1)[e_3, e_1] \\ &\quad + (X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1)[e_1, e_2] \\ &= [X^1, X^2]. \end{aligned}$$

Escrevendo a matriz de L em relação à base $\{e_1; e_2; e_3\}$, teremos

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^3 L_j^i e_i$$

$$\begin{aligned} ad(e_1)(e_1) &= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3, \\ ad(e_1)(e_2) &= [e_1, e_2] = L(e_3) = L_3^1 e_1 + L_3^2 e_2 + L_3^3 e_3, \\ ad(e_1)(e_3) &= [e_1, e_3] = -L(e_2) = -L_2^1 e_1 - L_2^2 e_2 - L_2^3 e_3, \\ tr[ad(e_1)] &= L_3^2 - L_2^3. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} tr[ad(e_2)] &= L_1^3 - L_3^1, \\ tr[ad(e_3)] &= L_2^1 - L_1^2. \end{aligned}$$

Assim, se G é unimodular L é simétrica e claramente vale a recíproca. $\square$

Lema 2.3.8 *Se o grupo de Lie G de dimensão 3 não é unimodular, então sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ possui uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= ae_2 - be_3, \\ [e_1, e_3] &= de_1 + de_3, \\ [e_2, e_3] &= 0 \end{aligned}$$

e $a + d = 2$.

Demonstração: como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathcal{U}$, segue que $\dim \mathcal{U} = 2$, caso contrário G seria unimodular. Sendo $\mathcal{U}$ uma álgebra de Lie de dimensão 2 e unimodular, segue que $\mathcal{U}$ é comutativa. Podemos então tomar $e_1 \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{U}$ tal que $\text{tr}[ad(e_1)] = 2$ e portanto $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $T(X) = [e_1, X]$ possui traço 2 ($\text{tr}(T) = 2$). $\square$

Do lema anterior, existe uma base tal que $\{e_1, e_2, \xi\}$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \Gamma_2 e_2 - 2\xi \\ [e_1, \xi] &= \Upsilon e_2 \\ [e_2, \xi] &= 0. \end{aligned}$$

Vejamos qual é o grupo G associado à álgebra $\mathfrak{g}$, para a qual existe uma base nas condições do lema 2.3.8. O subgrupo H , simplesmente conexo, obtido integrando $\mathcal{U}$ é claramente $\mathbb{R}^2$ ($H = \mathbb{R}^2$). Como $[e_1]$ é uma sub-álgebra, integrando-a obteremos $\mathbb{R}$. $ad(e_1)$ induz uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $gl(\mathbb{R}^2) = gl(\mathcal{U})$, dada por $t \rightarrow ad(te_1)$. Podemos então definir

$$\sigma(t) = \exp(ad(te_1)).$$

Portanto, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ com produto dado por

$$(t, (x, y)) \cdot (s, (z, w)) = (t + s, \exp(ad(te_1))(z, w) + (x, y)).$$

Resta-nos então calcular $\exp(ad(te_1))$.

Mas sendo $A = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Upsilon \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ o calculo de e^{tA} dependerá da relação entre Γ_2 e Υ . De fato, calculando os auto-valores encontramos,

$$x_1 = \frac{\Gamma_2 + \sqrt{\Gamma_2^2 - 8\Upsilon}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\Gamma_2 - \sqrt{\Gamma_2^2 - 8\Upsilon}}{2}$$

Temos então dois casos:

CASO I: $\Gamma_2 \neq 2\sqrt{2\Upsilon}$. Neste caso A é diagonalizável e

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Upsilon \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Upsilon & -\Upsilon \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \Upsilon \\ -x_2 & -\Upsilon \end{bmatrix}.$$

$$\exp t \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Upsilon \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Upsilon & -\Upsilon \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{tx_1} & 0 \\ 0 & e^{tx_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \Upsilon \\ x_2 & -\Upsilon \end{bmatrix}$$

. Para $\alpha = \sqrt{\Gamma_2^2 - 8\Upsilon}$ teremos

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} -\Gamma_2 \sinh \frac{\alpha}{2}t + \alpha \cosh \alpha 2t & -\Upsilon \sinh \frac{\alpha}{2}t \\ 2 \sinh \frac{\alpha}{2}t & -\Gamma_2 \sinh \frac{\alpha}{2}t - \alpha \cosh \alpha 2t \end{bmatrix}.$$

CASO II: $\Gamma_2^2 = 8\Upsilon$. Neste caso temos $x_1 = x_2 = \frac{\Gamma_2}{2}$ e

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Upsilon \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Upsilon & -\Upsilon \\ 0 & \frac{\Gamma_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_2}{2} & 0 \\ \frac{\Gamma_2}{2} & \frac{\Gamma_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_2}{2} & \Upsilon \\ 0 & -\Upsilon \end{bmatrix}.$$

Portanto, para a matriz neste caso

$$\exp(tA) = e^{\Gamma_2 t} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_2}{2} & \Upsilon \\ -2 & -\frac{\Gamma_2}{2} \end{bmatrix} + I \right\}.$$

Resumindo então, obtivemos para $B = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Upsilon \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{tA} = \begin{cases} e^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh(\frac{\alpha t}{2}) B + \cosh(\frac{\alpha t}{2}) I \right] & , \text{ se } \alpha > 0 \\ e^{\frac{\alpha t}{2}} [B + I] & , \text{ se } \alpha = 0 \\ e^{\frac{\alpha}{2}} \left[2 \sinh(-i \frac{\alpha}{2} t) B + \cos(\frac{\alpha}{2} t) I \right] & , \text{ se } \alpha \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Voltando ao caso unimodular, já sabemos que existe uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \lambda_3 e_3, \\ [e_2, e_3] &= \lambda_1 e_1, \\ [e_3, e_1] &= \lambda_2 e_2. \end{aligned}$$

Claramente os λ_i 's dependem da orientação dada a $\mathfrak{g}$, mas se mudarmos a orientação os auto-valores ficam multiplicados por (-1) . Se assumirmos que $\mathcal{D}$ é gerada por $\{e_1, e_2\}$, teremos $\xi \in [e_3]$ e tal que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2\xi \\ [e_2, \xi] &= \lambda_1 e_1 \\ [\xi, e_1] &= \lambda_2 e_2. \end{aligned}$$

Temos então os seguintes casos:

- (1) se $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, os grupos simplesmente conexos associados a esta álgebra são o S^3 e $SO(3)$;
- (2) se $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, os grupos de Lie simplesmente conexos associados são $SL(2, \mathbb{R})$ e $O(1, 0)$;
- (3) se $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$, o grupo associado é o $E(2)$;
- (4) se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, o grupo associado é o $E(1, 1)$;
- (5) se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, o grupo associado é o grupo de Heisenberg.

No caso unimodular, comparando com (1.1) temos que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Se tomarmos uma métrica sobre $\mathcal{D}$ tal que e_1, e_2 são ortogonais unitários, teremos que: para S^3 , $K = 2$, $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$; para $SL(2, \mathbb{R})$ temos $K = 0$, $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$; para $E(2)$ temos $K = 1$, $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$; para $E(1, 1)$ temos $K = -1$, $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$. Para o grupo de Heisenberg todas as curvaturas são nulas.

O grupo de Heisenberg Generalizado

Em $\mathbb{C}^{n+2}$ consideremos $b(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n - i(z_0 \bar{w}_{n+1} - z_{n+1} \bar{w}_0)$ e definamos

$$Q^n = \{z = (1, z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid b(z, z) = 0\},$$

isto é, se $z_{n+1} = x + iy$ para x e y reais,

$$Q^n = \left\{ (1, z_1, \dots, z_n, x + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \mid z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n) \right\}.$$

Claramente Q^n é uma variedade. Seja $U(n+1, 1)$ o seguinte conjunto de aplicações lineares

$$U(n+1, 1) = \{T \in GL(n+2, \mathbb{C}) : b(Tu, Tv) = b(u, v)\},$$

Se T é tal que $T(e_0) = e_0 + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_{n+1} e_{n+1}$, então $T([e_1, \dots, e_{n+1}]) \subset [e_1, \dots, e_{n+1}]$ e, portanto, estas aplicações são da forma

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \xi & A \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{e} \quad A \in GL(n+1, \mathbb{C}).$$

Se, além disso, $b(Tu, Tv) = b(u, v)$, teremos que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & A & 0 \\ x + \frac{i}{2}\|z\|^2 & i\frac{\bar{z}^t}{\sqrt{2}}A & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o grupo G tal que $T(e_0) = e_0 + v$, $v \in [e_1, \dots, e_{n+1}]$ e $T([e_1, \dots, e_{n+1}])$ é dado por

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & A & 0 \\ x + \frac{i}{2}\|z\|^2 & \frac{\bar{z}^t}{\sqrt{2}}A & 1 \end{bmatrix} \mid A \in U(n), z \in \mathbb{C}^n \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Temos então uma ação de G em Q^n ,

$$(g, z) \rightarrow g(z).$$

É fácil verificar que esta ação é C^∞ e transitiva. A isotropia de e_0 é dada por $G_0 = \{g \in G \mid g.e_0 = e_0\}$ e portanto um cálculo simples nos mostra que

$$G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid A \in U(n) \right\}$$

$$Q^n \cong G/G_0 \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & I & 0 \\ x + \frac{i}{2}\|z\|^2 & i\frac{\bar{z}^t}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isto mostra que Q^n é homogênea. Q^n pode ser identificada com $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. De $b(z, z) = 0$ tiramos que

$$b(z, dz) + b(dz, z) = 0,$$

$$\text{Re}b(z, dz) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j + \frac{i}{2}(dz_{n+1}) + \sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j - \frac{i}{2}d\bar{z}_{n+1} = 0.$$

Seja

$$\mathcal{D}_z = \{(v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Sigma \bar{z}_j v_j + \frac{i}{2} v_{n+1} = 0\}.$$

$\mathcal{D}_z \subset T_z Q^n$. $\mathcal{D}$ é não-integrável. De fato, $v = \frac{\partial}{\partial z_n} + 2i\bar{z}_n \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \in \mathcal{D}_z$ se $v = v_1 + iv_2$.

$$v = \frac{\partial}{\partial x_n} + 2y_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + 2x_n \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} + i \left[-\frac{\partial}{\partial y_n} + 2x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} - 2y_n \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \right],$$

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x_n} + 2 \left(y_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + x_n \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \right),$$

$$v_2 = -\frac{\partial}{\partial y_n} + 2 \left(x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \right),$$

$$[v_1, v_2] = 2 \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + 2 \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = 4 \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \notin \mathcal{D}_z$$

. Também é verdadeiro que b restrita à distribuição $\mathcal{D}$ é positiva definida.

2.4 Relação entre as conexões Riemanniana e sub-Riemanniana

Associado a variedade Riemanniana $(M, \langle, \rangle)$ temos a conexão de Levi-Civita, isto é, a única conexão em M que satisfaz:

- (i) $X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$;
- (ii) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (Torção nula);

Esta afirmação é demonstrada em qualquer livro de geometria Riemanniana, em especial é demonstrado em [do Carmo]. Relembrando a definição $\tilde{h}$ e h temos que $d\theta(X, Y) = \langle \tilde{h}(X), Y \rangle$ e $h(X) = \tilde{h}(X) - \theta(\tilde{h}(X))\xi$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Temos então o seguinte teorema

Teorema 2.4.1 Para campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{D}$ verifica-se

$$(i) \quad D_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)h(Y) - \langle D_X \xi, Y \rangle \xi;$$

$$(ii) \quad D_X \xi = h(X) + \tau(X).$$

Demonstração: definamos, para $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\tilde{D}_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)h(Y) - \langle h(X) + \tau(X), Y \rangle \xi + \theta(Y)(h(X) + \tau(X) - \theta(X)h(\xi))$$

que $\tilde{D}$ é uma conexão é imediato. $\tilde{D}$ é compatível com a métrica. De fato, para $Y, Z \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \tilde{D}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{D}_X Z \rangle + \theta(X)(\langle h(Y), Z \rangle + \langle Y, h(Z) \rangle) \\ &= \langle \tilde{D}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{D}_X Z \rangle \end{aligned}$$

para $Y \in \mathcal{D}$ e $Z = \xi$

que $\tilde{D}$ possui torção nula poderemos verificar através de um cálculo simples. Primeiramente suponhamos que os campos X e Y pertencem a distribuição $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(X, Y) &= \tilde{D}_X Y - \tilde{D}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y - \langle D_X \xi, Y \rangle - \nabla_Y X - \langle D_Y \xi, X \rangle \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + (\langle D_Y \xi, X \rangle - \langle D_X \xi, Y \rangle)\xi \\ &= d\theta(X, Y)\xi + \theta([X, Y])\xi \\ &= (d\theta(X, Y) + \theta([X, Y]))\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\xi, X) &= \tilde{D}_\xi X - \tilde{D}_X \xi - [\xi, X] \\ &= \nabla_\xi X + h(X) - \langle D_\xi \xi, X \rangle \xi - h(X) - \tau(X) - [\xi, X] \\ &= (\nabla_\xi X - [\xi, X]) - \tau(X) + \langle D_\xi \xi, X \rangle \xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Imersões Isométricas sub-Riemannianas

Como já sabemos que a esfera S^{2n+1} (o hiperboloide Q_r^{2n+1}) é um fibrado principal sobre $\mathbb{CP}^n$ ($\mathbb{CH}^n$) com fibra S^1 . Sabemos também que $\pi : S_r^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ($\pi : Q_r^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CH}^n$) nos dá uma submersão Riemanniana e portanto as propriedades geométricas de uma submersão podem ser aplicadas para o estudo de uma hipervariiedade M em uma forma espacial complexa, isto é, podemos “levantar” M para uma $\bar{M}$ em S_r^{2n+1} (Q_r^{2n+1}) e estudar as propriedades de $\bar{M}$ e tentar inferir resultados para M através dos resultados adquiridos de $\bar{M}$. Para tal, recordemos um pouco de geometria diferencial para uma imersão em um espaço de formas e para uma submersão.

3.1 Hipervariiedades

Estaremos interessados em imersões isométricas de variedades sub-Riemannianas $(M, \mathcal{D}, \langle, \rangle)$ em formas espaciais complexas $N(c)$ (curvatura holomorfa constante c) de modo que $\mathcal{D}_p = T_p M \cap J(T_p M)$, sendo J a estrutura complexa de $N(c)$. Queremos então que $\mathcal{D}$ seja invariante pela ação de J . Algumas abordagens deste problema tem sido feita de variadas maneiras: podemos citar o estudo de estruturas CR e variedades Sasakianas [22]. De modo mais rigoroso, dada uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, \xi, \langle, \rangle)$ de dimensão $2n + 1$ queremos imergi-la em $N(c)$ de dimensão $2(n + 1)$

$$f : (M, \mathcal{D}, \xi) \longrightarrow N(c),$$

de forma que

$$df(\mathcal{D}) = df(TM) \cap J[df(TM)].$$

Para análise do caso acima mencionado vejamos primeiramente o caso Riemanniano geral. Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$ ($\dim N = n+1$) com métrica $\langle, \rangle$. Seja também $f : M \rightarrow N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M de dimensão n . Identificaremos M com sua imagem $f(M)$. Para campos locais X e Y tangentes a M e η normal a M , se denotarmos por $\tilde{D}$ e D as derivadas covariantes de N e M respectivamente, teremos que

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X Y &= D_X Y + b(X, Y)\eta, \\ \tilde{D}_X \eta &= -B(X).\end{aligned}$$

Sendo b denominada segunda forma fundamental e B o tensor de Weingarten. Em [3] prova-se que b e B são tensores de tipo $(0,2)$ e $(1,1)$, respectivamente. Em [3] também se prova que b é simétrica e que B é simétrico em relação a métrica Riemanniana.

