EXTENSÕES POR UM PONTO DE ÁLGEBRAS *SHOD*

Angela Marta Pereira das Dores Savioli

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTORA EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da CAPES

São Paulo, 28 de novembro de 2000.

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e defendida
por Angela Marta Pereira das Dores Savioli
e aprovada pela banca julgadora.

São Paulo, 28 de novembro de 2000.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos - IME - USP
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC - UNICAMP
- Profa. Dra. Maria Júlia Redondo - UBB
- Profa.Dra. Sonia Elisabet Trepode - UMP

*Aos meus pais e
ao meu filho José Paulo*

“Goza a euforia do vôo do anjo perdido em ti.
Não indagues se nossas estradas,
tempo e vento, desabam no abismo.
Que sabes tu do fim?
Se temes que teu mistério seja uma noite,
enche-o de estrelas.
Conserva a ilusão de que teu
vôo te leva sempre mais alto.
No deslumbramento da ascensão
se pressentires que amanhã estarás mudo
esgota, como um pássaro, as canções
que tens na garganta.
Canta. Canta para conservar a
ilusão de festa e de vitória.
Talvez as canções adormeçam as feras,
que esperam devorar o pássaro.
Desde que nasceste não é mais
que um vôo no tempo.
Rumo ao céu?
Que importa a rota.
Voa e canta enquanto resistirem as asas.”

Menotti Del Picchia

Conduta

Onde estou encontram-se relíquias
Aguardando mãos laboriosas
No córrego cantante o potencial está
Uma seara dorme na Terra generosa

A estrela de pedra esconde a coluna
Espera do trabalho a transformação
Aguarda o solo o arado e a semente
E a bem vinda chuva para a germinação

Assim a corrente d'água necessita
De canais para então a sede matar
E a pedra, um instrumento que a talhe
Para que o feito se faça eternizar

A educação que estivera adormecida
No meu eu querendo despertar
Hoje reúne verbo, técnica e pensamento
Para todos poder informar

Só peço que o trabalho ora exposto
Deste clã extrapole à sociedade
Seria em vão todo meu esforço
Não compartí-lo com a humanidade

Joana de Ângelis - adaptação Dido

Mal Secreto

Se a cólera que espuma, a dor que mora
N'alma, e destrói cada ilusão que nasce,
Tudo o que punge, tudo o que devora
O coração no rosto estampasse;

Se se pudesse, o espírito que chora
Ver através da máscara da face,
Quanta gente, talvez, que inveja agora
nos causa, então piedade no causasse!

Quanta gente que ri, talvez consigo
Guarda um atroz, recôndito inimigo
Como invisível chaga cancerosa!

Quanta gente que ri, talvez existe
Cuja ventura única consiste
Em parecer aos outros venturosa!

Raimundo Correia

Agradecimentos

Primeiramente, eu gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho, não só como orientador, mas como amigo. As discussões, as sugestões e até as críticas me fizeram amadurecer em cada fase deste trabalho. Obrigada pela paciência em ler os primeiros rabiscos do que hoje chamamos tese e pelo incentivo a todo momento. Obrigada sobretudo pela confiança e pela liberdade que proporciona a seus orientandos.

Gostaria de agradecer a todo grupo de Representações de Álgebras que me recebeu de braços abertos e sempre esteve pronto a me ajudar. Principalmente, ao Prof. Héctor pelo seu carisma, ao Edu e à Bel sempre prontos a nos atender e à amiga Gladys que muitas vezes me socorreu pelos corredores do IME, ouvindo meus desabaços e me consolando. Também aos amigos que fiz neste grupo e especialmente aos meus praticamente irmãos Clézio, Hernán e Edson. Agradeço também à Profa. Mary Lilian que muito colaborou neste trabalho com sua amizade. Vou sentir muita falta de todos!

Meu sincero agradecimento ao pessoal das salas do doutorado e do mestrado. Cada um de vocês teve sua parcela de ajuda neste trabalho. Obrigada pelos momentos de descontração e pelos convites para um cafézinho.

Gostaria de agradecer à UEL, mais especificamente ao Departamento de Matemática, por esses anos de estudo que me proporcionaram e pela confiança depositada em mim. Também aos Professores Nelson Inforzato, Márcia, Lucy e Mastine pela amizade, confiança e apoio durante todos estes anos e à secretária mais eficiente que já conheci, Odete Radigonda. Obrigada por terem aguentado os inúmeros pedidos de ajuda.

Gostaria de agradecer a todos os meus familiares, principalmente aos meus pais, José e Marilanda, à minha irmã Júlia Luciana, ao meu esposo Paulino e especialmente ao meu filho José Paulo, a quem amo de paixão. Também aos meus tios Dido e Lúcia, Nativi e João Ivo pela força e pelo apoio incondicional.

Gostaria de agradecer a todos os amigos que fiz nestes anos aqui em São Paulo pelo apoio e amizade, especialmente à Paula. Também a todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

Eu nunca esquecerei de vocês!

Finalmente, eu gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho seria impossível. Também à Deus por tudo de bom que tem me proporcionado.

Abstract

The main aim of this work was to characterize the one-point extensions of strictly *shod* algebras. *Shod* algebras have appeared in the article of Coelho-Lanzilotta [17] and generalize quasitilted algebras that were introduced by Happel-Reiten-Smalø in [28].

One-point extensions of strictly *shod* algebras can be divided in the following cases: one-point extensions for non-projective and projective decomposable modules, and for indecomposable modules. When we have a strictly *shod* algebra A and an A -module M , these extensions essentially depend on the place where the module M lies regarding of the subcategories $\mathcal{L}_A$ and $\mathcal{R}_A$ of $\text{ind}A$. Our main results are the following:

Theorem 0.1 *Let A be a strictly shod algebra and $M = \text{rad}P$ be an A -module which contains at least one non-projective indecomposable direct summand in $\mathcal{R}_A$ where P is a hook-final projective. Then $A[M]$ is strictly shod algebra if and only if M is a directing module in $\text{add}\mathcal{R}_A$ and $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$.*

Theorem 0.2 *Let A be a shod algebra and M be a projective A -module. Then $A[M]$ is a shod algebra if and only if for all indecomposable $A[M]$ -module $Z = (k^t, X, f)$ either $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ or $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.*

Theorem 0.3 *Let $A[M]$ be a strictly shod algebra and $M = \text{rad}P$ where P is a hook-final projective. Then $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ and $\text{Ext}_A^2(M, M) = 0$.*

We have made use of these results of one-point extensions of strictly *shod* algebras A to obtain the Hochschild Cohomology groups of A . Moreover, we have generalized many results of quasitilted algebras and we have worked with *shod* algebras and tilting theory.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho foi o de caracterizar as extensões por um ponto de álgebra *shod* estritas. As álgebras *shod* surgiram no trabalho de Coelho-Lanzilotta [17] e generalizam as álgebras quase-inclinadas introduzidas por Happel-Reiten-Smalø em [28]. As extensões por um ponto de álgebras *shod* estritas se dividem em extensões por módulos decomponíveis não-projetivos e projetivos, e por módulos indecomponíveis. Dada uma álgebra *shod* estrita A e um A -módulo M , estas extensões dependem essencialmente do lugar onde se encontra M em relação às subcategorias $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$ de $\text{ind}A$. Como resultados principais citamos os seguintes teoremas:

Teorema 0.1 *Sejam A uma álgebra *shod* estrita e $M = \text{rad}P$ com P projetivo final de gancho, um A -módulo decomponível com pelo menos um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. Então $A[M]$ será *shod* estrita se, e somente se, M for um módulo dirigido pertencente a $\text{add}\mathcal{R}_A$ e $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$.*

Teorema 0.2 *Sejam A uma álgebra *shod* e M um A -módulo projetivo. Então $A[M]$ será uma álgebra *shod* se, e somente se, para qualquer indecomponível $Z = (k^t, X, f)$ tivermos $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ ou $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.*

Teorema 0.3 *Seja $A[M]$ uma álgebra *shod* estrita, onde $M = \text{rad}P$ com P um projetivo final de gancho. Então $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ e $\text{Ext}_A^2(M, M) = 0$.*

Utilizamos os resultados sobre extensão por um ponto de álgebras *shod* estritas A para obtermos os grupos de Cohomologia de Hochschild de A . Além disso, generalizamos vários resultados de álgebras quase-inclinadas e trabalhamos com álgebras *shod* e a teoria inclinante.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	7
1.1 Introdução	7
1.2 Álgebras de dimensão finita e aljavas	8
1.3 Representações de aljavas e módulos	10
1.4 Teoria de Auslander-Reiten	12
1.5 Extensões por um ponto	16
1.6 Dimensões homológicas em extensão por um ponto	22
1.7 Teoria inclinante	26
2 Álgebras quase-inclinadas e álgebras <i>shod</i>	30
2.1 Definições e exemplos	30
2.2 A trisecção na categoria de módulos para álgebras <i>shod</i>	35
2.3 Caracterização das álgebras <i>shod</i>	37
3 Extensões por um ponto de álgebras <i>shod</i>	41
3.1 Extensões por um ponto	43
3.2 Extensões por módulos não-projetivos	57
3.3 Extensões por módulos projetivos	64
3.4 Extensões por módulos indecomponíveis	71

SUMÁRIO

2

4	Cohomologia de Hochschild para álgebras <i>shod</i>	81
4.1	Os grupos de Cohomologia de Hochschild	81
4.2	Cohomologia de Hochschild para álgebras <i>shod</i>	85
5	Álgebras <i>shod</i> e módulos inclinantes	89
5.1	Módulos inclinantes	89
5.2	Álgebras <i>shod</i> e módulos inclinantes separantes	93
5.3	Álgebras <i>shod</i> e álgebras inclinadas	98
	Referências Bibliográficas	102

Introdução

A Teoria de Representações de Álgebras é uma área que tem evoluído muito nos últimos anos, tanto no sentido de abrir novos horizontes de estudos, como no sentido de reestruturação de conceitos já conhecidos.

Esta teoria tem por objetivo estudar as álgebras por meio de suas categorias de módulos. De maneira mais geral, estuda-se a categoria de módulos finitamente gerados à esquerda (ou à direita) sobre uma álgebra de Artin. Muitos dos conceitos e resultados da Teoria de Representações de Álgebras têm origem recente e foram desenvolvidos, em sua maior parte, nos últimos trinta anos. A Teoria em si data de meados do século dezenove com o descobrimento dos quatérnios (o primeiro corpo não-comutativo) e com o desenvolvimento, durante a primeira parte do século vinte, da teoria de álgebras semisimples de dimensão finita sobre corpos.

Nos anos 40 e 50 são apresentadas as conjecturas de Brauer-Thrall I e Brauer-Thrall II que atualmente já estão totalmente resolvidas para álgebras de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados. Seguem-se também os trabalhos de Gabriel, Roiten, Dlab, Ringel e Nazarova nos anos 60 e 70.

Na década de 70 surgem os trabalhos de Auslander-Reiten com os conceitos de sequências quase-cindidas, morfismos fonte e poço e morfismos irredutíveis de álgebras de Artin. Também Claus Ringel, juntando as idéias dos trabalhos de Auslander-Reiten, formalizou o que chamamos atualmente de aljavas de Auslander-Reiten.

Trabalharemos aqui ora num contexto mais geral de álgebras de Artin, ora num contexto mais restrito, onde assumiremos A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Neste último caso às álgebras podemos associar grafos ordenados, que chamaremos aljavas, e aos módulos,

as representações de aljavas associadas.

Algumas álgebras já têm sua classificação totalmente conhecida e também uma descrição completa de sua aljava de Auslander-Reiten, como é o caso das álgebras hereditárias (álgebras em que o radical de cada projetivo é projetivo).

Muito próximas das álgebras hereditárias e com propriedades importantes, estão as álgebras inclinadas, cuja teoria generaliza a Teoria de Morita. Uma álgebra B é *inclinada* se $B = \text{End}_A T$ onde A é uma álgebra hereditária e T um A -módulo inclinante. Algumas vezes temos dificuldade em estudar a categoria de módulos de uma álgebra e então transferimos o problema para uma outra álgebra mais simples. Neste contexto destacam-se os trabalhos de Happel-Ringel, Brenner-Butler e também de Auslander-Platzek-Reiten e Bernstein-Gelfand-Ponomarev, que introduziram a noção de módulo inclinante (veja [4]).

Como uma generalização da teoria inclinante, surgem com os trabalhos de Happel, Reiten, Smalø em 1995, as álgebras quase-inclinadas. Em [28], eles descrevem as álgebras quase-inclinadas de maneira categórica e estabelecem uma equivalência dessas álgebras com as álgebras A tais que $\text{gldim} A \leq 2$ e para qualquer $X \in \text{ind} A$, ou $\text{pd}_A X \leq 1$, ou $\text{id}_A X \leq 1$. Também, eles colocam uma caracterização dessas álgebras em função de certas subcategorias plenas, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$, de $\text{ind} A$ com A uma álgebra quase-inclinada. Temos assim uma trisecção da categoria $\text{ind} A$, isto é, $(\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) \cup (\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A) \cup (\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)$ dá-nos a categoria $\text{ind} A$.

Posteriormente, surgem vários trabalhos sobre estas álgebras entre os quais destacamos: Coelho-Happel, no qual os autores mostram a existência de componente pós-projetiva na aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra quase-inclinada; Coelho-Skowroński sobre as componentes conexas das álgebras quase-inclinadas onde é dada a estrutura de componentes com ciclos orientados, componentes regulares e componentes não-regulares; De La Peña, Mar-

tins e Coelho sobre as extensões por um ponto de álgebras quase-inclinadas, onde os autores caracterizam as extensões por um ponto por módulos decomponíveis; De La Peña e Trepode sobre extensões por um ponto de álgebras quase-inclinadas por módulos indecomponíveis; Huard sobre extensões por um ponto de álgebras quase-inclinadas por módulos projetivos e finalmente Happel afirmando que uma álgebra quase-inclinada ou é derivadamente equivalente a uma álgebra inclinada ou é derivadamente equivalente a uma álgebra canônica. Em particular, se A é uma álgebra quase-inclinada, então $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A \neq \emptyset$. Muito tem sido feito nesta área, que está se desenvolvendo rapidamente.

Em 1998 surgiram as chamadas álgebras *shod* (small homological dimension) no trabalho conjunto de Coelho e Lanzilotta. O objetivo dos autores era generalizar a triseção de $\text{mod}A$ para álgebras com a propriedade de que para qualquer $X \in \text{ind}A$, ou $\text{pd}_A X \leq 1$ ou $\text{id}_A X \leq 1$, mas não satisfizessem necessariamente $\text{gldim}A \leq 2$. Muitas das propriedades das álgebras quase-inclinadas valem para as álgebras *shod*, pois não dependem da dimensão global da álgebra (veja [17]). Notemos que as álgebras *shod* contêm as álgebras quase-inclinadas que por sua vez contêm as álgebras inclinadas. As álgebras *shod* A tais que $\text{gldim}A = 3$ são chamadas de álgebras *shod* estritas. Uma das propriedades interessantes das álgebras *shod* é a existência de uma triseção da categoria $\text{mod}A$ (veja [17]). Observemos que se A é uma álgebra *shod*, podemos ter $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A = \emptyset$ (veja exemplo no capítulo II). Também as álgebras *shod* podem ser escritas como uma extensão iterada de álgebras inclinadas (veja [17]). Isto nos permitirá obter, utilizando trabalhos de Happel e de Assem, os grupos de Cohomologia de Hochschild para álgebras *shod* a partir dos grupos de Cohomologia de Hochschild de uma álgebra inclinada e de propriedades das extensões por um ponto de álgebras *shod*. Finalmente, notemos que os módulos inclinantes sobre álgebras *shod* têm propriedades interessantes tais como não estarem totalmente contidos em nenhuma das

subcategorias $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$ de $indA$ para A uma álgebra *shod* estrita.

Nosso objetivo neste trabalho foi o de caracterizar as extensões por um ponto de álgebras *shod*. Estas extensões se dividem em extensões por módulos decomponíveis não-projetivos e projetivos, e por módulos indecomponíveis. Dada uma álgebra *shod* A , estas extensões dependem essencialmente do lugar onde se encontra o A -módulo M em relação às subcategorias $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$ de $indA$. Utilizamos os resultados sobre extensões para obtermos os grupos de Cohomologia de Hochschild de A . Também generalizamos vários resultados de álgebras quase-inclinadas.

No capítulo I veremos brevemente os conceitos básicos da teoria de representações de álgebras bem como alguns resultados que serão utilizados frequentemente no decorrer dos capítulos seguintes. Também aparecem algumas generalizações de conceitos e propriedades de [28].

No capítulo II apresentaremos alguns resultados de álgebras quase-inclinadas, propriedades e exemplos, e a caracterização dada por Coelho-Lanzilotta para álgebras *shod*, propriedades destas álgebras e exemplos.

No capítulo III introduziremos as extensões por um ponto de álgebras *shod* e daremos uma caracterização para estas extensões. Dada uma álgebra *shod* A , esta caracterização vai depender essencialmente da localização do módulo M em relação à triseção da álgebra A . Vamos nos concentrar nas álgebras *shod* estritas.

No capítulo IV calcularemos os grupos da Cohomologia de Hochschild de álgebras *shod*, utilizando os resultados obtidos no capítulo III, bem como resultados de Happel e de Coelho-Lanzilotta.

No capítulo V trabalharemos com alguns resultados de álgebras *shod* e a teoria inclinante, destacando-se o fato de um módulo inclinante, numa álgebra *shod* estrita A , não estar inteiramente contido em nenhuma das subcategorias $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste trabalho vamos considerar que A é uma álgebra associativa com identidade e indecomponível. Também assumiremos que A é uma álgebra de Artin, isto é, A é uma álgebra sobre um anel artiniano comutativo R que, como R -módulo, é finitamente gerado. Em alguns casos, contudo, nos será mais útil assumir A uma k -álgebra de dimensão finita com k um corpo algebricamente fechado. Indicaremos por $\mathbf{mod}A$ a categoria cujos objetos são os A -módulos finitamente gerados à esquerda e cujos morfismos são os morfismos entre módulos finitamente gerados à esquerda, e por $\mathbf{ind}A$, a subcategoria plena de $\mathbf{mod}A$ dos A -módulos à esquerda indecomponíveis e finitamente gerados. Neste capítulo introduziremos brevemente conceitos básicos da Teoria de Representações, bem como conceitos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Para maiores informações sobre cada tópico deste capítulo colocaremos referências em cada seção.

Teorema 1.1 (*Krull-Schmidt*)

Todo A -módulo finitamente gerado é a soma direta finita de A -módulos finitamente gerados indecomponíveis (isto é, que não se decompõem não tri-

vialmente como soma de dois módulos). Tal decomposição é essencialmente única.

Consideremos agora $A = P_1^{s_1} \oplus \dots \oplus P_t^{s_t}$ a decomposição de A em A -módulos projetivos indecomponíveis onde $P_i \neq P_j$ se $i \neq j$. Quando $s_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$ então A é dita ser uma **álgebra básica**. Tecnicamente é mais fácil lidar com módulos sobre álgebras básicas. Como a teoria de representações de álgebras tem como objetivo estudar álgebras através de suas categorias de módulos, o Teorema de Morita, a seguir, permite-nos restringir este estudo à categoria de módulos sobre álgebras básicas.

Teorema 1.2 (Morita)

Seja A uma álgebra de Artin. Então existe uma álgebra básica B tal que as categorias $\text{mod} A$ e $\text{mod} B$ são equivalentes.

Observemos que o Teorema de Morita é mais geral do que o enunciado aqui. (veja por exemplo [31]).

1.2 Álgebras de dimensão finita e aljavas

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica, associativa com identidade e indecomponível.

Então A pode ser caracterizada em termos de grafos orientados que chamaremos **aljavas**. Observemos que para as definições de aljavas e álgebras de caminhos não necessitamos ter o corpo k algebricamente fechado, contudo para a caracterização dada pelo Teorema de Gabriel precisaremos dessa hipótese sobre o corpo k . Para mais detalhes veja [9], capítulo III e [15], capítulo II.

Definição 1.3 *Uma aljava Q é composta por um conjunto de vértices Q_0 , um conjunto de flechas Q_1 e um par de funções $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$. Para*

qualquer flecha $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ é o vértice inicial de α enquanto que $e(\alpha)$ é o vértice final de α .

