O Método das Constantes na Teoria
dos Modelos em Feixes
sobre uma Álgebra de Heyting

Andreas Bernhard Michael Brunner

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Lógica Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Francisco Miraglia**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CAPES*

-São Paulo, junho de 2000-

O Método das Constantes na Teoria dos Modelos em Feixes sobre uma Álgebra de Heyting

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e defendida por

Andreas Bernhard Michael Brunner

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de setembro de 2000

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Francisco Miraglia - IME - USP.
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME - USP.
- Prof^a. Dr^a. Itala M.L. D'Ottaviano - CLE - UNICAMP.
- Prof. Dr. Walter A. Carnielli - CLE - UNICAMP.
- Prof. Dr. Marcelo E. Coniglio - CLE - UNICAMP.

*"Ich habe eine ziemlich einsame Arbeit.
Ich beschäftige mich mit der objektiven Existenz mathematischer Objekte."
(Kurt Gödel)*

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	4
Abstract	5
Introdução	6
1 Construções Fundamentais	11
1.1 Álgebras de Heyting e Álgebras de Heyting Completas	11
1.2 Ω -conjuntos, pré-feixes e feixes	18
1.3 Densidade. Funções Características	19
1.4 O funtor extensionalização	27
1.5 O funtor $*$	31
2 O método dos Diagramas para L-estruturas em $pSh(\Omega)$	39
2.1 Espaços de recobrimentos sem seções globais	40
2.2 Linguagens com pré-feixes de constantes	41
2.3 Extensões por pré-feixes de constantes	50
2.4 Os diagramas de uma L -estrutura	52
2.5 O diagrama e a teoria de Robinson de uma L -estrutura	58
3 O Teorema de Fraïssé para $Sh(\Omega)$	65
3.1 Equivalência elementar em $Sh(\Omega)$	65
3.2 Preservação de fórmulas em $Sh(\Omega)$	67
3.3 A generalização do Teorema de Fraïssé	73

4	Feixificação, Mudança de Base e Completude	75
4.1	O funtor c_μ	75
4.2	Extensão de L -estruturas em $H\text{-}cj$ a $Sh(\Omega)$	81
4.3	Completude Intuicionista em $Sh(\Omega)$	87
5	Modelos de Teorias Intuicionistas	91
5.1	O espaço das extensões primas	91
5.2	Modelos em Feixes sobre Espaços Topológicos	105
5.3	Fibras e Fibras Genéricas	108
5.4	Omissão Intuicionista de Tipos	113
	Referências Bibliográficas	117

Agradecimentos

Ao meu orientador, Francisco Miraglia, que sempre esteve ao meu lado nas inúmeras conversas, me passando idéias e otimismo para o sucesso deste trabalho. Sua grande dedicação durante estes anos me fez crescer intelectualmente e apreciar ainda mais a matemática.

Ao meu co-orientador, Ricardo Bianconi, com quem mantive interessantes conversas matemáticas e com quem aprendi muito também em cursos e seminários.

À minha mulher, Patrícia, que me apoiou e me deu forças durante este longo período.

Aos meus pais, Mia e Walter, que possibilitaram e incentivaram os meus estudos. E aos meus irmãos Walter, Didi e Christoph.

Aos meus sogros, Cleone e Flávio, e à dona Júlia.

Aos meus colegas da matemática Alexandre, Axel, Ézio, Francisco, Gaspar, Luciano, Maria, Saraiva e Sebastian, pelas conversas interessantes.

Ao pessoal da biblioteca e da secretária de pós-graduação, com quem sempre pude contar.

Aos meus bons amigos Christian e Heike, Roberto e Gabi, Christian, Mr. Nélon, Paolo e Diacuy, Ilton e Carla, Caverna e Sheila, Alfredo e Marília.

Aos amigos da Corrida Alvinho, Ângelo, Captain Nélon, Clodoaldo e Vagner.

À Capes, pelo apoio financeiro a este trabalho.

Resumo

O trabalho presente trata de Teoria dos Modelos em feixes de L -estruturas sobre uma álgebra de Heyting completa Ω .

Modificando a noção dos símbolos de constantes de uma linguagem de primeira ordem, admitindo uma existência parcial, generalizamos o método dos diagramas e diagramas elementares devido a A. Robinson para L -estruturas na categoria $pSh(\Omega)$. Além disso, melhoramos o Teorema de Fraïssé aparecendo em [6] para L -estruturas na categoria $Sh(\Omega)$. Demonstramos o Teorema da Completude em todos os detalhes para feixes de L -estruturas; mostramos que para toda teoria intuicionista consistente podemos construir - usando a álgebra de Lindenbaum - um feixe de L -estruturas sobre uma álgebra de Heyting completa.

Também demonstramos para a linguagem $L^\sharp$ - uma linguagem usual de primeira ordem sem o quantificador universal - o Teorema de Existência de Modelos para feixes sobre espaços topológicos. Para isso, introduzimos o espaço espectral das extensões primas. Finalmente, generalizamos o Teorema de Omissão de Tipos para a Lógica Intuicionista, usando o Teorema de Existência de Modelos e o Teorema de Baire.

Abstract

The present work is dealing with Model Theory in sheaves of L -structures over a complete Heyting algebra Ω .

Modifying the notion of the symbols of constantes in a first order language. allowing a partial existence, we will generalize the method of diagrams and elementary diagrams originated by A. Robinson in the context of L -structures in the category $pSh(\Omega)$. Furthermore, we will improve Fraïssé's Theorem, appearing in [6], for L -structures in the category $Sh(\Omega)$. In all details we will demonstrate the Completeness Theorem for sheaves of L -structures; for a intuitionistic, consistent theory we will prove - using the Lindenbaum algebra - that we can construct a sheaf of L -structures over a complete Heyting algebra.

We will demonstrate for a language $L^\sharp$ - a usual first order language without the universal quantifier - the Model Existence Theorem for sheaves over topological spaces. For this, we will introduce the spectral space of prime extensions. Using this Model Existence Theorem and Baire's Theorem, we will generalize the Omitting Types Theorem for the Intuitionistic Logic.

Introdução

A **Matemática Construtiva** surgiu pela primeira vez no começo do século 20. Um dos fundadores é L.E.J. Brouwer, [3]. Para estabelecer um resultado na Matemática Construtiva não basta mostrar que a negação da afirmação é impossível ou contraditória; é preciso ter uma construção que mostre diretamente a validade do resultado.

Consideramos a afirmação de Euclides: "Existe um número infinito de números primos." Então, podemos provar essa afirmação da seguinte forma:

Suponhamos que N seja um número natural arbitrário. Mostraremos que existe um número primo maior que N . Tomemos $N! + 1$: este número não é divisível por $2, 3, \dots, N$. Se $N! + 1$ for divisível por um número natural além de 1 e ele mesmo então este número tem que ser maior que N . Logo, $N! + 1$ é um número primo ou os seus divisores primos são maiores que N . Acabamos de demonstrar que, para qualquer número natural, existe um número primo maior que ele. Portanto, é impossível que o número dos primos seja finito. Esse último raciocínio não é mais válido na Matemática Construtiva, pois precisaríamos verificar diretamente que existe um número infinito de primos. Na Matemática Construtiva vale a primeira parte da nossa demonstração acima: "Para qualquer número natural existe um número primo maior que ele."

Chamamos a Matemática Construtiva e sua lógica de **intuicionista**. O fato de não podermos mais raciocinar por contradição para mostrar uma afirmação é a principal diferença entre a Matemática Construtiva e a Matemática Clássica. Isto quer dizer na prática que a lei de dedução **tertium non datur**, $\vdash \neg\varphi \vee \varphi$, não é mais válida na **Lógica Intuicionista**.

Brouwer somente queria desenvolver a Matemática Construtiva e não estava interessada na Lógica subjacente. Quem observou várias regras lógicas nesta Matemática foi Arend Heyting e ele também foi um dos primeiros matemáticos a formalizar o **Cálculo de Predicados** na Lógica Intuicionista por axiomas e regras de dedução, [19]. Formalizações do Cálculo Intuicionista também podem ser encontradas em [10], [13], [22], [23], [24] e [38], entre outros.

Por volta de 1950, surgiu a **Teoria dos Feixes** como parte da geometria. A partir daí a Teoria dos Feixes foi aplicada na Topologia Algébrica e também na Análise Complexa. Como o conceito de feixe é bem abstrato, a Teoria dos Feixes está sendo aplicada hoje em dia em várias áreas da matemática, inclusive na **Lógica**. O artigo de J.W. Gray, [17], dá um ótimo resumo da história e das aplicações da Teoria dos Feixes.

A definição de feixe pode ser dada pelo menos de três maneiras diferentes. Primeiro, existe a possibilidade de definir feixe geometricamente como um espaço de recobrimento,

[18]. Uma outra definição ocorre na Teoria das Categorias: um feixe é um funtor contra-variante, satisfazendo uma certa propriedade de colagem, [31]. Terceiro, podemos definir feixe algebricamente como Ω -conjunto completo, onde Ω é uma álgebra de Heyting completa, [14], [31]. Esta última definição, devida a M. Fourman e D. Scott, [14], é mais geral do que as outras - veremos isto em seguida - e é a mais recomendada para o nosso assunto de **Feixes e Lógica**. A primeira conexão entre Feixes e Lógica foi estabelecida por W. Lawvere em 1970, [27].

Na década de 30, vários matemáticos observaram uma correspondência entre a Lógica Intuicionista e um tipo de reticulados, as álgebras de Heyting. M. Stone e também A. Tarski, independentemente, obtiveram resultados de Completude em modelos topológicos relativo a valorações em um espaço topológico. Por volta de 1950. H. Rasiowa demonstrou o Teorema da Completude para a Lógica Intuicionista, usando semântica algébrica ([37] e [38]), onde os valores pertencem a uma álgebra de Heyting (aH). Álgebras de Heyting não foram introduzidas por A. Heyting. Na literatura elas aparecem também sob os nomes de **reticulados de Brouwer**, **reticulados pseudo-complementados** ou **álgebras pseudo-Booleanas** e são estudadas entre outros em [1], [14], [31], [33] e [38]. Para a Lógica Intuicionista as álgebras de Heyting desempenham o mesmo papel que as álgebras de Boole (aB) para a Lógica Clássica. A álgebra de Lindenbaum para uma teoria intuicionista é uma álgebra de Heyting. Podemos definir a Lógica Intuicionista com mais valores em uma álgebra de Heyting, [38].

Se estivermos considerando feixes sobre um reticulado completo L , então teremos duas possibilidades de definir o domínio da colagem t , veja seção 1.2, para uma família compatível S sobre $p \in L$:

$$(C1p) : Et = \bigvee_{s \in S} (p \wedge Es) \quad \text{ou} \quad (C1p') : Et = p \wedge \bigvee_{s \in S} Es.$$

É claro que sempre vale $\bigvee_{s \in S} (p \wedge Es) \leq p \wedge \bigvee_{s \in S} Es$, mas a recíproca não vale necessariamente. Portanto, poderíamos desenvolver duas teorias de feixes sobre reticulados. É filosófica a questão, qual teoria seria para se desenvolver. Mas numa álgebra de Heyting vale a lei distributiva $[\wedge, \vee]$ o que explica o nosso interesse em feixes sobre álgebras de Heyting e não sobre reticulados quaisquer.

Em seguida, consideraremos então modelos na **Lógica Intuicionista** que são feixes ou pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting completa (aHc) Ω ou às vezes Ω -conjuntos extensionais. Trabalhar com estes tipos de modelos é um modo bastante geral e não muito abstrato de praticar **Teoria dos Modelos na Lógica Intuicionista de primeira ordem**.

Um modo ainda mais geral, seria lidar com modelos em feixes sobre um **sítio**. Um sítio é uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer munidos com uma certa **pré-topologia**, Cov , a topologia de **Grothendieck**, [16], [30]. Chamamos então, $(\mathcal{C}, Cov)$ um sítio. A aHc espacial $\Omega(X)$ é um sítio, sendo X um espaço topológico. com a seguinte pré-topologia de **cobertura** $Cov_{\Omega(X)}$:

$$\forall V \in \Omega(X) : \quad Cov_{\Omega(X)}(V) := \{U \mid U \subseteq V \text{ e } \bigcup U = V\}.$$

Um **topos de Grothendieck** é uma categoria equivalente a uma categoria da forma

$Sh(\mathcal{C})$, para $\mathcal{C}$ um sítio. Em topoi podemos interpretar a lógica de ordem superior e também é possível identificar uma categoria lógica com uma teoria de 1ª ordem. Por outro lado, podemos identificar **Teorias Geométricas** de 1ª ordem com um topos, o **Classificador de Topos**, [16] e [30].

Os modelos de feixes sobre uma aHc são modelos que generalizam os **modelos de Beth**, [40], os **modelos de Kripke**, [31] e [40], e também os **modelos topológicos**, [31].

Todo modelo de Kripke $(M_i)_{i \in I}$ pode ser visto como um feixe de L -estruturas, [31]. Munindo o conjunto $(I, \leq)$ com uma topologia, e introduzindo para todo subconjunto finito J de I , $J \subseteq_f I$, o limite sobre os modelos M_j , obtemos uma base completa de feixes sobre o espaço I . Essa base podemos estender de maneira única a um feixe de L -estruturas, correspondendo ao modelo de Kripke.

A respeito das aHc's, sabemos que existem e como podem ser construídas sem **pontos**, i.e., filtros completamente primos. [14] e [31].

Definimos para um espaço topológico X , a aplicação $\nu : X \rightarrow pt(\Omega(X))$, $x \mapsto \nu_x$, onde ν_x é o filtro das vizinhanças abertas de x e portanto um ponto. Munimos o espaço $pt(\Omega(X))$ com uma topologia tal que ν é uma função contínua. Então definimos X como um espaço **sóbrio** se, e somente se, ν é bijetora.

Agora podemos introduzir a categoria dos espaços sóbrios, **Sob**, cujos objetos são os espaços sóbrios e cujos morfismos são as aplicações contínuas.

Por outro lado, definimos para uma aHc Λ a aplicação:

$\alpha_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Omega(pt(\Lambda))$, $p \mapsto Q_p$, onde $Q_p := \{F \subseteq \Lambda \mid F \text{ é ponto e } p \in F\}$.

Dizemos que Λ tem **pontos suficientes** se α_Λ é um isomorfismo de aHc's. Assim, podemos introduzir a categoria das aHc's com pontos suficientes, **aHcps**, cujos objetos são as aHc's com pontos suficientes e cujos morfismos são morfismos de aHc's. Identificamos uma equivalência contravariante entre as categorias **Sob** e **aHcps**.

As últimas considerações mostraram que uma aHc Ω nem sempre provém de uma álgebra **espacial**, $\Omega(X)$, onde X é um espaço topológico. Isso justifica nosso interesse em lidar com feixes sobre uma álgebra de Heyting completa qualquer. Mas veremos neste trabalho, no capítulo 5, que considerando feixes sobre um espaço topológico X podemos usar resultados da Topologia, alguns dos quais não têm tradução para as aHc's abstratas.

Outros conceitos básicos sobre a Teoria dos Modelos em Feixes podem ser encontrados em [14] e [31], onde é dada a teoria geral sem aplicações em assuntos clássicos.

Resultados em assuntos clássicos da Teoria dos Modelos até então, são o **Teorema de Löwenheim e Skolem descendente** para Ω -conjuntos em [32], o **Teorema de Loś** em [12] para L -estruturas em $Sh(X)$, cujo resultado foi generalizado em [33]. Além disso, existe o **Teorema de Feferman e Vaught** em B -conjuntos finitamente completos, [41], onde B é uma álgebra de Boole. Em [28], é dado o **Teorema da Modelo-Completeness** para Feixes de L -estruturas sobre um espaço Booleano. Uma generalização do **Teorema de Fraïssé** em $Sh(X)$ é feita em [6]. Neste trabalho foi introduzida uma família de novos conectivos $\Box_U$, $U \in \Omega(X)$ - restrições - que serão de importante para o trabalho presente.

Ainda queremos registrar que a Lógica Intuicionista deu bons resultados na **Teoria**

de **Representações de Aneis**. [35]. Alguns Teoremas sobre este assunto estão sendo provados de maneira mais fácil do que usando a Lógica Clássica, considerando-se a categoria dos Feixes como generalização da categoria *Set*.

Antes de dar um pequeno resumo sobre o conteúdo dos capítulos, observamos ainda que estamos praticando a Teoria dos Modelos na Lógica Intuicionista. Isto significa que dentro da Teoria as conclusões são feitas da maneira intuicionista, mas na Metateoria não usaremos obrigatoriamente o Cálculo Intuicionista.

No primeiro capítulo, apresentaremos algumas construções fundamentais que serão usadas frequentemente no que segue. Reuniremos resultados conhecidos sobre aH 's e aHc 's. Explicaremos os conceitos de Ω -conjuntos, pré-feixes e feixes. Também definiremos funções características que são muito importantes para o nosso assunto e facilitam a Teoria dos Modelos em feixes. As duas últimas seções fornecem resultados novos. Um resultado bastante importante é que podemos transferir toda estrutura lógica presente em um Ω -conjunto não-extensional isomorficamente a um Ω -conjunto extensional. Na última seção discutiremos o funtor $*$ da categoria Ω -conjunto extensional em si mesmo. Daremos algumas propriedades deste funtor e veremos que $*$ é um morfismo elementar fraco.

No segundo capítulo, generalizaremos o **método dos diagramas atômicos e completos** devido a A. Robinson. [7], [10] para pré-feixes de L -estruturas. Para isso, introduziremos símbolos de constantes que descrevem todas as seções de um feixe dado, isto é, teremos constantes que correspondem a elementos parciais das nossas L -estruturas ou seja: o conjunto dos símbolos de constantes é um pré-feixe per si. Obteremos uma nova linguagem. Até agora, um símbolo de constante era somente interpretado como uma seção global no feixe considerado. Na matemática existem diversos espaços de recobrimento sem seções globais, e veremos alguns exemplos. Depois disso, daremos as definições em detalhes para o nosso novo conceito de constantes e veremos que o novo conceito é uma generalização do antigo. Definiremos a interpretação de L -termos e L -fórmulas. Explicaremos o método das constantes para a nova linguagem e demonstraremos resultados para o diagrama atômico e elementar na Lógica Intuicionista e como caso particular na Lógica Clássica. Na última seção, introduziremos novos conectivos unários cuja origem está em [6]. Definiremos o diagrama e a teoria de Robinson e demonstraremos resultados sobre eles. Veremos também que estes resultados são uma verdadeira generalização dos resultados clássicos de A. Robinson. As provas deste capítulo são feitas também na metateoria de uma maneira construtiva.

No terceiro capítulo, daremos uma generalização do **Teorema de Fraïssé** para a categoria $Sh(\Omega)$ na linguagem $L^\square$. Definimos a equivalência elementar e a preservação de fórmulas em $Sh(\Omega)$.

No quarto capítulo, provaremos o **Teorema da Completude** em $Sh(\Omega)$, usando a álgebra de Lindenbaum. Primeiro explicaremos o funtor feixificação c_μ para mudança de base. Depois disso, veremos que podemos estender uma L -estrutura em H -cj determinada pelas seções globais a uma L -estrutura em $Sh(\Omega)$. Introduziremos a L -estrutura canônica como um H -conjunto, onde H é a álgebra de Lindenbaum da teoria considerada. Finalmente, demonstraremos o Teorema da Completude para feixes de L -estruturas.

As provas são feitas também na metateoria de uma maneira construtiva.

No quinto capítulo, generalizaremos o **Teorema de Omissão de Tipos** e demonstraremos o **Teorema de Existência de Modelos** para feixes sobre espaços topológicos numa linguagem $L^\sharp$ sem o quantificador universal. Primeiro discutiremos em detalhes o espaço das extensões primas de um conjunto consistente de fórmulas; mostraremos que estes espaços são espectrais e portanto são espaços de Baire. O fato que eles são espaços de Baire será fundamental nas provas dos Teoremas principais. Depois disso, demonstraremos o Teorema de Existência de Modelos para feixes na linguagem $L^\sharp$. Explicaremos o conceito de fibra de L -estrutura e de fibra genérica, que liga os valores intuicionistas com os valores clássicos. No final, demonstraremos o Teorema de Omissão de Tipos para feixes de $L^\sharp$ -estruturas sobre um espaço topológico. As provas neste capítulo são feitas na metateoria na Lógica Clássica.

Finalmente, observamos que ainda restam varios problemas a serem resolvidos neste assunto. Podemos pensar em um Teorema de Feferman e Vaught em feixes para a nossa linguagem $L^\square$. Ainda poderia ser abordado o tema dos modelos saturados em feixes de L -estruturas.

Capítulo 1

Construções Fundamentais

Neste capítulo reunimos algumas construções fundamentais, algumas bem conhecidas, outras expostas aqui pela primeira vez.

1.1 Álgebras de Heyting e Álgebras de Heyting Completas

Se L um reticulado, então indicamos por

- * $\wedge, \vee$ ínfimos e supremos binários, respectivamente;
- * $\bigwedge, \bigvee$ ínfimos e supremos infinitários, respectivamente;
- * $\perp, \top$, se existirem, o menor e o maior elemento de L , respectivamente.
- * Para $q \in L$, $q^{\leftarrow} = \{p \in L : p \leq q\}$ e $q^{\rightarrow} = \{p \in L : q \leq p\}$.

As propriedades da implicação, negação e da dupla negação em uma álgebra de Heyting – que serão de uso constante –, são bem conhecidas ([1], [37], [38]¹). Para conveniência do leitor, incluímos nesta seção os enunciados pertinentes, acompanhados de algumas provas e comentários.

Observação 1.1.1 Uma álgebra de Heyting (**aH**) H é um reticulado distributivo com $\perp, \top$ e uma operação binária $\rightarrow$ (implicação) cuja propriedade fundamental é a adjunção

$$[\rightarrow] \quad \text{Para todo } p, q, b \in H, \quad b \leq (p \rightarrow q) \text{ sse } b \wedge p \leq q.$$

Como $(p \rightarrow q) \leq (p \rightarrow q)$ e $p \wedge q \leq q$, $[\rightarrow]$ implica a lei de *Modus Ponens*

$$[\text{MP}] \quad p \wedge (p \rightarrow q) = p \wedge q \leq q.$$

Em particular,

¹ Em [37] e [38] álgebras de Heyting são chamadas de álgebras pseudo-Booleanas.

$$[*] \quad p \rightarrow q = p \rightarrow (p \wedge q).$$

Definimos a negação de $p \in H$ por

$$\neg p = (p \rightarrow \perp).$$

Segue imediatamente da adjunção $[\rightarrow]$ que

$$[\neg] \quad \text{Para todo } p, q \in H, \quad p \wedge q = \perp \text{ sse } p \leq \neg q,$$

enquanto que [MP] implica

$$[\perp] \quad \text{Para todo } p \in H, \quad p \wedge \neg p = \perp.$$

Uma **álgebra de Heyting completa (aHc)** é um reticulado *completo* L tal que para todo $x \in L$ e $S \subseteq L$

$$[\wedge, \vee] \quad x \wedge \bigvee S = \bigvee_{s \in S} x \wedge s.$$

Toda aHc é, portanto, um reticulado distributivo com $\perp$ e $\top$. Álgebras de Heyting completas merecem o nome pois podemos **definir**, para $a, b \in L$

$$a \rightarrow b := \bigvee \{c \in L : a \wedge c \leq b\}$$

obtendo uma operação que satisfaz $[\rightarrow]$. Uma **álgebra de Boole completa (aBc)** é uma aHc H onde todo elemento é complementado, isto é,

$$[\text{compl}] \quad \text{Para todo } p \in H \text{ existe } q \in H, \quad p \vee q = \top \text{ e } p \wedge q = \perp. \quad \blacksquare$$

Lema 1.1.2 *Seja H uma aH e $p, q, r \in H$.*

$$a) \quad p \leq q \text{ implica } \begin{cases} (q \rightarrow r) \leq (p \rightarrow r); \\ (r \rightarrow p) \leq (r \rightarrow q). \end{cases}$$

$$b) \quad p \leq q \text{ implica } \begin{cases} \neg q \leq \neg p; \\ \neg\neg p \leq \neg\neg q. \end{cases}$$

$$c) \quad p \wedge (q \rightarrow r) = p \wedge [(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)] = p \wedge (q \rightarrow (p \wedge r)).$$

$$d) \quad p \leq \neg\neg p; \quad \neg\neg\neg p = \neg p.$$

$$e) \quad r \wedge p = \perp \text{ sse } r \wedge \neg\neg p = \perp.$$

$$f) \quad \neg\neg(p \wedge q) = \neg\neg p \wedge \neg\neg q.$$

$$g) \quad \neg(p \rightarrow q) = \neg\neg(p \wedge \neg q) = \neg\neg p \wedge \neg q.$$

$$h) \quad \neg\neg(p \rightarrow q) = \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q = p \rightarrow \neg\neg q.$$

$$i) \quad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

$$j) \quad \neg\neg p \leq \neg\neg[(p \wedge \neg q) \vee q].$$

$$k) \quad \neg p \vee q \leq (p \rightarrow q) \leq \neg\neg(\neg p \vee q).$$

$$l) \quad \neg(p \wedge q) = \neg\neg(\neg p \vee \neg q) = p \rightarrow \neg q.$$

Demonstração: a) Se $p \leq q$ então

$$p \wedge (q \rightarrow r) \leq q \wedge (q \rightarrow r) \leq r,$$

e a propriedade $[\rightarrow]$ em 1.1.1 acarreta $(q \rightarrow r) \leq (p \rightarrow r)$. O outro caso é semelhante.

b) Vem imediatamente de (a) uma vez que $\neg p = (p \rightarrow \perp)$ e $\neg\neg p = (\neg p \rightarrow \perp)$.

c) É um exercício de aplicação de $[\rightarrow]$ e [MP]. Como

$$(p \wedge q) \wedge p \wedge (q \rightarrow r) \leq p \wedge q \wedge (q \rightarrow r) \leq p \wedge r,$$

temos $p \wedge (q \rightarrow r) \leq (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$. Por outro lado, [MP] imediatamente fornece

$$q \wedge p \wedge [(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)] \leq p \wedge r \leq r$$

e a primeira igualdade está verificada; a segunda é consequência da primeira.

d) Uma vez que $p \wedge \neg p = \perp$, segue de $[\neg]$ em 1.1.1 que $p \leq \neg\neg p$. Para a igualdade enunciada em (b), note que

* A primeira desigualdade garante que $\neg p \leq \neg\neg\neg p$;

* Uma aplicação de (b) à $p \leq \neg\neg p$ fornece $\neg\neg\neg p \leq \neg p$,

donde segue a igualdade desejada.

e) A igualdade em (d) juntamente com $[\neg]$ em 1.1.1 fornecem

$$q \wedge p = \perp \Leftrightarrow q \leq \neg p \Leftrightarrow q \leq \neg\neg\neg p \Leftrightarrow q \wedge \neg\neg p = \perp,$$

como desejado.

f) Como $\neg(p \wedge q) \wedge p \wedge q = \perp$, duas aplicações de (e) garantem que

$$\neg(p \wedge q) \wedge \neg\neg p \wedge \neg\neg q = \perp.$$

Portanto,

$$(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \leq \neg\neg(p \wedge q). \quad (\text{I})$$

Como $p \wedge q \leq p, q$, de (b) obtemos $\neg\neg(p \wedge q) \leq \neg\neg p \wedge \neg\neg q$, e de (I) segue a igualdade desejada.

g) Por [MP] em 1.1.1 temos que

$$\neg q \wedge p \wedge (p \rightarrow q) \leq \neg q \wedge q = \perp.$$

Logo, (e) implica $\neg q \wedge \neg\neg p \wedge (p \rightarrow q) = \perp$, de onde concluímos

$$\neg\neg p \wedge \neg q \leq \neg(p \rightarrow q). \quad (\text{II})$$

Agora observe que

(i) Como $q \wedge p \leq q$, $[\rightarrow]$ implica que $q \leq (p \rightarrow q)$. De (b) obtemos então

$$\neg(p \rightarrow q) \leq \neg q. \quad (\text{III})$$

(ii) Já que $\neg p \wedge p = \perp \leq q$, $[\rightarrow]$ garante que $\neg p \leq (p \rightarrow q)$. De (b), obtemos

$$\neg(p \rightarrow q) \leq \neg\neg p. \quad (\text{IV})$$

De (II), (III) e (IV) concluímos a igualdade desejada. A segunda igualdade segue de (f)

e (d).

h) Como $p \wedge (p \rightarrow q) \leq q$ ($[\rightarrow]$ em 1.1.1), de (b) e (f) obtemos,

$$\neg\neg p \wedge \neg\neg(p \rightarrow q) = \neg\neg(p \wedge (p \rightarrow q)) \leq \neg\neg q,$$

e uma nova aplicação de $[\rightarrow]$ fornece

$$\neg\neg(p \rightarrow q) \leq \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q. \quad (\text{V})$$

Observe que (b) e a desigualdade em (d) implicam que

$$\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \leq p \rightarrow \neg\neg q.$$

Logo, para terminar a prova é suficiente mostrar que $p \rightarrow \neg\neg q \leq \neg\neg(p \rightarrow q)$, isto é,

$$(p \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg(p \rightarrow q) = \perp, \quad (\text{VI})$$

ou equivalentemente (pelo item (g))

$$(p \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg\neg p \wedge \neg q = \perp. \quad (\text{VII})$$

Uma vez que $p \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow \neg\neg q) \leq \neg q \wedge \neg\neg q = \perp$, (d) implica (VII) (e (VI)), terminando a prova de (h).

i) Como $\neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q) = \perp$ temos que

$$\neg p \wedge \neg q \leq \neg(p \vee q).$$

Por outro lado, vale

$$p \wedge \neg(p \vee q) = \perp \quad \text{e} \quad q \wedge \neg(p \vee q) = \perp.$$

Por $[\neg]$, obtemos a outra desigualdade, encerrando a prova de (i).

j) É suficiente mostrar que

$$\neg\neg p \wedge \neg[(p \wedge \neg q) \vee q] = \perp,$$

ou equivalentemente, por (i)

$$\neg\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg q = \perp,$$

que é consequência de (e) uma vez que $p \wedge \neg q \wedge \neg(p \wedge \neg q) = \perp$. Os demais itens são fácil de verificar. ■

Definição 1.1.3 Se p, q são elementos de uma aH H , dizemos que

(a) p é **denso** em q se $p \leq q \leq \neg\neg p$. Indicamos por D_q o conjunto dos $p \leq q$ tal que p é denso em q .

(b) p é **denso em H** se $\neg\neg p = \top$. Indicamos por D o conjunto dos densos em H .

(c) p é **regular em H** se $\neg\neg p = p$.

$\text{Reg}(H)$ indica a álgebra de Boole dos elementos regulares de H .

Corolário 1.1.4 Para p, q em uma aH H ,

a) p é denso em q sse $p \leq q$ e $q = \neg\neg p \wedge q$. Além disso, D_q é um filtro em $q^\perp$.

b) p é denso em H sse $\neg p = \perp$. O conjunto D é um filtro em H .

c) O ínfimo de todo subconjunto finito de regulares é regular.

d) Se q é regular então, $p \rightarrow q$ é regular.

e) Para todo $p, q \in H$

$$(1) p \vee \neg p \in D; \quad (2) \neg\neg p = \neg\neg q \Rightarrow (p \rightarrow q) \in D.$$

f) As seguintes condições são equivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) H \text{ é uma álgebra de Boole;} & (2) \text{ Para todo } p \in H, \neg\neg p = p; \\ (3) D = \{\top\}; & (4) \text{ Para todo } p \in H, p \vee \neg p = \top. \end{array} \right.$$

Demonstração: Se L é um reticulado, lembramos que

$$* q^{\leftarrow} = \{p \in L : p \leq q\} \text{ e } q^{\rightarrow} = \{p \in L : q \leq p\};$$

* $S \subseteq L$ é um **filtro** se para todo $x, y \in L$:

$$[\text{fil } 1] : S \neq \emptyset; \quad [\text{fil } 2] : x \in S \Rightarrow x^{\rightarrow} \subseteq S; \quad [\text{fil } 3] : x, y \in S \Rightarrow x \wedge y \in S.$$

Com estas observações os enunciados (a) – (d) são consequências simples de 1.1.2. Para (e).(1), note que por 1.1.2.(i),

$$\neg(p \vee \neg p) = \neg p \wedge \neg\neg p = \perp,$$

e portanto $p \vee \neg p \in D$. Para o item (2), 1.1.2.(k) fornece $(\neg p \vee q) \leq (p \rightarrow q)$ e portanto

$$\neg(p \rightarrow q) \leq \neg(\neg p \vee q) = \neg\neg p \wedge \neg q = \neg\neg q \wedge \neg q = \perp,$$

mostrando que $(p \rightarrow q) \in D$. O item (f) é consequência do que foi provado e do fato que as álgebras de Boole são exatamente os reticulados distributivos, onde todo elemento tem um (único) complemento. ■

O próximo resultado discute versões infinitárias de alguns dos enunciados em 1.1.2.

Lema 1.1.5 *Seja Ω uma aHc, $\{p_i : i \in I\}$ uma família de elementos de Ω e r um elemento de Ω .*

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{i \in I} (r \rightarrow p_i) = r \rightarrow \bigwedge_{i \in I} p_i; \\ \bigvee_{i \in I} (r \rightarrow p_i) = r \rightarrow \bigvee_{i \in I} p_i. \end{array} \right.$$

$$b) \bigwedge_{i \in I} (p_i \rightarrow r) = (\bigvee_{i \in I} p_i) \rightarrow r.$$

$$c) \bigvee_{i \in I} (p_i \rightarrow r) \leq (\bigwedge_{i \in I} p_i) \rightarrow r.$$

$$d) \neg(\bigvee_{i \in I} p_i) = \bigwedge_{i \in I} \neg p_i.$$

$$e) \neg(\bigwedge_{i \in I} \neg\neg p_i) = \neg\neg \bigvee_{i \in I} \neg p_i.$$

$$f) \bigwedge_{i \in I} \neg\neg p_i = \neg\neg \bigwedge_{i \in I} \neg\neg p_i. \text{ Assim, o ínfimo arbitrário de regulares é regular.}$$

$$g) \neg\neg (\bigvee_{i \in I} p_i) = \neg (\bigwedge_{i \in I} \neg p_i) = \neg\neg (\bigvee_{i \in I} \neg\neg p_i).$$

$$h) \neg\neg (\bigwedge_{i \in I} \neg\neg p_i) = \neg (\bigvee_{i \in I} \neg p_i).$$

Demonstração: a) Do item (a) em 1.1.2 segue que $r \rightarrow \bigwedge_{i \in I} p_i \leq r \rightarrow p_j, j \in I$. Portanto,

$$r \rightarrow \bigwedge_{i \in I} p_i \leq \bigwedge_{i \in I} (r \rightarrow p_i).$$

Por outro lado, temos

$$r \wedge \bigwedge_{i \in I} (r \rightarrow p_i) \leq r \wedge (r \rightarrow p_j) \leq p_j.$$

para todo $j \in I$. Logo, $[\rightarrow]$ em 1.1.1 implica

$$\bigwedge_{i \in I} (r \rightarrow p_i) \leq r \rightarrow \bigwedge_{i \in I} p_i,$$

completando a prova da primeira igualdade em (a). A segunda pode ser verificada de modo semelhante.

b) Por 1.1.2.(a) temos $(\bigvee p_i) \rightarrow r \leq p_j \rightarrow r, j \in I$ e assim

$$(\bigvee p_i) \rightarrow r \leq \bigwedge (p_i \rightarrow r).$$

Para a desigualdade inversa, primeiro observe que para todo $j \in I$.

$$p_j \wedge \bigwedge (p_i \rightarrow r) \leq p_j \wedge (p_j \rightarrow r),$$

para concluir que $\bigvee p_i \wedge (\bigwedge (p_i \rightarrow r)) \leq \bigvee (p_i \wedge (p_i \rightarrow r))$. Mas, a distributividade de ínfimo por supremos e [MP] em 1.1.1 fornecem

$$(\bigvee p_i) \wedge \bigwedge (p_i \rightarrow r) = \bigvee (p_i \wedge \bigwedge (p_i \rightarrow r)) \leq \bigvee (p_i \wedge (p_i \rightarrow r)) \leq r,$$

e portanto $[\rightarrow]$ garante que $\bigwedge (p_i \rightarrow r) \leq (\bigvee p_i) \rightarrow r$, completando a prova de (b). O item (c) tem prova análoga às feitas até aqui.

Agora observe que (d) é consequência imediata de (b), e que (e) vem diretamente de (d). Para (f), (e) e (d) fornecem

$$\neg\neg (\bigwedge \neg\neg p_i) = \neg (\neg\neg \bigvee \neg p_i) = \neg \bigvee \neg p_i = \bigwedge \neg\neg p_i.$$

Em particular, se cada $p_i \in \text{Reg}(\Omega)$, segue imediatamente que $\bigwedge p_i \in \text{Reg}(\Omega)$. Os enunciados restantes são consequências imediatas dos anteriores. ■

Observação 1.1.6 a) Segue de 1.1.5.(e) que se $p_i, i \in I$, são elementos de uma aHc, então

$$\neg\neg \bigwedge p_i = \bigwedge \neg\neg p_i \quad \text{sse} \quad \neg \bigwedge p_i = \bigvee \neg p_i \quad \text{sse} \quad \neg \bigwedge p_i = \neg\neg \bigvee \neg p_i.$$

Em uma aHc que não é uma álgebra de Boole todas estas igualdades falham. Para vermos um exemplo, considere a álgebra de Heyting completa dos abertos da reta real $\mathbb{R}$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, seja $O_r = \mathbb{R} \setminus \{r\}$. Está claro que cada O_r é denso em $\mathbb{R}$ e que a interseção dos O_r é vazia. Assim, na aHc de abertos de $\mathbb{R}$ temos

$$\bigwedge O_r = \text{int} \bigcap_{r \in \mathbb{R}} O_r = \emptyset = \bigvee \neg O_r = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \text{int} O_r^c. \quad 2$$

Portanto, $\neg \bigwedge O_r = \mathbb{R}$, enquanto que $\bigvee \neg O_r = \neg\neg \bigvee \neg O_r = \emptyset$.

² $(\cdot)^c$ e $\text{int}(\cdot)$ indicam o complemento topológico de $(\cdot)$ e o interior de $(\cdot)$ respectivamente.

b) As leis algébricas em 1.1.5 aplicam-se para obter relações entre os quantificadores intuicionistas $\forall$ e $\exists$. Se φ é uma fórmula, então

- (1) $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$; (2) $\neg \forall x \neg \neg \varphi \equiv \neg \neg \exists x \neg \varphi$;
(3) $\neg \neg \forall x \neg \neg \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$.

Registre-se que, na lógica intuicionista, $\neg \forall x \varphi$ **não** é equivalente à $\neg \neg \exists x \neg \varphi$ ³. ■

O próximo resultado fornece uma versão para aHc's de uma técnica muito utilizada para álgebras de Boole completas, que aparece na prova do Teorema 1, p. 197, de [32].

Lema 1.1.7 *Seja $p_i, i \in I$, uma família de elementos de uma aHc Ω . Então, existe uma família $q_i, i \in I$, de elementos de Ω tal que*

- (1) *Para todo $i \in I$, $q_i \leq p_i$;*
(2) *Para todo $i \neq j \in I$, $q_i \wedge q_j = \perp$;*
(3) *$\bigvee_{i \in I} q_i$ é denso em $\bigvee_{i \in I} p_i$.*

Demonstração: Suponha que I é bem ordenado, com primeiro elemento i_0 ; definimos, por recursão transfinita,

* $q_{i_0} = p_{i_0}$; * Tendo definido q_i para $i < j$, seja $q_j = p_j \wedge \neg \bigvee_{i < j} p_i$.

Está claro que a condição (1) está verificada. Por outro lado, se $i \neq j$ em I , podemos supor que $i < j$. Mas então, uma vez que $q_i \leq \bigvee_{k < j} p_k$, temos que

$$q_i \wedge q_j = q_i \wedge p_j \wedge \neg \bigvee_{k < j} p_k = \perp,$$

verificando (2). Para provar (3) é suficiente mostrar que para todo $j \in I$,

$$p_j \leq \neg \neg \bigvee_{i \leq j} q_i, \quad (*)$$

o que será feito por indução transfinita; claro que (*) está satisfeita para o primeiro elemento i_0 de I . Suponha (*) válida para todo $i < j$. Observe que a hipótese de indução implica

$$\neg \bigvee_{i < j} q_i = \neg \bigvee_{i < j} p_i. \quad (**)$$

Então, utilizando (**), (i) e (j) em 1.1.2 e 1.1.5.(d), obtemos

$$\begin{aligned} \neg \neg \bigvee_{i \leq j} q_i &= \neg \neg \left(q_j \vee \bigvee_{i < j} q_i \right) = \neg \left(\neg q_j \wedge \neg \bigvee_{i < j} q_i \right) = \neg \left(\neg q_j \wedge \neg \bigvee_{i < j} p_i \right) \\ &= \neg \neg \left(q_j \vee \bigvee_{i < j} p_i \right) = \neg \neg \left((p_j \wedge \neg \bigvee_{i < j} p_i) \vee \bigvee_{i < j} p_i \right) \geq \neg \neg p_j, \end{aligned}$$

terminando a prova. ■

³ E portanto, $\neg \neg \forall x \varphi$ não é equivalente a $\neg \exists x \neg \varphi$.

1.2 Ω -conjuntos, pré-feixes e feixes

Assumiremos que o leitor tenha familiaridade com o conteúdo de [31] e [14]. Esta seção tem a finalidade de facilitar a referência interna às propriedades fundamentais dos conceitos acima.

Seja H uma álgebra de Heyting. Um **H -conjunto** A , é um conjunto $|A|$ (o domínio de A), juntamente com uma função

$$[\cdot = \cdot]_A : |A|^2 \longrightarrow H,$$

denominada **igualdade de A** satisfazendo, para todo $a, b, c \in |A|$

$$[\text{eq } 1] : [a = b]_A = [b = a]_A;$$

$$[\text{eq } 2] : [a = b]_A \wedge [b = c]_A \leq [a = c]_A.$$

Quando A está claro no contexto, omitimos sua menção da notação. Referimo-nos aos elementos de $|A|$ como **seções** de A . Para $x \in A$,

$$Ex = [x = x]$$

é a **extensão** ou o **domínio** de x em A . É fácil mostrar que para todo $x, y \in |A|$

$$[x = y] \leq Ex \wedge Ey.$$

Dizemos que A é **extensional** (dito separado em [14]) se para todo $x, y \in |A|$

$$[\text{ext}] \quad Ex = Ey = [x = y] \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

De forma geral, trataremos apenas de H -conjuntos extensionais ⁴.

Se A e B são H -conjuntos, um **morfismo** $f : A \longrightarrow B$ é uma função $f : |A| \longrightarrow |B|$ que satisfaz, para todo $a, b \in |A|$

$$[\text{mor } 1] : Efa = Ea;$$

$$[\text{mor } 2] : [fa = fb] \geq [a = b].$$

H -conjuntos e seus morfismos formam uma categoria, indicada por **$H\text{-Cj}$** .

Se A é um H -conjunto e $p \in H$ dizemos que $S \subseteq |A|$ é **compatível sobre p** se para todo $x, y \in S$

$$[\text{pcom}] \quad p \wedge Ex \wedge Ey = p \wedge [x = y].$$

S é dito **compatível** se for compatível sobre $\top$, isto é, para todo $x, y \in S$

$$[\text{com}] \quad Ex \wedge Ey = [x = y].$$

Sejam Ω uma aHc, $p \in \Omega$ e A um Ω -conjunto. Se $S \subseteq |A|$ é um subconjunto compatível sobre p , uma **colagem de S sobre p** é um elemento $t \in |A|$ que satisfaz

$$(C1p) : Et = \bigvee_{s \in S} p \wedge Es; \quad (C2p) : \text{Para todo } s \in S, \quad p \wedge Es = [t = s].$$

Se S é compatível em A , uma **colagem de S** é um elemento $t \in |A|$ tal que

⁴ Uma justificativa aparece na seção 1.4.

$$(C1) : Et = \bigvee_{s \in S} Es; \quad (C2) : \text{Para todo } s \in S, \quad Es = [t = s].$$

Quando A é *extensional*, colagens são únicas.

Um Ω -set é **completo** se para todo $p \in \Omega$, todo subconjunto compatível sobre p tem colagem sobre p . Em particular, todo conjunto compatível tem colagem.