Sejam $\tilde{R}$ e R os tensores curvatura de N e M respectivamente. Para campos X, Y e Z tangentes a M e η normal a M teremos que

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X \tilde{D}_Y Z &= \tilde{D}_X \{D_Y Z + b(Y, Z)\eta\} \\ &= D_X D_Y Z + b(X, D_Y Z)\eta + Xb(Y, Z)\eta + b(Y, Z)\tilde{D}_X \eta \\ &= D_X D_Y Z - b(Y, Z)B(X) - [Xb(Y, Z) + b(Y, D_X Z)]\eta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_Y \tilde{D}_X Z &= \tilde{D}_Y \{D_X Z + b(X, Z)\eta\} \\ &= D_Y D_X Z + b(Y, D_X Z)\eta + Yb(X, Z)\eta + b(X, Z)\tilde{D}_Y \eta \\ &= D_Y D_X Z - b(X, Z)B(Y) - [Yb(X, Z) + b(X, D_Y Z)]\eta,\end{aligned}$$

$$\tilde{D}[X, Y]Z = D_{[X, Y]}Z + b([X, Y], Z)\eta.$$

Portanto, a relação entre $\tilde{R}$ e R é dada por

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + b(X, Z)B(Y) - b(Y, Z)B(X) + \langle \tilde{R}(X, Y)Z, \eta \rangle \eta,$$

sendo

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = Xb(Y, Z) - Yb(X, Z) + b(X, D_Y Z) - b(Y, D_X Z) - b([X, Y], Z).$$

Para W tangente a M as equações acima nos dão as equações de Gauss

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + b(X, Z)b(Y, W) - b(X, W)b(Y, Z),$$

e olhando para a componente normal temos as equações de Mainardi-codazzi

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, \eta \rangle &= Xb(Y, Z) - Yb(X, Z) + b(X, D_Y Z) - b(Y, D_X Z) - b([X, Y], Z) \\ &= [Xb(Y, Z) - b(D_X Y, Z) - b(Y, D_X Z)] - [Yb(X, Z) - b(D_Y X, Z) - b(X, D_Y Z)] \\ &= (D_X b)(Y, Z) - (D_Y b)(X, Z) \\ &= \langle ((D_X B)(Y) - (D_Y B)(X)), Z \rangle, \end{aligned}$$

que serão bastante usadas em secções futuras. Algumas vezes no texto $R(X, Y)Z$ será denotado por $R(X \wedge Y)Z$. Sendo $\wedge$ usado somente para indicar anti-simetria em X e Y .

3.2 Submersões

Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões n e $n + 1$ respectivamente e $\pi : N \rightarrow M$ uma submersão ($d\pi$ sobrejetora). Sabemos que para todo $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade diferenciável unidimensional de N , que costumeiramente é denominada fibra da submersão π sobre x , ou brevemente, fibra sobre x . Aqui suporemos $\pi^{-1}(x)$ conexa para todo $x \in M$. Supondo N uma variedade Riemanniana com um campo Killing ξ tangente às fibras da submersão π poderemos munir M de uma métrica Riemanniana $\langle, \rangle_M$. Em verdade, é suficiente impor

$$\langle d\pi(X_y), d\pi(Y_y) \rangle_M = \langle X_y, Y_y \rangle_N,$$

para $X_y, Y_y \in T_y N$. Como todo vetor tangente a M é da forma $d\pi(V)$ para algum V tangente a N e ξ é gerador de isometrias ao longo das fibras segue que acima temos uma boa definição. Em N temos uma distribuição $\mathcal{H}$ dada por

$$\mathcal{H}_p = \{u \in T_p N : \langle u, \xi_p \rangle = 0\}.$$

Um campo vetorial Y será denominado horizontal se ele é π relacionado com um campo X de M ($d\pi(Y) = X \circ \pi$) e $Y_p \in \mathcal{H}_p$ para todo ponto $p \in N$; neste caso Y será denotado por $\tilde{X}$ e será denominado levantamento de X . Um campo X é vertical se $d\pi(X) = 0$.

Semelhantemente ao que foi feito para uma imersão, no caso de uma submersão π também temos campos tensoriais associados, estes surgirão do lema abaixo.

Lema 3.2.1 *Sejam $\tilde{D}$ e D as derivadas covariantes riemannianas de N e M respectivamente. Para campos X e Y tangentes a M sejam $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ os seus respectivos levantamentos, então*

- i) $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle_N = \langle X, Y \rangle_M \circ \pi$;
- ii) $[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle_N \xi = \widetilde{[X, Y]}$;
- iii) $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y}$ é vertical;
- iv) $D_{\tilde{X}}\xi = -\tilde{A}(\tilde{X})$ é horizontal.

Demonstração: Como $X = d\pi(\tilde{X})$ e $Y = d\pi(\tilde{Y})$ i) é imediato. A verificação de ii) também é direta

$$d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}] - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle_N \xi) = d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y].$$

Para provar iii) notemos que $\tilde{X}\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = X\langle Y, Z \rangle \circ \pi$. Daí, usando a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita, teremos

$$\begin{aligned} 2\langle \tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle &= \tilde{X}\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \tilde{Y}\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle - \tilde{Z}\langle X, Y \rangle - \langle \tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{Z}] \rangle + \langle \tilde{Y}, [\tilde{Z}, \tilde{X}] \rangle + \langle \tilde{Z}, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle \\ &= (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle Y, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle) \circ \pi \\ &= 2\langle D_X Y, Z \rangle \circ \pi, \end{aligned}$$

logo $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ e $D_X Y$ são π -relacionados. (iv) é verificado pelo fato que ξ é um campo de Killing unitário. $\square$

A componente vertical de $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ denotaremos por $a(\tilde{X}, \tilde{Y})$. Verifica-se que $a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle \tilde{A}(X), \tilde{Y} \rangle_N$.

Lema 3.2.2 *Sejam a e A como no lema anterior, então*

- (i) $a(\tilde{X}, \tilde{X}) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- (ii) a é um tensor de tipo $(0, 2)$ sobre o anel das funções que são levantamentos;

(iii) A é um tensor de tipo $(1,1)$.

Demonstração: De $\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle$ ser constante ao longo das fibras teremos que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi \langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle \\ &= \langle D_\xi \tilde{X}, \tilde{X} \rangle + \langle \tilde{X}, D_\xi \tilde{X} \rangle \\ &= 2 \langle D_\xi \tilde{X}, \tilde{X} \rangle \\ &= -2 \langle \tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{X}, \xi \rangle \\ &= -2a(\tilde{X}, \tilde{X}). \end{aligned}$$

Assim, (i) está demonstrado. Para a prova de (ii) tomemos $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e seja $\tilde{f} = f \circ \pi$ teremos então

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\tilde{f}\tilde{X} + \tilde{Z}} \tilde{Y} &= \tilde{f} \tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} + D_{\tilde{Z}} \tilde{Y} \\ \widetilde{D_{fX+Z}Y} + a(\tilde{f}\tilde{X} + \tilde{Z}, \tilde{Y})\xi &= \tilde{f} \widetilde{D_X Y} + \tilde{f}a(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi + \widetilde{D_Z Y} + a(\tilde{Z}, \tilde{Y})\xi, \end{aligned}$$

da igualdade acima tiramos que

$$a(\tilde{f}\tilde{X} + \tilde{Z}, \tilde{Y}) = \tilde{f}a(\tilde{X}, \tilde{Y}) + a(\tilde{Z}, \tilde{Y}).$$

(iii) pode ser concluída de (ii) pelo fato que $a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle A(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle$. □

Lema 3.2.3 Para campos X e Y sobre M temos $a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{D}_{\tilde{Y}} \tilde{X} \\ &= \widetilde{[X, Y]} + \{a(\tilde{X}, \tilde{Y}) - a(\tilde{Y}, \tilde{X})\}\xi \\ &= \widetilde{[X, Y]} + 2a(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi \end{aligned}$$

portanto, $2a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle$. □

Do lema logo acima temos que a está relacionado com a integrabilidade de $\mathcal{H}$.

Teorema 3.2.4 *Seja $\pi : N \rightarrow M$ uma submersão Riemanniana e X e Y campos vetoriais sobre M com levantamentos horizontais $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ respectivamente. Então as curvaturas seccionais K de M e $\tilde{K}$ de N satisfazem*

$$K(X, Y) = \tilde{K}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle^2.$$

Demonstração: Lembremo-nos que $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{D_X Y} + a(\tilde{X}, \tilde{Y})\xi$. Portanto,

$$\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{D}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} = \widetilde{D_X D_Y Z} + a(\tilde{Y}, \tilde{Z})\tilde{D}_{\tilde{X}}\xi + \{\tilde{X}a(\tilde{Y}, \tilde{Z}) + a(\tilde{Y}, \widetilde{D_Y Z})\}\xi,$$

$$\tilde{D}_{\tilde{Y}}\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Z} = \widetilde{D_Y D_X Z} + a(\tilde{X}, \tilde{Z})\tilde{D}_{\tilde{Y}}\xi + \{\tilde{Y}a(\tilde{X}, \tilde{Z}) + a(\tilde{X}, \widetilde{D_X Z})\}\xi,$$

$$\tilde{D}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}Z = \widetilde{D_{[X, Y]}} + \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle \tilde{D}_\xi \tilde{Z} + a([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z})\xi.$$

Supondo $W \in \mathfrak{X}(M)$ teremos

$$\langle \tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + a(\tilde{Y}, \tilde{Z})\langle \tilde{D}_{\tilde{X}}\xi, \tilde{W} \rangle - a(\tilde{X}, \tilde{Z})\langle \tilde{D}_{\tilde{Y}}\xi, \tilde{W} \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \xi \rangle \langle \tilde{D}_\xi \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle$$

substituindo $Z = Y$ e $W = Y$, supondo-os unitários e usando que $a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle \tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \xi \rangle = -\langle \tilde{D}_{\tilde{X}}\xi, Y \rangle$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= K(X, Y) + a(\tilde{X}, \tilde{Y})a(\tilde{Y}, \tilde{X}) + 2a(\tilde{X}, \tilde{Y})a(\tilde{Y}, \tilde{X}) \\ &= K(X, Y) - 3a(\tilde{X}, \tilde{Y})^2 \end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração. $\square$

O teorema acima nos permite, por exemplo, relacionar as curvaturas seccionais da esfera S_r^{2n+1} com as do $\mathbb{CP}^n$. De fato, já sabemos que $\pi : S_r^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n(\frac{4}{r^2})$, que associa a cada $z \in S_r^{2n+1}$ a classe de equivalência $[z]$ é uma submersão Riemanniana (ver capítulo 1). Que $\xi = iz$ é um campo de Killing é decorrente da expressão de seu fluxo φ :

$$\varphi_t(z) = e^{it}z.$$

Resta-nos então descobrir a expressão que descreve $a(\tilde{X}, \tilde{Y})$, para levantamentos de campos X e Y unitários em $\mathfrak{X}(\mathbb{CP}^n)$

$$\begin{aligned} a(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \langle \tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \xi \rangle \\ &= \langle \tilde{D}_{\tilde{X}}J\tilde{Y}, J\xi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \tilde{D}_{\tilde{X}} J\xi, J\tilde{Y} \rangle \\
&= \frac{1}{r} \langle \tilde{D}_{\tilde{X}} z, J\tilde{Y} \rangle \\
&= \frac{1}{r} \langle \tilde{X}, J\tilde{Y} \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas seccionais se relacionam pela fórmula

$$k(X, Y) = \frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^2} \langle \tilde{X}, J\tilde{Y} \rangle^2$$

Que, obviamente, coincide com o resultado já encontrado no primeiro capítulo.

Consideremos duas submersões $\pi_j : N_j \rightarrow M_j$, para $j = 1, 2$, com fibras unidimensionais conexas e duas imersões $f_N : N_1 \rightarrow N_2$ e $f_M : M_1 \rightarrow M_2$ tais que as variedades imersas possuem codimensão 1 e, além disso, o diagrama abaixo comuta e leva fibra em fibra difeomorficamente

$$\begin{array}{ccc}
N_1 & \xrightarrow{f_N} & N_2 \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
M_1 & \xrightarrow{f_M} & M_2
\end{array}$$

sob estas hipóteses, temos que $\xi_{N_2} = df_N(\xi_{N_1})$ e que $\widetilde{df_M(X)} = df_N(\tilde{X})$. Teremos também que se η é um campo normal unitário, em uma vizinhança de um ponto $x \in M_1$, então $\tilde{\eta}$ será um campo unitário normal a N_1 .

Denotando por $\tilde{D}^1$ e $\tilde{D}^2$ as derivadas covariantes de N_1 e N_2 respectivamente e por D^1 e D^2 as derivadas covariantes de M_1 e M_2 respectivamente teremos que

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{df_N(\tilde{X})}^2 df_N(\tilde{Y}) &= df_N(\tilde{D}_{\tilde{X}}^1 \tilde{Y}) + \langle B(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \tilde{\eta} \\
&= df_N(D_{\tilde{X}}^1 \tilde{Y} + \langle \tilde{A}(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \xi) + \langle B(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \tilde{\eta} \\
&= df_N(D_{\tilde{X}}^1 \tilde{Y}) + \langle \tilde{A}(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \xi_{N_2} + \langle B(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \tilde{\eta}
\end{aligned}$$

$$\tilde{D}_{df_N(\tilde{X})}^2 df_N(\xi_{N_1}) = df_N(\tilde{D}_{\tilde{X}}^1 \xi_{N_1}) + \langle B(\xi_{N_1}), \tilde{X} \rangle \tilde{\eta}.$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned}
A_2 \circ df_M(X) &= df_N \circ A_1(X) + \langle X, U \rangle \eta \\
A_2(\eta) &= -df_M(U)
\end{aligned}$$

para um certo U tangente a M_1 .

Lema 3.2.5 *No diagrama acima se o tensor de Weigarten B_N for paralelo, então B_M e A_2 comutam ($B_M \circ A_2 = A_2 \circ B_M$).*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
0 &= \xi_{N_2} \langle B_M X, Y \rangle \circ \pi \\
&= \xi_{N_2} \langle \widetilde{B_M X}, \widetilde{Y} \rangle \\
&= \xi_{N_2} \langle B_n(\tilde{X}), \tilde{Y} \rangle \\
&= \langle (D_{\xi_{N_2}} B_N)(\tilde{X}) + B_N(\tilde{D}_{\xi_{N_2}} \tilde{X}), \tilde{Y} \rangle + \langle B_N \tilde{X}, \tilde{D}_{\xi_{N_2}} \tilde{Y} \rangle \\
&= \langle B_N(\tilde{D}_{\xi_N} \tilde{X}), \tilde{Y} \rangle + \langle B_N \tilde{X}, \tilde{D}_{\tilde{Y}} \xi_N \rangle \\
&= -\langle B_N(\widetilde{A_2(X)}), \tilde{Y} \rangle - \langle B_N \tilde{X}, \widetilde{A_2(Y)} \rangle \\
&= \langle \widetilde{B_M A_2(X)}, \tilde{Y} \rangle + \langle \widetilde{A_2 B_M(X)}, \tilde{Y} \rangle \\
&= \langle (A_2 \circ B_M - B_M \circ A_2)(X), Y \rangle \circ \pi
\end{aligned}$$

sendo $\langle, \rangle$ não degenerada segue o lema. $\square$

A partir de agora, no diagrama acima, iremos supor $N_2 = S^{2n+1}$ e $M_2 = \mathbb{CP}^n$. Mas, com mudanças convenientes em algumas das igualdades que aparecem, tudo continua válido para os espaços de curvatura holomorfa constante. Para este caso existe um campo ξ satisfazendo $J\xi = \eta$. Os próximos lemas e teoremas serão enunciados tendo em mente que o diagrama acima é satisfeito para as variedades que fazem parte do enunciado.