Exemplos:

1.

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Na aljava acima temos que $\{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto de vértices, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é o conjunto de flechas, $s(\alpha) = 1$, $s(\beta) = e(\alpha) = 2$, $s(\gamma) = e(\beta) = 3$ e $e(\gamma) = 4$.

2.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2$$

Na aljava acima temos que $\{1, 2\}$ é o conjunto de vértices, $\{\alpha, \beta\}$ é o conjunto de flechas, $e(\beta) = s(\alpha) = 1$, $e(\alpha) = s(\beta) = 2$.

Definição 1.4 Um **caminho** γ em $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ é descrito da seguinte forma: $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ tal que para $1 \leq i \leq n - 1$, $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$. O **comprimento** de um caminho γ será o número de flechas deste caminho e será denotado por $l(\gamma)$. Por convenção, um **caminho de comprimento zero** (ou um **caminho trivial**) é um caminho sem flechas associado a um vértice $a \in Q_0$ e que denotaremos por ϵ_a .

Dado um caminho $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ denotaremos por $s(\gamma) = s(\alpha_1)$ o vértice inicial de γ e por $e(\gamma) = e(\alpha_n)$ o vértice final de γ . Quando γ não é um caminho trivial e $s(\gamma) = e(\gamma)$ dizemos que γ é um **ciclo orientado**.

Sejam agora k um corpo e $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ uma aljava finita, isto é, onde os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos. Consideremos B o conjunto formado por

todos os caminhos de Q , inclusive os caminhos triviais. Seja kQ o k -espaço vetorial com base B . Vamos definir uma multiplicação nos elementos da base B . Dados dois caminhos de Q , $\gamma_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ e $\gamma_2 = \beta_m \dots \beta_1$ definimos:

$$\gamma_2 \gamma_1 = \begin{cases} \beta_m \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1 & \text{se } e(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{se } e(\alpha_n) \neq s(\beta_1) \end{cases}$$

Podemos estender por linearidade tal multiplicação a todos os elementos e assim definir em kQ uma estrutura de k -álgebra que chamaremos de **álgebra de caminhos de Q** . Uma **relação em Q** é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos eles com os mesmos vértices iniciais e finais. Um conjunto E contido em um ideal admissível R é um sistema de relações de R se E for um conjunto gerador de R e todo elemento de E for uma relação. Por abuso de notação usaremos R para denotar tanto um sistema de relações como o ideal admissível gerado por tais relações. Maiores detalhes podem ser encontrados em [9], capítulo III e [15], capítulo I.

Definição 1.5 *Uma aljava com relações (Q, R) é dada por uma aljava Q e um sistema de relações R de um ideal admissível de kQ . A álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações (Q, R) é, por definição, a álgebra kQ/R .*

Teorema 1.6 (Gabriel)

Toda álgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , básica e indecomponível, é isomorfa a uma álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações.

1.3 Representações de aljavas e módulos

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. As representações de uma aljava com relações correspondem a módulos sobre a álgebra quociente da álgebra

de caminhos associada. Obtemos então uma descrição dos módulos em termos de espaços vetoriais e transformações lineares. Isto nos será útil nos exemplos apresentados ao longo do trabalho.

Seja (Q, R) uma aljava finita com relações. Vamos definir a categoria $\text{mod}(Q, R)$ das representações finitamente geradas de (Q, R) .

Definição 1.7 *Uma representação finitamente gerada de Q é dada por $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$, onde para cada $i \in Q_0$, V_i é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k e para cada $\alpha \in Q_1$, f_α é uma transformação linear de $V_{s(\alpha)}$ em $V_{e(\alpha)}$.*

Dado o caminho não trivial $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ de i a j definimos $V(\gamma)$ como sendo a transformação linear de V_i a V_j dada pela composta $f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}$. Podemos estender esta definição para uma combinação linear de caminhos. Isto é, se $\rho = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma$ é uma relação de i para j então

$$V(\rho) = \sum_\gamma \lambda_\gamma V(\gamma) : V_i \longrightarrow V_j$$

é uma transformação linear.

Definição 1.8 *Uma representação finitamente gerada de (Q, R) é uma representação finitamente gerada de Q que satisfaz as relações de R .*

Dadas duas representações $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ um morfismo $\phi : V \longrightarrow W$ é dado por uma família de transformações lineares $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ tal que, para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

isto é, $\phi_j f_\alpha = g_\alpha \phi_i$.

O conjunto de morfismos de V e W é um k -espaço vetorial e a composta de morfismos é definida naturalmente coordenada a coordenada. Assim, $\text{mod}(Q, R)$ é uma categoria, chamada **categoria das representações finitamente geradas de (Q, R)** .

Teorema 1.9 *Seja $A \cong \frac{kQ}{R}$. Com a notação acima $\text{mod}(Q, R)$ e $\text{mod}A$ são equivalentes como k -categorias.*

Maiores detalhes podem ser encontrados em [9], capítulo III e [15], capítulo II.

1.4 Teoria de Auslander-Reiten

Na década de 70, Maurice Auslander e Idun Reiten introduziram o conceito de sequências quase cindidas (atualmente chamadas de sequências de Auslander-Reiten). A importância destas sequências exatas curtas está nos morfismos que a compõem. Mais tarde esses morfismos foram utilizados para a definição de uma aljava, chamada aljava de Auslander-Reiten da álgebra A . Estas aljavas, formalizadas por C.M. Ringel, nos ajudam a visualizar a categoria $\text{ind}A$.

Assumiremos aqui que A é uma álgebra de Artin. Detalhes podem ser encontrados em [9], capítulo V e [6], capítulo III.

Definição 1.10 *Uma sequência exata curta que não cinde entre A -módulos*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten se N é indecomponível e para todo morfismo $h : X \longrightarrow M$, $X \in \text{mod}A$, que não seja um epimorfismo que cinde (isto é, que não seja uma secção), existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$.

Observação: Para facilitar a notação, vamos chamar as sequências de Auslander-Reiten de sequências de AR.

Teorema 1.11 (*Existência e Unicidade*)

Sejam A uma álgebra de Artin e M um A -módulo indecomponível.

- (a) Se M não for projetivo então existe e é única, a menos de isomorfismo, a sequência de AR terminando em M :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

- (b) Se N não for injetivo então existe e é única, a menos de isomorfismo, a sequência de AR começando em N :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Definição 1.12 Seja M um A -módulo indecomponível.

- (1) Um morfismo $g : E \longrightarrow M$ é um **poço** em M se:

- (a) g não é um epimorfismo que cinde.
- (b) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $gh = g$, h é um automorfismo.
- (c) para todo $h : X \longrightarrow M$ que não seja um epimorfismo que cinde, existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$.

- (2) Um morfismo $f : M \longrightarrow E$ é uma **fonte** em M se:

- (a) f não é um monomorfismo que cinde.
- (b) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $hf = f$, h é um automorfismo.
- (c) para todo $h : M \longrightarrow X$ que não seja um monomorfismo que cinde, existe $h' : E \longrightarrow X$ tal que $h'f = h$.

Definição 1.13 Um morfismo que não cinde $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ é chamado de *irredutível* se para cada decomposição $f = gh$ ou g é um epimorfismo que cinde ou h é um monomorfismo que cinde.

Seja M um A -módulo indecomponível. Quando M não é projetivo sabemos que existe uma única sequência de AR terminando em M :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Recordemos que o A -módulo N é indecomponível e é univocamente determinado a menos de isomorfismo. Denotaremos N por τM . O A -módulo τM é dito ser o **transladado de Auslander-Reiten de M** .

Do mesmo modo, se tomarmos N um A -módulo indecomponível não injetivo, então existe uma única sequência de AR começando em N :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Notemos que M é um A -módulo indecomponível e é univocamente determinado a menos de isomorfismo. Denotaremos M por $\tau^{-1}N$. O A -módulo $\tau^{-1}N$ é dito ser o **transladado inverso de Auslander-Reiten de N** .

Definição 1.14 Seja A uma álgebra de Artin. A **aljava de Auslander-Reiten de A** , Γ_A , é definida como segue:

- (a) Os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismo dos A -módulos indecomponíveis, isto é, para cada indecomponível M associamos um vértice $[M]$ e os vértices $[M]$ e $[M']$ são os mesmos se e só se $M \cong M'$.
- (b) existe uma flecha $[M] \rightarrow [M']$ se e só se existe um morfismo irredutível $M \rightarrow M'$. A flecha $[M] \rightarrow [M']$ tem valuação (a, b) se existe um poço $aM \oplus X \rightarrow M'$, onde M não é um somando de X , e uma fonte $M \rightarrow bM' \oplus Y$, onde M' não é um somando de Y .

Observemos que se a valuação (a, b) for tal que $a = b$, omitiremos a sua indicação e colocaremos "a" flechas.

Para maiores detalhes e exemplos sobre a aljava de Auslander-Reiten veja o capítulo VII de [9] e o capítulo IV de [15].

Introduziremos agora alguns resultados sobre sequências de Auslander-Reiten que nos serão úteis no decorrer do trabalho. Detalhes sobre a notação utilizada e algumas noções básicas não definidas podem ser encontrados em [1], capítulo X, [6], capítulo III, [9], capítulos V e VII e [15], capítulo IV.

Definição 1.15 *Sejam M e N pertencentes a $\text{mod} A$ e $\mathcal{P}(M, N)$ o R -submódulo de $\text{Hom}_A(M, N)$, consistindo dos morfismos $f : M \rightarrow N$ que se fatoram através de um módulo projetivo. Então definimos*

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \frac{\text{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{P}(M, N)}.$$

Analogamente temos $\overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \frac{\text{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{I}(M, N)}$, onde $\mathcal{I}(M, N)$ consiste dos morfismos $f : M \rightarrow N$ que se fatoram através de injetivos.

No que se segue, $D : \text{mod} A \rightarrow \text{mod} A^{\text{op}}$ será a dualidade usual $D = \text{Hom}_k(-, k)$.

Teorema 1.16 *Seja X um A -módulo. Então $\text{pd}_A X \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(DA, \tau X) = 0$ e $\text{id}_A X \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(\tau^{-1} X, A) = 0$.*

Teorema 1.17 (Fórmula de Auslander)

Sejam M e N dois A -módulos. Então existem os isomorfismos:

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1} N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M)$$

que são funtoriais em ambas as variáveis.

Corolário 1.18 *(i) Se $\text{pd}_A M \leq 1$ e N é arbitrário, existe um isomorfismo*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(N, \tau M);$$

(ii) Se $\text{id}_A N \leq 1$ e M é arbitrário, $\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M)$.

Definição 1.19 Um *caminho* de um módulo indecomponível M a um módulo indecomponível N é uma sequência de morfismos

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

entre módulos indecomponíveis, onde $t \geq 1$ e cada f_i é não nula. Um caminho será chamado *trivial* se $t = 1$.

Definição 1.20 Dizemos que um caminho

$$Z_0 \xrightarrow{g_0} Z_1 \xrightarrow{g_1} \cdots \longrightarrow Z_n \xrightarrow{g_n} Z_{m+1}$$

de morfismos irredutíveis é *seccional* se $\tau Z_i \not\cong Z_{i-2}$ para $i = 2, \dots, m+1$.

Definição 1.21 Um caminho não trivial de M para M é chamado um *ciclo* em $\text{mod} A$.

Definição 1.22 Um módulo $M \in \text{mod} A$ é dito ser *dirigido* se não existirem somandos diretos indecomponíveis M' e M'' de M e um módulo indecomponível não-projetivo X com um caminho $X \rightsquigarrow M'$ e um caminho $M'' \rightsquigarrow \tau X$.

Observemos que se M é indecomponível então M é dirigido se, e somente se, M não pertence a nenhum ciclo (veja [26], seção 1, [13], [27] ou [39]).

Para uma discussão mais geral sobre as sequências e aljavas de Auslander-Reiten veja [9], capítulos IV e VII ou [15], capítulo IV.

1.5 Extensões por um ponto

Nesta seção definiremos extensão por um ponto de uma álgebra A por um A -módulo M . Observemos que a definição de extensão por um ponto pode

ser feita para anéis, porém neste trabalho, iremos utilizar somente a definição de extensão por um ponto de k -álgebras de dimensão finita. Para maiores detalhes veja [9], capítulo III ou [20].

Consideremos k um corpo. Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita e $M \in \text{mod} A$ um módulo. A **extensão por um ponto de A por M** é por definição a k -álgebra de dimensão finita

$$A[M] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$$

com as operações usuais de matrizes.

Podemos pensar também em termos de idempotentes:

Seja $\Lambda = kQ/R$ uma k -álgebra de dimensão finita. Seja i uma fonte em Γ e e_i o correspondente idempotente de Λ (veja [9], Capítulo III, seção 2). Como não existem caminhos terminando em i , temos que $e_i \Lambda e_i \cong k$ e $e_i \Lambda (1 - e_i) = 0$. Se kQ'/R' denota a aljava com relações obtida removendo-se o vértice i e as relações começando em i , então $(1 - e_i) \Lambda (1 - e_i) \cong kQ'/R'$. Então kQ/R é obtida de $\Lambda' = kQ'/R'$ adicionando-se um vértice i , junto com as flechas e relações começando em i . Assim teremos

$$\Lambda \cong \begin{pmatrix} k & 0 \\ (1 - e_i) \Lambda e_i & \Lambda' \end{pmatrix}$$

que é a extensão por um ponto de Λ' .

Novamente consideremos A uma k -álgebra de dimensão finita e $M \in \text{mod} A$. Seja $\mathcal{C}_A$ a categoria cujos objetos são as triplas (k^t, X, f) com X em $\text{mod} A$ e $f : M^t \rightarrow X$ um A -morfismo. Os morfismos entre dois objetos (k^t, X, f) e (k^s, X', f') são pares de morfismos $(\bar{\alpha}, \beta)$ onde $\bar{\alpha} : k^t \rightarrow k^s$ é um

k -morfismo induzido por $M \otimes \alpha$ e $\beta : X \longrightarrow X'$ é um A -morfismo tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^t & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & M^s \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow{\beta} & X' \end{array}$$

comuta.

Definição 1.23 *Sejam $Z = (k^s, X, f)$ e $Z' = (k^r, Y, g)$ duas triplas em $\mathcal{C}_A$. Chamaremos soma direta das triplas Z e Z' à tripla*

$$Z \oplus Z' = (k^{s+r}, X \oplus Y, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix})$$

Definição 1.24 *A tripla $Z = (k^t, X, f)$ em $\mathcal{C}_A$ é chamada de **decomponível** se pode ser escrita como soma direta de outras duas triplas em $\mathcal{C}_A$, isto é, se*

$$Z = (k^s, X', f') \oplus (k^r, X'', f'')$$

Temos a seguinte caracterização para triplas decomponíveis.

Observemos que uma tripla $Z = (k^t, X, f)$ é decomponível se existir um número $0 < s \leq t$ e aplicações $f_1 : M^s \longrightarrow X_1$ e $f_2 : M^{t-s} \longrightarrow X_2$ tais que, ou $s < t$ ou $X_2 \neq 0$, e morfismos $\phi_1 = (i_s, i_1)$ e $\phi_2 = (i_{t-s}, i_2)$ tais que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccccc} M^s & \xrightarrow{i_s} & M^t & \xrightarrow{\pi_s} & M^s \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ X_1 & \xrightarrow{i_1} & X & \xrightarrow{\pi_1} & X_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} M^{t-s} & \xrightarrow{i_{t-s}} & M^t & \xrightarrow{\pi_{t-s}} & M^{t-s} \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_2 \\ X_2 & \xrightarrow{i_2} & X & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \end{array}$$

comutam com i_1 e i_2 inclusões cindidas.

Temos também que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M^s & \xrightarrow{i_s} & M^t & \xrightarrow{\pi_{t-s}} & M^{t-s} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_2 \\
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{i_1} & X & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Assim, $(k^t, X, f) = (k^s, X_1, f_1) \oplus (k^{t-s}, X_2, f_2)$.

Uma tripla em $\mathcal{C}_A$ será chamada **indecomponível** se ela não for decomponível.

Temos que existe uma equivalência entre $\mathcal{C}_A$ e $\text{mod}A[M]$ (veja [9], capítulo III). Então, os elementos de $\text{mod}A[M]$ podem ser vistos como triplas (k^t, X, f) onde $X \in \text{mod}A$ e $f : M^t \longrightarrow X$ é um A -homomorfismo. É esta notação que utilizaremos de agora em diante.

A seguinte proposição nos será útil posteriormente.

Proposição 1.25 *Seja $Z = (k^t, X, f) \in \text{ind}A[M]$ com $f \neq 0$. Então $f' : M^t \longrightarrow X'$ é não-nula, onde X' é um somando direto indecomponível de X .*

Demonstração:

Seja X' um somando direto indecomponível de X e vamos escrever $X = X' \oplus X''$. Então o morfismo $f : M^t \longrightarrow X$ pode ser escrito na forma :

$$f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : M^t \longrightarrow X' \oplus X''.$$

Se $f' = 0$ então $f = \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix}$. Consequentemente temos o seguinte diagrama

comutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & M^t & \xrightarrow{0} & 0 \\ 0 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} & & \downarrow 0 \\ X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & X & \xrightarrow{(1,0)} & X' \end{array}$$

com $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ uma inclusão que cinde o que mostra que $(0, X', 0)$ é um somando direto de Z . Similarmente temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} M^t & \xrightarrow{id_{M^t}} & M^t & \xrightarrow{id_{M^t}} & M^t \\ f'' \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} & & \downarrow f'' \\ X'' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & X & \xrightarrow{(0,1)} & X'' \end{array}$$

com $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ uma inclusão que cinde e portanto (k^t, X'', f'') também é um somando direto de Z .

Finalmente temos também que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & M^t & \xrightarrow{id_{M^t}} & M^t \longrightarrow 0 \\ & & 0 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & X & \xrightarrow{(1,0)} & X'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

comuta. Assim concluimos que

$$Z = (0, X', 0) \oplus (k^t, X'', f'')$$

o que é absurdo pois Z é indecomponível. ■

Vejamos agora, nas seguintes proposições, de que forma são os módulos simples, projetivos e injetivos em $A[M]$.

Proposição 1.26 *Seja $A[M]$ a extensão por um ponto de A pelo módulo M . Então,*

- (a) Os $A[M]$ -módulos simples são da forma $(0, S', 0)$ onde S' é um simples A -módulo ou da forma $(k, 0, 0)$;
- (b) os $A[M]$ -módulos projetivos indecomponíveis têm a forma $(0, P, 0)$ para P um A -módulo projetivo indecomponível ou (k, M, id_M) , que é o novo projetivo;
- (c) os $A[M]$ -módulos injetivos indecomponíveis são isomorfos a $(Hom_A(M, I), I, g)$ para um A -módulo injetivo indecomponível I e $g : M \otimes Hom_A(M, I) \rightarrow I$ dada por $g(m \otimes g') = g'(m)$ para $m \in M$ e $g' \in Hom_A(M, I)$, ou $(k, 0, 0)$ para o novo injetivo.

Observação: Seja $I \in indA$ injetivo. Se $Hom_A(M, I) = 0$, então $(0, I, 0)$ será um injetivo em $indA[M]$.

Vamos agora relembrar alguns resultados de H. Merklen em [33] sobre as sequências de Auslander-Reiten começando ou terminando em $A[M]$ -módulos do tipo $(0, X, 0)$, onde X é um A -módulo indecomponível.

Se P é um A -módulo projetivo indecomponível, então o morfismo poço terminando em $(0, P, 0)$ será $(0, radP, 0) \xrightarrow{(0, i)} (0, P, 0)$ com i a inclusão. Quando $(0, N, 0)$ é um indecomponível não-projetivo temos a seguinte proposição:

Proposição 1.27 *Seja N um A -módulo indecomponível não-projetivo. Então a sequência de Auslander-Reiten terminando em $(0, N, 0)$ será*

$$0 \rightarrow (k^t, \tau N, e) \xrightarrow{(1, i)} (k^t, E, ie) \xrightarrow{(0, \varphi)} (0, N, 0) \rightarrow 0,$$

onde i e φ definem a sequência de Auslander-Reiten sobre A terminando em N

$$0 \rightarrow \tau N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$$

e o transladado $\tau(0, N, 0) = (k^t, \tau N, e)$, onde e é o morfismo avaliação (veja [9], capítulo II, seção 2).