Se H é uma álgebra de Heyting, um **pré-feixe** A sobre H consiste de um conjunto $|A|$ (o domínio de A) juntamente com duas funções

$$\cdot|_p : |A| \times H \longrightarrow |A| \quad \text{e} \quad E : |A| \longrightarrow H,$$

denominadas **restrição** e **extensão**, que satisfazem, para todo $x, y \in |A|$ e $p, q \in H$

$$[\text{rest 1}] : x|_{Ex} = x; \quad [\text{rest 2}] : Ex|_p = p \wedge Ex; \quad [\text{rest 3}] : x|_p|_q = x|_{p \wedge q}.$$

Se A é um pré-feixe sobre uma aHc Ω , podemos definir, para $x, y \in |A|$

$$[x = y]_A = \bigvee \{p \leq Ex \wedge Ey : x|_p = y|_p\},$$

fornecendo uma *igualdade* em A , com a qual A é um Ω -conjunto e vale

$$[E] : \text{Para todo } x \in |A|, \quad Ex = [x = x]_A.$$

As propriedades fundamentais que ligam a restrição e extensão com esta igualdade são

$$[\text{rest 4}] : \text{Para todo } p, q \in \Omega. \quad [x|_p = y|_q] = p \wedge q \wedge [x = y];$$

$$[\text{rest 5}] : x|_{[x=y]} = y|_{[x=y]}.$$

Como um pré-feixe sobre uma aHc fornece um Ω -conjunto, temos as noções de extensividade, compatibilidade e colagem para este tipo de pré-feixes. Um **feixe sobre Ω** é um pré-feixe onde todo conjunto compatível tem colagem.

1.3 Densidade. Funções Características

Nesta seção registraremos algumas propriedades básicas de dois conceitos que são fundamentais em tudo que se segue : função característica e densidade. As noções de função característica e densidade, bem como as propriedades em 1.3.5, 1.3.6 e 1.3.7 aparecem em [31] e [32]. Os outros resultados desta seção são novos.

Notação 1.3.1 Se A é um Ω -conjunto e $n \geq 1$ é um inteiro, sejam $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ n -úplas de elementos de $|A|^n$. Definimos

$$* \quad E\vec{a} := \bigwedge_{i=1}^n Ea_i;$$

$$* \quad [\vec{a} = \vec{c}] := \bigwedge_{i=1}^n [a_i = c_i].$$

$$* \quad \text{Se } A \text{ é um pré-feixe e } p \in \Omega, \text{ então } \vec{a}|_p := (a_1|_p, \dots, a_n|_p).$$

Definição 1.3.2 Seja Ω uma aHc, A um Ω -conjunto e $D \subseteq |A|$ um conjunto de seções em A . Dizemos que D é **denso** em A se para todo $a \in |A|$

$$Ea = \bigvee_{d \in D} [a = d].$$

A **densidade** de A , $d(A)$, é o menor cardinal κ tal que existe um subconjunto denso em A de cardinalidade κ . A é dito **separável** se $d(A) \leq \aleph_0$.

Lema 1.3.3 *Seja Ω uma aHc, $f : A \longrightarrow B$ um morfismo de Ω -conjuntos e $D \subseteq |A|$. Suponha que*

- * *Para todo $x, y \in |A|$. $[x = y] = [fx = fy]$;*
- * *$f(A) = \{fa : a \in |A|\}$ é denso em B ;*
- * *D é denso em A .*

Então, $f(D) = \{fd : d \in D\}$ é denso em B .

Demonstração: Para $b \in |B|$, $a \in |A|$ e $d \in D$, temos

$$Eb \geq [b = fd] \geq [b = fa] \wedge [fa = fd] = [b = fa] \wedge [a = d]. \quad (I)$$

Tomando supremos em relação à $d \in D$ em (I), a densidade de D em A garante que

$$\bigvee_{d \in D} [b = fd] \geq [b = fa] \wedge \bigvee_{d \in D} [d = a] = [b = fa] \wedge Ea = [b = fa]. \quad (II)$$

Como (II) vale para todo $a \in |A|$, (I) e a densidade de $f(A)$ em B fornecem

$$Eb \geq \bigvee_{d \in D} [b = fd] \geq \bigvee_{a \in |A|} [b = fa] = Eb,$$

estabelecendo a densidade de $f(D)$ em B . ■

Definição 1.3.4 (função característica) *Seja A um Ω -conjunto. Uma **função característica** em A é uma aplicação*

$$h : |A|^n \rightarrow \Omega, \quad (n \geq 0)$$

tal que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in |A|^n$:

$$[ch1]: h(\vec{x}) \leq E\vec{x}; \quad [ch2]: h(\vec{x}) \wedge [\vec{x} = \vec{y}] \leq h(\vec{y}).$$

Indicamos por $Ch(n, A)$ o conjunto das funções características definidas em $|A|^n$.

Note que a igualdade de um Ω -conjunto é um exemplo de função característica.

Observação 1.3.5 1. A condição [ch2] é equivalente a

$$[ch2']: h(\vec{x}) \wedge [\vec{x} = \vec{y}] = h(\vec{y}) \wedge [\vec{x} = \vec{y}].$$

2. Para $n = 0$, uma função característica $h : |A|^0 \rightarrow \Omega$, é uma função do objeto final $\{*\}$ da categoria **Set** em Ω , correspondendo simplesmente a um elemento de Ω .

3. É fácil verificar que se $h \in Ch(n, A)$ e $p \in \Omega$, então $p \wedge h \in Ch(n, A)$, onde $p \wedge h$ é definida por

$$(p \wedge h)(\vec{a}) = p \wedge h(\vec{a}). \quad (\vec{a} \in |A|^n)$$

4. $Ch(n, A)$ possui uma ordem parcial natural, dada por

$$h \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \forall \vec{a} \in |A|^n : \quad h(\vec{a}) \leq k(\vec{a}).$$

Com esta ordem parcial

- * $Ch(n, A)$ é um reticulado completo, onde sup's e inf's são calculados ponto a ponto;
- * O menor elemento de $Ch(n, A)$, $\perp$, é a função constante de valor $\perp \in \Omega$; o maior elemento $\top$ de $Ch(n, A)$ é a função característica $\vec{a} \mapsto E\vec{a}$;
- * $Ch(n, A)$ é uma álgebra de Heyting completa, onde implicação e negação são dadas, para $h, k \in Ch(n, A)$ e $\vec{a} \in |A|^n$, por

$$[h \rightarrow k](\vec{a}) := E\vec{a} \wedge (h(\vec{a}) \rightarrow k(\vec{a})) \quad \text{e} \quad [\neg h](\vec{a}) := E\vec{a} \wedge \neg h(\vec{a}). \quad \blacksquare$$

As seguintes propriedades de funções características serão muito úteis :

Lema 1.3.6 *Sejam $A \in pSh(\Omega)$ e $h \in Ch(n, A)$.*

a) *Para todo $\vec{a} \in |A|^n$ e todo $p \in \Omega$,*

$$h(a_1|_{p_1}, \dots, a_n|_{p_n}) = h(\vec{a}) \wedge \bigwedge_{i=1}^n p_i.$$

Em particular, temos $h(\vec{a}|_{E\vec{a}}) = h(\vec{a}|_{h(\vec{a})}) = h(\vec{a})$.

b) *Sejam $S \cup \{x\} \subseteq |A|$ e $p \in \Omega$ tais que $p = \bigvee_{s \in S} [x = s]$. Então, para $\vec{a} \in |A|^{n-1}$,*

$$p \wedge h(x, \vec{a}) = \bigvee_{s \in S} (h(s, \vec{a}) \wedge [s = x]).$$

Em particular, se $p = \bigvee_{i \in I} p_i$, então $h(x|_p, \vec{a}) = \bigvee_{i \in I} h(x|_{p_i}, \vec{a})$. ■

Outras propriedades importantes de funções características estão relacionadas com densidade, a saber

Lema 1.3.7 *Sejam A um pré-feixe sobre Ω e D um conjunto denso de seções em A .*

a) *Para todo $\vec{a} \in |A|^n$,*

$$E\vec{a} = \bigvee_{\vec{d} \in D^n} [\vec{a} = \vec{d}].$$

b) *Se $k, l : |A|^n \rightarrow \Omega$ são funções características tais que $k|_{D^n} = l|_{D^n}$, então $k = l$.*

c) *Seja $k_0 : D^n \rightarrow \Omega$ uma aplicação tal que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in D^n$:*

$$k_0(\vec{x}) \leq E\vec{x} \quad \text{e} \quad k_0(\vec{x}) \wedge [\vec{x} = \vec{y}] \leq k_0(\vec{y}).$$

Então, existe uma única função característica k em A tal que $k|_{D^n} = k_0$.

Demonstração: O item (a) vem do fato que D é denso em A e da lei distributiva

$$\bigwedge_{k=1}^n \bigvee_{i \in I} b_i^k = \bigvee_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \bigwedge_{k=1}^n b_{i_k}^k,$$

que vale em toda aHc.

b) Começamos pelo

Fato : Para todo $\vec{x} \in |A|^n$

$$k(\vec{x}) = \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} [\vec{\alpha} = \vec{x}] \wedge k(\vec{\alpha}) \quad (I)$$

Prova: Da propriedade [ch 2'] em 1.3.5.(1), obtemos, com $\vec{x} \in |A|^n$

$$k(\vec{x}) \wedge \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} [\vec{\alpha} = \vec{x}] = \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} ([\vec{\alpha} = \vec{x}] \wedge k(\vec{x})) = \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} ([\vec{\alpha} = \vec{x}] \wedge k(\vec{\alpha})).$$

A igualdade (I) é agora consequência imediata de (a).

É claro que (I) também vale para l . Assim, a hipótese $k|_{D^n} = l|_{D^n}$ acarreta $k = l$, como desejado.

c) Definimos, para $\vec{x} \in |A|^n$, $k(\vec{x}) := \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} [\vec{\alpha} = \vec{x}] \wedge k_0(\vec{\alpha})$. Mostraremos que k é única função característica tal que $k|_{D^n} = k_0$. Pelo item (a), temos

$$k(\vec{x}) = \bigwedge_{j=1}^n E x_j \wedge \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} k_0(\vec{\alpha}) \leq E \vec{x},$$

verificando [ch 1]. Para $\vec{x}, \vec{y} \in |A|^n$

$$\begin{aligned} k(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{j=1}^n [x_j = y_j] &= E \vec{x} \wedge \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} k_0(\vec{\alpha}) \wedge \bigwedge_{j=1}^n [x_j = y_j] \leq E \vec{x} \wedge \bigvee_{\vec{\alpha} \in D^n} k_0(\vec{\alpha}) \wedge E \vec{y} \\ &= E \vec{x} \wedge k(\vec{y}) \leq k(\vec{y}), \end{aligned}$$

verificando [ch 2] e completando a prova de que k é uma função característica. A unicidade segue do item (b). ■

Como $Ch(n, A)$ é uma aHc introduzimos a

Definição 1.3.8 Se A é um Ω -conjunto, uma função característica $h \in Ch(n, A)$ é **regular** se $h \in Reg(Ch(n, A))$.

Note que $h \in Ch(n, A)$ é regular sse para todo $\vec{a} \in |A|^n$

$$[regch] \quad h(\vec{a}) = E \vec{a} \wedge \neg \neg h(\vec{a}).$$

Há dois tipos especiais de funções características ligadas à lógica : a quantificação universal e a existencial.

Sejam A um Ω -conjunto, $n \geq 0$ um inteiro, $h \in Ch(n+1, A)$ e $j \in \{1, \dots, (n+1)\}$, então definimos dois elementos de $Ch(n, A)$

$$\exists v_j h \quad \text{e} \quad \forall v_j h,$$

denominados **quantificação existencial e universal de h em relação a j** , respectivamente. Primeiro, definimos, para $a_1, \dots, a_n \in |A|$

$$\begin{cases} \exists v_1 h(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{b \in |A|} h(b; a_1, \dots, a_n); \\ \forall v_1 h(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{j=1}^n E a_j \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (E b \rightarrow h(b; a_1, \dots, a_n)). \end{cases}$$

Lema 1.3.9 Se $n \geq 0$ é um natural e A é um Ω -conjunto, então $\exists v_1 h$ e $\forall v_1 h$ estão em $Ch(n, A)$.

Demonstração: Em ambos os casos, devemos verificar [ch 1] e [ch 2] em 1.3.4. Temos, para $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ em $|A|^n$,

$$\exists v_1 h(\vec{a}) = \bigvee_{b \in |A|} h(b; \vec{a}) \leq \bigvee_{b \in |A|} Eb \wedge E\vec{a} \leq E\vec{a},$$

verificando [ch 1] para $\exists v_1 h$. Está claro da definição que $\forall v_1 h$ satisfaz [ch 1]. Em relação a [ch 2] a lei distributiva $[\wedge, \vee]$ em Ω garante que

$$\exists v_1 h(\vec{a}) \wedge [\vec{a} = \vec{c}] = \bigvee_{b \in |A|} (h(b; \vec{a}) \wedge [\vec{a} = \vec{c}]) \leq \bigvee_{b \in |A|} h(b, \vec{c}) = \exists v_1 h(\vec{c}).$$

Como $E\vec{a} \wedge [\vec{a} = \vec{c}] = E\vec{c} \wedge [\vec{a} = \vec{c}]$, dos itens (b) e (c) em 1.1.2 e do fato que h satisfaz [ch 2'] em 1.3.5 vem

$$\begin{aligned} \forall v_1 h(\vec{a}) \wedge [\vec{a} = \vec{c}] &= E\vec{a} \wedge [\vec{a} = \vec{c}] \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (Eb \rightarrow h(b; \vec{a})) \\ &= E\vec{c} \wedge [\vec{a} = \vec{c}] \wedge \bigwedge_{b \in |A|} ((Eb \wedge [\vec{a} = \vec{c}]) \rightarrow ([\vec{a} = \vec{c}] \wedge h(b; \vec{a}))) \\ &= E\vec{c} \wedge [\vec{a} = \vec{c}] \wedge \bigwedge_{b \in |A|} ((Eb \wedge [\vec{a} = \vec{c}]) \rightarrow ([\vec{a} = \vec{c}] \wedge h(b; \vec{c}))) \\ &= E\vec{c} \wedge [\vec{a} = \vec{c}] \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (Eb \rightarrow h(b; \vec{c})) \\ &\leq E\vec{c} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (Eb \rightarrow h(b; \vec{c})) = \forall v_1 h(\vec{c}), \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Note que se σ é uma permutação de $\{1, \dots, m\}$ e $k \in Ch(m; A)$, então a equação

$$k^\sigma(a_1, \dots, a_m) = k(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)})$$

fornece uma função característica $k^\sigma \in Ch(m, A)$. Assim, definimos $\exists v_j h$ e $\forall v_j h$ por

$$\begin{cases} \exists v_j h &= \exists v_1 h^\tau; \\ \forall v_j h &= \forall v_1 h^\tau, \end{cases}$$

onde τ é a transposição de $\{1, \dots, (n+1)\}$ que troca 1 e j . Muito embora tenhamos dado esta definição formal, na prática vamos sempre imaginar que $|A|^{n+1}$ está escrito na forma $|A| \times |A|^n$ e que a primeira coordenada é aquela em relação a qual estamos quantificando. Ou seja, a menos de um isomorfismo – ou da operação sintática de trocar o nome das variáveis livres – podemos supor que a variável quantificada corresponde à primeira coordenada em $|A|^{n+1}$.

Discutiremos agora o análogo para funções características da noção de “todas as ocorrências de uma variável em uma fórmula são ligadas”.

Definição 1.3.10 *Sejam A um Ω -conjunto e $h \in Ch(n+1, A)$. Dizemos que h **independe da primeira coordenada** se para todo $x, y \in |A|$ e $\vec{a} \in |A|^n$*

$$h(x; \vec{a}) \wedge [x = y] = h(y, \vec{a}).$$

*Se $1 \leq j \leq n+1$, h **independe da j -ésima coordenada** se h^τ independe da primeira coordenada, onde τ é a transposição que troca 1 e j .*

Lema 1.3.11 *Sejam A um Ω -conjunto e $h, k \in Ch(n+1, A)$, $n \geq 0$.*

a) Se h independe da j -ésima coordenada, então para todo $t \in |A|$ e $\vec{a} \in |A|^n$

$$h(t, \vec{a}) \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \leq \forall v_j k(\vec{a}).$$

b) Se k independe da j -ésima coordenada, então para todo $t \in |A|$ e $\vec{a} \in |A|^n$,

$$\exists v_j h(\vec{a}) \wedge Et \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \leq k(t; \vec{a}).$$

Demonstração: Faremos a prova de (a), deixando (b) para o leitor. Podemos também supor que $j = 1$. Fixados $t, \vec{a} \in |A|^n$, devemos mostrar que

$$h(t, \vec{a}) \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \leq E\vec{a} \wedge \bigwedge_{s \in |A|} Es \rightarrow k(s; \vec{a}). \quad (I)$$

Uma vez que $h(t; \vec{a}) \leq E\vec{a}$, (I) é equivalente a

$$\text{Para todo } s \in |A|, \quad h(t, \vec{a}) \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \leq Es \rightarrow k(s; \vec{a})$$

isto é, para todo $s \in |A|$

$$Es \wedge h(t, \vec{a}) \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \leq k(s; \vec{a}), \quad (II)$$

que passaremos a discutir. Como h independe da primeira coordenada, sabemos que $h(t; \vec{a}) = h(s; \vec{a}) \wedge [t = s]$. Esta igualdade e [ch 2] aplicada a k acarretam

$$\begin{aligned} Es \wedge h(t, \vec{a}) \wedge (h(t, \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) &= [t = s] \wedge h(s; \vec{a}) \wedge ([t = s] \wedge h(s; \vec{a}) \rightarrow k(t; \vec{a})) \\ &\leq [t = s] \wedge k(t; \vec{a}) \leq k(s; \vec{a}), \end{aligned}$$

terminando a prova. ■

Observação 1.3.12 Um modo econômico de enunciar os resultados do Lema 1.3.11 é

$$\frac{h \rightarrow k}{h \rightarrow \forall v_j k} \quad \text{e} \quad \frac{h \rightarrow k}{\exists v_j h \rightarrow k}, \quad 5$$

com as cláusulas que, no primeiro caso h independe da j -ésima coordenada, e no segundo, que k é independente da j -ésima coordenada.

A relação entre a negação, sup's, inf's e quantificações em $Ch(n, A)$ é descrita na

Proposição 1.3.13 Se A é um Ω -conjunto, $h_i \in Ch(n, A)$, $i \in I$, e $h \in Ch(n+1, A)$, então

$$a) \neg (\bigvee_{i \in I} h_i) = \bigwedge_{i \in I} \neg h_i.$$

$$b) \bigwedge_{i \in I} \neg \neg h_i = \neg \neg (\bigwedge_{i \in I} \neg \neg h_i).$$

$$c) \neg \neg (\bigvee_{i \in I} h_i) = \neg \neg (\bigvee_{i \in I} \neg \neg h_i) = \neg (\bigwedge_{i \in I} \neg h_i).$$

$$d) \neg \exists v_j h = \forall v_j \neg h.$$

$$e) \neg \exists v_j \neg h = \neg \neg \forall v_j \neg \neg h = \forall v_j \neg \neg h; \quad \neg \neg \exists v_j h = \neg \forall v_j \neg h.$$

Demonstração: O leitor deve ter em mente que a negação em $Ch(n, A)$ é dada por

$$[\neg Ch] \quad \sim h(\cdot) := [\neg h](\cdot) = E(\cdot) \wedge \neg h(\cdot),$$

⁵ Qualquer semelhança com regras de dedução não é mera coincidência.

onde a negação do lado direito é a de Ω . Para evitar confusões conceituais, iremos adotar *no decorrer desta prova*, a notação $\sim h$ para indicar a negação em $Ch(n, A)$ e reservar o símbolo $\neg$ para a negação em Ω .

O Lema 1.1.5 será de importante no que segue.

a) Para $\vec{a} \in |A|^n$, 1.1.5.(d) fornece

$$\begin{aligned} \sim [\bigvee h_i](\vec{a}) &= E\vec{a} \wedge \neg ([\bigvee h_i](\vec{a})) = E\vec{a} \wedge \neg (\bigvee h_i(\vec{a})) = E\vec{a} \wedge \bigwedge \neg h_i(\vec{a}) \\ &= \bigwedge E\vec{a} \wedge \neg h_i(\vec{a}) = \bigwedge \sim h_i(\vec{a}) = [\bigwedge \sim h_i](\vec{a}), \end{aligned}$$

verificando (a).

b) Para $\vec{a} \in |A|^n$, o Lema 1.1.5.(f) acarreta

$$\begin{aligned} [\sim \sim \bigwedge \sim \sim h_i](\vec{a}) &= E\vec{a} \wedge \neg \neg [\bigwedge \sim \sim h_i](\vec{a}) = E\vec{a} \wedge \neg \neg [\bigwedge \sim \sim h_i(\vec{a})] \\ &= E\vec{a} \wedge \neg \neg [\bigwedge E\vec{a} \wedge \neg \neg h_i(\vec{a})] = E\vec{a} \wedge \neg \neg E\vec{a} \wedge \bigwedge \neg \neg h_i(\vec{a}) \\ &= E\vec{a} \wedge \bigwedge \neg \neg h_i(\vec{a}) = \bigwedge E\vec{a} \wedge \neg \neg h_i(\vec{a}) = \bigwedge [\sim \sim h_i](\vec{a}) \\ &= [\bigwedge \sim \sim h_i](\vec{a}), \end{aligned}$$

como desejado.

O item (c) pode ser verificado de modo análogo⁶.

d) É suficiente provar o enunciado para $j = 1$. Se $\vec{a} \in |A|^n$, 1.1.5.(d) e 1.1.2.(l) implicam, lembrando que $h(b; \vec{a}) \leq Eb$.

$$\begin{aligned} [\sim \exists v_1 h](\vec{a}) &= E\vec{a} \wedge \neg [\exists v_1 h](\vec{a}) = E\vec{a} \wedge \neg \left(\bigvee_{b \in |A|} h(b; \vec{a}) \right) \\ &= E\vec{a} \wedge \neg \left(\bigvee_{b \in |A|} Eb \wedge h(b; \vec{a}) \right) = E\vec{a} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} \neg (Eb \wedge h(b; \vec{a})) \\ &= E\vec{a} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} Eb \rightarrow \neg h(b; \vec{a}) = \bigwedge_{b \in |A|} E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow \neg h(b; \vec{a})] \quad (I) \end{aligned}$$

Por $[*]$ em 1.1.1 e o item (c) em 1.1.2, para todo $b \in |A|$ temos

$$\begin{aligned} E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow \neg h(b; \vec{a})] &= E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow (Eb \wedge \neg h(b; \vec{a}))] \\ &= E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow (Eb \wedge E\vec{a} \wedge \neg h(b; \vec{a}))] \\ &= E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow \sim h(b; \vec{a})]. \quad (II) \end{aligned}$$

Substituindo (II) em (I) obtemos

$$[\sim \exists v_1 h](\vec{a}) = \bigwedge_{b \in |A|} E\vec{a} \wedge [Eb \rightarrow \sim h(b; \vec{a})] = [\forall v_1 \sim h](\vec{a}),$$

como necessário. O item (e) é consequência de (d). ■

A idéia de funções características é codificar a noção de sub-objeto de um Ω -conjunto, estando portanto associada a questões lógicas, como a interpretação de linguagens em Ω -conjuntos. Não é surpreendente, portanto, que podemos transferir para funções características construções de natureza sintática. Como um exemplo, definimos dois conjuntos de operações em funções características, dados por

⁶ O mesmo é verdade para todos os resultados de 1.1.5, inclusive aqueles que envolvem implicação.

$$\mathcal{L}^\sharp := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} := \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists x, \forall x\}.$$

Seja A um Ω -conjunto e $Ch(A) = \bigcup_{n \geq 0} Ch(n, A)$ o conjunto de todas as funções características em A . Se S_i , $i \in I$, são subconjuntos de $Ch(A)$, fechados em relação às operações de $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}^\sharp$, é fácil verificar que $\bigcap_{i \in I} S_i$ também é fechado em relação a $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}^\sharp$. Esta propriedade origina a

Definição 1.3.14 Para $S \subseteq Ch(A) = \bigcup_{n \geq 0} Ch(n, A)$, definimos

$$\begin{cases} \mathcal{L}(S) = \bigcap \{T \subseteq Ch(A) : S \subseteq T \text{ e } T \text{ é fechado em relação às operações de } \mathcal{L}\} \\ \mathcal{L}^\sharp(S) = \bigcap \{T \subseteq Ch(A) : S \subseteq T \text{ e } T \text{ é fechado em relação às operações de } \mathcal{L}^\sharp\}, \end{cases}$$

denominados os fechos de S em relação a $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^\sharp$, respectivamente.

$\mathcal{L}(S)$ e $\mathcal{L}^\sharp(S)$ são os menores subconjuntos de $Ch(A)$ que contém S e são fechados em relação às operações em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^\sharp$, respectivamente. Também está claro que

$$\mathcal{L}^\sharp(S) \subseteq \mathcal{L}(S).$$

Como no caso clássico, de sintaxes de línguas formais, podemos obter $\mathcal{L}(S)$ e $\mathcal{L}^\sharp(S)$ como conjuntos indutivos, de forma a possibilitar provas por indução na complexidade. Para $\mathcal{L}(S)$, por indução em $m \geq 0$, definimos

$$\begin{aligned} * \mathcal{L}_0(S) &= S; \\ * \mathcal{L}_{m+1}(S) &= \begin{cases} \{h \wedge k : h, k \in \mathcal{L}_m(S)\} \cup \{h \vee k : h, k \in \mathcal{L}_m(S)\} \cup \\ \{h \rightarrow k : h, k \in \mathcal{L}_m(S)\} \cup \{\neg h : h, k \in \mathcal{L}_m(S)\} \cup \\ \{\exists x h : h \in \mathcal{L}_m(S)\} \cup \{\forall x h : h \in \mathcal{L}_m(S)\}. \end{cases} \end{aligned}$$

De modo análogo, definimos $\mathcal{L}_m^\sharp$; é fácil ver que

$$\mathcal{L}(S) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{L}_m(S) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^\sharp(S) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{L}_m^\sharp(S).$$

Um exemplo de aplicação desta técnica é o análogo da tradução de Gödel para funções características :

Definição 1.3.15 Seja A um Ω -conjunto e $S \subseteq Ch(A)$. Por indução na complexidade definimos, funções

$$\mathcal{L}(S) \ni h \mapsto h^g \in \mathcal{L}(S) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^\sharp(S) \ni h \mapsto h^g \in \mathcal{L}^\sharp(S)$$

da forma seguinte, onde todas as operações indicadas são na álgebra das funções características :

- * Se $h \in S$, então $h^g = \neg\neg h$;
- * Se $\diamond \in \{\wedge, \rightarrow\}$, então $(h_1 \diamond h_2)^g = h_1^g \diamond h_2^g$; $(\neg h)^g = \neg h^g$;
- * $(h_1 \vee h_2)^g = \neg\neg(h_1^g \vee h_2^g)$;
- * $(\exists x h)^g = \neg\neg \exists x h^g$;

* No caso de $\mathcal{L}$, $(\forall x h)^g = \forall x h^g$.

Observação 1.3.16 (1) Observe que a notação h^g é *imprecisa*, pois a construção depende de fixar S em $Ch(A)$. O contexto deixará claro se estamos usando a transformação em relação a $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}^\sharp$, muito embora o Lema 1.3.17 mostre que isto não é lá muito fundamental.

(2) Diferente da situação de sintaxes formais, note que, pelos itens (d) e (e) em 1.3.13, se $h \in \mathcal{L}^\sharp(S)$, então

$$\forall x \neg\neg h \text{ e } \neg\neg \forall x \neg h,$$

estão em $\mathcal{L}^\sharp(S)$. A razão é que a *equivalência lógica intuicionista* é refletida pela igualdade em $Ch(n, A)$. ■

Lema 1.3.17 *Seja A um Ω -conjunto, $S \subseteq Ch(A)$ e $h \in \mathcal{L}(S) \cap Ch(m, A)$.*

- a) $(\neg\neg h)^g = h^g \text{ e } (h^g)^g = h^g$.
- b) $h^g \in Reg(Ch(m, A))$.
- c) $h \in \mathcal{L}^\sharp(S) \Rightarrow h^g = \neg\neg h$.
- d) $h^g \in \mathcal{L}^\sharp(S)$.
- e) Existe $k \in \mathcal{L}^\sharp(S)$ tal que $h^g = k^g$.

Demonstração: a) A primeira afirmação é consequência da definição de tradução de Gödel; a segunda vem de uma indução simples na complexidade.

b) Por indução na complexidade verificamos que h^g é regular. A conclusão está clara para $h \in S$, para os conectivos proposicionais e para a quantificação existencial. Para o quantificador universal, a conclusão segue da hipótese de indução e de 1.3.13.(e).

c) Por indução na complexidade, utilizando 1.1.2 para os conectivos proposicionais e 1.3.13.(c) para o quantificador existencial.

d) Por indução na complexidade, é suficiente verificar o enunciado para a quantificação universal. A primeira igualdade em (a), (b) e 1.3.13.(e) fornecem

$$(\forall y h)^g = \forall y h^g = \forall y \neg\neg h^g = \forall y (\neg\neg h)^g = (\forall y \neg\neg h)^g = (\neg \exists y \neg h)^g,$$

como desejado. O item (e) é consequência de (d) e da segunda igualdade em (a). ■

1.4 O funtor extensionalização

Sejam $\Omega\text{-cj}$ a categoria dos Ω -conjuntos e $\eta\Omega\text{-cj}$ a categoria dos Ω -conjuntos extensionais. Mostraremos que o funtor esquecimento de $\eta\Omega\text{-cj}$ em $\Omega\text{-cj}$ tem um adjunto à esquerda, denominado **extensionalização**. Incluímos aqui a construção do funtor extensionalização e suas propriedades básicas para referência futura.

Seja A um Ω -conjunto: definimos uma relação binária θ em $|A|$ pela prescrição

$$x \theta y \quad \text{sse} \quad Ex = Ey = [x = y].$$

Note que se A é extensional θ é a diagonal de $|A|$, isto é, a identidade de $|A|$. É fácil verificar que θ é uma relação de equivalência em $|A|$. Para $x \in |A|$,

* ηx é a classe de equivalência de $x \in |A|$ por θ ;

* $|A|/\theta = \{\eta x : x \in |A|\}$ é o conjunto quociente de $|A|$ por θ .

Lema 1.4.1 *Sejam A um Ω -conjunto, $h \in Ch(n, A)$ e $x, y \in |A|$.*

a) *Para $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in |A|^n$*

$$x_i \theta y_i, 1 \leq i \leq n, \quad \Rightarrow \quad h(x_1, \dots, x_n) = h(y_1, \dots, y_n).$$

b) *Se $\eta x_1, \dots, \eta x_n \in (|A|/\theta)^n$, as prescrições*

$$\begin{cases} \eta h(\eta x_1, \dots, \eta x_n) &= h(x_1, \dots, x_n) \\ [\eta x = \eta y] &= [x = y]_A, \end{cases}$$

fornecem funções bem definidas de $(|A|/\theta)^n \in (|A|/\theta)^2$ em Ω , respectivamente.

c) *Se A é um pré-feixe sobre Ω e $p \in \Omega$, então $x \theta y \Rightarrow x|_p \theta y|_p$.*

Demonstração: a) Para todo i entre 1 e n , temos $Ex_i = Ey_i = [x_i = y_i]$. Portanto, $[ch1]$ e $[ch2]$ em 1.3.4 acarretam

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= h(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n Ex_i = h(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n [x_i = y_i] \\ &\leq h(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Por simetria, concluímos a igualdade desejada;

O item b) é consequência imediata de a).

c) Temos $Ex|_p = Ex \wedge p = Ey \wedge p = Ey|_p$. Por outro lado,

$$[x|_p = y|_p] = p \wedge [x = y] = p \wedge Ex = p \wedge Ey = Ex|_p = Ey|_p,$$

mostrando que $x|_p \theta y|_p$. ■

Definimos um Ω -conjunto ηA pelas seguintes cláusulas :

$[\eta 1] : |\eta A| = |A|/\theta$;

$[\eta 2] : \text{Para } x, y \in |A|, [\eta x = \eta y]_{\eta A} = [x = y]_A$.

Por 1.4.1.(b) a função em $[\eta 2]$ está bem definida. Além disso, é fácil verificar que se trata de uma **igualdade** em $|\eta A|$. Observe que para todo $x, y \in |A|$

* $[\eta x = \eta y] = [x = y]$;

* $E\eta x = Ex$;

* $E\eta x = E\eta y = [\eta x = \eta y] \quad \text{sse} \quad x \theta y$, isto é, $\eta x = \eta y$.

Proposição 1.4.2 *Seja A um Ω -conjunto.*

a) ηA é um Ω -conjunto extensional e a função $\eta : A \rightarrow \eta A$ é um morfismo épico em $\Omega\text{-cj}$. Se A é completo, o mesmo será verdade para ηA .

b) Se A é um pré-feixe sobre Ω , então a prescrição

$$\eta x|_p = \eta(x|_p)$$

é uma restrição com a qual ηA é um pré-feixe sobre Ω e η um morfismo de pré-feixes.

c) Se B é um Ω -conjunto extensional e $f : A \rightarrow B$ é um morfismo de $\Omega\text{-cj}$, então existe um **único** morfismo $g : \eta A \rightarrow B$ que faz comutar o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & \eta A \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & B & \end{array}$$

Demonstração: a) As observações que precedem o enunciado da Proposição implicam as primeiras afirmações em (a). Se A é completo, seja $\eta x_i, i \in I$, uma família compatível de seções em $|\eta A|$, isto é,

$$\text{para } i, j \in I, \quad E\eta x_i \wedge E\eta x_j = [\eta x_i = \eta x_j].$$

De $[\eta 2]$ acima concluímos que a família $x_i, i \in I$, é compatível em A . Por completude, existe $t \in |A|$ tal que

$$(i) Et = \bigvee_{i \in I} Ex_i \quad \text{e} \quad (ii) \text{ Para todo } i \in I, \quad Ex_i = [t = x_i].$$

É imediato da definição de igualdade em ηA que as condições (i) e (ii) estão também satisfeitas com ηt no lugar de t e ηx_i no lugar de $x_i, i \in I$. Portanto, ηt é a colagem dos ηx_i em ηA , estabelecendo a sua completude.

b) Vem diretamente das definições dos conceitos pertinentes.

c) Para $x \in |A|$, definimos $g(\eta x) = f(x)$. É fácil ver que g está bem definida. Temos $Eg(\eta x) = Ef(x) = Ex = E\eta x$. Por outro lado, se $x, y \in |A|$, então

$$[g(\eta x) = g(\eta y)] = [f(x) = f(y)] \geq [x = y] = [\eta x = \eta y],$$

e g é um morfismo de Ω -conjuntos. A unicidade de g é consequência imediata do fato que η é épico. ■

Observação 1.4.3 O funtor extensionalização η é um exemplo em que a relação

$$[\eta x = \eta y] = [x = y] \quad \forall x, y \in |A| \quad (*)$$

não implica que η é mônico. Para Ω -conjuntos **extensionais**, $(*)$ garante um morfismo mônico. ([31], [32]). ■

Podemos ver a construção ηA como um funtor; além da associação $A \mapsto \eta A$, é preciso definir sua ação em morfismos de $\Omega\text{-cj}$. Se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo em $\Omega\text{-cj}$, a composição

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\eta} \eta B$$

fornece um morfismo de A em um Ω -conjunto extensional. Por 1.4.2.(c), existe um *único* morfismo $\eta f : \eta A \rightarrow \eta B$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \eta A & \xrightarrow{\eta f} & \eta B \end{array}$$

Note que ηf está definido em elementos pela equação $\eta f(\eta x) = \eta(f(x))$. É fácil ver que

$$\eta Id_A = Id_{\eta A} \quad \text{e} \quad \eta(f \circ g) = \eta f \circ \eta g$$

mostrando que $\eta : \Omega\text{-cj} \rightarrow \eta\Omega\text{-cj}$ é um funtor covariante. A propriedade em 1.4.2.(c) garante que η é adjunto à esquerda do esquecimento de $\eta\Omega\text{-cj}$ em $\Omega\text{-cj}$.

O funtor η tem mais uma propriedade importante, descrita na

Proposição 1.4.4 *Sejam $n \geq 0$ um natural e A um Ω -conjunto.*

a) *Se $h \in Ch(n, A)$, então a função*

$$\eta h : |\eta A|^n \rightarrow \Omega, \text{ dada por } \eta h(\eta x_1, \dots, \eta x_n) = h(x_1, \dots, x_n),$$

está bem definida e $\eta h \in Ch(n, \eta A)$.

b) *A aplicação $Ch(n, A) \ni h \mapsto \eta h \in Ch(n, \eta A)$ é um isomorfismo de aHc's. Além disso, se $h \in Ch(n+1, A)$ então*

$$[quan] \quad \begin{cases} \eta(\exists x h) &= \exists x \eta h; \\ \eta(\forall x h) &= \forall x \eta h. \end{cases}$$

Demonstração: a) A boa definição de ηh é consequência de 1.4.1.(b). Para $\eta x_1, \dots, \eta x_n, \eta y_1, \dots, \eta y_n$ em $|\eta A|^n$, temos

$$* \eta h(\eta x_1, \dots, \eta x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \leq \bigwedge_{i=1}^n E x_i = \bigwedge_{i=1}^n E \eta x_i;$$

$$\begin{aligned} * \eta h(\eta x_1, \dots, \eta x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n [\eta x_i = \eta y_i] &= h(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n [x_i = y_i] \leq h(y_1, \dots, y_n) \\ &= \eta h(\eta y_1, \dots, \eta y_n). \end{aligned}$$

verificando $[ch1]$ e $[ch2]$ em 1.3.4.

b) η é claramente injetora. Para $k \in Ch(n, \eta A)$, definimos

$$\beta k : |A|^n \longrightarrow \Omega, \text{ por } \beta k(x_1, \dots, x_n) = k(\eta x_1, \dots, \eta x_n).$$

É fácil verificar que $\beta k \in Ch(n, A)$ e que $\eta \beta k = k$. Isto mostra que $h \mapsto \eta h$ é bijetora. Por outro lado, está claro das definições que

$$\text{para toda } h, h' \in Ch(n, A), \quad h \leq h' \text{ sse } \eta h \leq \eta h',$$

e portanto, $h \mapsto \eta h$ é um isomorfismo de conjuntos ordenados. Como todos os conceitos que estão envolvidos na definição de uma aHc dependem apenas da ordem, concluímos que $h \mapsto \eta h$ é um isomorfismo de aHc. Finalmente, para $\vec{a} \in |A|^n$,

$$\begin{aligned} \eta(\forall x h)(\eta \vec{a}) &= \forall x h(\vec{a}) = E\vec{a} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (Eb \rightarrow h(b; \vec{a})) \\ &= E\eta \vec{a} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} (E\eta b \rightarrow \eta h(\eta b; \eta \vec{a})) \\ &= E\eta \vec{a} \wedge \bigwedge_{t \in |\eta A|} (Et \rightarrow \eta h(t; \eta \vec{a})) = \forall x \eta h(\eta \vec{a}), \end{aligned}$$

provando a segunda igualdade em $[quan]$. A primeira é análoga. ■

Em consequência de 1.4.4, toda estrutura **lógica** presente em A pode ser transferida a ηA , de modo essencialmente isomorfo. Esta observação justifica a preocupação essencial só com Ω -conjuntos *extensionais*. Por outro lado, em meio a construções importantes, podemos nos deparar com Ω -conjuntos não necessariamente extensionais (veremos vários exemplos abaixo). Os resultados desta seção serão úteis para fornecer a transferência de estrutura para a extensionalização que nos interessa.

1.5 O funtor *

Os resultados desta seção são originais e as idéias vêm da construção de *ultrafeixes* que aparece em [12]. Deve-se mencionar que um caso muito particular – para feixes de funções reais contínuas –, é discutido em [35].

Seja A um Ω -conjunto extensional. Definimos um Ω -conjunto dA pelas seguintes cláusulas :

- * $|dA| = \{ \langle x, u \rangle \in |A| \times \Omega : Ex \text{ é denso em } u \}$
 $= \{ \langle x, u \rangle \in |A| \times \Omega : Ex \leq u \text{ e } u = \neg \neg Ex \wedge u \}$;
- * Para $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle \in |dA|$, $[\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle] = u \wedge v \wedge \neg \neg [x = y]$.

Claro que a igualdade definida acima é simétrica. Para vermos que é transitiva, sejam $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle$ e $\langle z, w \rangle$ elementos de $|dA|$. Então, os itens (f) e (b) em 1.1.2 e a propriedade transitiva da igualdade em A fornecem

$$\begin{aligned} [\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle] \wedge [\langle y, v \rangle = \langle z, w \rangle] &= u \wedge v \wedge \neg \neg [x = y] \wedge v \wedge w \wedge \neg \neg [y = z] \\ &= u \wedge v \wedge w \wedge \neg \neg ([x = y] \wedge [y = z]) \end{aligned}$$

$$\leq u \wedge w \wedge \neg\neg[x = z] = [\langle x, u \rangle = \langle z, w \rangle].$$

Observação 1.5.1 a) Se $\langle x, u \rangle \in |dA|$, então

$$[E] \quad E\langle x, u \rangle = u \wedge \neg\neg Ex = u.$$

b) Se Ω é uma álgebra de Boole completa, então dA é uma cópia isomorfa de A , pois todo elemento de Ω é regular. Assim, a construção acima seria trivial. Poderíamos então tomar como hipótese geral que, nesta seção, que Ω não é uma aBc. ■

Proposição 1.5.2 Com a igualdade definida acima dA é um Ω -conjunto. Além disso,

a) Se A é completo, o mesmo é verdade para dA .

b) Se A é um pré-feixe sobre Ω , a prescrição

$$\langle x, u \rangle|_p = \langle x|_p, p \wedge u \rangle$$

define uma restrição com a qual dA é um pré-feixe sobre Ω e d um morfismo de pré-feixes.

Demonstração: Tendo em vista as observações que precedem 1.5.1, resta provar (a), uma vez que a parte (b) vem diretamente das definições.

Como A é extensional e completo, A é um feixe sobre Ω , isto é, existe uma restrição em A que é compatível com a sua igualdade. Suponha que $\langle x_i, u_i \rangle$, $i \in I$, é uma família compatível de seções em dA e seja $u := \bigvee u_i$. Para mostrar que a família dada tem colagem em dA , vamos primeiro provar o

Fato : Existe $t \in |A|$ tal que

$$[dc1] : Et \text{ é denso em } \bigvee_{i \in I} u_i; \quad [dc2] : \text{Para todo } j \in I, \quad u_j = u_j \wedge \neg\neg[t = x_j].$$

Prova : A compatibilidade de $\langle x_i, u_i \rangle$, $i \in I$, significa que para todo $i, j \in I$

$$E\langle x_i, u_i \rangle \wedge E\langle x_j, u_j \rangle = [\langle x_i, u_i \rangle = \langle x_j, u_j \rangle],$$

isto é,

$$u_i \wedge u_j = u_i \wedge u_j \wedge \neg\neg[x_i = x_j]. \quad (I)$$

Pelo Lema 1.1.7 existe uma família q_i , $i \in I$, dois a dois disjunta, tal que $\bigvee q_i$ é denso em $u := \bigvee u_i$. Considere a família

$$s_i = x_i|_{q_i} \quad (i \in I)$$

de seções de A . Como os q_i são dois a dois disjuntos, esta família é compatível em A e portanto existe (um único) $t \in |A|$ tal que

$$(i) \quad Et = \bigvee Ex_i|_{q_i} =: \bigvee w_i;$$

$$(ii) \quad \text{Para todo } i \in I, \quad [t = s_i] = w_i. \text{ onde } w_i = Ex_i|_{q_i}.$$

Primeiro está claro que $[dc1]$ está satisfeita, pois:

$$\neg\neg Et = \neg\neg \bigvee w_i = \neg\neg \bigvee q_i \wedge \neg\neg \bigvee Ex_i = \neg\neg \bigvee u_i.$$

Para cada $j \in I$, seja

$$A_j = \{i \in I : q_i \wedge u_j \neq \perp\}.$$

Como $\neg\neg \bigvee w_i = \neg\neg u$, temos por 1.1.2.(f)

$$\neg\neg (\bigvee w_i \wedge u_j) = \neg\neg \bigvee w_i \wedge \neg\neg u_j = \neg\neg u \wedge \neg\neg u_j = \neg\neg (u \wedge u_j) = \neg\neg u_j.$$

Consequentemente, para todo $j \in I$,

$$v_j := \bigvee_{i \in A_j} (w_i \wedge u_j) \text{ é denso em } u_j. \quad (\text{II})$$

Como $t|_{w_i} = s_i = x_i|_{q_i}$, temos para $i \in A_j$

$$w_i \wedge [t = x_j] = [t|_{w_i} = x_j] = [x_i|_{q_i} = x_j] = q_i \wedge [x_i = x_j]. \quad (\text{III})$$

Aplicando a dupla negação de ambos os lados de (III) e lembrando (I) (bem como 1.1.2.(f)), chegamos a

$$\begin{aligned} \neg\neg w_i \wedge \neg\neg [t = x_j] &= \neg\neg q_i \wedge \neg\neg [x_i = x_j] = \neg\neg q_i \wedge \neg\neg u_i \wedge \neg\neg u_j \\ &= \neg\neg q_i \wedge \neg\neg u_j, \end{aligned}$$

e assim $\neg\neg [t = x_j] \geq \neg\neg (q_i \wedge u_j)$, para todo $i \in A_j$. Tomando supremo em relação a $i \in A_j$, concluímos que

$$\neg\neg [t = x_j] \geq \bigvee_{i \in A_j} \neg\neg (q_i \wedge u_j)$$

e assim, os itens (b) e (d) de 1.1.2, juntamente com 1.1.5.(g) e (I), acarretam

$$\begin{aligned} \neg\neg [t = x_j] &\geq \neg\neg \bigvee_{i \in A_j} \neg\neg (q_i \wedge u_j) = \neg\neg \bigvee_{i \in A_j} \neg\neg q_i \wedge \neg\neg u_j \\ &= \neg\neg \bigvee_{i \in A_j} \neg\neg (w_i \wedge u_j) = \neg\neg \bigvee_{i \in A_j} w_i \wedge u_j = \neg\neg v_j = \neg\neg u_j, \end{aligned}$$

completando a verificação de [dc2].

