**O Primeiro Espaço de Banach
Hereditariamente Indecomponível**

Cintia Cristina da Silva

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA PURA**

Área de Concentração : Análise Matemática
Orientador : Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro parcial do CNPq.

São Paulo, setembro de 2000

O Primeiro Espaço de Banach Hereditariamente Indecomponível

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Cintia Cristina da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig - IME-USP
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - IMECC-UNICAMP

São Paulo, setembro de 2000.

“ Bem aventurado o homem que acha sabedoria,
e o homem que adquire conhecimento.”

A minha mãe e irmãos,
Kátia e Andréa.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o primeiro espaço de Banach hereditariamente indecomponível construído por W. T. Gowers e B. Maurey.

Os espaços hereditariamente indecomponíveis tem sido usado para resolverem muitos problemas, que ficaram em aberto por muitos anos, tais como o problema do hiperlano de Banach.

Abstract

The purpose of this work is to present the first Banach space hereditarily indecomposable constructed by Gowers, W. T. and Maurey, B.

The hereditarily indecomposable spaces has been used to solve several long-standing problems like the Banach's hyperplane problem.

Agradecimentos

◊ A Deus , por ter tornado possível o desejo do meu coração e ter me dado forças nos momentos que mais precisei.

◊ Ao Professor Elói Medina Galego, pela sugestão do tema e pela paciente orientação.

◊ A minha mãe Lourdes e irmãs Kátia e Andréa, pelo amor incondicional e todo apoio.

◊ A todos professores e colegas de cursos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para realização deste trabalho, em especial à Professora Zara Issa Abud por todo apoio e motivação.

◊ Aos Professores W. T. Gowers, Thomas Schlumprecht e Manuel Gonzalez, pelos e-mail e materiais que deles recebemos esclarecendo várias dúvidas ao longo dessa dissertação.

◊ A todos meus amigos, por estarem ao meu lado em todos os momentos.

◊ A CNPq pelo apoio financeiro no início do programa.

Sumário

Notações	8
Introdução	10
0 Preliminares	12
1 Espaços Precusores	18
1.1 O espaço de Schreier	19
1.2 O espaço de Baernstein	24
1.3 O espaço de Tsirelson	29
2 Funções	40
3 O espaço de Thomas Schlumprecht	52
3.1 Conjuntos assintóticos	52
3.2 O espaço de Schlumprecht	57
4 O espaço de Gowers e Maurey	83
5 Operadores sobre espaços hereditariamente indecomponíveis	114

Notações

Sejam X e Y espaços de Banach, dizemos que X tem uma cópia isomorfa de Y , denotaremos por $Y \hookrightarrow X$, se existe um operador linear contínuo injetor $\varphi : Y \rightarrow X$ com a imagem fechada e com inversa contínua.

Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indicaremos por X^* o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de X (o dual topológico de X).

Seja X um espaço de Banach, indicaremos por $B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ a bola fechada de centro em zero e raio um em X .

Sejam X e Y espaços normados. $L(X, Y)$ representará o conjunto das transformações lineares contínuas de X em Y .

Seja X um espaço de Banach, por $\dim(X)$ denotaremos a dimensão do espaço de Banach X , que pode ser finita ou infinita.

Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$, por $\text{Ker}(T)$ denotaremos o núcleo de T e por $\text{Im}(T)$ denotaremos a imagem de T .

Por $c_0(\mathbb{N})$ denotaremos o espaço de Banach das sequências convergentes a zero, com a norma do supremo.

Por $l_p(\mathbb{N})$ denotaremos o espaço de Banach das sequências p -somáveis com a norma
$$\|(a_n)_n\|_{l_p} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|^p \right]^{1/p}.$$

Por c_{00} denotaremos o espaço vetorial das sequências de escalares com apenas um número finito de coordenadas não nulas e por $(e_n)_n$ denotaremos a base vetorial unitária desse espaço.

Sejam $E \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as seqüências de escalares, usaremos a letra E para denotar a projeção de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ definida por $E(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i \in E} a_i e_i$.

Se $E, F \subset \mathbb{N}$ então escreveremos $E \leq F$ para indicar que $\max E \leq \min F$ e $n \leq E$ para indicar que $\{n\} \leq E$.

Para nós, um intervalo de inteiros será um subconjunto dos números naturais da forma $\{a, a+1, \dots, b\}$ para algum $a, b \in \mathbb{N}$.

Por $\text{supp}(x)$ denotaremos o suporte de um vetor $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in c_{00}$, isto é, $\text{supp}(x) = \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$ e por $\text{ran}(x)$ denotaremos o menor intervalo em $\mathbb{N}$ contendo o seu suporte.

Finalmente, escreveremos $x < y$ quando $\text{ran}(x) < \text{ran}(y)$. Se $x_1 < \dots < x_n$ diremos que $x_1, \dots, x_n$ são sucessivos.

Escreveremos $a \vee b$ para indicar $\max\{a, b\}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Usaremos HI como abreviação de hereditariamente indecomponível.

O símbolo ■ indica o término de uma demonstração.

Introdução

O principal objetivo desta dissertação é apresentar em detalhes o primeiro espaço de Banach X (real e complexo) hereditariamente indecomponível, isto é, nenhum subespaço fechado de X pode ser decomposto como soma direta de dois subespaços fechados de dimensão infinita.

Esse espaço foi construído em 1993 por W. T. Gowers e B. Maurey e foi obtido para solucionar o famoso problema da sequência básica incondicional, ou seja, X é um exemplo de espaço de Banach que não possui nenhuma sequência básica incondicional.

Nós usaremos a teoria espectral para mostrar que todo operador linear contínuo definido num espaço hereditariamente indecomponível complexo, é da forma $\lambda I + S$ onde $\lambda \in \mathbb{C}$, I é o operador identidade nesse espaço e S é estritamente singular.

Como consequência disto, X não é isomorfo a nenhum de seus subespaços próprios, em particular, X não é isomorfo a nenhum de seus hiperplanos.

Também mostraremos que os hiperplanos da versão real de X tem a mesma propriedade e portanto resolve negativamente o famoso problema do hiperplano proposto por Banach.

O espaço X e seus subespaços tem sido usado para a construção de outros contra-exemplos, veja por exemplo [8] e [10].

Os espaços hereditariamente indecomponíveis tornaram-se importantes para a geometria de espaços de Banach devido ao teorema de dicotomia de Gowers, [13], “Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço com base incondicional ou um subespaço hereditariamente indecomponível”.

Finalmente, observamos que outros espaços hereditariamente indecomponíveis foram

construídos, veja a bibliografia de [12], no entanto, ainda não se sabe se existem espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis não separáveis.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a teoria dos espaços de Banach que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Definição 0.1 *Uma sequência $(x_n)_n$ num espaço de Banach E é uma base de Schauder de E se, e somente se, para cada $x \in E$, existe uma única sequência de escalares $(a_n)_n$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

Definição 0.2 *Uma sequência $(x_n)_n$ que é uma base de Schauder do subespaço fechado gerado por $(x_n)_n$, isto é $[(x_n)_n]$, é chamada de sequência básica.*

Teorema 0.3 (6, pág 47) *Seja $(x_n)_n$ uma sequência de elementos não nulos no espaço de Banach E . Então $(x_n)_n$ é uma sequência básica se, e somente se, existe um número real positivo k tal que para qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$ e inteiros $m < n$, tem-se*

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq k \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Definição 0.4 *Uma base de Schauder $(x_n)_n$ é incondicional se sempre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, ela converge incondicionalmente.*

Teorema 0.5 (1, pág 88-91) *Para uma base de Schauder $(x_n)_n$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

a) $(x_n)_n$ é uma base incondicional.

b) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que se A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$, então para qualquer sequência $(a_n)_n$ de escalares $\|\sum_{n \in A} a_n x_n\| \leq C \|\sum_{n \in B} a_n x_n\|$.

c) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para toda sequência de escalares $(a_n)_n$ e toda sequência de escalares $(\epsilon_n)_n$ de módulo no máximo 1, nós temos a inequação $\|\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n x_n\| \leq$

$$C \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\|.$$

Uma base satisfazendo o item b) ou o item c) será chamada de C-incondicional.

Definição 0.6 Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_n$. Para todo inteiro n o funcional linear contínuo x_n^* definido por $x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$ é chamado de funcional biortogonal.

Definição 0.7 Sejam $(x_n)_n$ uma sequência básica em E , $(p_n)_n$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos e $(t_n)_n$ uma sequência de números reais. Uma sequência $(z_n)_n$ dada por $z_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} t_i x_i$, com $z_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é chamada de base de blocos de $(x_n)_n$.

Definição 0.8 Duas bases de Schauder $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ de espaços de Banach E e F respectivamente são ditas equivalentes se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ também converge.

Teorema 0.9 (6, pág 53) Seja $(x_n)_n$ uma base do espaço de Banach E com funcionais biortogonais $(x_n^*)_n$. Se uma sequência $(y_n)_n$ em E satisfaz

a) $\inf_n \|y_n\| = \epsilon > 0$.

b) $x_i^*(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Então existe uma subsequência $(y_{p_n})_n$ que é uma sequência básica e essa sequência é equivalente a uma base de bloco de $(x_n)_n$.

Teorema 0.10 (20, pág 6) *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_n$. Seja Y um subespaço fechado de dimensão infinita de E . Então existe um subespaço Z de Y que tem uma base que é equivalente a uma base de bloco de $(x_n)_n$.*

Definição 0.11 *Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma base de E ,*

- a) $(x_n)_n$ é “shrinking” se para todo funcional linear contínuo x^* e para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a norma de x^* restrito ao espaço gerado por $x_n, x_{n+1}, \dots$ é no máximo ϵ .*
- b) $(x_n)_n$ é limitadamente completa se dada qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$ para a qual a soma parcial $\sum_{n=1}^N a_n x_n$ é limitada então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge.*

Teorema 0.12 (20, pág 22) *Seja E um espaço de Banach com base incondicional $(x_n)_n$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- a) A base é limitadamente completa.*
- b) E não tem subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.*

Teorema 0.13 (18, pág 637) *Se E é um espaço de Banach com base incondicional, então E é reflexivo a menos que ele contenha um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ ou um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.*

Teorema 0.14 (3, pág 2) *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_n$ e $\delta > 0$. Se E contém um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, então existe uma sequência $(u_n)_n$ normalizada de blocos de $(x_n)_n$ tal que $(1 - \delta) \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ para toda sequência finita de escalares $(a_i)_i$ que não são todos nulos.*

Definição 0.15 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n \subset E$ uma sequência então:*

- a) $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy se a sequência $x^*(x_n)$ é convergente para cada $x^* \in E^*$.*
- b) $(x_n)_n$ é fracamente nula se $x^*(x_n) \rightarrow 0$ para cada $x^* \in E^*$.*

Teorema 0.16 (4, pág 201) *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que é uma sequência fracamente de Cauchy ou existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que é equivalente á base canônica de $l_1(\mathbb{N})$.*

Teorema 0.17 (Teorema da Aplicação Aberta, 15, pág 245) *Seja f uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach E sobre um espaço de Banach F então para todo conjunto aberto $U \subset E$, $f(U)$ é aberto em F .*

Teorema 0.18 (Teorema do gráfico fechado, 15, pág 251) *Sejam E e F espaços de Banach e $f : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. f é contínua se, e somente se, o seu gráfico é fechado.*

Definição 0.19 *Um subespaço M de um espaço vetorial V tem codimensão finita em V se a dimensão do quociente de V/M é finita, ou seja, não existe uma quantidade infinita de vetores linearmente independente fora de M .*

Como estaremos trabalhando com espaços de Banach, todos os nossos subespaços de codimensão finita serão fechados.

Teorema 0.20 (7, pág 103) *Seja E um espaço de Banach e M um subespaço de E de codimensão finita. Então para qualquer subespaço Y de E , existe Z um subespaço de dimensão finita tal que $Y = M \cap Y \oplus Z$.*

Definição 0.21 *Sejam E e F dois espaços de Banach e $T \in L(E, F)$, dizemos que T é compacto se para cada sequência limitada $(x_n)_n$ em E , $T(x_n)_n$ admite uma subsequência convergente em norma.*

Teorema 0.22 (20, pág 76) *Sejam E e F espaços de Banach de dimensão infinita. Assuma que $T : E \rightarrow F$ é um operador tal que a restrição de T a qualquer subespaço de E de codimensão finita não é um isomorfismo. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um subespaço fechado de dimensão infinita Z de E tal que $T|_Z$ é compacto e $\|T|_Z\| \leq \epsilon$.*

Definição 0.23 *Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo para o qual $T(E)$ é fechada. Se a dimensão do núcleo de T é finita ou a dimensão do quociente de $F/T(E)$ é finita, então definimos o índice de T , denotaremos $i(T)$, como sendo a diferença entre a dimensão do núcleo de T e a dimensão do quociente de $F/T(E)$.*

Definição 0.24 Um operador $T : E \rightarrow E$ é estritamente singular quando a restrição de T a qualquer subespaço fechado de E de dimensão infinita não é um isomorfismo.

Teorema 0.25 (20, pág 78) Seja $T : E \rightarrow F$ um operador para o qual $i(T)$ está definido. Existe um número $\lambda(T) > 0$ tal que se $S : E \rightarrow F$ satisfaz $\|S\| < \lambda(T)$ então $i(T + S) = i(T)$.

Teorema 0.26 (20, pág 79) Seja $T : E \rightarrow F$ um operador com imagem fechada para o qual a dimensão do núcleo de T é finita. Seja $S : E \rightarrow F$ um operador estritamente singular. Então $i(T + S) = i(T)$.

Definição 0.27 O resolvente $\rho(T)$ de $T \in L(E)$ é o conjunto de todos os λ tais que a imagem de $\lambda - T$ é densa em E e $\lambda - T$ tem inversa contínua. O espectro de T é o conjunto $S_p(T)$ complementar do resolvente.

Definição 0.28 λ é um autovalor aproximado de $T \in L(E)$ se $\forall \epsilon > 0, \exists x, \|x\| = 1$ tal que $\|\lambda x - T(x)\| < \epsilon$.

Teorema 0.29 (24, pág 282) O conjunto dos autovalores aproximados de T é um subconjunto fechado do espectro e inclui todos os pontos da fronteira do espectro.

Se $T \in L(E)$, onde E é um espaço de Banach complexo, então o conjunto dos autovalores aproximados de T é não vazio.

Teorema 0.30 (24, pág 193) Sejam E e F espaços de Banach e G o conjunto de todos os elementos inversíveis de $L(E, F)$. Se $A \in G$, $B \in L(E, F)$ e $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, então $B \in G$.