Para sequências de Auslander-Reiten começando num $A[M]$ -módulo indecomponível do tipo $(0, X, 0)$ tem-se um resultado análogo (veja [33]).

Para maiores detalhes sobre extensões por um ponto veja [9], capítulo III, [37], capítulo 2 e [33].

1.6 Dimensões homológicas em extensão por um ponto

Nesta seção vamos trabalhar com as dimensões homológicas em extensões por um ponto de uma k -álgebra A . Começaremos com as seguintes proposições devidas a Happel, Reiten, Smalø (veja [28]).

Proposição 1.28 *Seja M um módulo sobre uma k -álgebra A e seja $A[M]$ a extensão por um ponto de A por M . Seja (k^t, X, f) um $A[M]$ -módulo indecomponível. Então $id_{A[M]}(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, $id_A X \leq 1$ e $Ext_A^1(M, X) = 0$.*

Proposição 1.29 *Seja $(0, X, 0) \in ind A[M]$. Então:*

- (a) $pd_{A[M]}(0, X, 0) = pd_A X$;
- (b) $id_{A[M]}(0, X, 0) \leq 1$ se, e somente se, $id_A X \leq 1$ e $Ext_A^1(M, X) = 0$.

Observemos que o fato de $Ext_A^1(M, X) = 0$ não implica que $id_{A[M]}(0, X, 0) = id_A X$. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero.

Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Quando fazemos a extensão de A pelo ponto M obtemos a álgebra:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero, que tem como aljava de Auslander-Reiten:

Observemos que $id_A X = 2$ mas $id_{A[M]}(0, X, 0) = 3$.

As seguintes proposições são generalizações de resultados de Happel, Reiten, Smalø (veja [28]). Denotaremos por P_X a cobertura projetiva do módulo X (veja por exemplo [9]).

Proposição 1.30 *Sejam A uma k -álgebra, M um A -módulo e $A[M]$ a extensão por um ponto de A por M . Seja (k^t, X, f) um $A[M]$ -módulo. Então:*

- (a) *Se $pd_A \operatorname{coker} f \leq 1$, então $pd_{A[M]}(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, $\ker f$ é projetivo;*
- (b) *Se $pd_A \operatorname{coker} f \leq n$ para $n \geq 1$, então $pd_{A[M]}(k^t, X, f) \leq 1$ implica que $pd_A \ker f \leq n - 2$;*

Demonstração:

A cobertura $(0, P_{\operatorname{coker} f}, 0) \oplus (k^t, M^t, id_{M^t}) \rightarrow (k^t, X, f)$ dá-nos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^t & \longrightarrow & M^t & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow (1,0) & & \downarrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^t \oplus P_{\operatorname{coker} f} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Pelo lema da serpente (veja Lema 3.6 de [1]) temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow K \rightarrow P_{\operatorname{coker} f} \rightarrow \operatorname{coker} f \rightarrow 0$$

e a sequência exata

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow K \rightarrow \Omega^1(\operatorname{coker} f) \rightarrow 0$$

Assim, $pd_{A[M]}(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, K é projetivo. Se $pd_A \operatorname{coker} f \leq 1$ então K será projetivo se, e somente se, $\ker f$ for projetivo e assim temos o item (a).

Para provarmos o item (b), seja $g : K \rightarrow P_{\text{coker } f}$. Então $\text{Im } g = \Omega^1(\text{coker } f)$. Como $\text{pd}_A \text{coker } f \leq n$ então, desde que $\text{pd}_{A[M]}(k^t, X, f) \leq 1$ implica que K é projetivo, teremos que $\text{pd}_A \ker f \leq n - 2$. ■

Notemos que a proposição anterior generaliza o Teorema 1.1 de [22] e o Lema 2.2 de [28].

Proposição 1.31 *Seja $f : M^t \rightarrow X$ sobrejetora. Então $\text{pd}(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, $\ker f$ é projetivo.*

Demonstração:

Como f é sobrejetora, então temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^t & \xrightarrow{id} & M^t \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^t & \xrightarrow{(f,0)} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde (k^t, M^t, id_{M^t}) é a cobertura projetiva de $(k^t, \text{Im } f, f)$ e $K = \ker(f, 0)$. Completando o diagrama por kernels e cokernels temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker f \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^t & \longrightarrow & M^t \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^t & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Pelo lema da serpente (veja Lema 3.6 de [1]) obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

Assim, $K \cong \ker f$.

Agora, $pd(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, K é projetivo se, e somente se, $\ker f$ é projetivo.

Portanto, $pd(k^t, X, f) \leq 1$ se, e somente se, $\ker f$ é projetivo. ■

Para maiores informações sobre dimensões homológicas de extensões por um ponto veja [9] e [28].

1.7 Teoria inclinante

Algumas vezes torna-se difícil estudar diretamente a teoria de representações de uma álgebra A . É conveniente então trocar A por outra álgebra B mais simples e reduzir um problema de A para um problema de B . Esta é a idéia principal da teoria inclinante. Dada uma álgebra A construímos o módulo ${}_A T$, chamado módulo **inclinante**, tal que $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$. Então as categorias $\text{mod} A$ e $\text{mod} B$ estão muito perto uma da outra mas geralmente não são equivalentes. Desde que este procedimento generaliza a Teoria de Morita, deveríamos esperar o uso do par de funtores adjuntos $\text{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes T$ para comparar $\text{mod} A$ e $\text{mod} B$. Vamos relembrar alguns dos principais resultados da teoria inclinante que nos serão úteis posteriormente (veja [4], [5], [10], [11], [14], [29], [25] ou [38]).

Definição 1.32 Um módulo ${}_A T$ é chamado módulo **inclinante** se:

- (i) $pd_A T \leq 1$;

$$(ii) \text{ Ext}_A^1(T, T) = 0;$$

(iii) Existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

com $T', T'' \in \text{add}(T)$.

Observemos que T será chamado um módulo **inclinante parcial** se satisfizer as condições (i) e (ii) anteriores.

Exemplos:

1. Os progeradores de Morita são os exemplos mais triviais de módulos inclinantes.
2. Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo da seção 1.6:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero.

Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Observemos que o A -módulo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$ é um A -módulo inclinante.

O seguinte teorema é essencial na teoria inclinante pois nos permite transportar informações de uma categoria de módulos para outra.

Teorema 1.33 (Brenner-Butler)

Sejam A uma álgebra, ${}_A T$ um A -módulo inclinante e $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$. Então

- (a) T_B como B -módulo é inclinante e $A \cong \text{End}_B T^{\text{op}}$ canonicamente;
- (b) Os funtores $\text{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes T$ induzem mutuamente equivalências inversas entre as subcategorias plenas

$$\mathcal{T}(T) = \{M \in \text{mod} A : \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{N \in \text{mod} B : \text{Tor}_1^B(N, T) = 0\}$$

enquanto que os funtores $\text{Ext}_A^1(T, -)$ e $\text{Tor}_1^B(-, T)$ induzem equivalências mutuamente inversas entre as subcategorias plenas

$$\mathcal{F}(T) = \{M \in \text{mod} A : \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{X}(T) = \{N \in \text{mod} B : N \otimes T = 0\}$$

- (c) Temos que $\text{Tor}_1^B(-, T) \cdot \text{Hom}_A(T, -) = 0 = (- \otimes T) \cdot \text{Ext}_A^1(T, -)$.
Também, $\text{Hom}_A(T, -) \cdot \text{Tor}_1^B(-, T) = 0 = \text{Ext}_A^1(T, -) \cdot (- \otimes T)$.

Definição 1.34 Seja A uma álgebra hereditária, isto é, uma álgebra tal que qualquer submódulo de projetivo é projetivo, e T um A -módulo inclinante. Então a álgebra $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ será chamada de **álgebra inclinada**.

Definição 1.35 Uma **Teoria de Torção** em $\text{mod} A$ é um par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de classes de módulos tais que:

- (i) $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$ e $N \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\text{Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$ implica $M \in \mathcal{T}$;

(iii) $\text{Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0$ implica $N \in \mathcal{F}$.

A classe $\mathcal{T}$ é chamada de **classe de torção** e a classe $\mathcal{F}$ é chamada de **classe livre de torção**.

Observemos que para uma álgebra inclinada $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$, o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ dado pelo Teorema de Brenner-Butler cinde (veja [6], capítulo VII).

Definição 1.36 *Sejam A uma álgebra hereditária e T um A -módulo inclinante. Se T for pós-projetivo então $B = \text{End} T^{\text{op}}$ será chamada de **álgebra disfarçada**.*

Observemos que para álgebras hereditárias A , um A -módulo T ser pós-projetivo equivale a $\text{Supp}(\text{Hom}_A(-, T))$ ser finito (veja [9], capítulo VIII, corolário 1.4).

As álgebras inclinadas são muito importantes na teoria de representações de álgebras e existem critérios para sabermos se uma álgebra é inclinada ou não. Destacam-se os trabalhos de Happel-Ringel e de Liu-Skowroński que usam o conceito de fatia completa definido abaixo (veja [4], [6], [25] e [41]).

Definição 1.37 *Uma classe S de A -módulos indecomponíveis não-isomorfos é chamada uma **fatia completa** em $\text{mod} A$ se ela satisfizer:*

- (i) $U = \bigoplus_{M \in S} M$ é um módulo sincero, isto é, $\text{Hom}_A(P, U) \neq 0$ para qualquer A -módulo projetivo P ;
- (ii) Se $M_0 \longrightarrow M_1 \cdots \longrightarrow M_m$ é uma sequência de não-isomorfismos não-nulos em $\text{mod} A$ com $M_0, M_m \in S$, então $M_i \in S$ para todo $0 < i < m$;
- (iii) Se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten, então, no máximo, um dos módulos, L ou N , pertence a S . Além disso, se um somando indecomponível de M pertence a S , então ou L ou N deve pertencer a S .

Capítulo 2

Álgebras quase-inclinadas e álgebras *shod*

2.1 Definições e exemplos

As álgebras quase-inclinadas foram introduzidas em [28] como uma generalização natural das álgebras inclinadas. Seja k um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{H}$ uma k -categoria abeliana hereditária, então a k -álgebra de dimensão finita A é chamada de **álgebra quase-inclinada** se $A = \text{End}_{\mathcal{H}} T$ para um objeto inclinante $T \in \mathcal{H}$ (veja [28] para definição). No caso $\mathcal{H} = \text{mod} H$ para H uma álgebra hereditária, então A é uma álgebra inclinada. Utilizaremos neste trabalho a seguinte definição equivalente de álgebras quase-inclinadas (veja [28] ou [32]).

Definição 2.1 *Uma álgebra A é chamada uma álgebra quase-inclinada se, e somente se, $\text{gldim} A \leq 2$ e para qualquer $X \in \text{ind} A$ ou $\text{pd}_A X \leq 1$ ou $\text{id}_A X \leq 1$.*

São exemplos de álgebra quase-inclinadas as álgebras inclinadas e as álgebras canônicas (veja [28], capítulo III ou [24]).

Muitos trabalhos têm sido feitos recentemente sobre as álgebras quase-inclinadas. Alguns dos mais importantes são [16], [19], [21], [22], [24], [28], [30], [34], [35], [36] e [40]. Para mais detalhes veja [28].

Notemos que as duas condições na definição de álgebras quase-inclinadas são independentes uma da outra. Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplos:

1. Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xrightarrow{\beta} \cdot \xrightarrow{\gamma} \cdot$$

com radical quadrado igual a zero. Temos que $\text{gldim} A = 3$ e existem sete A -módulos indecomponíveis a menos de isomorfismo dados pelos vetores dimensão : $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ e $(0, 0, 0, 1)$ e todos eles têm ou a dimensão projetiva ou a dimensão injetiva menor ou igual a 1. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

2. Seja A uma álgebra de Nakayama com sequência admissível $(2, 3)$, por exemplo, a k -álgebra A dada pela aljava

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2$$

com relação $\beta\alpha = 0$. A dimensão global de A é igual a 2, mas o módulo simples S_1 tem ambas as dimensões, projetiva e injetiva, iguais a 2.

Surgem assim as álgebras *shod* (*small homological dimension*) que foram introduzidas em [17] como uma generalização das álgebra quase-inclinadas. Pretendia-se estender a existência da trisecção, que descreveremos mais abaixo, da categoria $\text{mod}A$ de álgebras A que satisfizessem a condição $\text{pd}_A X \leq 1$ ou $\text{id}_A X \leq 1$ para qualquer $X \in \text{ind}A$, mas não necessariamente a condição $\text{gldim}A \leq 2$. As álgebras *shod* englobam as álgebras quase-inclinadas e consequentemente as inclinadas.

Definição 2.2 Uma álgebra A é dita ser **shod** se para qualquer $X \in \text{ind}A$, $\text{pd}_A X \leq 1$ ou $\text{id}_A X \leq 1$.

Observemos que uma álgebra *shod* A tem $\text{gldim}A \leq 3$ (veja [28]).

Definição 2.3 Uma álgebra *shod* A será chamada **shod estrita** se $\text{gldim}A = 3$.

Notemos que uma álgebra quase-inclinada A é uma álgebra *shod* com $\text{gldim}A \leq 2$.

Exemplos:

1. A álgebra A dada pelo exemplo 1 anterior é uma álgebra *shod* estrita.
2. Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Temos que A é uma álgebra *shod* estrita. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

3. Seja A a álgebra dada pela aljava:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Notemos que A é uma álgebra *shod* estrita. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

4. Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava:

Temos que A é uma álgebra *shod* estrita e sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

5. Seja A a k -álgebra com radical quadrado zero dada pela seguinte aljava:

Notemos que A é uma álgebra de tipo de representação infinita que é *shod* estrita.

2.2 A triseccção na categoria de módulos para álgebras *shod*

Nesta seção veremos algumas propriedades das álgebras *shod* que se encontram provadas em [17]. Observemos que estas propriedades generalizam alguns resultados sobre álgebras quase-inclinadas que se encontram em [28]. Vejamos algumas definições e considerações iniciais.

Seja A uma álgebra de Artin e consideremos $indA$. Sobre $indA$ introduzimos a relação $\sim_0$ dada por $X \sim_0 Y$ se $Hom_A(X, Y) \neq 0$ e seja $\sim$ o fecho transitivo desta relação, isto é, $X \sim Y$ se, e somente se, existe um número natural n e um caminho

$$X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \longrightarrow \cdots X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} = Y$$

de módulos indecomponíveis X_i , $i = 0, 1, \dots, n+1$ e morfismos não nulos $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Definimos então as seguintes subcategorias de $indA$

- $\mathcal{L}_A = \{X \in indA : \text{se } Y \sim X \text{ então } pd_A Y \leq 1\}$
- $\mathcal{R}_A = \{X \in indA : \text{se } X \sim Y \text{ então } id_A Y \leq 1\}$

Observemos que $\mathcal{L}_A$ é fechada para predecessores e que $\mathcal{R}_A$ é fechada para sucessores. Logo, se $X \in \mathcal{R}_A$, então $\tau^{-1}X \in \mathcal{R}_A$ e se $X \in \mathcal{L}_A$, então $\tau X \in \mathcal{L}_A$. Notemos também que podem existir elementos X com $pd_A X \leq 1$ em $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$, bem como elementos X com $id_A X \leq 1$ em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ (veja o Exemplo 2 do Capítulo 5).

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \uparrow \beta & & \\
 2 & \xrightarrow{\delta} & 3 & \xrightarrow{\alpha} & 4 & \xleftarrow{\gamma} & 5 \xleftarrow{\rho} 6
 \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Temos que A é uma álgebra *shod* estrita. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Temos que $\mathcal{L}_A = \{P_1, P_4, S_4, P_3, P_5\}$ e $\mathcal{R}_A = \{M, S_3, S_5, P_2, S_2, P_6, S_6\}$. Observemos que $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A = \emptyset$.

Terminaremos esta seção com a seguinte proposição de [17]:

Proposição 2.4 *Seja A uma álgebra shod e sejam $\text{ind}A$, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$ como antes. Então:*

- (i) $\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A = \text{ind}A$;
- (ii) $\text{Hom}_A(X, Y) = 0$ para qualquer $X \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ e $Y \in \mathcal{L}_A$;

(iii) $\text{Hom}_A(X, Y) = 0$ para qualquer $X \in \mathcal{R}_A$ e $Y \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$;

Segue deste último resultado que temos uma trisecção de $\text{ind}A$ quando A é uma álgebra *shod*, isto é, as partes $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A, \mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A) &= \text{Hom}_A(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) = \\ \text{Hom}_A(\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) &= 0 \end{aligned}$$

Observemos que os resultados acima também valem para álgebras quase-inclinadas.

Temos por Happel (veja [24]) que $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A$ é não vazia para uma álgebra quase-inclinada A . Ele prova que uma álgebra quase-inclinada é derivadamente equivalente a uma álgebra inclinada, ou é derivadamente equivalente a uma álgebra canônica. Para álgebras *shod* tem-se que a interseção é finita e pode até ser vazia (veja exemplo anterior e [18]).

2.3 Caracterização das álgebras *shod*

Vejamos agora alguns resultados que nos ajudarão a caracterizar as álgebras *shod*. Inicialmente colocaremos uma caracterização de álgebras quase-inclinadas. Para maiores detalhes e a prova destes resultados veja [28].

Definição 2.5 *Seja $(*) X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} Y$ um caminho em $\text{ind}A$. Um caminho $X \rightarrow X_{0,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{0,n_0} \rightarrow X_1 \rightarrow X_{1,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y$ em $\text{ind}A$ é então chamado um **refinamento** de $(*)$ e é chamado um **refinamento de morfismos irredutíveis** se todos os morfismos no refinamento são irredutíveis.*

Podemos então dar uma caracterização de álgebras quase-inclinadas.

Teorema 2.6 *As seguintes afirmações são equivalentes para uma álgebra de Artin A , onde $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{R}_A$ são como antes:*

- (a) A é quase-inclinada;
- (b) $\mathcal{R}_A$ contém todos os módulos injetivos em $\text{ind}A$;
- (c) $\mathcal{L}_A$ contém todos os módulos projetivos em $\text{ind}A$;
- (d) qualquer caminho em $\text{ind}A$ começando num módulo injetivo e terminando num módulo projetivo tem um refinamento de aplicações irreduzíveis e qualquer tal refinamento é seccional.

Proposição 2.7 *Seja A uma álgebra de Artin quase-inclinada:*

- (a) *Existem álgebras hereditárias R e S e um R - S -bimódulo M tal que A é isomorfa à matriz triangular*

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$$

- (b) *A aljava de AR avaliada de A não tem ciclos orientados.*

Para caracterizarmos as álgebras *shod* vamos precisar dos seguintes resultados:

Definição 2.8 *Sejam A uma álgebra *shod* e*

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_t$$

*um caminho de aplicações irreduzíveis em $\text{ind}A$. Se $\tau_A X_{j+1} = X_{j-1}$ para algum $1 \leq j \leq t-1$, onde τ_A denota o translado de Auslander-Reiten de A , então dizemos que j é um **gancho** no caminho acima.*

Definição 2.9 *Sejam A uma álgebra shod e*

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_t$$

*um caminho de aplicações irredutíveis em $\text{ind}A$. Se $\tau_A X_{j+1} = X_{j-1}$ e $\tau X_{j+2} = X_j$ para algum $1 \leq j \leq t-2$, onde τ_A denota o translado de Auslander-Reiten de A , então dizemos que j e $j+1$ serão **ganchos consecutivos** no caminho acima.*

Definição 2.10 *Sejam A uma álgebra shod e $P \in \text{ind}A$ um módulo projetivo. Dizemos que P é um **projetivo final de gancho** se existir um caminho não-seccional em Γ_A de um injetivo a P .*

Exemplo:

Consideremos a aljava de AR do exemplo 2 deste capítulo:

Observemos que o caminho

$$I \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow P$$

passa por dois ganchos consecutivos e que P é um projetivo final de gancho.