Usando o **Fato**, mostraremos que $\langle t, u \rangle$ é uma colagem de $\langle x_i, u_i \rangle, i \in I$, em dA . Claro que $u = E\langle t, u \rangle = \bigvee u_i = \bigvee E\langle x_i, u_i \rangle$. Além disso, para $j \in I$, [dc 2] acarreta

$$E\langle x_j, u_j \rangle = u_j = u_j \wedge \neg\neg [t = x_j] = [\langle t, u \rangle = \langle x_j, u_j \rangle],$$

terminando a prova. ■

Consideremos a função $d : |A| \longrightarrow |dA|$ dada por $t \mapsto \langle t, Et \rangle$. Temos, para $s, t \in |A|$,

$$* E\langle t, Et \rangle = Et;$$

$$* [\langle t, Et \rangle = \langle s, Es \rangle] = Et \wedge Es \wedge \neg\neg [s = t] \geq Et \wedge Es \wedge [s = t] = [s = t],$$

e d é um morfismo de Ω -conjuntos ⁷.

Em geral, dA não é extensional : se $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle \in |dA|$.

$$E\langle x, u \rangle = E\langle y, v \rangle = u \wedge v \wedge \neg\neg [x = y].$$

implica só que $u = v = u \wedge \neg\neg [x = y]$, isto é, que $[x = y]$ é denso em u (e v).

⁷ Como registrado em 1.5.1, se Ω é uma aBc, d é um *isomorfismo* de A em dA .

A associação $A \mapsto dA$ é um funtor; se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo em $\eta\Omega\text{-cj}$, definimos

$$df : dA \longrightarrow dB \quad \text{por} \quad df(\langle x, u \rangle) = \langle fx, u \rangle.$$

Esta definição faz sentido, pois $Ex = Efx$. Para $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle \in |dA|$, temos

$$* Edf(\langle x, u \rangle) = E\langle fx, u \rangle = u = E\langle x, u \rangle;$$

$$* [\langle fx, u \rangle = \langle fy, v \rangle] = u \wedge v \wedge \neg\neg[fx = fy] \geq u \wedge v \wedge \neg\neg[x = y] = [\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle],$$

constatando que df é um morfismo. É fácil verificar que

$$d(Id_A) = Id_{dA} \quad \text{e} \quad d(f \circ g) = df \circ dg,$$

e assim, as associações $A \mapsto dA$ e $f \mapsto df$ constituem-se em um funtor covariante de $\eta\Omega\text{-cj}$ em $\Omega\text{-cj}$.

Para facilitar a notação, dados $\langle x_1, u_1 \rangle, \dots, \langle x_n, u_n \rangle \in |dA|$, escrevemos

$$\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = (\langle x_1, u_1 \rangle, \dots, \langle x_n, u_n \rangle) \in |dA|^n.$$

No caso em que $\langle x_i, u_i \rangle = d(a_i) = \langle a_i, Ea_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$, adotamos a notação

$$d\vec{a} := (\langle a_1, Ea_1 \rangle, \dots, \langle a_n, Ea_n \rangle).$$

Observação 1.5.3 Se $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \in |dA|^n$, então

$$[d \ 1] : E\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \bigwedge_{i=1}^n u_i := E\vec{u}.$$

Por outro lado, se $\langle \vec{y}, \vec{v} \rangle \in |dA|^n$, o Lema 1.1.2.(f) garante que

$$\begin{aligned} [d \ 2] : [\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle] &= E\vec{u} \wedge E\vec{v} \wedge \neg\neg[\vec{x} = \vec{y}] \\ &= E\vec{u} \wedge E\vec{v} \wedge \bigwedge_{i=1}^n \neg\neg[x_i = y_i]. \end{aligned}$$

$$[d \ 3] : E\vec{u} \wedge \neg\neg E\vec{x} = E\vec{u}. \quad \blacksquare$$

O próximo passo é entender como funções características – a quantificação em particular $\neg$, se comportam em relação à d . Se $h \in Ch(n, A)$ e $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \in |dA|^n$, definimos

$$[dch] \quad dh(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) := E\vec{u} \wedge \neg\neg h(\vec{x}) = \bigwedge_{i=1}^n u_i \wedge \neg\neg h(\vec{x}).$$

Teorema 1.5.4 *Seja A um Ω -conjunto e $n \geq 0$ um natural.*

$$a) h \in Ch(n, A) \Rightarrow dh \in Reg(Ch(n, dA)).$$

$$b) \text{ Se } h \in Reg(Ch(n, A)), \text{ então para todo } \vec{x} \in |A|^n, \quad h(\vec{x}) = dh(d\vec{x}).$$

c) A aplicação $h \mapsto dh$ preserva $\perp$, $\top$, ínfimos finitos, negação e implicação. Além disso, para $\{h_i : i \in I\} \subseteq Ch(n, A)$

$$(1) \quad d(\bigvee h_i) = \neg\neg(\bigvee dh_i);$$

$$(2) \quad \text{Para todo } \vec{x} \in |A|^n, \quad d[\bigwedge \sim \sim h_i](d\vec{x}) = [\bigwedge dh_i](d\vec{x}).$$

$$d) \text{ Se } h_i \in Reg(Ch(n, A)), i \in I, \text{ então para todo } \vec{x} \in |A|^n, \quad d(\bigwedge h_i)(d\vec{x}) = (\bigwedge dh_i)(d\vec{x}).$$

$$e) \text{ Para toda } h \in Ch(n+1, A)$$

- (1) $d(\exists y h) = \neg \neg \exists y dh$; (2) $d(\forall y \neg h) = \neg \exists y dh$; (3) $d(\forall y \neg \neg h) = \forall y dh$.
f) Seja $S \subseteq Ch(A) \ni d(S) = \{dh : h \in S\}$. Para toda $h \in \mathcal{L}^\sharp(S)$ (1.3.14)
(1) $dh \in \mathcal{L}^\sharp(d(S))$; (2) $d(h^g) = (dh)^g$.

Demonstração: Tanto 1.1.2, quanto as fórmulas [d 1], [d 2] e [d 3] em 1.5.3 serão de uso constante, sem menção explícita. Adotaremos nesta prova a convenção da demonstração de 1.3.13 : $\sim$ indica a negação de funções características.

a) Está claro que dh verifica [ch 1]; se $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle, \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle \in |dA|^n$, então

$$\begin{aligned} dh(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) \wedge [\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle] &= E\vec{u} \wedge \neg \neg h(\vec{x}) \wedge E\vec{v} \wedge \neg \neg [\vec{x} = \vec{y}] \\ &\leq E\vec{v} \wedge \neg \neg (h(\vec{x}) \wedge [\vec{x} = \vec{y}]) \leq E\vec{v} \wedge \neg \neg h(\vec{y}) \\ &= dh(\langle \vec{y}, \vec{v} \rangle), \end{aligned}$$

e $dh \in Ch(n, dA)$. Para verificar a regularidade, note que

$$\begin{aligned} [\sim \sim dh](\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) &= E\vec{u} \wedge \neg \neg [dh(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle)] = E\vec{u} \wedge \neg \neg [E\vec{u} \wedge \neg \neg h(\vec{x})] \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg E\vec{u} \wedge \neg \neg h(\vec{x}) = E\vec{u} \wedge \neg \neg h(\vec{x}) = dh(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle). \end{aligned}$$

completando a prova de (a). O item b) é trivial.

c) A preservação de $\perp$ é óbvia; lembre que $\top$ é a função $\vec{x} \mapsto E\vec{x}$, e portanto temos

$$d\top(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) = E\vec{u} \wedge \neg \neg \top(\vec{x}) = E\vec{u} \wedge \neg \neg E\vec{x} = E\vec{u} = E\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle,$$

que é o elemento $\top$ em $Ch(n, dA)$. Provaremos a preservação de $\rightarrow$, deixando $\neg$ e $\wedge$ para o leitor. Para $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \in |dA|^n$ e $h, k \in Ch(n, A)$

$$\begin{aligned} d(h \rightarrow k)(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) &= E\vec{u} \wedge \neg \neg (h \rightarrow k)(\vec{x}) = E\vec{u} \wedge \neg \neg [E\vec{x} \wedge (h(\vec{x}) \rightarrow k(\vec{x}))] \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg E\vec{x} \wedge (\neg \neg h(E\vec{x}) \rightarrow \neg \neg k(E\vec{x})) \\ &= E\vec{u} \wedge [(E\vec{u} \wedge \neg \neg h(E\vec{x})) \rightarrow (E\vec{u} \wedge \neg \neg k(E\vec{x}))] \\ &= E\vec{u} \wedge [dh(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) \rightarrow dk(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle)] = (dh \rightarrow dk)(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle). \end{aligned}$$

Se $h_i, i \in I$, está em $Ch(n, A)$, então, 1.3.13.(c) fornece

$$\begin{aligned} d(\bigvee h_i)(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) &= E\vec{u} \wedge \neg \neg [\bigvee h_i](\vec{x}) = E\vec{u} \wedge \neg \neg E\vec{u} \wedge \neg \neg (\bigvee h_i(\vec{x})) \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg E\vec{u} \wedge \neg \neg (\bigvee \neg \neg h_i(\vec{x})) = E\vec{u} \wedge \neg \neg [E\vec{u} \wedge \bigvee \neg \neg h_i(\vec{x})] \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg [\bigvee (E\vec{u} \wedge \neg \neg h_i(\vec{x}))] = E\vec{u} \wedge \neg \neg \bigvee dh_i(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) \\ &= \sim \sim (\bigvee dh_i)(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle), \end{aligned}$$

verificando (1). Lembrando o item (a) acima, 1.1.5.(f) aplicado tanto em Ω quanto em $Ch(n, dA)$, fornece

$$\begin{aligned} d(\bigwedge \sim \sim h_i)(d\vec{x}) &= E\vec{x} \wedge \neg \neg ([\bigwedge \sim \sim h_i](\vec{x})) = E\vec{x} \wedge \neg \neg (\bigwedge E\vec{x} \wedge \neg \neg h_i(\vec{x})) \\ &= E\vec{x} \wedge \neg \neg (\bigwedge E\vec{x} \wedge \neg \neg h_i(\vec{x})) \\ &= E\vec{x} \wedge \neg \neg (\bigwedge dh_i(d\vec{x})) = E\vec{x} \wedge \neg \neg [\bigwedge dh_i](d\vec{x}) \end{aligned}$$

$$= \sim \sim [\bigwedge dh_i](d\vec{x}) = [\bigwedge dh_i](d\vec{x}),$$

completando a prova de (c). O ítem (d) é consequência imediata de (c).

e)(1) Para $\langle b, v \rangle \in |dA|$ e $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \in |dA|^n$, [ch 1] garante que

$$\neg \neg h(b, \vec{x}) = \neg \neg h(b; \vec{x}) \wedge \neg \neg E\vec{u} \wedge \neg \neg v = \neg \neg (E\vec{u} \wedge v \wedge \neg \neg h(b; \vec{x})). \quad (I)$$

Se $\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \in |dA|^n$. 1.1.5.(g) e (I) fornecem

$$\begin{aligned} d(\exists y h)(\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle) &= E\vec{u} \wedge \neg \neg ([\exists y h](\vec{x})) = E\vec{u} \wedge \neg \neg \left(\bigvee_{b \in |A|} h(b; \vec{x}) \right) \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg \left(\bigvee_{b \in |A|} \neg \neg h(b; \vec{x}) \right) \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg \left(\bigvee_{b \in |A|} \neg \neg (E\vec{u} \wedge E b \wedge \neg \neg h(b; \vec{x})) \right) \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg \left(\bigvee_{\langle b, v \rangle \in |dA|} E\vec{u} \wedge v \wedge \neg \neg h(b; \vec{x}) \right) \\ &= E\vec{u} \wedge \neg \neg \left(\bigvee_{\langle b, v \rangle \in |dA|} dh(b; \vec{x}) \right) = \sim \sim [\exists y dh](\vec{x}), \end{aligned}$$

conforme desejado. A Proposição 1.3.13.(d), juntamente (1) e o ítem (c) acima, fornecem

$$d(\forall y \neg h) = d(\neg \exists y h) = \neg d(\exists y h) = \neg \neg \neg \exists y dh = \neg \exists y dh = \forall y \neg dh.$$

Para (3) temos, lembrando 1.3.13.(e) e o ítem (a) acima,

$$\begin{aligned} d(\forall y \neg \neg h) &= d(\neg \exists y \neg h) = \neg d(\exists y \neg h) = \neg \exists y d(\neg h) = \neg \exists y \neg dh \\ &= \forall y \neg \neg dh = \forall y dh, \end{aligned}$$

terminando a prova de (e).

f) A prova de (1) e (2) é por indução na complexidade, utilizando os itens anteriores. Trataremos os casos do sup binário e do quantificador existencial em (2), omitindo a discussão dos demais. Por (c).(1) e 1.3.17.(a)

$$\begin{aligned} d((h \vee k)^g) &= d(\neg \neg (h^g \vee k^g)) = \neg \neg (dh^g \vee dk^g) = (dh \vee dk)^g = [\neg \neg (dh \vee dk)]^g \\ &= [d(h \vee k)]^g, \end{aligned}$$

como necessário. Para o quantificador existencial, (e).(1) acima e 1.3.17.(a) fornecem

$$\begin{aligned} d([\exists y h]^g) &= d(\neg \neg \exists y h^g) = \neg \neg \exists y d(h^g) = \neg \neg \exists y (dh)^g = (\exists y dh)^g \\ &= (\neg \neg \exists y dh)^g = [d(\exists y h)]^g, \end{aligned}$$

como necessário. ■

Definição 1.5.5 *Seja $(\cdot)^* : \eta\Omega\text{-cj} \longrightarrow \eta\Omega\text{-cj}$ o funtor definido pela composição*

$$(\cdot)^* = \eta \circ d,$$

onde η é o functor extensionalização da seção 1.4. O valor deste funtor em um objeto A e em um morfismo f de $\eta\Omega\text{-cj}$ será indicado por A^ e f^* , respectivamente.*

Note que A^ é o extensionalizado do Ω -conjunto dA construído acima. A^* vem acom-*

panhado de um morfismo. também indicado por $(\cdot)^* : A \longrightarrow A^*$, onde para $x \in |A|$

$$x^* = \eta\langle x, Ex \rangle.$$

Para facilitar a exposição, e não houver risco de confusão, indicaremos $\eta\langle x, u \rangle$ em $|A^*|$ por $\langle x, u \rangle$ (que na realidade está em $|dA|$).

Observação 1.5.6 (1) Como a passagem de dA para A^* é a extensionalização, note que para $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle \in dA$

$$\eta\langle x, u \rangle = \eta\langle y, v \rangle \quad \text{sse} \quad E\langle x, u \rangle = E\langle y, v \rangle = [\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle],$$

isto é,

$$u = v = u \wedge \neg\neg[x = y].$$

Assim, estamos identificando $\langle x, u \rangle$ e $\langle y, v \rangle$ toda vez que $[x = y]$ é denso em u .

(2) Segue da discussão na seção 1.4 que para $\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle \in A^*$ temos

$$[*] \quad [\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle]_{A^*} = [\langle x, u \rangle = \langle y, v \rangle]_{dA} = u \wedge v \wedge \neg\neg[x = y]_A.$$

Assim, em A^* , $E\langle x, u \rangle = u$. Como já mencionado anteriormente, omitiremos os índices quando não houver possibilidade de confusão. ■

Das Proposições 1.5.2 e 1.4.2 vem

Corolário 1.5.7 *Seja A um Ω -conjunto.*

a) *Se A é completo, o mesmo é verdade para A^* .*

b) *Se A é um pré-feixe sobre Ω , a prescrição*

$$\langle x, u \rangle|_p = \langle x|_p, p \wedge u \rangle.$$

define uma restrição, com a qual A^ é um pré-feixe sobre Ω e $\epsilon^* : A \longrightarrow A^*$ é um morfismo de pré-feixes.* ■

Para funções características, o item (b) do Lema 1.4.1 nos permite transferir o Teorema 1.5.4 para o funtor $*$. Antes a

Definição 1.5.8 *Sejam A um Ω -conjunto, $n \geq 0$ um natural e $h \in Ch(n, A)$. Com a notação 1.4.4.(a) e $[dch]$ (logo antes do Teorema 1.5.4), definimos*

$$h^* = \eta dh \in Ch(n, A^*).$$

Se $\vec{x} \in A^n$, definimos $\vec{x}^ := (x_1^*, \dots, x_n^*)$.*

O enunciado correspondente a 1.5.4 para o funtor $*$ é o

Corolário 1.5.9 *Seja A um Ω -conjunto e $n \geq 0$ um natural.*

a) $h \in Ch(n, A) \Rightarrow h^* \in Reg(Ch(n, A^*)).$

b) Se $h \in Reg(Ch(n, A)).$ então para todo $\vec{x} \in |A|^n$, $h(\vec{x}) = h^*(\vec{x}^*).$

c) A aplicação $h \mapsto h^*$ preserva $\perp$, $\top$, ínfimos finitos, negação e implicação. Além disso, para $\{h_i : i \in I\} \subseteq Ch(n, A)$

$$(1) (\bigvee h_i)^* = \neg\neg(\bigvee h_i^*);$$

$$(2) \text{ Para todo } \vec{x} \in |A|^n, [\bigwedge \sim\sim h_i]^*(\vec{x}^*) = [\bigwedge h_i^*](\vec{x}^*).$$

d) Se $h_i \in Reg(Ch(n, A)), i \in I$, então para todo $\vec{x} \in |A|^n$, $(\bigwedge h_i)^*(\vec{x}^*) = (\bigwedge h_i^*)(\vec{x}^*).$

e) Para toda $h \in Ch(n+1, A)$

$$(1) (\exists y h)^* = \neg\neg \exists y h^*; \quad (2) (\forall y \neg h)^* = \neg \exists y h^*; \quad (3) (\forall y \neg\neg h)^* = \forall y h^*.$$

f) Seja $S \subseteq Ch(A)$ e $S^* = \{h^* : h \in S\}$. Para toda $h \in \mathcal{L}^\sharp(S)$ (1.3.14)

$$(1) h^* \in \mathcal{L}^\sharp(S^*); \quad (2) (h^g)^* = (h^*)^g. \quad \blacksquare$$

Observação 1.5.10 (1) Note que **qualquer** estrutura que estiver definida em A pode ser estendida à A^* .

(2) Seja $S \subseteq Ch(A)$. Muito embora para $h \in \mathcal{L}^\sharp(S)$ tenhamos $h^g = \neg\neg h$ (1.3.17.(c)), a transformada de Gödel tem um papel importante na codificação da **preservação de sintaxe**. Assim, tanto 1.5.4.(f).(2), quanto 1.5.9.(f).(2), garantem que para fórmulas em $\mathcal{L}^\sharp$, a *sintaxe* é preservada na passagem através de $*$. Como um exemplo, seja $h \in S$. É verdade que

$$(\forall y \neg\neg h)^* = \neg\neg(\forall y h^*);$$

o que **não é verdade**, em geral, é que

$$(\forall y h)^* = \forall y h^* \quad \text{e} \quad \neg\neg(\forall y h)^* = \neg\neg \forall y h^*.$$

O exemplo em 1.1.6.(a) pode ser modificado para mostrar que a equação acima falha. A situação é diferente quando utilizamos a transformada de Gödel. A equação (caso particular de 1.5.9.(f).(2))

$$((\exists y h)^g)^* = ((\exists y h)^*)^g,$$

significa que $[\neg\neg \exists y \neg\neg h]^* = \neg\neg \exists y \neg\neg h^*$. A preservação de sintaxe é importante nas aplicações à Teoria dos Modelos e à Lógica, onde os valores de fórmulas complexas são determinados por indução a partir das atômicas. Assim, 1.5.9.(f).(e) garantem que $A \xrightarrow{*} A^*$ é um exemplo de morfismo elementar fraco (2.2.18.(5)). $\blacksquare$

Capítulo 2

O método dos Diagramas para L -estruturas em $pSh(\Omega)$

Neste capítulo generalizaremos o método dos diagramas de A. Robinson para pré-feixes de L -estruturas, onde L é uma linguagem de 1ª ordem com igualdade. Na Teoria dos Modelos Clássica, dada uma L -estrutura A , introduzimos para todo elemento $a \in |A|$ um novo símbolo de constante e obtemos uma nova linguagem L_A . O estudo das estruturas de L_A dá informações sobre a teoria de A , [7], [10].

Na versão usual de interpretação de uma linguagem de primeira ordem em um pré-feixe A , um símbolo de constante é interpretado por uma **seção global** de A , isto é, por um morfismo do objeto final $\{*\}$ da categoria $pSh(\Omega)$ no pré-feixe A . Está claro que um pré-feixe que não possua seções globais não pode ser domínio de interpretação de uma linguagem com constantes. Mais importante,

- * O diagrama construído apenas com nomes para as seções globais de um feixe dado A , não fornece - em geral - informações sobre a teoria de A ;
- * É impossível adaptar para pré-feixes que não possuem seções globais, o método de diagramas de A. Robinson.

Por isso, é necessário modificar a noção de símbolo de constante, introduzindo constantes que descrevam a noção de “*existência parcial*” característica dos pré-feixes. Para poder fazer isso, consideramos uma linguagem L de 1ª ordem que contém, além de símbolos relacionais e funcionais, um **pré-feixe** de símbolos de constantes C sobre $aHc \Omega$.

O interesse da idéia de admitir símbolos de constantes locais é sublinhada pela existência de feixes matematicamente importantes – são mesmo espaços de recobrimento –, que não possuem seção global (veja seção 2.1). Em seguida, definiremos a interpretação da nova linguagem em $pSh(\Omega)$, desenvolvendo o método das constantes neste contexto. Como aplicação, generalizamos os resultados clássicos de Robinson sobre diagramas atômicos e completos para pré-feixes sobre Ω e – como caso particular – sobre uma álgebra de Boole completa (aBc).

2.1 Espaços de recobrimentos sem seções globais

Exemplo 2.1.1 Seja $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o círculo com raio 1 no plano complexo $\mathbb{C}$ com a topologia induzida de $\mathbb{C}$. Definimos

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}.$$

$S := (\mathbb{R}, \varphi, S^1)$ é um espaço de recobrimento e também um feixe geométrico sobre S^1 . Note que S não pode ter seção global, pois não pode existir uma função contínua injetora de S^1 em $\mathbb{R}$. Para vermos isto, observe que se retirarmos um ponto de S^1 , este conjunto permanece conexo, mas que $\mathbb{R}$ menos um ponto é desconexo. ■

O Exemplo 2.1.1 pode ser generalizado para o tóro de dimensão n e para os espaços projetivos reais. Para isto, será necessário lembrar alguns resultados básicos de Topologia Algébrica.

Exemplo 2.1.2 Seja $n \geq 1$. Em $\mathbb{R}^n$, considere o subgrupo aditivo $\mathbb{Z}^n$. Podemos considerar o espaço quociente

$$T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

denominado o n -tóro, que vem acompanhado da projeção canônica

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n.$$

Na topologia de T^n um subconjunto é aberto sse sua imagem inversa por φ é aberto em $\mathbb{R}^n$. É conhecido que (veja [18])

- * φ é um homeomorfismo local;
- * $S^n := (\mathbb{R}^n, \varphi, T^n)$ é um espaço de recobrimento.
- * $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$, onde $\pi_1(T^n)$ é o grupo fundamental do n -tóro.

Como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, seu grupo fundamental é zero. Suponhamos agora que S^n contém uma seção global, isto é,

$$\exists s : T^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{tal que} \quad \varphi \circ s = id_{T^n}.$$

Como $\pi_1(\cdot)$ é um funtor covariante, obteríamos

$$\pi_1(\varphi) \circ \pi_1(s) = id_{\mathbb{Z}^n},$$

o que é impossível, pois $\pi_1(s) : \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$ não pode ser injetora. Assim, S^n não possui seções globais, muito embora contenha seções locais o suficiente para determinar a estrutura algébrica e topológica do n -tóro. ■

O próximo exemplo apresenta o caso dos espaços projetivos reais.

Exemplo 2.1.3 Sejam $n \geq 2$, S^n a n -esfera e $\mathbb{RP}^n$ o espaço projetivo, isto é: $S^n / \sim$, onde $\sim$ é a congruência que identifica os pontos antípodos. Seja

$$p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, x \mapsto [x]$$

a aplicação quociente canônica. $\mathcal{P} := (S^n, p, \mathbb{RP}^n)$ é um espaço de recobrimento. É conhecido (veja [18]) que o grupo fundamental do espaço projetivo é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}_2 := \{-1, 1\}$. Como S^n , para $n \geq 2$ é simplesmente conexo, temos que $\pi_1(S^n) = 0$. O mesmo raciocínio que em 2.1.2 mostra que $\mathcal{P}$ não possui seções globais. Como anteriormente, as seções locais contém toda informação estrutural, tanto algébrica quanto topológica desta importante construção geométrica. ■

Estes exemplos mostram a utilidade de modificar o conceito de interpretação dos símbolos de constantes em pré-feixes, constituindo-se na motivação para as noções apresentadas e desenvolvidas neste capítulo.

2.2 Linguagens com pré-feixes de constantes

Seja Ω uma álgebra de Heyting completa e C um pré-feixe sobre Ω .

Definição 2.2.1 *Uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e com constantes de C , L , é uma linguagem usual de primeira ordem com igualdade, onde o conjunto de constantes é $|C|$, o domínio de C .*

Se $n \geq 1$ é um natural, $\rho(n, L)$ é o conjunto dos símbolos relacionais n -ários de L e $op(n, L)$ é o conjunto dos símbolos funcionais n -ários de L .

As noções de variável livre e ligada, termo, fórmula e substituição livre de um termo numa fórmula são as mesmas que no caso clássico. Se τ é um termo e φ é uma fórmula de L , definimos

$$\begin{cases} E\tau = \bigwedge \{Ec : c \text{ ocorre em } \tau\} \\ E\varphi = \bigwedge \{Ec : c \text{ ocorre em } \varphi\}, \end{cases}$$

denominados a **extensão** de τ e φ relativamente a L .

Se τ é um termo e φ é uma fórmula de L e $p \in \Omega$, indicamos por

$$\tau|_p \quad \text{e} \quad \varphi|_p$$

o termo ou a fórmula obtidos a partir de τ e φ , respectivamente, substituindo-se cada ocorrência de um símbolo $c \in |C|$ pelo símbolo $c|_p$; é fácil ver que $\tau|_p$ é um termo e $\varphi|_p$ é uma fórmula de L , de mesma complexidade que τ e φ , respectivamente, denominados **restrição** de τ e φ a p .

Note que se um termo τ ou uma fórmula φ de L não possuem ocorrências de símbolos de $|C|$, então $\tau|_p$ e $\varphi|_p$ são idênticos a τ e φ , respectivamente, qualquer que seja $p \in \Omega$. A prova do seguinte resultado é consequência das definições :

Lema 2.2.2 *Sejam $\tau(x_1, \dots, x_m)$, $\tau_1, \dots, \tau_m$ termos de L , $\omega \in op(m, L)$, $R \in \rho(m, L)$ e φ, ψ fórmulas de L . Seja C o pré-feixe de constantes de L e $p \in \Omega$.*

- a) $E\varphi|_p = \bigwedge \{p \wedge Ec : c \in |C| \text{ e } c \text{ ocorre em } \varphi\}$.
- b) Se não há ocorrências de elementos de $|C|$ em φ e em τ , então $E\tau = E\varphi = \top$ (o maior elemento de Ω).
- c) Se $t = \omega(\tau_1, \dots, \tau_m)$, então $Et = ER(\tau_1, \dots, \tau_m) = \bigwedge_{i=1}^m E\tau_i$.
- d) $E(\varphi \diamond \psi) = E\varphi \wedge E\psi$, onde $\diamond$ representa um conectivo binário de L .
- e) $E\neg\varphi = E\forall v\varphi = E\exists v\varphi = E\varphi$ e $E\bigvee\psi_i = \bigwedge E\psi_i = E\bigwedge\psi_i$.
- f) Se $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ e χ é o resultado da substituição de x_i por τ_i em φ , $1 \leq i \leq m$, então $E\chi = E\varphi \wedge \bigwedge_{i=1}^m E\tau_i$. ■

Podemos estender a noção de interpretação para uma linguagem que contém um pré-feixe sobre Ω como símbolos de constantes.

Definição 2.2.3 (Interpretação) *Seja Ω uma aHc, C um pré-feixe sobre Ω e L uma linguagem de 1ª ordem com igualdade, onde C é o pré-feixe de constantes de L . Uma interpretação de L em $pSh(\Omega)$ consiste de um pré-feixe A sobre Ω juntamente com*

1. Para cada símbolo relacional $R \in \rho(n, L)$, distinto de $=$, uma função característica

$$[R(\cdot, \dots, \cdot)]_A : |A|^n \longrightarrow \Omega, \quad \vec{a} \mapsto [R(\vec{a})]_A;$$

2. A interpretação do símbolo de igualdade é a igualdade de A ;

3. Para todo símbolo funcional n -ário $\omega \in op(n, L)$, um morfismo de pré-feixes

$$\omega^A : A^n \longrightarrow A, \quad \vec{a} \mapsto \omega^A(\vec{a}) := \omega^{A(E\vec{a})}(\vec{a});$$

4. Um morfismo de pré-feixes,

$$(\cdot)^A : C \longrightarrow A, \quad c \mapsto c^A,$$

denominado a interpretação dos símbolos de constantes em A . Assim, se $c, c' \in |C|$ e $p \in \Omega$, temos

$$Ec^A = Ec, \quad [c^A = c'^A]_A \geq [c = c']_C \quad \text{e} \quad (c|_p)^A = (c^A)|_p.$$

Um pré-feixe A sobre Ω , juntamente com uma interpretação de L em A , denomina-se uma **L -estrutura** em $pSh(\Omega)$.

Observação 2.2.4 1. Se $S \subseteq |C|$ é uma família compatível em C e A é uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, segue do fato que $c \mapsto c^A$ é um morfismo de pré-feixes que $\{c^A : c \in S\}$ é uma família compatível de seções em A .

2. Poderíamos generalizar ainda mais a nossa construção, considerando **pré-feixes de linguagens** e as interpretações correspondentes.

3. Outra generalização seria considerar constantes que são o domínio de um pré-feixe arbitrário.

4. Embora (2) e (3) indiquem direções interessantes de pesquisa, deixamos desenvolver estas idéias neste momento pois parecem não contribuir para a compreensão do nosso

objetivo principal : a generalização para a lógica dos pré-feixes do método de diagramas devido originalmente à Abraham Robinson. ■

Antes de mostrar como adaptar as noções de interpretação de termos e fórmulas em [31] e [32] ao novo contexto, provaremos que as definições acima generalizam a noção usual de interpretar constantes como seções globais. Há muitas maneiras de obter este resultado. A que escolhemos vale também no caso geral em que a álgebra de base é de Heyting, mas não completa.

Seja D um conjunto e Ω uma aHc. Indicamos por $F \subseteq_f D$ que F é um subconjunto finito (eventualmente vazio) de D . Definimos

$$T(D, \Omega) = \left\{ D \xrightarrow{s} \Omega : \begin{array}{l} \forall d, d' \in D, d \neq d', s(d) \wedge s(d') = \perp \text{ e} \\ \exists F \subseteq_f D \text{ tal que } \forall a \notin F, s(a) = \perp \end{array} \right\},$$

o conjunto das funções “quase nulas” de D em Ω , cuja imagem é uma partição de algum elemento de Ω . Para $s, t \in T(D, \Omega)$, definimos

$$[s = t] = \bigvee_{d \in D} s(d) \wedge t(d). \quad (*)$$

Note que o supremo em (*) é, na realidade, finito. Note também que para $s \in T(D, \Omega)$,

$$Es = [s = s] = \bigvee_{d \in D} s(d). \quad (+)$$

Para $s \in T(D, \Omega)$ e $p \in \Omega$, seja $s|_p : D \rightarrow \Omega$, dada, para $d \in D$, por

$$s|_p(d) = p \wedge s(d). \quad (**)$$

Para cada $d \in D$, seja $\check{d} : D \rightarrow \Omega$ dada por

$$\check{d}(a) = \begin{cases} \top & \text{se } a = d \\ \perp & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (a \in D)$$

Está claro que $\check{d} \in T(D, \Omega)$, com $E\check{d} = \top$. Além disso, a função $D \ni d \mapsto \check{d} \in |T(D, \Omega)|$ é uma bijeção entre D e $\check{D} := \{\check{d} : d \in D\}$.

Lema 2.2.5 *Com a notação acima, $T(D, \Omega)$ é um pré-feixe extensional sobre Ω e $\check{D}$ é um subconjunto denso de seções globais de $T(D, \Omega)$. Assim, para todo pré-feixe extensional A sobre Ω , os morfismos de $T(D, \Omega)$ em A estão em correspondência natural e biunívoca com as funções de D nas seções globais de A .*

Demonstração: A prova de que $T(D, \Omega)$ é um pré-feixe ¹ sobre Ω é um cálculo simples a partir das definições. Está claro que $\check{D}$ é um subconjunto das seções globais de $T(D, \Omega)$. A extensionalidade é consequência do fato que os valores dos elementos de $T(D, \Omega)$ são dois a dois disjuntos. Se $Es = Et = [s = t]$ em $T(D, \Omega)$, então

$$\bigvee_{a \in D} s(a) = \bigvee_{a \in D} s(a) \wedge t(a). \quad (I)$$

Fixado $d \in D$, tomando o ínfimo com $s(d)$ de ambos os lados de (I) obtemos

¹ Na realidade, um Ω -conjunto finitamente completo.

$$s(d) = s(d) \wedge t(d),$$

e portanto $s(d) \leq t(d)$. Como $d \in D$ é arbitrário e o raciocínio é simétrico em s e t , concluímos que $s = t$. Resta mostrar que $\check{D}$ é denso em $T(D, \Omega)$, isto é, que para todo $s \in |T(D, \Omega)|$ temos

$$Es = \bigvee_{d \in D} [s = \check{d}].$$

Note que para cada $d \in D$, $(*)$ fornece

$$[s = \check{d}] = \bigvee_{a \in D} s(a) \wedge \check{d}(a) = s(d) \wedge \top = s(d).$$

Portanto,

$$\bigvee_{d \in D} [s = \check{d}] = \bigvee_{d \in D} s(d) = Es,$$

como desejado. Segue agora do ítem (c) do Lema 3, p. 194, em [32] que os morfismos de $T(D, \Omega)$ em qualquer pré-feixe extensional estão determinados por seus valores em $\check{D}$. Mas então a bijeção canônica entre D e $\check{D}$ induz uma correspondência natural e biunívoca entre os morfismos de $T(D, \Omega)$ em um pré-feixe extensional A sobre Ω e as funções de D nas seções globais de A . ■

Seja L uma linguagem de primeira ordem usual e seja D o conjunto de símbolos de constante em L . Se A é um pré-feixe sobre Ω , toda interpretação de L em A contém uma função de D nas seções globais de A . Pelo Lema 2.2.5, esta função corresponde a um **único** morfismo de pré-feixes de $T(D, \Omega)$ em A e vice-versa. Assim, a definição usual pode ser obtida a partir de 2.2.3 utilizando a linguagem que tem os mesmos símbolos relacionais e funcionais que L , mas cujo conjunto de constantes é o pré-feixe $T(D, \Omega)$.

Definição 2.2.6 (interpretação de L -termos em A) *Seja A um pré-feixe de L -estruturas. Cada termo $\tau(v_1, \dots, v_n)$ em L induz um morfismo de pré-feixes*

$$\tau^A : A^n|_{E\tau} \longrightarrow A,$$

(onde $E\tau$ é a extensão de τ , 2.2.3), denominado **interpretação de τ em A** , definido por indução na complexidade da seguinte forma, onde $\vec{a} \in |A|_{E\tau}|^n$:

1. Se τ é v_i , então $E\tau = \top$ e τ^A é a projeção na i -ésima coordenada, isto é, $v_i^A(\vec{a}) = a_i$.
2. Se τ é $c \in |C|$, então para cada $p \leq Ec$, $c^A(p) = c^A|_p$.²
3. Sejam $\tau_1(\vec{v}), \dots, \tau_m(\vec{v})$ L -termos, $\omega \in op(m, L)$ e $\tau(\vec{v}) := \omega(\tau_1(\vec{v}), \dots, \tau_m(\vec{v}))$. Como $E\tau = \bigwedge_{i=1}^m E\tau_i$ (Lema 2.2.2.(b)), podemos definir,

$$\tau^A(\vec{a}) = \omega^A(\tau_1^A(\vec{a}), \dots, \tau_m^A(\vec{a})).$$

A nossa definição de interpretação de termos é bem comportada como mostra o

² Neste caso, $n = 0$ e $E\tau = Ec$. A restrição do objeto final $\{*\}$ a Ec é (isomorfa a) o conjunto dos elementos de Ω que são debaixo de Ec , com igualdade dada pelo ínfimo binário. Portanto, c^A pode ser identificado com o morfismo $p \leq Ec \mapsto c^A|_p$. A expressão em (2) indica uma extensão canônica deste morfismo ao domínio de $\{*\}$, isto é, Ω .

Lema 2.2.7 *Seja A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$. Sejam $s(v_1, \dots, v_m) \in t_1(\vec{v}), \dots, t_m(\vec{v})$ L -termos, onde $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Seja $\tau = s(t_1, \dots, t_m) \in p = Es \wedge \bigwedge_{i=1}^m Et_i = E\tau$. Então, para $a_1, \dots, a_n \in |A|_p$*

$$\tau^A(\vec{a}) = s^A(t_1^A(\vec{a}), \dots, t_m^A(\vec{a})).$$

Demonstração: Segue facilmente da Definição 2.2.6 e indução na complexidade. ■

Definição 2.2.8 (interpretação de L -fórmulas em A) *Seja A um pré-feixe de L -estruturas sobre Ω . Por indução na complexidade, a cada L -fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ associamos uma função característica*

$$[\varphi(\cdot, \dots, \cdot)]_A : |A|^n \longrightarrow \Omega$$

denominada **interpretação de φ em A** , da forma seguinte : para $a_1, \dots, a_n \in |A|$,

1. **[atom]** : Se $\tau_1(\vec{v}), \dots, \tau_m(\vec{v})$ são termos e $R \in \rho(m, L)$,

$$\begin{cases} [(\tau_1(\vec{v}) = \tau_2(\vec{v}))(\vec{a})]_A & := [\tau_1^A(\vec{a}|_p) = \tau_2^A(\vec{a}|_p)]_A & \text{onde } p = E\tau_1 \wedge E\tau_2; \\ [R(\tau_1, \dots, \tau_m)(\vec{a})]_A & := [R(\tau_1^A(\vec{a}|_q), \dots, \tau_m^A(\vec{a}|_q))]_A & \text{onde } q = \bigwedge_{i=1}^m E\tau_i. \end{cases}$$

2. **[con]** : Para $\varphi, \psi \in L$, seja $p = E\varphi$ e $q = E\varphi \wedge E\psi$. Então

$$\begin{cases} [\neg \varphi(\vec{a})]_A & := E\vec{a}|_p \wedge \neg[\varphi(\vec{a}|_p)]_A; \\ [(\varphi \diamond \psi)(\vec{a})]_A & := E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(\vec{a}|_q)]_A \diamond [\psi(\vec{a}|_q)]_A), \end{cases}$$

onde $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

3. **[$\vee, \wedge$]** : Se L possui conectivos infinitários $\vee$ e $\wedge$, definimos:

$$[\bigvee_{i \in I} \psi_i(\vec{a})]_A := \bigvee_{i \in I} [\psi_i(\vec{a}|_{E\psi_i})]_A \quad \text{e} \quad [\bigwedge_{i \in I} \psi_i(\vec{a})]_A := \bigwedge_{i \in I} [\psi_i(\vec{a}|_{E\psi_i})]_A,$$

onde $\vee, \wedge$ no lado direito das equações são o supremo e o ínfimo em Ω .

4. **[$\exists$]** : $[\exists x \varphi(x, \vec{a})]_A := \bigvee_{t \in |A|} [\varphi(t; \vec{a})]_A$.

5. **[$\forall$]** : $[\forall x \varphi(x, \vec{a})]_A := E\varphi \wedge E\vec{a} \wedge \bigwedge_{t \in |A|} (Et \rightarrow [\varphi(t; \vec{a})]_A)$.

Quando o pré-feixe de L -estruturas A estiver claro do contexto, omitiremos sua menção da notação.

É imediato de 2.2.8 que para toda fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ em L e $a_1, \dots, a_n \in |A|$,

$$[\varphi(a_1, \dots, a_n)] \leq E\varphi \wedge E\vec{a}.$$

Em particular, se σ é uma sentença de L , temos $[\sigma] \leq E\sigma$.

O resultado correspondente à 2.2.7 para fórmulas é a

Proposição 2.2.9 *Seja A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$. Sejam $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ uma L -fórmula e $t_1(\vec{v}), \dots, t_m(\vec{v})$ L -termos, onde $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Suponha que t_i é livre para*

x_i em φ , $1 \leq i \leq m$. ϵ seja $\varphi(t_1, \dots, t_m)$ o resultado da substituição de x_i por $t_i(\vec{v})$ em φ . Se $p = \bigwedge_{i=1}^m Et_i$, então para $a_1, \dots, a_n \in |A|$ temos

$$[\varphi(t_1, \dots, t_m)(\vec{a})] = [\varphi(t_1^A(\vec{a}|_p), \dots, t_m^A(\vec{a}|_p))]. \quad (*)$$

Demonstração: Para $a_1, \dots, a_n \in |A|$, seja $\vec{c} = \vec{a}|_p$; note que

$$E\vec{c} = p \wedge E\vec{a} = p \wedge \bigwedge_{i=1}^m Ea_i \leq p. \quad (I)$$

Como o domínio de cada t_i é $|A|_{Et_i}^n$, está claro que o lado direito de $(*)$ tem sentido, isto é, podemos calcular $t_i^A(\vec{c})$, $1 \leq i \leq m$.

A prova de $(*)$ será por indução na complexidade das L -fórmulas.

[atom] : Suponha que φ é a fórmula atômica $s_1(x_1, \dots, x_m) = s_2(x_1, \dots, x_m)$, com s_1 e s_2 L -termos e $q := Es_1 \wedge Es_2$. O Lema 2.2.7 nos fornece

$$\begin{aligned} [\varphi(t_1, \dots, t_m)(\vec{a})] &= [s_1(t_1, \dots, t_m)^A(\vec{c}|_q) = s_2(t_1, \dots, t_m)^A(\vec{c}|_q)] \\ &= [s_1^A(t_1^A(\vec{c}|_q), \dots, t_m^A(\vec{c}|_q)) = s_2^A(t_1^A(\vec{c}|_q), \dots, t_m^A(\vec{c}|_q))] \\ &= [(s_1 = s_2)(t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))]. \end{aligned}$$

A prova para os outros tipos de fórmulas atômicas é análoga e será omitida. A passagem através dos conectivos proposicionais segue por indução e do fato que as interpretações de L -termos são morfismos de pré-feixes.

[$\exists$] : Suponha que $\varphi(\vec{x}) = \exists v \psi(v; \vec{x})$. Então

$$[\exists v \psi(v; t_1, \dots, t_m)(\vec{a})] = \bigvee_{b \in |A|} [\psi(v; t_1, \dots, t_m)(b; \vec{a})]. \quad (II)$$

Como $[\psi(v; t_1, \dots, t_m)(\cdot)]$ é uma função característica, a propriedade [ch 1] e o Lema 1.3.6.(a) garantem que para todo $b \in |A|$, se $q_b = Eb \wedge E\vec{c} \wedge E\psi$,

$$[\psi(v; t_1, \dots, t_m)(b|_{q_b}; \vec{a}|_{q_b})] = q_b \wedge [\psi(v; \vec{t})(b; \vec{a})] = [\psi(v; \vec{t})(b; \vec{a})]. \quad (III)$$

Uma vez que $Ev = \top$ (2.2.2.(b)) e (I) implica $q_b = Eb \wedge E\vec{c} \wedge E\psi \leq p$, obtemos que $Ev \wedge p = p$. Podemos, então, aplicar a hipótese de indução à fórmula ψ , à $(m+1)$ -úpla $(v; t_1, \dots, t_m)$ de termos em L e à $(m+1)$ -úpla de elementos de $|A|$ dada por $(b|_{q_b}; \vec{a}|_{q_b})$. De (III), 1.3.6.(a) e do fato que a interpretação de um termo é um morfismo de pré-feixes, obtemos

$$\begin{aligned} [\psi(v; \vec{t})(b; \vec{a})] &= [\psi(v; t_1, \dots, t_m)(b|_{q_b}; \vec{a}|_{q_b})] = [\psi(b|_{q_b}; t_1^A(\vec{a}|_{q_b}), \dots, t_m^A(\vec{a}|_{q_b}))] \\ &= [\psi(b|_{q_b}; t_1^A(\vec{c})|_{q_b}, \dots, t_m^A(\vec{c})|_{q_b})] = q_b \wedge [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))] \\ &= Eb \wedge E\vec{c} \wedge E\psi \wedge [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))] = [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))]. \end{aligned}$$

Esta igualdade, substituída em (II) fornece

$$\begin{aligned} [\exists v \psi(v; t_1, \dots, t_m)(\vec{a})] &= \bigvee_{b \in |A|} [\psi(v; t_1, \dots, t_m)(b; \vec{a})] \\ &= \bigvee_{b \in |A|} [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))] \end{aligned}$$

$$= [\exists v \psi(v)(t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))],$$

como necessário.