Lema 3.2.6 *Se uma imersão isométrica f , de uma variedade Riemanniana M de dimensão $2n+1$ em um espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^{n+1}(\frac{4}{r^2})$, é tal que o tensor de Weingarten B satisfaz $JB = BJ$ e*

$B^2(X) - \alpha B(X) - X + \langle \xi, X \rangle \xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e alguma função α , então a função α é constante.

Demonstração: do que fizemos acima segue que $\text{grad}(\omega(\xi)) = \beta\xi$, sendo $\beta = \xi\omega(\xi)$. Portanto,

$$D_X(\text{grad}(\omega(\xi))) = X\beta\xi + \xi(\omega(\xi))JB(X).$$

Do fato $\langle D_X(\text{grad}(\omega(\xi))), Y \rangle = \langle X, D_Y(\text{grad}(\omega(\xi))) \rangle$ tiramos

$$\begin{aligned}
X\beta\langle \xi, Y \rangle + \beta\langle JB(X), Y \rangle &= Y\beta\langle \xi, X \rangle + \beta\langle JB(Y), X \rangle \\
Y\beta\langle \xi, X \rangle - X\beta\langle \xi, Y \rangle &= 2\beta\langle JB(X), Y \rangle,
\end{aligned}$$

para X e Y em $\mathcal{D}$ a igualdade acima se transforma em

$$\beta \langle JB(X), Y \rangle = 0.$$

Se em um ponto $p \in M$ temos $\beta \neq 0$ seremos levados a $J_p B_p(X_p) = 0$ e aí teríamos um absurdo (usando o fato que $B^2(X) - \alpha B(X) - X + \langle \xi, X \rangle \xi = 0$). $\square$

Lema 3.2.7 *Se o tensor de Weingarten B de uma imersão isométrica f de uma variedade Riemanniana M de dimensão $2n + 1$ em um espaço $\mathbb{CP}^{n+1}(\frac{4}{r^2})$, satisfaz $BJ = JB$ e $B^2(X) - \alpha B(X) - X + \langle \xi, X \rangle \xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante α , então o tensor de Weingarten $\tilde{B}$ do levantamento de f à esfera de raio r satisfaz*

$$\tilde{B}^2(\tilde{X}) - \alpha \tilde{B}(\tilde{X}) - \tilde{X} = 0 \quad \text{para todo } \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M}).$$

Demonstração: Voltando ao diagrama acima e fazendo $M_1 = M$ e tomemos $X \in \mathfrak{X}(M_1)$. Como todo $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$ pode ser escrito na forma $Y = \tilde{Z} + \langle Y, \xi_N \rangle \xi_N$, sendo $Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ teremos então

$$\langle B_N^2(\tilde{X}) - \alpha B_N(\tilde{X}) - \tilde{X}, Y \rangle = \langle B_N^2(\tilde{X}) - \alpha B_N(\tilde{X}) - \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \langle B_N^2(\tilde{X}) - \alpha B_N(\tilde{X}) - \tilde{X}, \xi_N \rangle$$

De $B_M(\xi) = \langle B_M(\xi), \xi \rangle \xi = \alpha \xi$ e da simetria de B_M segue que $\langle B_M(X), \xi \rangle = \alpha \langle X, \xi \rangle$. Verifica-se também que $\langle B_N(\xi_N), \tilde{X} \rangle = -\langle \xi, X \rangle \circ \pi$ e que isto nos leva a $\langle B_N(\tilde{B}_M(X)), \xi_N \rangle = -\alpha \langle \xi, X \rangle \circ \pi$ usando também que $\langle B_N(\tilde{X}), \tilde{Z} \rangle = \langle B_M(X), Z \rangle \circ \pi$ tem-se

$$\begin{aligned} B_N(\tilde{X}) &= \widetilde{B_M(X)} + \langle B_N(\tilde{X}), \xi_N \rangle \xi_N \\ &= \widetilde{B_M(X)} - (\langle X, \xi \rangle \circ \pi) \xi_N. \end{aligned}$$

Portanto,

$$B_N^2(\tilde{X}) = \widetilde{B_M^2(X)} - (\langle X, \xi \rangle \circ \pi) \xi_N - (\langle X, \xi \rangle \circ \pi) B_N(\xi_N),$$

consequentemente temos

$$\langle B_N^2(\tilde{X}) - \alpha B_N(\tilde{X}) - \tilde{X}, Y \rangle = \langle B_M^2(X) - \alpha B_M(X) - X + \langle X, \xi \rangle \xi, Y \rangle = 0.$$

$\square$

Teorema 3.2.8 *Seja M_2 uma hipersuperfície do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$ satisfazendo as condições do diagrama acima. Para que J e B_M comutem é necessário e suficiente que B_N seja paralelo.*

Demonstração: Suponhamos que $J \circ B_N = B_N \circ J$. Sabemos então que existem constantes α e k

$$B_N^2(\tilde{X}) = \alpha B_N(\tilde{X}) + k\tilde{X}$$

como $(D_{\tilde{X}}B_N)(\tilde{Y}) = (D_{\tilde{Y}}B_N)(\tilde{X})$ e o tensor de M_2 se relaciona com o da esfera pela expressão abaixo

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y}) = k\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \tilde{Y} + \langle B_N(\tilde{Y}), \tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{X}) - \langle B_N(\tilde{X}), \tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{Y})$$

será válida então a igualdade

$$\begin{aligned} D_{\tilde{X}}D_{\tilde{Y}}B_N - D_{\tilde{Y}}D_{\tilde{X}}B_N - D_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z} &= R(\tilde{X}, \tilde{Y})B_N(\tilde{Z}) - B_N(R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}) \\ &= k\{\langle \tilde{Y}, B_N\tilde{Z} \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, B_N\tilde{Z} \rangle \tilde{Y}\} + \langle B_N(\tilde{Y}), B_N\tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{X}) - \langle B_N(\tilde{X}), B_N\tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{Y}) \\ &- k\{\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{X}) - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle B_N(\tilde{Y})\} - \langle B_N(\tilde{Y}), \tilde{Z} \rangle B_N^2(\tilde{X}) \\ &+ \langle B_N(\tilde{X}), \tilde{Z} \rangle B_N^2(\tilde{Y}). \end{aligned}$$

Seja $\{e_1(p); \dots; e_{2n+1}(p)\}$ uma base ortonormal de $T_p S_r^{2n+1}$. Podemos então estendê-la a uma base ortonormal em uma vizinhança de p de maneira que $De_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, 2n+1$. Em $\tilde{X}D_{\tilde{Y}}B_N - D_{\tilde{Y}}D_{\tilde{X}}B_N - D_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z} = 0$ substituindo $Y = Z = e_j$ e usando novamente que $(D_{\tilde{X}}B_N)(\tilde{Y}) = (D_{\tilde{Y}}B_N)(\tilde{X})$ e também que $\sum_{j=1}^{2n+1} D\tilde{X}(D_{e_j}B_N)e_j = 0$ teremos

$$\sum_{j=1}^{2n+1} D_{e_j}(D_{\tilde{X}}B_N)e_j = \sum_{j=1}^{2n+1} D_{e_j}(D_{e_j}B_N)\tilde{X} = 0$$

usando que $tr(B_N^2)$ é constante e derivando covariantemente $tr(B_N^2)$ obtém-se

$$\frac{1}{2}\tilde{Y}\tilde{X}(tr(B_N^2)) = tr(D_{\tilde{Y}}D_{\tilde{X}}B_N)B_N + tr[(D_{\tilde{Y}}B_N)(D_{\tilde{X}}B_N)] = 0$$

para $\tilde{Y} = \tilde{X}$

$$tr(D_{\tilde{X}}B_N)^2 = -tr(D_{\tilde{X}}(D_{\tilde{X}}B_N)B_N) = -\sum_{j=1}^{2n+1} \langle (D_{\tilde{X}}(D_{\tilde{X}}B_N)e_j, B_Ne_j) \rangle.$$

Assim temos

$$\langle DB_N, DB_N \rangle = \sum_{j=1}^{2n+1} tr(D_{e_j}B_N)^2 = -\sum_{j,k=1}^{2n+1} \langle (D_{e_j}(D_{e_j}B_N)e_j, B_Ne_k) \rangle = 0$$

e isto finaliza a demonstração. $\square$

Faremos agora alguns exemplos de imersões em $N(c)$.

Exemplos:

Em $\mathbb{C}^{n+2}$ sejam $S_R^{2n+3} = \{(z_1, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} : \sum_{j=1}^{n+2} |z_j|^2 = R^2\}$ e $\tilde{S} = \{(z_1, \dots, z_{n+2}) \in S_R^{2n+3} : \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = r^2 |z_{n+2}|^2\}$. Claramente $\tilde{S}$ é uma hipervariiedade de S_R^{2n+3} . Também é fácil ver que a ação do S^1 sobre S_R^{2n+3} deixa invariante $\tilde{S}$. Portanto, a projeção canônica de S_R^{2n+3} em $\mathbb{CP}^{n+1}$ projeta $\tilde{S}$ em uma hipervariiedade $S = \pi(\tilde{S})$ de $\mathbb{P}^{n+1}$. Usando as equações

$$\sum_{j=1}^{n+2} |z_j|^2 = R^2$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = r^2 |z_{n+2}|^2,$$

tiramos que

$$S = \{[z] \in \mathbb{CP}^{n+1} : z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_{n+1} \bar{z}_{n+1} = \frac{(rR)^2}{1+r^2}, \quad |z_{n+2}| = \frac{R^2}{1+r^2}\}$$

e daí S é difeomorfa a uma esfera. Este exemplo é facilmente generalizado. De fato, em S_R^{2n+3} definamos

$$\tilde{S}(n, m, r) = \{(z_1, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} : \sum_{j=1}^m |z_j|^2 = r^2 \left(\sum_{j=m+1}^{n+2} |z_j|^2 \right), \quad \sum_{j=1}^{n+2} |z_j|^2 = R^2\}.$$

Como $\tilde{S}(n, m, r)$ é invariante pela ação de S^1 em S_R^{2n+3} segue que sua projeção $S(m, n, r) = \pi[\tilde{S}(m, n, r)]$ é uma hipervariiedade de $\mathbb{CP}^{n+1}$.

Do teorema 3.2.8 e dos teoremas em [11] que caracterizam as hipervariiedades homogêneas da esfera de raio r segue que as variedades $S(m, n, r)$ do exemplo acima são as únicas hipersuperfícies homogêneas do espaço projetivo complexo $(\mathbb{CP}^{n+1}(\frac{4}{r^2}))$ nas quais o tensor de Weingarten B comuta com a estrutura complexa J .

3.3 O caso sub-Riemanniano

O caso de uma imersão isométrica f de uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, \xi, \langle, \rangle)$ em um espaço de forma complexa induzirá em $\mathcal{D}$ uma estrutura quase-complexa J e $\eta = J(\xi)$

e podemos escrever para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X Y &= D_X Y + b(X, Y)J\xi \\ \tilde{D}_X \eta &= -A(X) - \omega(X)\xi, \quad A(X) \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

De $b(X, Y) = \langle -\tilde{D}_X \eta, Y \rangle$ obtemos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{D}_X Y, \eta \rangle + \langle Y, \tilde{D}_X \eta \rangle &= 0, \\ b(X, Y) &= \langle -D_X \eta, Y \rangle = \langle A(X), Y \rangle + \omega(X)\langle Y, \xi \rangle \\ \text{e} \quad \omega(X) &= b(X, \xi).\end{aligned}$$

Proposição 3.3.1 *A e ω são tensores de tipo $(1,1)$ e $(0,1)$, respectivamente.*

Demonstração: É imediato. De fato, de $\omega(X) = b(X, \xi)$ segue que ω é do tipo $(0,1)$ e do fato que $A(X) = -\tilde{D}_X \eta - \omega(X)\xi$ segue que A é um tensor do tipo $(1,1)$. $\square$

Também podemos concluir que o operador linear que para todo $X \in \mathcal{D}$ associa $A(X) - \langle X, \xi \rangle \xi$ é simétrico. Como $\tilde{D}J = 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X JY &= J\tilde{D}_X Y, \\ \nabla_X JY + \theta(X)h \circ J(Y) + \langle D_X Y, \xi \rangle \xi + b(X, JY)\eta \\ &= J\nabla_X Y + \theta(X)J \circ h(Y) - b(X, Y)\xi + \langle D_X Y, \xi \rangle \eta.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Desta equação tiramos que

$$\begin{aligned}b(X, Y) &= -\langle D_X JY, \xi \rangle \quad \text{e} \quad b(X, JY) = \langle D_X Y, \xi \rangle, \\ \tilde{D}_X Y &= \nabla_X Y + \theta(X)h(Y) + b(X, JY)\xi + b(X, Y)\eta.\end{aligned}$$

(3.1) também nos mostra que

$$\nabla_X JY + \theta(X)h \circ J(Y) = J\nabla_X Y + \theta(X)Jh(Y).$$

Para $X, Y \in \mathcal{D}$ teremos que

$$\begin{aligned}\langle A \circ J(X), Y \rangle &= b(JX, Y) = \langle D_Y X, \xi \rangle, \\ \langle J \circ A(X), Y \rangle &= -\langle A(X), JY \rangle = -b(X, JY) = \langle -D_X Y, \xi \rangle \\ \langle (A \circ J + J \circ A)(X), Y \rangle &= \langle [X, Y], \xi \rangle.\end{aligned}$$

Logo, se $\mathcal{D}$ é integrável, $A \circ J = -J \circ A$. Assim, M é folheada e as folhas são hipervarietades complexas de $\tilde{N}$ e como $B \circ J = -J \circ B$, elas são mínimas. Em verdade, se M_1 é uma variedade integral de $\mathcal{D}$, teremos que o tensor de Weingarten será dado por A . Como A é simétrico, existe uma base de auto-vetores para A . Se e_j é um auto-vetor associado ao auto-valor λ_j , teremos que $AJe_j = -JAe_j = -J(\lambda_j e_j) = -\lambda_j(Je_j)$, portanto existe uma base de auto-vetores da forma $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$, isto é, a matriz de A em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\lambda_n \end{bmatrix},$$

logo, $\text{tr}A = 0$.