Definição 0.31 Uma função f real é concava em um intervalo, se para todo a e b deste intervalo, o segmento retilíneo que une $(a, f(a))$ com $(b, f(b))$ fica por baixo do gráfico de f . Dizemos que f é convexa se $-f$ é concava.

Observação 0.32 É conhecido do cálculo diferencial que se f tem derivada até segunda ordem positiva num intervalo (a, b) , então f é convexa nesse intervalo. Também é um

exercício de cálculo a Desigualdade de Jensen, isto é. seja G uma função concava e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, então $G(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i G(x_i)$, veja [23, pág 292].

Observação 0.33 *Segue imediatamente da definição acima que são equivalentes:*

- a) f é convexa.*
- b) O epigráfico de f , isto é, $A_f = \{(x, y) : x \in D_f, f(x) \leq y\}$ é convexo.*
- c) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_f \times \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) < y_1$ e $f(x_2) < y_2$, tem-se que $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$.*

Capítulo 1

Espaços Precursores

Como já foi dito na introdução, o nosso principal objetivo é estudar o espaço de Banach (reflexivo) de Gowers e Maurey obtido pelo completado de um espaço normado em c_{00} . Esse espaço não contém nenhuma sequência básica incondicional, em particular, ele não possui nenhum subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, ou $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$, pois as bases canônicas desses espaços são incondicionais.

Neste capítulo apresentaremos alguns espaços de Banach E obtidos também pelo completado de espaços normados em c_{00} . Eles podem ser considerados precursores do espaço de Thomas Schlumprecht (veja capítulo 3) e do espaço de Gowers e Maurey (veja capítulo 4) pela maneira com que suas normas são definidas.

Motivados pelo Teorema de James, veja Teorema 0.13, estaremos interessados, neste capítulo, em responder as seguintes perguntas:

1. E contém uma base incondicional ?
2. E possui subespaços isomorfos a $c_0(\mathbb{N})$?
3. E possui subespaços isomorfos a $l_1(\mathbb{N})$?
4. E é reflexivo ?

Mais concretamente, inicialmente mostraremos que o espaço de Schreier (S), contém uma base 1-incondicional, não possui subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, mas possui um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, veja Proposição 1.3, Teorema 1.4 e Teorema 1.6.

A seguir provaremos que o espaço de Baernstein (B) contém uma base 1-incondicional,

mas não contém subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$ ou $c_0(\mathbb{N})$ e é reflexivo, veja Proposição 1.7 e Teorema 1.10.

Finalmente, apresentaremos o espaço de Tsirelson (T), que foi construído para mostrar a existência de um espaço de Banach reflexivo que não possui nem subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ ou $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$, veja Teorema 1.12, Teorema 1.13 e Observação 1.14.

A construção do espaço de Tsirelson que nós usamos aqui é devida a T. Figiel e W. B. Johnson. Na verdade, ele é o dual do exemplo original de B. S. Tsirelson.

As Proposições e Teoremas estudados neste capítulo podem ser encontrados em [3].

1.1 O espaço de Schreier

Definição 1.1 *Todo conjunto finito ordenado $E = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ de números naturais é chamado admissível se $k \leq n_1$, ou seja, o número de elementos do conjunto é menor ou igual ao primeiro elemento do conjunto.*

Observação 1.2 *Todo subconjunto de um conjunto admissível é admissível.*

De fato, seja E um conjunto admissível e F um subconjunto de E então $E = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ onde $k \leq n_1$ e $F = \{n_p < \dots < n_q\}$. Temos que $q \leq k \leq n_1 \leq n_p$, portanto $q \leq n_p$ e assim F é admissível. ■

Denotaremos por $\mathcal{N}$ a classe de todos os conjuntos admissíveis.

O espaço de Schreier, denotado por S , é definido como sendo o completado de c_{00} com a norma $\|x\|_S = \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k|$, onde $x = (x_k)_k$.

Notemos que $\|x\|_S$ é norma em c_{00} , de fato sejam $x = (x_k)_k$ e $y = (y_k)_k$ elementos de c_{00} .

1) claramente $\|x\|_S \geq 0$.

$$\|x\|_S = 0 \iff \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k| = 0 \iff \sum_{k \in E} |x_k| = 0, \forall E \in \mathcal{N} \iff |x_k| = 0 \forall k \iff x = 0.$$

$$2) \|\lambda x\|_S = \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |\lambda x_k| = |\lambda| \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k| = |\lambda| \|x\|_S, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \|x + y\|_S &= \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k + y_k| \leq \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} (|x_k| + |y_k|) = \sup_{E \in \mathcal{N}} \left(\sum_{k \in E} |x_k| + \sum_{k \in E} |y_k| \right) \leq \\
&\leq \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k| + \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |y_k| = \|x\|_S + \|y\|_S. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição 1.3 *Seja S o espaço de Schreier.*

- 1) $\forall x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, x \in c_{00}$ têm-se que $\|x\|_S \leq \|x\|_{l_1}$.
- 2) $\|e_n\|_S = 1, \forall n$.
- 3) $(e_n)_n$ é uma base 1-incondicional para S .
- 4) $\forall x \in c_{00}$ tal que $\text{supp}(x) \in \mathcal{N}$ temos que $\|x\|_S = \|x\|_{l_1}$.

Demonstração:

$$1) \quad x \text{ tem suporte finito, então } \|x\|_S = \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E} |x_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_{l_1}.$$

$$2) \quad \text{Já sabemos pelo item 1 que } \|e_n\|_S \leq \|e_n\|_{l_1} = 1.$$

Como $E = \{n\}$ é admissível, temos $\|e_n\|_S = \sup_{E' \in \mathcal{N}} \sum_{k \in E'} |e_n(k)| \geq \sum_{k \in E} |e_n(k)| = 1$, onde $e_n(k)$ representa a coordenada k de e_n . Portanto $\|e_n\|_S = 1, \forall n$.

3) Vamos fazer esta demonstração em três partes.

I) $(e_n)_n$ é sequência básica.

Pelo Teorema 0.3 é suficiente mostrarmos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_S$$

para qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$ e inteiros $m < n$.

Sejam $y = \sum_{i=1}^m a_i e_i$, $z = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ e E um conjunto admissível qualquer. Consideremos $I = \{1, 2, \dots, m\}$ e $J = \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n\}$ se $E \cap I \neq \emptyset$, então $\sum_{k \in I \cap E} |a_k| \leq \sum_{k \in J \cap E} |a_k| \leq \|z\|_S$. Como a desigualdade vale para qualquer conjunto admissível temos $\|y\|_S \leq \|z\|_S$, ou seja $\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_S, \forall (a_n)_n$ e inteiros $m < n$.

II) $(e_n)_n$ gera S .

Como $e_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}$, claramente $[(e_n)_n] \subset S$.

$S \subset [(e_n)_n]$, pois dado $y \in S$ existe uma sequência de elementos y_n de c_{00} tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Como os $y_n \in c_{00}$, eles podem ser escritos como combinação linear de $(e_n)_n$ que é base de c_{00} . Os y_n 's formam uma sequência de Cauchy em $[(e_n)_n]$ e portanto $(y_n)_n$ é convergente em $[(e_n)_n]$. Como o limite é único temos que $y \in [(e_n)_n]$, logo $S \subset [(e_n)_n]$. Consequentemente $S = [(e_n)_n]$.

III) $(e_n)_n$ é 1-incondicional.

Pelo Teorema 0.5, basta verificarmos que

$$\left\| \sum_{j \in A} a_j e_j \right\|_S \leq \left\| \sum_{j \in B} a_j e_j \right\|_S$$

onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

Seja E um conjunto admissível qualquer. Se $A \cap E \neq \emptyset$, então $\sum_{j \in A \cap E} |a_j| \leq \sum_{j \in B \cap E} |a_j| \leq \left\| \sum_{j \in B} a_j e_j \right\|_S$. Como a desigualdade vale para qualquer conjunto admissível temos $\left\| \sum_{j \in A} a_j e_j \right\|_S \leq \left\| \sum_{j \in B} a_j e_j \right\|_S$, onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

Por I), II) e III) temos que $(e_n)_n$ é base 1-incondicional para S .

4) Sejam $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ e $L = \text{supp}(x) \in \mathcal{N}$, temos que $\sum_{i \in L} |a_i| = \|x\|_{l_1}$ mas, $\sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{i \in E} |a_i| \geq \sum_{i \in L} |a_i| = \|x\|_{l_1}$. Logo $\|x\|_S \geq \|x\|_{l_1}$ e como por 1) $\|x\|_S \leq \|x\|_{l_1}$ temos o resultado. ■

Teorema 1.4 $l_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow S$.

Demonstração:

Se $l_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow S$, tomando $\delta = \frac{1}{10}$, teríamos pelo Teorema 0.14 que existe uma sequência normalizada de blocos $(u_{n-1})_n$ de $(e_n)_n$ para a qual

$$\frac{9}{10} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i \right\|_S$$

para toda sequência finita de escalares $(a_{i-1})_i$.

Logo $\frac{18}{10} \leq \|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_S, \forall n \geq 1$. E então basta usarmos a Proposição abaixo para obtermos um absurdo. ■

Proposição 1.5 Para cada sequência normalizada de blocos consecutivos $(u_{n-1})_n$ de $(e_n)_n$ temos

$$\overline{\lim}_n \|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_S \leq 1.$$

Demonstração:

Para cada $n \geq 1$ consideremos a quantidade $\|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_S$, e seja $E \in \mathcal{N}$ tal que $\|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_S = \sum_{k \in E} |u_0(k) + \frac{1}{n}(u_1(k) + \dots + u_n(k))|$, onde $u_n(k)$ representa a coordenada k de u_n .

Se E não encontra $\text{supp}(u_0)$, isto é, E é disjunto do $\text{supp}(u_0)$ então $u_0(k) = 0, \forall k \in E$ e $\frac{1}{n}(u_1(k) + \dots + u_n(k))$ é no máximo 1.

Se E encontra $\text{supp}(u_0)$ seja $|E|$ a cardinalidade de E . $|E|$ independe de n , pois só devemos ter $|E| \leq n_1$ onde n_1 é a primeira coordenada do $\text{supp}(u_0)$ que E encontra, e assim

$$\lim_n \sum_{k \in E} |\frac{1}{n}(u_1(k) + \dots + u_n(k))| = 0$$

pois sejam $u_1, u_2, \dots, u_p$ os vetores que encontram E , $p \leq n$ então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1(k) + \dots + u_p(k)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{n} = 0$$

E assim temos o resultado. ■

Teorema 1.6 $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow S$.

Demonstração:

Vamos produzir uma sequência $(u_n)_n$ em S equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$, definindo:

$$u_1 = e_1 ; u_2 = \frac{e_2 + e_3}{2} ; \dots$$

$$u_n = 2^{n-1} \left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} e_k \right), n \geq 3$$

Podemos observar que

1) os suportes de $(u_n)_n$ são conjuntos admissíveis.

2) $(u_n)_n$ é uma sequência de blocos de $(e_n)_n$.

3) $\|u_n\|_S = 1 \ \forall n$, pois pelo item 1 e pela Proposição 1.3 item 4 $\|u_n\|_S = \|u_n\|_{l_1} = 1$.

Seja $(a_i)_i$ uma sequência finita de escalares, logo

$$|a_n| \leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_S, \ \forall n, \ 1 \leq n \leq k$$

pois se N_n é o suporte de u_n , então N_n é admissível e portanto

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_S = \sup_{E \in \mathcal{N}} \sum_{l \in E} |b_l| \geq \sum_{l \in N_n} |b_l| = |a_n|,$$

onde b_l é da forma $\frac{a_j}{2^{j-1}}$, $\forall j, \ 1 \leq j \leq k$.

Logo

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_S \geq \max_{1 \leq n \leq k} |a_n|.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.3

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^k |a_i| u_i \right\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^k \left(\max_{1 \leq l \leq k} |a_l| \right) u_i \right\|_S = \max_{1 \leq l \leq k} |a_l| \left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\|_S$$

e então é suficiente mostrarmos que $\left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\|_S = 1$.

Para isto seja $\bar{u}_k = \sum_{i=1}^k u_i$ e considere $E \in \mathcal{N}$ tal que $\|\bar{u}_k\|_S = \sum_{j \in E} |\bar{u}_k(j)|$.

Sem perda de generalidade, E pode ser tomado como um segmento de números naturais $E = \{l, l+1, l+2, \dots, 2l-1\}$.

Desde que $\bar{u}_k = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} a_i e_i$, onde a_i toma valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, etc, existe k_0 tal que $2^{k_0} \leq l < 2^{k_0+1}$ e $\|\bar{u}_k\|_S = \sum_{j \in E} |\bar{u}_k(j)| = \frac{2^{k_0+1} - l}{2^{k_0}} + \frac{2l - 2^{k_0+1}}{2^{k_0+1}} = 2^{-k_0}(2^{k_0+1} - l) + 2^{-k_0-1}(2l - 2^{k_0+1}) = 1$.

Portanto $\|\bar{u}_k\|_S = 1$ e $\left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_S \leq \max_{1 \leq l \leq k} |a_l|$ como queríamos.

Logo $(u_n)_n$ é equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$ e portanto $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow S$. ■

1.2 O espaço de Baernstein

Para todo $x \in c_{00}$, definimos

$$\|x\|_B = \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} : E_k \in \mathcal{N}, E_1 < E_2 < \dots < E_n, n = 1, 2, \dots \right\}$$

isto é, o supremo é tomado sobre todos subconjuntos finitos consecutivos $E_k \in \mathcal{N}$ tais que $|E_k| \leq \min(E_k)$.

O espaço de Baernstein, denotado por B , é definido como sendo o completado de c_{00} com a norma $\|\cdot\|_B$.

Notemos que $\|\cdot\|_B$ é norma em c_{00} , de fato sejam x e y elementos de c_{00} .

1) claramente $\|x\|_B \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|x\|_B = 0 &\iff \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} = 0 \iff \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} = 0 \quad \forall E_1 < \dots < E_n \\ &\iff \sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 = 0 \iff \|E_k x\|_{l_1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n \iff E_k x = 0 \quad 1 \leq k \leq n \iff \\ &x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \|\lambda x\|_B &= \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k \lambda x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} = \sup \left\{ |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} \\ &= |\lambda| \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} = |\lambda| \|x\|_B, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \left(\sum_{k=1}^n \|E_k(x+y)\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x + E_k y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\|E_k x\|_{l_1} + \|E_k y\|_{l_1})^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n \|E_k y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} + \\ &\sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} \end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para qualquer elemento da forma $\left(\sum_{k=1}^n \|E_k(x+y)\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}$ temos

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k(x+y)\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} &\leq \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\} + \\ &\sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|E_k y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < \dots < E_n \right\}, \text{ ou seja, } \|x+y\|_B \leq \|x\|_B + \|y\|_B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 1.7 *Seja B o espaço de Baernstein.*

a) $\|e_n\|_B = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $(e_n)_n$ é uma base 1-incondicional para B .