$[\forall]$: Suponha que $\varphi(\vec{x}) = \forall v \psi(v; \vec{x})$. Exatamente como no caso $[\exists]$, podemos mostrar que para todo $b \in |A|$

$$[\psi(v; \vec{t})(b; \vec{a})] = [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))]. \quad (\text{IV})$$

Note que pelos itens (e) e (f) do Lema 2.2.2

$$E\psi(v; t_1, \dots, t_m) = E\psi(v; \vec{x}) \wedge \bigwedge_{i=1}^m Et_i = E\psi(v; \vec{x}) \wedge p. \quad (\text{V})$$

Como $E\vec{c} \leq p$, (V) implica que

$$E\psi(v; t_1, \dots, t_m) \wedge E\vec{a} = E\psi(v; \vec{x}) \wedge p \wedge E\vec{a} = E\psi(v; \vec{x}) \wedge E\vec{c}. \quad (\text{VI})$$

Logo, a cláusula $[\forall]$ em 2.2.8 e as equações (IV) e (VI) acima fornecem

$$\begin{aligned} [\forall v \psi(v; t_1, \dots, t_m)(\vec{a})] &= E\psi(v; t_1, \dots, t_m) \wedge E\vec{a} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} Eb \rightarrow [\psi(v; \vec{t})(b; \vec{a})] \\ &= E\psi(v; \vec{x}) \wedge E\vec{c} \wedge \bigwedge_{b \in |A|} Eb \rightarrow [\psi(b; t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))] \\ &= [\forall v \psi(v)(t_1^A(\vec{c}), \dots, t_m^A(\vec{c}))], \end{aligned}$$

terminando a prova. ■

Observação 2.2.10 Como consequência imediata de 2.2.9, se $c_1, \dots, c_m$ são constantes em $|C|$ e $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ é uma fórmula em L , $\sigma := \varphi(c_1, \dots, c_m)$ é uma sentença em L então temos

$$(*) \quad [\sigma] = [\varphi(c_1^A, \dots, c_m^A)]. \quad \blacksquare$$

Observação 2.2.11 A Lógica Intuicionista de primeira ordem tem a seguinte axiomatização ([22], [23], [39]) :

Esquemas Proposicionais : Se φ, ψ, χ são fórmulas

- I. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- II. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$;
- III. $\varphi \rightarrow [\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)]$;
- IV. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$; $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$;
- V. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$; $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
- VI. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)]$;
- VII. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi]$;
- VIII. $\neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

IX. Se t é um termo livre para x em φ , então

$$\text{IXa. } \varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi; \quad \text{IXb. } \forall x \varphi \rightarrow \varphi(t).$$

Regras de Dedução :

$$[\text{MP}] \quad \frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

$$[\exists] \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi}$$

$$[\forall] \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x \psi}$$

onde, em $[\exists]$ x não ocorre livre em ψ e em $[\forall]$ x não ocorre livre em φ .

Os axiomas para igualdade são os usuais, isto é, se x, y são variáveis, $\tau(v_1, \dots, v_n)$ um L -termo e $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma L -fórmula atômica, então:

$$[= 1] : x = x;$$

$$[= 2] : (x = y) \rightarrow [\tau(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) = \tau(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_n)]$$

$$[= 3] : (x = y) \rightarrow [\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) \rightarrow \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_n)]$$

Se Σ é um conjunto de fórmulas em L ,

$$\Sigma \vdash_I \varphi$$

indica que φ é consequência lógica de Σ no sistema acima descrito.

Para obter o Cálculo Clássico, basta substituir o esquema (VIII) por

$$\text{VIII}' : \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$$

Indicamos por $\Sigma \vdash_C \varphi$ o fato que φ é consequência clássica de Σ . Admitiremos que o leitor tenha familiaridade com os resultados fundamentais de Teoria da Prova, em particular o Teorema da Dedução, para estes sistemas, como encontrados, por exemplo, nas referências citadas acima. ■

Como no caso em que constantes são interpretadas como seções globais temos o

Teorema 2.2.12 *Sejam A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$ e $\Sigma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de sentenças em L . Então*

$$\Sigma \vdash_I \varphi \quad \Rightarrow \quad \bigwedge_{\sigma \in \Sigma} [\sigma]_A \leq [\varphi]_A.$$

Demonstração: Por indução no comprimento de uma prova de φ a partir de Σ , depois de verificar que as regras de dedução são corretas. Omitimos os detalhes³. ■

A mesma prova que em [31] (usando o Lema 1.1.7) nos fornece

Teorema 2.2.13 *(O princípio do máximo) Sejam A uma L -estrutura em $Sh(\Omega)$ e $\exists x \varphi(x; \vec{v})$ uma fórmula de L . Então existe $t \in |A|$ tal que*

$$[\varphi(t; \vec{a})] \leq [\exists x \varphi(\vec{a})] \leq \neg\neg [\varphi(t; \vec{a})].$$

A próxima definição codifica a noção de **forcing** ou **satisfação intuicionista** :

Definição 2.2.14 *Seja A um pré-feixe de L -estruturas sobre Ω .*

³ A correção das regras de dedução são consequência do Lema 1.3.11.

a) Sejam $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma L -fórmula e $a_1, \dots, a_n \in |A|$. Dizemos que A **força** φ em $a_1, \dots, a_n$ e escrevemos

$$A \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

se $[\varphi(a_1, \dots, a_n)] = E\varphi \wedge E\vec{a}$.

b) Seja σ é uma L -sentença. Dizemos que A é **modelo** de σ e escrevemos

$$A \Vdash \sigma$$

se $[\sigma] = E\sigma$.

c) Seja Σ um conjunto de L -sentenças. $\Lambda(v_1, \dots, v_n)$ um conjunto de L -fórmulas nas variáveis $v_1, \dots, v_n$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|$. Então, as expressões

$$A \Vdash \Sigma \quad \text{e} \quad A \Vdash \Lambda[a_1, \dots, a_n]$$

significam que $A \Vdash \sigma$ e $A \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n]$, para toda $\sigma \in \Sigma$ e $\varphi \in \Lambda$.

O próximo resultado é consequência do Lema 1.3.6. Sua prova é deixada aos cuidados do leitor.

Corolário 2.2.15 *Seja A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula e σ uma sentença em L .*

a) *Se $r \leq q$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|$ então*
$$\begin{cases} A \Vdash \varphi[\vec{a}|_q] & \text{implica} & A \Vdash \varphi[\vec{a}|_r]; \\ A \Vdash \sigma|_q & \text{implica} & A \Vdash \sigma|_r. \end{cases}$$

b) *Se $a_1, \dots, a_n \in |A|$ e $p = [\varphi(a_1, \dots, a_n)]$, então* $A \Vdash \varphi[\vec{a}|_p]$.

c) *Se $a_1, \dots, a_n \in |A|$, então*

$$[\varphi(a_1, \dots, a_n)] = \bigvee \{q \leq E\varphi \wedge E\vec{a} : A \Vdash \varphi[\vec{a}|_q]\}.$$

d) *$A \Vdash \sigma|_{[\sigma]}$. Além disso, $[\sigma] = \bigvee \{q \leq E\sigma : A \Vdash \sigma|_q\}$.* ■

Definição 2.2.16 *Seja L uma linguagem de primeira ordem como acima. Indicamos por $L^\sharp$ o conjunto de todas as fórmulas de L que são equivalentes, no sistema intuicionista de 2.2.11, às formulas construídas a partir das atômicas utilizando os conectivos proposicionais e o quantificador existencial.*

Observação 2.2.17 Podemos definir a **transformada de Gödel** de fórmulas em L e $L^\sharp$. O processo indutivo é o mesmo que em 1.3.15 e omitimos os detalhes. ■

Definição 2.2.18 *Seja L uma linguagem como acima. Sejam A, B L -estruturas em $pSh(\Omega)$ e $f : A \rightarrow B$ um morfismo de pré-feixes. Para $a_1, \dots, a_n \in |A|$, definimos*

$$f(\vec{a}) := (fa_1|_{E\vec{a}}, \dots, fa_n|_{E\vec{a}}).$$

(1) *f é um **L -morfismo** se para todo $n \geq 1$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|$*

$$(a) \forall R \in \rho(n, L). \quad [R(\vec{a})]_A \leq [R(f(\vec{a}))]_B;$$

$$(b) \forall \omega \in op(n, L). \quad (f \circ \omega^A)(\vec{a}|_{E\vec{a}}) = \omega^B(f(\vec{a}));$$

$$(c) \forall c \in |C|, \quad f(c^A) = c^B.$$

(2) f é um ***L-monomorfismo fraco***, se f é um *L-morfismo* e $\forall n \geq 1, R \in \rho(n, L)$ (*inclusive* $\Rightarrow$) e $\vec{a} \in |A|^n$

$$\neg\neg[R(\vec{a})]_A = \neg\neg[R(f(\vec{a}))]_B.$$

(3) f é um ***L-monomorfismo***, se f é um *L-morfismo* e $\forall n \geq 1, R \in \rho(n, L)$ (*inclusive* $\Rightarrow$) e $\vec{a} \in |A|^n$

$$[R(\vec{a})]_A = [R(f(\vec{a}))]_B.$$

(4) f é um ***L-isomorfismo***, se existir um *L-morfismo* $g : B \rightarrow A$ tal que

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

(5) f é um ***L-monomorfismo elementar fraco***, se f é *L-morfismo* e para toda *L-fórmula* $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $\vec{a} \in |A|^n$

$$[\varphi^g(\vec{a})]_A = [\varphi^g(f(\vec{a}))]_B.$$

onde φ^g é a transformada de Gödel de φ (2.2.17).

(6) f é um ***L-monomorfismo elementar***, se para toda *L-fórmula* $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e para todo $\vec{a} \in |A|^n$

$$[\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(f(\vec{a}))]_B.$$

Observação 2.2.19 Seja H uma álgebra de Heyting e $a, b, c \in H$, tais que $a, b \leq c$. Segue imediatamente de 1.1.2 que

$$\neg\neg a \wedge c = \neg\neg b \wedge c \quad \text{sse} \quad \neg\neg a = \neg\neg b.$$

Portanto, na definição das versões fracas de morfismo em 2.2.18, a definição dada é equivalente a colocarmos a negação dentro do valor. Por exemplo, f é um *L-monomorfismo fraco* sse para toda fórmula atômica φ de L e $\vec{a} \in |A|^n$

$$[\neg\neg\varphi(\vec{a})]_A = [\neg\neg\varphi(f(\vec{a}))]_B. \quad \blacksquare$$

2.3 Extensões por pré-feixes de constantes

Nas construções desta seção precisaremos da noção de **coproduto** de pré-feixes.

Lembramos que $*$ indica a única seção de um pré-feixe sobre $\perp \in \Omega$. Se C, D são Ω -conjuntos, definimos um Ω -conjunto $C \amalg D$ pelas seguintes cláusulas :

$$(i) |C \amalg D| = [(|C| \setminus \{*\}) \times \{0\}] \cup [(|D| \setminus \{*\}) \times \{1\}] \cup \{*\};$$

$$(ii) \text{ Para } i, j = 0, 1$$

$$[(x, i) = (y, j)] = \begin{cases} [x = y] & \text{se } i = j \\ \perp & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A prova do próximo resultado vem diretamente das definições :

Lema 2.3.1 *a) Se C e D são Ω -conjuntos então $C \amalg D$ é um Ω -conjunto, que é extensional sse C e D são extensionais. Se C e D são pré-feixes sobre Ω , então a definição*

$$(x, i)|_p = (x|_p, i) \quad (i = 0, 1)$$

torna $C \amalg D$ um pré-feixe sobre Ω . Além disso, $C \amalg D$ é um feixe sobre Ω sse o mesmo é verdade para C e D .

b) Se A é um Ω -conjunto existe uma correspondência natural e biunívoca entre morfismos de $(C \amalg D)$ em A e pares (α, β) onde α é um morfismo de C em A e β é um morfismo de D em A . ■

Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade e cuja coleção de símbolos constantes é um pré-feixe C sobre a aHc Ω . Se D é um pré-feixe sobre Ω , indicamos por L_D a extensão de L , obtida tomando-se como coleção de símbolos de constantes o **coproduto** $C \amalg D$, de C e D .

A propriedade universal em 2.3.1.(b) garante que a cláusula em 2.2.3 relativa à interpretação das constantes de L_D num pré-feixe E é equivalente à existência de um par de morfismos de pré-feixes (α, β) , onde $\alpha : C \rightarrow E$ e $\beta : D \rightarrow E$. A prova do seguinte resultado segue facilmente destas observações.

Lema 2.3.2 *Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade e com C como pré-feixe de constantes. Se D é um pré-feixe sobre Ω e M é uma L -estrutura, então existe uma correspondência natural e biunívoca entre L_D -estruturas em M e o conjunto dos morfismos de pré-feixes de D em M .* ■

Um caso particular importante de expansão por constantes origina-se quando damos nomes para todas as seções de uma L -estrutura A . Para sermos precisos e não confundirmos o nome de uma seção de A , um ente sintático, com a seção propriamente dita, introduzimos a notação abaixo.

Se A é uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, definimos um pré-feixe $\underline{A}$ sobre Ω pelas seguintes condições :

* $|\underline{A}| = \{\underline{a} : a \in |A| \setminus \{*\}\}$ é um conjunto disjunto de $|A|$;⁴

* Para $a, b \in |A|$ e $p \in \Omega$

$$- [\underline{a} = \underline{b}] = [a = b];$$

$$- \underline{a}|_p = \underline{a|_p}.$$

⁴ * é a única seção sobre $\perp \in \Omega$.

$\underline{A}$ é um pré-feixe extensional sobre Ω e a função $|\underline{A}| \ni \underline{a} \mapsto a \in |A|$ é um isomorfismo de pré-feixes. O pré-feixe $\underline{A}$ denomina-se **pré-feixe de nomes** para os elementos de $|A|$. Indicamos por L_A a linguagem L estendida pelo pré-feixe $\underline{A}$ (como acima). O Lema 2.3.2 mostra que para tornar uma L -estrutura M uma L_A -estrutura é suficiente dar um morfismo de pré-feixes de $\underline{A}$ em M . É evidente que os morfismos de $\underline{A}$ em M correspondem bijectivamente aos morfismos de A em M . Como é standard em Teoria dos Modelos, firmamos a

Notação 2.3.3. Em tudo que segue A será considerada uma L_A -estrutura via o morfismo $\underline{a} \mapsto a$, isto é, para cada $a \in |A|$, $\underline{a}^A = a$. Utilizaremos a notação

$$\tilde{A} = (A, a)_{a \in |A|}$$

para indicar que A está sendo considerada como L_A -estrutura. Em geral, se B é uma L -estrutura e $f : A \rightarrow B$ é um morfismo,

$$\tilde{B} = (B, fa)_{a \in |A|}$$

indica a extensão de B à uma L_A -estrutura, interpretando $\underline{a}$ por fa .

Se τ é um termo e φ é uma fórmula de L_A , os símbolos

$$\tau(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \quad \text{e} \quad \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n),$$

indicam a lista completa das constantes de $\underline{A}$ que ocorrem em τ e φ . ■

Lema 2.3.4 *Seja $\tilde{M} = (M, \underline{a})_{a \in |A|}$ uma expansão da L -estrutura M à uma L_A -estrutura e $\sigma(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ uma sentença de L_A . Então*

$$\tilde{M} \models \sigma(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \quad \text{sse} \quad M \models \sigma[\underline{a}_1^M, \dots, \underline{a}_n^M].$$

Demonstração: Indução na complexidade. ■

2.4 Os diagramas de uma L -estrutura

Nesta seção iremos mostrar que valem resultados análogos aos clássicos para o diagrama e o diagrama completo de uma L -estrutura, com uma diferença importante, originária de estarmos tratando de estruturas intuicionistas : devemos usar o conceito **fraco** de L -monomorfismo e L -monomorfismo elementar. Na próxima seção trataremos de construir o análogo de proporcionalidade própria do caso clássico. A equivalência do Lema 2.3.4 será utilizada sem menção explícita.

Definição 2.4.1 *Seja A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$.*

a) *O diagrama positivo de A , Δ_A^+ , é o conjunto de todas as L_A -sentenças atômicas que são forçadas por $\tilde{A}$.*

b) *O diagrama de A , Δ_A , é o conjunto de todas as L_A -sentenças atômicas e negações de sentenças atômicas, forçadas por $\tilde{A}$.*

Lema 2.4.2 *Sejam A e B L -estruturas em $pSh(\Omega)$ e $f : |A| \longrightarrow |B|$ uma função que preserva extensões, isto é, $Efa = Ea$, para todo $a \in |A|$. As seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *f é um L -morfismo (2.2.18);*
- (2) *Para toda fórmula atômica $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $\vec{a} \in |A|^n$, $[\varphi(\vec{a})]_A \leq [\varphi(f(\vec{a}))]_B$.*
- (3) *$\tilde{B} = (B, fa)_{a \in |A|} \Vdash \Delta_A^+$.*

Demonstração: Está claro que (1) $\Rightarrow$ (2). Para mostrar que (2) $\Rightarrow$ (3), seja $\varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ uma sentença atômica em Δ_A^+ , com $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in |A|^n$. Então, $A \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n]$, isto é, $[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge E\varphi$. De (2) obtemos

$$E\vec{a} \wedge E\varphi = [\varphi(\vec{a})]_A \leq [\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

e portanto, $[\varphi(f(\vec{a}))]_B = E\vec{a} \wedge E\varphi = Ef(\vec{a}) \wedge E\varphi$, mostrando que $\tilde{B} \Vdash \varphi[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n]$.

(3) $\Rightarrow$ (1). A primeira providência é provar que f é um morfismo de pré-feixes. Fixemos $a \in |A|$ e $p \in \Omega$ e seja σ a sentença $\underline{a} = \underline{a|_p}$. Note que

$$E\sigma = p \wedge Ea = [a = a|_p]_A,$$

e portanto $\tilde{A} \Vdash \underline{a} = \underline{a|_p}$. Logo $\sigma \in \Delta_A^+$ e $\tilde{B} \Vdash \underline{a} = \underline{a|_p}$, isto é,

$$[fa = f(a|_p)]_B = E\sigma \wedge Efa \wedge Ef(a|_p) = Ea \wedge p.$$

Uma vez que $E(fa)|_p = p \wedge Efa = p \wedge Ea = Ef(a|_p)$, temos

$$p \wedge Ea \geq [f(a|_p) = (fa)|_p]_B \geq [f(a|_p) = fa]_B \wedge [fa = (fa)|_p]_B = p \wedge Ea,$$

e a extensionalidade de B garante que $f(a|_p) = (fa)|_p$, e f é um morfismo de pré-feixes, como desejado. Para verificar que f é um L -morfismo, seja $R \in \rho(n, L)$ uma relação n -ária em L , $\vec{a} \in |A|^n$ e $\vec{b} = \vec{a}|_{[R(\vec{a})]}$. Já que $[R(\cdot)]$ é uma função característica, sabemos de 1.3.6.(a) (ou de 2.2.15.(b)) que

$$[R(\vec{b})]_A = [R(\vec{a}|_{[R(\vec{a})])}]_A = [R(\vec{a})] = E\vec{b}.$$

Assim, $R(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) \in \Delta_A^+$, donde concluímos que $B \Vdash R[f(\vec{b})]$. Uma nova aplicação de 1.3.6.(a) fornece

$$[R(\vec{a})]_A \wedge [R(f(\vec{a}))]_B = [R(f(\vec{a}|_{[R(\vec{a})])}]_B = [R(f(\vec{b}))]_B = Ef(\vec{b}) = [R(\vec{a})]_A,$$

verificando a condição (a) em 2.2.18.(1); a condição (b) pode ser estabelecida de modo análogo, enquanto que a parte (c) é imediata. ■

No entanto, para o diagrama Δ_A temos

Proposição 2.4.3 *Sejam A e B L -estruturas em $pSh(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *Existe um L -monomorfismo fraco $f : A \longrightarrow B$.*

(2) Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \Delta_A$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha que $f : A \rightarrow B$ é um L -monomorfismo fraco. Mostraremos que a expansão $\tilde{B} = (B, fa)_{a \in |A|}$ é modelo de Δ_A . Por 2.4.2, $\tilde{B} \models \Delta_A^+$. Se $\tilde{A} \models \neg \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, onde φ é atômica em L , então

$$E\varphi \wedge E\vec{a} = [\neg \varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a}|_{E\varphi} \wedge \neg [\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]_A. \quad (I)$$

Como f é L -monomorfismo fraco, temos que

$$\neg \neg [\varphi(\vec{a})]_A = \neg \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B$$

e assim, $\neg [\varphi(\vec{a})]_A = \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B$. Quando esta relação é substituída em (I), obtemos

$$E\varphi \wedge Ef(\vec{a}) = E\varphi \wedge E\vec{a} = Ef(\vec{a}|_{E\varphi}) \wedge \neg [\varphi(f(\vec{a}|_{E\varphi}))]_B = [\neg \varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

e portanto $\tilde{B} \models \neg \varphi[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n]$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $\tilde{B}$ uma L_A -estrutura, tal que $\tilde{B} \models \Delta_A$. Seja $f : A \rightarrow B$ definida, para $a \in |A|$, por

$$f(a) = \underline{a}^B.$$

Mostraremos que f é um L -monomorfismo fraco. Como, a menos de isomorfismo, o morfismo de pré-feixes de $\underline{A} \rightarrow B$ determinando a expansão de B à uma L_A -estrutura é exatamente f (veja seção 2.3), f é um morfismo de pré-feixes. Além disso, 2.4.2 implica que f é um L -morfismo. Portanto, se $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ é uma fórmula atômica em L e $\vec{a} \in |A|^n$, a dupla negação do item (2) em 2.4.2 fornece

$$\neg \neg [\varphi(\vec{a})]_A \leq \neg \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B.$$

Para verificar a desigualdade recíproca, definimos $\vec{c} := \vec{a}|_{\neg [\varphi(\vec{a})]_A}$. Sem perda da generalidade, seja $E\vec{a} \leq E\varphi$ - no outro caso substituindo $\vec{c}$ por $\vec{c}' := \vec{a}|_{\neg [\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]}$ a prova que segue, funciona na mesma maneira.

Exatamente como na prova de 2.4.2 (ou lembrando 2.2.15), temos

$$E\vec{c} = E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A \quad \text{e} \quad \neg \varphi(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n) \in \Delta_A. \quad (II)$$

Conclui-se então que $B \models \neg \varphi[f(\vec{c})]$, isto é,

$$E\vec{c} = Ef(\vec{c}) = [\neg \varphi(f(\vec{c}))]_B. \quad (III)$$

Uma vez que 1.3.6.(a) e a definição de $\vec{c}$ acarreta

$$[\neg \varphi(f(\vec{c}))]_B = E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A \wedge [\neg \varphi(f(\vec{a}))]_B = E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A \wedge \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

as equações em (II) e (III) implicam

$$E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A \wedge \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B. \quad (IV)$$

Tomando o ínfimo com $\neg \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B$ de ambos os lados de (IV), obtemos

$$E\vec{a} \wedge \neg [\varphi(\vec{a})]_A \wedge \neg \neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B = \perp,$$

e portanto (por $[\neg]$ em 1.1.1)

$$E\vec{a} \wedge \neg\neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq \neg\neg [\varphi(\vec{a})]_A.$$

Como $[\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq E\vec{a}$, a dupla negação desta última desigualdade garante que $\neg\neg [\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq \neg\neg [\varphi(\vec{a})]_A$, completando a prova. ■

Definição 2.4.4 *Sejam A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$ e $\tilde{A} = (A; a)_{a \in |A|}$ a expansão canônica de A à L_A .*

a) *A teoria de $\tilde{A}$ ou diagrama elementar de A é o conjunto*

$$\mathfrak{Th}(\tilde{A}) = \{\sigma : \sigma \text{ é } L_A\text{-sentença e } \tilde{A} \models \sigma\}.$$

b) *A teoria de Gödel de $\tilde{A}$ ou diagrama elementar de Gödel de A é o conjunto*

$$\mathfrak{Th}^g(\tilde{A}) = \Delta_A \cup \{\sigma^g : \sigma \text{ é sentença de } L_A \text{ e } \tilde{A} \models \sigma^g\}.$$

Lema 2.4.5 *Sejam A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula em L e $p \in \Omega$. Então $[\varphi^g(\cdot)] = [\varphi(\cdot)]^g$ e $(\varphi|_p)^g = (\varphi^g)|_p$.*

Demonstração: Indução na complexidade. A transformada que aparece no lado direito da primeira igualdade é a de funções características, discutida em 1.3.15 e 1.3.17. ■

Proposição 2.4.6 *Se A e B são L -estruturas em $pSh(\Omega)$, as seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *Existe um L -monomorfismo elementar fraco $f : A \longrightarrow B$.*
- (2) *Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}^g(\tilde{A})$.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha que f é L -monomorfismo elementar fraco e seja $\tilde{B} = (B, fa)_{a \in |A|}$; por 2.4.3, $\tilde{B} \models \Delta_A$; se σ é uma L_A -sentença e $\tilde{A} \models \sigma^g(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, o fato que f é um L -monomorfismo elementar fraco implica

$$E\sigma^g \wedge E\vec{a} = [\sigma^g(\vec{a})]_A = [\sigma^g(f(\vec{a}))]_B,$$

e portanto $\tilde{B} \models \sigma^g$. Assim, $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}^g(\tilde{A})$, como necessário.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $\tilde{B}$ uma expansão de B à L_A , tal que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}^g(\tilde{A})$. Seja $f : |A| \longrightarrow |B|$ definido por

$$fa = \underline{a}^B.$$

O mesmo argumento que na prova de (2) $\Rightarrow$ (1) em 2.4.3 mostra que f é um L -morfismo e, na realidade, um L -monomorfismo fraco. Mostraremos, por indução na complexidade das L -fórmulas $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ que para todo $\vec{a} \in |A|^n$

$$[\varphi^g(\vec{a})]_A = [\varphi^g(f(\vec{a}))]_B. \quad (*)$$

Como $\varphi^g = \neg\neg \varphi$ para φ atômica, (*) está satisfeita neste caso, por 2.4.3.

Fato : *Sejam $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $\psi(v_1, \dots, v_n)$ L -fórmulas satisfazendo (*). Então $\neg \varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ satisfazem (*).*

Prova : Vamos provar algo um pouco mais forte; suponha que tanto φ quanto ψ verificam

$$[\chi(\vec{a})]_A = [\chi(f(\vec{a}))]_B. \quad (I)$$

Mostraremos que $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ também satisfazem (I). Para a negação, note que

$$[\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(f(\vec{a}))]_B \Rightarrow \neg[\varphi(\vec{a})]_A = \neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

e portanto, uma vez que $Ef(\vec{a}|_{E\varphi}) = E(\vec{a}|_{E\varphi})$,

$$[\neg\varphi(\vec{a})]_A = E(\vec{a}|_{E\varphi}) \wedge \neg[\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]_A = E(\vec{a}|_{E\varphi}) \wedge \neg[\varphi(f(\vec{a}|_{E\varphi}))]_B = [\neg\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

provando (I) para $\neg\varphi$. Se $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $q := E\varphi \wedge E\psi$, então

$$\begin{aligned} [(\varphi \diamond \psi)(\vec{a})]_A &= E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(\vec{a}|_q)]_A \diamond [\psi(\vec{a}|_q)]_A) = E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(f(\vec{a}|_q))]_B \diamond [\psi(f(\vec{a}|_q))]_B) \\ &= [(\varphi \diamond \psi)(f(\vec{a}))]_B, \end{aligned}$$

completando a prova de (I).

Como $(\neg\varphi)^g = \neg\varphi^g$ e

$$(\varphi \wedge \psi)^g = \varphi^g \wedge \psi^g, \quad (\varphi \vee \psi)^g = \neg\neg(\varphi^g \vee \psi^g) \quad \text{e} \quad (\varphi \rightarrow \psi)^g = \varphi^g \rightarrow \psi^g,$$

é consequência imediata de (I) que a relação em (*) é preservada na passagem pelos conectivos proposicionais, completando a prova do fato.

Para o quantificador existencial, temos

$$(\exists x \varphi)^g = \neg\neg \exists x \varphi^g,$$

e portanto a hipótese de indução fornece

$$\begin{aligned} \neg\neg[\exists x \varphi^g(\vec{a})]_A &= \neg\neg\left(\bigvee_{b \in |A|} [\varphi^g(b; \vec{a})]_A\right) = \neg\neg\left(\bigvee_{b \in |A|} [\varphi^g(f(b); f(\vec{a}))]_B\right) \\ &\leq \neg\neg\left(\bigvee_{d \in |B|} [\varphi^g(d; f(\vec{a}))]_B\right) = \neg\neg[\exists x \varphi^g(f(\vec{a}))]_B. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$(\neg \exists x \varphi)^g = \neg(\exists x \varphi)^g = \neg\neg\neg \exists x \varphi^g = \neg \exists x \varphi^g,$$

e considere $p = [\neg \exists x \varphi^g(\vec{a})]_A$ e $\vec{c} = \vec{a}|_p$. De 2.2.15.(b) vem $A \Vdash \neg \exists x \varphi^g[\vec{c}]$, isto é, a sentença $\neg \exists x \varphi^g(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$ está em $\mathfrak{Th}^g(\tilde{A})$. Portanto, temos que

$$E\vec{c} \wedge E\varphi^g = Ef(\vec{c}) \wedge E\varphi^g = [\neg \exists x \varphi^g(f(\vec{c}))]_B. \quad (II)$$

Já que $E\vec{c} \wedge E\varphi^g = p = [\neg \exists x \varphi^g(\vec{a})]_A$, (II) acarreta

$$[\neg \exists x \varphi^g(\vec{a})]_A = [\neg \exists x \varphi^g(\vec{a})]_A \wedge [\neg \exists x \varphi^g(f(\vec{a}))]_B,$$

e portanto

$$\begin{aligned} E\vec{a}|_{E\varphi^g} \wedge \neg[\exists x \varphi^g(\vec{a}|_{E\varphi^g})]_A &= [\neg \exists x \varphi^g(\vec{a})]_A \leq [\neg \exists x \varphi^g(f(\vec{a}))]_B \\ &\leq \neg[\exists x \varphi^g(f(\vec{a}))]_B. \end{aligned} \quad (III)$$

Como $[\exists x \varphi^g(\vec{a})]_A \leq E\vec{a} \wedge E\varphi^g$, tomando a dupla negação de ambos os lados de (III) obtemos

$$\neg\neg[\exists x \varphi^g(f(\vec{a}))]_B \leq \neg\neg[\exists x \varphi^g(\vec{a})]_A,$$

e completamos o passo indutivo do quantificador existencial. É possível dar um tratamento parecido ao quantificador universal. Iremos por outro caminho, utilizando 2.4.5 e 1.3.17. Observe que $(\forall x \varphi)^g = \forall x \varphi^g$.

Logo temos, calculando na aHc das funções características

$$[\forall x \varphi^g(\cdot)]_A = \forall x [\varphi^g(\cdot)]_A = \forall x [\varphi(\cdot)]_A^g = \neg \exists x \neg [\varphi(\cdot)]_A^g = \neg \exists x \neg [\varphi^g(\cdot)]_A,$$

mostrando que o passo do quantificador universal pode ser reduzido à passos anteriores e completando a prova. ■

É fácil ver que se Ω for uma álgebra de Boole completa, então $\mathfrak{Th}^g(\tilde{A}) = \mathfrak{Th}(\tilde{A})$. Temos

Corolário 2.4.7 *Seja $\mathfrak{B}$ uma álgebra de Boole completa e sejam A, B L -estruturas em $pSh(\mathfrak{B})$.*

a) *As seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *Existe um L -monomorfismo de A em B ;*
- (2) *Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \Delta_A$.*

b) *As seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *Existe um L -monomorfismo elementar de A em B ;*
- (2) *Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}(\tilde{A})$.* ■

Os resultados acima valem, evidentemente, para L -estruturas em $Sh(\Omega)$. Registramos que a metateoria utilizada nas provas é construtiva.

O seguinte resultado é bem conhecido (compare com 1.3.17) :

Lema 2.4.8 *Para toda fórmula $\varphi \in L$, existe $\psi \in L^\sharp$ (2.2.16) tal que*

$$\vdash_I \neg\neg\psi \leftrightarrow \psi^g \leftrightarrow \varphi^g,$$

onde $\leftrightarrow$ indica equivalência lógica. ■

O Teorema 2.2.12 então fornece

Corolário 2.4.9 *Sejam A e B L -estruturas em $pSh(\Omega)$.*

a) $\mathfrak{Th}^g(\tilde{A}) \supseteq \mathfrak{Th}^\sharp(A) := \{\sigma : \exists \text{ uma } L_A^\sharp\text{-sentença } \varphi, \text{ tal que } \vdash_I \sigma \leftrightarrow \neg\neg\varphi \in \tilde{A} \models \sigma\}$.

b) *Se $f : A \longrightarrow B$ é um L -morfismo, as seguintes condições são equivalentes :*

- (1) *f é um L -monomorfismo elementar fraco;*

(2) Para toda fórmula $\psi(v_1, \dots, v_n)$ em $L^\sharp$ e $\vec{a} \in |A|^n$

$$\neg\neg[\psi(\vec{a})]_A = \neg\neg[\psi(f(\vec{a}))]_B.$$

■

Exemplo 2.4.10 Este exemplo tem a finalidade de mostrar que o enunciado de 2.4.6 é o melhor possível. Seja $\mathcal{C}$ o feixe das funções reais contínuas, definidas nos abertos da reta real $\mathbb{R}$. Consideramos $\mathcal{C}$ como uma estrutura na linguagem dos anéis ordenados $L = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$, de modo usual. Seja $\mathcal{C}^*$ o resultado de aplicar o funtor $*$ da seção 1.5 a $\mathcal{C}$. Por 1.5.9 a aplicação

$$* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^*, \quad f \mapsto f^*,$$

é um L -monomorfismo elementar fraco. Em [35] mostra-se (e não é difícil de verificar) que

$$\mathcal{C} \models \forall x[(\neg \exists y(xy = 1)) \rightarrow (x = 0)] \quad \text{e} \quad \mathcal{C}^* \models \forall x[(x \neq 0) \rightarrow \exists y(xy = 1)].$$

Estas sentenças são equivalentes classicamente, mas não intuicionisticamente. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(r) = |r|$. Lembrando que

$$\left\{ \begin{array}{l} [f = 0]_{\mathcal{C}} = \text{int} \{r \in \mathbb{R} : f(r) = 0\} = \{0\} \\ \text{e} \\ [\exists v(vf = 1)]_{\mathcal{C}} = \{r \in \mathbb{R} : f(r) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

concluimos que se φ é a fórmula $\neg(x = 0) \rightarrow \exists v(vx = 1)$, então

$$[\varphi(f)]_{\mathcal{C}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por outro lado, em $\mathcal{C}^*$, devemos ter $[\varphi(f^*)]_{\mathcal{C}^*} = \mathbb{R}$, uma vez que a sentença universal correspondente é forçada por $\mathcal{C}^*$. Isto mostra que $*$ não é um L -monomorfismo elementar.

Observe também que, exatamente como acima, se $f_r(s) = |r - s|$ é a translação da função módulo para o ponto $r \in \mathbb{R}$, então

$$[\varphi(f_r)]_{\mathcal{C}} = \mathbb{R} \setminus \{r\}.$$

Segue imediatamente que $[\forall x \varphi]_{\mathcal{C}} = \emptyset$, e portanto $[\neg \forall x \varphi]_{\mathcal{C}} = \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{C} \models \neg \forall x \varphi \quad \text{ou} \quad \neg \forall x \varphi \in \mathfrak{Th}(\mathcal{C}).$$

Assim, $\mathcal{C}^*$ não é modelo de $\mathfrak{Th}(\mathcal{C})$. ■

2.5 O diagrama e a teoria de Robinson de uma L -estrutura

Nesta seção iremos obter a caracterização de monomorfismo e monomorfismo elementar via diagramas e teorias. Será necessário adicionar novos conectivos unários à nossa linguagem, que representam, essencialmente, o fato de que o valor de uma fórmula é menor do que um certo elemento da aHc de base. A idéia destes conectivos aparece em [6], em outra formulação.

Antes de introduzir esta idéia, iremos registrar algumas propriedades fundamentais da operação de *equivalência* em uma álgebra de Heyting.

Definição 2.5.1 Se H é uma álgebra de Heyting e $p, q \in H$, definimos

$$(p \leftrightarrow q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p),$$

denominada *equivalência* entre p e q .

Exemplo 2.5.2 Se X é um espaço topológico, seja $\Omega(X)$ a aHc dos abertos em X . Se $U, V \in \Omega(X)$, então

$$U \leftrightarrow V = \text{int} [(U^c \cup V) \cap (V^c \cup U)] = \text{int} (U \Delta V)^c,$$

onde $U \Delta V = (U \cap V^c) \cup (V \cap U^c)$ é a diferença simétrica de U e V . No caso das álgebras de Boole – do qual o conjunto das partes é representativo –, a equivalência é o complemento da diferença simétrica. ■

As propriedades fundamentais da equivalência são descritas no resultado a seguir, consequência do Lema 1.1.2.

Lema 2.5.3 Sejam H uma álgebra de Heyting e p, q e $r \in H$.

- a) $r \leq (p \leftrightarrow q) \iff r \wedge p = r \wedge q$.
- b) $(p \leftrightarrow q) = \max\{a \in H : a \wedge p = a \wedge q\}$.
- c) $r \wedge (p \leftrightarrow q) = r \wedge [(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)] = r \wedge [p \leftrightarrow (q \wedge r)]$.
- d) $p \wedge (p \leftrightarrow q) = p \wedge q = q \wedge (p \leftrightarrow q)$.
- e) $p \leq q \implies q \wedge (p \leftrightarrow q) = p$.
- f) $p = p \leftrightarrow \top$; $\neg p = p \leftrightarrow \perp$.
- g) $(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q \leq p$.
- h) Se $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ então $(p \rightarrow q) \wedge (q \diamond r) \leq (p \diamond r)$. ■

Definição 2.5.4 Sejam A um Ω -conjunto, $h \in Ch(n, A)$ e $p \in \Omega$. Definimos

$$\Box_p h : |A|^n \longrightarrow \Omega, \text{ dada por } \Box_p h(\vec{a}) = E\vec{a} \wedge (h(\vec{a}) \leftrightarrow p).$$

Lema 2.5.5 Sejam A um Ω -conjunto, $h, k \in Ch(n, A)$ e $p \in \Omega$.

- a) $\Box_p h \in Ch(n, A)$.
- b) Para todo $\vec{a} \in |A|^n$, as seguintes condições são equivalentes :
 - (1) $E\vec{a} = \Box_p h(\vec{a})$; (2) $h(\vec{a}) = p \wedge E\vec{a}$; (3) $h(\vec{a}) \leq p \leq (E\vec{a} \rightarrow h(\vec{a}))$.
- c) $h \wedge \Box_p k = h \wedge \Box_p (h \wedge k)$.

Demonstração: a) Está claro que $\Box_p h$ verifica [ch 1]. Para [ch 2], sejam $\vec{a}, \vec{b} \in |A|^n$. Então, de [ch 2'] em 1.3.5 e 2.5.3.(c) obtemos

$$\begin{aligned}\Box_p h(\vec{a}) \wedge [\vec{a} = \vec{b}] &= E\vec{a} \wedge (h(\vec{a}) \leftrightarrow p) \wedge [\vec{a} = \vec{b}] = [\vec{a} = \vec{b}] \wedge (h(\vec{a}) \leftrightarrow p) \\ &= [\vec{a} = \vec{b}] \wedge [(h(\vec{a}) \wedge [\vec{a} = \vec{b}]) \leftrightarrow (p \wedge [\vec{a} = \vec{b}])] \\ &= [\vec{a} = \vec{b}] \wedge [(h(\vec{b}) \wedge [\vec{a} = \vec{b}]) \leftrightarrow (p \wedge [\vec{a} = \vec{b}])] \\ &= [\vec{a} = \vec{b}] \wedge (h(\vec{b}) \leftrightarrow p) \leq E\vec{b} \wedge (h(\vec{b}) \leftrightarrow p) = \Box_p h(\vec{b}),\end{aligned}$$

como necessário.

b) (1) $\Rightarrow$ (2). A hipótese significa que $E\vec{a} \leq (h(\vec{a}) \leftrightarrow p)$, e 2.5.3.(a) acarreta

$$h(\vec{a}) = E\vec{a} \wedge h(\vec{a}) = E\vec{a} \wedge p,$$

como desejado.

(2) $\Rightarrow$ (3). Note que a condição (2) implica

$$h(\vec{a}) \rightarrow p = \top \quad e \quad E\vec{a} \leq (p \rightarrow h(\vec{a})).$$

Logo, $h(\vec{a}) \leq p \leq E\vec{a} \rightarrow h(\vec{a})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Da condição (3) obtemos

$$\Box_p h(\vec{a}) = E\vec{a} \wedge (h(\vec{a}) \leftrightarrow p) = E\vec{a} \wedge (p \rightarrow h(\vec{a})) = E\vec{a},$$

estabelecendo (1).

O item (c) é consequência imediata de 2.5.3.(c). ■

Corolário 2.5.6 Para toda $h \in Ch(n, A)$, $h = \Box_\top h$ e $\neg h = \Box_\perp h$.

Demonstração: Segue imediatamente de 2.5.3.(f). ■

Observação 2.5.7 Se $\Omega = 2 = \{0, 1\}$ é a álgebra de Boole de dois elementos então os únicos conectivos do tipo $\Box_p$ são $\Box_\perp$ e $\Box_\top$, isto é, a negação e a identidade, respectivamente. Como pré-feixes ou feixes sobre 2 são exatamente as estruturas clássicas (feixes sobre um ponto), neste caso os conectivos $\Box_p$ não correspondem a nada de novo. Se considerarmos álgebras de Boole em geral a situação muda bastante. Por outro lado, o Corolário 2.4.7 caracteriza a existência de um L -monomorfismo ou um L -monomorfismo elementar entre duas L -estruturas em $pSh(\mathfrak{B})$. É importante que os enunciados que iremos apresentar reduzam-se a 2.4.7 no caso em que $\Omega = \mathfrak{B}$. Sabemos de 1.1.4.(f) que uma aHc é uma aBc sse o único denso é $\top$. Esta observação é a origem da Definição 2.5.11 e do Teorema 2.5.12 abaixo. No momento, continuaremos discutindo os conectivos $\Box_p$ em geral. ■

Seja Ω uma álgebra de Heyting completa e L uma linguagem de primeira ordem com igualdade, cujo pré-feixe de constantes é $C \in pSh(\Omega)$.

Definição 2.5.8 Indicamos por $L^\square$ a linguagem obtida de L adicionando-se os símbolos $\square_p$, $p \in \Omega$, como conectivos unários. isto é, às cláusulas anteriores de formação de fórmulas juntamos

* Para todo $p \in \Omega$, se φ é uma fórmula. então $\square_p \varphi$ é uma fórmula.

A noção de $L^\square$ -estrutura A em $pSh(\Omega)$, bem como os conceitos de $L^\square$ -termo e a sua interpretação em A , são iguais às apresentadas em 2.2.3, 2.2.6. Observe que como não há mudança nos símbolos relacionais, funcionais e constantes,

A é uma $L^\square$ -estrutura em $pSh(\Omega)$ sse é uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$.

Na definição indutiva do valor de uma $L^\square$ -fórmula em uma L -estrutura A , adicionamos às definições de 2.2.8 a seguinte prescrição :

Sejam $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma L -fórmula com $E\varphi = q$ e $p \in \Omega$, então definimos:

$$E(\square_p \varphi) := E\varphi = q.$$

Se $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ é uma $L^\square$ -fórmula com $q = E\varphi$ e $\vec{a} \in |A|^n$, então

$$[\square_p] \quad [\square_p \varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(\vec{a}|_q)]_A \leftrightarrow p).$$

O conceito de $A \models \varphi[\vec{a}]$ é igual ao descrito em 2.2.14.

Exatamente como nas seções anteriores, se A é uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, podemos construir a linguagem $L_A^\square$; como antes (2.3.2) existe uma correspondência natural e biunívoca entre L_A -estruturas e morfismos de pré-feixes que nascem em A .