Proposição 3.3.2 *Seja $f : M \rightarrow N(c)$ uma imersão isométrica de variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$ de dimensão $2n + 1$ em um espaço de formas complexas $N(c)$ de dimensão complexa $n + 1$. Suponhamos que f é tal que $f_*(\mathcal{D}) = f_*(TM) \cap Jf_*(TM)$. Então a segunda forma fundamental fica determinada por*

$$b(X, Y) = -\langle JD_X \xi, Y \rangle - \langle JD_\xi \xi, X \rangle \theta(Y) + \omega(\xi) \theta(X) \theta(Y)$$

e o tensor de Weingarten por

$$B(X) = -JD_X \xi - [\langle D_\xi \xi, X \rangle - \omega(\xi) \theta(X)] \xi.$$

Demonstração:

$$\tilde{D}_X \eta = JD_X \xi - b(X, \xi) \xi,$$

$$\begin{aligned} \omega(X) &= b(X, \xi) = \langle -\tilde{D}_X \eta, \xi \rangle = \langle -\tilde{D}_\xi \eta, X \rangle \\ &= \langle -JD_\xi \xi, X \rangle + \langle -b(\xi, \xi)(-\xi), X \rangle \\ &= -\langle JD_\xi \xi, X \rangle + \omega(\xi) \theta(X), \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_X \eta = JD_X \xi + (\langle JD_\xi \xi, X \rangle - \omega(\xi) \theta(X)) \xi.$$

□

Corolário 3.3.3 *Nas condições da proposição logo acima, se as trajetórias de ξ são geodésicas Riemannianas de M , então ξ é uma curvatura principal de M*

Demonstração: Se $D_\xi \xi = 0$ então $B(\xi)$ será dado por

$$\begin{aligned} B(\xi) &= -JD_\xi \xi + [\langle D_\xi \xi, \xi \rangle - \omega(\xi)\theta(\xi)]\xi \\ &= -\omega(\xi)\xi. \end{aligned}$$

□

Da integrabilidade da estrutura complexa do espaço de forma complexa $N(c)$ temos que

$$[JX, JY] - [X, Y] = J([X, JY]) + J([JX, Y]).$$

Portanto, como $\mathcal{D}$ é invariante por J teremos para X e Y em $\mathcal{D}$

$$[JX, JY] - [X, Y] \in \mathcal{D}$$

e daí podemos escrever

$$\begin{aligned} \theta([JX, JY] - [X, Y]) &= 0, \\ \theta([JX, JY]) &= \theta([X, Y]). \end{aligned}$$

Lembremos que sendo D a derivada covariante Riemanniana de M temos $D\xi = \tau + h$.

Proposição 3.3.4 *Nas condições acima teremos $h|_{\mathcal{D}}$ holomorfo e $\tau|_{\mathcal{D}}$ anti-holomorfo ($h \circ J = J \circ h$ e $\tau \circ J = -J \circ \tau$).*

Demonstração: Sabemos que $\theta([JX, JY]) = \theta(X, Y)$ para $X, Y \in \mathcal{D}$ e que

$$d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]).$$

Tomando $X, Y \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} d\theta(X, Y) &= -\theta([X, Y]), \\ d\theta(JX, JY) &= -\theta([JX, JY]) = -\theta([X, Y]) = d\theta(X, Y), \\ \langle h \circ JX, JY \rangle &= \langle h(X), Y \rangle, \\ \langle h \circ JX, JY \rangle &= \langle h(X), Y \rangle, \\ \langle (Jh - h \circ J)(X), Y \rangle &= 0 \end{aligned}$$

e portanto $J \circ h = h \circ J$. Quanto a τ temos que $b(X, Y) = b(Y, X)$,

$$\begin{aligned}\langle JD_X \xi, Y \rangle &= \langle JD_Y \xi, X \rangle, \\ \langle Jh(X) + J\tau(X), Y \rangle &= \langle Jh(Y) + J\tau(Y), X \rangle, \\ \langle (Jh - hJ)(X), Y \rangle &= -\langle (J\tau + \tau J)(X), Y \rangle\end{aligned}$$

e portanto $J \circ \tau = -\tau \circ J$. □

Já vimos a relação entre $\tilde{R}$ e R para uma hipervarietade isometricamente imersa, mas no caso sub-Riemanniano temos direções privilegiadas, a saber: $\mathcal{D}$ e ξ . Podemos para campos X pertencente a $\mathfrak{X}(M)$ e Y pertencentes a $\mathcal{D}$ decompor $D_X Y$ em uma componente pertencente a $\mathcal{D}$, que denotaremos por $D_X^T Y$, e em sua componente na direção de ξ , que denotaremos por $k(X, Y)$:

$$D_X Y = D_X^T Y + k(X, Y)\xi.$$

De forma semelhante a feita para a segunda forma fundamental de uma imersão e para a derivada covariante induzida pelo espaço ambiente teremos que k será um campo tensorial de tipo $(0,2)$ e D^T será uma derivação para campos em $\mathcal{D}$.

Proposição 3.3.5 *Sejam X e Y campos em $\mathcal{D}$. Então $D_X^T JY = JD_X^T Y$ e $k(X, Y) = b(X, JY)$.*

Demonstração: para campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{D}$ (estamos identificando $\mathcal{D}$ com $df(\mathcal{D})$) temos

$$\begin{aligned}J\tilde{D}_X Y &= \tilde{D}_X JY \\ J(D_X Y + b(X, Y)J\xi) &= D_X JY + b(X, JY)J\xi \\ J(D_X^T Y + k(X, Y)\xi + b(X, Y)J\xi) &= D_X^T JY + k(X, JY)\xi + b(X, JY)J\xi \\ JD_X^T Y - b(X, Y)\xi + k(X, Y)J\xi &= D_X^T JY + k(X, JY)\xi + b(X, JY)J\xi\end{aligned}$$

da igualdade acima segue a proposição. □

Definindo $R^T(X, Y)Z = D_X^T D_Y^T Z - D_Y^T D_X^T Z - D_{[X, Y]}^T Z$ obteremos a seguinte relação entre R e R^T

$$D_X D_Y Z = D_X \{D_Y^T Z + k(Y, Z)\xi\}$$

$$\begin{aligned}
&= D_X D_Y^T Z + k(X, D_Y^T Z) \xi + X k(Y, Z) D_X \xi \\
&= D_X^T D_Y^T Z + k(Y, Z) D_X \xi + (k(X, D_Y^T Z) + X k(Y, Z)) \xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_Y D_X Z &= D_Y \{D_X^T Z + k(X, Z) \xi\} \\
&= D_Y D_X^T Z + k(Y, D_X^T Z) \xi + Y k(X, Z) D_X \xi \\
&= D_Y^T D_X^T Z + k(X, Z) D_Y \xi + (k(Y, D_X^T Z) + Y k(X, Z)) \xi
\end{aligned}$$

$$D_{[X, Y]} Z = D_{[X, Y]}^T Z + k([X, Y], Z) \xi$$

$$R(X \wedge Y) Z = R^T(X \wedge Y) Z + k(Y, Z) D_X \xi - k(X, Z) D_Y \xi + \langle R(X \wedge Y) Z, \xi \rangle \xi,$$

Portanto, tiramos que

$$\langle R(X \wedge Y) Z, \xi \rangle = X k(Y, Z) - Y k(X, Z) + k(X, D_Y^T Z) - k(Y, D_X^T Z) - k([X, Y], Z)$$

$$\langle R(X \wedge Y) Z, \xi \rangle = X k(Y, Z) - Y k(X, Z) + k(X, D_Y^T Z) - k(Y, D_X^T Z) - k([X, Y], Z).$$

Substituindo $R(X, Y) Z$ nas equações de Gauss obteremos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(X, Y) Z, W \rangle &= \langle R^T(X \wedge Y) Z, W \rangle + k(Y, Z) \langle D_X \xi, W \rangle - k(X, Z) \langle D_Y \xi, W \rangle \\
&\quad + \langle R(X \wedge Y) Z, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle + b(X, Z) b(Y, W) - b(X, W) b(Y, Z),
\end{aligned}$$

que para $W \in \mathcal{D}$ nos dará

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(X, Y) Z, W \rangle &= \langle R^T(X \wedge Y) Z, W \rangle + k(Y, Z) \langle D_X \xi, W \rangle - k(X, Z) \langle D_Y \xi, W \rangle \\
&\quad + b(X, Z) b(Y, W) - b(X, W) b(Y, Z)
\end{aligned}$$

e para $W = \xi$ temos

$$\langle \tilde{R}(X, Y) Z, \xi \rangle = \langle R(X \wedge Y) Z, \xi \rangle + b(X, Z) b(Y, \xi) - b(X, \xi) b(Y, Z)$$

que será usado na demonstração da proposição a seguir.

Proposição 3.3.6 *Dada uma imersão isométrica Riemanniana, f , de $(M, \mathcal{D}, \xi)$ em $N(c)$, se $df(\mathcal{D}) = df(TM) \cap Jdf(TM)$, então a curvatura de Ricci na direção ξ ($Ric(\xi)$) é dada por*

$$Ric(\xi) = nc + \omega(\xi)tr(J \circ h) - \|Jh(\xi)\|^2.$$

Demonstração: das equações de Gauss temos

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, \xi \rangle = \langle R(X \wedge Y)Z, \xi \rangle + b(X, Z)b(Y, \xi) - b(X, \xi)b(Y, Z)$$

Tomando uma base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} Ric(\xi) &= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(\xi, e_j)e_j, \xi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \{ \langle \tilde{R}(\xi, e_j)e_j, \xi \rangle + b(\xi, \xi)b(e_j, e_j) - b(\xi, e_j)^2 \} \\ &= nc + \omega(\xi)tr(B) - \|B(\xi)\|^2 \end{aligned}$$

e suficiente notar que $B = J \circ (h + \tau)$, que τ é anti-holomorfo e que $\tau(\xi) = 0$. $\square$

Definição 3.3.7 *Denominaremos imersão sub-Riemanniana isométrica de $(M, \mathcal{D}, \xi, g)$ em uma forma espacial complexa $N(c)$ a toda imersão isométrica Riemanniana de $(M, \tilde{g})$ em $N(c)$ tal que $df(\mathcal{D}) = df(TM) \cap Jdf(TM)$.*

Lema 3.3.8 *Dadas duas imersões sub-Riemannianas isométricas f e $\hat{f}$ em um espaço de forma complexa $N(c)$, se os tensores quase-complexos J e $\hat{J}$ induzidos em $\mathcal{D}$ por f e $\hat{f}$ respectivamente forem iguais, então as segundas formas b de f e $\hat{b}$ de $\hat{f}$ serão iguais.*

Demonstração: É suficiente notar que para campos X e Y em $\mathfrak{X}(M)$

$$b(X, Y) = -\langle JD_X \xi, Y \rangle - \langle JD_\xi \xi, X \rangle \theta(Y) - \omega(\xi) \theta(X) \theta(Y)$$

e

$$\hat{b}(X, Y) = -\langle \hat{J}D_X \xi, Y \rangle - \langle \hat{J}D_\xi \xi, X \rangle \theta(Y) - \omega(\xi) \theta(X) \theta(Y).$$

$\square$

Teorema 3.3.9 *Sejam M uma variedade sub-Riemanniana de dimensão $2n+1$ e $N(c)$ um espaço de forma complexa de dimensão complexa $n+1$. Dadas duas imersões isométricas sub-Riemannianas f e $\hat{f}$ de M em $N(c)$, então elas possuem uma direção principal em comum.*

Demonstração: Denotaremos por B e $\hat{B}$ os tensores de Weingarten de f e $\hat{f}$ respectivamente. Como $\tilde{B}|_{\mathcal{D}}$ é simétrico, localmente existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de $\mathcal{D}$ que diagonaliza $\tilde{B}$, isto é, uma base de autovetores. Sendo λ_j o auto-valor associado a e_j poderemos escrever

$$\begin{aligned}\hat{B}(e_k) &= \lambda_k e_k + \hat{b}_k \xi \\ \hat{B}(\xi) &= \sum_{k=1}^{2n} \hat{b}^k e_k + \hat{\alpha} \xi \\ B(e_k) &= \sum_{j=1}^{2n} b_k^j e_j + b_k \xi \\ B(\xi) &= \sum_{k=1}^{2n} b^k e_k + \alpha \xi\end{aligned}$$

Olhando para as equações de Gauss teremos:

(i) usando $\langle \tilde{R}(e_j, e_k)e_l, \xi \rangle = 0$ obtemos para $j \neq k \neq l \neq j$

$$b_j^l b_k - b_k^l b_j = 0;$$

(ii) usando que $\langle \tilde{R}(e_j, e_k)e_k, \xi \rangle = 0$ para $j \neq k$ obtemos

$$b_k^j b_k - b_k^k b_j = -\hat{b}_j \lambda_k;$$

(iii) usando que $\langle \tilde{R}(e_j, \xi)e_k, \xi \rangle = 0$ para $j \neq k$ obtemos

$$b_j^l b_k - b_k^l b_j = 0 \quad (j \neq k \neq l \neq j);$$

(iv) façamos $e_{2n+1} = \xi$ temos então

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}(e_j, e_k)e_k, e_j \rangle &+ b(e_j, e_k)b(e_j, e_k) - b(e_j, e_j)b(e_k, e_k) = \\ \langle \tilde{R}(e_j, e_k)e_k, e_j \rangle &+ \hat{b}(e_j, e_k)\hat{b}(e_j, e_k) - \hat{b}(e_j, e_j)\hat{b}(e_k, e_k).\end{aligned}$$

Somando os dois lados de 1 até $2n + 1$ obtemos

$$(b_j)^2 + \sum_{k=1}^{2n} (b_j^k)^2 - b_j^j(\alpha + \sum_{k=1}^{2n} b_k^k) = (\hat{b}_j)^2 + \lambda_j^2 - \lambda_j(\hat{\alpha} + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k);$$

(v) de $D_X Y = D_X^T Y + k(X, Y)\xi$ tiramos que $b(X, JY) = \hat{b}(X, \hat{J}Y)$ para todos os campos X e Y em $\mathcal{D}$. Portanto, tomando j e k em $\{1, \dots, 2n\}$ a igualdade abaixo é satisfeita

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_k^l &= \sum_{l=1}^{2n} \hat{J}_l^j \hat{b}_k^l \\ \sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_k^l &= \hat{J}_k^j \hat{\lambda}_k. \end{aligned}$$

Seja r o número de b_j não nulos. Temos então vários casos, façamos a demonstração dividindo-a em casos:

CASO I: $r = 0$. Se $r = 0$ temos $B(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Como B é simétrico ξ é uma direção principal de B . Revisitando (v)

$$\begin{aligned} b(X, J(Y)) &= \hat{b}(X, \hat{J}(Y)) \\ \langle B(X), J(Y) \rangle &= \langle \hat{B}(X), \hat{J}(Y) \rangle \end{aligned}$$

façamos $X = \xi$

$$\begin{aligned} \langle B(\xi), J(Y) \rangle &= \langle \hat{B}(\xi), \hat{J}(Y) \rangle \\ \langle \alpha \xi, J(Y) \rangle &= \langle \hat{B}(\xi), \hat{J}(Y) \rangle \\ 0 &= \langle \hat{B}(\xi), \hat{J}(Y) \rangle \end{aligned}$$

como $\hat{J}$ é invertível, existe λ tal que $\hat{B}(\xi) = \lambda \xi$. Portanto ξ é uma direção principal comum aos tensores de Weingarten de f e $\hat{f}$.

CASO II: $r = 1$. Neste caso, podemos supor $b_1 \neq 0$ e $b_j = 0$ para $j \geq 2$. Em (i), $j = 1$ produz para $1 \neq k \neq l \neq 1$

$$\begin{aligned} b_1^l, 0 - b_k^l b_1 &= 0 \\ b_k^l b_1 &= 0 \end{aligned}$$

logo, é verdadeiro que $b_k^l = 0$ para $k, l \geq 2$ e $k \neq l$. Mas, de (iii), tomando-se $k, l \geq 2$ e $k \neq l$

$$\begin{aligned} \hat{b}_k \hat{b}_l &= \alpha \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, existe um índice m ($2 \leq m \leq 2n$) tal que $\hat{b}_m = 0$. Usando $j = m$ e $k = 1$ em (ii)

$$\begin{aligned} b_1^m b_1 - b_1^1 \cdot 0 &= 0 \\ b_1^m b_1 &= 0 \end{aligned}$$

expressão da qual tiramos que $b_1^m = 0$ e

$$\begin{aligned} B(e_m) &= \sum_{k=1}^{2n} e_k + 0 \cdot \xi \\ &= b_m^m e_m, \end{aligned}$$

isto é, e_m é uma direção principal comum a B e $\hat{B}$.