Demonstração:

a) $\|e_n\|_B = \sup\{(\sum_{k=1}^N \|E_k e_n\|_{l_1}^2)^{1/2}, E_1 < \dots < E_N\}$ e $e_n = \{0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots\}$. Então seja qual for a sequência de conjuntos admissíveis consecutivos considerada, nós teremos que no máximo um deles vai conter a coordenada não nula de e_n ou talvez nenhum deles intercepte e_n na coordenada não nula. Sendo assim temos duas possibilidades $\|E_k e_n\|_{l_1} = 1$ ou $\|E_k e_n\|_{l_1} = 0$. Portanto $\|e_n\|_B = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Vamos fazer a demonstração em três partes.

1) $(e_n)_n$ é sequência básica.

Pelo Teorema 0.3 é suficiente mostrarmos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|_B \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_B$$

para qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$ e inteiros $m < n$.

Consideremos $y = \sum_{i=1}^m a_i e_i, z = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ e $\{E_k\}_{k=1}^l$ uma sequência qualquer de conjuntos admissíveis consecutivos. Então temos

$$\left(\sum_{k=1}^l \|E_k y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^l \|E_k z\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq \sup\{(\sum_{k=1}^l \|E_k z\|_{l_1}^2)^{1/2}, E_1 < E_2 < \dots\} = \|z\|_B.$$

Como essa desigualdade vale para qualquer sequência de conjuntos admissíveis consecutivos temos que $\|y\|_B \leq \|z\|_B$.

2) $(e_n)_n$ gera B .

Demonstração análoga a feita para o espaço de Schreier.

3) $(e_n)_n$ é 1-incondicional para B .

Pelo Teorema 0.5, basta verificarmos que

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i e_i \right\|_B \leq \left\| \sum_{i \in B} a_i e_i \right\|_B$$

onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

Consideremos $y = \sum_{i \in A} a_i e_i$, $z = \sum_{i \in B} a_i e_i$ e $\{E_k\}_{k=1}^l$ uma sequência qualquer de conjuntos admissíveis consecutivos. Então temos

$$\left(\sum_{k=1}^l \|E_k y\|_{l_1}^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^l \|E_k z\|_{l_1}^2\right)^{1/2} \leq \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^l \|E_k z\|_{l_1}^2\right)^{1/2}, E_1 < E_2 < \dots\right\} = \|z\|_B.$$

Como essa desigualdade vale para qualquer sequência de conjuntos admissíveis consecutivos temos que $\|y\|_B \leq \|z\|_B$.

Por 1), 2) e 3) temos que $(e_n)_n$ é base 1-incondicional para B . ■

Para demonstrarmos o próximo Teorema precisamos da Observação abaixo e da Proposição 1.9.

Observação 1.8 *Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais tais que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)\|_{l_1}^2\right)^{1/2} \leq 1 \text{ para toda sequência } \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ de subconjuntos admissíveis consecutivos dos naturais. Então } x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \text{ é convergente em } B.$$

De fato, basta demonstrarmos que $S_n = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ é de Cauchy em B .

Suponhamos que S_n não é de Cauchy, então existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $r \in \mathbb{N}$, existe $p < q$, $p, q \geq r$ com $\|S_p - S_q\|_B = \|a_{p+1} e_{p+1} + \dots + a_q e_q\|_B \geq \epsilon$, ou seja, existe $E_1 < \dots < E_n$, $E_i \in \mathcal{N}$ satisfazendo $\sum_{i=1}^n \|E_i(a_{p+1} e_{p+1} + \dots + a_q e_q)\|_{l_1}^2 \geq \epsilon^2$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ com $\epsilon^2 N > 1$. Tomemos $m_1 = 1$, como S_n não é Cauchy existe $p_1, q_1 \geq m_1$ tal que $\sum_{i=1}^{n_1} \|E_i(a_{p_1+1} e_{p_1+1} + \dots + a_{q_1} e_{q_1})\|_{l_1}^2 \geq \epsilon^2$. Seja $m_2 = \max(E_{n_1}) + 1$ logo existe $p_2, q_2 \geq m_2$ tal que $\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \|E_i(a_{p_2+1} e_{p_2+1} + \dots + a_{q_2} e_{q_2})\|_{l_1}^2 \geq \epsilon^2$.

Analogamente conseguimos $E_1 < E_2 < \dots < E_{n_N}$ tais que $\sum_{i=1}^{n_N} \|E_i(a_{p_1+1} e_{p_1+1} + \dots + a_{q_N} e_{q_N})\|_{l_1}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \|E_i(a_{p_1+1} e_{p_1+1} + \dots + a_{q_N} e_{q_N})\|_{l_1}^2 + \dots + \sum_{i=n_{N-1}+1}^{n_N} \|E_i(a_{p_1+1} e_{p_1+1} + \dots +$

$$\|a_{q_N} e_{q_N}\|_{l_1}^2 \geq N\epsilon^2 > 1.$$

Absurdo, pois por hipótese $(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)\|_{l_1}^2)^{1/2} \leq 1$ para toda sequência $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos admissíveis consecutivos dos naturais. ■

Proposição 1.9 *Para toda sequência de blocos normalizada consecutiva $(u_{n-1})_n$ de $(e_n)_n$, temos*

$$\overline{\lim}_n \|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)\|_B \leq \sqrt{2}.$$

Demonstração:

Fixemos $n \geq 1$ e consideremos uma sequência de subconjuntos admissíveis consecutivos dos naturais, digamos $E_1 < E_2 < \dots$

Se $\text{supp}(u_0) < E_1$, então

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2\right)^{1/2} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(u_1 + \dots + u_n)\|_{l_1}^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{n} \|u_1 + \dots + u_n\|_B \leq \frac{1}{n} (\|u_1\|_B + \dots + \|u_n\|_B) \leq \frac{n}{n} = 1.$$

Caso contrário, sejam k_1 o maior índice k para o qual $\min E_k \leq \max \text{supp}(u_0)$ e $f(u_0) = \max \text{supp}(u_0)$. Então $|E_{k_1}| \leq \min E_{k_1} \leq f(u_0)$ e portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_1} \|E_k(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 &= \sum_{k=1}^{k_1-1} \|E_k(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 + \|E_{k_1}(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{k_1-1} \|E_k(u_0)\|_{l_1}^2 + \|E_{k_1}(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} \|E_k(u_0)\|_{l_1} + \|E_{k_1}(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} \|E_k(u_0)\|_{l_1} + \|E_{k_1}(u_0)\|_{l_1} + \|E_{k_1}(\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}\right)^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{k_1} \|E_k(u_0)\|_{l_1} + \|E_{k_1}(\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}\right)^2 \leq (\|u_0\|_B + \|E_{k_1}(\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_B)^2 \leq \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|E_{k_1}(u_i)\|_B\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{n} f(u_0)\right)^2. \end{aligned}$$

Observação: $\|E_{k_1}(u_1)\|_B + \dots + \|E_{k_1}(u_n)\|_B \leq f(u_0)$. De fato, seja $A = \{i : E_{k_1} \cap \text{supp}(u_i) \neq \emptyset\}$. Temos $|A| \leq |E_{k_1}| \leq f(u_0)$ e $\|E_{k_1}(u_j)\|_B \leq \|u_j\|_B \leq 1$.

Logo $\|E_{k_1}(u_1)\|_B + \dots + \|E_{k_1}(u_n)\|_B \leq |A| \|u_j\|_B \leq f(u_0)$.

$$\text{Portanto } \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{k_1} \|E_k(u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \|E_k(\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n))\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq ((1 + \frac{1}{n}f(u_0))^2 + 1)^{1/2}.$$

$$\text{Assim } \|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_B \leq ((1 + \frac{1}{n}f(u_0))^2 + 1)^{1/2}.$$

$$\text{Consequentemente } \overline{\lim}_n \|u_0 + \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)\|_B \leq \sqrt{2}. \blacksquare$$

Teorema 1.10 *Para o espaço de Baernstein B temos*

- a) $l_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow B$.
- b) $c_0(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow B$.
- c) B é reflexivo.

Demonstração:

a) Análoga a demonstração do Teorema 1.4 e usando a Proposição acima.

b) Pelo Teorema 0.12, basta mostrarmos que $(e_n)_n$ é limitadamente completa. Para isso precisamos mostrar que para qualquer sequência de escalares $x = (x_i)_i$ se o $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_B \leq 1$, então x é convergente em B.

Para este fim, seja $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos admissíveis consecutivos dos naturais. Para cada $K \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^K \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^K E_k \right)}_y x \right\|_B = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|E_i y\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < E_2 < \dots \right\} \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_B \leq 1. \text{ Assim } \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Como $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência qualquer temos $\sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|E_k x\|_{l_1}^2 \right)^{1/2}, E_1 < E_2 < \dots \right\} \leq 1$. Portanto pela Observação 1.8 temos que x é convergente em B.

c) Segue imediatamente dos itens a e b e do Teorema 0.13, pois como vimos B tem uma base incondicional. $\blacksquare$

1.3 O espaço de Tsirelson

Vamos definir indutivamente uma sequência de normas $(\|\cdot\|_m)_m$ em c_{00} como segue.

Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}$, definimos $\|x\|_0 = \max_n |a_n|$ e

$$\|x\|_{m+1} = \max\{\|x\|_m, \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right]\}, \text{ para } m \geq 0$$

onde o segundo máximo é tomado sobre todas as escolhas de subconjuntos finitos $\{E_j\}_{j=1}^k$ de $\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k$.

Notemos que $\|x\|_m$ é norma em c_{00} . De fato, sejam x e y elementos de c_{00} .

Já sabemos que $\|x\|_0 = \max_n |a_n|$ é norma em c_{00} . Vamos assumir que $\|x\|_m$ é norma em c_{00} e provarmos que $\|x\|_{m+1}$ é norma em c_{00} .

1) claramente $\|x\|_{m+1} \geq 0$.

$$\|x\|_{m+1} = 0 \iff \max\{\|x\|_m, \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right]\} = 0 \iff x = 0.$$

$$2) \|\lambda x\|_{m+1} = \max\{\|\lambda x\|_m, \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j \lambda x\|_m\right]\} = \max\{|\lambda| \|x\|_m,$$

$$|\lambda| \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right]\} = |\lambda| \max\{\|x\|_m, \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right]\} = |\lambda| \|x\|_{m+1}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3) \|x + y\|_{m+1} = \max\{\|x + y\|_m, \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j(x + y)\|_m\right]\}.$$

caso 1:

$$\|x + y\|_{m+1} = \|x + y\|_m \leq \|x\|_m + \|y\|_m \leq \|x\|_{m+1} + \|y\|_{m+1}.$$

caso 2:

$$\|x + y\|_{m+1} = \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j(x + y)\|_m\right] \leq \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m + \sum_{j=1}^k \|E_j y\|_m\right] \leq$$

$$\frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right] + \frac{1}{2} \max\left[\sum_{j=1}^k \|E_j y\|_m\right] \leq \|x\|_{m+1} + \|y\|_{m+1}.$$

Portanto $\|x + y\|_{m+1} \leq \|x\|_{m+1} + \|y\|_{m+1}$. ■

Vamos destacar agora duas propriedades de $\|x\|_m$.

1) $(\|\cdot\|_m)_m$ é crescente com m .

De fato, pela definição de norma temos $\|x\|_{m+1} \geq \|x\|_m$, $\forall m \geq 0$.

2) $\|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}$ para todo $x \in c_{00}$ e para todo $m \geq 0$.

De fato, $\|x\|_0 = \max_n |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|x\|_{l_1}$.

Vamos assumir agora que $\|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}$ e provarmos que $\|x\|_{m+1} \leq \|x\|_{l_1}$.

$$\|x\|_{m+1} = \max\{\|x\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \|E_j x\|_m\}$$

caso 1:

$$\|x\|_{m+1} = \|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}.$$

caso 2:

$$\|x\|_{m+1} = \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \|E_j x\|_m \leq \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \|E_j x\|_{l_1} \leq \frac{1}{2} \|x\|_{l_1} \leq \|x\|_{l_1}.$$

Portanto $\|x\|_{m+1} \leq \|x\|_{l_1}$, com isto temos que $\|x\|_m \leq \|x\|_{l_1}$, $\forall m \geq 0$.

De 1) e 2) segue que, para cada $x \in c_{00}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x\|_m$ existe e é majorado pela $\|x\|_{l_1}$. Nós denotaremos $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x\|_m$ por $\|x\|$, e vamos verificar que $\|x\|$ é norma em c_{00} . De fato, sejam x e y elementos de c_{00} .

1) claramente $\|x\| \geq 0$.

$$\|x\| = 0 \iff \lim_m \|x\|_m = 0 \iff \|x\|_m = 0, \forall m \iff x = 0.$$

$$2) \|\lambda x\| = \lim_m \|\lambda x\|_m = \lim_m |\lambda| \|x\|_m = |\lambda| \lim_m \|x\|_m = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3) \|x + y\| = \lim_m \|x + y\|_m \leq \lim_m \|x\|_m + \lim_m \|y\|_m = \|x\| + \|y\|. \blacksquare$$

O espaço de Tsirelson, denotado por T , é definido como sendo o completado de c_{00} com a norma acima.

Antes de obtermos as propriedades citadas no início deste capítulo precisamos da seguinte Proposição.

Proposição 1.11 *Para o espaço de Tsirelson temos:*

1) A sequência $(e_n)_n$ forma uma base de Schauder normalizada 1-incondicional para o espaço T .

2) Para qualquer $x \in c_{00}$, e qualquer $m \geq 0$ temos

$$\|x\|_{m+1} = \sup\left\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\right\}$$

$$\text{ou } \|x\|_{m+1} = \|x\|_0.$$

3) Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in T$, temos $\|x\| = \max\left\{\max_n |a_n|, \frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m\right\}$, onde o supremo é tomado sobre todas as seqüências de subconjuntos finitos $\{E_j\}_{j=1}^k$ dos naturais, onde $k \in \mathbb{N}$ e tal que $k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k$.