Observação 2.5.9 A Proposição 2.2.9 estende-se para $L^\square$ -fórmulas por indução na complexidade. O passo que falta corresponde aos conectivos $\square_p$, que pode ser verificado da forma seguinte. Se $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ é uma fórmula de $L^\square$ com $q = E\varphi$, $t_1, \dots, t_n$ são termos em L e $r = \bigwedge_{i=1}^n Et_i$, então para $\vec{a} \in |A|^n$, a hipótese de indução fornece

$$\begin{aligned} [\square_p \varphi(t_1, \dots, t_n)(\vec{a})] &= E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(t_1, \dots, t_n)(\vec{a}|_q)] \leftrightarrow p) \\ &= E\vec{a}|_q \wedge ([\varphi(t_1^A(\vec{a}|_{q \wedge r}), \dots, t_n^A(\vec{a}|_{q \wedge r}))] \leftrightarrow p) \\ &= [\square_p \varphi(t_1^A(\vec{a}|_r), \dots, t_n^A(\vec{a}|_r))], \end{aligned}$$

conforme desejado. ■

Temos o seguinte

Lema 2.5.10 Sejam A uma L -estrutura e $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula de L .

- a) Para todo $\vec{a} \in |A|^n$ e $p \in \Omega$. $A \models \square_p \varphi[\vec{a}]$ sse $[\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]_A = p \wedge E\vec{a}|_{E\varphi}$.
- b) Para todo $\vec{a} \in |A|^n$, $A \models \square_{[\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]} \varphi[\vec{a}]$.
- c) No caso particular em que $E\vec{a} \leq E\varphi$ temos:
 - * $A \models \square_p \varphi[\vec{a}]$ sse $[\varphi(\vec{a})]_A = p \wedge E\vec{a}$
 - * $A \models \square_{[\varphi(\vec{a})]} \varphi[\vec{a}]$. ■

Definição 2.5.11 *Sejam A uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$ e D o conjunto dos densos em Ω . Definimos*

a) *O diagrama de Robinson de A como a seguinte coleção de sentenças em $L_A^\square$:*

$$\Delta_A^R = \Delta_A \cup \{\Box_d \varphi : d \in D, \varphi \text{ é atômica em } L_A \text{ e } \tilde{A} \models \Box_d \varphi\}.$$

b) *A teoria de Robinson de $\tilde{A}$ ou diagrama elementar de Robinson de A como a seguinte coleção de sentenças em $L_A^\square$:*

$$\mathfrak{Th}^R(\tilde{A}) = \mathfrak{Th}(\tilde{A}) \cup \{\Box_d \varphi : d \in D, \varphi \text{ é uma sentença em } L_A \text{ e } \tilde{A} \models \Box_d \varphi\}.$$

Agora temos

Teorema 2.5.12 *Sejam A e B L -estruturas em $pSh(\Omega)$.*

a) *As seguintes condições são equivalentes :*

(1) *Existe um L -monomorfismo $f : A \longrightarrow B$.*

(2) *Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \Delta_A^R$.*

b) *As seguintes condições são equivalentes :*

(1) *Existe um L -monomorfismo elementar $f : A \longrightarrow B$.*

(2) *Existe uma expansão $\tilde{B}$ de B à uma L_A -estrutura tal que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}^R(\tilde{A})$.*

Demonstração: Faremos o item (b), comentando as modificações necessárias para (a).

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja $A \xrightarrow{f} B$ um L -monomorfismo elementar. Provaremos que $\tilde{B} = (B, f_a)_{a \in |A|}$ é um modelo de $\mathfrak{Th}^R(\tilde{A})$. Como na linguagem L_A todo $a \in |A|$ tem um nome, podemos supor que $\varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ denota a L_A -sentença, onde $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ indicam todas as ocorrências de quaisquer símbolos de constantes, isto é, de $\underline{A}$ e de $\underline{C}$. Seja então $\varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ uma L_A -sentença. Por 2.2.10,

$$\tilde{A} \models \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \text{ sse } A \models \varphi[\vec{a}],$$

e assim, $E\vec{a} = [\varphi(\vec{a})]_A$. Portanto,

$$E\vec{a} = [\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

e $B \models \varphi[f(\vec{a})]$. Por 2.3.4, concluímos que $\tilde{B} \models \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, mostrando que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}(\tilde{A})$. Agora, seja $p \in \Omega$ e suponha que $\varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ é uma sentença de L_A , tal que $A \models \Box_p \varphi$. A hipótese que f é elementar e 2.5.10.(c) acarretam

$$[\varphi(f(\vec{a}))]_B = [\varphi(\vec{a})]_A = p \wedge E\vec{a} = p \wedge Ef(\vec{a}),$$

e assim $\tilde{B} \models \Box_p \varphi[f(\vec{a})]$, completando a prova de que $\tilde{B} \models \mathfrak{Th}^R(\tilde{A})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Como na prova de 2.4.3 e 2.4.6, a função $f : A \longrightarrow B$, definida por

$$|A| \ni a \mapsto \underline{a}^B,$$

é um morfismo de pré-feixes. Mostraremos que f é um L -monomorfismo elementar. Começamos pelo seguinte

Fato : Se $\tilde{B} \Vdash \mathfrak{Th}(\tilde{A})$, então para toda sentença $\varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ em L_A ,

$$[\varphi(\vec{a})]_A \leq [\varphi(f(\vec{a}))]_B \quad \text{e} \quad \neg\neg[\varphi(\vec{a})]_A = \neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B.$$

Prova : Fixado $\vec{a} \in |A|^n$, seja $p = [\varphi(\vec{a})]_A$ e $\vec{b} = \vec{a}|_p$; então

$$[\varphi(\vec{a}|_p)]_A = p \wedge [\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a}|_p,$$

e $\varphi(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) \in \mathfrak{Th}(\tilde{A})$. Assim, $\tilde{B} \Vdash \varphi(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$, isto é,

$$[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{b} = [\varphi(f(\vec{b}))]_B = [\varphi(\vec{a})]_A \wedge [\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

mostrando que $[\varphi(\vec{a})]_A \leq [\varphi(f(\vec{a}))]_B$, a primeira desigualdade do enunciado. Segue desta desigualdade (1.1.2.(b)) que

$$\neg\neg[\varphi(\vec{a})]_A \leq \neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B. \quad (I)$$

Como a primeira desigualdade vale para *qualquer* fórmula em L_A , concluímos que

$$[\neg\varphi(\vec{a})]_A \leq [\neg\varphi(f(\vec{a}))]_B,$$

isto é,

$$E\vec{a} \wedge \neg[\varphi(\vec{a})]_A \leq E\vec{a} \wedge \neg[\varphi(\vec{a})]_A \wedge \neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B. \quad (II)$$

Tomando a interseção com $\neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B$ de ambos os lados de (II), obtemos

$$E\vec{a} \wedge \neg[\varphi(\vec{a})]_A \wedge \neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B = \perp,$$

e assim $E\vec{a} \wedge \neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq \neg\neg[\varphi(\vec{a})]_A$. Como $[\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq E\vec{a} = Ef(\vec{a})$, esta última desigualdade implica

$$\neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B \leq \neg\neg[\varphi(\vec{a})]_A.$$

que, tendo em vista (I), termina a prova do Fato.

Para terminar a prova de (b) é suficiente mostrar que se $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ é uma fórmula em L e $\vec{a} \in |A|^n$, então

$$[\varphi(f(\vec{a}))]_B = [\varphi(\vec{a})]_A. \quad (III)$$

Sem perda da generalidade $E\vec{a} \leq E\varphi$, pois no outro caso podemos substituir na prova que segue d e p por

$$d' := ([\varphi(f(\vec{a})|_{E\varphi})]_B \rightarrow [\varphi(\vec{a}|_{E\varphi})]_A) \quad \text{e} \quad p' := [\varphi(f(\vec{a})|_{E\varphi})]_B \quad \text{respectivamente.}$$

Vamos demonstrar (III). Agora entram os conectivos $\Box_d$, $d \in D$. Como $\neg\neg[\varphi(\vec{a})]_A = \neg\neg[\varphi(f(\vec{a}))]_B$, 1.1.4.(e) garante que

$$d = ([\varphi(f(\vec{a}))]_B \rightarrow [\varphi(\vec{a})]_A)$$

é denso em Ω . Para facilitar a leitura seja $p = [\varphi(f(\vec{a}))]_B$ e seja $\vec{e} = \vec{a}|_p$. Uma vez que $[\varphi(\vec{a})]_A \leq p \leq E\vec{a} = Ef(\vec{a})$, temos

$$[\varphi(\vec{e})]_A = p \wedge [\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(\vec{a})]_A, \quad (IV)$$

bem como

$$E\vec{e} \wedge d = E\vec{a} \wedge p \wedge d = p \wedge (p \rightarrow [\varphi(\vec{a})]_A) = p \wedge [\varphi(\vec{a})]_A = [\varphi(\vec{a})]_A. \quad (V)$$

(IV) e (V) implicam, por 2.5.10.(c), que $\tilde{A} \Vdash \Box_d \varphi[\vec{e}]$, isto é, $\Box_d \varphi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \in \mathfrak{Th}^R(\tilde{A})$. Assim, $\tilde{B} \Vdash \Box_d \varphi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, e uma nova aplicação de 2.5.10.(c) nos leva a

$$[\varphi(f(\vec{e}))]_B = E\vec{e} \wedge d,$$

isto é,

$$[\varphi(f(\vec{a}))]_B = p \wedge [\varphi(f(\vec{a}))]_B = [\varphi(f(\vec{e}))]_B = E\vec{e} \wedge d = [\varphi(\vec{a})]_A,$$

completando a prova de (III) e do ítem (b). Para (a), registramos que

* (1) $\Rightarrow$ (2) pode ser provado pelo mesmo método que a implicação correspondente em (b);

* Para (2) $\Rightarrow$ (1), note que o Fato é, para fórmulas atômicas, consequência de 2.4.3; e que o argumento utilizando os conectivos $\Box_d$ é geral, aplicando-se também ao caso atômico.

Isto termina a prova do Teorema 2.5.12. ■

Como mencionado em 2.5.7, se Ω é uma álgebra de Boole, o único denso em Ω é $\top$, e o Teorema 2.5.12 transforma-se no Corolário 2.4.7. É lícito, portanto, considerarmos 2.5.12 como a generalização adequada dos resultados clássicos de A. Robinson para o contexto de pré-feixes de estruturas em $pSh(\Omega)$.

Capítulo 3

O Teorema de Fraïssé para $Sh(\Omega)$

O Teorema de Fraïssé clássico dá uma caracterização puramente algébrica da equivalência elementar de L -estruturas, [11]. Generalizamos o Teorema de Fraïssé para feixes de L -estruturas em $Sh(\Omega)$. Para isso, consideramos uma linguagem L contendo somente símbolos relacionais e a igualdade. Além disso, L contém como conectivos lógicos - além dos conectivos usuais - infinitárias conjunções $\bigwedge$, infinitárias disjunções $\bigvee$ e a família de conectivos unários restrições, $\Box_q$, $q \in \Omega$, introduzido no capítulo anterior.

Neste contexto existe o Teorema de Fraïssé para feixes topológicos de L -estruturas, [6]. A nossa generalização vale para uma aHc Ω arbitrária.

3.1 Equivalência elementar em $Sh(\Omega)$

Explicamos os conceitos de L -isomorfismo parcial para L -estruturas em $Sh(\Omega)$ e da equivalência elementar entre feixes de L -estruturas. Ambos os conceitos são generalizações para a caso clássico.

Além disso, introduzimos uma categoria Q_k , $k \in \omega$, cujos objetos são objetos de $Sh(\Omega)$ e cujos morfismos são L -isomorfismos parciais satisfazendo uma propriedade de ida-e-volta¹. Essa categoria é uma generalização para feixes de L -estruturas do conceito clássico de estruturas finitamente isomorfas.

Definição 3.1.1 (*L -isomorfismo parcial*) Sejam A, B L -estruturas em $Sh(\Omega)$.

$h : A \rightarrow B$ é um **L -isomorfismo parcial**, sse

$\text{dom}(h) \subseteq |A|$ e $\text{codom}(h) \subseteq |B|$ tais que

(1) $\text{dom}(h)$ é subfeixe de A .

(2) h é um morfismo mônico de feixes, isto é, $\forall x, y \in \text{dom}(h) \quad [x = y] = [hx = hy]$.

(3) h é homomorfa no seguinte sentido

$$\forall R \in \rho(n, L) \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h) \quad [R(\vec{a})] = [R(h(\vec{a}))].$$

¹ back and forth property.

Observação 3.1.2 1. Como a linguagem neste capítulo é relacional as condições (2) e (3) de 3.1.1 são equivalentes a dizer que h é um L -monomorfismo (2.2.18 (3)).

2. Relembramos para um feixe A e um ponto $p \in \Omega$. $A|_p$ é a L -estrutura induzida por A com o domínio:

$$|A|_p := \{a \in |A| : Ea \leq p\}. \quad \blacksquare$$

Definição 3.1.3 (*categoria $\{Q_k(p)\}_{p \in \Omega, k \in \omega}$*) Seja Q_0 a categoria cujos objetos são os objetos de $Sh(\Omega)$ e cujos morfismos são os L -isomorfismos parciais de A em B . Para cada $k \in \omega$ e para cada $p \in \Omega$, definimos a subcategoria $Q_k(p)$ por recursão:

(1) $Q_0(p) := Q_0$ para todo $p \in \Omega$.

(2) Sejam definidos $Q_k(q)$ para todo $q \in \Omega$.

Então $(h : A \rightarrow B) \in Q_{k+1}(p)$, sse $h \in Q_k(p)$ e

(a) Propriedade de ida:

$$\forall a \in |A|_p \quad \exists \{q_i\}_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} q_i = Ea, \quad \exists h_i \in Q_k(q_i) \quad \text{tal que} \\ h_i \supseteq h_{q_i} \quad \text{e} \quad a|_{q_i} \in \text{dom}(h_i).$$

(b) Propriedade de volta:

$$\forall b \in |B|_p \quad \exists \{q_i\}_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} q_i = Eb, \quad \exists h_i \in Q_k(q_i) \quad \text{tal que} \\ h_i \supseteq h_{q_i} \quad \text{e} \quad b|_{q_i} \in \text{codom}(h_i).$$

Definição 3.1.4 (*equivalência elementar*) Sejam A, B L -estruturas em $Sh(\Omega)$. A e B são *equivalentes elementarmente*, $A \equiv B$, se, e somente se,

$$\forall \sigma \in \text{Sent}(L) : [\sigma]_A = [\sigma]_B.$$

Definição 3.1.5 (*grau quantificacional*) Seja φ uma L -fórmula.

O *grau quantificacional* de φ , $g(\varphi)$, está definido por indução sobre a complexidade das fórmulas:

[atom] Seja φ uma fórmula atômica, então: $g(\varphi) := 0$.

[con] Seja $\varphi := \neg\psi$ ou $\varphi := \Box_q\psi$, então: $g(\varphi) := g(\psi)$.

Seja $\varphi := \psi \Diamond \chi$, onde $\Diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, então: $g(\varphi) := \max\{g(\psi), g(\chi)\}$.

[$\exists, \forall$] Seja $\varphi := \exists v\psi$ ou $\varphi := \forall v\psi$, então: $g(\varphi) := g(\psi) + 1$.

[$\bigvee, \bigwedge$] Seja $\varphi := \bigvee_i \psi_i$ ou $\varphi := \bigwedge_i \psi_i$, então: $g(\varphi) := \sup\{g(\psi_i) : i \in I\}$.

Notação 3.1.6 Denotamos por $L^k := \{\varphi \in \text{Form}(L) : g(\varphi) \leq k\}$. Para L -estruturas A, B em $Sh(\Omega)$ seja

$$A \equiv_k B \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ e } B \text{ são equivalente elementarmente com respeito as sentenças do grau } \leq k$$

3.2 Preservação de fórmulas em $Sh(\Omega)$

Introduzimos em seguida o conceito da preservação de L -fórmula em $Sh(\Omega)$ e provamos dois teoremas - um sobre a preservação de L -fórmulas na categoria $\{Q_k(p)\}_{p \in \Omega, k \in \omega}$, e o outro sobre a existência de L -fórmulas φ com certas propriedades para uma L -estrutura A e elementos $a_1, \dots, a_n \in |A|$ dados.

Definição 3.2.1 (*preservação de uma fórmula em $p \in \Omega$*) Sejam A, B L -estruturas em $Sh(\Omega)$, $p \in \Omega$ e $h : A \rightarrow B$ um L -isomorfismo parcial.

h *preserva em p uma L -fórmula $\varphi(\vec{v})$, ou equivalentemente: uma L -fórmula $\varphi(\vec{v})$ é invariante em p para h se, e somente se.*

$$\forall a_1, \dots, a_n \in |A|_p, \quad a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h) : \quad [\varphi(\vec{a})] = [\varphi(h(\vec{a}))] \quad (+)$$

Observação 3.2.2 (1) Por indução na complexidade, podemos provar que para toda L -fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$, toda L -estrutura A em $Sh(\Omega)$, todo $p \in \Omega$ e para $a_1, \dots, a_n \in |A|$:

$$[\varphi(\vec{a}|_p)]_{A|_p} = p \wedge [\varphi(\vec{a})]_A.$$

(2) Para uma L -sentença σ , vale em particular

$$\sigma \text{ é invariante em } p \text{ para } h \iff [\sigma]_{A|_p} = [\sigma]_{B|_p}.$$

(3) h preserva em $p \in \Omega$ qualquer L -fórmula sse $h|_p$ é L -monomorfismo elementar parcial, onde $h|_p : A|_p \rightarrow B|_p$.

(4) Para $p = \top$ em (2): h é L -monomorfismo elementar parcial.

(5) A equação (+), da definição 3.2.1 é equivalente com a seguinte:

$$\begin{aligned} \forall q \leq p \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A(q), \quad a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h_q) : \\ A(q) \Vdash \varphi(\vec{a}) \iff B(q) \Vdash \varphi(h_q a_1, \dots, h_q a_n) \end{aligned} \quad (++)$$

Demonstração: Somente mostraremos o item 4.:

$(+) \implies (++)$: Sejam $q \leq p$ e $a_1, \dots, a_n \in A(q)$ tais que $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h_q)$.

Logo, $[\varphi(\vec{a})] = [\varphi(h(\vec{a}))]$.

Mas, isto é por definição de $\Vdash$ a afirmação.

$(++) \implies (+)$: Sejam $a_1, \dots, a_n \in |A|_p$, tais que $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h)$.

Logo, $E\vec{a} \leq p$ e $a_1|_{E\vec{a}}, \dots, a_n|_{E\vec{a}} \in \text{dom}(h_{E\vec{a}})$.

Por $(++)$, obtemos

$$A(E\vec{a}) \Vdash \varphi(\vec{a}|_{E\vec{a}}) \iff B(E\vec{a}) \Vdash \varphi(h_{E\vec{a}}(\vec{a}|_{E\vec{a}})),$$

mas isto é, $[\varphi(\vec{a})] = [\varphi(h(\vec{a}))]$, terminando a prova. ■

Teorema 3.2.3 *Seja φ uma L -fórmula com $g(\varphi) = k$. $k \in \omega$. Então φ é invariante em $p \in \Omega$ para todo $h \in Q_k(p)$.*

Demonstração: Por indução sobre o grau de φ , $g(\varphi)$.

$g(\varphi) = 0$. Então, $\varphi(\vec{v})$ é uma L -fórmula sem quantificadores.

Sejam $a_1, \dots, a_n \in |A|_p$, $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h)$, $h \in Q_0$ e $p \in \Omega$ fixo.

Por indução na complexidade de φ mostraremos a afirmação.

[*atom*] Seja $\varphi(\vec{v})$ uma L -fórmula atômica, então, segue a afirmação do fato que h é um L -isomorfismo parcial.

[*con*] Somente trataremos o caso $\varphi(\vec{v}) := \neg\psi(\vec{v})$. Os outros casos podem ser provados analogamente.

$$[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \neg[\psi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \neg[\psi(h(\vec{a}))]_B = [\varphi(h(\vec{a}))]_B.$$

$g(\varphi) = k + 1$. Suponhamos o teorema válido para uma L -fórmula φ com $g(\varphi) \leq k < \alpha$.

Mostraremos a afirmação para uma L -fórmula φ com $g(\varphi) \leq \alpha$.

Sejam $p \in \Omega$ fixo, $h \in Q_\alpha(p)$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|_p$ tais que $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(h)$.

Novamente por indução na complexidade de φ .

[*atom*] Seja $\varphi(\vec{v})$ uma L -fórmula atômica, então, $g(\varphi) = 0$ e a afirmação vale.

[*con*] Somente trataremos o caso $\varphi(\vec{v}) := \neg\psi(\vec{v})$, onde $g(\psi) \leq \alpha$. Os outros casos podem ser provados analogamente.

$$[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \neg[\psi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \neg[\psi(h(\vec{a}))]_B = [\varphi(h(\vec{a}))]_B.$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese da indução na complexidade das L -fórmulas.

[$\exists$] Seja $\varphi(\vec{v}) := \exists v\psi(v, \vec{v})$, onde $g(\psi) \leq k < \alpha$. Então, temos por definição

$$[\varphi(\vec{a})]_A = \bigvee_{t \in |A|_p} [\psi(t, \vec{a})]_A.$$

Da propriedade de ida 2.(a), obtemos que para $t \in |A|_p$ existe

$$\{q_i\}_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} q_i = Et, \text{ e } h_i \in Q_k(q_i) \text{ tal que } h_i \supseteq h_{q_i} \text{ e } t|_{q_i} \in \text{dom}(h_i).$$

Aplicando este resultado e a hipótese da indução sobre o grau k

$$[\psi(t, \vec{a})]_A = \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i(t|_{q_i}), h_i(a_1|_{q_i}), \dots, h_i(a_n|_{q_i}))]_B.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{a})]_A &= \bigvee_{t \in |A|_p} \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i(t|_{q_i}), h_i(a_1|_{q_i}), \dots, h_i(a_n|_{q_i}))]_B \leq \bigvee_{s \in |B|_p} \bigvee_{i \in I} [\psi(s|_{q_i}, h_i(a_1|_{q_i}), \dots, h_i(a_n|_{q_i}))]_B \\ &= \bigvee_{s \in |B|_p} [\psi(s, h(\vec{a}))]_B. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $[\varphi(h(\vec{a}))]_B = \bigvee_{s \in |B|_p} [\psi(s, h(\vec{a}))]_B$.

Da propriedade de volta 2.(b), obtemos que para $s \in |B|_p$ existe

$$\{q_i\}_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} q_i = Es, \text{ e } h_i \in Q_k(q_i) \text{ tal que } h_i \supseteq h_{q_i} \text{ e } s|_{q_i} \in \text{codom}(h_i).$$

Aplicando este resultado, a hipótese da indução sobre o grau k e o fato que h_i é injetor (e portanto bijetor sobre o codomínio)

$$[\psi(s, h(\vec{a}))]_B = \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i^{-1}(s|_{q_i}), a_1|_{q_i}, \dots, a_n|_{q_i})]_A.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\varphi(h(\vec{a}))]_B &= \bigvee_{s \in |B|_p} \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i^{-1}(s|_{q_i}), \vec{a}|_{q_i})]_A \leq \bigvee_{t \in |A|_p} \bigvee_{i \in I} [\psi(t|_{q_i}, \vec{a}|_{q_i})]_A \\ &= \bigvee_{t \in |A|_p} [\psi(t, \vec{a})]_A. \end{aligned}$$

[V] Seja $\varphi(\vec{v}) := \forall v \psi(v, \vec{v})$, onde $g(\psi) \leq k < \alpha$. Então, temos por definição

$$[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \wedge \bigwedge_{t \in |A|_p} (Et \rightarrow [\psi(t, \vec{a})]_A).$$

Da propriedade de ida 2.(a), obtemos que para $t \in |A|_p$ existe

$$\{q_i\}_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} q_i = Et, \text{ e } h_i \in Q_k(q_i) \text{ tal que } h_i \supseteq h_{q_i} \text{ e } t|_{q_i} \in \text{dom}(h_i).$$

Aplicando este resultado e a hipótese da indução sobre o grau k :

$$\begin{aligned} Et \rightarrow [\psi(t, \vec{a})]_A &= Et \rightarrow \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i(t|_{q_i}), h_i(a_1|_{q_i}), \dots, h_i(a_n|_{q_i}))]_B \\ &= \bigvee_{i \in I} Et|_{q_i} \rightarrow \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i(t|_{q_i}), h_i(a_1|_{q_i}), \dots, h_i(a_n|_{q_i}))]_B. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{a})]_A &= E\vec{a} \wedge \bigwedge_{t \in |A|_p} \left(\bigvee_{i \in I} Et|_{q_i} \rightarrow \bigvee_{i \in I} [\psi(h_i(t|_{q_i}), h_i(\vec{a})|_{q_i})]_B \right) \\ &\geq E\vec{a} \wedge \bigwedge_{s \in |B|_p} \left(\bigvee_{i \in I} Es|_{q_i} \rightarrow \bigvee_{i \in I} [\psi(s|_{q_i}, h_i(\vec{a})|_{q_i})]_B \right) \\ &= E\vec{a} \wedge \bigwedge_{s \in |B|_p} (Es \rightarrow [\psi(s, h(\vec{a}))]_B). \end{aligned}$$

A outra desigualdade prova-se analogamente, usando a propriedade de volta 2.(b), a hipótese da indução sobre o grau e o fato que h_i é bijetor sobre o codomínio de h_i . ■

Teorema 3.2.4 *Seja $k \in \omega$. Sejam $A \in Sh(\Omega)$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|$. Então, existe uma L^k -fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ tal que*

$$(1) [\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a} \text{ e}$$

$$(2) \text{ para todo } B \in Sh(\Omega), b_1, \dots, b_n \in |B|_{E\vec{a}}:$$

$$[\varphi(\vec{b})]_B = E\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (h : A \rightarrow B) \in Q_k(E\vec{b}) \text{ tal que } h(a_i|_{E\vec{b}}) = b_i|_{E\vec{b}} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demonstração: Por indução sobre o grau k .

$k = 0$. Sejam $v_1, \dots, v_n$ variáveis livres, $A \in Sh(\Omega)$ e $a_1, \dots, a_n \in |A|$.

Definimos $\tilde{\varphi} := \varphi_{A, \vec{a}}$ na seguinte maneira

$$\tilde{\varphi} := (\psi_1 \wedge \psi_2)(\vec{v}),$$

onde $\psi_1 := \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \Box_{[a_i = a_j]} (v_i = v_j)$ e $\psi_2 := \bigwedge_{R \in \tau_n} \Box_{[Ra_{i_1}, \dots, a_{i_n}]} (Rv_{i_1}, \dots, v_{i_n})$,

com $\tau_n := \rho(n, L)$. É fácil ver que $[\tilde{\varphi}(\vec{a})]_A = E\vec{a}$.

Sejam agora $B \in Sh(\Omega)$. $b_1, \dots, b_n \in |B|_{E\vec{a}}$. Então, temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}(\vec{b})]_B = E\vec{b} &\Leftrightarrow E\vec{b} = [\psi_1(\vec{b})]_B \text{ e } E\vec{b} = [\psi_2(\vec{b})]_B \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \left(Eb_i \wedge Eb_j \wedge ([b_i = b_j] \leftrightarrow [a_i = a_j]) \right) \geq E\vec{b} \text{ e} \\ &\quad \bigwedge_{R \in \tau_n} \left(\bigwedge_{j=1}^n Eb_{i_j} \wedge ([Rb_{i_1}, \dots, b_{i_n}] \leftrightarrow [Ra_{i_1}, \dots, a_{i_n}]) \right) \geq E\vec{b} \\ &\Leftrightarrow \forall i < j : \left([b_i = b_j] \leftrightarrow [a_i = a_j] \wedge Eb_i \wedge Eb_j \right) \geq E\vec{b} \text{ e} \\ &\quad \forall R \in \tau_n : \left([Rb_{i_1}, \dots, b_{i_n}] \leftrightarrow [Ra_{i_1}, \dots, a_{i_n}] \wedge \bigwedge_{j=1}^n Eb_{i_j} \right) \geq E\vec{b} \\ &\Leftrightarrow \forall i < j : [b_i = b_j] \wedge E\vec{b} = [a_i = a_j] \wedge E\vec{b} \text{ e} \\ &\quad \forall R \in \tau_n : [Rb_{i_1}, \dots, b_{i_n}] \wedge E\vec{b} = [Ra_{i_1}, \dots, a_{i_n}] \wedge E\vec{b} \\ &\Leftrightarrow \forall i < j : [b_i]_{E\vec{b}} = [b_j]_{E\vec{b}} = [a_i]_{E\vec{b}} = [a_j]_{E\vec{b}} \text{ e} \\ &\quad \forall R \in \tau_n : [Rb_{i_1}]_{E\vec{b}}, \dots, [b_{i_n}]_{E\vec{b}} = [Ra_{i_1}]_{E\vec{b}}, \dots, [a_{i_n}]_{E\vec{b}}. \end{aligned}$$

Como $Ea_i|_{E\vec{b}} = E\vec{b} = Ea_j|_{E\vec{b}} = Eb_i|_{E\vec{b}} = Eb_j|_{E\vec{b}}$, obtemos

$$\forall i < j : a_i|_{E\vec{b}} = a_j|_{E\vec{b}} \Leftrightarrow b_i|_{E\vec{b}} = b_j|_{E\vec{b}} \text{ e}$$

$$\forall R \in \tau_n : a_{i_1}|_{E\vec{b}}, \dots, a_{i_n}|_{E\vec{b}} \in R^{A(E\vec{b})} \Leftrightarrow b_{i_1}|_{E\vec{b}}, \dots, b_{i_n}|_{E\vec{b}} \in R^{B(E\vec{b})}.$$

Definimos agora

$$h_{E\vec{b}} : A(E\vec{b}) \rightarrow B(E\vec{b}), \quad a_i|_{E\vec{b}} \mapsto h_{E\vec{b}}(a_i|_{E\vec{b}}) = b_i|_{E\vec{b}}.$$

Então $h : A \rightarrow B$ é um L -isomorfismo parcial.

$k \mapsto k+1$. Vale o enunciado para $k \in \omega$.

Sejam $D \in Sh(\Omega)$, $d_1, \dots, d_n \in |D|$ e $d \in |D|_{E\vec{d}}$.

Seja então, $\varphi_{D, \vec{d}, d}(v_1, \dots, v_n, v)$ a L^k -fórmula dada pelo Teorema com respeito a k para $(D, \vec{d}, d)$. Isto é,

$$[\varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{d}, d)]_D = E\vec{d} \wedge Ed = Ed \text{ e}$$

$$\forall B \in Sh(\Omega). \quad b_1, \dots, b_n, b \in |B|_{E\vec{d} \wedge Ed} = |B|_{Ed} :$$

$$[\varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}, b)]_D = E\vec{b} \wedge Eb \Leftrightarrow \exists (h : D \rightarrow B) \in Q_k(E\vec{b} \wedge Eb) \text{ tal que}$$

$$h(d_i|_{E\vec{b}\wedge Eb}) = b_i|_{E\vec{b}\wedge Eb} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad h(d|_{E\vec{b}\wedge Eb}) = b|_{E\vec{b}\wedge Eb}. \quad (*)$$

Sejam $A \in Sh(\Omega)$, $a_1, \dots, a_n \in |A|$ e $\tilde{\varphi}$ a L^0 -fórmula dada no caso $k = 0$ para $(A, \vec{a})$.

Tomemos agora para $K_{D, \vec{d}, d} := [\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{a}, v)]_A$

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) := \tilde{\varphi}(\vec{v}) \wedge \bigwedge_{D, \vec{d}, d} \Box_{K_{D, \vec{d}, d}} (\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{v}, v)).$$

Logo, $[\varphi(\vec{a})]_A = E\vec{a}$.

Usando a hipótese da indução (*) mostraremos em seguida a segunda parte do Teorema. Para isso, sejam $B \in Sh(\Omega)$ e $b_1, \dots, b_n \in |B|_{E\vec{a}}$.

$\Rightarrow$: Supomos que

$$[\varphi(\vec{b})]_B = E\vec{b}. \quad (**)$$

Mostraremos que

$$\exists (h : A \rightarrow B) \in Q_{k+1}(E\vec{b}) \quad \text{tal que} \quad h(a_j|_{E\vec{b}}) = b_j|_{E\vec{b}} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

1. Como $[\tilde{\varphi}(\vec{b})]_B = E\vec{b}$, existe pelo caso $k = 0$ um L -isomorfismo parcial $(h : A \rightarrow B) \in Q_0$ tal que $h(a_j|_{E\vec{b}}) = b_j|_{E\vec{b}} \quad \forall j = 1, \dots, n$.

2. Verificamos a propriedade de ida. Seja $a \in |A|_{E\vec{b}}$. Por (**), temos que

$$[\Box_{K_{A, \vec{a}, a}} (\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, v))]_B = E\vec{b}.$$

Isto é, $E\vec{b} \wedge ([\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, v)]_B \leftrightarrow [\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, v)]_A) = E\vec{b}$.

Observe que $[\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, v)]_B = q := [\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, v)]_A \wedge E\vec{b}$.

Mas, por (*), $\varphi_{A, \vec{a}, a}$ era a fórmula dada pelo Teorema com respeito a k para $(A, \vec{a}, a)$. Portanto

$$[\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, v)]_A|_{Ea} = \bigvee_{t \in |A|_{Ea}} [\varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, t)]_A = Ea.$$

Logo, $Ea \leq [\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, v)]_A|_{E\vec{b}} = \bigvee_{t \in |A|_{E\vec{b}}} [\varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, t)]_A$.

Já que $a \in |A|_{E\vec{b}}$, temos $Ea \leq E\vec{b} \wedge [\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{a}, v)]_A = q$.

Portanto, $Ea \leq [\exists v \varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, v)]_B|_{E\vec{b}}$.

Como em $|B|_{Ea}$ sempre vale a outra desigualdade, obtemos então, a igualdade, mas isto é, $\bigvee_{t \in |B|_{Ea}} [\varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, t)]_B = Ea$. Então, existe uma família $\{t_i\}_{i \in I}$, $t_i \in |B|_{Ea}$, $Et_i \leq Ea$ tal que

$$\bigvee_{i \in I} [\varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, t_i)]_B = Ea.$$

Agora seja $\forall i \in I$: $[\varphi_{A, \vec{a}, a}(\vec{b}, t_i)]_B = q_i = Et_i$. Como $\varphi_{A, \vec{a}, a}$ era a fórmula dada pelo Teorema para $(A, \vec{a}, a)$, existe agora por (*) $\forall i \in I$

$$(h_i : A \rightarrow B) \in Q_k(Et_i) : h_i(a_j|_{q_i}) = b_j|_{q_i}, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad h_i(a|_{q_i}) = t_i|_{Et_i} = t_i$$

e $h_i \supseteq h_{q_i}$. Mas, isto é exatamente a propriedade de ida.

3. Verificamos a propriedade de volta. Seja $b \in |B|_{E\vec{b}}$. Seja $K_{B,\vec{b},b}$ definido como anteriormente. Então, temos por (**)

$$[\Box_{K_{B,\vec{b},b}}(\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, v))]_B = E\vec{b}.$$

Pelo mesmo raciocínio do segundo item obtemos

$$q := [\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{a}, v)]_A \wedge E\vec{b} = [\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, v)]_B.$$

Pela hipótese da indução (*) para $(B, \vec{b}, b)$ segue $[\varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, b)]_B = Eb$. Logo,

$$[\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, v)]_{B|_{Eb}} = \bigvee_{s \in |B|_{Eb}} [\varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, s)]_B = Eb.$$

Portanto $Eb \leq [\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{b}, v)]_{B|_{E\vec{b}}} = [\exists v \varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{a}, v)]_{A|_{E\vec{b}}}$.

Daqui, obtemos novamente a igualdade e isto é,

$$\bigvee_{s \in |A|_{E\vec{b}}} [\varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{a}, s)]_A = Eb.$$

Então, existe uma família $\{s_i\}_{i \in I}$, $s_i \in |A|_{E\vec{b}}$, $E s_i \leq Eb$ tal que

$$\bigvee_{i \in I} [\varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{a}, s_i)]_A = Eb.$$

Agora seja $\forall i \in I$ $[\varphi_{B,\vec{b},b}(\vec{a}, s_i)]_A = q_i = E s_i$.

Como $\varphi_{B,\vec{b},b}$ era a fórmula dada pelo Teorema para $(B, \vec{b}, b)$ existe agora por (*) $\forall i \in I$:

$$(g_i : B \rightarrow A) \in Q_k(E s_i) : g_i(b_j|_{q_i}) = a_j|_{q_i} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad g_i(b|_{q_i}) = s_i|_{E s_i} = s_i.$$

Como g_i é um L -isomorfismo parcial, podemos garantir a existência de um L -isomorfismo parcial $g_i^{-1} : A \rightarrow B \in Q_k(q_i)$ tal que

$$g_i^{-1} \supseteq h_{q_i}, \quad g_i^{-1}(a_j|_{q_i}) = b_j|_{q_i} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad g_i^{-1}(s_i) = b|_{q_i}.$$

Mas, isto é exatamente a propriedade de volta.

$\Leftarrow$: Supomos a existência de $h : A \rightarrow B \in Q_{k+1}(E\vec{b})$ tal que

$$h(a_i|_{E\vec{b}}) = b_i|_{E\vec{b}}. \quad (***)$$

Queremos provar que $[\varphi(\vec{b})]_B = E\vec{b}$.

Pelo caso $k = 0$ é claro que $[\tilde{\varphi}(\vec{b})] = E\vec{b}$. Sejam agora $D \in Sh(\Omega)$, $d_1, \dots, d_n \in |D|$ e $d \in |D|_{E\vec{d}}$.

Observamos que

$$[\exists v \varphi_{D,\vec{d},d}(\vec{a}, v)]_A \wedge E\vec{b} = [\exists v \varphi_{D,\vec{d},d}(\vec{a}, v)]_{A|_{E\vec{b}}}.$$

Aplicando o Teorema 3.2.3, segue que $\exists v \varphi_{D,\vec{d},d}$ é invariante em $E\vec{b}$ para todo $h \in Q_{k+1}(E\vec{b})$ o que acarreta

$$[\exists v \varphi_{D,\vec{d},d}(\vec{a}|_{E\vec{b}}, v)]_A = [\exists v \varphi_{D,\vec{d},d}(h(\vec{a}|_{E\vec{b}}), v)]_B.$$

De (***), obtemos que

$$[\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{a}|_{E\vec{b}}, v)]_A = [\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}|_{E\vec{b}}, v)]_B.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\Box_{K_{D, \vec{d}, d}}(\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}, v))]_B &= [\Box_{K_{D, \vec{d}, d}}(\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}, v))]_{B|_{E\vec{b}}} = [\Box_{K_{D, \vec{d}, d}}(\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}|_{E\vec{b}}, v))]_{B|_{E\vec{b}}} \\ &= E\vec{b} \wedge ([\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{b}|_{E\vec{b}}, v)]_{B|_{E\vec{b}}} \leftrightarrow [\exists v \varphi_{D, \vec{d}, d}(\vec{a}|_{E\vec{b}}, v)]_{A|_{E\vec{b}}}) \\ &= E\vec{b}, \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Corolário 3.2.5 *Sejam $k \in \omega$ e $A \in Sh(\Omega)$.*

Então, existe uma sentença $\varphi \in Sent(L^k)$ tal que

1. $[\varphi]_A = \top$ e

2. $\forall B \in Sh(\Omega) : [\varphi]_B = \top \Leftrightarrow \exists (h : A \rightarrow B) \in Q_k(\top).$ ■

3.3 A generalização do Teorema de Fraïssé

Provamos a generalização do Teorema de Fraïssé para feixes de L -estruturas sobre uma aHc Ω , que segue agora facilmente dos Teoremas 3.2.3 e 3.2.4.

Teorema 3.3.1 (Generalização do Teorema de Fraïssé) *Sejam $A, B \in Sh(\Omega)$.*

Então

$$A \equiv_k B \iff \exists (h : A \rightarrow B) \in Q_k(\top).$$

Demonstração:

$\Leftarrow$: Seja $(h : A \rightarrow B) \in Q_k(\top)$. Pelo Teorema 3.2.3, toda L^k -fórmula φ é invariante em $\top$ para h . Em particular, obtemos para qualquer sentença $\sigma \in Sent(L^k)$

$$[\sigma]_A = [\sigma]_B,$$

terminando esta direção.

$\Rightarrow$: Seja $A \equiv_k B$. então, tome φ_A a L^k -sentença construída no Teorema 3.2.4.

Logo, $[\varphi_A]_A = \top$ e como $A \equiv_k B$ $[\varphi_A]_B = \top$.

Pela segunda parte do Teorema 3.2.4, existe $(h : A \rightarrow B) \in Q_k(\top)$. ■

Corolário 3.3.2 *Seja σ uma L -sentença com grau k . Sejam $A \in Sh(\Omega)$ e φ_A a sentença construída no Teorema 3.2.4. Então temos*

$$\forall B \in Sh(\Omega) : [\sigma]_B = \top \iff [\bigvee_{[\sigma]_A = \top} \varphi_A]_B = \top.$$

Demonstração: Seja $B \in Sh(\Omega)$.

$\Rightarrow$: Seja $[\sigma]_B = \top$. Como $[\varphi_B]_B = \top$, temos que

$$[\bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} \varphi_A]_B = \bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} [\varphi_A]_B = \top.$$

$\Leftarrow$: Seja $[\bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} \varphi_A]_B = \bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} [\varphi_A]_B = \top$.

Então, existe uma família $\{p_A\}_{A, [\sigma]_A = \top}$ tal que

$$p_A \in \Omega, \quad p_A \neq \perp, \quad [\varphi_A]_B = p_A, \quad \forall A \text{ tal que } [\sigma]_A = \top \quad \text{e} \quad \bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} p_A = \top.$$

Mostraremos o seguinte

Fato: $A|_{p_A} \equiv_k B|_{p_A} \quad \forall A, \text{ tal que } [\sigma]_A = \top$.

Prova: Seja A tal que $[\sigma]_A = \top$.

Como $[\varphi_A]_A = \top$ - pela construção - temos que $[\varphi_A]_{A|_{p_A}} = p_A$.

Por outro lado, vale que $[\varphi_A]_B = p_A$.

Portanto $[\varphi_A]_{B|_{p_A}} = p_A$.

Pelo Corolário 3.2.5, existe agora $(h : A|_{p_A} \rightarrow B|_{p_A}) \in Q_k(p_A)$.

Pelo Teorema de Fraïssé, estabelecemos o Fato.

Como $[\sigma]_{A|_{p_A}} = p_A$ e pelo Fato obtemos

$$[\sigma]_{B|_{p_A}} = p_A \quad \forall A, \text{ tal que } [\sigma]_A = \top.$$

Logo, $[\sigma]_B = \bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} [\sigma]_{B|_{p_A}} = \bigvee_{A, [\sigma]_A = \top} p_A = \top$. ■

Capítulo 4

Feixificação, Mudança de Base e Completude

Neste capítulo apresentaremos um funtor de feixificação de H -conjuntos ao longo de certos tipos de morfismos de troca de base, que apontam de H em uma álgebra de Heyting completa. Os principais resultados valem também para pré-feixes, mas fixaremos nossa atenção em H -conjuntos nos quais o conjunto de seções globais é denso. Desenvolveremos também critérios para que o funtor feixificação seja um L -monomorfismo elementar, descrevendo condições para que este funtor comute com produtos finitos.

Como aplicação deste conjunto de idéias, na seção 4.3 provaremos que se $\mathfrak{T}$ é uma teoria intuicionista consistente em uma linguagem de primeira ordem com igualdade, então existe uma aHc Ω tal que $\mathfrak{T}$ tem modelo em $Sh(\Omega)$. Muito embora este resultado seja bem conhecido, não parece haver uma exposição do mesmo na literatura. Por exemplo, em [14] o resultado é o enunciado (Teorema 5.22), remetendo o leitor para [39], onde também não consta uma prova. A idéia de construir um modelo com base na álgebra de Lindenbaum de $\mathfrak{T}$ remonta à tese de doutorado de H. Rasiowa, desenvolvendo conceitos introduzidos por A. Mostowski, sendo exposta, com outra formulação, em [37] e [38]. A prova de que toda teoria intuicionista consistente tem modelo em Ω -cj aparece em [40]¹, mas a construção de um feixe que seja modelo de $\mathfrak{T}$ parece permanecer fora da literatura.

4.1 O funtor c_μ

Relembramos a definição dos tipos de morfismos que usaremos a seguir.

Definição 4.1.1 *Se $R \in S$ são reticulados, uma função $f : R \longrightarrow S$ é um*

- (1) *$\wedge$ -morfismo se f preserva ínfimos finitos;*
- (2) *morfismo de reticulados se f preserva ínfimos e supremos finitos.*

¹ Embora o autor só descobriu este fato após ter construído a prova que segue.