CASO III ($r=2$). Podemos supor b_1 e b_2 não nulos e $b_j = 0$ para $3 \leq j \leq 2n$. Para $k = 1$ e $j, l \geq 3$ em (i) se transforma em

$$\begin{aligned} b_j^l b_1 - b_1^l b_j &= 0 \\ b_j^l b_1 - b_1^l \cdot 0 &= 0 \\ b_j^l b_1 &= 0 \end{aligned}$$

isto é, $b_j^l = 0$ para $j, l \geq 3$ e $j \neq l$. Disto e de (iii) tiramos $\hat{b}_j \hat{b}_l = 0$ para $j, l \geq 3$ e $j \neq l$. Portanto, existe um índice m em (i) ($3 \leq m \leq 2n$) tal que $\hat{b}_m = 0$. Fazendo $j = m$ em (i)

$$\begin{aligned} b_k^m b_k - b_k^k \cdot 0 &= -0 \cdot \lambda_k \\ b_k^m b_k &= 0 \end{aligned}$$

o que nos dá $B_1^m = 0$, $B_2^m = 0$ e

$$\begin{aligned} B(e_m) &= \sum_{k=1}^{2n} e_k + 0 \cdot \xi \\ &= b_m^m e_m, \end{aligned}$$

isto é, e_m é uma direção principal comum a B e $\hat{B}$.

CASO IV: $r > 2$. Neste caso podemos supor b_1 , b_2 e b_3 não nulos. Portanto, de (i) temos

$$b_2^j b_1 - b_1^j b_2 = 0 \quad \text{para } j \geq 2$$

o que sugere a existência de funções p_j para $j = 1, \dots, 2n$ tais que

$$b_1^j = p_j b_1 \quad \text{e} \quad b_2^j = p_j b_2$$

Também de (i)

$$\begin{aligned} b_l^j b_1 - b_1^l b_2 &= 0, \\ b_1(b_j^l - p_l b_j) &= 0, \\ b_j^l &= p_l b_j \quad \text{para } 3 \leq j \leq 2n. \end{aligned}$$

De $b_l^j = b_j^l$ tiramos que $p_j = q b_j$ para uma certa função q , daí obtemos

$$b_k^j = q b_j b_k$$

para $3 \leq j, k \leq 2n$. De (i), substituindo $l = 1$, $j = 2$ e $k = 3$

$$\begin{aligned} b_2^1 b_3 &= b_3^1 b_2 \\ b_2^1 b_3 &= b_2(q b_1 b_3). \end{aligned}$$

Como $b_3 \neq 0$ temos $b_k^j = q b_j b_k$ para $1 \leq j \neq k \leq 2n$.

SUB-CASO 1 ($r = 2n$ Ser $= 2n$ então $q \equiv 0$. De fato, suponhamos que q é não nula em algum ponto de M . Em (v) substituindo $k = j$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_j^l &= 0 \\ \sum_{l=1}^{2n} J_l^j (q b_j b_l) &= 0 \\ \left(\sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_l \right) b_j &= 0 \end{aligned}$$

portanto $\sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_l = 0$ e daí temos $b_l = 0$, o que é um absurdo. Multiplicando (iii) por $\hat{b}_l$ ($l \neq j$), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha b_j^k \hat{b}_l - b_j b_k \hat{b}_l &= 7 \hat{b}_l \hat{b}_j \hat{b}_k \\ \alpha b_j^k \hat{b}_l - b_j b_k \hat{b}_l &= \alpha b_l^j \hat{b}_k - b_j b_k \hat{b}_k. \end{aligned}$$

Mas, usando que $b_k^j = 0$ obtemos para $k \neq j \neq l$

$$(b_k \hat{b}_l - b_l \hat{b}_k) b_j = 0$$

concluindo que $b_l = \varepsilon b_l$ e (iii) nos dá $\varepsilon^2 = 1$. Como $b_k^j = 0$, (ii) nos produz

$$\begin{aligned} b_j^l b_k &= \hat{b}_k \lambda_j \\ &= \varepsilon b_k \lambda_j \end{aligned}$$

logo tiramos que $b_j^j = \varepsilon \lambda_j$. Voltando a (iv) e fazendo $b_j^j = \varepsilon \lambda_j$ encontramos

$$(\varepsilon \alpha - \hat{\alpha}) \lambda_j = 0.$$

Se $\varepsilon \alpha = \hat{\alpha}$, então $B = \varepsilon \hat{B}$. Em verdade, já sabemos que $b_k^j = 0$ se $1 \leq j \neq k \leq 2n$, que $b_j = \varepsilon \hat{b}_j$ e que $b_j^j = \varepsilon \lambda_j$. Portanto, todas as direções principais de $\hat{B}$ em $\mathcal{D}$ são direções principais de B . Se $\varepsilon \alpha \neq \hat{\alpha}$ então $\lambda_j = 0$, daí teremos os postos (dimensões das imagens) de B e $\hat{B}$ menores que 3. De Álgebra Linear segue que

$$\dim(\ker B + \ker \hat{B}) = \dim(\ker B) + \dim(\ker \hat{B}) - \dim(\ker B \cap \ker \hat{B}),$$

sendo que $\dim$ significa dimensão e $\ker T$ o núcleo de um certo operador linear T . Da fórmula acima e do fato que $\dim(\ker B)$ e $\dim(\ker \hat{B})$ são maiores que $2(n-1)$ tiramos que

$$\dim(\ker B \cap \ker \hat{B}) \geq 1.$$

Portanto, existe pelo menos uma direção principal comum a B e $\hat{B}$.

SUB-CASO 2 ($2 \leq r \leq 2n$)

Neste caso podemos supor $b_1 = 0$. Vejamos que se supusermos $\hat{b}_1 \neq 0$, substituindo $j = 1$ em (i)

$$b_1^l b_k = 0 \implies b_1^l = 0 \quad (l \geq 2)$$

e substituindo $j = 2$ em (iii)

$$\begin{aligned} \alpha b_1^l &= -b_1 b_k \\ b_1 b_k &= 0 \end{aligned}$$

consequentemente $b_k = 0$ para todo k em $\{2; \dots; 2n\}$. Em (ii) substituindo $k = 1$

$$b_1^1 b_j = 0$$

como $r \geq 2$, então $b_1^1 = 0$. Mas de (v)

$$\sum_{l=1}^{2n} J_l^j b_k^l = \hat{J}_k^j \hat{\lambda}_k$$

substituindo $k = 1$

$$0 = \hat{J}_k^j \hat{\lambda}_k \implies \hat{\lambda}_1 = 0.$$

Voltando a (iv) e fazendo $j = 1$ produziremos $b_1 = 0$ o que é um absurdo. Temos assim que $b_1 = \hat{b}_1 = 0$. Daí uma direção principal comum a B e $\hat{B}$ é dada por e_1 . $\square$

Em [14] é demonstrado que dadas duas imersões isométricas da mesma variedade Riemanniana M em uma forma espacial complexa, com curvaturas holomorfas não nulas, se os tensores de Weingarten possuem uma direção principal em comum então as estruturas complexas induzidas em M pelas imersões isométricas coincidem. Juntando esse fato com a proposição 3.3.2 e o teorema 3.3.8 teremos a proposição abaixo

Proposição 3.3.10 *Dadas duas imersões sub-Riemannianas f e $\hat{f}$ de $(M, \mathcal{D}, g, \xi)$ em um espaço de formas complexas $N(c)$, com curvatura holomorfa c não nula, então os tensores de Weingarten B e $\hat{B}$ coincidem.*

Teorema 3.3.11 *Dada uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \xi)$ e imersões isométricas sub-Riemannianas f_1 e f_2 de M em $N^n(c)$. Se os tensores de Weingarten forem iguais então existe uma isometria Ψ de $N^n(c)$ tal que $f_2 = \Psi f_1$.*

Demonstração: Usando $\tilde{R}_j$ para denotar o tensor curvature e J_j para a estrutura complexa ambos induzidos pela imersão f_j em $\mathcal{D}$ e fazendo uso da equação de Gauss, tiramos que

$$\langle \tilde{R}_1(X \wedge Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}_2(X \wedge Y)Z, W \rangle$$

e fazendo $Z = Y$ e $W = X$ teremos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)lR_1(X \wedge Y)Y, X \rangle &= \langle R_2(X \wedge Y)Y, X \rangle \\ \langle J_1X, Y \rangle^2 &= \langle J_2X, Y \rangle^2 \end{aligned}$$

se $\langle J_1X, Y \rangle = \langle J_2X, Y \rangle$. Da equação de Mainardi-Codazzi temos que $\langle (D_\xi)(X) - (D_X)(\xi), y \rangle = \frac{c}{4} \langle JX, Y \rangle$ então $J_1 = J_2$. Neste caso, seja u um elemento do fibrado dos referenciais de M ($B(M)$) tal que $f_1(u)$ possa ser completado a um referencial unitário de $N^n(c)$. É imediato que $f_2(u)$ também pode ser completado a um referencial unitário de $N^n(c)$. Portanto, existe uma única isometria $\Psi_u : N^n(c) \rightarrow N^n(c)$ tal que $f_2(u) = \Psi_u f_1(u)$. A aplicação $u \rightarrow \Psi_u$ é constante. Com efeito, de $f_2(u) = \Psi(u) f_1(u)$ diferenciando teremos

$$df_2 = dL_{\Psi(u)} df_1(X) + dR_{f_1(u)} d\Psi(X)$$

sendo $L_{\Psi(u)}$ e $R_{f_1(u)}$ as translações à esquerda e à direita respectivamente. Usando que as formas de conexão ω_k^j são invariantes à esquerda temos que

$$\begin{aligned} \omega^j(dR_{f_1(u)} d\Psi(X)) &= \omega^j(df_2(X) - dL_{\Psi(u)} df_1(X)) \\ &= \omega^j(X) - \omega^j(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \dots, 2n+2$, devido à hipótese $b_1 = b_2$ e portanto $f_1^* \omega^{2n+2} = f_2^* \omega^{2n+2}$

$$\begin{aligned} \omega_k^j(dR_{f_1(u)}d\Psi(X)) &= \omega_k^j(df_2(X) - dL_{\Psi(u)}df_1(X)) \\ &= \omega_k^j(X) - \omega_k^j(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que $dR_{f_1(u)}d\Psi(X) = 0$ e daí $d\Psi(X) = 0$. Portanto, a aplicação Ψ é constante. $\square$

Teorema 3.3.12 *Sejam dadas uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, \xi, \langle, \rangle)$ e i mersões sub-Riemannianas isométricas f_1 e f_2 de M em $N^n(c)$. Se $\text{tr}(J \circ h) \neq 0$ então existe uma isometria Ψ de $N^n(c)$ tal que $f_2 = \Psi f_1$.*

Demonstração: É imediato que $b(\xi, \xi)$ fica determinado por

$$b(\xi, \xi) = \frac{1}{\text{tr}(J \circ h)} \left\{ \frac{nc}{4} - \text{Ric}(\xi) - \|J \circ h(\xi)\|^2 \right\}$$

e consequentemente podemos escrever

$$b(X, Y) = -\langle Jh(x) + J\tau(X), Y \rangle - \langle Jh(\xi), X \rangle \theta(Y) + \frac{1}{\text{tr}(J \circ h)} \left\{ \frac{nc}{4} - \text{Ric}(\xi) - \|J \circ h(\xi)\|^2 \right\} \theta(X) \theta(Y)$$

e pelo teorema anterior temos que existe uma isometria Ψ tal que $f_2 = \Psi \circ f_1$. $\square$

3.4 O caso sub-Riemanniano tridimensional

No caso de M ser homogênea no contexto sub-Riemanniano e tridimensional podemos fazer uso de algumas de suas propriedades especiais. Para este caso $N(c)$ terá dimensão 2 sobre $\mathbb{C}$ e, portanto, existirá uma base local $\{e_1; e_2; e_3; e_4\}$ de $N(c)$ tal que $e_2 = Je_1$ e $e_4 = Je_3$. Podemos assumir que e_1 é um autovalor de τ . De $\tau \circ J = -J \circ \tau$ teremos que $\{e_1; e_2\}$ diagonaliza τ . Do teorema 2.4.1 temos que

$$D\xi = \tau + h$$

com $h : TM \rightarrow \mathcal{D}$, $\tau : TM \rightarrow \mathcal{D}$ e $\tau(\xi) = 0$. As representações matriciais de τ e h em relação a base acima são dadas por

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & a_1 \\ \beta & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, as representações matriciais de $D\xi$ e B são dadas por

$$D\xi = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & a_1 \\ \beta & -\alpha & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha & a_2 \\ -\alpha & -\beta & -a_1 \\ a_2 & -a_1 & \omega(\xi) \end{pmatrix}.$$

Podemos então escrever as seguintes formas de conexão, supondo que $\{\theta^1; \theta^2; \theta^3; \theta^4\}$ é a base dual de $\{e_1; e_2; e_3; e_4\}$ e

$$D\xi = \omega_3^1 \otimes e_1 + \omega_3^2 \otimes e_2.$$

Então

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \alpha\theta^1 - \beta\theta^2 + a_1\theta^3 \\ \omega_3^2 &= \beta\theta^1 - \alpha\theta^2 + a_1\theta^3. \end{aligned}$$

Da ortonormalidade de $\{e_1; e_2; e_3\}$ e lembrando que $e_3 = \xi$ temos

$$\begin{aligned} De_1 &= \omega_1^2 \otimes e_2 + \omega_1^3 \otimes \xi \\ De_2 &= \omega_2^1 \otimes e_1 + \omega_2^3 \otimes \xi \\ D\xi &= \omega_3^1 \otimes e_1 + \omega_3^2 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.4.1 decorre que

$$\begin{aligned} \nabla_X e_1 &= D_X e_1 + \theta(X)h(e_1) + \langle D_X e_1, \xi \rangle \xi \\ \nabla_X e_1 &= \omega_1^2(X)e_2 + \omega_1^3(X)\xi - \theta^3(X)\beta e_2 + \omega_3^1(X)\xi \\ \nabla e_1 &= (\omega_1^2 - \beta\theta^3) \otimes e_2. \end{aligned}$$

De forma análoga temos

$$\nabla e_2 = (\omega_2^1 + \beta\theta^3) \otimes e_1$$

Ve-se assim que $\eta_1^2 = \omega_2^1 - \beta\theta^3$ e $\eta_2^1 = \omega_2^1 + \beta\theta^3$ são as formas de conexão sub-Riemannianas de M . Para os campos e_1 , e_2 e ξ teremos

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \Gamma_1 e_1 + \Gamma_2 e_2 - 2\beta\xi, \\ [e_2, \xi] &= \Gamma e_1 - \alpha e_2 + a_2 \xi, \\ [\xi, e_1] &= -\alpha e_1 + \Gamma e_2 + a_1 \xi. \end{aligned}$$

Da homogeneidade de M segue que todos os coeficientes são constantes e portanto α, β, a_1 e a_2 são constantes. Em termos das constantes de estrutura podemos escrever as formas de conexão Riemanniana e sub-Riemanniana

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= \Gamma_1 \theta^1 + \Gamma_2 \theta^2 - (\Gamma + \beta)\theta^3 \\ \eta_2^1 &= \Gamma_1 \theta^1 + \Gamma_2 \theta^2 - \Gamma\theta^3. \end{aligned}$$