Demonstração:

1) Vamos dividir esta demonstração em quatro partes:

a) $\|e_n\| = 1, \forall n$.

De fato, $\|e_n\|_0 \leq \|e_n\|_1 \leq \dots$ e como $\|e_n\|_0 = 1$ temos que $1 \leq \|e_n\|_m, \forall m \geq 0$. Pela segunda propriedade da norma temos que $\|e_n\|_m \leq \|e_n\|_{l_1} = 1, \forall m \geq 0$.

Logo $\|e_n\|_m = 1, \forall m \geq 0$ e portanto $\|e_n\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|e_n\|_m = 1, \forall n$.

b) $(e_n)_n$ é seqüência básica.

Pelo Teorema 0.3 é suficiente mostrarmos que

$$\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|$$

para qualquer seqüência de escalares $(a_n)_n$ e inteiros $l < j$.

$$\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\|_0 = \max_{1 \leq n \leq l} |a_n| \leq \max_{1 \leq n \leq j} |a_n| = \left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|_0.$$

Suponhamos que $\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\|_m \leq \left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|_m, \forall (a_n)_n$ e $l < j$. Vamos provar que

$$\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\|_{m+1} \leq \left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|_{m+1}.$$

$$\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\|_{m+1} = \max\left\{\left\| \sum_{n=1}^l a_n e_n \right\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \left\| E_j \left(\sum_{n=1}^l a_n e_n \right) \right\|_m\right\} \leq \max\left\{\left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \left\| E_j \left(\sum_{n=1}^j a_n e_n \right) \right\|_m\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \left\| E_j \left(\sum_{n=1}^j a_n e_n \right) \right\|_m = \left\| \sum_{n=1}^j a_n e_n \right\|_{m+1} \text{ pela hipótese de indução.}$$

Portanto $\|\sum_{n=1}^l a_n e_n\|_m \leq \|\sum_{n=1}^j a_n e_n\|_m, \forall m, \forall (a_n)_n$ e $l < j$. Assim $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\sum_{n=1}^l a_n e_n\|_m \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|\sum_{n=1}^j a_n e_n\|_m$, ou seja, $\|\sum_{n=1}^l a_n e_n\| \leq \|\sum_{n=1}^j a_n e_n\|$ para qualquer $(a_n)_n$ e $l < j$.

c) $(e_n)_n$ gera T.

Demonstração análoga a feita para o espaço de Schreier.

d) $(e_n)_n$ é 1-incondicional para T.

Pelo Teorema 0.5, basta verificarmos que

$$\|\sum_{n \in A} a_n e_n\| \leq \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|$$

onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

$$\|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_0 = \max_{n \in A} |a_n| \leq \max_{n \in B} |a_n| = \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_0.$$

Suponhamos que $\|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_m \leq \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_m$, onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$. Vamos provar que $\|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_{m+1} \leq \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_{m+1}$.

$$\begin{aligned} \|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_{m+1} &= \max\{\|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_m\} \leq \max\{\|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_m, \\ &\frac{1}{2} \max_{j=1}^k \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_m\} = \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_{m+1} \text{ pela hipótese de indução.} \end{aligned}$$

Portanto $\|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_m \leq \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_m, \forall m, A \subset B$. Assim $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\sum_{n \in A} a_n e_n\|_m \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|_m$, ou seja, $\|\sum_{n \in A} a_n e_n\| \leq \|\sum_{n \in B} a_n e_n\|$, onde $A \subset B$.

Portanto $(e_n)_n$ é base de Schauder normalizada 1-incondicional para T.

2) Sejam $x \in c_{00}$ e $m \geq 0$. Suponhamos que $\|x\|_{m+1} > \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}$.

Pela definição de $\|x\|_{m+1}$ temos que $\|x\|_{m+1} = \|x\|_m$. Logo $\|x\|_m > \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\} \geq \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_{m-1} : k \leq$

$$E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}.$$

Pela definição de $\|x\|_m$ temos que $\|x\|_m = \|x\|_{m-1}$. Continuando este raciocínio teremos que $\|x\|_{m+1} = \|x\|_0$.

3) Vamos verificar primeiro que essa igualdade vale para $x \in c_{00}$.

Para $x \in c_{00}$ temos que $\|x\|_{m+1} = \max\{\|x\|_0, \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}\}, \forall m \geq 0$.

De fato, se $\|x\|_{m+1} > \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}$ então pelo item anterior temos que $\|x\|_{m+1} = \|x\|_0$.

Se $\|x\|_{m+1} > \|x\|_0$, então necessariamente $\|x\|_{m+1} = \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}$ pois caso contrário teríamos $\|x\|_{m+1} > \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}$, mas como antes temos que isso implica que $\|x\|_{m+1} = \|x\|_0$: absurdo.

Como a função máximo é continua passando o limite temos:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x\|_{m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \max\{\|x\|_0, \sup\{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < \dots < E_k, k = 1, \dots\}\}.$$

Pela definição de $\|\cdot\|$ temos:

$$\|x\| = \max\{\|x\|_0, \sup \lim_{m \rightarrow +\infty} \{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\|_m : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}\}.$$

Portanto,

$$\|x\| = \max\{\|x\|_0, \frac{1}{2} \sup\{\sum_{j=1}^k \|E_j x\| : k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}\}, \text{ para } x \in c_{00}.$$

Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in T$. Vamos fazer agora duas Observações relativas a norma $\|\cdot\|$.

Observação 1: $\max_n |a_n| \leq \|x\|$.

Existe $\max_n |a_n|$ porque $(a_n)_n \in c_0(\mathbb{N})$. Consideremos $S_N = \sum_{i=1}^N a_i e_i$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\max_n |a_n| = |a_{n_0}|$. Logo $\forall N, N \geq n_0$ temos $\max_n |a_n| = \|S_N\|_0 \leq \|S_N\|$. Fazendo $N \rightarrow +\infty$ temos que $\|S_N\| \rightarrow \|x\|$, portanto $\max_n |a_n| \leq \|x\|$.

Observação 2: $\forall k \in \mathbb{N}$ e $k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k$ temos $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\| \leq \|x\|$.

Seja $n_k > \max(E_k)$. Logo $\forall N, N \geq n_k$ temos $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j(S_N)\| \leq \|S_N\|$

pelo o que já vimos. Fazendo $N \rightarrow +\infty$ temos que $\|S_N\| \rightarrow \|x\|$, portanto $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|E_j x\| \leq \|x\|$.

Vamos definir agora sobre T a norma

$$\|x\| = \max\{\max_n |a_n|, \frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^k \|E_j x\| : k \leq E_1 < \dots < E_k, k = 1, 2, \dots\}, \forall x \in T.$$

$(T, \|\cdot\|)$ é Banach. De fato, seja $x^n = (x_k^n)_k \in T$ uma sequência de Cauchy. Portanto dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ temos $\|x^n - x^m\| < \epsilon$, isto é,

$$\max\{\max_k |x_k^n - x_k^m|, \frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x^m)\| : l \leq E_1 < E_2 < \dots < E_l, l = 1, 2, \dots\} < \epsilon.$$

Então, em particular, temos $|x_k^n - x_k^m| < \epsilon \forall k$. Assim para cada k a sequência $(x_k^n)_n$ é Cauchy em $\mathbb{R}^n$, portanto tem um limite que indicaremos por x_k .

Vamos demonstrar que $x = (x_k)_k \in T$ e que $\|x^n - x\| \rightarrow 0$.

1. $\max_k |x_k^n - x_k^m| < \epsilon, \forall m, n \geq n_0$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$ temos $\max_k |x_k^n - x_k| < \epsilon, \forall n \geq n_0$.

2. $\frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x^m)\| < \epsilon \forall m, n \geq n_0$.

Temos que $\sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x^m)\| = \sum_{j=1}^l \lim_r \|E_j(x^n - x^m)\|_r$. Vamos verificar que $\forall r, \forall E_j$
 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_j(x^n - x^m)\|_r = \|E_j(x^n - x)\|_r$. (*)

Para $r = 0$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_j(x^n - x^m)\|_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{k \in E_j} |x_k^n - x_k^m| = \max_{k \in E_j} |x_k^n - x_k| = \|E_j(x^n - x)\|_0.$$

Suponhamos que (*) é verdadeiro até $r - 1$. Vamos provar que é verdade para r .

$$\begin{aligned}\|E_j(x^n - x^m)\|_r &= \max\{\|E_j(x^n - x^m)\|_{r-1}, \frac{1}{2}\max[\sum_{\theta=1}^{\gamma}\|E_{\theta}E_j(x^n - x^m)\|_{r-1}]\} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_j(x^n - x^m)\|_r &= \max\{\lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_j(x^n - x^m)\|_{r-1}, \frac{1}{2}\max[\sum_{\theta=1}^{\gamma} \lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_{\theta}E_j(x^n - x^m)\|_{r-1}]\} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \|E_j(x^n - x^m)\|_r &= \max\{\|E_j(x^n - x)\|_{r-1}, \frac{1}{2}\max[\sum_{\theta=1}^{\gamma} \|E_{\theta}E_j(x^n - x)\|_{r-1}]\} = \|E_j(x^n - x)\|_r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Logo } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x^m)\| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^l \lim_r \|E_j(x^n - x^m)\|_r = \sum_{j=1}^l \lim_r \|E_j(x^n - x)\|_r \\ &= \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x)\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Portanto fazendo } m \rightarrow +\infty \text{ em } \frac{1}{2}\sup \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x^m)\| &< \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \text{ obtemos} \\ \frac{1}{2}\sup \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x)\| &< \epsilon \quad \forall n \geq n_0.\end{aligned}$$

$$\text{Logo } \max\{\max_k |x_k^n - x_k|, \frac{1}{2}\sup \sum_{j=1}^l \|E_j(x^n - x)\|\} < \epsilon, \text{ ou seja, } \|x^n - x\| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Resta mostrar que $x = (x_k)_k \in T$, para isto vamos verificar que $P_i(x)$ é Cauchy na norma $\|\cdot\|$, onde $P_i(x)$ representa a projeção de x no intervalo $[1, i]$.

Seja $\|E(x)\| = \|P_i(x) - P_m(x)\|$ onde $E = \{i+1, \dots, m\}$, $i < m$. Temos que

$$\begin{aligned}\|E(x)\| &= \|E(x - x^n) + E(x^n)\| \leq \|E(x - x^n)\| + \|E(x^n)\| \leq 2\|x - x^n\| + \|E(x^n)\| \leq \\ &2\|x - x^n\| + \sum_{l=i+1}^m |x_l^n|, \text{ pois } E(x^n) \in c_{00} \text{ logo } \|E(x^n)\| \leq \|E(x^n)\|_{l_1}.\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ fixemos $n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$ temos $\|x - x^n\| < \frac{\epsilon}{4}$. Então $\|P_i(x) - P_m(x)\| \leq 2\|x - x^{n_0}\| + \sum_{l=i}^m |x_l^{n_0}|$. Dado o mesmo $\epsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i, m \geq k_0$ temos $\sum_{l=i+1}^m |x_l^{n_0}| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo $\|P_i(x) - P_m(x)\| < \epsilon \quad \forall i, m \geq k_0$. Portanto $(P_i(x))_i$ é Cauchy em $(T, \|\cdot\|)$, assim $(P_i(x))_i$ é convergente em $(T, \|\cdot\|)$.

Então $(P_i(x))_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} y \in T$, logo as coordenadas de y coincidem com as coordenadas de x , assim $y = x$ e como $y \in T$ temos que $x \in T$.

Como $x \in T$ e $\|x - x^n\| < \epsilon, \forall n \geq n_0$, temos que $x^n = (x_k^n)_k$ é convergente para um elemento de T , sendo assim $(T, \|\cdot\|)$ é Banach.

Vamos verificar que $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ na norma $\|\cdot\|$ e que $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ na norma $\|\cdot\|$.

Como $P_n(x) \rightarrow x$ em $(T, \|\cdot\|)$ temos que $\|P_n(x)\| \rightarrow \|x\|$. Pelas Observações 1 e 2 temos $\|P_n(x) - x\| \leq \|P_n(x) - x\| \rightarrow 0$.

$P_n(x) \in c_{00}$ e como foi visto anteriormente sabemos que

$$\|x\| = \max\{\max_n |a_n|, \frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^k \|E_j x\|, k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k\} = \|x\|, \forall x \in c_{00}.$$

Portanto $\|P_n(x)\| = \|P_n(x)\|$, mas como $\|P_n(x)\| \rightarrow \|x\|$ e $\|P_n(x)\| \rightarrow \|x\|$ temos que $\|x\| = \|x\|, \forall x \in T$.

Com isso verificamos que:

$$\|x\| = \max\{\max_n |a_n|, \frac{1}{2} \sup \sum_{j=1}^k \|E_j x\|, k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k\}, \text{ para qualquer } x \in T. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.12 $l_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow T$.

Demonstração:

Suponhamos que $l_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow T$. Logo pelo Teorema 0.14, com $\delta = \frac{1}{9}$, existe uma base de blocos normalizada $(y_{i-1})_i$ de $(e_n)_n$ tal que para toda escolha de escalares $(b_{i-1})_i$,

$$\frac{8}{9} \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \leq \|\sum_{i=0}^{\infty} b_i y_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|.$$

Disto segue que $\|y_0 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i\| \geq \frac{8}{9} \sum_{i=0}^r |b_i|$, onde $b_0 = 1$ e $b_i = \frac{1}{r}, \forall i, 1 \leq i \leq r$ e

$$\text{como } \sum_{i=0}^r |b_i| = 2 \text{ temos } \|y_0 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i\| \geq \frac{16}{9}, \text{ para todo } r = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Agora consideremos $k \leq E_1 < E_2 < \dots < E_k$ e $n_0 = \max \text{supp}(y_0)$.