(3) $[\wedge, \vee]$ -**morfismo** se f preserva ínfimos finitos e supremos arbitrários, isto é, se $T \subseteq R$ e $\bigvee T$ existe em R então $\bigvee_{t \in T} f(t)$ existe em S e temos

$$f(\bigvee T) = \bigvee_{t \in T} f(t).$$

(4) **morfismo completo** se f preserva todos os supremos e ínfimos².

(5) **imersão regular** se f for um morfismo completo e injetor.

No caso em que R e S são álgebras de Heyting,

(6) f é um **morfismo de aH** se f preserva supremos e ínfimos finitos, bem como a implicação $\rightarrow$.

(7) f é um **morfismo aberto** se f for um morfismo completo que preserva a implicação.

(8) f é uma **imersão aberta** se f for uma imersão regular que preserva a implicação.

Note que se R e S são reticulados completos, então as condições (3) e (4) em 4.1.1 têm as suas acepções usuais. O importante aqui é que iremos utilizar estes conceitos para reticulados que não são necessariamente completos.

A noção de morfismo entre H -conjuntos de bases distintas é o conteúdo da

Definição 4.1.2 Sejam H e L álgebras de Heyting, A um H -conjunto e B um L -conjunto. Um par $\langle f, \mu \rangle$ é um **morfismo de A para B** se $f : |A| \rightarrow |B|$ é uma função e $\mu : H \rightarrow L$ é um $\wedge$ -morfismo tal que para todo $a, b \in |A|$

$$[cbmor\ 1] : E_B f a = \mu(E_A a); \quad [cbmor\ 2] : [f a = f b]_B \geq \mu([a = b]_A).$$

Se A é um H -conjunto, B é um L -conjunto e C é um R -conjunto e

$$A \xrightarrow{\langle f, \mu \rangle} B \xrightarrow{\langle g, \nu \rangle} C$$

são morfismos, é fácil ver que $\langle g \circ f, \nu \circ \mu \rangle : A \rightarrow C$ é um morfismo, denominado **composição** de $\langle f, \mu \rangle$ e $\langle g, \nu \rangle$. Além disso, o par $\langle Id_A, Id_H \rangle$ é o morfismo identidade do objeto A . Estas definições e propriedades dão origem a uma categoria, **aH-cj**, dos conjuntos parametrizados por álgebras de Heyting.

Está claro que estas definições valem também para as categorias de pré-feixes e feixes de base variável, indicadas respectivamente por **pSh(aHc)** e **Sh(aHc)**.

Observação 4.1.3 Se A e B são H -conjuntos a definição de morfismo em **H-cj** é o caso particular de 4.1.2 onde $\mu = Id_H$, correspondendo às condições [mor 1] e [mor 2] descritas na seção 1.2. ■

Lema 4.1.4 Sejam Λ, Ω álgebras de Heyting completas. Sejam A um Λ -conjunto extensional, B um Ω -conjunto extensional e $D \subseteq |A|$ denso em A (1.3.2).

a) Se $\langle f, \mu \rangle, \langle g, \nu \rangle : A \rightarrow B$ são morfismos e μ é um $[\wedge, \vee]$ -morfismo, então $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$.

² Na mesma acepção que em (3).

b) Se B é um feixe sobre Ω e $\langle f_0, \mu \rangle : D \rightarrow B$ é uma aplicação tal que $\forall s, s' \in D$

(i) $\mu : \Lambda \rightarrow \Omega$ é $[\wedge, \vee]$ -morfismo;

(ii) $E f_0 s = \mu(Es)$;

(iii) $\mu([s = s']) \leq [f_0 s = f_0 s']$.

então existe um único morfismo de feixes $\langle f, \mu \rangle : A \rightarrow B$ estendendo $\langle f_0, \mu \rangle$.

Demonstração: a) Sejam $\alpha \in D, a \in |A|$. Então

$$\begin{aligned} [fa = ga] &\geq [fa = f\alpha] \wedge [f\alpha = g\alpha] \wedge [ga = g\alpha] = [fa = f\alpha] \wedge E f \alpha \wedge [ga = g\alpha] \\ &\geq \mu([a = \alpha]) \wedge \mu(E\alpha) = \mu([a = \alpha]), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do fato que f e g coincidem em D . Como μ é $[\wedge, \vee]$ -morfismo e $D \subseteq_d |A|$, temos

$$[fa = ga] \geq \bigvee_{\alpha \in D} \mu([a = \alpha]) = \mu(\bigvee_{\alpha \in D} [a = \alpha]) = \mu(Ea) = E f a = E g a,$$

e portanto $fa = ga \quad \forall a \in |A|$.

b) A unicidade é consequência de (a). Para a existência da extensão, note que se $a \in |A|$, é fácil verificar que

$$\{(f_0 \alpha)_{|\mu([a=\alpha])} : \alpha \in D\} \text{ é compatível em } B.$$

Como B é um feixe em Ω , existe um único $y^a \in |B|$ tal que:

$$E y^a = \mu(Ea) \quad \text{e} \quad y^a_{|\mu([a=\alpha])} = f_0 \alpha_{|\mu([a=\alpha])}. \quad (I)$$

Definimos $f : |A| \rightarrow |B|$ por $a \mapsto f(a) := y^a$. Mostraremos que $\langle f, \mu \rangle$ é a extensão procurada de $\langle f_0, \mu \rangle$.

* Para $\alpha \in D$, note que $f_0(\alpha)$ satisfaz as condições em (I); logo, a unicidade implica $f(\alpha) = f_0(\alpha)$, mostrando que f é uma extensão de f_0 .

* Para mostrar que $\langle f, \mu \rangle$ é um morfismo, sejam $s, t \in |A|$. Está claro que $E f t = E y^t = \mu(Et)$, verificando [cbmor 1]. Para [cbmor 2], temos

$$\begin{aligned} [ft = fs]_B &= [y^t_{|\mu(Et)} = y^s_{|\mu(Es)}]_B = [y^t_{|\mu(\bigvee_{a \in D} [t=a])} = y^s_{|\mu(\bigvee_{b \in D} [s=b])}]_B \\ &= \bigvee_{a \in D} \bigvee_{b \in D} [y^t_{|\mu([t=a])} = y^s_{|\mu([s=b])}]_B = \bigvee_{a \in D} \bigvee_{b \in D} [f_0 a_{|\mu([t=a])} = f_0 b_{|\mu([s=b])}]_B \\ &\geq \bigvee_{a \in D} \bigvee_{b \in D} \mu([a_{|[t=a]} = b_{|[s=b]}]_A) = \bigvee_{a \in D} \bigvee_{b \in D} \mu([t_{|[t=a]} = s_{|[s=b]}]_A) \\ &= \mu([t_{|\bigvee_{a \in D} [t=a]} = s_{|\bigvee_{b \in D} [s=b]}]_A) = \mu([t = s]_A), \end{aligned}$$

terminando a prova. ■

Observação 4.1.5 Se no item (b) do Lema 4.1.4 f_0 satisfaz

$$\mu([s = s']_A) = [f_0 s = f_0 s']_B \quad \forall s, s' \in D,$$

então é claro da demonstração que o mesmo vale para a extensão f . ■

Lema 4.1.6 Se $\langle f, \mu \rangle : A \longrightarrow B$ é um morfismo tal que μ é injetor e f satisfaz

$$[fa = fb] = \mu([a = b]) \quad \forall a, b \in |A|,$$

então f é injetor.

Demonstração: Sejam $a, b \in |A|$ tais que $fa = fb$. Então:

$$Efa = \mu(Ea) = Efb = \mu(Eb) = [fa = fb] = \mu([a = b]).$$

Como μ é injetor concluímos que $Ea = Eb = [a = b]$, e a extensionalidade de A acarreta $a = b$, mostrando que f é injetor. ■

Vamos agora indicar o análogo para conjuntos parametrizados por álgebras de Heyting da noção de **imagem por mudança de base** que aparece na teoria clássica de feixes.

Seja H uma aH e A um H -conjunto. Seja $\mu : H \longrightarrow L$ um $\wedge$ -morfismo de álgebras de Heyting. Definimos um L -conjunto, A_μ , da forma seguinte :

$$* |A_\mu| = |A|; \quad * \text{ Para } a, b \in |A|. \quad [a = b]_{A_\mu} = \mu([a = b]_A).$$

Está claro que a função $[\cdot = \cdot]_{A_\mu}$ é simétrica. Para $a, b, c \in |A|$, como μ é um $\wedge$ -morfismo, temos

$$\begin{aligned} [a = b]_{A_\mu} \wedge [b = c]_{A_\mu} &= \mu([a = b]_A) \wedge \mu([b = c]_A) = \mu([a = b]_A \wedge [b = c]_A) \\ &\leq \mu([a = c]_A) = [a = c]_{A_\mu}. \end{aligned}$$

verificando que A_μ é, de fato, um L -conjunto, denominado **imagem de A ao longo de μ** . Note que para todo $a \in |A|$

$$E_{A_\mu} a = \mu(E_A a).$$

Além disso, $\langle Id_A, \mu \rangle : A \longrightarrow A_\mu$ é um morfismo. A construção “imagem ao longo de μ ” é um funtor covariante de $\mathbf{H-cj}$ em $\mathbf{L-cj}$. Se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de H -conjuntos, definimos

$$f_\mu : A_\mu \longrightarrow B_\mu, \text{ dado por } |A| \ni a \mapsto fa \in |B|.$$

Note que como $E_A a = E_B fa$, temos

$$E_{A_\mu} a = \mu(E_A a) = \mu(E_B fa) = E_{B_\mu} f_\mu a,$$

enquanto que o fato de que todo $\wedge$ -morfismo é crescente fornece

$$[f_\mu a = f_\mu b]_{B_\mu} = \mu([fa = fb]_B) \geq \mu([a = b]_A) = [a = b]_{A_\mu},$$

verificando que f_μ é um morfismo de A_μ em B_μ . É fácil mostrar que

$$(Id_A)_\mu = Id_{A_\mu} \quad \text{e} \quad (f \circ g)_\mu = f_\mu \circ g_\mu.$$

Lema 4.1.7 Seja $\mu : H \longrightarrow L$ um $\wedge$ -morfismo de álgebras de Heyting.

a) Sejam A um H -conjunto extensional e $\mu : H \longrightarrow L$ um $\wedge$ -morfismo injetor, então, A_μ é um L -conjunto extensional.

b) Se C é um L -conjunto e $\langle g, \mu \rangle : A \longrightarrow C$ é um morfismo, então existe um único morfismo de L -conjuntos, $f : A_\mu \longrightarrow C$, que faz comutar o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\langle Id_A, \mu \rangle} & A_\mu \\ & \searrow \langle g, \mu \rangle & \swarrow f \\ & C & \end{array}$$

c) Se D é denso em A e μ é um $[\wedge, \vee]$ -morfismo então, D é denso em A_μ .

d) O funtor “imagem ao longo de μ ” preserva produtos, isto é, se $A_1, \dots, A_n$, são H -conjuntos então

$$\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)_\mu \text{ é naturalmente isomorfo a } \prod_{i=1}^n A_{i\mu}.$$

e) Se $h \in Ch(n, A)$, e definimos

$$\mu h : |A_\mu|^n \longrightarrow L, \text{ dada por } \mu h(a_1, \dots, a_n) = \mu(h(a_1, \dots, a_n)),$$

então μh é uma função característica em A_μ .

Demonstração: a) Para $a, b \in |A|$, temos que

$$E_{A_\mu} a = E_{A_\mu} b = [a = b]_{A_\mu}$$

implica $\mu(E_A a) = \mu(E_A b) = \mu([a = b]_A)$, e a injetividade de μ , juntamente com a extensionalidade de A implicam $a = b$, como necessário.

b) Definimos, para $a \in |A|$, $fa = ga$. É imediato que f é o único morfismo de L -conjuntos e que faz comutar o diagrama do enunciado.

c) Para $a \in |A|$, temos $E_A a = \bigvee_{d \in D} [a = d]_A$. Como μ preserva supremos, concluímos

$$E_{A_\mu} a = \mu(E_A a) = \bigvee_{d \in D} \mu([a = d]_A) = \bigvee_{d \in D} [a = d]_{A_\mu},$$

mostrando que D é denso em A_μ .

d) É suficiente mostrar que se A, B são H -conjuntos então

$$(A \times B)_\mu \text{ é isomorfo a } A_\mu \times B_\mu.$$

Lembrando que $|A \times B| = \{\langle a, b \rangle \in |A| \times |B| : Ea = Eb\}$, o leitor não terá dificuldade em verificar que a aplicação

$$|A \times B| \ni \langle a, b \rangle \longmapsto \langle a, b \rangle \in |A_\mu \times B_\mu|$$

é um isomorfismo de L -conjuntos.

A prova de (e) é consequência imediata das definições. ■

O seguinte resultado aparece em [31].

Teorema 4.1.8 *Seja A um Ω -conjunto extensional, onde Ω é uma álgebra de Heyting completa. Então, existe um feixe cA sobre Ω e um morfismo $c : A \rightarrow cA$ tal que*

- (1) *Para todo $a, b \in |A|$, $[a = b] = [ca = cb]$;*
- (2) *A imagem de c é densa em cA (1.3.2);*
- (3) *Se B é um feixe sobre Ω e $f : A \rightarrow B$ é um morfismo, existe um único morfismo $cf : cA \rightarrow B$ que faz comutar o seguinte diagrama :*

O feixe cA denomina-se o **completado** ou **feixificação** de A sobre Ω . De 4.1.8 podemos obter um resultado geral de completamento ao longo de uma mudança injetora de base :

Corolário 4.1.9 *Sejam H uma aH , Ω uma aHc e $\mu : H \rightarrow \Omega$ um $\wedge$ -morfismo injetor. Se A é um H -conjunto extensional, então, existe um feixe $c_\mu A$ sobre Ω e um morfismo $\langle c_\mu, \mu \rangle : A \rightarrow c_\mu A$, tal que*

- (1) *Para todo $a, b \in |A|$, $[c_\mu a = c_\mu b] = \mu([a = b])$.*
- (2) *A imagem de c_μ é densa em $c_\mu A$;*
- (3) *Se B é um feixe sobre Ω e $\langle f, \mu \rangle : A \rightarrow B$ é um morfismo, então existe um único morfismo $f_\mu : c_\mu A \rightarrow B$ que faz comutar o seguinte diagrama :*

Demonstração: Seja A_μ o Ω -conjunto imagem de A por μ , como definido acima. Por 4.1.7, A_μ é um Ω -conjunto extensional. Seja $c_\mu A = cA_\mu$, o completado de A_μ , fornecido pelo Teorema 4.1.8. Definimos $\langle c_\mu, \mu \rangle : A \rightarrow c_\mu A$ por

$$\langle c_\mu, \mu \rangle = \langle c, Id_\Omega \rangle \circ \langle Id_A, \mu \rangle,$$

obtendo um morfismo de A em $c_\mu A$. A verificação das propriedades (1) – (3) do enunciado é consequência direta de 4.1.8 e 4.1.7.(b). ■

O feixe $c_\mu A$ denomina-se **completamento de A ao longo de μ** . Este tipo de completamento é um funtor covariante de $\mathbf{H}\text{-}\mathbf{cj}$ em $\mathbf{Sh}(\Omega)$. Se A, B são H -conjuntos extensionais e $f : A \rightarrow B$ um morfismo de H -conjuntos, compondo f com o completado $c_\mu : B \rightarrow c_\mu B$, obtemos um morfismo de A em $c_\mu B$, $c_\mu \circ f$. Por 4.1.9, obtemos uma única extensão $c_\mu f : c_\mu A \rightarrow c_\mu B$ tal que :

$$c_\mu f \circ c_\mu = c_\mu \circ f.$$

Como

$$c_\mu(id_A) = id_{c_\mu A} \quad \text{e} \quad c_\mu(f \circ g) = c_\mu f \circ c_\mu g,$$

obtemos um funtor covariante $c_\mu : \mathbf{H}\text{-}\mathbf{cj} \rightarrow \mathbf{Sh}(\Omega)$. Da mesma maneira temos funtores covariantes de $\mathbf{pSh}(H)$ ou – no caso em que H é completa –, de $\mathbf{Sh}(H)$ em $\mathbf{Sh}(\Omega)$.

4.2 Extensão de L -estruturas em $H\text{-}\mathbf{cj}$ a $\mathbf{Sh}(\Omega)$

Nesta seção daremos uma condição para que o funtor c_μ comute com produtos finitos. Esta condição nos permitirá a extensão de L -estruturas em $\mathbf{H}\text{-}\mathbf{cj}$ à L -estruturas em $\mathbf{Sh}(\Omega)$. Em geral, não é verdade que este funtor preserva produtos finitos. Um exemplo aparece em [31].

Para pré-feixes a situação é mais amena ([31] e [33]) : se μ é um Λ -morfismo injetor de H em Ω , o funtor completamento de $\mathbf{pSh}(H)$ em $\mathbf{Sh}(\Omega)$ é “finitamente completo”, isto é, comuta com todos os limites e colimites finitos.

Se A é um H -conjunto e $p \in H$, lembramos que $A(p)$ é o conjunto das seções de extensão p em A

$$A(p) = \{x \in |A| : Ex = p\}.$$

Em particular, $A(\top)$ é o conjunto das seções globais de A .

Proposição 4.2.1 *Seja Ω uma álgebra de Heyting completa e sejam $A_1, \dots, A_n$ Ω -conjuntos, tais que $A_i(\top)$ é denso em A_i , $1 \leq i \leq n$. Então existe um único isomorfismo*

$$f : c(\prod_{i=1}^n A_i) \longrightarrow \prod_{i=1}^n cA_i$$

que faz comutar o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n A_i & \xrightarrow{c} & c(\prod_{i=1}^n A_i) \\ & \searrow & \swarrow f \\ \underbrace{c \times \dots \times c}_n & & \prod_{i=1}^n cA_i \end{array}$$

Demonstração: É suficiente provar o resultado para $n = 2$. Sejam A e B Ω -conjuntos tais que $A(\top)$ e $B(\top)$ são densos em A e B , respectivamente. A propriedade universal de 4.1.8.(3) e o morfismo

$$c \times c : A \times B \longrightarrow cA \times cB, \text{ dado por } \langle a, b \rangle \mapsto \langle ca, cb \rangle,$$

fornece um *único* morfismo $f : c(A \times B) \longrightarrow cA \times cB$ tal que o seguinte diagrama é comutativo :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{c} & c(A \times B) \\ & \searrow c \times c & \swarrow f \\ & cA \times cB & \end{array}$$

(+)

Fato : Com a notação acima,

- a) $A(\top) \times B(\top)$ é denso em $A \times B$.
- b) A imagem de $A(\top) \times B(\top)$ por c é densa em $c(A \times B)$.
- c) A imagem de $A(\top) \times B(\top)$ por $c \times c$ é densa em $cA \times cB$.

Prova : Note que $A(\top) \times B(\top) \subseteq |A \times B|$, pois para todo $\alpha \in A(\top)$ e $\beta \in B(\top)$, $E\alpha = E\beta = \top$.

- a) Para $\langle \alpha, \beta \rangle \in A(\top) \times B(\top)$, $\langle a, b \rangle \in |A \times B|$, temos $Ea = Eb = E\langle a, b \rangle$, bem como

$$E\langle a, b \rangle \geq [\langle a, b \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle] = [a = \alpha] \wedge [b = \beta].$$

Tomando o supremo em relação à $\beta \in B(\top)$ na igualdade acima, a hipótese de densidade implica

$$\begin{aligned} \bigvee_{\beta \in B(\top)} [\langle a, b \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle] &= [a = \alpha] \wedge \bigvee_{\beta \in B(\top)} [b = \beta] = [a = \alpha] \wedge Eb \\ &= [a = \alpha] \wedge Ea = [a = \alpha]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bigvee_{\langle \alpha, \beta \rangle \in A(\top) \times B(\top)} [\langle a, b \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle] &= \bigvee_{\alpha \in A(\top)} \bigvee_{\beta \in B(\top)} [\langle a, b \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle] \\ &= \bigvee_{\alpha \in A(\top)} [a = \alpha] = Ea = E\langle a, b \rangle, \end{aligned}$$

terminando a prova de (a).

- b) Isto é consequência imediata de (a), 4.1.8.(2) e a transitividade da densidade provada no Lema 1.3.3.

- c) Devemos verificar que

$$D = \{\langle c\alpha, c\beta \rangle : \alpha \in A(\top), \beta \in B(\top)\}$$

é denso em $cA \times cB$. Observe que $D \subseteq |cA \times cB|$, já que $E\alpha = E\beta = \top$. Dados

$\langle s, t \rangle \in |cA \times cB|$, $\langle c\alpha, c\beta \rangle \in D$, $a \in |A|$ e $b \in |B|$, temos, lembrando 4.1.8.(1)

$$\begin{aligned} [\langle s, t \rangle = \langle c\alpha, c\beta \rangle] &= [s = ca] \wedge [t = cb] \\ &\geq ([s = ca] \wedge [ca = c\alpha]) \wedge ([t = cb] \wedge [cb = c\beta]) \\ &= ([s = ca] \wedge [a = \alpha]) \wedge ([t = cb] \wedge [b = \beta]). \end{aligned} \quad (I)$$

Seja $p = \bigvee_{\langle c\alpha, c\beta \rangle \in D} [\langle s, t \rangle = \langle c\alpha, c\beta \rangle]$. Note que

$$p \leq Et \wedge Es = Et = Es, \quad (II)$$

pois $\langle s, t \rangle \in |A \times B|$. Como Ω satisfaz a lei $[\wedge, \vee]$ em 1.1.1, (I) implica que para cada $a \in |A|$ e $b \in |B|$ temos

$$p \geq ([s = ca] \wedge \bigvee_{\alpha \in A(\mathcal{T})} [a = \alpha]) \wedge ([t = cb] \wedge \bigvee_{\beta \in B(\mathcal{T})} [b = \beta]). \quad (III)$$

Como a hipótese de densidade acarreta $Ea = \bigvee_{\alpha \in A(\mathcal{T})} [a = \alpha]$ e $Eb = \bigvee_{\beta \in B(\mathcal{T})} [b = \beta]$, de (III) vem

$$p \geq [s = ca] \wedge Ea \wedge [t = cb] \wedge Eb = [s = ca] \wedge [t = cb]. \quad (IV)$$

Tomando supremo em relação à $b \in |B|$ em (IV), 4.1.8.(2) fornece

$$p \geq [s = ca] \wedge \bigvee_{b \in |B|} [t = cb] = [s = ca] \wedge Et,$$

e uma nova aplicação de 4.1.8.(2), após tomar supremo com respeito ao domínio de A , obtemos

$$p \geq Et \wedge Es = Es = Et$$

que tendo em vista (II), termina a prova do Fato.

Seja $D = \{\langle c\alpha, c\beta \rangle \in |cA \times cB| : \alpha \in A(\mathcal{T}) \text{ e } \beta \in B(\mathcal{T})\}$. Definimos

$$g_0 : D \longrightarrow c(A \times B) \text{ por } g_0(\langle c\alpha, c\beta \rangle) = c\langle \alpha, \beta \rangle.$$

Note que como o completamento é um morfismo,

$$Eg_0(\langle c\alpha, c\beta \rangle) = Ec\langle \alpha, \beta \rangle = E\langle \alpha, \beta \rangle = E\alpha \wedge E\beta = \top = E\langle c\alpha, c\beta \rangle,$$

enquanto que para $\alpha, \delta \in A(\mathcal{T})$ e $\beta, \gamma \in B(\mathcal{T})$, temos, por 4.1.8.(1)

$$\begin{aligned} [g_0(\langle c\alpha, c\beta \rangle) = g_0(\langle c\delta, c\gamma \rangle)] &= [c\langle \alpha, \beta \rangle = c\langle \delta, \gamma \rangle] = [\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \delta, \gamma \rangle] \\ &= [\alpha = \delta] \wedge [\beta = \gamma] = [c\alpha = c\delta] \wedge [c\beta = c\gamma] \\ &= [\langle c\alpha, c\beta \rangle = \langle c\delta, c\gamma \rangle], \end{aligned}$$

mostrando que g_0 satisfaz as condições de 4.1.4.(b) (com $\mu = Id_\Omega$). Assim, g_0 possui uma única extensão à um morfismo $g : cA \times cB \longrightarrow c(A \times B)$. Para terminar a prova, mostraremos que

$$f \circ g = Id_{cA \times cB} \quad \text{e} \quad g \circ f = Id_{c(A \times B)}, \quad (++)$$

e portanto f e g são isomorfismos inversos. Para $\alpha \in A(\mathcal{T})$ e $\beta \in B(\mathcal{T})$, a comutatividade do diagrama (+) acima fornece

$$* g(f(c(\langle \alpha, \beta \rangle))) = g(\langle c\alpha, c\beta \rangle) = g_0(\langle c\alpha, c\beta \rangle) = c(\langle \alpha, \beta \rangle);$$

$$* f(g(\langle c\alpha, c\beta \rangle)) = f(g_0(\langle c\alpha, c\beta \rangle)) = f(c(\langle \alpha, \beta \rangle)) = \langle c\alpha, c\beta \rangle,$$

de onde concluímos que, com $E = c(A(\top) \times B(\top))$,

$$(f \circ g)|_D = (Id_{cA \times cB})|_D \quad \text{e} \quad (g \circ f)|_E = (Id_{c(A \times B)})|_E.$$

Pelo Fato, E é denso em $c(A \times B)$, enquanto que D é denso em $cA \times cB$. Logo, 4.1.4.(a) (com $\mu = Id_\Omega$), garante a veracidade de $(++)$, encerrando a prova. ■

Agora é fácil provar o seguinte

Teorema 4.2.2 *Seja H uma aH , Ω uma aHc e $H \xrightarrow{\mu} \Omega$ um $[\wedge, \vee]$ -morfismo injetor que preserva $\top$. Se $A_1, \dots, A_n$ são H -conjuntos com $A_i(\top)$ denso em A_i , $1 \leq i \leq n$, então existe um único isomorfismo*

$$f : c_\mu \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \longrightarrow \prod_{i=1}^n c_\mu A_i$$

que faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n A_i & \xrightarrow{c_\mu} & c_\mu \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \\ & \searrow & \swarrow f \\ \underbrace{c_\mu \times \dots \times c_\mu}_n & & \prod_{i=1}^n c_\mu A_i \end{array}$$

Demonstração: É suficiente verificar o resultado para $n = 2$. Se A e B são H -conjuntos satisfazendo as hipóteses do enunciado, temos

* Por 4.1.7.(c), $A_\mu(\top)$ é denso em A_μ e $B_\mu(\top)$ é denso em B_μ ;

* Por 4.1.9, $c_\mu(A) = c(A_\mu)$ e $c_\mu(B) = c(B_\mu)$;

* Por 4.2.1, $c(A_\mu) \times c(B_\mu) \cong c(A_\mu \times B_\mu)$;

* Por 4.1.7.(d), $(A \times B)_\mu = A_\mu \times B_\mu$,

de onde concluímos que

$$c_\mu(A \times B) = c((A \times B)_\mu) = c(A_\mu \times B_\mu) \cong cA_\mu \times cB_\mu = c_\mu A \times c_\mu B,$$

como desejado. ■

Como os isomorfismos de 4.2.1 e 4.2.2 são naturais, passaremos, nas condições destes enunciados, a considerar os diagramas

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{c \times \dots \times c}_n : \prod_{i=1}^n A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n cA_i \\ \qquad \qquad \qquad e \\ \underbrace{c_\mu \times \dots \times c_\mu}_n : \prod_{i=1}^n A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n c_\mu A_i. \end{array} \right.$$

como o complemento e o complemento ao longo de μ , respectivamente, do produto dos A_i . Para as aplicações que temos em mente o seguinte resultado será suficiente :

Corolário 4.2.3 *Seja H uma álgebra de Heyting, Ω uma álgebra de Heyting completa e $\mu : H \longrightarrow \Omega$ um $[\wedge, \vee]$ -morfismo injetor que preserva $\top$. Seja A um H -conjunto tal que $A(\top)$ é denso em A e $n \geq 0$ um natural. Seja $\gamma : A^n \longrightarrow A$ um morfismo e $h \in Ch(n, A)$ uma função característica.*

- a) *O morfismo γ tem uma única extensão à um morfismo $c_\mu \gamma : c_\mu A^n \longrightarrow c_\mu A$.*
b) *Seja $D = A(\top)^n$; para $\vec{d} \in |A|^n$, seja $c_\mu(\vec{d}) = \langle c_\mu a_1, \dots, c_\mu a_n \rangle \in |c_\mu A|^n$. Definimos, para $\vec{t} \in |c_\mu A|^n$.*

$$c_\mu h(\vec{t}) = \bigvee_{\vec{d} \in D} [\vec{t} = c_\mu(\vec{d})] \wedge \mu(h(\vec{d})).$$

Então

- (1) $c_\mu h \in Ch(n, c_\mu A)$, consistindo-se na única extensão de h à uma função característica em $c_\mu A$;
(2) Para todo $\vec{a} \in |A|^n$, $c_\mu h(c_\mu(\vec{a})) = \mu(h(\vec{a}))$.

Demonstração: Sabemos de 4.2.1 e 4.1.7.(c) que a imagem de D por c^n é densa em $c_\mu A^n$. Assim, (a) decorre de 4.1.4.

Para (b).(1), primeiro observe que por 4.1.7.(d) e (e), μh é a única extensão de h à uma função característica em A_μ . Agora a densidade da imagem de D por c^n em $c_\mu A^n$ e a prova do Lema 1.3.7.(b) acarretam que $c_\mu h$ é a única extensão de μh (e portanto de h) à uma função característica em $c_\mu A$.

Para verificar (b).(2), seja $\vec{a} \in |A|^n$; então, lembrando 4.1.9.(1), a densidade de $A(\top)$ em A , 1.3.7.(a) e que μ preserva supremos arbitrários, obtemos

$$\begin{aligned} c_\mu h(c_\mu(\vec{a})) &= \bigvee_{\vec{d} \in D} [c_\mu(\vec{a}) = c_\mu(\vec{d})] \wedge \mu(h(\vec{d})) = \bigvee_{\vec{d} \in D} \mu([\vec{a} = \vec{d}]) \wedge \mu(h(\vec{d})) \\ &= \mu\left(\bigvee_{\vec{d} \in D} [\vec{a} = \vec{d}] \wedge h(\vec{d})\right) = \mu\left(\bigvee_{\vec{d} \in D} [\vec{a} = \vec{d}] \wedge h(\vec{a})\right) \\ &= \mu\left(h(\vec{a}) \wedge \bigvee_{\vec{d} \in D} [\vec{a} = \vec{d}]\right) = \mu(h(\vec{a}) \wedge E\vec{a}) = \mu(h(\vec{a})), \end{aligned}$$

terminando a prova. ■

É consequência imediata do Corolário 4.2.3 que se A é um H -conjunto tal que $A(\top)$ é denso em A e $\mu : H \longrightarrow \Omega$ é um $[\wedge, \vee]$ -morfismo injetor que preserva $\top$,

Qualquer L -estrutura em A pode ser estendida, de maneira única, a uma L -estrutura em $c_\mu A$.

isto é, ao seu completamento ao longo de μ . Note que os valores dos morfismos e das funções características estão determinados pelos valores em A . Para as constantes, basta compor o morfismo (ou função) que interpreta as constantes em A com c_μ , para obter a interpretação das constantes em $c_\mu A$.

O resultado seguinte é importante em aplicações :

Teorema 4.2.4 *Sejam H uma álgebra de Heyting, Ω uma álgebra de Heyting completa e $\mu : H \rightarrow \Omega$ uma imersão aberta. Seja A uma L -estrutura em **H-cj** e suponha que*

** $A(\top)$ é denso em A :*

** Para toda fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ em L e $\vec{a} \in |A|^n$, $[\varphi(\vec{a})]_A \in H$.³*

Então $c_\mu : A \rightarrow c_\mu A$ é um L -monomorfismo elementar, isto é, para toda L -fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $\vec{a} \in |A|^n$

$$[\varphi(c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} = \mu([\varphi(\vec{a})]_A).$$

Demonstração: Por indução na complexidade das fórmulas. Se $\tau(v_1, \dots, v_n)$ é um L -termo, note que 4.2.3.(a) implica que para todo $\vec{a} \in |A|^n$, $\tau^{c_\mu A}$ é a única extensão de τ^A à $c_\mu A^n$. Se $R \in \rho(n, L)$ é uma relação n -ária em L , a interpretação de R em A_μ é a única extensão da interpretação de R em A à $c_\mu A$. Segue destas observações e de 4.2.3.(b).(2) que o enunciado é verdadeiro para qualquer fórmula atômica em L .

A passagem pelos conectivos proposicionais é consequência imediata do fato que μ preserva supremos, ínfimos e a implicação. Para o quantificador existencial, temos

$$[\exists x \varphi(x; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} = \bigvee_{t \in |c_\mu A|} [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}. \quad (I)$$

Já que a imagem de $|A|$ por c_μ está contida em $|c_\mu A|$, a hipótese de indução acarreta

$$\mu([\exists x \varphi(x; \vec{a})]_A) \leq [\exists x \varphi(x; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}.$$

Por outro lado, como $[\varphi(\cdot)]_{c_\mu A}$ é uma função característica e $Et = \bigvee_{y \in A(\top)} [t = c_\mu y]$ – pois a imagem de $A(\top)$ por c_μ é densa em $c_\mu A$ –, a equação em (I), 1.3.6.(b) e a hipótese de indução fornecem

$$\begin{aligned} [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} &= \bigvee_{y \in A(\top)} [t = c_\mu y]_{c_\mu A} \wedge [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \leq \bigvee_{y \in A(\top)} \mu([\varphi(y; \vec{a})]_A) \\ &= \mu\left(\bigvee_{y \in A(\top)} [\varphi(y; \vec{a})]_A\right) \leq \mu([\exists x \varphi(x; \vec{a})]_A). \end{aligned}$$

Como a relação precedente vale para todo $t \in |c_\mu A|$, (I) implica que

$$[\exists x \varphi(x; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \leq \mu([\exists x \varphi(x; \vec{a})]_A),$$

completando o argumento para o quantificador existencial. Para o quantificador universal, é fácil verificar que como μ preserva ínfimos e implicação, a hipótese de indução implica

$$[\forall x \varphi(x; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \leq \mu([\forall x \varphi(x; \vec{a})]_A).$$

³ Isto é, o valor de φ em $\vec{a}$ segundo a Definição 2.2.8 está em H .

Para a outra desigualdade, a lei de *Modus Ponens* ([MP] em 1.1.1) e o fato de que $[\varphi(\cdot)]_{c_\mu A}$ é uma função característica implicam que para todo $b \in |A|$,

$$\begin{aligned} [t = c_\mu b] \wedge (Ec_\mu b \rightarrow [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}) &= [t = c_\mu b] \wedge Ec_\mu b \wedge (Ec_\mu b \rightarrow [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}) \\ &= [t = c_\mu b] \wedge [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \\ &\leq [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}. \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que para todo $b \in |A|$

$$Ec_\mu b \rightarrow [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \leq [t = c_\mu b] \rightarrow [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}.$$

Consequentemente, tomando ínfimo em relação à $b \in |A|$ de ambos os lados, 1.1.5.(b) fornece, lembrando que $Et = \bigvee_{b \in |A|} [t = c_\mu b]$,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{b \in |A|} Ec_\mu b \rightarrow [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} &\leq \bigwedge_{b \in |A|} [t = c_\mu b] \rightarrow [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \\ &\leq \left(\bigvee_{b \in |A|} [t = c_\mu b] \right) \rightarrow [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \\ &\leq Et \rightarrow [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}. \end{aligned}$$

Como esta desigualdade vale para todo $t \in |c_\mu A|$, e $\mu(Eb) = Ec_\mu b$ ($\langle c_\mu, \mu \rangle$ é um morfismo), a hipótese de indução garante que

$$\begin{aligned} \mu([\forall x \varphi(x; \vec{a})]_A) &= \mu(E\vec{a}) \wedge \bigwedge_{b \in |A|} \mu(Eb) \rightarrow \mu([\varphi(b; \vec{a})]_A) \\ &= Ec_\mu(\vec{a}) \wedge \bigwedge_{b \in |A|} Ec_\mu b \rightarrow [\varphi(c_\mu b; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \\ &\leq Ec_\mu(\vec{a}) \wedge \bigwedge_{t \in |c_\mu A|} Et \rightarrow [\varphi(t; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A} \\ &= [\forall x \varphi(x; c_\mu(\vec{a}))]_{c_\mu A}, \end{aligned}$$

terminando a demonstração. ■

Observação 4.2.5 Todos os resultados desta seção valem para pré-feixes, sem a necessidade da hipótese de que o conjunto das seções globais seja denso. Quando necessário utilizaremos estes resultados também neste caso. ■

4.3 Completude Intuicionista em $Sh(\Omega)$

Seja $\mathfrak{I}$ uma teoria do Cálculo de Predicados Intuicionista (2.2.11) em uma linguagem L de primeira ordem com igualdade. Sejam $T := Term(L)$ o conjunto dos L -termos e $Form(L)$ o conjunto das L -fórmulas. Introduzimos em T e $Form(L)$ relações de equivalência, indicadas pelo mesmo símbolo $\sim$, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \tau_1 \sim \tau_2 & \text{sse } \mathfrak{I} \vdash_I \tau_1 = \tau_2; \\ \varphi \sim \psi & \text{sse } \mathfrak{I} \vdash_I \varphi \leftrightarrow \psi. \end{cases}$$

Indicamos por $\underline{\tau}$ e $\|\varphi\|$ a classe de equivalência de τ e φ , respectivamente e escrevemos $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ para a coleção das classes de equivalência das fórmulas de L por $\sim$; $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ denomina-se a **álgebra de Lindenbaum** de $\mathfrak{I}$. Há uma ordem parcial $\leq$ em $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, definida por

$$\|\varphi\| \leq \|\psi\| \quad \text{sse} \quad \mathfrak{I} \vdash_I \varphi \rightarrow \psi.$$

Com o Cálculo Intuicionista de 2.2.11 - veja [13], [37] ou [38] - podemos provar que $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ é uma álgebra de Heyting com supremos e ínfimos correspondendo às L -fórmulas existenciais e universais respectivamente. Em particular, para $\varphi, \psi \in \text{Form}(L)$, se a variável x não ocorre livre em φ , temos que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi \diamond \psi\| = \|\varphi\| \diamond \|\psi\|; \\ \|\neg \varphi\| = \neg \|\varphi\|; \\ \|\exists x \varphi\| = \bigvee_{t \in \text{Term}(L)} \|\varphi(\underline{t})\|; \\ \|\forall x \varphi\| = \bigwedge_{t \in \text{Term}(L)} \|\varphi(\underline{t})\|, \end{array} \right. \quad (\mathfrak{A})$$

onde $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e os conectivos no lado direito das equações têm seu sentido usual numa aH. Além disso, $\top$ em $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ é a classe dos teoremas de $\mathfrak{I}$, enquanto que $\perp$ é a classe das contradições, isto é, $\perp = \|\varphi \wedge \neg \varphi\|$, onde φ é qualquer fórmula de L .

Definimos um $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ -conjunto T pelas seguintes prescrições :

- (i) $|T| := \{\underline{t} : t \in \text{Term}(L)\}$;
- (ii) Para $\tau_1, \tau_2 \in \text{Term}(L)$, $[\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2] := \|\tau_1 = \tau_2\|$.

É fácil ver que esta igualdade é independente de representantes.

Lema 4.3.1 *T é um $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ -conjunto extensional, onde todas as seções são globais.*

Demonstração: A prova de que T é um $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ -conjunto é imediata dos axiomas de igualdade em 2.2.11. Note que se $\tau \in |T|$, então $[\underline{\tau} = \underline{\tau}] = \|\tau = \tau\| = \top$ em $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$. Por outro lado, se

$$\top = [\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2] = \|\tau_1 = \tau_2\|,$$

então $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2$, verificando a extensionalidade de T . ■

Para facilitar a notação, e quando nenhuma confusão puder ocorrer, utilizaremos τ para indicar (também) a classe $\underline{\tau}$ em T .

Definição 4.3.2 *Seja T o $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ -conjunto extensional definido acima. Fazemos de T uma L -estrutura, denominada **L -estrutura canônica para $\mathfrak{I}$** , do modo seguinte :*

- Se $n \geq 0$ é um natural e $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n \in |T|$.*
- * Para todo $R \in \rho(n, L)$, inclusive $=$, $[R(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T = \|R(t_1, \dots, t_n)\|$.*
- * Para todo $\omega \in \text{op}(n, L)$, $\omega^T(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) = \underline{\omega(t_1, \dots, t_n)}$.*
- * Para todo símbolo de constante $d \in \text{ct}(L)$, $d^T = \underline{d}$.*

Segue dos axiomas de igualdade em 2.2.11 que as definições em 4.3.2 são independentes de representantes e que temos

Lema 4.3.3 Com a notação acima, para todo $n \geq 0$, $R \in \rho(n, L)$ e $\omega \in op(n, L)$, $[R(\cdot)]_T$ e ω^T são, respectivamente, uma função característica em T e um morfismo de $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ -conjuntos. ■

Observação 4.3.4 Se utilizarmos a noção de prova no Cálculo Clássico no lugar da Intucionista, é bem conhecido que $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ é uma álgebra de Boole. Todas as construções feitas abaixo aplicam-se também ao caso clássico, fornecendo modelos para $\mathfrak{T}$ em álgebras de Boole e em feixes sobre álgebras de Boole completas. ■

Em seguida, mostraremos que T é modelo de $\mathfrak{T}$ na categoria dos $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ -conjuntos. Indução na complexidade dos termos fornece o

Lema 4.3.5 Se τ é um termo em L , então $\tau^T = \underline{\tau}$. ■

Para fórmulas temos a

Proposição 4.3.6 Seja $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula de L e $t_1, \dots, t_n$ termos em L . Então

$$[\varphi(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T = \|\varphi(t_1, \dots, t_n)\|.$$

Demonstração: Por indução sobre a complexidade das L -fórmulas. Para fórmulas atômicas a conclusão segue imediatamente da definição 4.3.2 e de 4.3.5. A passagem pelos conectivos é consequência direta da hipótese de indução. Para o quantificador existencial temos, lembrando as igualdades em $(\mathfrak{A})$ acima

$$\begin{aligned} [\exists x \varphi(x; \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T &= \bigvee_{t \in Term(L)} [\varphi(\underline{t}; \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T = \bigvee_{t \in Term(L)} \|\varphi(t; t_1, \dots, t_n)\| \\ &= \|\exists x \varphi(x; t_1, \dots, t_n)\|. \end{aligned}$$

como desejado. Para o quantificador universal, lembrando que todas as seções de T são globais e que $p = (\top \rightarrow p)$ em qualquer aH, obtemos

$$\begin{aligned} [\forall x \varphi(x; \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T &= \bigwedge_{t \in Term(L)} [\varphi(\underline{t}; \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)]_T = \bigwedge_{t \in Term(L)} \|\varphi(t; t_1, \dots, t_n)\| \\ &= \|\forall x \varphi(x; t_1, \dots, t_n)\|. \end{aligned}$$

como desejado. ■

Corolário 4.3.7 Sejam $\mathfrak{T}$ uma L -teoria consistente e φ uma L -sentença. Se T é a L -estrutura canônica para $\mathfrak{T}$, então

$$\mathfrak{T} \vdash_I \varphi \quad \text{sse} \quad [\varphi]_T = \top.$$

isto é, T é um modelo para $\mathfrak{T}$ na categoria dos $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ -conjuntos. ■

A construção acima e o Teorema 4.2.4 fornecem o

Teorema 4.3.8 *Se $\mathfrak{T}$ é uma teoria intuicionista consistente em uma linguagem de primeira ordem com igualdade, então existe uma álgebra de Heyting completa Ω tal que $\mathfrak{T}$ tem modelo na categoria dos feixes sobre Ω .*

Demonstração: Em [31] mostra-se (Teorema 6, p. 100) que se H é uma álgebra de Heyting, Ω é uma álgebra de Heyting completa e $\mu : H \rightarrow \Omega$ é uma imersão regular tal que $\mu(H)$ é uma base para Ω , então μ é uma imersão aberta. Este é o caso, em particular, para o completamento de toda aH. Assim, se H é uma álgebra de Heyting, existe uma aHc H_* e uma imersão aberta $\mu : H \rightarrow H_*$.

Seja $\mu : \mathfrak{A}(\mathfrak{T}) \rightarrow \Omega$ o completamento da álgebra de Lindenbaum de $\mathfrak{T}$. Como a estrutura canônica para $\mathfrak{T}$, a L -estrutura T na categoria dos $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ -conjuntos, só possui seções globais, o Teorema 4.2.4 garante que o morfismo c_μ de completamento de T ao longo de μ é um L -monomorfismo elementar. Segue então de 4.3.7 que $c_\mu T$ é um modelo de $\mathfrak{T}$ em $\mathbf{Sh}(\Omega)$, como desejado. ■

Uma consequência standard de 4.3.8 é o

Corolário 4.3.9 *Seja $\mathfrak{T}$ uma teoria intuicionista numa linguagem de primeira ordem e φ uma L -sentença. As seguintes condições são equivalentes :*

- (1) $\mathfrak{T} \vdash_I \varphi$;
- (2) Para toda álgebra de Heyting completa e toda L -estrutura A em $\mathbf{Sh}(\Omega)$,
$$A \Vdash \mathfrak{T} \Rightarrow A \Vdash \varphi.$$

■

O argumento usado na prova de 4.3.8 mostra que vale o seguinte

Teorema 4.3.10 *Seja $\mathfrak{T}$ uma teoria intuicionista consistente em uma linguagem de primeira ordem com igualdade e Ω uma aHc. Se existe uma imersão aberta da álgebra de Lindenbaum de $\mathfrak{T}$ em Ω , então $\mathfrak{T}$ tem modelo na categoria dos feixes sobre Ω .* ■

Problema : Será a recíproca de 4.3.10 verdadeira ?