Como Γ_1, Γ_2 e Γ são constantes teremos

$$d\eta_2^1 = \Gamma_1 d\theta^1 + \Gamma_2 d\theta^2 - \Gamma d\theta^3.$$

Relembrando da secção 2.3 que $k = d\eta_2^1(e_1, e_2)$, $w_1 = d\eta_2^1(e_1, e_3)$ e $w_2 = d\eta_2^1(e_2, e_3)$ obteremos as seguintes relações

$$\begin{aligned} k &= -(\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2 - 2\beta\Gamma \\ w_1 &= -\alpha\Gamma_1 + \Gamma_2\Gamma + a_1\Gamma \\ w_2 &= \Gamma_1\Gamma + \Gamma_2\alpha + \Gamma a_2. \end{aligned}$$

As equações de Gauss para o caso de uma imersão isométrica sub-Riemanniana em $N^2(c)$ nos dá

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + b(X \wedge Y, Z \wedge W).$$

Para a base $\{e_1; Je_1; e_3; Je_3\}$, sendo e_3 usado para denotar ξ , teremos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle &= c, \\ \langle \tilde{R}(e_1, e_2)e_2, \xi \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{R}(e_1, \xi)e_1, e_2 \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{R}(e_1, \xi)e_1, \xi \rangle &= -\frac{c}{4}, \end{aligned}$$

usando o fato que

$$\tilde{R}(e_j, e_k)e_l = \frac{c}{4} \{ \langle e_k, e_l \rangle e_j - \langle e_j, e_l \rangle e_k + \langle Je_k, e_l \rangle Je_j - \langle Je_j, e_l \rangle Je_k + 2\langle e_j, Je_k \rangle Je_l \}.$$

Como a segunda forma b já é conhecida podemos determinar $b(e_j \wedge e_k, e_l \wedge e_m)$ para j, k, l, m variando de 1 a 3.

$$\begin{aligned} b(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_1) &= b(e_1, e_2)^2 - b(e_1, e_1)b(e_2, e_2) \\ &= \langle -JD_{e_1}\xi, e_2 \rangle^2 - \langle -JD_{e_1}\xi, e_1 \rangle \langle -JD_{e_2}\xi, e_2 \rangle \\ &= \langle h(e_1) + \tau(e_1), e_1 \rangle^2 \langle h(e_1) + \tau(e_1), e_1 \rangle \langle h(e_1) + \tau(e_1), e_2 \rangle \\ &= \alpha^2 - \beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge \xi) &= b(e_1, e_2)b(e_2, \xi) - b(e_1, \xi)b(e_2, e_2) \\ &= \alpha \langle Jh(\xi), e_2 \rangle - \langle Jh(\xi), e_1 \rangle \langle Jh(e_2), e_2 \rangle \\ &= -\alpha a_1 + \beta a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(e_1 \wedge \xi, e_1 \wedge e_2) &= b(e_1, e_1)b(e_2, \xi) - b(e_1, e_2)b(e_1, \xi) \\ &= \beta a_1 - \alpha a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(e_1 \wedge \xi, \xi \wedge e_1) &= b(e_1, \xi)^2 - b(e_1, e_1)b(\xi, \xi) \\ &= a_2^2 - \beta b(\xi, \xi). \end{aligned}$$

Como as formas de conexão Riemannianas ω_3^1 e ω_3^2 são conhecidas, bem como a forma de conexão sub-Riemanniana η_2^1 e levando em consideração que as “constantes” de estrutura são constantes poderemos calcular explicitamente o tensor curvatura de M .

Uns cálculos simples, mas trabalhosos, levam-nos às expressões de $R(e_1, e_2)e_2$ e de $R(e_1, \xi)e_1$

$$R(e_1, e_2)e_2 = (\alpha^2 - 3\beta^2 + k)e_1 + 2(\beta a_2 - \alpha \Gamma_2)\xi$$

$$R(e_1, \xi)e_1 = (a_2\alpha - a_1\beta + \alpha\Gamma_1 - \Gamma_2\Gamma + a_1\Gamma)e_2 + (\alpha^2 + a_2\Gamma_1 - (a_1)^2)\xi.$$

Portanto, voltando às equações de Gauss teremos

$$G1) \quad \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = \langle \tilde{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle - b(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 3\beta^2 + k &= c - \alpha^2 + \beta^2 \\ k &= c + 4\beta^2 - 2\alpha^2 \end{aligned}$$

$$G2) \quad \langle R(e_1, e_2)e_2, \xi \rangle = \langle \tilde{R}(e_1, e_2)e_2, \xi \rangle - b(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge \xi)$$

$$\begin{aligned} 2(\beta a_2 - \alpha\Gamma_2) &= -\beta a_2 + \alpha a_1 \\ \alpha(a_1 + 2\Gamma_2) &= 3\beta a_2 \end{aligned}$$

$$G3) \quad \langle R(e_1, \xi)e_1, e_2 \rangle = \langle \tilde{R}(e_1, \xi)e_1, e_2 \rangle - b(e_1 \wedge \xi, e_1 \wedge e_2)$$

$$\begin{aligned} a_2\alpha - a_1\beta + \alpha\Gamma_1 - \Gamma_2\Gamma + a_1\Gamma &= \alpha a_2 - \beta a_1 \\ \alpha\Gamma_1 - \Gamma_2\Gamma + \Gamma a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$G4) \quad \langle R(e_1, \xi)e_1, \xi \rangle = \langle \tilde{R}(e_1, \xi)e_1, \xi \rangle - b(e_1 \wedge \xi, e_1 \wedge \xi)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 - a_2\Gamma_1 - (a_1)^2 &= -\frac{c}{4} - (a_2)^2 + \beta\omega(\xi) \\ \alpha^2 + a_2\Gamma_1 + (a_2)^2 - (a_1)^2 - \beta\omega(\xi) + \frac{c}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Antes de vermos quais são as equações de Mainardi-Codazzi vejamos qual a expressão de b em relação aos 1-formas θ_1 , θ_2 e θ . Sabemos que

$$b(X, Y) = -\langle JD_X \xi, Y \rangle - \langle JD_\xi \xi, X \rangle \theta(Y) + s(\xi) \theta(X) \theta(Y)$$

usando a representação matricial de B chega-se a

$$b = \beta\theta^1 \otimes \theta^1 - \alpha\theta^1 \otimes \theta^2 + a_2\theta^1 \otimes \theta - \alpha\theta^2 \otimes \theta^1 + \beta\theta^2 \otimes \theta^2 - a_1\theta^2 \otimes \theta + a_2\theta \otimes \theta^1 - a_1\theta \otimes \theta^2 + s(\xi)\theta \otimes \theta$$

e portanto podemos calcular as derivadas covariantes de b nas varias direções:

$$\begin{aligned} (D_{e_1} b)(e_2, e_1) &= -b(D_{e_1} e_2, e_1) - b(D_{e_1} e_1, e_2) \\ &= -\omega_2^1(e_1)b(e_1, e_1) - \omega_2^3(e_1)b(e_1, \xi) - \omega_1^2(e_1)b(e_2, e_2) - \omega_1^3(e_1)b(e_2, \xi) \\ &= -\Gamma_1\beta + \beta a_2 + \Gamma_1\beta - \alpha a_1 \\ &= \beta a_2 - \alpha a_1. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$(D_{e_2}b)(e_1, e_1) = -2(\alpha\Gamma_2 + \beta a_2)$$

$$(D_{e_1}b)(e_2, e_2) = 2(\alpha\Gamma_1 - \beta a_1)$$

$$(D_{e_2}b)(e_1, e_2) = \beta(a_1 - a_2)$$

$$(D_{e_1}b)(e_2, \xi) = a_2\Gamma_1 + \beta\omega(\xi) + a_1\alpha - \beta^2$$

$$(D_{e_2}b)(e_1, \xi) = -a_1\Gamma_2 - \beta\omega(\xi) + \beta^2 - \alpha a_2$$

$$(D_{e_1}b)(\xi, e_2) = \alpha^2 + \beta\omega(\xi) + a_1\beta - \Gamma_1 a_2$$

$$(D_\xi b)(e_1, e_2) = (a_2)^2 - (a_1)^2.$$

Estamos aptos a escrever as equações de Mainardi-Codazzi

$$\text{MC1)} \quad \langle \tilde{R}(e_1, e_2)\eta, \xi \rangle = (D_{e_1}b)(e_2, \xi) - (D_{e_2}b)(e_1, \xi)$$

$$a_2(\Gamma_1 + \alpha) + a_1(\Gamma_2 + \alpha) + 2\beta(\beta + \omega(\xi)) = 0$$

$$\text{MC2)} \quad \langle \tilde{R}(e_1, e_2)\eta, e_1 \rangle = (D_{e_1}b)(e_2, e_1) - (D_{e_2}b)(e_1, e_1)$$

$$3\beta a_2 + \alpha(2\Gamma_2 - a_1) = 0$$

$$\text{MC3)} \quad \langle \tilde{R}(e_1, e_2)\eta, e_2 \rangle = (D_{e_1}b)(e_2, e_2) - (D_{e_2}b)(e_1, e_2)$$

$$2\alpha\Gamma_1 + \beta(a_2 - 3a_1) = 0$$

$$\text{MC4)} \quad \langle \tilde{R}(e_1, \xi)\eta, e_2 \rangle = (D_{e_1}b)(\xi, e_2) - (D_\xi b)(e_1, e_2)$$

$$\alpha^2 - \beta\omega(\xi) + a_1\beta - \Gamma_1 a_2 + (a_1)^2 - (a_2)^2 - \frac{c}{4} = 0.$$

Passemos à análise dos casos nos quais ξ gera um fluxo geodésico. Neste caso teremos $D_\xi \xi = 0$ e como consequência $a_1 = a_2 = 0$. Substituindo os valores de a_1 e a_2 nas equações acima obteremos o seguinte conjunto de equações

- (i) $k = -(\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2 - 2\beta\Gamma$;
- (ii) $k = c + 4\beta^2 - 2\alpha^2$;
- (iii) $\alpha\Gamma_2 = 0$;
- (iv) $\Gamma_2\Gamma - \alpha\Gamma_1 = 0$;
- (v) $\alpha^2 - \beta\omega(\xi) - \frac{c}{4} = 0$;
- (vi) $\beta(\beta + \omega(\xi)) = 0$;
- (vii) $\alpha\Gamma_2 = 0$;
- (viii) $\alpha\Gamma_1 = 0$;
- (ix) $\alpha^2 - \beta\omega(\xi) - \frac{c}{4} = 0$.

Ainda com esta restrição existirá diversos casos para analisarmos. Passemos então à análise desses casos:

I - $\beta = 0$ ($\mathcal{D}$ é integrável) Substituindo $\beta = 0$ nas equações acima obteremos o seguinte conjunto de equações

- (i) $k = -(\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2$;
- (ii) $k = c - 2\alpha^2$;
- (iii) $\alpha\Gamma_2 = 0$;
- (iv) $\Gamma_2\Gamma - \alpha\Gamma_1 = 0$;
- (v) $\alpha^2 - \frac{c}{4} = 0$;
- (vi) $\alpha\Gamma_2 = 0$;
- (vii) $\alpha\Gamma_1 = 0$.

I.i $\beta = 0$ e $\alpha = 0$, isto é, $\mathcal{D}$ é integrável com torção nula . Neste caso, teremos $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, $k = 0$ e $c = 0$. Portanto, podemos escrever os colchetes da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 [e_1, e_2] &= 0 \\
 [e_2, \xi] &= \Gamma e_1 \\
 [\xi, e_1] &= \Gamma e_2.
 \end{aligned}$$

Logo concluímos que se $\Gamma = 0$ então $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e se $\Gamma \neq 0$ então $M = E(2)$ (o grupo dos movimentos rígidos do plano Euclidiano).

I.ii $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$, isto é, $\mathcal{D}$ integrável com torção não nula. Neste caso uma análise nas equações de Gauss e Mainardi-Codazzi nos mostram que: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, $k = 0$ e $c \geq 0$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 0 \\ [e_2, \xi] &= \Gamma e_1 - \alpha e_2 \\ [\xi, e_1] &= -\alpha e_1 + \Gamma e_2. \end{aligned}$$

Neste caso fazendo uma mudança de base $f_1 = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ e $f_2 = \frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}}$ obteremos

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= 0 \\ [f_2, \xi] &= (\Gamma - \alpha)f_1 \\ [\xi, f_1] &= (\alpha + \Gamma)f_2. \end{aligned}$$

Então $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ produto semi-direto da álgebra abeliana $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ ou o grupo Euclidiano $E(2)$ ou o grupo dos movimentos rígidos do plano hiperbólico, dependendo da relação entre α e Γ .

II - $\beta \neq 0$. O caso de contacto.

II.i - $\beta \neq 0$ e $\alpha = 0$ (contacto sem torção).

II.i.1 - Contacto sem torção e $\Gamma = 0$. Para este caso uma análise nos mostra que $k = -\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 \leq 0$. Portanto, de $k = c + 4\beta^2$ segue que $c \leq -4\beta^2 < 0$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \Gamma_1 e_1 + \Gamma_2 e_2 - 2\beta \xi \\ [e_2, \xi] &= 0 \\ [\xi, e_1] &= 0. \end{aligned}$$

Se $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ então $k = 0$ e o grupo correspondente é o Grupo de Heisenberg H^3 . Se $\Gamma_1 \neq 0$ e/ou $\Gamma_2 \neq 0$ então $M = A(1) \oplus \mathbb{R}$, sendo $A(1)$ usado para denotar grupo afim da reta real.

II.i.2 - Contacto sem torção e $\Gamma \neq 0$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad k = -2\beta\Gamma \text{ e } k = c.$$

Então $\Gamma = k/2\beta$ e

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2\beta\xi \\ [e_2, \xi] &= -\frac{k}{2\beta}e_1 \\ [\xi, e_1] &= -\frac{k}{2\beta}e_2. \end{aligned}$$

Comparando com o segundo capítulo teremos as seguintes casos:

k	c	M
$k > 0$	$c > -4\beta^2$	$SU(2)$
$k=0$	$c = 4\beta^2$	H^3
$k < 0$	$c < -4\beta^2$	$SU(1, 1)$

II.ii - $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$ Contacto com torção não nula. Neste caso uma análise nas equações de Gauss e Mainardi-Codazzi nos dão $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ e $\Gamma = -\frac{k}{2\beta}$. Portanto, escreve-se da seguinte forma o colchete da base ortonormal $\{e_1; e_2; \xi\}$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2\beta\xi \\ [e_2, \xi] &= -\frac{k}{2\beta}e_1 - \alpha e_2 \\ [\xi, e_1] &= -\alpha e_1 - \frac{k}{2\beta}e_2. \end{aligned}$$

Podemos supor α e β positivos. Temos então três casos que são mostrados na tabela abaixo e foram classificados em [5] e tratados de uma forma mais geométrica em [2]:

caso	k	c	M
i	$k > 2\alpha\beta$	$c > -4\beta(\beta + \alpha)$	$SU(2)$
ii	$k = 2\alpha\beta$	$c = -4\beta(\beta + \alpha)$	$E(2)$
iii	$0 < k < 2\alpha\beta$	$c < -4\beta(\beta + \alpha)$	$SU(1, 1)$

3.5 Imersões isométricas de S_r^3 em $N(c)$

Primeiramente trataremos o caso de imersões da esfera de raio r (S_r^3) em $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{CP}^2$ e $\mathbb{CH}^2$.