Se $k > n_0$, então

$$\sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i)\| = \sum_{j=1}^k \|E_j(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i)\| \leq \sup \sum_{j=1}^k \|E_j(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i)\| \leq$$

$$2\|\frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i\| \leq \frac{2}{r}\sum_{i=1}^r \|y_i\| = 2. \text{ Logo } \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i)\| \leq 1 \quad (2).$$

Se $k \leq n_0$, consideremos os conjuntos:

$$A = \{i : \|E_j y_i\| \neq 0 \text{ para pelo menos 2 valores de } j\},$$

$$B = \{i : \|E_j y_i\| \neq 0 \text{ para no máximo 1 valor de } j\}.$$

Como A tem no máximo k elementos, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i)\| &= \sum_{j=1}^k \|E_j y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r E_j y_i\| \leq \sum_{j=1}^k \|E_j y_0\| + \sum_{j=1}^k \|\frac{1}{r}\sum_{i=1}^r E_j y_i\| \leq \\ &\sup\sum_{j=1}^k \|E_j y_0\| + \frac{1}{r}(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^r \|E_j y_i\|) \leq 2\|y_0\| + \frac{1}{r}(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\|) = 2\|y_0\| + \\ &\frac{1}{r}((\sum_{i \in A} \sum_{i \in B}) \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\|) = 2\|y_0\| + \frac{1}{r}[\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| + \sum_{i \in B} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\|] = 2\|y_0\| + \\ &\frac{1}{r}\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| + \frac{1}{r}\sum_{i \in B} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| \leq 2\|y_0\| + \frac{1}{r}\sum_{i \in A} \sup\sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| + \frac{1}{r}\sum_{i \in B} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| \leq \\ &2\|y_0\| + \frac{2}{r}\sum_{i \in A} \|y_i\| + \frac{1}{r}\sum_{i \in B} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| \leq 2 + \frac{2|A|}{r} + \frac{|B|}{r}, \text{ pois pela definição do conjunto } B, \\ &\text{para cada } i, \text{ no máximo a norma de uma projeção } E_j \text{ é diferente de zero e } \|E_j y_i\| \leq \\ &\|y_i\| = 1, \text{ logo } \sum_{i \in B} \sum_{j=1}^k \|E_j y_i\| \leq |B|. \text{ Continuando temos que} \\ &2 + \frac{2|A|}{r} + \frac{|B|}{r} \leq 2 + \frac{2k}{r} + \frac{r-k}{r} = 2 + \frac{2k}{r} + 1 - \frac{k}{r} = 3 + \frac{k}{r} \leq 3 + \frac{n_0}{r}. \end{aligned}$$

Se $r \geq 2n_0$ então $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2n_0}$ e teremos $3 + \frac{n_0}{r} \leq 3 + \frac{n_0}{2n_0} = \frac{7}{2}$. Então

$$\sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i)\| \leq \frac{7}{2}, \text{ logo } \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i)\| \leq \frac{7}{4}. \quad (3)$$

Pelo ítem 3 da Proposição 1.11 temos que $\|y_i\|_0 \leq \|y_i\| = 1$, para cada i . Logo cada coordenada de y_i tem módulo no máximo 1. Como os y_i 's são consecutivos segue que

$$\|y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i\|_0 \leq 1. \quad (4)$$

Por definição $\|y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i\| = \max\{\|y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i\|_0, \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^k \|E_j(y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i)\|\}$ e por (2),

(3), e (4) temos $\|y_0 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i\| \leq \frac{7}{4}$ o que contradiz (1). ■

Teorema 1.13 $c_0(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow T$ e $l_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow T, \forall 1 < p < \infty$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que exista $(y_n)_n$ uma sequência básica em T equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$ ou de $l_p(\mathbb{N}), 1 < p < \infty$. Logo $(y_n)_n$ é fraca nula, e é limitada inferiormente e superiormente.

Pelo Teorema 0.9 $(y_n)_n$ deve ter uma subsequência que é uma sequência básica e essa sequência básica é equivalente a uma base de blocos $(x_n)_n$ de $(e_n)_n$.

Passando para uma subsequência podemos assumir que $\text{supp}(x_i) > i, \forall i$.

Como as bases canônicas de $c_0(\mathbb{N})$ e $l_p(\mathbb{N}), 1 < p < \infty$, tem a propriedade de serem equivalentes a qualquer subsequência estritamente crescente dessas bases, pois

1) Em $l_p(\mathbb{N})$

Sejam $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ e $(a_n)_n$
 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ é convergente $\iff \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{n_i}$ é convergente.

2) Em $c_0(\mathbb{N})$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ é convergente $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \iff \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{n_i}$ é convergente.

Segue que existe $M > 0$ tal que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, quaisquer escalares $a_1, \dots, a_m$ e qualquer escolha de $n_1 < n_2 < \dots < n_m$, temos $\|\sum_{k=1}^m a_k y_k\| \geq M \|\sum_{k=1}^m a_k y_{n_k}\|$.

Logo $\|\sum_{k=1}^m a_k y_k\| \geq M \|\sum_{k=1}^m a_k y_{n_{m-1+k}}\| \geq M M' \|\sum_{k=1}^m a_k x_{m-1+k}\| \geq$
 $\geq \frac{1}{2} M M' \sum_{j=1}^l \|E_j(\sum_{k=1}^m a_k x_{m-1+k})\| = \frac{1}{2} M M' \sum_{j=1}^l \|\sum_{k=1}^m a_k E_j(x_{m-1+k})\|$, onde M' é a constante de equivalência de $(x_n)_n$ e $(y_{n_i})_i$.

Tomemos $l = m$ e os intervalos $E_j = \text{supp}(x_{m-1+j}), \forall j, 1 \leq j \leq m$. Logo $m \leq E_1 < \dots < E_m$ e $\|\sum_{k=1}^m a_k y_k\| \geq \frac{1}{2} M M' N \sum_{k=1}^m |a_k|$, onde N é a constante que limita $(x_n)_n$ superiormente.

Portanto $\frac{1}{2} M M' N \sum_{k=1}^m |a_k| \leq \|\sum_{k=1}^m a_k y_k\| \leq M'' \sum_{k=1}^m |a_k|$, onde M'' é a constante que

limita $\|y_k\|$, $k \in \mathbb{N}$. Logo $(y_n)_n$ é equivalente a base canônica de $l_1(\mathbb{N})$; absurdo, pois $l_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow T$. ■

Observação 1.14 T é reflexivo.

De fato, como T tem base incondicional, pelo Teorema acima e o Teorema 0.13 segue que T é reflexivo. ■

Capítulo 2

Funções

Antes de apresentarmos o espaço de Banach de Thomas Schlumprecht (capítulo 3) e o espaço de Gowers e Maurey (capítulo 4) será necessário estudarmos algumas propriedades de funções reais a valores reais.

Essencialmente destacamos um subconjunto $\mathcal{F}$ destas funções contendo as funções $f(x) = \log_2(x + 1)$ e $\sqrt{f(x)}$. A função $f(x)$ será usada tanto na definição da norma do espaço de Thomas Schlumprecht como na definição da norma do espaço de Gowers e Maurey.

Na observação 2.10 construiremos funções que serão utilizadas em Lemas dos capítulos 3 e 4.

Este capítulo está baseado em [11] e começaremos definindo $\mathcal{F}$.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto das funções $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $f(1) = 1$ e $f(x) < x$ para todo $x > 1$.
- 2) f é estritamente crescente e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-q} f(x) = 0$ para todo $q > 0$.
- 4) A função $\frac{x}{f(x)}$ é concava.
- 5) $f(xy) \leq f(x)f(y)$ para todo $x, y \geq 1$.

Observação 2.1 A função $f(x) = \log_2(x + 1) \in \mathcal{F}$.

De fato,

$$1) f(1) = \log_2(1+1) = \log_2(2) = 1.$$

Verificaremos agora que $f(x) = \log_2(x+1) < x, \forall x > 1$.

Seja $d(x) = x - \log_2(x+1)$, então $d(1) = 1 - 1 = 0$.

Basta mostrarmos que d é crescente e teremos que $\log_2(x+1) < x$.

$$d'(x) = 1 - \log_2 e \frac{1}{x+1}.$$

$d'(x) > 0, \forall x > 1 \iff 1 > \log_2 e \frac{1}{x+1}, \forall x > 1$, ou seja, $x+1 > \log_2 e, \forall x > 1$. O que é verdade porque $\log_2 e < 2$, pois $2^2 > e$.

2) f é estritamente crescente.

De fato, sejam $x < y$, $f(x) = \log_2(x+1)$ e $f(y) = \log_2(y+1)$.

$$\log_2(x+1) < \log_2(y+1) \iff x+1 < y+1 \iff x < y.$$

Claramente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(x+1)}{x^q}$ que vai tanto no numerador quanto no denominador para $+\infty$. Então vamos usar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 e \frac{1}{x+1}}{qx^{q-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \log_2 e \frac{1}{x+1} \frac{1}{x^{q-1}}.$$

Quando $q = 1$ temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 e \frac{1}{x+1} = 0$.

Quando $q > 1$ temos que $q-1 > 0$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \log_2 e \frac{1}{x+1} \frac{1}{x^{q-1}} = 0$.

Quando $q < 1$ temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \log_2 e \frac{x^{1-q}}{x+1}$ que vai para o infinito tanto no numerador quanto no denominador, então vamos usar novamente a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{q} \log_2 e \frac{(1-q)x^{-q}}{1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \log_2 e \frac{(1-q)}{x^q} = 0.$$

4) Vamos mostrar que $D(x) = \frac{x}{\log_2(x+1)}$ é concava e para isto demonstraremos que $D''(x) < 0, \forall x \geq 1$.

$$D'(x) = \frac{\log_2(x+1) - x(\frac{1}{x+1} \log_2 e)}{(\log_2(x+1))^2}$$

$$D''(x) = \underbrace{\frac{\log_2 e \log_2(x+1)}{(x+1)(\log_2(x+1))^4}}_{>0} \left(\frac{x}{x+1} \log_2(x+1) - 2\log_2(x+1) + \frac{2x}{x+1} \log_2 e \right)$$

$$\text{Seja } F(x) = \frac{x}{x+1} \log_2(x+1) - 2\log_2(x+1) + \frac{2x}{x+1} \log_2 e.$$

$$F(1) = \frac{1}{2} - 2 + \log_2 e < 0 \iff \log_2 e < \frac{3}{2} \iff e < 2^{3/2}, \text{ o que é verdade.}$$

$$F'(x) = \frac{\log_2(x+1) - x \log_2 e}{(x+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{>0} (\log_2(x+1) - x \log_2 e).$$

$$\text{Agora vamos considerar } G(x) = \log_2(x+1) - x \log_2 e.$$

$$G(1) = 1 - \log_2 e < 0 \iff \log_2 e > 1, \text{ o que é verdade.}$$

$$G'(x) = \log_2 e \frac{1}{x+1} - \log_2 e = \log_2 e \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) = \log_2 e \left(\frac{-x}{x+1} \right) < 0, \text{ pois } \frac{\log_2 e}{x+1} > 0 \text{ e } -x < 0.$$

Assim temos que G é estritamente decrescente e como $G(1) < 0$ temos que G é negativa, $\forall x \geq 1$.

Com isto temos que $F'(x) < 0$. Portanto F é estritamente decrescente e como $F(1) < 0$ temos que F é negativa, $\forall x \geq 1$.

Logo $D''(x) < 0, \forall x \geq 1$ e portanto D é concava.

$$5) \text{ Vamos mostrar que } \log_2(xy+1) \leq \log_2(x+1)\log_2(y+1), \forall x, y \geq 1$$

Fixemos y e consideremos a função,

$$D(x) = \log_2(xy+1) - \log_2(x+1)\log_2(y+1). \text{ Temos que mostrar que } D(x) \leq 0, \forall x \geq 1.$$

$$D(1) = \log_2(y+1) - \log_2(y+1) = 0.$$

$$D'(x) = \log_2 e \frac{y}{xy+1} - \log_2 e \frac{1}{x+1} \log_2(y+1) = \underbrace{\log_2 e \left(\frac{y}{xy+1} - \frac{1}{x+1} \log_2(y+1) \right)}_{>0}.$$

$$D'(x) \leq 0, \forall x \geq 1 \iff \frac{y}{xy+1} - \frac{1}{x+1} \log_2(y+1) \leq 0, \forall x \geq 1.$$

$$\frac{y}{xy+1} - \frac{1}{x+1} \log_2(y+1) \leq 0 \iff \frac{yx+y}{xy+1} \leq \log_2(y+1) \iff \frac{yx+1-1+y}{xy+1} \leq \log_2(y+1) \iff 1 + \frac{y-1}{xy+1} - \log_2(y+1) \leq 0.$$

Consideremos a função $F(x) = 1 + \frac{y-1}{xy+1} - \log_2(y+1)$. Vamos verificar que F é negativa.

$$F(1) = 1 + \frac{y-1}{y+1} - \log_2(y+1).$$

Precisamos verificar que a função $H(y) = 1 + \frac{y-1}{y+1} - \log_2(y+1) \leq 0, \forall y \geq 1$.

$$H(1) = 1 - \log_2 2 = 1 - 1 = 0.$$

$$H'(y) = \frac{(y+1)-(y-1)}{(y+1)^2} - \log_2 e \frac{1}{(y+1)} = \underbrace{\frac{1}{(y+1)}}_{>0} \left(\frac{2}{y+1} - \log_2 e \right).$$

$$H'(y) \leq 0 \iff \frac{2}{y+1} - \log_2 e \leq 0 \iff \frac{2}{y+1} \leq \log_2 e.$$

Sabemos que $\frac{2}{y+1} \leq 1 < \log_2 e$, logo $H'(y) \leq 0$ e assim H é decrescente, e como $H(1) = 0$ segue $H(y) \leq 0, \forall y \geq 1$. Sendo assim temos que $F(1) \leq 0$.

$$F'(x) = \frac{-(y-1)y}{(xy+1)^2} \leq 0. \text{ Portanto } F \text{ é decrescente e } F(x) \leq 0, \forall x \geq 1.$$

Como $F(x) \leq 0$ temos que $D'(x) \leq 0$, logo D é decrescente, e como $D(1) = 0$ segue que $D \leq 0, \forall x > 1$.

Desde que $f(x) = \log_2(x+1)$ satisfaz 1), 2), 3), 4), e 5) concluímos que $f \in \mathcal{F}$. ■

Observação 2.2 A função $\sqrt{f(x)} \in \mathcal{F}$.

De fato,

$$1) \text{ Claramente } \sqrt{f(1)} = 1.$$

Temos que $f(x) < x$ para todo $x > 1$, logo $\sqrt{f(x)} < \sqrt{x} \leq x$, para todo $x > 1$ pois $\sqrt{x} \leq x \iff x \leq x^2 \iff 1 \leq x$ que é o caso em que estamos trabalhando.

2) Como f é estritamente crescente e tende ao infinito temos que $\sqrt{f(x)}$ também satisfaz essas duas propriedades.