Proposição 2.11 (Coelho-Lanzilotta) *Seja A uma álgebra *shod* e suponha que exista um caminho $(*)$*

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P$$

em $\text{ind}A$, onde I e P são respectivamente módulos injetivo e projetivo. Então $f_i \notin \text{rad}^\infty(\text{mod}A)$ para cada i e $()$ tem um refinamento de aplicações irreduzíveis.*

Consideremos agora o seguinte teorema, devido a Coelho-Lanzilotta (veja [17]), que caracteriza as álgebras *shod*.

Teorema 2.12 (Coelho-Lanzilotta)

Seja A uma álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) *Para cada módulo X indecomponível, ou $\text{pd}_A X \leq 1$ ou $\text{id}_A X \leq 1$;*
- (b) $\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A = \text{ind}A$;
- (c) $(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add}\mathcal{L}_A)$ *é um par de torção cindido em $\text{mod}A$;*
- (d) $(\text{add}\mathcal{R}_A, \text{add}(\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A))$ *é um par de torção cindido em $\text{mod}A$;*
- (e) *Existe um par de torção cindido $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em $\text{mod}A$ tal que $\text{pd}_A Y \leq 1$ para cada $Y \in \mathcal{Y}$ e $\text{id}_A X \leq 1$ para cada $X \in \mathcal{X}$;*
- (f) *Qualquer caminho de um módulo injetivo indecomponível num módulo projetivo indecomponível pode ser refinado a um caminho de aplicações irreduzíveis e qualquer tal refinamento tem no máximo dois ganchos. Neste caso, os ganchos são consecutivos.*

Em particular, temos que uma álgebra A é *shod* se, e somente se, para qualquer $X \in \text{ind}A$, ou $X \in \mathcal{L}_A$ ou $X \in \mathcal{R}_A$.

Observemos finalmente que vale a afirmação análoga à Proposição 2.7 para álgebras *shod* e que a demonstração é exatamente a mesma.

Capítulo 3

Extensões por um ponto de álgebras *shod*

Nosso principal objetivo neste capítulo é caracterizar as extensões por um ponto de uma álgebra *shod* estrita. Na seção 1 trabalharemos com algumas propriedades e exemplos de extensões por um ponto de álgebras *shod*. Na seção 2 daremos uma caracterização das extensões por um ponto por módulos decomponíveis não-projetivos e teremos como resultado mais importante o seguinte teorema:

Teorema 1

*Sejam A uma álgebra *shod* estrita e $M = \text{rad}P$ com P projetivo final de gancho, um A -módulo decomponível com pelo menos um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. Então $A[M]$ será *shod* estrita se, e somente se, M for um módulo dirigido pertencente a $\text{add}\mathcal{R}_A$ e $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$.*

A demonstração deste teorema segue diretamente dos Teoremas 3.4, 3.10 e 3.11.

A seção 3 será dedicada ao caso de extensões por um ponto por módulos

projetivos e terá o seguinte teorema como resultado central:

Teorema 2

Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo projetivo. Então $A[M]$ será uma álgebra shod se, e somente se, para qualquer indecomponível $Z = (k^t, X, f)$ tivermos $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ ou $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.

A demonstração deste resultado será dada pelo Teorema 3.22.

Na seção 4 trataremos do caso de extensões por um ponto de módulos indecomponíveis não-projetivos e como resultado teremos:

Teorema 3

Sejam A uma álgebra shod estrita e $M \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e não-injetivo. Suponhamos que exista pelo menos um caminho de $\tau_A^{-1}M$ para algum projetivo $P \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ e que qualquer caminho de $\tau_A^{-1}M$ para algum projetivo $P' \in \text{ind}A$ seja formado só por módulos projetivos. Vamos assumir também que $\text{pd}_A \tau_A^{-1}M \geq 2$. Então $A[M]$ será shod estrita.

A demonstração deste teorema se encontra na seção 4.

Além desses resultados temos ainda o seguinte teorema que nos dá condições para que a extensão por um ponto $A[M]$ de uma álgebra shod A por um módulo M seja shod.

Teorema 4

Seja A uma álgebra shod. Se alguma das seguintes condições for satisfeita por um A -módulo M , então $A[M]$ será shod.

- (a) M é um A -módulo dirigido em $\text{add}\mathcal{R}_A$ tal que $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$;
- (b) M é um A -módulo projetivo em $\text{add}\mathcal{R}_A$;

- (c) $M = M_1 \oplus M_2$ é um A -módulo dirigido tal que $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$, com $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e $A[M_1]$ shod.

A prova do resultado acima segue dos Teoremas 3.4 e 3.16. Notemos que nos itens (a) e (b) vamos obter $A[M]$ uma álgebra *shod* estrita. Neste capítulo assumiremos que A será uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado.

Observemos que para álgebras quase-inclinadas já existe uma caracterização parcial das extensões por um ponto. Para maiores detalhes veja [21], [22], [35] e [36].

3.1 Extensões por um ponto

Nesta seção A será sempre uma álgebra *shod* e $M \in \text{mod}A$ um módulo não necessariamente indecomponível. Como usual, por $A[M]$ denotamos a extensão por um ponto de A por M . Como vimos no Capítulo 1, podemos pensar nos elementos de $\text{mod}A[M]$ como triplas (k^t, X, f) , onde X é um A -módulo e $f : M^t \rightarrow X$ é um A -homomorfismo.

Vamos considerar inicialmente os módulos do tipo $\overline{X} = (0, X, 0)$ com $X \in \text{ind}A$. Portanto, relembrando as propriedades das extensões por um ponto dadas no Capítulo 1, temos:

- Se $X \in \mathcal{L}_A$, então $\text{pd}_A X \leq 1$ e assim $\text{pd}_{A[M]} \overline{X} \leq 1$;
- Se $X \in \mathcal{R}_A$, então $\text{id}_A X \leq 1$ e assim $\text{id}_{A[M]} \overline{X} \leq 1$ se, e somente se, $\text{Ext}_A^1(M, X) = 0$;

Se $\text{Ext}_A^1(M, X) \neq 0$ temos o seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja $\overline{X} = (0, X, 0) \in \text{ind}A[M]$ com $\text{Ext}_A^1(M, X) \neq 0$. Se $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$ então $\text{pd}_A X \leq 1$ e consequentemente $\text{pd}_{A[M]} \overline{X} \leq 1$.*

Demonstração:

Como $\text{Ext}_A^1(M, X) \neq 0$ então $\text{Hom}_A(X, \tau M) \neq 0$ (veja Teorema 1.17) e portanto existe um somando direto indecomponível M_1 de M tal que $\text{Hom}_A(X, \tau M_1) \neq 0$. Em particular, existe um caminho de X para τM_1 e X será então um predecessor de τM_1 . Como $\tau M \in \text{add} \mathcal{L}_A$ teremos também que $X \in \mathcal{L}_A$ e portanto $\text{pd}_A X \leq 1$. ■

Como consequência imediata temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2 *Sejam $\overline{X} = (0, X, 0) \in \text{ind} A[M]$ e $\tau M \in \text{add} \mathcal{L}_A$. Então, $\text{pd}_{A[M]} \overline{X} \leq 1$ ou $\text{id}_{A[M]} \overline{X} \leq 1$.*

Demonstração:

Segue diretamente do comentário acima e do Lema 3.1. ■

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

com radical quadrado zero.

Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Quando fazemos a extensão por um ponto de A pelo módulo $M =$

0 0 1 obtemos a álgebra:

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$$

com radical quadrado zero, que tem como aljava de Auslander-Reiten:

Observemos neste exemplo que $X \in \mathcal{R}_A$, mas $\text{Ext}_A^1(M, X) \neq 0$ e portanto $\text{id}_{A[M]}(0, X, 0) \geq 2$. Na realidade, $\text{id}_{A[M]}(0, X, 0) = 2$.

Por outro lado, se $f \neq 0$, então temos como consequência da Proposição 1.25 o seguinte lema:

Lema 3.3 *Sejam A uma álgebra shod e $Z = (k^t, X, f) \in \text{ind}A[M]$ com $f \neq 0$. Se $M \in \text{add}\mathcal{R}_A$, então $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.*

Demonstração:

Suponhamos que $X = X' \oplus X''$ onde X' é um indecomponível pertencente a $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e vamos escrever $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$. Pela Proposição 1.25 temos que $f' \neq 0$. Portanto teríamos $\text{Hom}_A(\mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) \neq 0$ o que é um absurdo pois A é shod. ■

Teorema 3.4 *Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo dirigido em $\text{add}\mathcal{R}_A$ tal que $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$. Então $A[M]$ é shod.*

Demonstração:

Seja $Z = (k^t, X, f)$ um $A[M]$ -módulo indecomponível. Vamos mostrar que $pd_{A[M]}Z \leq 1$ ou $id_{A[M]}Z \leq 1$. Se $f = 0$ o resultado segue do Corolário 3.2, pois $\tau M \in add\mathcal{L}_A$. Podemos então supor que $f \neq 0$. Como $M \in add\mathcal{R}_A$ pelo lema anterior temos que $X \in add\mathcal{R}_A$.

Afirmamos que $Ext_A^1(M, X) = 0$. Não há nada a se mostrar se M for projetivo. Suponhamos que M seja não-projetivo e que $Ext_A^1(M, X) \neq 0$. Logo, $Hom_A(\tau^{-1}X, M) \neq 0$ (veja Teorema 1.17) e existe $g : \tau^{-1}X' \rightarrow M'$ não nula com X' um somando direto indecomponível de X e M' um somando direto indecomponível de M . Segue da Proposição 1.25 que $Hom_A(M, Y) \neq 0$ para todo somando direto indecomponível Y de X . Consideremos então $h : M'' \rightarrow X'$ um morfismo não-nulo com M'' um somando direto indecomponível de M . Assim, temos que existe um módulo indecomponível não-projetivo $\tau^{-1}X'$, e somandos diretos indecomponíveis M'' e M' de M tais que $Hom_A(M'', X') \neq 0$ e $Hom_A(\tau^{-1}X', M') \neq 0$. Portanto M não é dirigido, o que é um absurdo. Assim, $Ext_A^1(M, X) = 0$.

Como $id_A X \leq 1$, pois $X \in add\mathcal{R}_A$, então $id_{A[M]}Z \leq 1$ pela Proposição 1.28. Logo $A[M]$ é *shod*. ■

Observemos agora que, se considerarmos A *shod* estrita, então $A[M]$ também será *shod* estrita (veja [28], Capítulo III, Proposição 1.3). Contudo, pode-se verificar este fato diretamente da maneira abaixo:

Como A é *shod* estrita, então existe um injetivo indecomponível $I \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ por [17]. Em particular, teremos $Hom_A(M, I) = 0$ pois $M \in add\mathcal{R}_A$. Além disso, como I é injetivo, $Ext_A^1(M, I) = 0$. Assim, $(0, I, 0)$ vai ser um injetivo em $\mathcal{L}_{A[M]} \setminus \mathcal{R}_{A[M]}$ (veja Proposição 1.26). Agora, como $I \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ então existe $Y \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ sucessor de I com $id_A Y \geq 2$, isto é,

$$I = Y_0 \xrightarrow{g_1} Y_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{g_r} Y_r = Y$$
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{g_1} & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{g_r} & Y \end{array}$$

Observemos que as condições $\tau M \in \text{add}\mathcal{L}_A$ e $M \in \text{add}\mathcal{R}_A$ são essenciais para a validade do resultado, como nos mostram os seguintes exemplos.

1. Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 2, Capítulo 2.

Façamos a extensão por um ponto de A pelo módulo $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 Observemos que $\tau M \notin \mathcal{L}_A$. Obtemos então a álgebra $A[M]$:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \xleftarrow{\delta} \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero, que não é *shod* pois tem dimensão global igual a 4.

2. Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo anterior.

Façamos a extensão de A pelo módulo N que é não projetivo e não pertence a $\text{add}\mathcal{R}_A$. Obtemos então a álgebra $A[N]$:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \beta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\gamma} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \\ \uparrow \delta \\ \cdot \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Notemos que $A[N]$ não é *shod* pois

possui um módulo indecomponível, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, com ambas as dimensões, projetiva e injetiva, iguais a 2.

Nosso objetivo a partir de agora será o de obter uma possível recíproca do Teorema 3.4. Vejamos então os seguintes resultados que nos serão úteis e que generalizam alguns resultados de [28].

Lema 3.5 *Se $A[M]$ é shod, então A é shod.*

Demonstração:

Suponhamos que A não seja *shod*, então existiria um $X \in \text{ind}A$ tal que $\text{id}_A X \geq 2$ e $\text{pd}_A X \geq 2$. Mas isto implicaria que $\text{id}_{A[M]}(0, X, 0) \geq 2$ e $\text{pd}_{A[M]}(0, X, 0) \geq 2$ o que é um absurdo pois $A[M]$ é *shod*. ■

Veremos agora dois lemas que nos serão úteis posteriormente. Notemos que o primeiro desses lemas vale para álgebras não necessariamente *shod*.

Lema 3.6 *Sejam A uma álgebra e $M = M_1 \oplus M_2$ um A -módulo com $M_1 \in \text{ind}A$ e M_2 não-projetivo. Seja $B = A[M]$ a extensão por um ponto de A por M . Se $\text{Ext}_A^1(M, M_1) \neq 0$, então $Z = (k, M_1, \pi_1)$, onde π_1 é a projeção canônica de M sobre M_1 , vai ser um B -módulo indecomponível com $\text{pd}_B Z \geq 2$ e $\text{id}_B Z \geq 2$.*

Demonstração:

Temos que Z será um B -módulo indecomponível pelo Lema 1.5 de [16]. Como $\ker \pi_1 \cong M_2$, que não é projetivo, então $\text{pd}_B Z \geq 2$ pela Proposição 1.31.

Agora, $\text{id}_B Z \geq 2$ pela Proposição 1.28, pois $\text{Ext}_A^1(M, M_1) \neq 0$. ■

Lema 3.7 *Sejam A uma álgebra *shod* e $M = M_1 \oplus M_2$ um A -módulo com $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e M_2 não-projetivo. Seja $B = A[M]$ a extensão por um ponto de A por M . Então $Z = (k, M_1, \pi_1)$, onde π_1 é a projeção canônica de M sobre M_1 , vai ser um B -módulo indecomponível com $Z \notin \mathcal{L}_B$ e $Z \notin \mathcal{R}_B$.*

Demonstração:

Observemos que Z será um B -módulo indecomponível pelo Lema 1.5 de [16].

Como $\ker \pi_1 \cong M_2$, que não é projetivo, então $pd_B Z \geq 2$ pela Proposição 1.31 e portanto $Z \notin \mathcal{L}_B$.

Agora, como $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, então M_1 possui um sucessor $X \in ind A$ tal que $id_A X \geq 2$. Seja

$$M_1 = X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n} X_n = X,$$

um caminho em $ind A$ entre M_1 e X . Consideremos $f_1 = g_n \cdots g_1 : M_1 \longrightarrow X$. Se $f_1 \neq 0$, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{1_M} & M \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow f_1 \pi_1 \\ M_1 & \xrightarrow{f_1} & X \end{array}$$

que comuta e portanto $(k, X, f_1 \pi_1)$ é um sucessor de Z . Pela Proposição 1.28 temos que $id_B(k, X, f_1 \pi_1) \geq 2$ e portanto $Z \notin \mathcal{R}_B$.

Se $f_1 = 0$, então existe um j , $1 \leq j \leq n$, tal que $g_j \cdots g_1 \pi_1 \neq 0$, mas $g_{j+1} g_j \cdots g_1 \pi_1 = 0$. Assim, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{1_M} & M & \longrightarrow & \dots & & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow g_1 \pi_1 & & & & \downarrow g_j \cdots \pi_1 & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 \\ M_1 & \xrightarrow{g_1} & X_1 & \longrightarrow & \dots & & X_j & \xrightarrow{g_{j+1}} & X_{j+1} & \xrightarrow{g_{j+2}} & \dots & \longrightarrow & X \end{array}$$

em $ind B$ e consequentemente um caminho de Z para $(0, X, 0)$.

Assim, $(0, X, 0)$ vai ser um sucessor de Z com $id_B(0, X, 0) \geq 2$, pois $id_A X \geq 2$ (veja Proposição 1.28). Logo, $Z \notin \mathcal{R}_B$. ■

A partir de agora, nesta seção, trabalharemos com extensões por um ponto $A[M]$, onde $M = rad P$ com P projetivo final de gancho (veja definição

2.10). Observemos que nem sempre uma extensão $A[M]$ *shod* estrita é tal que $M = \text{rad}P$ onde P é um projetivo final de gancho. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo:

Consideremos a álgebra A dada pela aljava:

com $\varphi\beta = 0$, $\delta\beta = 0$, $\beta\sigma = 0$ e $\varphi\alpha = 0$. Temos que A é uma álgebra *shod* estrita. Seja agora a álgebra A' dada pela seguinte aljava:

com $\varphi\beta = 0$ e $\delta\beta = 0$. Fazemos a extensão por um ponto de A' pelo módulo M dado por

que pertence a um tubo da aljava de Auslander-Reiten de A' . Obtemos então a álgebra $A'' = A'[M]$, dada pela aljava:

com $\varphi\beta = 0$, $\delta\beta = 0$ e $\varphi\alpha = 0$. Agora, façamos a extensão por um ponto de A'' pelo módulo N dado por

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \leftarrow & & \leftarrow & \\ 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & \uparrow & & & \\ & k & & & \end{array}$$

Vamos obter então a álgebra A definida acima. Assim, $A = A'[M][N]$. Por outro lado, façamos a extensão por um ponto de A' pelo módulo N' dado por

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \leftarrow & \\ 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 \\ & 0 & \\ & \uparrow & \\ & k & \end{array}$$

e vamos obter então a álgebra $\bar{A}$, dada pela seguinte aljava:

$$\begin{array}{c} \delta \\ \leftarrow \\ \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ \varphi \uparrow \beta \\ \bullet \\ \uparrow \sigma \\ \bullet \end{array}$$

com $\varphi\beta = 0$, $\delta\beta = 0$ e $\beta\sigma = 0$. Façamos a extensão por um ponto de $\bar{A}$ pelo módulo M' dado por

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \leftarrow & \\ k & \xleftarrow{\quad} & k \\ & 0 & \\ & \uparrow & \\ & 0 & \\ & \uparrow & \\ & 0 & \\ & \uparrow & \\ & 0 & \end{array}$$

e vamos obter novamente a álgebra A acima. Logo, $A = A'[N'][M']$. Assim, obtivemos uma álgebra A *shod* estrita com $A = B[M']$, onde $B =$

$A'[N']$, e M' não dirigido pois está num tubo.

A partir de agora, nesta seção, quando falarmos em $A[M]$ shod estrita, estaremos supondo que $M = \text{rad}P$ com P um projetivo final de gancho (veja Definição 2.10).

Proposição 3.8 *Seja $B = A[M]$ uma álgebra shod estrita, onde $M = \text{rad}P$ com P um projetivo final de gancho. Então M é dirigido.*

Demonstração:

Suponhamos que M não seja dirigido. Então, temos que existem um módulo indecomponível não-projetivo Y e caminhos $M' \rightsquigarrow \tau Y$ e $Y \rightsquigarrow M''$ com M' e M'' somandos diretos indecomponíveis de M .

Também, como P é projetivo final de gancho, existe um caminho com pelo menos um gancho de um injetivo $I' \in \text{ind}A[M]$ para P . Logo, existe um caminho φ com pelo menos um gancho de um injetivo I' para $(0, N', 0)$, com N' um somando direto indecomponível de M .

Como o número de órbitas da componente de Γ_A que contém os somandos diretos de M é finito (veja [18]), segue que podemos escolher Y tal que $\text{Hom}_A(M', \tau Y) \neq 0$ e existe caminho $Y \rightsquigarrow M''$.

Observemos que se $\text{Hom}_A(M', \tau Y) \neq 0$ então $\text{Hom}_A(M, \tau Y) \neq 0$.

Agora, sabemos que $\tau(0, Y, 0) = (\text{Hom}_A(M, \tau Y), \tau Y, e)$, onde e é o morfismo avaliação (veja [33]). Assim, existe um caminho (na verdade, um morfismo) de (k, M, id_M) , o novo projetivo, para $(\text{Hom}_A(M, \tau Y), \tau Y, e)$ pois $\text{Hom}_A(M, \tau Y) \neq 0$ e como sabemos existe morfismo do novo projetivo para qualquer elemento de B que não seja do tipo $(0, X, 0)$.