Imersão de S_r^3 em $\mathbb{C}^2$:

S_r^3 esta naturalmente imersa em $\mathbb{C}^2$. De fato, por definição

$$S_r^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2\}.$$

É suficiente então definir f da seguinte forma: façamos $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = x_3 + ix_4$, e portanto podemos identificar $S_r^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = r^2\}$ e finalmente definir

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (z_1, z_2).$$

Um cálculo simples nos mostra que se definirmos ω como sendo a um forma complexa dada por

$$\omega = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2 + z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2,$$

teremos que no ponto $z = (z_1, z_2)$

$$T_z S_r^3 = \{v \in \mathbb{C}^2 : \omega_z(v) = 0\}.$$

Daí teremos que $f_1 = \frac{1}{r}(-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$ e $f_3 = \frac{i}{r}(z_1, z_2)$ são vetores tangentes à esfera. Como $-if_3$ é normal à esfera S_r^3 a distribuição holomorfa $\mathcal{D}$ é dada por

$$\mathcal{D}(z) = \{\alpha f_1 : \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Podemos tomar o seguinte referencial ortonormal $\{f_1, f_2 = if_1, f_3\}$ e $\{\omega, -i\omega, \theta\}$ o co-referencial associado. Como neste caso η o vetor normal é dado por $\eta = \frac{1}{r}(z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{1}{r}(dz_1, dz_2) \\ d\eta &= \frac{1}{r}(\theta^1 \otimes f_1 + \theta^2 \otimes f_2 + \theta^3 \otimes f_3). \end{aligned}$$

Sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^2$, poderemos escrever

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{r}(-\bar{z}_2 e_1 + \bar{z}_1 e_2) \omega = \frac{1}{r}(z_2 dz_1 + z_1 dz_2) \\ f_3 &= -\frac{i}{r}(z_1 e_1 + z_2 e_2) \eta = \frac{1}{r}(\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{1}{r^2}(z_1 d\bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \otimes f_1 + \frac{1}{r^2}(\bar{z}_2 dz_1 - \bar{z}_1 dz_2) \otimes f_3 \\ df_3 &= \frac{1}{r^2}(-z_2 dz_1 + z_1 dz_2) \otimes f_1 + \frac{1}{r^2}(\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2) \otimes f_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_1 &= -\frac{i}{r}\theta \otimes f_1 - \frac{1}{r}\bar{\omega} \otimes f_3 \\ df_3 &= \frac{1}{r}\omega \otimes f_1 + \frac{i}{r}\bar{\omega} \otimes f_3 \end{aligned}$$

e logo tiramos que

$$\begin{aligned} d\theta &= -\frac{i}{r}\omega \wedge \bar{\omega} \\ d\omega &= -\frac{2i}{r}\bar{\omega} \wedge \theta. \end{aligned}$$

É fácil verificar que θ restrita ao espaço tangente à esfera é uma 1-forma real . escrevendo $\omega = \theta^1 + i\theta^2$, sendo θ^1 e θ^2 formas reais, teremos

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\frac{2}{r}\theta^2 \wedge \theta \\ d\theta^2 &= -\frac{2}{r}\theta \wedge \theta^1 \\ d\theta &= -\frac{2}{r}\theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

e logo as equações podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} d\theta^1 + \frac{-\theta}{r} \wedge \theta^2 + \frac{\theta^2}{r} \wedge \theta &= 0 \\ d\theta^2 + \frac{-\theta}{r} \wedge \theta^1 + \frac{-\theta^1}{r} \wedge \theta &= 0 \\ d\theta^1 + \frac{-\theta^2}{r} \wedge \theta^1 + \frac{-\theta^1}{r} \wedge \theta^2 &= 0 \end{aligned}$$

expressão da qual tiramos que $\omega_3^2 = \frac{-1}{r}\theta^1$ e $\omega_3^1 = \frac{1}{r}\theta^2$ e portanto

$$D\xi = \frac{1}{r}\theta^2 \otimes f_1 - \frac{1}{r}\theta^1 \otimes f_2.$$

Podemos então calcular a representação matricial de $D\xi$

$$\begin{aligned} D_{f_1}\xi &= -\frac{1}{r}\theta^1(f_1)f_2 = -\frac{1}{r}f_2 \\ D_{f_2}\xi &= \frac{1}{r}\theta^2(f_2)f_1 = \frac{1}{r}f_1 \end{aligned}$$

e portanto $\tau = 0$ e h é representado por

$$h = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{-1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples nos leva a $k = \frac{2}{r^2}$.

Imersão de S_r^3 em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$:

Antes de começarmos imersões em $\mathbb{CP}^2$ relembremos que

$$S^1 \longrightarrow S^5 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

é uma fibração de Hopf. Sendo $z = (z_1, z_2, z_3)$ as coordenadas usuais do $\mathbb{C}^3$ teremos

$$T_z S^5 = \{v \in \mathbb{C}^3 : \operatorname{Re}\langle z, v \rangle = 0\}.$$

A distribuição $\mathcal{D}_z$ é obtida tomando o núcleo da 1-forma complexa

$$\omega_z = \overline{z_1}dz_1 + \overline{z_2}dz_2 + \overline{z_3}dz_3.$$

A esfera S_r^3 pode ser imersa em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$ da seguinte forma: Seja $\tilde{S}$ a hipervariiedade de S_R^5 definida por

$$\tilde{S} = \{(z_1, z_2, z_3) \in S_R^5 : \overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2 = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\overline{z_3}z_3\}.$$

Podemos projetar, por motivos já explicados, $\tilde{S}$ em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$ e obter uma hipervariiedade S de $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$

$$S = \pi(\tilde{S}) = \{[(z_1, z_2, z_3)] \in \mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2}) : \overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2 = r^2\overline{z_3}z_3 = R^2 - r^2\}.$$

Portanto, definindo $\tilde{f} : S_r^3 \longrightarrow S_R^5$ por

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{R}(z_1, z_2, \sqrt{R^2 - r^2})$$

teremos uma imersão isométrica de S_r^3 em S_R^5 . Daí $f = \pi \circ \tilde{f}$ nos dá uma imersão isométrica de S_r^3 em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$.

Começaremos o cálculo de τ , h e b para esta imersão. Consideremos inicialmente o seguinte referencial unitário do $\mathbb{C}^3$ restrito a S_r^5

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 &= (-\overline{z_2}, \overline{z_1}, 0) \\ \tilde{f}_2 &= \frac{\alpha}{rR}(z_1, z_2, -\frac{r^2}{\alpha}) \\ \tilde{f}_3 &= \frac{1}{R}(z_1, z_2, \alpha),\end{aligned}$$

sendo α uma constante dada por $\alpha = \sqrt{R^2 - r^2}$. Sabemos que o referencial $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ satisfaz

$$\begin{aligned}d\tilde{f}_1 &= \omega_1^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_1^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_1^3 \otimes \tilde{f}_3 \\ d\tilde{f}_2 &= \omega_2^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_2^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_2^3 \otimes \tilde{f}_3 \\ d\tilde{f}_3 &= \omega_3^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_3^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_3^3 \otimes \tilde{f}_3\end{aligned}$$

para certas 1-formas ω_k^j , temos então usando os resultados da primeira seção a derivada covariante $\tilde{D}$ do $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$

$$\begin{aligned}\tilde{D}f_1 &= (\omega_1^1 - \omega_3^3) \otimes f_1 + \omega_1^2 \otimes f_2 \\ \tilde{D}f_2 &= \omega_2^1 \otimes f_1 + (\omega_2^2 - \omega_3^3) \otimes f_2.\end{aligned}$$

Restrito à esfera S_R^5 temos que $d\tilde{f}_2 = \frac{\alpha}{r^2}d\tilde{f}_3$ e conseqüentemente

$$\omega_2^3 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^3 \quad \omega_2^2 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^2 \quad \omega_2^1 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^1.$$

Denotando por $\{\theta^1; \theta^2; \theta^3\}$ o referencial dual a $\{\tilde{f}_1; \tilde{f}_2; \tilde{f}_3\}$ e por $\{e_1; e_2; e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^3$ poderemos escrever

$$\begin{aligned}d\tilde{f}_1 &= \frac{1}{r}(-d\overline{z_2} \otimes e_1 + d\overline{z_1} \otimes e_2) \\ &= (\frac{\alpha}{rR}\overline{\theta^2} + \frac{1}{R}\overline{\theta^3}) \otimes f_1 - \frac{\alpha}{rR}\overline{\theta^1} \otimes f_2 - \frac{1}{R}\overline{\theta^1} \otimes f_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
df_2 &= \frac{\alpha}{rR}(dz_1 \otimes e_1 + dz_2 \otimes e_2) \\
&= \left(\frac{\alpha}{rR}\theta^1\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^3}{rR^3}\theta^2 + \frac{\alpha^2}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_2 + \left(\frac{af^2}{R^3}\theta^2 + \frac{r\alpha}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{f}_3 &= \frac{1}{R}(dz_1 \otimes e_1 + dz_2 \otimes e_2) \\
&= \left(\frac{1}{R}\theta^1\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^2}{rR^3}\theta^2 + \frac{r\alpha}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_2 + \left(\frac{r\alpha}{R^3}\theta^2 + \frac{r^2}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_3.
\end{aligned}$$

Definindo $\theta = i\left(\frac{\alpha}{rR}\theta^2 + \frac{1}{R}\theta^3\right)$ poderemos escrever para as formas de conexão

$$\begin{aligned}
\omega_1^1 &= -i\theta & \omega_2^1 &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \\
\omega_2^2 &= -i\frac{\alpha^2}{R^2}\theta & \omega_3^3 &= i\frac{r^2}{R^2}\theta
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{D}f_1 &= i\frac{af^2}{R^2}\theta \otimes f_1 + \left(-\frac{af}{rR}\overline{\theta^1}\right) \otimes f_2 \\
\tilde{D}f_2 &= i\frac{af}{R}\theta^1 \otimes f_1 + (-i\theta) \otimes f_2.
\end{aligned}$$

A distribuição holomorfa $\mathcal{D}$ desta imersão da esfera é dada por $\mathcal{D} = \{\mu f_1 : \mu \in \mathbb{C}\}$. Daí voltando a notação $\eta = f_2$ e $\xi = -J(f_2)$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}\eta &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes f_1 + \theta \otimes \xi \\
\tilde{D}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1) + (-\theta) \otimes \eta
\end{aligned}$$

e disto tiramos que $D\xi = -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1)$. Temos assim tudo que necessitamos para calcular a representação matricial de $D\xi$

$$\begin{aligned}
D_{f_1}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}(if_1) \\
D_{if_1}\xi &= \frac{\alpha}{rR}f_1
\end{aligned}$$

e daí concluímos que $\tau = 0$ e

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{rR} \\ \frac{\alpha}{rR} & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso $b(\xi, \xi) = -\langle \tilde{D}_\xi \eta, \xi \rangle = -\theta(\xi) = \frac{\alpha}{rR} \neq 0$. Temos então pelo teorema anterior que qualquer outra imersão da esfera S_r^3 em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$ tal que $b(\xi, \xi)$ for não nulo diferirá desta imersão por uma isometria de $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$. Em verdade, $b(\xi, \xi) \neq 0$ implicará no traço de h não-nulo, portanto, podemos aplicar um dos teoremas de rigidez.

Imersão de S_r^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$:

Relembremos que $h(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$, $Q_R^5 = \{z \in \mathbb{C}^3 : h(z, z) = -R^2\}$ e que

$$S^1 \longrightarrow Q_R^5 \longrightarrow \mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$$

é uma fibração de Hopf. Sendo $z = (z_1, z_2, z_3)$ as coordenadas usuais do $\mathbb{C}^3$ teremos

$$T_z Q_R^5 = \{v \in \mathbb{C}^3 : h(z, v) + h(v, z) = 0\}$$

a distribuição $\mathcal{D}_z$ é obtida tomando o núcleo da 1-forma complexa

$$\omega_z = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2 - \bar{z}_3 dz_3$$

esfera S_r^3 pode ser imersa em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$ da seguinte forma: Seja $\tilde{S}$ a hipervarietade de Q_R^5 definida por

$$\tilde{S} = \{(z_1, z_2, z_3) \in Q_R^5 : z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = \frac{r^2}{R^2 + r^2} z_3 \bar{z}_3\}$$

pode verificar-se que esta hipervarietade em Q_R^5 é invariante pela fibração de Hopf. Assim sendo, podemos projetá-la em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$ e obter uma hipervarietade S de $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$

$$S = \pi(\tilde{S}) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2}) : \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 = r^2 \text{ e } \bar{z}_3 z_3 = R^2 + r^2\}.$$

Portanto, definindo $\tilde{f} : S_r^3 \longrightarrow Q_R^5$ por

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{R}(z_1, z_2, \sqrt{R^2 + r^2})$$

teremos uma imersão isométrica de S_r^3 em Q_R^5 . Daí $f = \pi \circ \tilde{f}$ nos dá uma imersão isométrica de S_r^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$.

Tomemos o referencial unitário do $\mathbb{C}^3$ restrito a S

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, 0) \\ \tilde{f}_2 &= \frac{\alpha}{rR}(z_1, z_2, \frac{r^2}{\alpha}) \\ \tilde{f}_3 &= \frac{1}{R}(z_1, z_2, \alpha) \end{aligned}$$

sendo α uma constante dada por $\alpha = \sqrt{R^2 + r^2}$. Sabemos que para o referencial $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ temos

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_1 &= \omega_1^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_1^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_1^3 \otimes \tilde{f}_3 \\ d\tilde{f}_2 &= \omega_2^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_2^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_2^3 \otimes \tilde{f}_3 \\ d\tilde{f}_3 &= \omega_3^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_3^2 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_3^3 \otimes \tilde{f}_3. \end{aligned}$$

temos então usando os resultados da primeira seção a derivada covariante $\tilde{D}$ do $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(\frac{4}{R^2})$

$$\begin{aligned} \tilde{D}f_1 &= (\omega_1^1 - \omega_3^3) \otimes f_1 + \omega_1^2 \otimes f_2 \\ \tilde{D}f_2 &= \omega_2^1 \otimes f_1 + (\omega_2^2 - \omega_3^3) \otimes f_2 \end{aligned}$$

restrito à quádrlica Q_R^5 temos que $d\tilde{f}_2 = \frac{\alpha}{r}d\tilde{f}_3$ e conseqüentemente

$$\omega_2^3 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^3 \quad \omega_2^2 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^2 \quad \omega_2^1 = \frac{\alpha}{r}\omega_3^1.$$

Denotando por $\{\theta^1; \theta^2; \theta^3\}$ o referencial dual a $\{\tilde{f}_1; \tilde{f}_2; \tilde{f}_3\}$ e por $\{e_1; e_2; e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^3$ poderemos escrever

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_1 &= \frac{1}{r}(-d\bar{z}_2 \otimes e_1 + d\bar{z}_1 \otimes e_2) \\ &= \left(\frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^2 - \frac{1}{R}\bar{\theta}^3\right) \otimes f_1 - \frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^1 \otimes f_2 - \frac{1}{R}\bar{\theta}^1 \otimes f_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_2 &= \frac{\alpha}{rR}(dz_1 \otimes e_1 + dz_2 \otimes e_2) \\ &= \left(\frac{\alpha}{rR}\theta^1\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^3}{rR^3}\theta^2 - \frac{\alpha^2}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_2 - \left(\frac{\alpha^2}{R^3}\theta^2 - \frac{r\alpha}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_3 &= \frac{1}{R}(dz_1 \otimes e_1 + dz_2 \otimes e_2) \\ &= \left(\frac{1}{R}\theta^1\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^2}{rR^3}\theta^2 - \frac{r\alpha}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_2 - \left(\frac{r\alpha}{R^3}\theta^2 - \frac{r^2}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_3. \end{aligned}$$

Definindo $\theta = i(\frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^2 - \frac{1}{R}\bar{\theta}^3)$, poderemos escrever para as formas de conexão

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= -i\theta & \omega_2^1 &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \\ \omega_2^2 &= -i\frac{\alpha^2}{R^2}\theta & \omega_3^3 &= i\frac{r^2}{R^2}\theta \end{aligned}$$

usando a igualdade acima teremos

$$\begin{aligned}\tilde{D}f_1 &= i\frac{af^2}{R^2}\theta \otimes f_1 + \left(-\frac{af}{rR}\overline{\theta^1}\right) \otimes f_2 \\ \tilde{D}f_2 &= i\frac{af}{R}\theta^1 \otimes f_1 + (-i\theta) \otimes f_2\end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ será dada por $\mathcal{D} = \{\mu f_1 : \mu \in \mathbb{C}\}$. Daí, por analogia ao caso da imersão da esfera de raio r em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$, faremos $\eta = f_2$ e $\xi = -J(f_2)$

$$\begin{aligned}\tilde{D}\eta &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes f_1 + \theta \otimes \xi \\ \tilde{D}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1) + (-\theta) \otimes \eta\end{aligned}$$

e disto tiramos que $D\xi = -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1)$. Temos assim tudo que necessitamos para calcular a representação matricial de $D\xi$

$$\begin{aligned}D_{f_1}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}(if_1) \\ D_{if_1}\xi &= \frac{\alpha}{rR}f_1\end{aligned}$$

e daí concluímos que $\tau = 0$ e

$$h = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{rR} \\ -\frac{\alpha}{rR} & 0 \end{bmatrix}$$

Como $tr(B) = b(\xi, \xi) = -\langle \tilde{D}_\xi \eta, \xi \rangle = -\theta(\xi) = \frac{\alpha}{R} \neq 0$ outra imersão da esfera S_r^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$ diferirá desta por uma isometria de $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$.