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^{2q}} \right)^{1/2} = 0, \forall q > 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2q}} = 0, \forall q > 0.$$

4) Vamos verificar que $F(x) = \frac{x}{\sqrt{\log_2(x+1)}}$ é concava, para isto demonstraremos que $F''(x) < 0, \forall x \geq 1$.

$$F'(x) = \frac{\sqrt{\log_2(x+1)} - x \left(\frac{\log_2 e}{2\sqrt{\log_2(x+1)}(x+1)} \right)}{\log_2(x+1)} = \frac{2(x+1)\log_2(x+1) - x\log_2 e}{2(x+1)(\log_2(x+1))^{3/2}}$$

$$F''(x) = \frac{-4(x+1)(\log_2(x+1))^{3/2} \log_2 e + 2x(\log_2(x+1))^{3/2} \log_2 e + 3x(\log_2(x+1))^{3/2} (\log_2 e)^2}{(2(x+1)(\log_2(x+1))^{3/2})^2}$$

$$F''(x) = \underbrace{\frac{\log_2 e (\log_2(x+1))^{1/2}}{2(x+1)(\log_2(x+1))^{3/2}}}_{>0} (-2x \log_2(x+1) - 4 \log_2(x+1) + 3x \log_2 e)$$

Consideremos $D(x) = -2x \log_2(x+1) - 4 \log_2(x+1) + 3x \log_2 e$.

$D(1) = -2 - 4 + 3 \log_2 e < 0$, pois $3 \log_2 e < 6$.

$$D'(x) = -2 \log_2(x+1) - \frac{2x \log_2 e}{x+1} - \frac{4 \log_2 e}{(x+1)^2} + 3 \log_2 e.$$

$$D'(x) = \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{>0} (-2x \log_2(x+1) - 2 \log_2(x+1) + x \log_2 e - \log_2 e).$$

Consideremos $H(x) = -2x \log_2(x+1) - 2 \log_2(x+1) + x \log_2 e - \log_2 e$.

$H(1) = -2 - 2 = -4$.

$$H'(x) = -2 \log_2(x+1) - \frac{2x \log_2 e}{x+1} - \frac{2 \log_2 e}{x+1} + \log_2 e.$$

$$H'(x) = \frac{-2x \log_2(x+1) - 2 \log_2(x+1) - x \log_2 e - \log_2 e}{x+1}.$$

Como o numerador da fração é negativo e o denominador é positivo temos que $H'(x) < 0$. Portanto H é negativa, $\forall x \geq 1$, e consequentemente D é negativa, $\forall x \geq 1$. Logo F'' é negativa $\forall x \geq 1$ e assim temos que F é concava.

5) Como $f(xy) \leq f(x)f(y)$ para qualquer $x, y \geq 1$ segue que $\sqrt{f(xy)} \leq \sqrt{f(x)f(y)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}$, $\forall x, y \geq 1$.

Por 1), 2), 3), 4) e 5) temos que $\sqrt{f(x)} \in \mathcal{F}$. ■

Observação 2.3 $\frac{x}{f(x)}$ é estritamente crescente.

De fato, seja $x < y$, $x, y \geq 1$

$$\frac{x}{f(x)} < \frac{y}{f(y)} \iff xf(y) < yf(x) \iff f(y) < \frac{y}{x}f(x), \text{ mas}$$

$$f(y) = f\left(\frac{y}{x}x\right) \leq f\left(\frac{y}{x}\right)f(x) < \frac{y}{x}f(x).$$

Analogamente temos que $\frac{x}{\sqrt{f(x)}}$ é estritamente crescente. ■

A seguir introduziremos os conceitos de função submultiplicativa, envoltória submultiplicativa e envoltória concava que serão utilizados para construirmos as funções da Observação 2.10.

Definição 2.4 Dizemos que uma função $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ é submultiplicativa se $f(xy) \leq f(x)f(y), \forall x, y \geq 1$.

Definição 2.5 Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$. A envoltória submultiplicativa de f é dada por $F(x) = \inf\{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k) : k \in \mathbb{N}, x_i \geq 1, x_1\dots x_k \geq x\}$.

Estudaremos agora algumas propriedades da envoltória submultiplicativa F .

1) F é não decrescente. De fato, se tomarmos $x_1 < x_2$ temos

$$F(x_1) = \inf\{f(x_{11})f(x_{12})\dots f(x_{1k}) : k \in \mathbb{N}, x_{1i} \geq 1, x_{11}\dots x_{1k} \geq x_1\}$$

$$F(x_2) = \inf\{f(x_{21})f(x_{22})\dots f(x_{2q}) : q \in \mathbb{N}, x_{2i} \geq 1, x_{21}\dots x_{2q} \geq x_2\}$$

Como $A = \{f(x_{11})f(x_{12})\dots f(x_{1k}) : k \in \mathbb{N}, x_{1i} \geq 1, x_{11}\dots x_{1k} \geq x_1\} \supset \{f(x_{21})f(x_{22})\dots f(x_{2q}) : q \in \mathbb{N}, x_{2i} \geq 1, x_{21}\dots x_{2q} \geq x_2\} = B$, segue que $\inf A \leq \inf B$.

2) $F(x) \leq f(x), \forall x \geq 1$.

$F(x) = \inf\{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k) : k \in \mathbb{N}, x_i \geq 1, x_1\dots x_k \geq x\}$ e como $x \geq x$ temos que $F(x) \leq f(x)$.

3) F é submultiplicativa.

Sejam $x, y \geq 1$, $F(x) = \inf\{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k) : k \in \mathbb{N}, x_i \geq 1, x_1\dots x_k \geq x\}$ e $F(y) = \inf\{f(y_1)f(y_2)\dots f(y_l) : l \in \mathbb{N}, y_i \geq 1, y_1\dots y_l \geq y\}$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $x_1\dots x_k$ tal que $x_1\dots x_k \geq x$ e $f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k) < F(x) + \epsilon$. (1)

Do mesmo modo, dado $\epsilon > 0$ existe $y_1\dots y_l$ tal que $y_1\dots y_l \geq y$ e $f(y_1)f(y_2)\dots f(y_l) < F(y) + \epsilon$. (2)

Por (1) e (2) temos $x_1\dots x_k y_1\dots y_l \geq xy, x_i \geq 1, y_i \geq 1, k, l \in \mathbb{N}$, logo $F(xy) \leq f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k)f(y_1)f(y_2)\dots f(y_l) < (F(x) + \epsilon)(F(y) + \epsilon)$, ou seja, $F(xy) < F(x)F(y) + \epsilon(F(x) + F(y) + \epsilon)$.

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos o desejado, isto é $F(xy) \leq F(x)F(y)$.

4) Se $g : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ é não decrescente submultiplicativa e dominada por f então g é também dominada por F , isto é, F é a maior função submultiplicativa não decrescente menor do que f .

De fato, sejam $x \geq 1$ e $x_1 \dots x_k \geq x$ então $g(x) \leq g(x_1 \dots x_k) \leq g(x_1) \dots g(x_k) \leq f(x_1) \dots f(x_k)$.

Logo $g(x) \leq F(x)$, pois $g(x)$ é menor do que qualquer elemento de $\{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k) : k \in \mathbb{N}, x_i \geq 1, x_1 \dots x_k \geq x\}$. Consequentemente $g(x)$ é menor do que o ínfimo deste conjunto.

Observação 2.6 Se A é um convexo de $\mathbb{R}^2$ tal que $\{y : (x, y) \in A\}$ é limitado inferiormente para todo x na projeção de A no eixo $0x$, segue da Observação 0.33 que a função f definida por $f(x) = \inf\{y : (x, y) \in A\}$ é convexa.

De fato, sejam x_1, x_2 na projeção de A no eixo $0x$, $0 \leq \lambda \leq 1$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ com $f(x_1) < y_1$ e $f(x_2) < y_2$. Então existem y'_1 e y'_2 tais que $(x_1, y'_1) \in A$ e $(x_2, y'_2) \in A$.

Portanto $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \inf\{y : (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) \in A\} \leq \lambda y'_1 + (1 - \lambda)y'_2 < \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. ■

Observação 2.7 Sejam $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ e A_f o epigráfico de f . Pela Observação anterior a função F definida por $F(x) = \inf\{y : (x, y) \in \text{convexificado de } A_f\}$ é convexa e é chamada de envoltória convexa de f .

Segue imediatamente da definição acima que $F(x) = \{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\}$.

Sejam $g : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ e F a envoltória convexa de g . A envoltória concava de g é a função concava definida por $G(x) = -F(x)$, ou seja $G(x) = \sup\{\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + \dots + \lambda_n g(x_n) : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\}$.

A envoltória concava de g é a menor função concava $G : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ dominando g . De fato,

1) Demonstraremos que a envoltória concava de g domina g .

Como $x = 1x$, temos que $g(x) \leq G(x)$.

2) Demonstraremos agora que a envoltória concava de g é a menor função concava dominando g , ou seja, se f é concava e $g(x) \leq f(x), \forall x \geq 1$ então $G(x) \leq f(x) \forall x \geq 1$.

$$\text{Seja } x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + \dots + \lambda_n g(x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \leq f(x).$$

Portanto $G(x) \leq f(x)$, pois qualquer elemento de $\{\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + \dots + \lambda_n g(x_n) : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\}$ é menor do que $f(x)$, conseqüentemente o supremo deste conjunto também é menor do que $f(x)$.

Definição 2.8 Dizemos que uma função $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ é *supermultiplicativa* se $f(xy) \geq f(x)f(y), \forall x, y \geq 1$.

Lema 2.9 Se $g : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ é uma função *supermultiplicativa*, então sua envoltória concava também é *supermultiplicativa*.

Demonstração:

Sejam $\epsilon > 0$. $x_1, x_2 \geq 1$ e G a envoltória concava de g . Primeiro mostraremos que $(G(x_1) - \epsilon) \times (G(x_2) - \epsilon) \leq G(x_1 x_2)$. Existe λ_i, μ_i, y_i e $z_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ tais que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^n \mu_i = 1, x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n, x_2 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n,$
 $\lambda_1 g(y_1) + \lambda_2 g(y_2) + \dots + \lambda_n g(y_n) \geq G(x_1) - \epsilon$ e $\mu_1 g(z_1) + \mu_2 g(z_2) + \dots + \mu_n g(z_n) \geq G(x_2) - \epsilon$.

Então,

$$(G(x_1) - \epsilon)(G(x_2) - \epsilon) \leq \lambda_1 \mu_1 g(y_1)g(z_1) + \dots + \lambda_1 \mu_n g(y_1)g(z_n) + \lambda_2 \mu_1 g(y_2)g(z_1) + \dots + \lambda_2 \mu_n g(y_2)g(z_n) + \dots + \lambda_n \mu_1 g(y_n)g(z_1) + \dots + \lambda_n \mu_n g(y_n)g(z_n) \leq \lambda_1 \mu_1 g(y_1 z_1) + \dots + \lambda_1 \mu_n g(y_1 z_n) + \lambda_2 \mu_1 g(y_2 z_1) + \dots + \lambda_2 \mu_n g(y_2 z_n) + \dots + \lambda_n \mu_1 g(y_n z_1) + \dots + \lambda_n \mu_n g(y_n z_n) = \lambda_1 (\mu_1 g(y_1 z_1) + \dots + \mu_n g(y_1 z_n)) + \lambda_2 (\mu_1 g(y_2 z_1) + \dots + \mu_n g(y_2 z_n)) + \dots + \lambda_n (\mu_1 g(y_n z_1) + \dots + \mu_n g(y_n z_n)) \leq \lambda_1 G(y_1 x_2) + \lambda_2 G(y_2 x_2) + \dots + \lambda_n G(y_n x_2) \leq G(x_1 x_2), \text{ pois}$$

$$\mu_1 y_n z_1 + \mu_2 y_n z_2 + \dots + \mu_n y_n z_n = y_n (\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n) = y_n x_2, \lambda_1 y_1 x_2 + \lambda_2 y_2 x_2 + \dots + \lambda_n y_n x_2 = x_2 (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n) = x_1 x_2 \text{ e } G \text{ é concava.}$$

Portanto $(G(x_1) - \epsilon)(G(x_2) - \epsilon) \leq G(x_1 x_2)$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos $G(x_1)G(x_2) \leq G(x_1 x_2)$. ■

Passaremos agora a construir algumas funções e estudar suas propriedades utilizando as definições anteriores.

Estas funções que construiremos serão utilizadas em alguns Lemas dos capítulos posteriores, por exemplo, ϕ será usada nos Lemas 4.12 e 4.13 e h e H serão usadas no Lema 4.12.

Observação 2.10 *Sejam K_0 um subconjunto dos naturais e $f(x) = \log_2(x+1)$. Definimos*

a) $\phi : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} (\log_2(x+1))^{1/2}, & x \in K_0 \\ \log_2(x+1), & x \notin K_0 \end{cases}$$

b) *Seja h a envoltória submultiplicativa de ϕ , logo $h \leq \phi$. (I)*

c) *Seja $H(x) = \frac{x}{h(x)}$ (podemos dividir por h , porque h é o ínfimo de um conjunto cujos elementos são maiores ou iguais a 1).*

Como h é submultiplicativa temos que H é supermultiplicativa.

De fato, se $x_1, x_2 \geq 1$ temos que $h(x_1)h(x_2) \geq h(x_1x_2)$ e portanto $H(x_1x_2) = \frac{x_1x_2}{h(x_1x_2)} \geq \frac{x_1}{h(x_1)} \frac{x_2}{h(x_2)} = H(x_1)H(x_2)$.

d) *Seja G a envoltória concava de H , logo pela definição de envoltória concava temos $H \leq G$ (II).*

Pelo Lema 2.9 G também é supermultiplicativa.

e) *Seja $g(x) = \frac{x}{G(x)}$, então g é submultiplicativa. De fato, como G é supermultiplicativa temos que $g(xy) = \frac{xy}{G(xy)} \leq \frac{xy}{G(x)G(y)} = \frac{x}{G(x)} \frac{y}{G(y)} = g(x)g(y)$.*

Lema 2.11 *Sejam g e ϕ as funções definidas acima então $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq g(x) \leq \phi(x) \leq \log_2(x+1)$.*

Demonstração

1) $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq g(x)$.

De fato, pela definição de ϕ temos que $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq \phi(x)$. Como h é a maior função submultiplicativa que é dominada por ϕ temos $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq h(x)$.

$$\text{Assim } \frac{x}{h(x)} \leq \frac{x}{(\log_2(x+1))^{1/2}}, \text{ logo } H(x) \leq \frac{x}{(\log_2(x+1))^{1/2}}.$$

Como G é a envoltória concava de H e $\frac{x}{(\log_2(x+1))^{1/2}}$ é concava, segue que $G(x) \leq \frac{x}{(\log_2(x+1))^{1/2}}$, logo $\frac{x}{G(x)} \geq (\log_2(x+1))^{1/2}$. Portanto $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq g(x)$.

$$2) g(x) \leq \phi(x).$$

$$\text{De fato, } g(x) = \frac{x}{G(x)} \leq \frac{x}{H(x)} \text{ por (II) e } \frac{x}{H(x)} = h(x) \leq \phi(x) \text{ por (I).}$$

$$3) \phi(x) \leq \log_2(x+1).$$

Segue da definição de ϕ . ■

Observação 2.12 A função $g \in \mathcal{F}$.