Logo, teríamos o seguinte caminho de I' para (k, M, id_M)

$$\begin{aligned} I' &\xrightarrow{\varphi} (0, N', 0) \rightsquigarrow (k, M, \text{id}_M) \rightsquigarrow \tau(0, Y, 0) \rightsquigarrow (0, Y, 0) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow (0, M'', 0) \rightsquigarrow (k, M, \text{id}_M) \end{aligned}$$

em $\text{ind}A[M]$ com mais de dois ganchos não-consecutivos. Assim, chegamos a um absurdo pois B é *shod* (estrita) e portanto M é dirigido. ■

Notemos que o fato de M ser dirigido implica que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ mas $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ não implica que M seja dirigido pois poderíamos ter $\text{Hom}_A(I', \tau M') \neq 0$ para I' e M' somando diretos indecomponíveis de M e I' injetivo ou ter $\text{Hom}_A(\tau^{-1} M'', P') \neq 0$ para M'' e P' somandos diretos indecomponíveis de M e P' projetivo. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ & & \beta & & & & \\ 5 & \xrightarrow{\delta} & 2 & \xrightarrow{\alpha} & 4 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \xleftarrow{\rho} 6 \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Façamos a extensão por um ponto da álgebra A pelo módulo $M = I_1 \oplus S_3$.

Observemos que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$, mas $\text{Hom}_A(I_1, \tau S_3) \neq 0$ e portanto M não é dirigido.

Lema 3.9 *Se $A[M]$ é shod estrita, então M é projetivo ou $\tau M \in \text{add } \mathcal{L}_A$.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.5 temos que se $A[M]$ é shod, então A é shod. Suponhamos que M não seja projetivo e que exista um A -módulo M_1 somando direto indecomponível de M tal que $\tau M_1 \notin \mathcal{L}_A$. Portanto existe um predecessor X de τM_1 com $\text{pd}_A X \geq 2$. Assim $\text{pd}_{A[M]}(0, X, 0) \geq 2$ e portanto existe um $A[M]$ -módulo injetivo indecomponível I com $\text{Hom}_{A[M]}(I, \tau(0, X, 0)) \neq 0$ (veja Teorema 1.16). Seja $h : I \rightarrow \tau(0, X, 0)$ um morfismo não nulo e sejam as seguintes sequências de Auslander-Reiten em $\Gamma_{A[M]}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & E_1 & \\
 \nearrow & \vdots & \searrow \\
 \tau(0, X, 0) & & (0, X, 0) \\
 \searrow & \vdots & \nearrow \\
 & E_n &
 \end{array} \quad (1)$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 & F_1 & \\
 \nearrow & \vdots & \searrow \\
 \tau(0, M_1, 0) & & (0, M_1, 0) \\
 \searrow & \vdots & \nearrow \\
 & F_m &
 \end{array} \quad (2)$$

onde E_i e F_j são indecomponíveis para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$,

respectivamente. Notemos que não existem aplicações de M para τM_1 pois $A[M]$ é *shod* estrita e consequentemente M é dirigido (veja Proposição 3.8). Logo, $\tau(0, M_1, 0) = (0, \tau M_1, 0)$ por 1.27. Assim, teremos o seguinte caminho

$$I \xrightarrow{h} \tau(0, X, 0) \rightarrow E_i \rightarrow (0, X, 0) \rightsquigarrow \dots \quad (3.1)$$

$$\dots (0, \tau M_1, 0) \rightarrow F_j \rightarrow (0, M_1, 0) \rightarrow (k, M, id_M)$$

em $\Gamma_{A[M]}$, começando num injetivo I e terminando no projetivo $P = (k, M, id_M)$ (o novo projetivo).

Observemos que não é possível refinarmos o caminho acima para um caminho de irredutíveis com no máximo dois ganchos consecutivos. De fato, temos as sequências de Auslander-Reiten (1) e (2) que formam ganchos.

Assim $\tau M \in add\mathcal{L}_A$. ■

Juntando os resultados acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.10 *Seja $A[M]$ uma álgebra shod estrita com $M = radP$ com P projetivo final de gancho. Então,*

- (a) *A é uma álgebra shod;*
- (b) *ou M é projetivo ou τM pertence a $add\mathcal{L}_A$;*
- (c) *M é dirigido;*

Notemos que se A é *shod* estrita e $M \in add\mathcal{R}_A$ então teríamos a recíproca do Teorema 3.4. Contudo, podemos ter $A[M]$ *shod* estrita com $M \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 3 do Capítulo 2:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Fazemos a extensão por um ponto de A pelo módulo simples $S_2 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$. Pode-se provar que $A[M]$ é uma álgebra *shod* estrita.

Para que possamos ter a recíproca do Teorema 3.4 será necessário colocarmos algumas hipóteses adicionais, como por exemplo, a de M ser decomponível e ter um somando não-projetivo M_1 em $\text{add}\mathcal{R}_A$. É exatamente o que veremos na próxima seção.

3.2 Extensões por módulos não-projetivos

Nesta seção caracterizaremos as extensões por um ponto de álgebras *shod* estritas A por módulos não-projetivos M . Como resultados principais citamos os teoremas 3.11 e 3.12 que caracterizam as extensões por um ponto de álgebras *shod* estritas por módulos contendo um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. Se considerarmos A uma álgebra *shod* estrita, teremos então uma recíproca do Teorema 3.4. Agora, se M possui um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ então teremos como principal resultado o Teorema 3.16.

Teorema 3.11 *Seja $A[M]$ uma álgebra shod. Suponhamos que M tem dois somandos indecomponíveis, um deles não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. Então $M \in$*

$add\mathcal{R}_A$.

Demonstração:

Seja M_2 um somando direto indecomponível não-projetivo de M em $\mathcal{R}_A$ e vamos escrever $M = M_1 \oplus M_2$. Suponhamos que $M_1 \notin add(\mathcal{R}_A)$, então existe um somando direto indecomponível M'_1 de M_1 com $M'_1 \in (\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A)$. Consideremos $Z = (k, M'_1, \pi'_1)$ em $indA[M]$, onde $\pi'_1 : M \rightarrow M'_1$ é a projeção canônica de M sobre M'_1 (veja Lema 1.5 de [16]). Seja $M = M'_1 \oplus M' \oplus M_2$. Pelo Lema 3.7, temos que Z é tal que $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$ e $Z \notin \mathcal{R}_{A[M]}$. Mas isto é um absurdo pois $A[M]$ é *shod*. ■

Portanto temos provado o Teorema 1 da introdução.

Teorema 3.12 *Seja $A[M]$ uma álgebra shod com M um A -módulo tendo pelo menos dois somandos diretos indecomponíveis não-projetivos. Então $M \in add\mathcal{R}_A$.*

Demonstração:

Escrevamos $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, onde M_1 e M_2 são os somandos indecomponíveis não-projetivos de M .

Vamos supor que exista M' somando direto indecomponível de M pertencente a $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$.

Suponhamos que M' é um somando de M_3 e vamos escrever $M_3 = M' \oplus M''$.

Consideremos $Z = (k, M', \pi') \in indA[M]$, onde π' é a projeção canônica.

Pelo Lema 3.7, temos que $Z \notin \mathcal{R}_{A[M]}$ e que $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$. O que é um absurdo pois $A[M]$ é uma álgebra *shod*.

Se, por outro lado, tivermos $M' = M_1$ (ou $M' = M_2$) então M_2 (ou M_1) vai

estar no $\ker \pi'_1$ (ou $\ker \pi'_2$), com $\pi'_1 : M \rightarrow M_1$ (ou $\pi'_2 : M \rightarrow M_2$), e portanto teremos que $\ker \pi'_1$ (ou $\ker \pi'_2$) não será projetivo. Assim o resultado segue de maneira análoga. ■

Até agora trabalhamos com M tendo um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. A partir de agora, veremos o caso em que M possui um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$.

Corolário 3.13 *Sejam A uma álgebra shod e $M = M_1 \oplus M_2$ um A -módulo com $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e $M_2 \neq 0$. Se $A[M]$ é uma álgebra shod então M_2 é projetivo.*

Demonstração:

Suponhamos que M_2 não seja projetivo. Então M_2 teria um somando direto indecomponível M'_2 não-projetivo. Mas isto implicaria em M ter dois somandos diretos indecomponíveis não-projetivos. Logo, pelo Teorema 3.12 teríamos que $M \in \text{add} \mathcal{R}_A$, o que é um absurdo. ■

A recíproca do corolário anterior não vale, como nos mostra o exemplo a seguir:

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava do último exemplo da seção anterior:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Façamos a extensão por um ponto de A pelo módulo simples $S_2 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e pelo projetivo P_4 . Observemos que $A[M]$ não é *shod*.

Proposição 3.14 *Sejam A uma álgebra shod e $M \in \text{add}(\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A)$ um A -módulo decomponível com um somando direto indecomponível não-projetivo. Então $A[M]$ não é shod.*

Demonstração:

Suponhamos M pertencente a $\text{add}(\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A)$, $M = M_1 \oplus M_2$ com $M_1 \neq 0$ um somando direto indecomponível não-projetivo. Seja $Z = (k, M'_2, \pi'_2) \in \text{ind}A[M]$ onde M'_2 é um somando direto indecomponível de M_2 .

Pelo Lema 3.7, teremos que $Z \notin \mathcal{R}_{A[M]}$ e que $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$. Logo $A[M]$ não é *shod*. ■

Notemos que a proposição e o teorema seguintes são generalizações de alguns resultados de [21] e [22] e que a prova desses resultados para álgebras *shod* é praticamente a mesma de quando temos uma álgebra quase-inclinada. Contudo, para conveniência do leitor, repetiremos aqui as respectivas demonstrações.

Proposição 3.15 *Sejam A uma álgebra shod e $M = M_1 \oplus M_2$, com $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e $M_2 \neq 0$. Se $A[M]$ é shod então $\text{Hom}_A(M_2, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A) = 0$.*

Demonstração:

Como $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ então teremos que $\text{Hom}_A(M_1, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) \neq 0$. Vamos assumir que $\text{Hom}_A(M_2, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A) \neq 0$ e sejam $Z_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e $Z_2 \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ com $0 \neq \alpha \in \text{Hom}_A(M_1, Z_1)$ e $0 \neq \beta \in \text{Hom}_A(M_2, Z_2)$. Por

definição, existe um sucessor U de Z_1 com $id_A U \geq 2$ e um predecessor V de Z_2 com $pd_A V \geq 2$. Por [16], o $A[M]$ -módulo

$$Z = \left(k, Z_1 \oplus Z_2, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \rightarrow Z_1 \oplus Z_2 \right)$$

é indecomponível. Observemos então que vai existir um caminho de aplicações não-nulas em $ind A[M]$ de $(0, V, 0)$ para Z com $pd_{A[M]}(0, V, 0) \geq 2$ e portanto $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$. Além disso, vai existir um caminho de aplicações não-nulas entre $A[M]$ -módulos indecomponíveis de Z para $U' = (k^t, U, g)$ se $g \neq 0$ com $id_{A[M]} U' \geq 2$ ou de Z para $U'' = (0, U, 0)$ com $id_{A[M]} U'' \geq 2$. Então $Z \notin \mathcal{R}_{A[M]}$. Assim, temos um absurdo pois $A[M]$ é uma álgebra shod. ■

Teorema 3.16 *Sejam A um álgebra shod e $M = M_1 \oplus M_2$ um A -módulo dirigido tal que $\tau M \in add \mathcal{L}_A$, com $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e $M_2 \neq 0$. Suponhamos que $A[M_1]$ seja shod. Então $A[M]$ será uma álgebra shod.*

Demonstração:

Daremos apenas uma idéia da demonstração. Para maiores detalhes veja [22]. É suficiente estudarmos as dimensões homológicas dos $A[M]$ -módulos indecomponíveis da forma $Z = (k^t, X, f : M^t \rightarrow X)$, com $f \neq 0$ pois os módulos indecomponíveis da forma $(0, X, 0)$ não têm ambas as dimensões, projetiva e injetiva, maior ou igual a dois (veja [28], Lema 2.5).

Vamos assumir que um tal módulo Z tem dimensão injetiva maior ou igual a dois e provaremos que $pd_{A[M]} Z \leq 1$.

Observemos inicialmente que $Ext_A^1(M, X) = 0$. De fato, se $Ext_A^1(M, X) \neq 0$ então existiria um somando direto indecomponível Y de X tal que $Ext_A^1(M, Y) \neq 0$. Como $Hom_A(M, Y) \neq 0$, obtemos uma contradição pois

M é dirigido. Portanto $id_A X \geq 2$. Seja agora X_1 o somando direto de X contendo todos os somandos indecomponíveis com dimensão injetiva maior ou igual a dois e vamos escrever $X = X_1 \oplus X_2$.

Observemos que

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ g & f_2 \end{pmatrix} : M_1^t \oplus M_2^t \rightarrow X_1 \oplus X_2.$$

Também teremos que $pd_{A[M_1]}(k^t, X_1, f_1) \leq 1$ e que $pd_A X_2 \leq 1$. Consideremos então as resoluções projetivas $0 \rightarrow P_{21} \xrightarrow{g_2} P_{20} \xrightarrow{h_2} X_2 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow P_{11} \xrightarrow{g_1} P_{10} \xrightarrow{h_1} X_1 \rightarrow 0$ em $mod A$ e

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1^t & \longrightarrow & M_1^t & & \\ & & \downarrow (1,0)^t & & \downarrow f_1 & & \\ 0 \longrightarrow & P_{11} & \xrightarrow{(g_0)} & M_1^t \oplus P_{10} & \xrightarrow{(f_1, h_1)} & X_1 & \longrightarrow 0 \end{array}$$

em $ind A[M_1]$.

O morfismo $gg_0 : P_{11} \rightarrow X_2$ fatora-se através do epimorfismo h_2 . Também, existe $f'_2 : M_2^t \rightarrow P_{20}$ tal que $h_2 f'_2 = f_2$. Então teremos uma resolução projetiva de Z em $mod A[M]$ e chegaremos que $pd_{A[M]} Z \leq 1$. ■

Observemos que, no teorema acima, se A for uma álgebra *shod* estrita, então $A[M]$ também será uma álgebra *shod* estrita.

Exemplos:

1. Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 3 do Capítulo 2:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Sua aljava de Auslander-Reiten é dada por:

Façamos a extensão por um ponto de A pelo módulo simples S_2 e pelo projetivo P_4 . Observemos que $S_2 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, mas $\text{Hom}_A(P_4, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A) \neq 0$. Logo, $A[S_2 \oplus P_4]$ não é *shod*.

2. Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 4 do Capítulo 2:

Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Façamos a extensão por um ponto de A por $M_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e P_5 . Observamos que $A[M_1 \oplus P_5]$ não é *shod* estrita, pois $\text{Hom}_A(P_5, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A) \neq 0$.

Concluimos esta seção com o seguinte teorema que nos será útil no próximo capítulo.

Teorema 3.17 *Se $A[M]$ é shod então $\text{Ext}_A^2(M, M) = 0$.*

Demonstração:

Se $M \in \text{add}\mathcal{R}_A$ então $\text{Ext}_A^2(M, M) = 0$ pois $\text{id}_A M \leq 1$.

Suponhamos que exista M_1 um somando direto de M tal que $M_1 \in \text{add}(\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A)$ e seja $M = M_1 \oplus M_2$. Então M_2 será projetivo pelo Teorema 3.12 e $\text{pd}_A M \leq 1$. Logo $\text{Ext}_A^2(M, M) = 0$. ■

3.3 Extensões por módulos projetivos

Ao longo desta seção vamos denotar por A uma álgebra e M será um A -módulo projetivo. $A[M]$ será a extensão por um ponto de A pelo módulo M . Como resultado principal citamos o Teorema 3.22 que caracteriza as extensões por um ponto de álgebras *shod* estritas por módulos projetivos. Começamos a seção com alguns resultados que generalizam resultados de [22].

Lema 3.18 *Sejam A uma álgebra, M um A -módulo projetivo e X um A -módulo com $\text{pd}_A X \leq 1$. Então $Z = (k^t, X, f : M^t \rightarrow X)$, com $f \neq 0$, é tal que $\text{pd}_{A[M]} Z \leq 1$.*

Demonstração:

Seja $p : P_0 \rightarrow X$ a cobertura projetiva de X em $\text{mod} A$. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker p & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{p} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow (0,1)^t & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^t \oplus P_0 & \xrightarrow{(f,p)} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $K = \ker(f, p)$ e φ é um monomorfismo. Como $\text{pd}_A X \leq 1$, temos que $\ker p$ é um A -módulo projetivo. Do lema da serpente (veja Lema 3.6 de [1]) resulta que o quociente $\frac{K}{\varphi(\ker p)} \cong M^t$. Como M é projetivo afirmamos que $K \cong M^t \oplus \ker p$, que é assim um A -módulo projetivo. Logo o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^t & \xrightarrow{1} & M^t \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow (1,0)^t & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^t \oplus P_0 & \xrightarrow{(f,p)} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

mostra que $\text{pd}_B Z \leq 1$ e portanto está provado o lema. ■

Lema 3.19 *Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo projetivo em $\text{add} \mathcal{L}_A$. Vamos assumir que $\text{Hom}_A(M, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A) = 0$. Se $Z = (k^t, X, f : M^t \rightarrow X)$, com $f \neq 0$, é um $A[M]$ -módulo indecomponível, então $\text{pd}_{A[M]} Z \leq 1$.*

Demonstração:

Como Z é um $A[M]$ -módulo indecomponível segue que $\text{Hom}_A(M, X') \neq 0$ para cada somando direto indecomponível X' de X (veja Proposição 1.25). Logo $X \in \text{add} \mathcal{L}_A$ pois $\text{Hom}_A(M, \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$ e portanto $\text{pd}_A X \leq 1$. Pelo lema anterior, teremos que $\text{pd}_{A[M]} Z \leq 1$. ■

onde M é um A -módulo projetivo tal que $\text{Hom}_A(M, \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$. Quando fazemos a extensão por um ponto de A por M , obtemos a álgebra $A[M]$ dada pela aljava:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \downarrow \gamma \\ \cdot \\ \uparrow \delta \\ \cdot \end{array} \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\phi} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot$$

com radical quadrado igual a zero. Observemos que $A[M]$ é uma álgebra *shod* estrita.

Proposição 3.21 *Sejam A uma álgebra shod estrita e M um A -módulo projetivo em $\text{add}\mathcal{R}_A$. Então $A[M]$ é uma álgebra shod estrita.*

Demonstração:

Consideremos $Z = (k^t, X, f)$ um $A[M]$ -módulo indecomponível. Se $f = 0$ então pelo Proposição 1.29 teremos ou $\text{pd}_{A[M]}Z \leq 1$ ou $\text{id}_{A[M]}Z \leq 1$.

Se $f \neq 0$ então pelo Lema 3.3 temos que $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$ e assim $\text{id}_{A[M]}Z \leq 1$ (M é projetivo e $\text{id}_A X \leq 1$). Portanto $A[M]$ é uma álgebra *shod*.

Se A é *shod* estrita então $A[M]$ será *shod* estrita pela Proposição 1.3, Capítulo III de [28]. ■

Exemplo:

Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 2 do Capítulo 2:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \delta \\ \cdot \end{array} \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\phi} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot$$

com radical quadrado igual a zero. Sua aljava de Auslander-Reiten é:

Façamos a extensão por um ponto de A por $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, projetivo em $\mathcal{R}_A$. Obtemos então a álgebra $A[M]$ dada pela seguinte aljava:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \delta \\ \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\phi} \cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \xleftarrow{\varphi} \cdot \end{array}$$

com $\delta\alpha = 0$, $\delta\phi = 0$, $\phi\rho = 0$. Notemos que $A[M]$ é uma álgebra *shod* estrita.

O seguinte teorema caracteriza as extensões por um ponto de álgebras *shod* estritas A por um A -módulo projetivo M . Um resultado similar foi provado por Huard em [30] porém usando técnicas diferentes.