3.6 Imersão isométrica de Q_r^3 em $N(c)$

Imersão de Q_r^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$:

A imersão da quádrlica Q_r^3 pode ser obtida da seguinte forma: Sabemos que

$$T_z Q_r^5 = \{v \in \mathbb{C}^3 : \text{Reb}(z, v) = 0\}$$

e que a distribuição $\tilde{\mathcal{D}}$ é obtida tomando o núcleo da 1- forma complexa

$$\omega_z = -\bar{z}_0 dz_0 + \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2.$$

Seja $\tilde{S}$ a hipervariiedade de Q_R^5 definida por

$$\tilde{S} = \{(z_0, z_1, z_2) \in Q_R^5 : -\bar{z}_0 z_0 + \bar{z}_1 z_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2} \bar{z}_2 z_2\},$$

podemos projetar, por motivos já explicados, $\tilde{S}$ em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$ e obter uma hipervariiedade S de $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$

$$S = \pi(\tilde{S}) = \{[(z_0, z_1, z_2)] \in \mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2}) : \bar{z}_0 z_0 + \bar{z}_1 z_1 = r^2 e \bar{z}_2 z_2 = R^2 - r^2\}.$$

Portanto, definindo $\tilde{f} : Q_r^3 \longrightarrow Q_R^5$ por

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{R}(z_0, z_1, \sqrt{R^2 - r^2})$$

teremos uma imersão isométrica de Q_r^3 em Q_R^5 . Daí $f = \pi \circ \tilde{f}$ nos dá uma imersão isométrica de Q_r^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$.

Começaremos o cálculo de τ , h e b para esta imersão. Consideremos inicialmente o seguinte referencial unitário do $\mathbb{C}^3$ restrito a S

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= \frac{1}{R}(z_0, z_1, \alpha) \\ \tilde{f}_1 &= \frac{1}{r}(\bar{z}_1, \bar{z}_0, 0) \\ \tilde{f}_2 &= \frac{\alpha}{rR}(z_0, z_1, \frac{r^2}{\alpha}) \end{aligned}$$

sendo α uma constante dada por $\alpha = \sqrt{r^2 - R^2}$. Sabemos que o referencial $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ pode ser estendido a um aberto de $\mathbb{C}^3$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_0 &= \omega_0^0 \otimes \tilde{f}_0 + \omega_0^1 \otimes \tilde{f}_2 + \omega_0^2 \otimes \tilde{f}_1 \\ d\tilde{f}_1 &= \omega_1^0 \otimes \tilde{f}_0 + \omega_1^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_1^2 \otimes \tilde{f}_2 \\ d\tilde{f}_2 &= \omega_2^0 \otimes \tilde{f}_0 + \omega_2^1 \otimes \tilde{f}_1 + \omega_2^2 \otimes \tilde{f}_1 \end{aligned}$$

temos então usando os resultados da primeira seção a derivada covariante $\tilde{D}$ do $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$

$$\begin{aligned} \tilde{D}\tilde{f}_1 &= (\omega_1^1 - \omega_3^3) \otimes \tilde{f}_1 + \omega_1^2 \otimes \tilde{f}_2 \\ \tilde{D}\tilde{f}_2 &= \omega_2^1 \otimes \tilde{f}_1 + (\omega_2^2 - \omega_3^3) \otimes \tilde{f}_2 \end{aligned}$$

restrito à quádriga Q_R^5 temos que $d\tilde{f}_2 = \frac{\alpha}{r}d\tilde{f}_0$ e conseqüentemente

$$\omega_2^0 = \frac{\alpha}{r}\omega_0^0, \quad \omega_2^2 = \frac{\alpha}{r}\omega_0^2, \quad \omega_2^1 = \frac{\alpha}{r}\omega_0^1.$$

Denotando por $\{\theta^1; \theta^2; \theta^3\}$ o referencial dual a $\{\tilde{f}_1; \tilde{f}_2; \tilde{f}_3\}$ e por $\{e_1; e_2; e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^3$ poderemos escrever

$$d\tilde{f}_0 = \frac{1}{R}(dz_0 \otimes e_0 + dz_1 \otimes e_1)$$

$$= \left(\frac{r\alpha}{R^3}\theta^1 + \frac{r^2}{R^3}\theta^0\right) \otimes f_0 + \left(\frac{1}{R}\theta^0\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^2}{rR^3}\theta^2 + \frac{r\alpha}{R^3}\theta^0\right) \otimes f_2$$

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{1}{r}(d\bar{z}_1 \otimes e_1 + d\bar{z}_0 \otimes e_2) \\ &= \frac{1}{R}\bar{\theta}^1 \otimes f_0 \left(\frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^1 + \frac{1}{R}\bar{\theta}^0\right) \otimes f_1 - \frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^1 \otimes f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_2 &= \frac{\alpha}{rR}(dz_1 \otimes e_1 + dz_2 \otimes e_2) \\ &= \left(\frac{\alpha f^2}{R^3}\theta^2 + \frac{r\alpha}{R^3}\theta^3\right) \otimes f_0 + \left(\frac{\alpha}{rR}\theta^1\right) \otimes f_1 + \left(\frac{\alpha^3}{rR^3}\theta^2 + \frac{\alpha^2}{R^3}\theta^0\right) \otimes f_2. \end{aligned}$$

Definindo $\theta = i\left(\frac{\alpha}{rR}\theta^1 + \frac{1}{R}\theta^0\right)$ poderemos escrever para as formas de conexão

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= -i\theta & \omega_1^2 &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \\ \omega_2^2 &= -i\frac{\alpha^2}{R^2}\theta & \omega_0^0 &= i\frac{r^2}{R^2}\theta \end{aligned}$$

e logo temos

$$\begin{aligned} \tilde{D}f_1 &= i\frac{\alpha^2}{R^2}\theta \otimes f_1 + \left(-\frac{\alpha}{rR}\bar{\theta}^1\right) \otimes f_2 \\ \tilde{D}f_2 &= i\frac{\alpha}{R}\theta^1 \otimes f_1 + (-i\theta) \otimes f_2. \end{aligned}$$

A distribuição holomorfa $\mathcal{D}$ desta imersão da quádrlica é dada por $\mathcal{D} = \{\mu f_1 : \mu \in \mathbb{C}\}$. Daí voltando a notação $\eta = f_2$ e $\xi = -J(f_2)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}\eta &= \frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes f_1 + \theta \otimes \xi \\ \tilde{D}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1) + (-\theta) \otimes \eta \end{aligned}$$

e disto tiramos que $D\xi = -\frac{\alpha}{rR}\theta^1 \otimes (if_1)$. Temos assim tudo que necessitamos para calcular a representação matricial de $D\xi$

$$\begin{aligned} D_{f_1}\xi &= -\frac{\alpha}{rR}(if_1) \\ D_{if_1}\xi &= \frac{\alpha}{rR}f_1 \end{aligned}$$

e daí concluímos que $\tau = 0$ e

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{rR} \\ \frac{\alpha}{rR} & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso $b(\xi, \xi) = -\langle \tilde{D}_\xi \eta, \xi \rangle = -\theta(\xi) = \frac{\alpha}{R} \neq 0$. Temos então pelo teorema anterior que qualquer outra imersão da esfera S_r^3 em $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$ tal que $b(\xi, \xi)$ for não nulo diferir desta imersão por uma isometria de $\mathbb{CP}^2(\frac{4}{R^2})$.

3.7 Imersão isométrica de H^3 em $N(c)$

Imersão de H^3 em $\mathbb{CH}^2(\frac{4}{R^2})$:

Fixada uma base $\{f_0; f_1; f_2\}$ de $\mathbb{C}^3$ sejam $b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ a forma sesquilinear dada por

$$b(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + i(z_0 \bar{w}_2 - z_2 \bar{w}_0)$$

e $SU(2, 1) = \{T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 : T \text{ é } \mathbb{C}\text{-linear}, \det(T) = 1 \text{ e } b(Tz, Tw) = b(z, w) \text{ para todos } z, w \in \mathbb{C}^3\}$. Em $SU(2, 1)$ o sub-grupo G definido por

$$G = \{T \in SU(2, 1) : T(f_1) = f_1\}.$$

Em $\mathbb{C}^3$ definamos

$$H^3 = \{ z = (1, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 : b(z, z) = 0 \}$$

H^3 é uma subvariedade de $\mathbb{C}^2$. A distribuição holomorfa de H^3 é dada pelo espaço complexo gerado por $\frac{\partial}{\partial z_1} - i\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$. O grupo G age em H^3 da seguinte forma

$$\begin{aligned} G \times H^3 &\longrightarrow H^3 \\ (T, z) &\longrightarrow Tz. \end{aligned}$$

De resultados anteriores sabemos que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ x + \frac{i}{2}|z|^2 & i\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

e que $H^3 \cong G$. Mudando a base $f = \{f_0; f_1; f_2\}$ para a base e dada por $e_0 = \frac{f_0 + if_2}{\sqrt{2}}$, $e_1 = f_1$ e $e_2 = \frac{if_0 + f_2}{\sqrt{2}}$, então o grupo G se escreve na nova base como

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ x + \frac{i}{2}|z|^2 & i\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \text{ e } x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{|z|^2}{4} - \frac{i}{2}x & \frac{1}{2}\bar{z} & \frac{1}{2}(x + \frac{i}{2}|z|^2) \\ \frac{z}{2} & 1 & \frac{i}{2}z \\ \frac{1}{2}(x + \frac{i}{2}|z|^2) & \frac{i}{2}\bar{z} & 1 - \frac{1}{4}|z|^2 + \frac{i}{2}x \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \text{ e } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pela forma como chegamos ao grupo G é imediato que ele deixa invariante o hiperboloide complexo $Q_r^5 = \{z_0e_0 + z_1e_1 + z_2e_2 : -z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = -r^2\}$. De fato, é suficiente verificar que $-z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$ e $z_1\bar{z}_1 + i(z_0\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_0)$ diferem apenas pela mudança de base feita acima. Como $re_0 \in Q_r^5$ sua órbita $\mathcal{O}(re_0)$ pela ação de G estará contida em Q_r^5

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(re_0) &= \{rT(e_0) : T \in G\} \\ \mathcal{O}(re_0) &= \left\{ r \left(1 + \frac{|z|^2}{4} - \frac{i}{2}x, \frac{z}{2}, \frac{1}{2}(x + \frac{i}{2}|z|^2) \right) \in \mathbb{C}^3 : z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Uma imersão de f de H^3 em $\mathbb{CH}^2$, usando a identificação de $\mathbb{CH}^2$ com o disco D^2 , é dada por

$$\begin{aligned} f : H^3 &\longrightarrow D^2 \\ f(z, x) &= r \left(\frac{2z}{4 + |z|^2 - 2ix}, \frac{2(x + i|z|^2)}{4 + |z|^2 - 2ix} \right). \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1969.
- [2] M. Diniz, Variedades sub-Riemannianas de contato de dimensão 3, Dissertação de mestrado IME-USP, 1996.
- [3] M. P. do Carmo, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [4] E. Falbel, J. A. Verderesi and J. M. Veloso, The equivalence problem in sub-Riemannian geometry, Relatório Técnico IME-USP, 1993.
- [5] E. Falbel, C. Gorodski, Sub-Riemannian Homogeneous Spaces in dimensions 3 and 4. Geometriae Dedicata 63, Vol. 3, 227-252, 1996.
- [6] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1963.
- [7] G. R. Jensen, Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous spaces, Lecture Notes in Math., 610, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [8] J. Milnor, Curvatures of Left Invariant Metrics On Lie Groups, Advances in Math., Vol. 21, 293-329, 1976.
- [9] J. C. S. de Miranda, Primeira Variação da Energia e Geodésicas na Geometria Sub-Riemanniana, Dissertação de Mestrado IME-USP, 1998.
- [10] M. Okumura, On some real hypersurfaces of a complex projective space, Transactions of American Math. Soc., Vol. 212, 355-364, 1975.

- [11] P. J. Ryan, Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces, *Tôhoku Math. Journal*, Vol. 21, num. 2, 363-388, 1969.
- [12] B. Smith, Differential of complex hypersurfaces, *Annals of Math.*, 85, 247-266, 1975.
- [13] R. Strichartz, Sub-Riemannian Geometry, *Journal of differential geometry*, 24 (1986), 221-263.
- [14] Y. J. Suh and R. Takagi, A rigidity for real hypersurfaces in a complex projective space, *Tôhoku Math. Journal* 43 (1991), 501-507.
- [15] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka Journal Math.*, Vol. 10, 495-507, 1973.
- [16] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures, *J. Math Soc Japan*, 27(1975), 43-53.
- [17] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures II, *J. Math Soc Japan*, 27(1975).
- [18] R. Takagi, I. Kim and B. H. Kim, The Rigidity for Real Hypersurfaces in a Complex Projective Spaces, *Tôhoku Math. Journal* 50 (1998), 532-536.
- [19] J. A. Verderesi, Tese de Livre Docência, IME-USP, 1998.
- [20] J. A. Verderesi, Variedades sub-Riemannianas em $M^2(c)$, Notas relativas à Tese de Livre-docência, IME-USP, 1998.
- [21] A. M. Vershik, Y. Ya. Gershkovich, Non-holonomic Dynamical Systems, *Geometry of Distributions and Variational Problems*, em: V. I. Arnol'd, S. P. Novikov Eds., *Dynamical Systems VII*, *Encyclopedia Mathematical, Sciences Series*, Vol. 16, Springer-Verlag, NY, 1994.
- [22] K. Yano and M. Kon, CR-submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds, *Progress in Math.*, Vol. 30, Birkhauser, 1983.