De fato,

1) Pelo Lema anterior temos que $(\log_2(x+1))^{1/2} \leq g(x) \leq \log_2(x+1)$. Então $(\log_2(1+1))^{1/2} \leq g(1) \leq \log_2(1+1)$, ou seja, $1 \leq g(1) \leq 1$. Portanto $g(1) = 1$. Como $g(x) \leq \log_2(x+1) < x, \forall x > 1$ temos que $g(x) < x, \forall x > 1$.

$$2) g(x) \geq (\log_2(x+1))^{1/2} \text{ e como } (\log_2(x+1))^{1/2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ temos que } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Seja $x_1 < x_2$ queremos provar que $g(x_1) < g(x_2)$, ou seja, $g(x_1) - g(x_2) < 0$. Sabemos que $f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) \leq f(x_1)$ e $g(x_2) \leq f(x_2)$ logo $g(x_1) - g(x_2) \leq f(x_1) - f(x_2) < 0$.

Portanto $g(x_1) < g(x_2)$ para $x_1 < x_2$, logo $g(x)$ é estritamente crescente.

$$3) \frac{(f(x))^{1/2}}{x^q} \leq \frac{g(x)}{x^q} \leq \frac{f(x)}{x^q} \text{ logo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^{1/2}}{x^q} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^q} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^q}. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^{1/2}}{x^q} = 0, \forall q > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^q} = 0, \forall q > 0 \text{ segue que } 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^q} \leq 0, \forall q > 0, \text{ ou seja } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^q} = 0, \forall q > 0.$$

$$4) \frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\frac{x}{G(x)}} = x \frac{G(x)}{x} = G(x) \text{ que é concava.}$$

$$5) g \text{ é submultiplicativa.}$$

Por estas propriedades temos que $\frac{x}{g(x)}$ é estritamente crescente. ■

Observação 2.13 Sabemos que G está definida no intervalo $[1, +\infty)$. Vamos agora estender G para $\mathbb{R}_+$, colocando $G(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$. Seja $\overline{G}$ essa extensão, então vamos demonstrar que $\overline{G}$ é concava, supermultiplicativa e crescente.

1) $\overline{G}$ é supermultiplicativa.

De fato, se x_1 e x_2 estão no intervalo $[0, 1]$ então $\overline{G}(x_1 x_2) = x_1 x_2 = \overline{G}(x_1) \overline{G}(x_2)$.

Se x_1 e x_2 estão no intervalo $[1, +\infty)$ então, $\overline{G}(x_1 x_2) = G(x_1 x_2) \geq G(x_1) G(x_2) = \overline{G}(x_1) \overline{G}(x_2)$.

Se $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2$, vamos estudar dois casos.

caso 1: $x_1 x_2 \leq 1$

$$\overline{G}(x_1 x_2) = x_1 x_2, \overline{G}(x_1) = x_1, \overline{G}(x_2) = G(x_2).$$

$x_1 x_2 \geq x_1 G(x_2) \iff x_2 \geq G(x_2)$ o que é verdade, pois $g \in \mathcal{F}, g(x) = \frac{x}{G(x)} \geq 1$ logo $G(x) \leq x$. Portanto $\overline{G}(x_1 x_2) \geq \overline{G}(x_1) \overline{G}(x_2)$.

caso 2: $x_1 x_2 > 1$

$$\overline{G}(x_1 x_2) = G(x_1 x_2) = \frac{x_1 x_2}{g(x_1 x_2)}, \overline{G}(x_1) = x_1 \text{ e } \overline{G}(x_2) = G(x_2) = \frac{x_2}{g(x_2)}.$$

Temos que mostrar que $\frac{x_1 x_2}{g(x_1 x_2)} \geq \frac{x_1 x_2}{g(x_2)}$, isto é, $g(x_2) \geq g(x_1 x_2)$. Mas $x_1 x_2 \leq x_2$ e como g é crescente temos $g(x_1 x_2) \leq g(x_2)$. Portanto $\overline{G}(x_1 x_2) \geq \overline{G}(x_1) \overline{G}(x_2)$.

Assim temos que $\overline{G}$ é supermultiplicativa.

2) $\overline{G}$ é concava.

De fato, se x_1 e x_2 estão no intervalo $[1, +\infty)$ então temos,

$$\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda G(x_1) + (1 - \lambda)G(x_2) = \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2).$$

Se x_1 e x_2 estão no intervalo $[0, 1]$ então,

$$\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2).$$

Se $0 < x_1 \leq 1 < x_2$, quero mostrar que $\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2)$.

caso 1: $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq 1$

$$\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \overline{G}(x_1) = x_1, \overline{G}(x_2) = G(x_2).$$

$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \geq \lambda x_1 + (1 - \lambda)G(x_2) \iff (1 - \lambda)x_2 \geq (1 - \lambda)G(x_2) \iff x_2 \geq G(x_2)$, o que é verdade pois $g(x) = \frac{x}{G(x)} \geq 1$ logo $G(x) \leq x$.

Portanto $\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2)$.

caso 2: $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 > 1$

$$\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \frac{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}{g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)}, \overline{G}(x_1) = x_1, \overline{G}(x_2) = G(x_2).$$

Temos que mostrar que $\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2)$.

Sejam $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $y_1 = r(x)$ e $y_2 = s(x)$ as retas passando respectivamente pelos pontos $(x_1, x_1), (x_2, G(x_2))$ e $(1, 1), (x_2, G(x_2))$. Como G é concava, temos que $s(x_3) < G(x_3)$ e como $x_1 < 1$, temos $r(x_3) < s(x_3)$ logo $r(x_3) < G(x_3)$. Ou seja, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)G(x_2) < G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, assim $\lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2) < \overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$.

Portanto $\overline{G}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \overline{G}(x_1) + (1 - \lambda)\overline{G}(x_2)$. Assim temos que $\overline{G}$ é concava.

3) $\overline{G}$ é crescente.

De fato, se x_1 e x_2 estão em $[0, 1]$ então sejam $x_1 < x_2$ logo $G(x_1) < G(x_2)$, pois $G(x_1) = x_1 < x_2 = G(x_2)$.

Se x_1 e x_2 estão em $[1, +\infty)$ então temos que $\overline{G} = G$ e G é crescente.

Se $0 \leq x_1 \leq 1 \leq x_2$, $\overline{G}(x_1) = x_1, \overline{G}(x_2) = G(x_2) = \frac{x_2}{g(x_2)}$.
 $x_1 < \frac{x_2}{g(x_2)} \iff x_1 g(x_2) < x_2$ mas $x_1 g(x_2) < x_1 x_2 < x_2$.

Portanto temos que se $x_1 < x_2$ então $\overline{G}(x_1) < \overline{G}(x_2)$, ou seja, $\overline{G}$ é crescente. ■

Capítulo 3

O espaço de Thomas Schlumprecht

Inicialmente apresentaremos uma condição suficiente para que um espaço normado separável possa ser renormado de tal maneira que ele não contenha nenhuma sequência básica C -incondicional onde $C \in \mathbb{R}$, $C > 1$ é pré-fixado (Veja Teorema 3.3).

Esta condição foi obtida por Gowers e Maurey, [11], e eles próprios mostraram que o espaço de Thomas Schlumprecht a satisfaz (Veja Teorema 3.22 e Corolário 3.23).

No entanto, neste capítulo, estudaremos o espaço de Thomas Schlumprecht não só por ter a propriedade acima citada, mas também por ter inspirado a construção do espaço de Gowers e Maurey que será apresentada no próximo capítulo.

A teoria apresentada neste capítulo pode ser encontrada em [11].

3.1 Conjuntos assintóticos

Antes de provarmos o Teorema 3.3 precisaremos de duas definições.

Seja X um espaço normado e seja $S(X)$ sua esfera unitária, isto é $S(x) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Definição 3.1 *Um subconjunto $A \subset S(X)$ é assintótico se $A \cap S(Y) \neq \emptyset$ para todo subespaço de dimensão infinita Y de X .*

Definição 3.2 Dizemos que uma sequência $(A_n)_n$ de subconjuntos de $S(X)$ e uma sequência de subconjuntos $(A_n^*)_n$ de $B(X^*)$ formam um sistema biortogonal assintótico com constante δ se as seguintes condições são satisfeitas :

- a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto A_n é assintótico.
- b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in A_n$, existe $x^* \in A_n^*$ tal que $x^*(x) > 1 - \delta$.
- c) Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, todo $x \in A_n$, e todo $x^* \in A_m^*$ tem-se $|x^*(x)| < \delta$.

Teorema 3.3 Sejam $0 < \delta < 1/100$ e X um espaço normado separável contendo um sistema biortogonal assintótico com constante δ . Então existe uma norma equivalente em X tal que nenhuma sequência é $1/\sqrt{100\delta}$ -incondicional.

Demonstração:

Seja $\|\cdot\|$ a norma original de X , e sejam $(A_n)_n$ e $(A_n^*)_n$ um sistema biortogonal assintótico com constante δ . Para cada n vamos construir um subconjunto enumerável Z_n^* de A_n^* , tal que para todo $x \in A_n$ existe $x^* \in Z_n^*$ com $x^*(x) > 1 - 2\delta$, da seguinte maneira.

X é separável e os A_n 's são subconjuntos de X , logo os A_n 's também são separáveis. Seja $\{d_i\}_i$ denso em A_n . Para cada i existe $x_i^* \in A_n^*$ tal que $x_i^*(d_i) > 1 - \delta$. Consideremos $Z_n^* = \{x_i^*\}_i$, logo $Z_n^* \subset A_n^*$ e é enumerável.

Temos também que $\forall x \in A_n$, $\exists x^* \in Z_n^*$ tal que $x^*(x) > 1 - 2\delta$, pois se $x \in A_n$, como $\{d_i\}_i$ é denso em A_n existe $(d_{i_j})_j$ tal que $\|x - d_{i_j}\| < \delta$.

Consideremos $x_i^* \in Z_n^*$ e calculemos o valor de $x_i^*(x)$.
 $|x_i^*(x) - x_i^*(d_{i_j})| = |x_i^*(x - d_{i_j})| \leq \|x_i^*\| \|x - d_{i_j}\| \leq \|x - d_{i_j}\| < \delta$, pois $\|x_i^*\| \leq 1$.

Portanto temos $-\delta < x_i^*(x) - x_i^*(d_{i_j}) < \delta$, logo $x_i^*(d_{i_j}) - \delta < x_i^*(x) < x_i^*(d_{i_j}) + \delta$.

Assim $x_i^*(x) > x_i^*(d_{i_j}) - \delta > 1 - \delta - \delta = 1 - 2\delta$, como queríamos.

Sejam $Z^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^*$ e σ uma função injetora,

$$\sigma : \tau \longrightarrow \mathbb{N},$$

onde τ é a coleção de sequências finitas de Z^* (σ existe porque τ é enumerável).

Agora definiremos uma coleção de funcionais lineares contínuos que chamaremos de funcionais especiais. Uma sequência especial de funcionais de comprimento r é uma

sequência da forma $z_1^*, z_2^*, \dots, z_r^*$ onde $z_1^* \in Z_1^*$ e para $1 \leq i < r$, $z_{i+1}^* \in Z_{\sigma(z_1^*, \dots, z_i^*)}^*$.

Um funcional especial de comprimento r é simplesmente a soma de uma sequência especial de comprimento r . Denotaremos por Γ_r a coleção dos funcionais especiais de comprimento r .

Vamos definir agora uma nova norma em X da seguinte forma. Seja $r = \lfloor \delta^{-1/2} \rfloor$, ou seja r será igual a parte inteira de $\delta^{-1/2}$, e definamos $||| \cdot |||$ por

$$|||x||| = \max\{\|x\|, r \max\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\}\}.$$

As normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ são equivalentes. De fato, para cada $x \in X$, temos que $|||x||| = \|x\|$ ou $|||x||| = r \max\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\}$.

Mas $r \max\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} \leq r \cdot r \|x\| = r^2 \|x\|$, pois $|z^*(x)| \leq \|z^*\| \|x\| \leq r \|x\|$.

Logo $|||x||| \leq r^2 \|x\|$, pois $r \geq 1$ (na verdade $r \geq 10$) e pela definição da norma temos $|||x||| \geq \|x\|$ portanto $\|x\| \leq |||x||| \leq r^2 \|x\|$.

Seja $(x_i)_i$ uma sequência qualquer de vetores linearmente independentes em X . Vamos mostrar que essa sequência não é $(r-2)/5$ -incondicional na norma $|||\cdot|||$.

Faremos isto construindo uma sequência de vetores $z_1, \dots, z_r$ gerados por $(x_i)_i$ e tais que os vetores que geram z_1 não geram os demais $z_{i's}$ e assim por diante, com a propriedade de que $(r-2) ||| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i ||| < 5 ||| \sum_{i=1}^r z_i |||$.

Com isto teremos provado o teorema, pois $(x_i)_i$ não será $(r-2)/5$ -incondicional uma vez que $||| \sum \varepsilon_n a_n x_n ||| \geq (r-2)/5 ||| \sum a_n x_n |||$, $\forall (a_n)_n$ e $\forall (\varepsilon_n)_n$ de módulo no máximo um, e como veremos abaixo $(r-2)/5 > 1/\sqrt{100\delta}$ logo $(x_i)_i$ não será $1/\sqrt{100\delta}$ -incondicional.

Primeiro vamos verificar que $(r-2)/5 > 1/\sqrt{100\delta}$.

Sabemos que $\frac{1}{\sqrt{\delta}} < r+1$, logo $\frac{1}{10\sqrt{\delta}} < \frac{r+1}{10}$. Então basta demonstrarmos que $\frac{r+1}{10} < \frac{r-2}{5}$ e teremos o desejado.

$\frac{r+1}{10} < \frac{r-2}{5} \iff 5r+5 < 10r-20 \iff r > 5$, o que é verdadeiro.

Passaremos, agora, a construção dos $z_{i's}$. Seja X_1 o subespaço algébrico gerado por $(x_i)_i$ em X . Como A_1 é assintótico, podemos achar $z_1 \in A_1 \cap X_1$. Isto implica que z_1 tem norma 1 e é combinação linear de um número finito de $x_{i's}$.