Teorema 3.22 *Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo projetivo. Então, $A[M]$ será uma álgebra shod se, e somente se, para qualquer indecomponível $Z = (k^t, X, f)$ tivermos $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ ou $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.*

Demonstração:

A demonstração segue diretamente das seguintes proposições. ■

Proposição 3.23 *Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo projetivo. Se, para qualquer indecomponível $Z = (k^t, X, f)$, tivermos $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ ou $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$, então $A[M]$ será uma álgebra shod.*

Demonstração:

Consideremos $Z = (k^t, X, f)$ um $A[M]$ -módulo indecomponível. Se $f = 0$ então pelo Corolário 3.2 teremos ou $\text{pd}_{A[M]}Z \leq 1$ ou $\text{id}_{A[M]}Z \leq 1$. Se $f \neq 0$ então temos alguns casos a considerar:

- Se $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$ então como M é projetivo temos que $\text{id}_A X \leq 1$ implica que $\text{id}_{A[M]}Z \leq 1$ pela Proposição 1.28.
- Se $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ então teremos $\text{pd}_{A[M]}Z \leq 1$ pelo Lema 3.18.

Portanto $A[M]$ é shod. ■

Proposição 3.24 *Sejam A uma álgebra shod e M um A -módulo. Se $A[M]$ é shod então qualquer $A[M]$ -módulo indecomponível $Z = (k^t, X, f)$ é tal que $X \in \text{add}\mathcal{L}_A$ ou $X \in \text{add}\mathcal{R}_A$.*

Demonstração:

Consideremos $Z = (k^t, X, f)$ um $A[M]$ -módulo indecomponível. Seja $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ com $X_1 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e $X_2 \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ não nulos. Afirmamos que $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$ e $Z \notin \mathcal{R}_{A[M]}$.

De fato, se $\text{id}_A X \geq 2$ então $\text{id}_{A[M]}(k^t, X, f) \geq 2$. Senão, X_1 vai ter um sucessor Y_1 com $\text{id}_A Y_1 \geq 2$ e vai existir um caminho

$$X_1 = Z_0 \xrightarrow{h_1} \cdots \quad Z_{t-1} \xrightarrow{h_t} Y_1$$

de X_1 para Y_1 em $\text{ind}A$. Seja $g_i = h_i \oplus 1_{X_2} \oplus 1_{X_3}$. Então, teremos o caminho

$$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \xrightarrow{g_1} \cdots \longrightarrow Z_{t-1} \oplus X_2 \oplus X_3 \xrightarrow{g_t} Y_1 \oplus X_2 \oplus X_3$$

em $\text{ind}A$, de X para $X' = Y_1 \oplus X_2 \oplus X_3$. Se $g = g_t \cdots g_1 \neq 0$ então teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M^t & \xrightarrow{1_{M^t}} & M^t \\ \downarrow f & & \downarrow gf \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

em $\text{ind}A[M]$.

Assim, (k^t, X, f) terá como sucessor (k^t, X', gf) com $\text{id}_{A[M]}(k^t, X', gf) \geq 2$ e portanto $(k^t, X, f) \notin \mathcal{R}_{A[M]}$. Agora, se $g = 0$ então vai existir um j , $1 \leq j \leq t$, tal que $g_j \cdots g_1 \neq 0$ mas $g_{j+1} \cdots g_1 = 0$. Portanto teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M^t & \xrightarrow{1_{M^t}} & M^t & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & M^t & \xrightarrow{0} & 0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{0} 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g_1 f & & \downarrow g_j \cdots g_1 f & & \downarrow 0 \\ X & \xrightarrow{g_1} & Z'_1 & \xrightarrow{g_2} \cdots \longrightarrow & Z'_j & \xrightarrow{g_{j+1}} & Z'_{j+1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{g_n} X' \end{array}$$

em $\text{ind}A[M]$, onde $Z'_i = Z_i \oplus X_2 \oplus X_3$. Assim, $(0, X', 0)$ será um sucessor de (k^t, X, f) com $\text{id}_{A[M]}(0, X', 0) \geq 2$ e portanto $(k^t, X, f) \notin \mathcal{R}_{A[M]}$.

Agora, como $X_2 \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$, então existe X_2^1 predecessor de X_2 tal que $\text{pd}_A X_2^1 \geq 2$. Assim vai existir um caminho

$$X_2^1 \xrightarrow{f_1} \cdots \quad X_2^n \xrightarrow{f_n} X_2$$

em $\text{ind}A$, com $h = f_n \cdots f_1$. Obtemos assim o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & M^t \\ \downarrow 0 & & \downarrow f \\ X_2^1 & \xrightarrow{(0, h, 0)} & X \end{array}$$

Obviamente ele comuta e portanto obtivemos um caminho de $(0, X_2^1, 0)$ para Z com $pd_{A[M]}(0, X_2^1, 0) \geq 2$. Assim, $Z \notin \mathcal{L}_{A[M]}$. ■

3.4 Extensões por módulos indecomponíveis

Nesta seção vamos considerar A uma álgebra shod e M um A -módulo indecomponível não-projetivo em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$.

Lema 3.25 *Sejam A uma álgebra shod e $M \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo. Se existir um caminho entre um injetivo I e M , então este caminho tem que ser seccional.*

Demonstração:

Suponhamos que existisse um caminho não seccional

$$I \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_A X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow \cdots \longrightarrow M$$

entre um injetivo I indecomponível e M . Como $M \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ então M possui um sucessor Y com $id_A Y \geq 2$. Logo, $Hom_A(\tau^{-1}Y, P) \neq 0$ para algum P projetivo indecomponível. Assim, teríamos um caminho de um injetivo indecomponível I para um projetivo indecomponível P com dois ganchos não-consecutivos, o que é um absurdo. Portanto, todo caminho de um injetivo I para M tem que ser seccional. ■

Teorema 3.26 *Sejam A uma álgebra shod estrita e $M \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ não-projetivo e não-injetivo. Suponhamos que exista pelo menos um caminho de $\tau_A^{-1}M$ para algum projetivo $P \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ e que qualquer caminho de $\tau_A^{-1}M$ para algum projetivo $P' \in ind A$ seja formado só por módulos projetivos. Vamos assumir também que $pd_A \tau_A^{-1}M \geq 2$. Então $A[M]$ será shod estrita.*

Demonstração:

Para facilitar a notação, vamos considerar $B = A[M]$ e $\overline{X} = (0, X, 0)$ para qualquer $X \in \text{mod}A$. Para que a álgebra B seja *shod*, precisamos mostrar que qualquer caminho em $\text{ind}B$ entre um B -módulo injetivo $\tilde{I}$ e um B -módulo projetivo $\tilde{P}$ passa por apenas um gancho ou dois ganchos consecutivos. Recordemos que os B -módulos projetivos indecomponíveis têm ou a forma $\overline{P} = (0, P, 0)$ com $P \in \text{ind}A$ projetivo, ou a forma (k, M, id_M) , que é o novo projetivo. Como A é *shod* estrita, os caminhos de um A -módulo injetivo I para um A -módulo projetivo P podem ser refinados a caminhos de morfismos irredutíveis e passam por apenas um gancho ou dois ganchos consecutivos. Em particular, tais módulos, I e P , vão estar em uma mesma componente conexa da aljava de AR, que é dirigida (veja [17]). Logo, pelo Teorema 2.1 do Capítulo IX de [9], teremos que os módulos de tal componente vão ser determinados por seus fatores de composição. Assim, para cada A -módulo simples S e $X \in \text{ind}A$ denotemos por $m_S(X)$ o número de vezes que S aparece como fator de composição de X .

Agora, como M é indecomponível, consideremos a sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}A$ começando em M :

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \tau_A^{-1}M \rightarrow 0$$

onde E_i é indecomponível, para $i = 1, \dots, n$.

Temos, por hipótese, que $\text{pd}_A \tau_A^{-1}M \geq 2$ e portanto $\text{Hom}_A(DA, M) \neq 0$. Seja I um A -módulo injetivo em $\text{ind}A$ tal que existe um morfismo não-nulo de I para M . Seja também $P_1 \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ tal que exista um caminho de $\tau_A^{-1}M$ para P_1 . Logo, existe um caminho de I para P_1 , passando por M e por $\tau_A^{-1}M$, que pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis. Consideremos então a seguinte sub-aljava em Γ_A :

Teremos que, para cada A -módulo simples S ,

$$m_S(\tau_A^{-1}M) = \sum_{i=1}^n m_S(E_i) - m_S(M).$$

Agora, sabemos que cada B -módulo simples ou tem a forma $\bar{S} = (0, S, 0)$, onde S é um A -módulo simples, ou $\tilde{S} = (k, 0, 0)$. Seja então o seguinte diagrama em Γ_B :

onde P' é o novo projetivo. Para cada B -módulo simples $\overline{S}$ temos

$$m_{\overline{S}}(E') = \sum_{i=1}^n m_{\overline{S}} \overline{E}_i + m_{\overline{S}}(P') - m_{\overline{S}} \overline{M}$$

Observemos então, que $m_{\overline{S}} \overline{X} = m_S(X)$, onde S é um A -módulo simples.

Logo,

$$m_{\overline{S}}(E') = \sum_{i=1}^n m_S(E_i) + m_{\overline{S}}(P') - m_S(M)$$

Agora,

$$\begin{aligned} m_{\overline{S}}(\tau_B^{-1} P') &= m_{\overline{S}}(E') - m_{\overline{S}}(P') \\ &= \sum_{i=1}^n m_S(E_i) - m_S(M) \\ &= m_S(\tau_A^{-1} M) \\ &= m_{\overline{S}}(0, \tau_A^{-1} M, 0) \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\tau_B^{-1} P'$ e $\overline{\tau_A^{-1} M}$ têm os mesmos fatores de composição. Como $\overline{\tau_A^{-1} M}$ não pertence a nenhum ciclo curto orientado pois $\tau_A^{-1} M$ é dirigido, então $\tau_B^{-1} P' \cong \overline{\tau_A^{-1} M}$. Consideremos a seguinte sub-aljava de Γ_B :

Afirmamos que qualquer caminho de um B -módulo injetivo $\tilde{I} \in indB$ para um B -módulo projetivo $\tilde{P} \in indB$ vai ter no máximo dois ganchos consecutivos.

De fato, consideremos inicialmente aqueles injetivos indecomponíveis I tais que $Hom_A(M, I) = 0$.

Vamos supor que não existem caminhos de I para M e nem de M para P , $P \in indA$, $P \neq P_1$, um projetivo qualquer. Então qualquer caminho

$$\bar{I} = X'_0 \rightarrow X'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X'_n = \bar{P}$$

de $\bar{I}$ para $\bar{P}$ em $indB$ vai ser da forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P \end{array}$$

Assim, como qualquer caminho entre um injetivo $I \in indA$ e um projetivo $P \in indA$ tem no máximo dois ganchos consecutivos, então qualquer caminho de $\bar{I}$ para $\bar{P}$ vai ter no máximo dois ganchos consecutivos.

Agora, se existir um caminho de um injetivo I para M então seja

$$I = X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n+1} = M$$

o caminho (seccional) do injetivo I para M (veja lema anterior). Observemos aqui que qualquer caminho de $\bar{I}$ para $\bar{P}'$, o novo projetivo, é seccional pois $M = radP'$. Temos os seguintes casos a considerar:

- (a) Se X_n fosse igual a $\tau_A E_i$, com E_i um dos somandos diretos indecomponíveis do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten começando em M , então teríamos o caminho:

$$\bar{I} = \overline{X_0} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau \overline{E_i} \rightarrow \overline{M} \rightarrow \overline{E_i} \rightarrow \tau_B^{-1} \overline{M} \rightarrow \tau_A^{-1} \overline{M} \leadsto \bar{P}_1$$

em $indB$ com dois ganchos consecutivos. Observemos que $\tau_A \overline{E_i} = \tau_B \overline{E_i}$ pois $Hom_A(M, \tau_A E_i) = 0$.

(b) Consideremos, como em (a), $X_n = \tau_A E_i$ para algum E_i , e o caminho

$$\bar{I} = \bar{X}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_B \bar{E}_i \rightarrow \bar{M} \rightarrow P' \rightarrow \tau_B^{-1} \bar{M} \rightarrow \tau_A^{-1} \bar{M} \rightsquigarrow \bar{P}_1$$

em $indB$. Observemos que este caminho passa por apenas um gancho.

(c) Os outros caminhos entre $\bar{I}$ e $\bar{P}_1$ seriam aqueles passando por um E_i tal que $X_n \not\cong \tau_A^{-1} E_i$ e que teriam apenas um gancho.

Portanto, concluímos que qualquer caminho entre um injetivo $\bar{I}$ e $\bar{P}_1$ passa por no máximo dois ganchos consecutivos.

Agora, qualquer outro projetivo $P'' \in indA$ é tal que, ou existe um caminho seccional

$$M = Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n \rightarrow Y_{n+1} = P''$$

em $indA$, de M para P'' e nesse caso existe um caminho seccional de $\bar{M}$ para $\bar{P}''$ pois não temos morfismos do novo projetivo para esses módulos. Portanto os caminhos de $\bar{I}$ para $\bar{P}''$ não se alteram. Ou existe um caminho seccional de $\tau_A^{-1} M$ para $radP''$. Neste último caso, a prova segue análoga à de P_1 pois estamos supondo que qualquer caminho de $\tau_A^{-1} M$ para $radP''$ é formado só de projetivos. Logo, qualquer caminho de $\bar{I}$ para P'' vai ter no máximo dois ganchos consecutivos. Finalmente, se $Hom_A(M, I) \neq 0$ para algum injetivo $I \in indA$ e existir caminho de I para algum projetivo $P_2 \in indA$, então existiria um caminho de M para P_2 e este deveria ter no máximo um gancho. Logo, os caminhos de M para I e de I para P_2 são seccionais. ■

Observemos que se existir algum caminho que não seja formado de módulos projetivos de $\tau_A^{-1} M$ para algum P projetivo então $A[M]$ pode não ser *shod*. Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplos:

1. Seja a álgebra A dada pela aljava do exemplo da seção 2.2:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ 2 & \xrightarrow{\delta} & 3 & \xrightarrow{\alpha} & 4 & \xleftarrow{\gamma} & 5 \xleftarrow{\rho} 6 \\ & & & \beta & & & \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Fazemos a extensão de A pelo A -módulo S_4 . Observemos que $A[S_4]$ não é *shod* estrita.

2. Seja a álgebra A dada pela seguinte aljava:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & 7 & \\ & & & \downarrow & \nearrow & & \\ 2 & \xleftrightarrow[\varphi]{\delta} & 3 & \xleftarrow{\alpha} & 4 & \xrightarrow{\gamma} & 5 \xrightarrow{\rho} 6 \\ & & & & \beta & \nearrow \epsilon & \end{array}$$

com $\alpha\beta = 0$, $\gamma\beta = 0$, $\rho\gamma = 0$, $\alpha\epsilon = 0$, $\delta\alpha = 0$ e $\varphi\alpha = 0$. Fazemos a extensão de A pelo A -módulo S_3 . Observemos que $A[S_3]$ não é *shod* estrita.

Teorema 3.27 *Suponhamos que A seja uma álgebra shod estrita, M um A -módulo dirigido não-projetivo em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ com $\text{id}_A M \geq 2$ e tal que existe um caminho de algum injetivo indecomponível I para M . Se $A[M]$ é shod, então $\tau_A^{-1} M = \text{rad} P$ para algum P projetivo, $P \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$.*

Demonstração:

Para simplificar a notação, consideremos $B = A[M]$ e $\overline{X} = (0, X, 0)$ para qualquer $X \in \text{mod} A$. Suponhamos por absurdo que $\tau_A^{-1} M \neq \text{rad} P'$

para qualquer P' projetivo em $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$. Como $id_A M \geq 2$, então temos que $Hom_A(\tau_A^{-1}M, A) \neq 0$. Logo, existe um morfismo não nulo $f : \tau_A^{-1}M \rightarrow P'$ para algum P' projetivo em $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$. Agora, por hipótese, existe um caminho

$$I = Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n = M$$

em $indA$, de algum injetivo $I \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ para M . Então, para cada $i = 1, \dots, n$, também vai existir um caminho

$$I = Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n = M \rightarrow E_i \rightarrow \tau_A^{-1}M \xrightarrow{f} P' \quad (3.2)$$

em $indA$ de I para P' , onde

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \tau_A^{-1}M \rightarrow 0$$

é a sequência de Auslander-Reiten começando no indecomponível M . Como A é *shod* temos que o caminho 3.2 pode ser refinado a um caminho de ir-redutíveis em $indA$, com no máximo dois ganchos consecutivos (veja 2.12). Afirmamos que o caminho de $\tau_A^{-1}M$ para P' é seccional.

De fato, se tivéssemos $Y_{n-1} = \tau_A E_i$ para algum E_i , então, de I para $\tau_A^{-1}M$ já teríamos dois ganchos consecutivos. Logo, o caminho de $\tau_A^{-1}M \rightsquigarrow P'$ teria que ser seccional pois A é *shod*.

Agora, se $Y_{n-1} \neq \tau_A E_i$ para qualquer $i = 1, \dots, n$, então Y_{n-1} seria injetivo e nesse caso vamos obter também que o caminho entre $\tau_A^{-1}M$ e P' é seccional. Vejamos a seguinte sub-álgebra em Γ_A :

Observemos que se existisse um gancho no caminho de $\tau_A^{-1}M$ para P' , então o caminho

$$Y_{n-1} \rightsquigarrow Y_n = M \rightarrow E_1 \rightarrow \tau_A^{-1}M = X_0 \rightsquigarrow X \rightsquigarrow \tau_A^{-1}X \rightsquigarrow P' \quad (3.3)$$

teria dois ganchos não consecutivos, o que é um absurdo pois A é *shod* estrita.

Quando fazemos a extensão de A por M temos, segundo [33], que $\overline{\tau_B \tau_A^{-1}M} = P = (k, M, id)$, o novo projetivo. Basta observarmos que $\tau(0, X, 0) = (Hom_A(M, \tau X), \tau X, e)$ (veja 1.27). Logo,

$$\tau(0, \tau_A^{-1}M, 0) = (Hom_A(M, M), M, id) = (k, M, id)$$

pois M é indecomponível e dirigido. Também temos que $\tau_B \tau_A^{-1}E_i = (k^t, E_i, g') \neq \overline{E_i}$, para $i = 1, \dots, n$ e $g' \neq 0$. Assim, $\overline{\tau_A^{-1}E_i} \neq \tau_B^{-1}\overline{E_i}$.

Agora, sabemos que o caminho de $\tau_A^{-1}M$ para $radP'$ deve passar necessariamente por $\tau_A^{-1}E_i$ para algum E_i , com $\tau_A^{-1}E_i$ não-projetivo. De fato, seja a seguinte sub-aljava em Γ_A :

Vemos aqui que qualquer caminho saindo de $\tau_A^{-1}M$ passa por algum $\tau_A^{-1}E_i$, pois $\tau_A^{-1}M \neq radP'$ para qualquer P' projetivo. Agora, $\tau_A^{-1}E_i$ não é projetivo. Portanto, $\overline{\tau_A^{-1}E_i}$ não é projetivo também. Recordemos que $\overline{\tau_A^{-1}M} \cong \tau_B^{-1}P$, com P o novo projetivo (veja teorema anterior). Assim, teremos que o caminho de $\overline{\tau_A^{-1}M}$ para $\overline{\tau_A^{-1}E_i}$ deve passar por $\tau_B^{-2}\overline{M}$ pois,

caso contrário, deveríamos ter um projetivo saindo de $\overline{\tau_A^{-1}M} \cong \tau_B^{-1}P$, o que implicaria em $\tau_A^{-1}M = \text{rad}P''$ para algum P'' e chegaríamos em um absurdo. Vejamos a seguinte sub-aljava em Γ_B :

Logo, qualquer caminho de $\overline{\tau_A^{-1}M} \rightsquigarrow \overline{\tau_A^{-1}E_i}$ passa por $\tau_B^{-2}\overline{M}$. De fato, como o caminho de $\tau_A^{-1}M$ para $\text{rad}P'$ deve passar necessariamente por $\tau_A^{-1}E_i$ para algum i , então vamos ter um caminho de um injetivo $\bar{I}$ para $\bar{P}'$ com dois ganchos não-consecutivos.