Capítulo 5

Modelos de Teorias Intuicionistas

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema da Existência de Modelos para teorias intuicionistas consistentes em uma linguagem de primeira ordem L , utilizando feixes sobre *espaços topológicos*. Além disso, usamos o método das constantes, generalizando para a Lógica Intuicionista o Teorema de Omissão de Tipos.

A importância de ter métodos de construir modelos na categoria dos espaços topológicos é que podemos utilizar os resultados da Topologia, alguns dos quais não têm tradução para as aHc's. Além disso, diferente do que foi feito na seção 4.3 do Capítulo anterior, quando discutimos modelos sobre álgebras de Heyting completas, lidaremos só com *sentenças e termos fechados*, não com todas as fórmulas e termos. O método utilizado para construção de modelos é uma adaptação das idéias de Leon Henkin. No entanto, há um preço a pagar por estas vantagens: nosso resultado na categoria dos feixes sobre espaços topológicos vale para teorias na linguagem $L^\sharp$, como definida em 2.2.16. Os passos fundamentais da construção são os resultados do Capítulo 4, juntamente com o fato de que o conjunto das teorias *primas* que estendem um conjunto consistente de sentenças em L é um **espaço espectral**, no sentido da Geometria Algébrica.

A primeira seção deste Capítulo apresenta os resultados fundamentais nos quais se baseiam as aplicações descritas nas seções seguintes : o Teorema de Existência de Modelos gerados por constantes e a generalização que apresentamos do Teorema de Omissão de Tipos.

5.1 O espaço das extensões primas

Seja L uma linguagem usual de primeira ordem com igualdade e $Sent(L)$ o conjunto das sentenças em L . Lembramos a seguinte

Definição 5.1.1 *Seja Σ um conjunto de sentenças em L .*

a) Σ é teoria se for fechado por $\vdash_I$, isto é, para toda sentença φ em L

$$\Sigma \vdash_I \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma.$$

b) Σ é **consistente** se não existe uma sentença φ em L tal que $\Sigma \vdash_I \neg \varphi \wedge \varphi$.

Em tudo que segue a palavra **teoria** será sinônima de **teoria consistente**.

c) Σ é uma **teoria prima** se para quaisquer sentenças φ, ψ em L

$$(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Rightarrow \varphi \in \Sigma \text{ ou } \psi \in \Sigma.$$

d) Σ é **de Henkin** se for consistente e para toda sentença $\exists x \varphi(x)$ em L , existe uma constante c em L tal que $(\exists x \varphi \rightarrow \varphi(c)) \in \Sigma$.

e) Se Σ é um conjunto consistente de sentenças, $S \subseteq \text{Sent}(L)$ e $\varphi \in \text{Sent}(L)$, definimos

$$\begin{cases} S^\rightarrow = \{\varphi \in \text{Sent}(L) : S \vdash_I \varphi\}; \\ I_\Sigma(S) = \{\varphi \in \text{Sent}(L) : \exists \sigma_1, \dots, \sigma_n \text{ em } S \text{ tal que } \Sigma, \varphi \vdash_I \sigma_1 \vee \dots \vee \sigma_n\}. \\ \varphi^\leftarrow = \{\sigma \in \text{Sent}(L) : \sigma \vdash_I \varphi\}. \end{cases}$$

Note que $S^\rightarrow$ é a **teoria gerada por S** , isto é, a menor (na ordem da inclusão) teoria T em L tal que $S \subseteq T$.

Lema 5.1.2 Com a notação acima, suponha que Σ é consistente e que $S \subseteq \text{Sent}(L)$.

a) $I_\Sigma(S)$ é fechado por disjunções e por antecedência lógica, isto é,

$$\sigma \in I_\Sigma(S) \text{ e } \Sigma, \varphi \vdash_I \sigma \Rightarrow \varphi \in I_\Sigma(S).$$

b) Se $\varphi \in \text{Sent}(L)$, $\varphi^\leftarrow$ é fechado por disjunções e antecedência lógica.

c) Se P é uma extensão prima de Σ , então

$$D(P, L) := \{\beta \in \text{Sent}(L) : \text{Existe } \alpha \notin P \text{ tal que } \Sigma, \beta \vdash_I \alpha\},$$

é fechado por disjunções e antecedência lógica em L .

Demonstração: a) Vamos utilizar o sistema lógico em 2.2.11. A propriedade de antecedência é consequência imediata da definição. Para mostrar que $I_\Sigma(S)$ é fechado por disjunções, suponha que $\varphi, \psi \in I_\Sigma(S)$. Então, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in S$ tais que

$$\Sigma, \varphi \vdash_I \alpha \text{ e } \Sigma, \psi \vdash_I \beta,$$

onde $\alpha = (\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m)$; uma vez que $\vdash_I \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ e $\vdash_I \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, a transitividade da implicação e o Teorema da Dedução fornecem

$$\Sigma \vdash_I \varphi \rightarrow (\alpha \vee \beta) \text{ e } \Sigma \vdash_I \psi \rightarrow (\alpha \vee \beta),$$

e portanto $\Sigma \vdash_I (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, mostrando que $(\varphi \vee \psi) \in I_\Sigma(S)$.

b) O argumento para $\varphi^\leftarrow$ é análogo ao apresentado em (a).

c) Está claro que $D(P, L)$ é fechado por antecedência lógica em L . Se $\beta_1, \beta_2 \in D(P, L)$, então, existem α_1, α_2 , ambas fora de P , tais que

$$\Sigma, \beta_1 \vdash_I \alpha_1 \text{ e } \Sigma, \beta_2 \vdash_I \alpha_2.$$

Exatamente como na parte (a), estas condições implicam que $\Sigma, (\beta_1 \vee \beta_2) \vdash_I (\alpha_1 \vee \alpha_2)$. Uma vez que P é prima, temos $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \notin P$, e portanto, $(\beta_1 \vee \beta_2) \in D(P, L)$, como desejado. ■

Neste contexto temos o seguinte

Teorema 5.1.3 (da Separação) *Sejam $\Sigma \cup S \subseteq \text{Sent}(L)$ tais que Σ é consistente e que S é fechado por disjunção. Se $S \cap \Sigma^\rightarrow = \emptyset$, então existe uma teoria prima P em L tal que $\Sigma \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset$.*

Demonstração: Definimos

$$\mathcal{W} := \{\Gamma \subseteq \text{Sent}(L) : \Gamma \text{ é } L\text{-teoria consistente, } \Sigma \subseteq \Gamma \text{ e } \Gamma \cap S = \emptyset\}.$$

$\mathcal{W}$ é parcialmente ordenado por inclusão e não vazio pois $\Sigma^\rightarrow \in \mathcal{W}$. Como toda cadeia em $\mathcal{W}$ tem limitante superior (sua união), o Lema de Zorn fornece um elemento maximal P em $\mathcal{W}$. Está claro que $\Sigma \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset$. Resta mostrar que P é prima. Para isso, sejam φ e ψ L -sentenças tais que $\varphi \vee \psi \in P$; se $\varphi, \psi \notin P$, então,

$$\Phi := (P \cup \{\varphi\})^\rightarrow \text{ e } \Psi := (P \cup \{\psi\})^\rightarrow$$

são extensões próprias de P . Como P é maximal em $\mathcal{W}$, devemos mostrar que os seguintes três casos levam a um absurdo :

- (1) Ψ e Φ são inconsistentes;
- (2) $\Psi \cap S \neq \emptyset$ e $\Phi \cap S \neq \emptyset$;
- (3) Φ é inconsistente e $\Psi \cap S \neq \emptyset$ ou vice-versa.

(1) : Se Ψ e Φ são inconsistentes, existem L -sentenças σ e χ tais que:

$$P, \psi \vdash_I \sigma \wedge \neg \sigma \text{ e } P, \varphi \vdash_I \chi \wedge \neg \chi.$$

Portanto, $P \vdash_I \neg \psi$ e $P \vdash_I \neg \varphi$, isto é, $P \vdash_I \neg \psi \wedge \neg \varphi$. Como $\vdash_I (\neg \varphi \wedge \neg \psi) \leftrightarrow \neg (\varphi \vee \psi)$ e $\varphi \vee \psi \in P$, concluímos que P é inconsistente, contrariando a construção de P .

(2) : Se Ψ e Φ são consistentes, então existem $\alpha, \beta \in S$ tais que $\alpha \in \Phi$ e $\beta \in \Psi$, isto é,

$$P \vdash_I \varphi \rightarrow \alpha \text{ e } P \vdash_I \psi \rightarrow \beta.$$

O mesmo argumento que na prova do Lema 5.1.2 mostra que $P \vdash_I (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, e assim, como S é fechado por disjunções,

$$(\alpha \vee \beta) \in P \cap S,$$

contradizendo a construção de P .

(3) : Por simetria, basta tratar o caso em que Φ é inconsistente e existe $\beta \in \Psi \cap S$. Logo, temos

$$P \vdash_I \varphi \rightarrow \beta \wedge \neg \beta \text{ e } P \vdash_I \psi \rightarrow \beta.$$

Em particular, $P \vdash_I \varphi \rightarrow \beta$ e $P \vdash_I \psi \rightarrow \beta$; logo

$$P \vdash_I (\varphi \vee \psi) \rightarrow \beta,$$

e assim, $\beta \in P \cap S$, um absurdo que conclui a prova. ■

Como consequência imediata de 5.1.3 e 5.1.2 temos o

Corolário 5.1.4 *Seja Σ um conjunto consistente de sentenças em L*

- a) *Se $S \subseteq \text{Sent}(L)$ é tal que $I_\Sigma(S) \cap \Sigma^\rightarrow = \emptyset$, então existe uma teoria prima P tal que $\Sigma \subseteq P$ e $P \cap I_\Sigma(S) = \emptyset$.*
- b) *Se φ é uma L -sentença tal que $\varphi \notin \Sigma^\rightarrow$, então existe uma teoria prima P tal que $\Sigma \subseteq P$ e $\varphi \notin P$.* ■

Daqui para frente, $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ indica um conjunto consistente de L -sentenças. Definimos

$$X(\Sigma, L) := \{P : P \text{ é uma } L\text{-teoria prima e } \Sigma \subseteq P\}.$$

Para cada $\varphi \in \text{Sent}(L)$, definimos

$$V_\varphi := \{P \in X(\Sigma, L) : \varphi \in P\}.$$

Note que para toda $\varphi, \psi \in \text{Sent}(L)$

$$V_{\varphi \wedge \psi} = V_\varphi \cap V_\psi \quad \text{e} \quad V_{\varphi \vee \psi} = V_\varphi \cup V_\psi,$$

onde a segunda igualdade é decorrência do fato que os elementos de $X(\Sigma, L)$ são teorias primas. A coleção

$$V_\Sigma = \{V_\varphi : \varphi \in \text{Sent}(L)\}$$

é uma **base** para uma topologia em $X(\Sigma, L)$, denominada **topologia lógica**, indicada por $\Omega(X(\Sigma, L))$.

Corolário 5.1.5 a) *Se $\varphi \in \text{Sent}(L)$ então $V_{\varphi \wedge \neg \varphi} = \emptyset$. Além disso,*

$$V_\varphi = X(\Sigma, L) \quad \text{sse} \quad \varphi \in \Sigma^\rightarrow.$$

b) *Se φ, ψ são sentenças em L , então*

$$V_\varphi \subseteq V_\psi \quad \text{sse} \quad \Sigma, \varphi \vdash_I \psi \quad \text{sse} \quad \Sigma \vdash_I \varphi \rightarrow \psi.$$

c) *Se φ, ψ são sentenças em L , então*

$$V_{\varphi \rightarrow \psi} = V_\varphi \rightarrow V_\psi \quad \text{e} \quad V_{\neg \varphi} = \neg V_\varphi = \text{int } V_\varphi^c. \quad 1$$

Demonstração: a) A primeira relação está clara, já que todos os elementos de $X(\Sigma, L)$ são consistentes. Para segunda, é suficiente mostrar que $V_\varphi = X(\Sigma, L)$ acarreta $\varphi \in \Sigma^\rightarrow$. Mas isto decorre imediatamente de 5.1.4.(b).

b) É só aplicar 5.1.4.(b) a $\Sigma \cup \{\varphi\}$ e ψ .

c) Já que $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_I \psi$, (b) garante que

¹ A implicação e a negação do lado direito das igualdades são as da álgebra de abertos de $X(\Sigma, L)$.

$$V_\varphi \cap V_{\varphi \rightarrow \psi} = V_{\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)} \subseteq V_\psi,$$

mostrando que $V_{\varphi \rightarrow \psi} \subseteq V_\varphi \rightarrow V_\psi$. Lembrando da caracterização da implicação dada por $[\rightarrow]$ em 1.1.1. seja α uma sentença em L , tal que $V_\alpha \cap V_\varphi \subseteq V_\psi$. Devemos mostrar que $V_\alpha \subseteq V_{\varphi \rightarrow \psi}$. Como

$$V_{\alpha \wedge \varphi} = V_\alpha \cap V_\varphi \subseteq V_\psi,$$

(b) implica que $\Sigma, (\alpha \wedge \varphi) \vdash_I \psi$. É bem conhecido que esta última relação é equivalente com $\Sigma, \alpha \vdash_I (\varphi \rightarrow \psi)$, mostrando que $V_\alpha \subseteq V_{\varphi \rightarrow \psi}$, como desejado. Seja agora U um aberto de $X(\Sigma, L)$. Para completar a prova de (c). devemos mostrar que

$$U \cap V_\varphi \subseteq V_\psi \Rightarrow U \subseteq V_{\varphi \rightarrow \psi}. \quad (*)$$

Como V_Σ é uma base para a topologia de $X(\Sigma, L)$, podemos escrever

$$U = \bigcup_{i \in I} V_{\sigma_i},$$

onde $\{\sigma_i : i \in I\} \subseteq \text{Sent}(L)$. Logo, a hipótese em (*) significa que para todo $i \in I$, $V_{\sigma_i} \cap V_\varphi \subseteq V_\psi$. Pela primeira parte da prova, obtemos $V_{\sigma_i} \subseteq V_{\varphi \rightarrow \psi}$, de onde concluímos que $U \subseteq V_{\varphi \rightarrow \psi}$, como necessário. Lembrando que

$$\vdash_I \neg \varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg \psi)),$$

o resultado para a negação é consequência do demonstrado para a implicação. ■

Antes de desenvolver as propriedades do espaço topológico $X(\Sigma, L)$, lembramos alguns conceitos da topologia, que podem ser encontrados em [31].

Definição 5.1.6 *Seja Y um espaço topológico, $A \subseteq Y$, F um fechado em Y e $y \in Y$.*

a) O fecho de A em Y é indicado por $\overline{A}$.

b) F é irreduzível, se para quaisquer fechados F_1 e F_2 em Y ,

$$F_1 \cup F_2 = F \Rightarrow F_1 = F \text{ ou } F_2 = F.$$

c) y é um ponto genérico para F , se $F = \overline{\{y\}}$.

d) Y é um espaço espectral, se satisfizer as seguintes condições :

[spec 1] : Y é compacto e T_0 ;²

[spec 2] : Y tem uma base de abertos compactos;

[spec 3] : Todo fechado irreduzível e não vazio em Y tem um ponto genérico.

e) Se Y, Z são espaços espectrais, uma função $f : Y \rightarrow Z$ é espectral se for contínua e a imagem inversa de todo aberto compacto em Z é um aberto compacto em Y .

f) Y é um espaço Booleano se for compacto, Hausdorff e tiver uma base de abertos e fechados (“clopens”).

Os espaços espectrais surgiram na Geometria Algébrica : o espectro de Zariski de qualquer anel comutativo com unidade é um espaço espectral. Recíprocamente, M. Ho-

² Isto é, pontos distintos têm fechos distintos.

chster mostrou em [20] que se Y é um espaço espectral e K é um corpo, então existe uma K -álgebra cujo espectro de Zariski é homeomorfo à Y .

Como os espaços que estaremos discutindo **não são** Hausdorff, é necessário atenção com o uso standard de alguns conceitos :

* A noção de *compacidade* é a usual : toda cobertura por abertos tem sub-cobertura finita (ou toda família de fechados com a propriedade da interseção finita, tem interseção não vazia).

* A união finita de compactos é compacta; porém, a interseção finita de compactos não é mais necessariamente compacta. Todo fechado em um compacto é compacto, mas a recíproca é falsa. Assim, a condição [spec 2] em 5.1.6.(d) exige que Y possua uma família de *abertos compactos* cujas interseções finitas sejam ainda compactas e que esta coleção constitua-se em uma base para a sua topologia. Esta exigência é equivalente à :

A coleção $\Lambda(X)$ dos abertos compactos em Y é um *sub-reticulado* das partes de Y .

* A condição T_0 que aparece em [spec 1] é equivalente à seguinte : se x, y são pontos distintos em Y , então existe um aberto U em Y tal que

$$(x \in U \text{ e } y \notin U) \quad \text{ou} \quad (x \notin U \text{ e } y \in U),$$

que é claramente equivalente à $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

* Em um espaço espectral, todo fechado irredutível e não vazio tem um *único* ponto genérico. Isto é consequência da discussão anterior : se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, então $x = y$. Além disso, é claro que se F é irredutível e $F_1, \dots, F_n$ são fechados em F tais que $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $F_i = F$.

Com estes preliminares, enunciamos o

Teorema 5.1.7 *Com a topologia lógica. $X(\Sigma, L)$ é um espaço espectral.*

Demonstração: Como Σ e L permanecerão fixos ao longo da prova, indicaremos $X(\Sigma, L)$ por X . Para verificar que X é T_0 , sejam P e Q extensões primas distintas de Σ . Então, existe uma sentença α em L tal que

$$\alpha \in (P \setminus Q) \quad \text{ou} \quad \alpha \in (Q \setminus P).$$

No primeiro caso $P \in V_\alpha$ enquanto que $Q \notin V_\alpha$; no segundo temos $Q \in V_\alpha$ e $P \notin V_\alpha$, verificando que X é T_0 . O próximo passo é o

Fato 1 : Para toda $\varphi \in \text{Sent}(L)$, V_φ é compacto em X .

Prova : Seja $\mathcal{V} = \{V_{\sigma_i}\}_{i \in I}$ uma cobertura de abertos de V_φ por abertos básicos e suponha, por absurdo, que nenhuma sub-família finita de $\mathcal{V}$ recubra V_φ . Seja $S = \{\sigma_i : i \in I\}$ e S^* o conjunto das disjunções finitas de elementos de S ; então $(\Sigma \cup \{\varphi\})^\rightarrow \cap S^* = \emptyset$. Senão, existiriam $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ em S tais que

$$\Sigma, \varphi \vdash_I \sigma,$$

onde $\sigma = (\sigma_1 \vee \dots \vee \sigma_n)$; logo, $\Sigma \vdash_I \varphi \rightarrow \sigma$. Isto significa que pelo Corolário 5.1.5. b) $V_\varphi \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{\sigma_j}$, contrariando a hipótese de que nenhuma sub-família finita de $\mathcal{V}$ recobre

V_φ .

Uma vez que $(\Sigma \cup \{\varphi\})^\rightarrow \cap S^* = \emptyset$, 5.1.3 garante que existe uma teoria prima P tal que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq P$ e $P \cap S^* = \emptyset$. Portanto, $P \in V_\varphi$, mas $P \notin \bigcup_{i \in I} V_{\sigma_i}$, e $\mathcal{V}$ não é uma cobertura de V_φ . Isto conclui a prova do Fato 1.

É consequência imediata do Fato 1 e de 5.1.5 que X é um espaço compacto e T_0 , com uma base (V_Σ) de abertos compactos. Para terminar a demonstração, devemos verificar que todo fechado irreduzível em X tem ponto genérico.

Fato 2 : Para P e Q em X . $P \in \overline{\{Q\}}$ sse $P \subseteq Q$.

Prova : Vem diretamente das definições.

Fato 3 : Se F é um fechado irreduzível não vazio em X e $P = \bigcup F$, então $F = \overline{\{P\}}$.

Prova : Tendo em vista o Fato 2, é suficiente mostrar que $P \in F$. Seja $\alpha \in \text{Sent}(L)$.

(1) P é uma teoria. Se $P \vdash_I \alpha$, existem $\langle \Delta_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \Delta_n, \beta_n \rangle$, tais que para $1 \leq i \leq n$,

$$\beta_i \in \Delta_i, \Delta_i \in F \text{ e } \beta_1, \dots, \beta_n \vdash_I \alpha.$$

De $\beta_1, \dots, \beta_n \vdash_I \alpha$ obtemos $\vdash_I \beta \rightarrow \alpha$, com $\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n$. Esta relação acarreta

$$\bigcap_{i=1}^n V_{\beta_i} = V_\beta \subseteq V_\alpha. \quad (I)$$

Vamos mostrar que $V_\beta \cap F \neq \emptyset$. Senão, $\bigcup_{i=1}^n V_{\beta_i}^c \cup F^c = X$, e portanto

$$F = \bigcup_{i=1}^n F \cap V_{\beta_i}^c.$$

Note que para $1 \leq i \leq n$, $F \cap V_{\beta_i}^c$ são fechados contidos em F . Como F é irreduzível, existe $i \leq n$, tal que $F \cap V_{\beta_i}^c = F$, isto é, $V_{\beta_i} \cap F = \emptyset$. Mas isto é impossível, pois $\Delta_i \in V_{\beta_i} \cap F$.

Já que $V_\beta \cap F \neq \emptyset$, a relação em (I) implica que $V_\alpha \cap F \neq \emptyset$. Logo, existe $\Delta \in F$ tal que $\alpha \in \Delta \subseteq P$, mostrando que $\alpha \in P$ e estabelecendo que P é fechado por $\vdash_I$.

(2) P é consistente e prima. Está claro que P é uma teoria prima, pois é união de teorias primas. Suponha, para obter um absurdo, que P é inconsistente: do item (1) segue que $\alpha \in P$ e $\neg \alpha \in P$. Como as teorias em F são consistentes, existem $\Delta_1, \Delta_2 \in F$ tais que

$$\Delta_1 \in V_\alpha \cap V_{\neg \alpha}^c \text{ e } \Delta_2 \in V_{\neg \alpha} \cap V_\alpha^c.$$

Considere

$$F_1 = F \cap V_\alpha^c \text{ e } F_2 = F \cap V_{\neg \alpha}^c.$$

Note que $F_1, F_2 \neq F$, pois Δ_1 está fora de F_1 , enquanto que Δ_2 está fora de F_2 . Por outro lado, uma vez que

$$\emptyset = V_{\alpha \wedge \neg \alpha} = V_\alpha \cap V_{\neg \alpha},$$

está claro que $F_1 \cup F_2 = F$, contradizendo a irreduzibilidade de F . Portanto, P é consistente, como desejado.

Para verificar que $P \in F$, note que se $\varphi \in P$, existe $\Delta \in F$ tal que $\varphi \in \Delta$. Logo, toda vizinhança aberta de P tem interseção não vazia com F , isto é, $P \in \overline{F} = F$, terminando

a prova do Fato 3.

Os Fatos 1, 2 e 3 mostram que X satisfaz as condições de 5.1.6.(d), sendo portanto um espaço espectral. ■

Observação 5.1.8 Se tivéssemos utilizado o Cálculo Clássico, obteríamos que $X(\Sigma, L)$ é um espaço Booleano. ■

Antes de prosseguir, lembramos o enunciado de um importante resultado de interpolação, devido a W. Craig :

Teorema 5.1.9 ([22], Theorem 42, §56, p. 359) *No Cálculo de Predicados Intuicionista com igualdade, se $\vdash_I \varphi \rightarrow \psi$, então existe uma fórmula θ , cujos parâmetros linguísticos são comuns às sentenças φ e ψ , tal que $\vdash_I \varphi \rightarrow \theta$ e $\vdash_I \theta \rightarrow \psi$.* ■

No nosso contexto, 5.1.9 fornece

Corolário 5.1.10 *Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade, L' uma extensão de L^3 e $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$.*

- a) Σ é consistente em $\text{Sent}(L)$ sse Σ é consistente em $\text{Sent}(L')$.⁴
- b) Se Σ é consistente em $\text{Sent}(L)$ e $P' \in X(\Sigma, L')$, então $P' \cap \text{Sent}(L) \in X(\Sigma, L)$.

Demonstração: a) É suficiente mostrar que se Σ é consistente em L , o mesmo é verdade para L' . Suponha que

$$\Sigma \vdash_I \varphi$$

onde $\varphi \in \text{Sent}(L')$. Por compacidade, existem $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$ tais que

$$\vdash_I \sigma \rightarrow \varphi,$$

com $\sigma = (\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n)$. Por 5.1.9, existe $\psi \in \text{Sent}(L)$ tal que

$$\vdash_I \sigma \rightarrow \psi \quad \text{e} \quad \vdash_I \psi \rightarrow \varphi.$$

Se φ é uma contradição, então $\vdash_I \neg \psi$, que acarreta $\vdash_I \neg \sigma$. Logo, Σ é inconsistente em L , uma vez que σ certamente é consequência de Σ .

b) Seja $P = P' \cap \text{Sent}(L)$; está claro que $\Sigma \subseteq P$, enquanto que (a) implica que P é consistente em L . Agora observe que

* Se $\varphi \in \text{Sent}(L)$ e $P \vdash_I \varphi$, então $P' \vdash_I \varphi$, e assim, $\varphi \in P$;

* Se $\sigma = (\varphi \vee \psi) \in \text{Sent}(L)$ é tal que $\sigma \in P'$, então ou $\varphi \in P'$ ou $\psi \in P'$. Segue que $\varphi \in P$ ou $\psi \in P$,

mostrando que P é uma extensão prima de Σ em $\text{Sent}(L)$, isto é, $P \in X(\Sigma, L)$. ■

A próxima proposição é a recíproca de 5.1.10.(b):

³ Isto é, L' contém outros símbolos relacionais, funcionais ou constantes, além dos de L .

⁴ Consistência é definida em termos de provas no sistema de 2.2.11, em uma linguagem dada.

Proposição 5.1.11 *Se $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ é um conjunto consistente e L' é uma extensão de L , então para toda $P \in X(\Sigma, L)$, existe $P' \in X(\Sigma, L')$ tal que $P = P' \cap \text{Sent}(L)$.*

Demonstração: Fixada $P \in X(\Sigma, L)$, consideremos $D(P, L) \subseteq \text{Sent}(L) \subseteq \text{Sent}(L')$ (5.1.2.(c)). Sabemos que $D(P, L)$ é fechado por disjunções. Seja Λ a teoria gerada por P em $\text{Sent}(L')$; vamos mostrar que $D(P, L) \cap \Lambda = \emptyset$. Senão, existiriam $\varphi \in \text{Sent}(L')$ e $\alpha \notin P$, tais que

$$P \vdash_I \varphi \quad \text{e} \quad P \vdash_I \varphi \rightarrow \alpha. \quad (\text{I})$$

Pela compacidade da noção de prova e o fato que P é uma teoria em L , segue de (I) que existe $\sigma \in P$ tal que

$$\vdash_I \sigma \rightarrow \varphi \quad \text{e} \quad \vdash_I (\sigma \wedge \varphi) \rightarrow \alpha. \quad (\text{II})$$

Por 5.1.9, existe $\psi \in \text{Sent}(L)$ tal que $\vdash_I \sigma \rightarrow \psi$ e $\vdash_I \psi \rightarrow \varphi$. De (II), concluímos que $\vdash_I \sigma \rightarrow \alpha$. Como $\sigma \in P$, isto acarreta que $\alpha \in P$, uma contradição.

Uma vez que $D(P, L) \cap \Lambda = \emptyset$, o Teorema 5.1.3 garante que existe $P' \in X(\Sigma, L')$, tal que $P' \cap D(P, L) = \emptyset$ e $P \subseteq \Lambda \subseteq P'$. Considere $Q = P' \cap \text{Sent}(L)$; está claro que $P \subseteq Q$. Por outro lado, se $\alpha \notin P$, então $\alpha \in D(P, L)$, e portanto $\alpha \notin Q$. Isto mostra que $Q = P$, terminando a prova. ■

Se Σ é consistente em L e L' é uma extensão de L , definimos

$$\rho : X(\Sigma, L') \longrightarrow X(\Sigma, L), \text{ dada por } \rho(P') := P' \cap \text{Sent}(L).$$

Como teremos que lidar com abertos em $X(\Sigma, L)$ e $X(\Sigma, L')$, utilizaremos o recurso de marcar com apóstrofe os abertos de $X(\Sigma, L')$. Assim, para $\varphi \in \text{Sent}(L')$,

$$V'_\varphi = \{P' \in X(\Sigma, L') : \varphi \in P'\},$$

enquanto que para $\psi \in \text{Sent}(L)$,

$$V_\psi = \{P \in X(\Sigma, L) : \psi \in P\} \quad \text{e} \quad V'_\psi = \{P' \in X(\Sigma, L') : \psi \in P'\}.$$

Teorema 5.1.12 *Com a notação acima,*

- a) *Se $\varphi \in \text{Sent}(L)$ então, $\rho^{-1}(V_\varphi) = V'_\varphi$.*
- b) *ρ é uma aplicação espectral e sobrejetora de $X(\Sigma, L')$ em $X(\Sigma, L)$. Se L' é uma extensão de L por constantes, então ρ é aberta⁵.*
- c) *Seja $\rho^* : \Omega(X(\Sigma, L)) \longrightarrow \Omega(X(\Sigma, L'))$ a aplicação definida por $\rho^*(U) = \rho^{-1}(U)$. Então,*
 - (1) *ρ^* é um $[\wedge, \vee]$ -morfismo injetor de aHc's (4.1.1.(3));*
 - (2) *Se L' é uma extensão por constantes de L , ρ^* é uma imersão aberta de aHc's (4.1.1.(8)).*

Demonstração: a) Para $P' \in X(\Sigma, L')$, temos

⁵ Isto é, a imagem de qualquer aberto é aberta.

$$P' \in \rho^{-1}(V_\varphi) \text{ sse } \rho(P') \in V_\varphi \text{ sse } \varphi \in P' \cap \text{Sent}(L) \text{ sse } P' \in V'_\varphi$$

conforme necessário.

b) Que ρ é sobrejetora vem imediatamente de 5.1.11, enquanto que (a) acarreta tanto a continuidade, quanto que ρ é espectral, uma vez que V_Σ é base da topologia em $X(\Sigma, L)$ e que todo aberto compacto de $X(\Sigma, L)$ é união finita de elementos de V_Σ . Suponha agora que L' é uma extensão por constantes de L . Como

$$\rho(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \rho(A_i),$$

para qualquer família de subconjuntos em $X(\Sigma, L')$, é suficiente verificar que $\rho(V'_\psi)$ é aberto em $X(\Sigma, L)$, para toda $\psi \in \text{Sent}(L')$. Para $\psi \in \text{Sent}(L')$, $\psi(c_1, \dots, c_n)$ indica, explicitamente, as constantes de $(L' \setminus L)$ que ocorrem em ψ . Suponha que $P' \in V'_\psi$ e seja $P = \rho(P') = P' \cap \text{Sent}(L)$. Sejam $x_1, \dots, x_n$ variáveis que não ocorrem em ψ ; definimos $\varphi := \exists \vec{x} \psi(x_1, \dots, x_n)$, onde cada ocorrência de c_i em ψ foi substituída por x_i , $i \leq n$. Note que $\varphi \in \text{Sent}(L)$ e $\vdash_I \psi \rightarrow \varphi$; como $\psi \in P'$, obtemos $\varphi \in P' \cap \text{Sent}(L) = P$. Assim, $\rho(V'_\psi) \subseteq V_\varphi$. Mostraremos que $V_\varphi \subseteq \rho(V'_\psi)$. Fixemos $Q \in V_\varphi$.

Fato 1 : $Q \cup \{\psi(c_1, \dots, c_n)\}$ é consistente em L' .

Prova : Suponha que não; então existe uma sentença $\sigma \in Q$ tal que $\vdash_I \sigma \rightarrow \neg \psi(c_1, \dots, c_n)$. Como as constantes $c_1, \dots, c_n$ não ocorrem em σ , temos que

$$\vdash_I \sigma \rightarrow \forall \vec{x} \neg \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Mas então Q é inconsistente, já que $\varphi = \exists \vec{x} \psi(x_1, \dots, x_n)$ está em Q .

Seja R' a teoria gerada por $Q \cup \{\psi(c_1, \dots, c_n)\}$ em $\text{Sent}(L')$. Então

Fato 2 : Com a notação de 5.1.2.(c), $D(Q, L) \cap R' = \emptyset$.

Prova : O leitor deve lembrar que $\varphi = \exists \vec{x} \psi(x_1, \dots, x_n)$. Se a conclusão é falsa, existem $\beta \in \text{Sent}(L)$ e $\alpha \notin Q$ tal que

$$Q, \psi(c_1, \dots, c_n) \vdash_I \beta \quad \text{e} \quad Q \vdash_I \beta \rightarrow \alpha. \quad (\text{I})$$

A primeira relação em (I) e a regra de introdução do quantificador existencial fornecem

$$Q \vdash_I \varphi \rightarrow \beta,$$

que juntamente com a segunda relação em (I) acarreta $Q \vdash_I \varphi \rightarrow \alpha$, uma impossibilidade, já que $\varphi \in Q$ e $\alpha \notin Q$.

Como $R' \cap D(Q, L) = \emptyset$, o Teorema 5.1.3 garante a existência de $Q' \in X(\Sigma, L')$ tal que

$$Q \subseteq R' \subseteq Q' \quad \text{e} \quad Q' \cap D(Q, L) = \emptyset.$$

Exatamente como na demonstração de 5.1.11, temos $Q' \cap \text{Sent}(L) = \rho(Q') = Q$, encerrando a prova de (b).

c) Como a imagem inversa preserva interseções e uniões quaisquer, ρ^* é um $[\wedge, \vee]$ -morfismo. Além disso, o fato de que ρ é sobrejetora implica a injetividade de ρ^* . Para o caso em que L' é uma extensão por constantes de L , o resultado é consequência de (b) e do próximo Lema. ■

Lema 5.1.13 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua e aberta de espaços topológicos. Então, $f^* : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$. $U \mapsto f^{-1}(U)$, é um morfismo aberto de aHc's.*

Demonstração: Como já observado, é fácil ver que f^* preserva uniões quaisquer. Seja $U_i, i \in I$, uma família de abertos em Y e

$$U = \text{int} \bigcap_{i \in I} U_i = \bigwedge_{i \in I} U_i.$$

Devemos mostrar que $f^{-1}(U) = \text{int} \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. É suficiente verificar que

$$\text{int} \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i) \subseteq f^{-1}(U),$$

pois a outra inclusão é óbvia. Suponha que W é aberto em X e $W \subseteq f^{-1}(U_i), i \in I$. Como f é aberta, $f(W)$ é aberto em Y e $f(W) \subseteq U_i, i \in I$. Portanto, $f(W) \subseteq U$. Assim,

$$W \subseteq f^{-1}(f(W)) \subseteq f^{-1}(U),$$

como desejado. Resta agora mostrar que f^* preserva a implicação. Sejam U, V abertos em Y . Como f^* preserva interseções e $U \cap (U \rightarrow V) \subseteq V$, temos

$$f^*(U) \cap f^*(U \rightarrow V) \subseteq f^*(V),$$

e portanto $f^*(U \rightarrow V) \subseteq f^*(U) \rightarrow f^*(V)$. Para a inclusão recíproca, seja W um aberto em X tal que

$$W \cap f^*(U) \subseteq f^*(V). \quad (\text{II})$$

Queremos mostrar que $W \subseteq f^*(U \rightarrow V)$, o que completaria a prova, devido à adjunção $[\rightarrow]$ em 1.1.1. Note que a relação em (II) implica que

$$f(W) \cap U \subseteq V. \quad (\text{III})$$

Como f é aberta, $f(W)$ é aberto em Y , e (III) implica que $f(W) \subseteq (U \rightarrow V)$. Mas então

$$W \subseteq f^{-1}(f(W)) \subseteq f^{-1}(U \rightarrow V),$$

completando a prova. ■

Observação 5.1.14 Se L' é uma extensão por constantes de L e $\psi \in \text{Sent}(L')$, indicamos por $\psi(c_1, \dots, c_n)$ que as constantes de $L' \setminus L$ que ocorrem em ψ estão entre as $c_1, \dots, c_n$. Indicamos por

$$\exists \psi := \exists x_1 \dots x_n \psi(x_1, \dots, x_n),$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são variáveis que não ocorrem em ψ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$ é o resultado de substituir cada c_i por $x_i, 1 \leq i \leq n$; $\exists \psi$ é o **fecho existencial** de ψ .

Seja $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ um conjunto consistente em L e $\rho : X(\Sigma, L') \longrightarrow X(\Sigma, L)$ a aplicação de 5.1.12. A prova de 5.1.12.(b) mostra que se $\psi(c_1, \dots, c_n)$ é uma sentença de L' , então

$$\rho(V_{\psi}^{L'}) = V_{\exists \psi}^{L'}.$$

Se necessário, utilizaremos este resultado como uma consequência de 5.1.12. ■

Se L' é uma extensão de L e $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ é um conjunto consistente em L , o **conjunto** $X(\Sigma, L')$ carrega muitas topologias lógicas : se $L \subseteq L'' \subseteq L'$ é uma linguagem entre L e

L', L'' induz uma topologia lógica em $X(\Sigma, L')$, cuja base é dada por

$$\{V'_\sigma : \sigma \in \text{Sent}(L'')\},$$

denominada a **topologia lógica de L'' ou L'' -topologia** em $X(\Sigma, L')$. Claro que, fixado $X(\Sigma, L')$,

topologia lógica de $L \subseteq$ topologia lógica de $L'' \subseteq$ topologia lógica de L' .

Um exemplo da utilidade desta variedade é o

Lema 5.1.15 *Sejam $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ um conjunto consistente em uma linguagem L de primeira ordem com igualdade e L' uma extensão de L por constantes. Seja $\varphi(y)$ uma fórmula de L com uma variável livre y , c uma constante de $(L' \setminus L)$ e ψ a sentença $(\exists y \varphi(y) \rightarrow \varphi(c)) \in \text{Sent}(L')$. Então, V'_ψ é denso em $X(\Sigma, L')$ na L -topologia.*

Demonstração: Suponha que $V'_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \in \text{Sent}(L)$; mostraremos que $V'_\alpha \cap V'_\psi \neq \emptyset$. Suponha o contrário; então

$$V'_\alpha \subseteq V'^c_\psi,$$

e portanto, já que V'_α é aberto em $X(\Sigma, L')$, 5.1.5.(c) implica que $V'_\alpha \subseteq V'^c_\psi$. Logo, 5.1.5.(b) acarreta que

$$\Sigma, \alpha \vdash_I \neg(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)). \quad (\text{I})$$

Lembrando que se β e γ são fórmulas, temos

$$\vdash_I \neg(\beta \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\neg\neg\beta \wedge \neg\gamma) \quad \text{e} \quad \vdash_I \neg\exists x \beta(x) \leftrightarrow \forall x \neg\beta(x), \quad (\text{II})$$

(I) e a primeira equivalência em (II) implicam que

$$\Sigma, \alpha \vdash_I \neg\neg\exists x \varphi(x) \wedge \neg\varphi(c).$$

Como $c \notin L$, podemos substituir, em (III), c pela variável x : a regra de introdução do quantificador universal e a segunda equivalência em (II) fornecem

$$\Sigma, \alpha \vdash_I \neg\forall x \neg\varphi(x) \wedge \forall x \neg\varphi(x).$$

mostrando que $\Sigma \cup \{\alpha\}$ é inconsistente. Mas isto é impossível pois $V'_\alpha \neq \emptyset$. ■

Os últimos resultados desta seção não são propriedades de espaços espectrais como também suas aplicações à Lógica. Uma ligeira sofisticação na prova do Teorema 5.1.16, que utiliza idéias de M. Hochster, mostrará que a topologia construtiva em um espaço espectral é Booleana. Entre suas consequências está o fato que todo espaço espectral é de Baire (que aparece em [31]) e que todo conjunto consistente de sentenças do Cálculo de Predicados Intuicionista tem uma extensão prima que é de Henkin. Será também importante quando discutirmos a omissão de tipos.

Teorema 5.1.16 *Sejam X um espaço espectral e $\{A_i | i \in I\}$ uma família de abertos compactos que tem a pif. Então: $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$*

Demonstração: Indicamos por $B \subseteq_f C$ que B é um subconjunto finito de C . Seja

$$K := \{F \subseteq X \mid F \text{ é fechado e } F \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset \quad \forall J \subseteq_f I\}.$$

Como $X \in K$, é claro que $K \neq \emptyset$. Seja agora C uma cadeia em K . Queremos mostrar que a barreira inferior $\bigcap C \in K$. É claro que $\bigcap C$ é fechado. Falta somente mostrar que é realmente um elemento de K . Para isso, seja $J \subseteq_f I$. Então,

$$F \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset, \quad \forall F \in C.$$

Como X é um espaço espectral, temos que $\bigcap_{j \in J} A_j$ é compacto em X .

Logo, temos para todo $F \in C$, $F \cap \bigcap_{j \in J} A_j$ é fechado em $\bigcap_{j \in J} A_j$.

Do fato que $\bigcap_{j \in J} A_j$ é compacto e como $\{F \cap \bigcap_{j \in J} A_j \mid F \in C\}$ tem a pif, segue

$$\bigcap_{F \in C} (F \cap \bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap C \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset,$$

mostrando que $\bigcap C \in K$.

Aplicando o Lema de Zorn, obtemos um elemento minimal $T \in K$. Mostraremos o seguinte

Fato : T é irredutível.

Prova : Seja $T := F \cup G$, onde $F, G \subseteq X$ são fechados.

Se existir $J \subseteq_f I$ tal que $G \cap \bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$ então, obtemos que

$$\forall I_0 \subseteq_f I : \quad F \cap \bigcap_{i \in I_0} A_i \neq \emptyset.$$

Mas, $T \in K$ é o elemento minimal, e portanto temos que: $F = T$.

Como o argumento é simétrico em F e G , acabamos de provar que T é irredutível.

Logo, existe um ponto genérico $x \in X$ para T , isto é, $T = \overline{\{x\}}$.

Terminamos a demonstração do Teorema, mostrando que: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Observe que temos para cada aberto $U \in \Omega(X)$,

$$x \in U \iff U \cap T \neq \emptyset.$$

Já que $T \in K$, vale para todo $i \in I$, $T \cap A_i \neq \emptyset$. Portanto. $x \in A_i \forall i \in I$, terminando a prova. ■

Lembramos que se Y é um espaço topológico e $A, B \subseteq Y$,

$$B \text{ é denso em } A \text{ sse } A \subseteq \overline{B}.$$

Note que B é denso em A sse

$$\text{para todo aberto } U \text{ em } Y, \quad A \cap U \neq \emptyset \Rightarrow B \cap U \neq \emptyset.$$

Um espaço topológico Y é **de Baire** se a interseção de qualquer sequência enumerável de abertos densos em Y é densa em Y .

Teorema 5.1.17 *Todo espaço espectral é de Baire.*

Demonstração: Seja $\{O_n \mid n \in \omega\}$ uma coleção enumerável de abertos densos no espaço de Baire X . Mostraremos que: $O := \bigcap_{n \in \omega} O_n$ é denso em X .

Para isso, seja $U \subseteq X$ um aberto não vazio. Como O_1 é aberto denso em X , temos que $U \cap O_1 \neq \emptyset$. Logo, existe um aberto compacto $W_1 \subseteq X$ tal que $W_1 \subseteq U \cap O_1$.

Como O_2 é aberto denso em X , temos que $W_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Logo, existe um aberto compacto $W_2 \subseteq X$ tal que $W_2 \subseteq W_1 \cap O_2 \subseteq U \cap O_1$.

Continuando nesta forma, recebemos indutivamente

W_n é aberto compacto tal que $W_n \subseteq U \cap \bigcap_{j=1}^n O_j$.

Observe que $\{W_n\}_{n \in \omega}$ é uma família de abertos compactos que tem a pif.

Pelo último Teorema 5.1.16, $\bigcap_{n \in \omega} W_n \neq \emptyset$,

e pela construção $\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq U \cap \bigcap_{n \in \omega} O_n$.

Logo, acabamos de mostrar que O é denso em X e X é um espaço de Baire. ■

Teorema 5.1.18 *Seja $\Sigma \subseteq \text{Sent}(L)$ um conjunto consistente do Cálculo de Predicados Intuicionista em uma linguagem L de primeira ordem com igualdade. Então, Σ tem uma extensão prima que é de Henkin (5.1.1.(d)).*

Demonstração: Seja κ o primeiro cardinal regular infinito maior ou igual à cardinalidade de L . Seja L' a linguagem de primeira ordem com igualdade gerada por L e um conjunto de constantes novas $C = \{c_\beta : \beta \in \kappa\}$. Seja $\{\varphi_\beta(x) : \beta \in \kappa\}$ uma enumeração das fórmulas de L' com uma variável livre x . Começamos pelo

Fato 1 : *Existe uma função $h : \kappa \rightarrow \kappa$, tal que*

* Para todo $\alpha, \beta \in \kappa$, $\alpha < \beta \Rightarrow h\alpha < h\beta$;

* Para todo $\beta \in \kappa$, $c_{h\beta}$ não ocorre em $\varphi_\alpha(x)$, para todo $\alpha \leq \beta$.

Prova : Por indução transfinita. Para $\beta = 0$ (o primeiro elemento de κ); uma vez que φ_0 só contém um número finito de elementos de C , definimos

$$h0 := \begin{cases} \min\{\gamma \in \kappa : c_\gamma \text{ não ocorre em } \varphi_0\}, & \text{se em } \varphi_0 \text{ ocorre um elemento de } C; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que $h : \beta \rightarrow \kappa$, satisfazendo as propriedades acima. Como κ é regular, temos que

$$\lambda := \bigcup_{\alpha < \beta} h\alpha < \kappa.$$

Consequentemente, como em φ_β só ocorrem um número finito de elementos de C , digamos, $c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_n}$, definimos

$$h\beta := \max\{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} + 1 \in \kappa.$$

Está claro que $h : (\beta + 1) \rightarrow \kappa$ satisfaz as condições do enunciado, completando a prova do Fato 1.

Para $\beta < \kappa$, seja $\psi_\beta := (\exists x \varphi_\beta(x) \rightarrow \varphi_\beta(c_{h\beta}))$. Note que para todo $\beta, \gamma \in \kappa$, $\beta \neq \gamma$,

* ψ_β é distinta de ψ_γ ;

* Pelo Lema 5.1.15, $V'_{\psi_\beta} \neq \emptyset$.

Seja $\Psi := \{\psi_\beta : \beta \in \kappa\}$. Temos

Fato 2 : *Em $X(\Sigma, L')$, a família de abertos compactos $\{V'_{\psi_\beta} : \psi_\beta \in \Psi\}$ tem a propriedade da interseção finita.*

Prova : Por indução no número de elementos de um subconjunto finito de Ψ , utilizando o Lema 5.1.15. Já observamos que para toda $\psi_\beta \in \Psi$, V'_{ψ_β} é um aberto compacto não vazio.

Suponha que qualquer coleção com menos que $(n - 1) \geq 1$ elementos tenha interseção não vazia e seja D um subconjunto de n elementos em Ψ . Podemos escrever

$$D = \{\psi_{\beta_1}, \dots, \psi_{\beta_n}\},$$

onde $\beta_1 < \dots < \beta_n$. Seja L_0 a expansão de L determinada pela adição de todas as constantes que ocorrem em φ_{β_n} e ψ_{β_k} , $1 \leq k \leq (n - 1)$. Portanto, se

$$A = \bigcap_{k \neq n} V'_{\psi_{\beta_k}}$$

então a hipótese de indução implica que A é um aberto compacto não vazio na L_0 -topologia de $X(\Sigma, L')$. Pela construção da função h , sabemos que $c_{h\beta_n} \notin L_0$. Assim, o Lema 5.1.15 garante que $V'_{\psi_{\beta_n}} \cap A \neq \emptyset$, completando a prova do Fato 2.

Do Fato 2 e do Teorema 5.1.16, concluímos que $\bigcap_{\psi \in \Psi} V'_\psi \neq \emptyset$: qualquer elemento desta interseção é uma extensão prima de Σ que é de Henkin, como desejado. ■

5.2 Modelos em Feixes sobre Espaços Topológicos

Seja L uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e seja $\Sigma \subseteq Sent(L)$ um conjunto consistente. Pelo Teorema 5.1.18, existe uma extensão de Σ , $\mathfrak{T}$, que é de Henkin em uma expansão L' de L por constantes. Em toda esta seção, estarão fixados

- * O conjunto consistente Σ e a linguagem L ;
- * Uma extensão consistente e de Henkin de Σ , $\mathfrak{T}$, em uma expansão L' de L por constantes.

Seja $X := X(\mathfrak{T}, L')$ o espaço das extensões primas de $\mathfrak{T}$, com a topologia lógica das sentenças de L' . $\Omega := \Omega(X)$ indica a topologia de X .

Seja T o conjunto dos termos fechados de L' . Introduzimos uma relação binária $\sim$ em T , da forma seguinte

$$\tau_1 \sim \tau_2 \quad \text{sse} \quad \mathfrak{T} \vdash_I \tau_1 = \tau_2.$$

Está claro que $\sim$ é uma relação de equivalência em T . Sejam

$$\tilde{\tau} = \text{a classe de equivalência de } \tau \text{ por } \sim \quad \text{e} \quad \tilde{T} = \{\tilde{\tau} : \tau \in T\}.$$

Definimos um Ω -conjunto $\tilde{T}$ da forma seguinte :

- (i) $|\tilde{T}| = \tilde{T}$;⁶
- (ii) Para $\tau_1, \tau_2 \in T$, $[\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2] = V_{\tau_1 = \tau_2}$.

É fácil ver que esta igualdade é independente dos representantes.

Lema 5.2.1 *$\tilde{T}$ é um Ω -conjunto extensional, onde todas as seções são globais. Além disso, para todo $t \in T$, existe um símbolo de constante novo c em $L' \setminus L$ tal que $\tilde{c} = \tilde{t}$.*

⁶ Em geral, distinguimos entre os nomes de um Ω -conjunto e seu domínio. Esta precisão parece inútil neste caso.

Demonstração: A prova de que $\tilde{T}$ é um Ω -conjunto é imediata dos axiomas de igualdade em 2.2.11. Note que se $\tau \in T$, então $[\tilde{\tau} = \tilde{\tau}] = V_{\tau=\tau} = X$. Por outro lado, se

$$X = [\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2] = V_{\tau_1=\tau_2},$$

então $\mathfrak{I} \vdash_I \tau_1 = \tau_2$, e portanto, $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$, verificando a extensionalidade de $\tilde{T}$. Finalmente, se t é um termo fechado de T , considere a fórmula em uma variável livre $x = t$. Uma vez que $\mathfrak{I}$ é de Henkin, existe uma constante $c \in L' \setminus L$ tal que $\exists x (x = t) \rightarrow (t = c)$ está em $\mathfrak{I}$. Como $\vdash_I t = t$, segue que $t = c \in \mathfrak{I}$ e portanto $\tilde{t} = \tilde{c}$, como desejado. ■

Como consequência de 5.2.1, o conjunto das seções globais de $\tilde{T}$ é exatamente a classe das constantes em $L' \setminus L$.

Definição 5.2.2 Fazemos do Ω -conjunto extensional $\tilde{T}$ uma L' -estrutura em Ω -cj, do modo seguinte :

Se $n \geq 0$ é um natural e $\vec{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \in T^n$,

- * Para todo $R \in \rho(n, L)$, inclusive $=$, $[R(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)]_{\tilde{T}} = V_{R(c_1, \dots, c_n)}$.
- * Para todo $\omega \in op(n, L)$, $\omega^{\tilde{T}}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) = \widetilde{\omega(\vec{c})}$.
- * Para todo símbolo de constante d em L' , $d^{\tilde{T}} = \tilde{d}$.

Segue dos axiomas de igualdade em 2.2.11 que as definições em 5.2.2 são independentes dos representantes e que temos

Lema 5.2.3 Com a notação acima, para todo $n \geq 0$, $R \in \rho(n, L)$ e $\omega \in op(n, L)$, $[R(\cdot)]_{\tilde{T}}$ e $\omega^{\tilde{T}}$ são, respectivamente, uma função característica em $\tilde{T}$ e um morfismo de Ω -conjuntos. ■

Seja $Ct(L')$ o conjunto das constantes “novas” de $L' \setminus L$. O Lema 5.2.1 e indução na complexidade dos termos fornece o

Lema 5.2.4 Se τ é um termo fechado em L' , então existe $c \in Ct(L')$ tal que $\tau^{\tilde{T}} = \tilde{\tau} = \tilde{c}$. ■

Agora temos

Proposição 5.2.5 Se σ é uma sentença de $(L')^\sharp$ (2.2.16), então

$$[\sigma]_{\tilde{T}} = V_\sigma.$$

Demonstração: Por indução sobre a complexidade das L' -sentenças; para as atômicas a conclusão segue imediatamente da definição 5.2.2 e de 5.2.4. A passagem pelos conectivos $\wedge$ e $\vee$ é consequência direta da hipótese de indução. Para a implicação, temos, lembrando que todas as seções de $\tilde{T}$ são globais, bem como 5.1.5.(b).(2),

$$[\varphi \rightarrow \psi]_{\tilde{T}} = [\varphi]_{\tilde{T}} \rightarrow [\psi]_{\tilde{T}} = V_{\varphi} \rightarrow V_{\psi} = V_{\varphi \rightarrow \psi},$$

como desejado. Como a negação pode ser definida como $(\cdot) \rightarrow \emptyset$, concluímos que está cumprido também este passo da indução. Para o quantificador existencial, o Lema 5.2.1 fornece, onde $Ct(L')$ é o conjunto das constantes de $L' \setminus L$

$$[\exists x \varphi(x; \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)]_{\tilde{T}} = \bigvee_{c \in Ct(L')} [\varphi(\tilde{c}; \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)]_{\tilde{T}} = \bigvee_{c \in Ct(L')} V_{\varphi(c; c_1, \dots, c_n)}.$$

Vamos mostrar que

$$V_{\exists x \varphi(x; c_1, \dots, c_n)} = \bigvee_{c \in Ct(L')} V_{\varphi(c; c_1, \dots, c_n)}, \quad (I)$$

completando a prova. Segue imediatamente da regra de introdução do quantificador existencial que o lado direito de (I) está contido no esquerdo. Por outro lado, como $\mathfrak{T}$ é de Henkin, existe uma constante $c \in L' \setminus L$ tal que

$$\exists x \varphi(x; c_1, \dots, c_n) \rightarrow \varphi(c; c_1, \dots, c_n) \in \mathfrak{T},$$

e assim, toda extensão prima de $\mathfrak{T}$ que contém a sentença $\exists x \varphi(x; c_1, \dots, c_n)$ deve conter a sua instanciação pela constante c . Isto prova a igualdade em (I), como desejado. ■

Corolário 5.2.6 *Se Σ é um conjunto consistente de sentenças em $L^\sharp$, então $\tilde{T}$ é um modelo de Σ em Ω -cj.* ■

Observação 5.2.7 Seja Σ um conjunto consistente de sentenças em $L^\sharp$. A prova do Teorema 5.1.18 mostra que Σ possui uma extensão Γ de Henkin tal que $\Gamma \subseteq (L')^\sharp$, onde L' é uma expansão por constantes de L . Assim, o Corolário 5.2.6 vale para toda extensão de Henkin de Σ contida em $(L')^\sharp$. ■

Como $\tilde{T}$ só possui seções globais, o Teorema 4.2.4, com $H = \Omega$ e $\mu = Id_\Omega$, fornece

Teorema 5.2.8 *Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\Sigma \subseteq L^\sharp$ um conjunto consistente. Se $\mathfrak{T}$ é uma extensão de Henkin de Σ em $(L')^\sharp$, onde L' é uma expansão de L por constantes, então existe um espaço espectral Z e uma L' -estrutura A em $Sh(Z)$ tal que*

- (1) A é modelo de $\mathfrak{T}$;
- (2) O conjunto $\{c^A \in A(\top) : c \in Ct(L')\}^7$ é denso em A ;
- (3) Para toda fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ em L e $a_1, \dots, a_n \in |A|$,

$$[\varphi(a_1, \dots, a_n)]_A = \bigvee_{\tilde{c} \in Ct(L')^n} \bigcap_{k=1}^n [a_k = c_k^A]_A \cap [\varphi(c_1^A, \dots, c_n^A)]_A. \quad \blacksquare$$

Uma consequência standard dos Teoremas 2.2.12 e 5.2.8 é o

Corolário 5.2.9 *Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade, $\Sigma \subseteq L^\sharp$ e φ uma sentença de L . As seguintes condições são equivalentes :*

⁷ $Ct(L')$ é o conjunto das constantes em $L' \setminus L$; $A(\top)$ é o conjunto das seções globais de A .

(1) $\Sigma \vdash_I \varphi$;

(2) Para todo espaço espectral Z e toda L -estrutura A em $Sh(Z)$,

$$A \Vdash \Sigma \Rightarrow A \Vdash \varphi. \quad \blacksquare$$

5.3 Fibras e Fibras Genéricas

Se Y é um espaço topológico indicaremos por $pSh(Y)$ a categoria dos pré-feixes sobre $\Omega(Y)$, a topologia de Y . Seja A uma L -estrutura em $pSh(Y)$, onde L é uma linguagem de primeira ordem com igualdade. Nesta seção mostraremos como a noção clássica de **fibra num ponto** fornece uma coleção de L -estruturas clássicas que têm ligação importante com a estrutura em A . O tratamento poderia ser feito para Ω -conjuntos através do conceito de *filtro completamente primo*, mas preferimos tratar do caso geométrico.

Será conveniente introduzir as seguintes convenções notacionais :

Notação 5.3.1 : Seja A uma L -estrutura em $pSh(Y)$ e p um ponto de Y .

a) ν_p é o conjunto das vizinhanças abertas de p em Y :

$$\nu_p := \{u \in \Omega(Y) : p \in u\}.$$

b) Definimos

$$A|_p := \{a \in |A| : p \in Ea\} = \{a \in |A| : Ea \in \nu_p\}^8,$$

o conjunto das seções de A cuja extensão é uma vizinhança de p .

c) Definimos uma relação binária θ_p em $A|_p$ por

$$x \theta_p y \quad \text{sse} \quad p \in [x = y]. \quad \blacksquare$$

Lema 5.3.2 Com a notação acima,

a) θ_p é uma relação de equivalência em $A|_p$.

b) Para $x, y \in A|_p$, $x \theta_p y \Leftrightarrow \exists u \in \nu_p$ tal que $x|_u = y|_u$.

Demonstração: a) Está claro que θ_p é reflexiva e simétrica. A transitividade de θ_p vem diretamente da transitividade da igualdade, pois se $p \in [x = y]$ e $p \in [y = z]$, então [eq 2] na seção 1.2 acarreta $p \in [x = z]$.

b) Pela propriedade [rest 5] na seção 1.2, se $x \theta_p y$ então $[x = y] \in \nu_p$ e temos

$$x|_{[x=y]} = y|_{[x=y]}.$$

⁸Estamos consciente do fato que esta notação é a mesma usada no capítulo 3 para a L -estrutura induzida de A . Mas para facilitar a leitura ficamos somente nesta seção com a abreviação acima. Uma notação correta seria A_{ν_p} .

Reciprocamente, suponha que exista $u \in \nu_p$ tal que $x|_u = y|_u$. Como $Ex \cap Ey \in \nu_p$, temos $u \cap Ex \cap Ey := v \in \nu_p$. Por outro lado, [rest 3] na seção 1.2 fornece

$$x|_v = (x|_u)|_v = (y|_u)|_v = y|_v,$$

e portanto, como $Ex|_v = Ey|_v = v$, [rest 4] fornece

$$v = [x|_v = y|_v] = v \cap [x = y],$$

mostrando que $p \in v \subseteq [x = y]$ e que $x \theta_p y$. ■

Definição 5.3.3 *Seja A uma L -estrutura em $pSh(Y)$ e $p \in Y$.*

a) *A classe de equivalência de $x \in A|_p$ por θ_p é indicada por x_p e denomina-se o **germe de x em p** . Se $\vec{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in (A|_p)^n$, indicamos por*

$$\vec{a}_p = \langle a_{1p}, \dots, a_{np} \rangle,$$

a sequência de germes correspondentes.

b) *O conjunto das classes de equivalência de $A|_p$ por θ_p é indicado por A_p e denomina-se a **fibra de A no ponto p** .*

c) *Se $S \subseteq |A|$, definimos*

$$S_p = \{s_p \in A_p : s \in S \cap A|_p\} = \{s_p \in A_p : s \in S \text{ e } p \in Es\}.$$

Faremos de A_p uma L -estrutura clássica da forma seguinte :

a) Se $R \in \rho(n, L)$ é um símbolo de relação n -ária em L e $\langle a_{1p}, \dots, a_{np} \rangle \in A_p^n$,

$$A_p \models R[a_{1p}, \dots, a_{np}] \quad \text{sse} \quad p \in [R(a_1, \dots, a_n)].$$

b) Se $f \in op(n, L)$ é um símbolo de função n -ária em L , então

$$f^{A_p}(a_{1p}, \dots, a_{np}) := (f^A(\vec{a}))_p.$$

c) Se c é um símbolo de constante em L , $c^{A_p} := c_p^A$.

As definições acima são independentes de representantes. Mostraremos este fato para símbolos relacionais; o tratamento para símbolos funcionais é análogo.

Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ sequências em $A|_p$ tais que $a_j \theta_p b_j$, $1 \leq j \leq n$. Como

$$[\vec{a} = \vec{b}] \cap [R(\vec{a})] = [\vec{a} = \vec{b}] \cap [R(\vec{b})],$$

segue que $p \in [R(\vec{a})]$ sse $p \in [R(\vec{b})]$, como desejado. A L -estrutura definida acima denomina-se **fibra da L -estrutura A no ponto p** .

Não há dificuldade em mostrar que a operação de tomar fibra num ponto $p \in Y$ é um funtor covariante de $pSh(Y)$ na categoria das L -estruturas clássicas.

Podemos estender para pontos a noção de *forcing* definida em 2.2.14 :

Definição 5.3.4 Sejam A uma L -estrutura em $pSh(Y)$ e $p \in Y$. Se $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ é uma fórmula de L e $a_1, \dots, a_n \in A|_p$, definimos

$$p \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{sse} \quad p \in [\varphi(a_1, \dots, a_n)].$$

Lema 5.3.5 Sejam A uma L -estrutura em $pSh(Y)$, $p \in Y$ e $a_1, \dots, a_n$ uma sequência de seções em $A|_p$. Seja $t(v_1, \dots, v_n)$ um L -termo e $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ uma L -fórmula. Então

a) $t^{A_p}(a_{1p}, \dots, a_{np}) = (t^A(\vec{a}))_p$.

b) Se φ é existencial positiva⁹ então

$$p \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{sse} \quad A_p \models \varphi[a_{1p}, \dots, a_{np}].$$

c) Se $S \subseteq A$ é denso em A , então $S_p = A_p$.

Demonstração: Tanto (a) quanto (b) seguem por indução na complexidade. Faremos o caso do quantificador existencial em (b) como exemplo. Temos

$$p \Vdash \exists v \varphi[v; \vec{a}] \quad \text{sse} \quad p \in [\exists v \varphi(v; \vec{a})] \quad \text{sse} \quad p \in \bigcup_{b \in |A|} [\varphi(b; \vec{a})].$$

Logo, deve existir $b \in |A|$ tal que $p \in [\varphi(b; \vec{a})] \subseteq Eb$. Assim, $b \in A|_p$ e a hipótese de indução garante que $A_p \models \varphi[b_p; \vec{a}_p]$, isto é, $A_p \models \exists v \varphi(\vec{a}_p)$.

Reciprocamente,

$$A_p \models \exists v \varphi(\vec{a}_p) \quad \text{sse} \quad \exists b_p \in A_p \text{ tal que } A_p \models \varphi[b_p; \vec{a}_p],$$

e portanto, a hipótese de indução implica que $p \in [\varphi(b; \vec{a})] \subseteq [\exists v \varphi(\vec{a})]$.

c) É suficiente mostrar que $A_p \subseteq S_p$. Se $d_p \in A_p$, então $p \in Ed$: a densidade de S em A significa

$$Ed = \bigcup_{s \in S} [d = s],$$

e portanto existe $s \in S$ tal que $p \in [d = s] \subseteq Es \cap Ed$. Logo, $s \in S \cap A|_p$ e $s_p = d_p$, terminando a prova. ■

Ao exigir que a relação em 5.3.5.(b) esteja satisfeita para *todas* as fórmulas de L , definimos um tipo muito especial (e importante) de fibra, que liga os valores intuicionistas com os valores clássicos :

Definição 5.3.6 Seja A uma L -estrutura em $pSh(Y)$. A fibra de A num ponto $p \in Y$ é **genérica** se para toda $\vec{a} \in (A|_p)^n$ e toda fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ em L

$$p \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{sse} \quad A_p \models \varphi[a_{1p}, \dots, a_{np}].$$

Lema 5.3.7 Se A é uma L -estrutura em $pSh(Y)$ e $p \in Y$, as seguintes condições são equivalentes :

⁹ Isto é, construída a partir das atômicas na linguagem $\{\wedge, \vee, \exists\}$.

(1) A fibra em p é genérica em A ;

(2) Para toda fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ em L e $a_1, \dots, a_n \in (A|_p)^n$,

$$p \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{ou} \quad p \Vdash \neg \varphi[a_1, \dots, a_n]. \quad (*)^{10}$$

Demonstração: Está claro que (1) $\Rightarrow$ (2) pois a satisfação clássica verifica a lei do terceiro excluído. Para a recíproca, mostraremos, por indução na complexidade que

$$p \Vdash \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{sse} \quad A_p \models \varphi[a_{1p}, \dots, a_{np}].$$

Para as fórmulas atômicas, esta equivalência é consequência de 5.3.5.(b). O passo de indução para os conectivos $\wedge$ e $\vee$ são simples, enquanto aquele correspondente ao quantificador existencial pode ser tratado do modo indicado na prova de 5.3.5. Discutiremos o conectivo da implicação e o quantificador universal.

– Suponha que φ é da forma $\alpha \rightarrow \beta$; então

$$p \Vdash \varphi[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad p \in [\varphi(\vec{a})] \quad \text{sse} \quad p \in E\vec{a} \cap ([\alpha(\vec{a})] \rightarrow [\beta(\vec{a})]). \quad (I)$$

Se $A_p \models \alpha[\vec{a}_p]$, a hipótese de indução acarreta que $p \in [\alpha(\vec{a})]$; mas então, a condição (I) acima garante que $p \in [\beta(\vec{a})]$, pois para todo $U, V \in \Omega(Y)$

$$U \rightarrow V = \text{int}(U^c \cup V). \quad (II)$$

Assim, $A_p \models \beta[\vec{a}_p]$, mostrando que $A_p \models (\alpha \rightarrow \beta)[\vec{a}_p]$.

Reciprocamente, se $A_p \models \varphi[\vec{a}_p]$, temos duas possibilidades :

(i) $A_p \models \neg \alpha[\vec{a}_p]$, isto é, não é verdade que $A_p \models \alpha[\vec{a}_p]$; a hipótese de indução implica não ser verdade que $p \Vdash \alpha[\vec{a}]$. Assim, a alternativa em (*) fornece $p \Vdash \neg \alpha[\vec{a}]$, isto é,

$$p \in E\vec{a} \cap \neg [\alpha(\vec{a})] \subseteq E\vec{a} \cap ([\alpha(\vec{a})] \rightarrow [\beta(\vec{a})]) = [\varphi(\vec{a})], \quad {}^{11}$$

mostrando que $p \Vdash \varphi[\vec{a}]$.

(ii) Se $A_p \models \alpha[\vec{a}_p]$, a hipótese de indução fornece $p \Vdash \alpha[\vec{a}]$, isto é, $p \in [\alpha(\vec{a})]$. Logo, (II) implica que para provar

$$p \in E\vec{a} \cap ([\alpha(\vec{a})] \rightarrow [\beta(\vec{a})])$$

é necessário verificar que $p \in [\beta(\vec{a})]$. Mas isto é consequência imediata da hipótese de indução e do fato que $A_p \models (\alpha \rightarrow \beta)[\vec{a}_p]$.

– Suponha que φ é da forma $\forall v \alpha$; então, já que $p \in E\vec{a}$, temos

$$p \Vdash \varphi[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad p \in E\vec{a} \cap \bigcap_{b \in |A|} Eb \rightarrow [\alpha(b; \vec{a})] \quad \text{sse} \quad \forall b \in |A|, \quad p \in (Eb \rightarrow [\alpha(b; \vec{a})]).$$

Seja d_p um elemento de A_p ; então, $p \in Ed$ e pela equivalência acima

$$p \in Ed \cap (Ed \rightarrow [\alpha(d; \vec{a})]) \subseteq [\alpha(d; \vec{a})],$$

e a hipótese de indução implica que $A_p \models \alpha[d_p; \vec{a}_p]$. Como d_p é arbitrário em A_p , mostramos que $A_p \models \forall v \alpha[\vec{a}]$, como desejado.

¹⁰ Isto é, $p \in [(\varphi \vee \neg \varphi)(a_1, \dots, a_n)]$.

¹¹ Segue imediatamente de $[\rightarrow]$ em 1.1.1 que em qualquer aH, $\neg p \leq (p \rightarrow q)$.

Reciprocamente, suponha que $A_p \models \forall v \alpha(v)[\vec{a}_p]$ e seja $b \in |A|$. Para mostrar que $p \in (Eb \rightarrow [\alpha(b; \vec{a})])$, por (II), é suficiente verificar que se $p \in Eb$, então $p \in [\alpha(b; \vec{a})]$. Mas isto é consequência da hipótese de indução e do fato que $A_p \models \alpha(b_p; \vec{a}_p)$. Como b é arbitrário em $|A|$, concluímos que

$$p \in E\vec{a} \cap \bigcap_{b \in |A|} Eb \rightarrow [\alpha(b; \vec{a})] = [\varphi(\vec{a})],$$

encerrando a prova. ■

Em certas situações podemos garantir a existência de fibras genéricas.

Teorema 5.3.8 *Seja Y um espaço de Baire e L uma linguagem enumerável de primeira ordem com igualdade. Se A é uma L -estrutura separável em $pSh(Y)$ então o conjunto de pontos p em Y tal que A_p é genérico é um G_δ ¹² denso em Y .*

Demonstração: Seja $S \subseteq |A|$ um conjunto enumerável e denso de seções em A . Como L é enumerável, o conjunto dos pares

$$\mathfrak{X} = \{\langle \varphi(v_1, \dots, v_n); \langle s_1, \dots, s_n \rangle \rangle : \varphi \text{ é uma } L\text{-fórmula e } \langle s_1, \dots, s_n \rangle \in S^n, n \geq 0\},$$

é enumerável. Para cada par $\xi = \langle \varphi(v_1, \dots, v_n); \langle s_1, \dots, s_n \rangle \rangle$ em $\mathfrak{X}$, definimos

$$O_\xi := [\varphi(\vec{s})] \cup [\neg \varphi(\vec{s})] \cup \neg E\vec{s}.$$

Fato : Para todo $\xi \in \mathfrak{X}$. O_ξ é um aberto denso em Y .

Prova : Sabemos de 1.1.4.(e).(1) que $E\vec{s} \cup \neg E\vec{s}$ é um aberto denso em Y . Portanto, para verificar o conteúdo do enunciado, basta verificar que $[\varphi(\vec{s})] \cup [\neg \varphi(\vec{s})]$ é denso em $E\vec{s}$. Mas, temos

$$[\varphi(\vec{s})] \cup [\neg \varphi(\vec{s})] = [\varphi(\vec{s})] \cup (E\vec{s} \cap \neg [\varphi(\vec{s})]) = E\vec{s} \cap ([\varphi(\vec{s})] \cup \neg [\varphi(\vec{s})]).$$

Já que $([\varphi(\vec{s})] \cup \neg [\varphi(\vec{s})])$ é denso em Y (1.1.4.(e)), sua interseção com $E\vec{s}$ deve ser densa em $E\vec{s}$ ¹³, encerrando a prova do Fato.

Como Y é de Baire e $\mathfrak{X}$ é enumerável, $G := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{X}} O_\xi$ é um G_δ denso em Y . Vamos mostrar que se $p \in G$, então A_p é uma fibra genérica de A . Fixemos $p \in G$, uma L -fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ e $a_1, \dots, a_n \in (A|_p)^n$. Como S é denso em A , isto é (1.3.7.(a))

$$E\vec{a} = \bigcup_{\vec{s} \in S^n} [\vec{a} = \vec{s}].$$

existe $\vec{s} \in S^n$ tal que $p \in [\vec{a} = \vec{s}] \subseteq E\vec{s}$. Seja $\xi = \langle \varphi(v_1, \dots, v_n); \langle s_1, \dots, s_n \rangle \rangle \in \mathfrak{X}$; como $p \in O_\xi$ e $p \notin \neg E\vec{s}$, concluímos que

$$p \in [\varphi(\vec{s})] \cup [\neg \varphi(\vec{s})]. \quad (I)$$

De $[car2']$ em 1.3.5, sabemos que para toda função característica h em A

$$[\vec{a} = \vec{s}] \cap h(\vec{a}) = [\vec{a} = \vec{s}] \cap h(\vec{s}), \quad (II)$$

e portanto $p \in h(\vec{a})$ sse $p \in h(\vec{s})$. É agora consequência imediata de (I) e (II) que

¹² Isto é, uma interseção de um conjunto enumerável de abertos.

¹³ Este raciocínio vale em qualquer aH, pelos resultados da seção 1.1.

$$p \in [\varphi(\vec{a})] \quad \text{ou} \quad p \in [\neg \varphi(\vec{a})],$$

verificando a condição (*) do Lema 5.3.7.(2) e terminando a prova. ■

5.4 Omissão Intuicionista de Tipos

Esta seção é dedicada à prova da seguinte generalização do Teorema Clássico de Omissão de Tipos ([7], Theorem 2.2.9, p.79) :

Teorema 5.4.1 *Seja L uma linguagem enumerável com igualdade e Σ um conjunto consistente de sentenças de $L^\sharp$. Seja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ um conjunto de fórmulas de $L^\sharp$, que são consistentes com Σ . Se Σ omite Γ localmente, então existe um espaço espectral Z e uma L -estrutura separável A em $Sh(Z)$ tal que*

- (1) *A é um modelo de Σ em $Sh(Z)$ que omite Γ (5.4.2);*
- (2) *O conjunto $\mathfrak{D} = \{p \in Z : A_p \text{ é modelo clássico de } \Sigma \text{ que omite } \Gamma\}$ é denso em Z .*

Começamos com a seguinte

Definição 5.4.2 *Sejam L uma linguagem de primeira ordem com igualdade, $\Sigma \subseteq Sent(L)$ um conjunto consistente e $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$ um conjunto de fórmulas de L nas variáveis livres $x_1, \dots, x_n$.*

- a) *Uma fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é consistente com Σ se $\Sigma \cup \{\exists \varphi\}$ é consistente.*
- b) *Se as fórmulas de Γ são consistentes com Σ , dizemos que Σ omite Γ localmente se para toda fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ em L , se φ for consistente com Σ , então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\Sigma \cup \{\exists(\varphi \wedge \neg \gamma)\}$ é consistente.*
- c) *Se A é uma L -estrutura em $pSh(\Omega)$, A omite Γ se para todo $\vec{a} \in |A|^n$,*

$$E\vec{a} = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} [\neg \gamma(\vec{a})].$$

Note que a nossa definição de quando uma estrutura omite um conjunto de fórmulas Γ é bem forte : nenhuma n -úpla de seções, independente de sua extensão, satisfaz todas as fórmulas de Γ .

Prova do Teorema 5.4.1. Como é usual, faremos a prova para o caso em que as fórmulas de Γ têm só uma variável livre. O caso geral pode ser reduzido a este, por indução.

Seja $C := \{c_n : n \geq 1\}$ uma coleção enumerável de símbolos de constantes que não ocorrem em L e L' a expansão de L obtida juntando-se C ao conjunto das constantes em L .

Fato 1 : *Para cada $k \geq 1$, seja $U_k := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} V'_{\neg \gamma(c_k)}$. Então, U_k é um aberto denso em $X(\Sigma, L')$.*

Prova : Como anteriormente, se α é uma sentença em L' , indicamos os novos símbolos de constantes de C que ocorrem em α pela notação $\alpha(d_1, \dots, d_n)$. Suponha que $V'_\alpha \neq \emptyset$ em $X(\Sigma, L')$; se $V'_\alpha \cap U_k = \emptyset$, então

$$V'_\alpha \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (V'_{\neg\gamma(c_k)})^c.$$

Uma vez que V'_α é aberto em $X(\Sigma, L')$ e $\text{int}(V'_{\neg\gamma(c_k)})^c = V'_{\neg\neg\gamma(c_k)}$ (5.1.5.(c)), concluímos que

$$\text{para todo } \gamma \in \Gamma, \quad V'_\alpha \subseteq V'_{\neg\neg\gamma(c_k)},$$

isto é (5.1.5.(b)),

$$\text{para toda } \gamma \in \Gamma, \quad \Sigma \vdash_I \alpha \rightarrow \neg\neg\gamma(c_k). \quad (\text{I})$$

Podemos supor que c_k ocorre em α , bastando substituir α por $(c_k = c_k) \wedge \alpha$. Assim,

$$\alpha := \alpha(c_k; d_1, \dots, d_n),$$

onde $d_1, \dots, d_n$ são as constantes de C , distintas de c_k , que ocorrem em α . De (I) e da regra de introdução do quantificador existencial vem

$$\text{para toda } \gamma \in \Gamma, \quad \Sigma \vdash_I \exists \vec{y} \alpha(c_k; \vec{y}) \rightarrow \neg\neg\gamma(c_k). \quad (\text{II})$$

Portanto, como $c_k \in L' \setminus L$, (II) implica que

$$\text{para toda } \gamma \in \Gamma, \quad \Sigma \vdash_I \forall x (\exists \vec{y} \alpha(x; \vec{y}) \rightarrow \neg\neg\gamma(x)). \quad (\text{III})$$

Note que $\exists \vec{y} \alpha(x; \vec{y})$ é uma L -fórmula cuja única variável livre é x : como $V'_\alpha \neq \emptyset$, esta fórmula é consistente com Σ . Mas então, como Σ omite Γ localmente, podemos escolher $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\Sigma \cup \{\exists x (\exists \vec{y} \alpha(x; \vec{y}) \wedge \neg\gamma_0(x))\} \text{ é consistente.} \quad (\text{IV})$$

Já que $\neg\exists x (\beta \wedge \neg\delta)$ é intuicionisticamente equivalente à $\forall x (\beta \rightarrow \neg\neg\delta)$, (III) implica que $\Sigma \cup \{\exists x (\exists \vec{y} \alpha(x; \vec{y}) \wedge \neg\gamma_0(x))\}$ é inconsistente, e portanto Σ não omite Γ localmente, contradizendo a hipótese que completa a prova do Fato 1.

Seja $\{\varphi_n(x) : n \geq 1\}$ uma enumeração das fórmulas de L' com uma variável livre. Pelo Fato 1 na prova do Teorema 5.1.18, existe uma função $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$(i) \quad n < m \Rightarrow hn < hm; \quad (ii) \quad c_{hn} \text{ não ocorre em } \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Seja $\psi_n := \exists x \varphi_n(x) \rightarrow \varphi_n(c_{hn})$. Então temos

Fato 2 : Existe uma sequência $\gamma_n \in \Gamma$, $n \geq 1$, tal que a família de abertos compactos

$$\{V'_{\psi_n} : n \geq 1\} \cup \{V'_{\neg\gamma_n(c_n)} : n \geq 1\}$$

tem a propriedade da interseção finita em $X(\Sigma, L')$.

Prova : Por indução em $n \geq 1$, mostraremos que existem pares $\langle V'_{\psi_n}, V'_{\neg\gamma_n(c_n)} \rangle$ tais que

$$\bigcap_{k=1}^n V'_{\psi_k} \cap V'_{\neg\gamma_k(c_k)} \neq \emptyset.$$

Para $n = 1$, o Lema 5.1.15 garante que $V'_{\psi_1} \neq \emptyset$; por outro lado, como U_1 é denso em $X(\Sigma, L')$ (Fato 1), existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $W_1 = V'_{\psi_1} \cap V'_{\neg\gamma_1(c_1)} \neq \emptyset$. Suponha que construímos

$\langle V'_{\psi_k}, V'_{\neg\gamma_k(c_k)} \rangle$, com $\bigcap_{k=1}^{n-1} W_k \neq \emptyset$, onde $W_k = V'_{\psi_k} \cap V'_{\neg\gamma_k(c_k)}$, $1 \leq k \leq (n-1)$.

Seja L_0 a extensão de L obtida juntando-se as constantes que ocorrem em $\varphi_n(x)$ e em ψ_k , $1 \leq k \leq (n-1)$. Então c_{hn} não pertence a L_0 . Para vermos isto, note que pela construção da função h

- * c_{hn} é distinta de todas as c_{hk} , $1 \leq k \leq (n-1)$, pois h é estritamente crescente;
- * c_{hn} não ocorre em $\varphi_k(x)$ para $1 \leq k \leq n$;
- * Já que $1 \leq h1$ e h é estritamente crescente, c_{hn} é distinta de $c_1, \dots, c_{n-1}$ (que ocorrem em $\neg\gamma_k(c_k)$, $1 \leq k \leq (n-1)$).

Como $\bigcap_{k=1}^{n-1} W_k$ é um aberto da L_0 -topologia em $X(\Sigma, L')$, pelo Lema 5.1.15 temos que

$$W := V'_{\psi_n} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} W_k \neq \emptyset.$$

Para terminar o passo de indução, observe que W é um aberto não vazio de $X(\Sigma, L')$ e portanto, pelo Fato 1, deve ter interseção não vazia com o aberto denso U_n . Assim, existe $\gamma_n \in \Gamma$, tal que

$$W \cap V'_{\psi_n} \cap V'_{\neg\gamma_n(c_n)} \neq \emptyset.$$

terminando a prova do Fato 2.

O Fato 2 e o Teorema 5.1.16 implicam que $\bigcap_{n \geq 1} V'_{\psi_n} \cap V'_{\neg\gamma_n(c_n)} \neq \emptyset$. Qualquer elemento P desta interseção é uma extensão de Henkin de Σ , que satisfaz a condição

$$\text{para toda } c \in C, \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \neg\gamma(c) \in P. \quad (*)$$

Seja $P^\sharp = (L')^\sharp \cap P$; $P^\sharp$ permanece sendo uma extensão de Henkin de Σ , satisfazendo a condição (*), pois as fórmulas de Γ estão em $L^\sharp$. Logo, existe um espaço espectral Z e uma L' -estrutura A em $Sh(Z)$ com as propriedades descritas no Teorema 5.2.8. Logo,

- * A é separável, pois o conjunto $C^A := \{c^A \in A(\mathbb{T}) : c \in C\}$ é denso em A ;
- * $A \models P^\sharp$, sendo portanto um modelo de Σ ;
- * Para toda $c \in C$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\neg\gamma(c^A) = \mathbb{T} = Z$;

Seja $a \in |A|$; como $C^A := \{c^A \in A(\mathbb{T}) : c \in C\}$ é denso em A , temos que

$$Ea = \bigcup_{c \in C} [a = c^A]. \quad (V)$$

Para cada $c \in C$, seja $\gamma_c \in \Gamma$ tal que $\neg\gamma_c(c^A) = \mathbb{T} = Z$. Então,

$$[a = c^A] \cap [\neg\gamma_c(a)] = [a = c^A] \cap [\neg\gamma_c(c^A)] = [a = c^A],$$

e assim, para cada $c \in C$, $[a = c^A] \leq [\neg\gamma_c(a)]$. Segue de (V) que

$$Ea \geq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} [\neg\gamma(a)] \geq \bigvee_{c \in C} [\neg\gamma_c(a)] \geq \bigvee_{c \in C} [a = c^A] = Ea,$$

estabelecendo que A omite Γ e completando a prova de (1). Para (2), como Z é de Baire (5.1.17) e A é separável, o Teorema 5.3.8 garante que o conjunto G dos pontos p tal que A_p é uma fibra genérica, é denso em Z . É suficiente mostrar, portanto, que $G \subseteq \mathcal{D}$. Fixemos $p \in G$; temos :

- * Por 5.3.5.(c), $A_p = C_p^A$, isto é, todo germe em p é o germe de um elemento de C^A ;
 - * Como A_p é uma fibra genérica e $A \Vdash \Sigma$, concluímos que $A_p \models \Sigma$, pois $p \Vdash \Sigma$;
 - * Se c_p^A é um elemento de A_p , pela construção existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $[\neg \gamma(c^A)] = Z$. Logo, $p \Vdash \neg \gamma(c^A)$ e a genericidade implica que $A_p \models \neg \gamma(c_p^A)$.
- Assim, A_p é um modelo enumerável clássico de Σ que omite Γ , completando a prova. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. Balbes & P. Dwinger: *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.
- [2] J. Barwise (ed): *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.
- [3] L.E.J. Brouwer: *Intuitionism and Formalism*, Bulletin of the American Mathematical Society, **20**, 1913, 81 - 96.
- [4] J.L. Bell & A.B. Slomson: *Models and Ultraproducts*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1971.
- [5] S. Burris & H. Werner: *Sheaf Constructions and their Elementary Properties*, Transactions AMS, **248**,(2), 1979, 269 - 309.
- [6] X. Caicedo & A.M. Sette: *Equivalência Elementar entre Feixes*, preprint 1992.
- [7] C.C. Chang & H.J. Keisler: *Model Theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1990.
- [8] J.C. Cifuentes: *O método dos isomorfismos parciais*, Coleção CLE, Volume X, 1992.
- [9] J.C. Cifuentes, A.M. Sette & D. Mundici: *Cauchy Completeness in Elementary Logic*, Journal of Symbolic Logic, **61**,(4), 1996, 1153 - 1157.
- [10] D. van Dalen: *Logic and Structure*. Springer Verlag, Berlin 1994.
- [11] H.D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1986.
- [12] D.P. Ellerman: *Sheaves of Structures and Generalized Ultraproducts*, Annals of Mathematical Logic, **7**, 1974, 163 - 195.
- [13] M.C. Fitting: *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1969.
- [14] M. Fourman & D. Scott: *Sheaves and Logic*, in Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics. **753**, Springer Verlag, 1979, 302 - 401.

- [15] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel et al.: *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer Verlag, Berlin 1980.
- [16] R. Goldblatt: *Topoi. The Categorical Analysis of Logic*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1986.
- [17] J.W. Gray: *Fragments of the History of Sheaf Theory*, in Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics, **753**, Springer Verlag, 1979, 1 - 79.
- [18] M.J. Greenberg & J.R. Harper: *Algebraic Topology. A First Course*, The Benjamin/Cummings Publ. Co., Massachusetts, 1981.
- [19] A. Heyting: *Intuitionism. An Introduction*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1971.
- [20] M. Hochster: *Prime Ideal Structure in Commutative Rings*, Transactions AMS, **142**, 1969, 43 - 60.
- [21] J.L. Kelley: *General Topology*, Springer Verlag, Berlin 1985.
- [22] S.C. Kleene: *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1952.
- [23] S.C. Kleene: *Mathematical Logic*, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [24] A.N. Kolmogoroff: *On the principle of the excluded middle*, Russian, Mat. Sb., **32**, 1925, 646 - 667.
- [25] R. Kuntze: *Garbentheorie*, B.G. Teubner, Stuttgart 1970.
- [26] K. Kunen: *Set Theory*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.
- [27] W. Lawvere: *Quantifiers and Sheaves*, in Actes de Congres International des Maths., Nice, **1**, 1970, 329 - 334.
- [28] A. MacIntyre: *Model-completeness for Sheaves of Structures*, Fund. Math., **81**, 1973, 73 - 89.
- [29] S. MacLane: *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1971.
- [30] M. Makkai & G.E. Reyes: *First Order Categorical Logic*, Lecture Notes in Mathematics, **611**, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [31] F. Miraglia: *Sheaves and Logic*, preprint 1992.
- [32] F. Miraglia: *The Downward Löwenheim-Skolem Theorem for L-structures in Ω -sets*, Contemporary Mathematics, AMS. **69**, 1988, 189 - 208.
- [33] F. Miraglia: *Ultraprodutos Generalizados e Feixes de Estruturas sobre uma Álgebra de Heyting Completa*, Tese de Livre Docência, 1990.

- [34] M.D. Morley: *Studies in Model Theory*, MAA Studies in Mathematics, vol. 8, 1973.
- [35] C. Mulvey: *Intuitionistic Algebra and the Representation of Rings*, Memoirs of the AMS, **148**, 1974, 3 - 57.
- [36] B. Pareigis: *Kategorien und Funktoren*, B.G. Teubner, Stuttgart 1969.
- [37] H. Rasiowa: *An Algebraic Approach to Non-Classical Logic*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1974.
- [38] H. Rasiowa & R. Sikorski: *The Mathematics of Metamathematics*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.
- [39] D. Scott: *Identity and Existence in Intuitionistic Logic*, in Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics, **753**, Springer Verlag, 1979, 660 - 696.
- [40] A.S. Troelstra & D. van Dalen: *Constructivism in Mathematics. An Introduction, Volume II* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1988.
- [41] H. Volger: *The Feferman-Vaught Theorem Revisited*, Colloquium Mathematicum, **36**,(1), 1976, 1 - 11.