Logo, B não seria *shod*, o que é um absurdo. ■

Exemplo:

Observemos que a hipótese $\text{id}_A M \leq 1$ é necessária.

Seja A a álgebra dada pela aljava do exemplo 3 do Capítulo 2:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Fazamos a extensão por um ponto de A pelo módulo simples S_3 . Observemos que $S_3 \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ é um indecomponível não-projetivo, que $A[S_3]$ é *shod* estrita mas $\tau^{-1}S_3 \neq \text{rad}P$ para qualquer P projetivo em $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$.

Capítulo 4

Cohomologia de Hochschild para álgebras *shod*

O objetivo deste capítulo é calcular os grupos de Cohomologia de Hochschild para álgebras *shod*. Na seção 1 recordaremos a definição e algumas das propriedades dos grupos de Cohomologia de Hochschild de uma dada álgebra. Na seção 2 trataremos mais especificamente dos grupos de Cohomologia de Hochschild para álgebras *shod* e daremos alguns exemplos. Como principal resultado, citamos o Teorema 4.5. Este capítulo faz parte de um trabalho conjunto com Coelho-Lanzilotta.

4.1 Os grupos de Cohomologia de Hochschild

Seja k um corpo algebricamente fechado e A uma k -álgebra de dimensão finita, indecomponível, básica e associativa com unidade.

A álgebra envolvente A^e de A é a k -álgebra definida por $A^e = A \otimes_k A^{op}$. Para qualquer $a \in A$, denotaremos por a' o correspondente elemento em A^{op} . Um A -bimódulo X pode ser considerado como um A^e -módulo à esquerda por $(a \otimes b') \cdot x = axb$ para quaisquer $a, b \in A$ e $x \in X$. Temos que as categorias

dos A -bimódulos e dos A^e -módulos (à esquerda) são equivalentes.

Definição 4.1 *Seja X um A -bimódulo. Para cada inteiro $n \geq 0$, o n -ésimo espaço de Cohomologia de Hochschild de A a coeficientes em X é o k -espaço vetorial*

$$H^n(A, X) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, X)$$

Vamos assumir aqui $X = A$ e portanto teremos

$$H^n(A) = H^n(A, A) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

Para calcular $H^n(A)$ construiremos uma resolução projetiva de A em $\text{mod } A^e$ e depois aplicaremos o funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$. Como $H^n(A)$ não depende da resolução projetiva escolhida, é suficiente construir uma.

Seja então a resolução projetiva $(A^{\otimes n}, b')$:

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes n} \xrightarrow{b'} \cdots \xrightarrow{b'} A^{\otimes 3} \xrightarrow{b'} A^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

com $A^{\otimes n} = \underbrace{A \otimes_k \cdots \otimes_k A}_{n\text{-vezes}}$, $b' = A^{\otimes i} \rightarrow A^{\otimes i-1}$, para $i = 3, \dots, n$ A^e -morfismos e $\mu(a \otimes b) = ab$.

Com a notação acima, $(A^{\otimes n}, b')$ é um complexo de A^e -módulos que chamaremos complexo standard.

Os espaços de Cohomologia de Hochschild são obtidos aplicando-se o funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$ à resolução $(A^{\otimes n}, b')$, utilizando-se o morfismo de adjunção :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{A^e}(A'_2, A) & \xrightarrow{b'_3} & \text{Hom}_{A^e}(A'_3, A) & \xrightarrow{b'_4} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\delta^0} & \text{Hom}_k(A, A) & \xrightarrow{\delta^1} & \cdots \end{array}$$

onde $\delta^0(x)(a) = ax - xa$, $b'_i = (b_i, A)$ e $A'_i = A^{\otimes i}$.

Portanto temos:

$$\text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes i}, A) \simeq \text{Hom}_k(A^{\otimes i-2}, A)$$

e

$$\delta^i : \text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A) \longrightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes i+1}, A)$$

dada por

$$\begin{aligned} \delta^i(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \dots \otimes a_{i+1}) + \\ &\sum_{j=1}^i f(a_1 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_{i+1}) + \\ &(-1)^{i+1} f(a_1 \otimes \dots \otimes a_i) a_{i+1} \end{aligned}$$

Assim, teremos que o n -ésimo grupo de Cohomologia de Hochschild de A será

$$H^n(A) = \frac{\ker \delta^n}{\text{Im} \delta^{n-1}} = \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

Com a notação acima, vamos ter que:

•

$$H^0(A) = \{m \in A : \delta^0(m) = 0\} = \{m \in A : am - ma = 0, \forall a \in A\}$$

$$H^0(A) \cong Z(A)$$

onde $Z(A)$ é o centro da álgebra A ;

•

$$H^1(A) \cong \frac{\text{Der}(A)}{\text{Inn}(A)}$$

onde

$$\text{Der}(A) = \{\delta \in \text{Hom}_k(A, A) : \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b\}$$

e

$$\text{Inn}(A) = \{\delta_x : A \longrightarrow A : \delta_x(a) = ax - xa, x \in A\}.$$

Observemos que $\delta(1) = 0$.

Também, $\text{pd}_{A^e} A = \text{gldim} A$ e

$$H^i(A \times B, M \times N) = H^i(A, M) \oplus H^i(B, N)$$

com A, B k -álgebras, M um A -bimódulo e N um B -bimódulo.

Portanto, podemos supor A indecomponível.

Finalmente temos que H , a álgebra de Cohomologia [23], é invariante por Morita, isto é, dada A uma álgebra qualquer seja A_b básica Morita equivalente a A , então $H(A) = H(A_b)$.

Sejam agora A uma k -álgebra de dimensão finita e M um A -módulo. Recordemos que $B = A[M]$ é chamada de extensão por um ponto de A por M e é a k -álgebra de dimensão finita :

$$A[M] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$$

com o produto usual de matrizes.

Terminaremos esta seção com o seguinte teorema que nos será útil posteriormente. Ele sintetiza algumas propriedades dos grupos de Cohomologia de Hochschild. Para a prova deste teorema e maiores detalhes sobre Cohomologia de Hochschild veja [23].

Teorema 4.2 (*Happel*):

- *Seja Q uma aljava acíclica, conexa e finita, então $H^0(kQ) = k$, $H^1(kQ) = 0$ se, e somente se Q é uma árvore e $H^i(kQ) = 0$ para todo $i \geq 2$;*

- Seja A uma álgebra, T_A um módulo inclinante e $B = \text{End} T_A$, então $H^i(A) \cong H^i(B)$ para todo $i \geq 0$;
- Seja $B = A[M]$ extensão por um ponto. Então, existe uma sequência exata

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \rightarrow \frac{\text{End}_A M}{k} \rightarrow \\
\rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, M) \rightarrow H^2(B) \rightarrow \\
\rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(M, M) \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, M) \rightarrow \dots
\end{aligned}$$

4.2 Cohomologia de Hochschild para álgebras *shod*

Nosso objetivo nesta seção será o de obter os grupos de Cohomologia de Hochschild para uma álgebra *shod* A . Para tanto necessitaremos do Teorema 4.2, de alguns resultados de [18], da Proposição 3.8 e do Teorema 3.17. Para comodidade do leitor iremos enunciá-los aqui.

Teorema 4.3 (Coelho-Lanzilotta):

Seja A uma álgebra *shod* estrita. Então $A = A'[M_1] \dots [M_n]$ com A' inclinada e os M_i 's radicais de projetivos finais de gancho em A_{i+1} .

Observação: Os M_i 's não são necessariamente indecomponíveis e, em cada passo, $A_i[M_{i+1}]$ é *shod* estrita, onde $A_i = A'[M_1] \dots [M_i]$.

Teorema 4.4 :

Seja $A = A'[M]$ uma álgebra *shod* estrita e $M = \text{rad} P$ com P projetivo final de gancho. Então, $\text{Ext}_{A'}^1(M, M) = 0$ e $\text{Ext}_{A'}^2(M, M) = 0$.

Seja A uma álgebra *shod*. Então $gldim A \leq 3$ e podemos concluir que $H^i(A) = 0$ para $i \geq 4$. (Lembremos que $pd_{A^e} A = gldim A$). Vejamos agora os outros grupos de Cohomologia de Hochschild de uma álgebra *shod* estrita A .

Teorema 4.5 :

Seja A uma álgebra shod estrita. Então $H^i(A) = 0$ para qualquer $i \geq 2$.

Demonstração:

Seja A uma álgebra *shod* estrita. Então, pelo Teorema 4.3, $A = A'[M_1] \dots [M_n]$. Assim, seja $A_1 = A'[M_1]$ *shod* estrita e A' álgebra inclinada. Logo, aplicando o Teorema 4.2, ítem (c), existe a sequência exata:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(A_1) \rightarrow H^0(A') \rightarrow \frac{End_{A'} M_1}{k} \rightarrow \\ \rightarrow H^1(A_1) \rightarrow H^1(A') \rightarrow Ext_{A'}^1(M_1, M_1) \rightarrow H^2(A_1) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(A') \rightarrow Ext_{A'}^2(M_1, M_1) \rightarrow H^3(A_1) \rightarrow H^3(A') \rightarrow \\ \rightarrow Ext_{A'}^3(M_1, M_1) \rightarrow H^4(A_1) \rightarrow H^4(A') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Notemos que, como A' é inclinada, pelo Teorema 4.2, $H^i(A') = 0$, $\forall i \geq 2$. Como A_1 é *shod*, então $gldim A_1 \leq 3$ implica que $H^i(A_1) = 0$, $\forall i \geq 4$. Finalmente, pelo Teorema 4.4, já que A_1 é *shod* estrita, então $Ext_{A'}^1(M_1, M_1) = 0$ e $Ext_{A'}^2(M_1, M_1) = 0$.

Assim, teremos que $H^i(A_1) = 0$ para qualquer $i \geq 2$.

Consideremos agora $A_2 = A_1[M_2]$ *shod* estrita. Aplicando o Teorema 4.2, teremos a sequência exata:

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(A_2) \rightarrow H^0(A_1) \rightarrow \frac{\text{End}_{A_1} M_2}{k} \rightarrow \\
\rightarrow H^1(A_2) \rightarrow H^1(A_1) \rightarrow \text{Ext}_{A_1}^1(M_2, M_2) \rightarrow H^2(A_2) \rightarrow \\
\rightarrow H^2(A_1) \rightarrow \text{Ext}_{A_1}^2(M_2, M_2) \rightarrow H^3(A_2) \rightarrow H^3(A_1) \rightarrow \\
\rightarrow \text{Ext}_{A_1}^3(M_2, M_2) \rightarrow H^4(A_2) \rightarrow H^4(A_1) \rightarrow \dots
\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos anteriores temos que $H^i(A_2) = 0$ para $\forall i \geq 2$ se A_2 é *shod* estrita.

Assim, chegaremos por indução, que $A = A'[M_1] \dots [M_n]$ é tal que $H^i(A) = 0$ para $\forall i \geq 2$. ■

Quanto aos grupos de Cohomologia de Hochschild de ordem menor para álgebras *shod* estritas, temos os seguintes resultados que seguem do Teorema 4.2:

Consideremos $A = A'[M]$. Se A e A' são álgebras conexas, então $H^0(A) \cong k \cong H^0(A')$ e se M é um brick, isto é, $\text{End}_{A'} M = k$, então o morfismo $H^1(A) \rightarrow H^1(A')$ é um monomorfismo.

Logo, $H^1(A) \cong H^1(A')$ pois $\text{Ext}_{A'}^1(M, M) = 0$.

Agora, se A' é de tipo árvore e inclinada, então $H^1(A) = 0$ se, e somente se, $H^1(A') = 0$.

Vejamos um exemplo de que $A = A'[M]$, mas $H^1(A) \not\cong H^1(A')$.

Exemplo:

Seja A' a álgebra dada pela aljava:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

com $\beta\alpha = 0$. Sua aljava de Auslander-Reiten é dada por:

Façamos a extensão por um ponto de A pelos módulos M_1 e M_2 . Obtemos então a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \gamma \downarrow \rho \\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \end{array}$$

com $\beta\alpha = 0$ e $\alpha\gamma = 0$. Observemos que $A'[M_1 \oplus M_2] = A$ é *shod* estrita com A' álgebra inclinada.

Então temos que $H^1(A') = 0$ pois A' é de tipo árvore e inclinada mas $H^1(A) \neq 0$ pois $\dim H^1(A) = 1$. De fato, temos a sequência $0 \rightarrow H^0(A) \rightarrow H^0(A') \rightarrow \frac{\text{End}_{A'} M}{k} \rightarrow H^1(A) \rightarrow 0$ com $\dim H^0(A) = \dim H^0(A') = 1$ e $\dim \frac{\text{End}_{A'} M}{k} = 1$.

Capítulo 5

Álgebras *shod* e módulos inclinantes

Neste capítulo iremos trabalhar com as álgebras *shod* e módulos inclinantes sobre estas álgebras. Veremos que os módulos inclinantes sobre as álgebras *shod* têm algumas propriedades especiais e que não podemos generalizar alguns resultados de álgebra quase-inclinadas e módulos inclinantes de [28] para álgebras *shod*.

5.1 Módulos inclinantes

Sejam A uma álgebra *shod* e ${}_A T$ um A -módulo inclinante. Consideremos a teoria de torção induzida pelo módulo inclinante ${}_A T$, isto é, $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ com

$$\mathcal{T}(T) = \{M \in \text{mod} A : \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$$

e

$$\mathcal{F}(T) = \{M \in \text{mod} A : \text{Hom}_A(T, M) = 0\}.$$

Definição 5.1 *Seja T um A -módulo inclinante. T é dito ser **separante***

(respectivamente, **cindido**) se o par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ cinde em $\text{mod} A$ (respectivamente, se o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde em $\text{mod} B$).

Teorema 5.2 *Sejam T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$. Então:*

- (a) *T é separante se, e somente se, para cada $X \in \mathcal{X}(T)$, $\text{pd}_B X = 1$;*
- (b) *T é cindido se, e somente se, para cada $M \in \mathcal{F}(T)$, $\text{id}_A M = 1$.*

Para a demonstração deste teorema veja [4].

Proposição 5.3 *Sejam A uma álgebra shod e T um A -módulo inclinante cindido tal que, se $\text{Hom}_A(T, M) \neq 0$ e $\text{pd}_A M \geq 2$, então o A -módulo M é injetivo. Nestas condições, $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ é shod.*

Demonstração:

Seja N um B -módulo indecomponível. Então $N \in \mathcal{Y}(T)$ ou $N \in \mathcal{X}(T)$, onde

$$\mathcal{Y}(T) = \{\text{Hom}_A(T, M) : M \in \mathcal{T}(T)\}$$

e

$$\mathcal{X}(T) = \{\text{Ext}_A^1(T, M) : M \in \mathcal{F}(T)\}$$

pois T é cindido.

Se $N \in \mathcal{X}(T)$ então $N = \text{Ext}_A^1(T, M)$ com $M \in \mathcal{F}(T)$. Como T é cindido então $\text{id}_A M = 1$. Portanto, por [4], Lema 2.2,

$$\text{id}_B N = \text{id}_B \text{Ext}_A^1(T, M) \leq \text{id}_A M = 1.$$

Agora, se $N \in \mathcal{Y}(T)$ então $N = \text{Hom}_A(T, M) \neq 0$ para algum $M \in \mathcal{T}(T)$. Se $\text{pd}_A M \leq 1$ então $\text{pd}_B N \leq \text{pd}_A M \leq 1$ por [4], Lema 2.2. Suponhamos

agora que $pd_A M \geq 2$.

Então, neste caso, por hipótese, M é injetivo. Logo,

$$id_B N = id_B \text{Hom}_A(T, M) \leq 1 + id_A M = 1$$

também por [4], Lema 2.2. Assim, para qualquer $N \in \text{mod} B$ ou $pd_B N \leq 1$ ou $id_B N \leq 1$.

E portanto, B é *shod*. ■

Exemplo 1:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

com $\beta\alpha = \delta\omega\gamma$.

Tomemos o módulo inclinante

$${}_A T = \tau^{-1} S_2 \oplus (\oplus_{j \neq 2} P_j)$$

(chamado de módulo BB -inclinante associado ao simples S_2). Temos que ${}_A T$ será um módulo inclinante cindido pois $id_A S_2 = 1$ (veja [4]) e vai satisfazer as condições da proposição acima.

Teorema 5.4 *Sejam A uma álgebra shod estrita e T um A -módulo inclinante. Então, T possui um somando direto indecomponível $T' \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e um somando direto indecomponível $T'' \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$.*

Demonstração:

Como T é um módulo inclinante então T é um módulo sincero. Logo $\text{Hom}_A(P, T) \neq 0$ para qualquer módulo projetivo P .

Agora como A é *shod* estrita então $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ possui um módulo projetivo P' . Portanto vai existir um T'' somando direto indecomponível de T com $\text{Hom}_A(P', T'') \neq 0$ e portanto T'' será um sucessor de P' e assim vai pertencer a $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$. Logo $T \notin \text{add}\mathcal{L}_A$.

Seja agora $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ o par de torção induzido por T . Se T é um módulo inclinante então temos que qualquer injetivo I está em $\mathcal{T}$ e assim teremos que $\text{Hom}_A(T, I) \neq 0$. Como $I' \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ para algum I' injetivo, pois A é *shod* estrita, então T vai ter um somando direto $T'' \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e portanto $T \notin \text{add}\mathcal{R}_A$. ■

Foi mostrado em [28] que se A é uma álgebra quase-inclinada e T um A -módulo inclinante em $\text{add}\mathcal{L}_A$ então $\text{End}_A T^{\text{op}}$ é uma álgebra quase-inclinada. O Teorema 5.4 mostra-nos que tal resultado não pode ser generalizado para álgebras *shod*. Observemos também que T pode ter um somando direto indecomponível não-projetivo em $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

com $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$ e $\delta\rho = 0$. Sua aljava de Auslander-Reiten é dada por:

Seja $T = \oplus_{i=1}^6 T_i$. Então o A -módulo T será um módulo inclinante com um somando não projetivo $T_5 \in \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$.

5.2 Álgebras *shod* e módulos inclinantes separantes

Introduzimos agora a seguinte definição devida a Assem (veja [2]):

Seja $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau)$ uma aljava de translação (veja [9], capítulo VII). Uma **fatia separante** $\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1)$ em Γ é uma subaljava plena de Γ tal que:

1. Σ_0 contém exatamente um representante de cada τ -órbita em Γ ;
2. Para toda sequência de flechas em Γ da forma

$$X = Z_0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_r \longrightarrow Z_{r+1} = \tau^s Y$$

com $s, r \geq 0$, $X, Y \in \Sigma_0$ e $Z_i \notin \Sigma_0$ para todo $1 \leq i \leq r$, temos que $s = 0$ e mais ainda, se $r \geq 1$, então Y é projetivo.

Exemplo 3:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \uparrow \beta & & \\ 2 & \xrightarrow{\alpha} & 3 & \xleftarrow{\gamma} & 4 \xleftarrow{\rho} 5 \end{array}$$

com radical quadrado igual a zero. Temos que A é uma álgebra *shod* estrita. Sua aljava de Auslander-Reiten é a seguinte:

Os módulos I_1 , S_3 , P_2 , P_4 e P_5 formam uma fatia separante na aljava de Auslander-Reiten.

Observemos que um módulo Y é dito ser Ext-projetivo em uma subcategoria $\mathcal{R}$ se $\text{Ext}_A^1(Y, X) = 0$ para qualquer módulo X pertencente a $\mathcal{R}$.

Teorema 5.5 *Seja A uma álgebra shod. Seja n o número de simples não-isomorfos de $\text{ind}A$ e seja $T = P \oplus I \oplus Y$, onde $P = \bigoplus_{i=1}^r P_i$ é a soma de todos os projetivos indecomponíveis não-isomorfos em $\mathcal{R}_A$, $I = \bigoplus_{j=1}^s I_j$ é a soma de todos os injetivos indecomponíveis não-isomorfos em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ e $Y = \bigoplus_{t=1}^m \tau Y_t$ é a soma de todos os τY_t com Y_t Ext-projetivo não-projetivo em $\mathcal{R}_A$. Então T é um módulo inclinante parcial.*

Demonstração:

Observemos que $\tau Y_t \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ pois os Y_t são indecomponíveis e Ext-projetivos em $\mathcal{R}_A$ (veja [4], seção 1). Como $I \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, concluímos que $pd_A T \leq 1$. Vamos mostrar que $Ext_A^1(T, T) = 0$. Observemos que $Ext_A^1(P, X) = 0$ e $Ext_A^1(X, I) = 0$ para qualquer $X \in mod A$. Portanto basta calcularmos $Ext_A^1(I, P \oplus Y)$ e $Ext_A^1(Y, P \oplus Y)$.

Temos que

$$Ext_A^1(I, P \oplus Y) = Ext_A^1(I, P) \oplus Ext_A^1(I, Y) \cong$$

$$DHom_A(P, \tau I) \oplus D\overline{Hom}_A(\tau^{-1}Y, I)$$

pois $pd_A I \leq 1$.

Como A é *shod*, $Hom_A(\mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) = 0$. Portanto $Hom_A(P, \tau I) = 0$.

Também, $D\overline{Hom}_A(\tau^{-1}Y, I) = 0$ pois $Hom_A(\tau^{-1}Y, I) = 0$. Assim, $Ext_A^1(I, P \oplus Y) = 0$.

Por outro lado, como $\tau^{-1}P$ e $\tau^{-1}Y$ pertencem a $\mathcal{R}_A$ e $Y \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, então,

$$Ext_A^1(Y, P \oplus Y) = Ext_A^1(Y, P) \oplus Ext_A^1(Y, Y) \cong$$

$$DHom_A(\tau^{-1}P, Y) \oplus D\overline{Hom}_A(\tau^{-1}Y, Y) = 0$$

pois $Hom_A(\mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) = 0$.

Portanto temos que T é inclinante parcial. ■

Agora como T é um módulo inclinante parcial então existe um módulo T' sendo $T \oplus T'$ um módulo inclinante e tal que para qualquer T'' somando direto indecomponível de T' , ou T'' é projetivo ou $Hom_A(T'', T) \neq 0$ (veja [37], capítulo 4).

Teorema 5.6 *Se o módulo T , inclinante parcial definido acima, for um módulo inclinante então T será um módulo inclinante separante. Além disso, T vai ser uma fatia separante.*

Demonstração:

Seja $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ o par de torção induzido por T .

Para que T seja um módulo separante basta mostrarmos que para qualquer $N \in \mathcal{T}(T)$ teremos que $\tau^{-1}N \in \mathcal{T}(T)$ (veja [4]).

Suponhamos então que $\tau^{-1}N \notin \mathcal{T}(T)$ para algum $N \in \mathcal{T}(T)$. Então teremos que $\text{Ext}_A^1(T, \tau^{-1}N) \neq 0$ e consequentemente, $\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, \tau T) \neq 0$ pelo Teorema 1.17. Assim, já que $\tau T \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, teremos que $\tau^{-1}N \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$, pois $\text{Hom}_A(\mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) = 0$. Portanto $N \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$.

Assim, não existe morfismo não-nulo de um projetivo P em $\mathcal{R}_A$ a N . Também não existe morfismo de um injetivo I em $\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ a N , pois caso contrário, teríamos que $pd\tau^{-1}N \geq 2$ e portanto $\tau^{-1}N \notin \mathcal{L}_A$.

Agora, já que $N \in \mathcal{T}(T)$, então $\text{Hom}_A(T, N) \neq 0$ e assim, deve existir um morfismo não-nulo $g : \tau Y_t \rightarrow N$ com $Y_t \in \mathcal{R}_A$. Observemos que g não se fatora por injetivos. De fato, se g se fatorasse por injetivos então existiriam morfismos s e t e um injetivo I tais que

$$\begin{array}{ccc} \tau Y_t & \xrightarrow{g} & N \\ & \searrow s \quad \nearrow t & \\ & I & \end{array}$$

com $ts = g$. Então, teríamos um morfismo $t : I \rightarrow N$, o que é um absurdo, pois $pd_A \tau^{-1}N \leq 1$.

Assim, existiria $g' : Y_t \rightarrow \tau^{-1}N$ com $\tau^{-1}N \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A$ pois, como vimos, o morfismo g não se fatora por injetivos (veja [9]). Mas isto é um absurdo pois sabemos que $Y_t \in \mathcal{R}_A$. Logo, $\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, \tau T) = 0$, o que implica que $\text{Ext}_A^1(T, \tau^{-1}N) = 0$.

Portanto, T será um módulo separante e por [2] teremos que T será uma fatia separante. ■

Vejamos agora um exemplo de que T é uma fatia separante mas $\text{End}_A T^{\text{op}}$ não é *shod*.

Exemplo 4:

Seja A a álgebra dada pela aljava:

com radical quadrado igual a zero. Sua aljava de Auslander-Reiten é dada por

Notemos que A é uma álgebra triangular monomial e que também é *shod*. Contudo, A não é uma álgebra inclinada iterada (veja [11], [41] e [42]). Consideremos o módulo $T = \bigoplus_{i=1}^5 T_i$. Observemos que T é uma fatia separante mas $\text{End}_A T^{\text{op}}$ não é *shod* (e portanto não é inclinada).

5.3 Álgebras *shod* e álgebras inclinadas

Definição 5.7 *Dado um módulo M numa componente conexa da aljava de AR , seja $S(\rightarrow M)$ a classe de módulos dada por todos os módulos indecomponíveis X com $X \rightsquigarrow M$ e tal que qualquer caminho de X para M seja seccional.*

Dualmente, definimos $S(M \rightarrow)$ como sendo a classe de módulos dada por todos os módulos indecomponíveis X com $M \rightsquigarrow X$ e tal que qualquer caminho de M para X seja seccional.

Teorema 5.8 *Seja $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ uma álgebra inclinada com uma fatia completa de tipo árvore $\mathcal{S}$ na componente pré-injetiva tal que $\mathcal{S}$ tenha um único injetivo indecomponível I . Se $\frac{I}{\text{soc} I}$ for indecomponível e não-injetivo então $B[M]$ será *shod* estrita, onde $M = \tau^{-1} \frac{I}{\text{soc} I}$.*

Demonstração:

Observemos inicialmente que $M \in \text{ind} B$ é dirigido pois pertence à componente pré-injetiva.

Notemos também que os projetivos em $\text{ind} B[M]$ ou têm a forma $(0, P, 0)$ com $P \in \text{ind} B$ projetivo ou a forma (k, M, id_M) , o novo projetivo. Como todos os $P \in \text{ind} B$ são predecessores de $\mathcal{S}$, então $\text{Hom}_A(M, P) = 0$ para qualquer $P \in \text{ind} B$. Senão teríamos um caminho de M para M , o que é um absurdo pois M pertence à componente pré-injetiva e portanto é dirigido. Também qualquer predecessor X de P é tal que não existe caminho de M para X . Assim, se existir um caminho de I' , injetivo pertencente a $\text{ind} B$, para P , então $\text{Hom}_A(M, I') = 0$ e portanto $(0, I', 0)$ será um injetivo em $\text{ind} B[M]$. Logo só teremos caminhos do tipo $(0, I', 0) \rightsquigarrow (0, P, 0)$, com P projetivo em $\text{ind} B$ e I' injetivo em $\text{ind} B$. Assim, seja $\tilde{I} = (\text{Hom}_A(M, J), J, f)$ um injetivo qualquer em $\text{ind} B[M]$. Se existir um caminho de $\tilde{I}$ para algum $(0, P, 0)$, então

$\text{Hom}_A(M, J) = 0$ e portanto $\tilde{I} = (0, J, 0)$ o que vai implicar que qualquer caminho de $\tilde{I}$ para $(0, P, 0)$ é da forma

$$(0, J, 0) \rightarrow (0, X_1, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (0, X_i, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (0, P, 0)$$

com $X_i \in \text{ind}B$. Mais ainda, este caminho é seccional por [4].

Basta-nos verificar então os caminhos de $B[M]$ -módulos injetivos I' para o novo projetivo. Antes, porém, façamos algumas observações. Se J é um injetivo, então J vai ser um sucessor da fatia $\mathcal{S}$ e portanto um sucessor de $S(\rightarrow I)$ (veja Definição 5.7). Notemos que se existisse um caminho de um injetivo J para $\frac{I}{\text{soc}I}$ então este caminho deveria ser seccional. De fato, suponhamos que existisse um caminho não-seccional de J para $\frac{I}{\text{soc}I}$. Então teríamos,

$$J \xrightarrow{\rho} X \rightarrow E \rightarrow \tau^{-1}X \xrightarrow{\delta} \frac{I}{\text{soc}I}$$

com ρ e δ caminhos em $\text{ind}B[M]$.

Suponhamos que $\frac{I}{\text{soc}I} \notin \mathcal{S}$. Se o caminho δ passar por um gancho teremos um absurdo pois J seria um predecessor próprio do caminho seccional que acaba em I e portanto um predecessor próprio de $S(\rightarrow I)$. Usamos aqui o fato de $\mathcal{S}$ ser de tipo árvore. O mesmo ocorre para o caminho ρ . Então só temos o caso em que J pertence ao caminho seccional terminando em I . Absurdo pois J é sucessor da fatia $\mathcal{S}$ e sabemos que os elementos da fatia $\mathcal{S}$ são sucessores de $S(\rightarrow I)$. Observemos que $J \notin \mathcal{S}$ pois I é o único injetivo na fatia completa.

Se $\frac{I}{\text{soc}I} \in \mathcal{S}$, então J seria um predecessor próprio da fatia $\mathcal{S}$, o que é um absurdo.

Assim, qualquer caminho de J para $\frac{I}{\text{soc}I}$, com J um injetivo, vai ter que ser seccional.

Logo, temos que, para qualquer J injetivo, $J \neq I$, só temos caminhos seccionais de J para $\frac{I}{\text{soc}I}$. Portanto, caminhos com apenas um gancho de J para M . Como os únicos caminhos de I para M passam por apenas um gancho

temos, pela discussão acima, que qualquer caminho de um injetivo J para $\frac{I}{\text{soc}I}$ terá no máximo um gancho.

Façamos então a extensão por um ponto de B por M e consideremos o seguinte diagrama:

onde $0 \rightarrow (0, \frac{I}{\text{soc}I}, 0) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow (0, M, 0) \rightarrow 0$ é a sequência de *AR* terminando em $(0, M, 0)$ (veja 1.27).

Logo, qualquer caminho de um $B[M]$ -módulo injetivo indecomponível I' para o novo projetivo vai ter no máximo um gancho ou dois ganchos consecutivos.

De fato, pela discussão anterior temos que qualquer caminho

$$J = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n = M$$

de um injetivo J para M vai ter no máximo dois ganchos consecutivos. Logo qualquer caminho de $(0, J, 0)$ com J um B -módulo injetivo para $(0, M, 0)$ vai ter no máximo dois ganchos consecutivos. Notemos que $\text{Hom}_A(M, X_i) = 0$ para qualquer $i = 1, \dots, n$, pois M pertence à componente pré-injetiva. E portanto qualquer caminho de $(0, J, 0)$ para o novo projetivo (k, M, id_M) vai ter no máximo dois ganchos consecutivos. Poderia acontecer de não termos nenhum gancho, mas pela construção, temos que o caminho $(0, I, 0) \rightarrow (0, \frac{I}{\text{soc}I}, 0) \rightarrow (0, M, 0)$ tem um gancho. Assim, a álgebra $B[M]$ é *shod* estrita. ■

Seja agora A uma álgebra básica, conexa, hereditária e de tipo de representação infinita, isto é, A é a álgebra de caminhos de alguma aljava conexa Δ com grafo subjacente diferente de A_n , $n \geq 1$, D_n , $n \geq 4$, E_6 , E_7 , E_8 . Como sabemos existe uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}$ em $\text{ind}A$ contendo todos os módulos projetivos indecomponíveis e nenhum injetivo e uma componente pré-injetiva $\mathcal{Q}$ contendo todos os módulos injetivos indecomponíveis e nenhum projetivo. Seja $\mathcal{R}$ a classe dos módulos indecomponíveis não pertencentes a $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$.

Consideremos $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ onde T é um módulo inclinante pós-projetivo. Então B é chamada de *álgebra disfarçada* (veja Definição 1.36). Se A também é uma álgebra mansa então B é dita ser uma *álgebra mansa disfarçada*.

Seja A como acima e $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ uma álgebra mansa disfarçada. Temos então que $\mathcal{F}(T)$ é finita e contida em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}(T)$ é cofinita e consiste de uma subcategoria cofinita de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$ inteiros. Obtemos assim uma descrição da categoria $\text{mod}B$. Notemos que em $\mathcal{Y}(T)$ temos três partes diferentes, isto é, as imagens sobre $\Sigma = \text{Hom}_A(T, -)$ de $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T)$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$, e como todos os A -módulos injetivos pertencem a $\mathcal{Q}$, as sequências de conexão (veja [4]) começam em $\Sigma\mathcal{Q}$. Em particular, $\Sigma\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T)$ e $\Sigma\mathcal{R}$ são fechados para aplicações irredutíveis. Também, como $(\mathcal{Y}(T), \mathcal{X}(T))$ é um par de torção, considerando as quatro classes de módulos

$$\Sigma\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T), \Sigma\mathcal{R}, \Sigma\mathcal{Q}, \mathcal{X}(T)$$

existem aplicações apenas de quaisquer das classes nelas mesmas e para as classes da direita.

Observemos que $\Sigma\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T)$ é uma componente pós-projetiva e os módulos em $\Sigma\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T)$ serão chamados de B -módulos pós-projetivos. Realmente, a aljava de Auslander-Reiten de $\Sigma\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T)$ contém uma subaljava plena de

translação que é isomorfa à aljava de $\mathcal{P}$. Também, $\Sigma\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}(T)$ é uma componente pré-injetiva com a aljava de Auslander-Reiten de $\Sigma\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}(T)$ contendo a aljava plena de translação de $\Sigma\mathcal{Q}$ que é isomorfa à aljava de Auslander-Reiten de $\mathcal{P}$; os módulos em $\Sigma\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}(T)$ serão chamados pré-injetivos.

Como uma consequência do Teorema 5.8 temos o seguinte resultado para álgebras mansas disfarçadas.

Corolário 5.9 *Seja $B = \text{End}_A T^{\text{op}}$ uma álgebra mansa disfarçada não de tipo $\tilde{A}_n$. Seja S uma fatia em $\Sigma\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}(T)$ contendo apenas um injetivo I . Se $\frac{I}{\text{soc}I}$ for indecomponível e não injetivo, então $B[M]$ será shod estrita, onde $M = \tau^{-1} \frac{I}{\text{soc}I}$.*

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem. *Algèbres et Modules*. Masson, Ottawa (1997).
- [2] I. Assem. *Torsion theories induced by tilting modules*. Canadian J. Math. Vol. **36**. No. **5** (1984) 899-913.
- [3] I. Assem. *Simply connected algebras*. Resenhas do IME - USP, Vol. **4**, No. **2** (1999) 93-125.
- [4] I. Assem. *Tilting theory - an introduction*. Topics in Algebra, Banach Centre Publications, Vol. **26**, PWN, Warsaw (1990) 127-180.
- [5] I. Assem and D. Happel. *Generalized tilted algebras of type A_n* . Comm. Algebra **9** (1981) 2101-2125.
- [6] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. Torún. Preprint. (1997).
- [7] I. Assem and A. Skowroński. *Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$* . Mathematische Zeitschrift **195** (1987) 269-290, Springer-Verlag.
- [8] I. Assem and A. Skowroński. *Quadratic forms and iterated algebras*. Journal of Algebra **128** (1990) 55-85.
- [9] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø. *Representation theory of artin algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge University Press. (1995).

- [10] M. Auslander, S. Smalø. *Preprojective modules over artin algebras*. J. Algebra **66** (1980) 61-122.
- [11] M. Auslander, S. Smalø. *Almost split sequences in subcategories*. J. Algebra **69** (1981) 426-454.
- [12] M. Auslander, S. Smalø. *Addendum to almost split sequences in subcategories*. J. Algebra **71** (1981) 592-594.
- [13] R. Bautista, S. Smalø. *Nonexistent cycles*. Comm. Algebra **11** (1983) 1755-1767.
- [14] K. Bongartz. *Tilted algebras*. Proceedings ICRA III (1980), Springer Lectures Notes **903** (1982) 26-38.
- [15] F. U. Coelho. *Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras*. XII Escola de Álgebra, Diamantina (1992).
- [16] F. U. Coelho and D. Happel. *Quasitilted algebras admit a preprojective component*. Proceedings Am. Math. Soc. **125**, No.5 (1997) 1283-1291.
- [17] F. U. Coelho and M. A. Lanzilotta. *Algebras with small homological dimensions*. Manuscripta Math. **100** (1999) 1-11, Springer-Verlag.
- [18] F. U. Coelho and M. A. Lanzilotta. *The Auslander-Reiten quiver for algebras with small homological dimensions*. In preparation.
- [19] F. U. Coelho and A. Skowroński. *On the Auslander-Reiten components for quasitilted algebras*. Fundamenta Math. **149** (1996) 67-82.
- [20] F. U. Coelho, M. I. R. Martins and J. A. De la Peña. *Projective dimensions for one point extension algebras*. Mat. Cont. **16** (1999) 1-7.

- [21] F. U. Coelho, M. I. R. Martins and J. A. De la Peña. *Quasitilted extensions for algebras I*. aceito para publicação no Proc. Amer. Math. Soc.
- [22] F. U. Coelho, M. I. R. Martins and J. A. De la Peña. *Quasitilted extensions for algebras II*. J. of Algebra **227** (2000) 582-594.
- [23] D. Happel. *Hochschild Cohomology of finite dimensional algebras*. Séminaire Marie Paul-Malliavin. Lectures Notes in Math. **1404**, Springer Berlin (1989) 108-126.
- [24] D. Happel. *A Characterization of Hereditary Categories with Tilting Object*. Preprint.(2000).
- [25] D. Happel and C. M. Ringel. *Tilted algebras*. Trans. American Math. Soc. **274** (1982) 399-443.
- [26] D. Happel and C. M. Ringel. *Directing projective modules*. Arch. Math. **60** (1993) 237-246.
- [27] D. Happel and I. Reiten. *Directing objects in hereditary categories*. preprint. Trondheim (1997).
- [28] D. Happel, I. Reiten and S. Smalø. *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*. Mem. Am. Math. Soc. **120** (1996), No.575.
- [29] M. Hoshino. *Tilting Modules and Torsion Theories*. Bull. London Math. Soc. **14** (1982) 334-336.
- [30] F. Huard. *One-Point Extensions of Quasi-Tilted Algebras by Projectives*. Preprint Bishop's University, Lennoxville, Québec.(2000).
- [31] A. Jones and H. Merklen. *Representações de Álgebras - Métodos Diagramáticos*. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da USP.(1980).

- [32] M. Lanzilotta. *Álgebras Quase-hereditárias*. Dissertação de Mestrado, USP (1997).
- [33] H. Merklen. *On Auslander-Reiten sequences of triangular matrix algebras*. Canadian Math. Society. **11** (1991) 231-248.
- [34] J. A. De la Peña and I. Reiten. *Trisection of module categories*. To Appear.
- [35] J. A. De la Peña and S. Trepode. *One-point Extensions of Quasitilted algebras by modules*.(preprint) (2000).
- [36] J. A. De la Peña and S. Trepode. *Algebras with quasitilted one-point extensions on stable tubes*.(preprint) (2000).
- [37] C. M. Ringel. *Integral quadratic forms and tame algebras*. Lectures Notes in Mathematics **1099**, Springer (1984).
- [38] S. Smalø. *Torsion theories and tilting modules*. Bull. London. Math. Soc. **16** (1984) 518-522.
- [39] A. Skowroński. *Regular Auslander components containing directing modules*. Proceedings American Math. Soc. **120** (1994) 19-26.
- [40] A. Skowroński. *Tame quasitilted algebras*. J. Algebra **203** (1998),470-490.
- [41] S. Trepode. *A conjectura de Roldán para álgebras inclinadas de tipo euclidiano*. Tese de Doutorado, USP-SP (1995).
- [42] M. Wenderlich. *Representation finite iterated tilted algebras of type $\tilde{D}_n$* . Ann. Sci. Math, Québec. **17**(2) (1993) 195-224.