Em seguida escolhemos, como provamos acima, $z_1^* \in Z_1^*$ tal que $z_1^*(z_1) > 1 - 2\delta$. Agora seja X_2 o subespaço algébrico gerado por todos os $x_{i's}$ não usados na combinação linear de z_1 . Como $A_{\sigma(z_1^*)}$ é assintótico podemos achar $z_2 \in A_{\sigma(z_1^*)} \cap X_2$ de norma 1. Novamente escolhemos $z_2^* \in Z_{\sigma(z_1^*)}^*$ tal que $z_2^*(z_2) > 1 - 2\delta$. Continuando este processo, nós obtemos as seqüências $z_1, \dots, z_r$ e $z_1^*, \dots, z_r^*$ com as seguintes propriedades:

- 1) $\|z_i\| = 1$ para cada i .
- 2) $z_1^* \in Z_1^*$ e $z_{i+1}^* \in Z_{\sigma(z_1^*, \dots, z_i^*)}^*$ para $1 \leq i < r$, isto é, $z_1^*, \dots, z_r^*$ é uma seqüência especial de funcionais de comprimento r .
- 3) $z_i^*(z_i) > 1 - 2\delta$ para cada i .
- 4) Como σ é injetora, os $z_{i's}$ pertencem a diferentes $A_{n's}^*$ e portanto $|z_i^*(z_j)| < \delta < 2\delta$, quando $i \neq j$.

Estimaremos agora em a) o valor de $\|\sum_{i=1}^r z_i\|$ e depois em b) o valor de $\|\sum_{i=1}^r (-1)^i z_i\|$.

$$a) \|\sum_{i=1}^r z_i\| \geq r \max\{|z^*(\sum_{i=1}^r z_i)| : z^* \in \Gamma_r\} \geq r|z^*(\sum_{i=1}^r z_i)| \geq rz^*(\sum_{i=1}^r z_i).$$

Como $z_1^*, \dots, z_r^*$ é uma seqüência especial de funcionais de comprimento r , podemos tomar $z^* = \sum_{i=1}^r z_i^*$ logo,

$$\|\sum_{i=1}^r z_i\| \geq r(\sum_{i=1}^r z_i^*)(\sum_{i=1}^r z_i) = r(\sum_{i=1}^r z_i^*)(\sum_{i=1}^r z_i) > r(r(1 - 2\delta) - 2\delta r(r - 1)) = r(r - 2\delta r^2) \geq r(r - 2), \text{ pois } r - 2\delta r^2 \geq r - 2 \iff \delta r^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1/\delta \iff r \leq 1/\sqrt{\delta}, \text{ o que é verdadeiro.}$$

b) Seja $(w_i^*)_{i=1}^r$ uma seqüência especial de comprimento r qualquer e seja t o maior dos índices i tal que $w_i^* = z_i^*$ ou t igual a zero se $w_1^* \neq z_1^*$. Então,

$$|\sum_{i=1}^r (-1)^i w_i^*(z_i)| \leq |\sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i)| + |w_{t+1}^*(z_{t+1})| + \sum_{i=t+2}^r |w_i^*(z_i)|.$$

A seguir obteremos uma majoração para cada um dos três somandos do segundo membro da desigualdade.

I) Como σ é injetora, w_i^* e z_j^* são escolhidos de diferentes A_n^* quando $i \neq j$ ou $i = j > t + 1$. Pela propriedade (c) da definição de conjuntos assintóticos temos $|w_i^*(z_j)| < \delta < 2\delta$. Em particular, $\sum_{i=t+2}^r |w_i^*(z_i)| < 2\delta(r - (t + 2)) < 2\delta r$.

II) Quando $i \leq t$ nós sabemos que $1 - 2\delta < w_i^*(z_i) \leq 1$ (*). Explicitando a somatória abaixo temos,

$$\left| \sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i) \right| = | -w_1^*(z_1) + w_2^*(z_2) - w_3^*(z_3) + \dots + (-1)^t w_t^*(z_t) | \text{ então usando (*)}$$

obtemos $-w_i^*(z_i) + w_j^*(z_j) \leq 2\delta - 1 + 1 = 2\delta$.

Não sabemos se o número de somandos é par ou ímpar, por isso vamos estudar os dois casos.

1) o número de somandos, t , é par

$$\left| \sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i) \right| \leq t/2.2\delta = \delta t < 1 + t\delta.$$

2) o número de somandos, t , é ímpar

$$\left| \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^i w_i^*(z_i) \right| + |w_t^*(z_t)| \leq 1 + (t-1)/2.2\delta \leq 1 + t\delta.$$

De 1) e 2) segue que $\left| \sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i) \right| \leq 1 + \delta t$.

$$\text{III) } |w_{t+1}^*(z_{t+1})| \leq \|w_{t+1}^*\| \|z_{t+1}\| \leq 1.$$

Por I), II) e III) temos $\left| \sum_{i=1}^r (-1)^i w_i^*(z_i) \right| \leq 1 + \delta t + 1 + 2\delta r \leq 1 + \delta r + 1 + 2\delta r = 2 + 3\delta r$.

Temos que $\sum_{i \neq j} |w_i^*(z_j)| \leq 2\delta r(r-1)$, pois temos r $w_{i_s}^*$ e r $z_{j'_s}$ e $|w_i^*(z_j)| < \delta < 2\delta$.

Pela desigualdade triangular temos $\left\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \right\| \leq \sum_{i=1}^r \|(-1)^i z_i\| =$

$$\sum_{i=1}^r \|(-1)^i\| \|z_i\| = r, \text{ pois } \|z_i\| = 1 \ \forall i.$$

Pela definição de $\| \cdot \|$ e pelas estimativas acima temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \right\| \leq r \text{ ou } \left\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \right\| = r \max \left\{ \left| \left(\sum_{i=1}^r w_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \right) \right| : \right. \\ &\left. \left(\sum_{i=1}^r w_i^* \right) \in \Gamma_r \right\} \leq r \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^r (-1)^i w_i^*(z_i) \right| + \sum_{i \neq j} |w_i^*(z_j)| : \left(\sum_{i=1}^r w_i^* \right) \in \Gamma_r \right\} \leq \\ &r(2 + 3\delta r + 2\delta r(r-1)). \end{aligned}$$

Nos dois casos temos que

$$\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \| \leq r(2 + 3\delta r + 2\delta r(r-1)) = r(2 + 3\delta r + 2\delta r^2 - 2\delta r) = r(2 + \delta r + 2\delta r^2).$$

Como $r \leq 1/\sqrt{\delta}$ temos que $\delta r < 1/10 < 1$ e $\delta r^2 < 1$, logo $\| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \| < r(2 + 1 + 2) < 5r$.

Sendo assim $(r-2) \| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \| < 5r(r-2)$ e como $\| \sum_{i=1}^r z_i \| \geq r(r-2)$ segue que $(r-2) \| \sum_{i=1}^r (-1)^i z_i \| < 5 \| \sum_{i=1}^r z_i \|$. ■

3.2 O espaço de Schlumprecht

Depois de termos apresentado no Teorema 3.3 uma condição suficiente para que um espaço de Banach separável possa ser renormado de forma a não conter nenhuma sequência básica C-incondicional com $C \in \mathbb{R}$, $C > 1$, pré-fixado apresentaremos um espaço de Banach que satisfaz esta condição.

Esse espaço foi construído em 1991 por Schlumprecht, [22], e é uma construção “tipo Tsirelson” por ser definido indutivamente de maneira análoga ao espaço T de Tsirelson, capítulo 1, como veremos a seguir.

Consideremos $\mathcal{F}$ a classe de funções definida no capítulo anterior e $f(x) = \log_2(x+1)$.

Em c_{00} definimos por indução em $k \in \mathbb{N}$ a norma $|\cdot|_k$.

Para $x \in c_{00}$, seja $|x|_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Assumindo que $|x|_k$ está definida para $k \in \mathbb{N}$ colocamos,

$$|x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k,$$

onde o máximo é tomado sobre todas as sequências de subconjuntos $E_i \subset \mathbb{N}$ tais que $E_1 < E_2 < \dots < E_l$.

Claramente $|x|_0$ é norma em c_{00} .

Agora assumiremos que $|\cdot|_k$ é norma em c_{00} e provaremos que $|\cdot|_{k+1}$ também é norma em c_{00} . De fato, sejam x e y elementos de c_{00} .

$$1) |x|_{k+1} \geq 0, \text{ pois } |x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \geq 0.$$

$$|x|_{k+1} = 0 \iff \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k = 0 \iff |E_i(x)|_k = 0 \quad \forall i \iff x = 0.$$

$$2) |\lambda x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(\lambda x)|_k = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |\lambda E_i(x)|_k = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |\lambda| |E_i(x)|_k = |\lambda| \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k = |\lambda| |x|_{k+1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3) |x + y|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x + y)|_k = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x) + E_i(y)|_k \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l (|E_i(x)|_k + |E_i(y)|_k) \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k + \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(y)|_k = |x|_{k+1} + |y|_{k+1}.$$

Por 1), 2) e 3) temos que $|x|_{k+1}$ é norma em c_{00} para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Estudaremos agora algumas propriedades de $|\cdot|_k$.

1) $(|x|_k)_k$ é crescente para qualquer $x \in c_{00}$.

De fato, $|x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k$, fazendo $l = 1$ e $E_1 = \text{ran}(x)$ temos que $|x|_{k+1} \geq \frac{1}{f(1)} |E_1(x)|_k = |x|_k$.

Portanto temos que $|x|_{k+1} \geq |x|_k$ para qualquer $x \in c_{00}$.

2) $|x|_k \leq \|x\|_{l_1}$ para qualquer $x \in c_{00}$ e $k \in \mathbb{N}$.

De fato, $|x|_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_{l_1}$.

Suponhamos que $|x|_k \leq \|x\|_{l_1}$. Vamos provar que $|x|_{k+1} \leq \|x\|_{l_1}$.

$$|x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \|x\|_{l_1}.$$

Finalmente definimos, para $x \in c_{00}$, $\|x\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |x|_k$. É claro que $\|\cdot\|$ é uma norma em c_{00} . O completado de c_{00} com essa norma é o espaço de Thomas Schlumprecht que

denotaremos por TS .

Apresentaremos agora alguns resultados relativos a norma do espaço (Observação 3.4 e Proposição 3.5) que serão úteis na verificação dos Lemas obtidos por Gowers e Maurey para o espaço de Thomas Schlumprecht.

Esses Lemas permitirão demonstrar o Teorema abaixo:

Teorema Seja $\delta \in \mathbb{R}, 0 < \delta < 1$. Então existe no espaço de Thomas Schlumprecht um sistema biortogonal assintótico com constante δ .

Observação 3.4 O máximo de $(|x|_k)_k$ é assumido .

De fato, por definição $|x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k$ para qualquer $x \in c_{00}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Então o máximo da definição de $|x|_{k+1}$ é assumido para $l = 1$ e neste caso teremos $|x|_{k+1} = |x|_k$ ou o máximo é assumido para $l \geq 2$.

Suponha que para algum $x \in c_{00}$ o máximo de $(|x|_k)_k$ não exista, logo $|x|_1 < |x|_2 < |x|_3 < \dots$ e portanto o máximo na definição de $|x|_{k+1}$ não é assumido quando $l = 1$, para qualquer k . Afirmação, neste caso, $|x|_{k+1} \leq \frac{1}{f(2)^k} \|x\|_{l_1}$.

Faremos a demonstração por indução em k .

Para $k = 0$,

$$|x|_1 = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_0 \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_0 \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \|x\|_{l_1}.$$

Portanto $|x|_1 \leq \frac{1}{f(2)^0} \|x\|_{l_1}$.

Para $k = 1$,

$$|x|_2 = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_1 \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(2)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_1 = \frac{1}{f(2)} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_1 \leq \frac{1}{f(2)} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \frac{1}{f(2)} \|x\|_{l_1}.$$

Agora suponhamos que $|x|_k \leq \frac{1}{f(2)^k} \|x\|_{l_1}$, vamos provar que vale para $k + 1$.

$$|x|_{k+1} = \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \leq \max_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{f(2)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k = \frac{1}{f(2)} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \leq \frac{1}{f(2)} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \frac{1}{f(2)^k} \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \frac{1}{f(2)^{k+1}} \|x\|_{l_1}.$$

$$\leq \frac{1}{f(2)} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \frac{1}{f(2)^k} \|E_i(x)\|_{l_1} = \frac{1}{f(2)^{k+1}} \max_{l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|_{l_1} \leq \frac{1}{f(2)^{k+1}} \|x\|_{l_1}.$$

Portanto $|x|_k \leq \frac{1}{f(2)^k} \|x\|_{l_1}$ para qualquer k e $x \in c_{00}$ (*).

Mas (*) implica que $|x|_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, absurdo, pois $(|x|_k)_k$ é uma sequência positiva e estritamente crescente. ■

Proposição 3.5 *Seja TS o espaço de Thomas Schlumprecht.*

a) $(e_i)_i$ é base 1-incondicional para TS .

b) Para $x \in TS$ tem-se

$$\|x\| = \max\{|x|_0, \sup_{l \geq 2} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|\},$$

onde o máximo é tomado sobre todas as sequências de subconjuntos $E_i \subset \mathbb{N}$ tais que $E_1 < E_2 < \dots < E_l$ e $|x|_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ para $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in TS$.

Demonstração:

a) Faremos a demonstração em 4 partes.

1) $\|e_i\| = 1, \forall i$.

De fato, pela propriedade 1) da norma temos $1 = |e_i|_0 \leq |e_i|_1 \leq \dots$, ou seja, $1 \leq |e_i|_k$, $\forall k$ e pela propriedade 2) da norma temos $|e_i|_k \leq \|e_i\|_{l_1} = 1, \forall k$. Portanto $|e_i|_k = 1, \forall k$, conseqüentemente $\|e_i\| = 1, \forall i$.

2) $(e_i)_i$ é sequência básica.

Pelo Teorema 0.3 é suficiente mostrarmos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|$$

para qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$ e inteiros $m < n$.

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right|_0 = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = \left| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right|_0.$$

Suponhamos que $\left| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right|_k \leq \left| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right|_k, \forall (a_n)_n$ e $m < n$. Provaremos que

$$|\sum_{i=1}^m a_i e_i|_{k+1} \leq |\sum_{i=1}^n a_i e_i|_{k+1}.$$

$$|\sum_{i=1}^m a_i e_i|_{k+1} = \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i=1}^m a_i e_i)|_k \leq \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i=1}^n a_i e_i)|_k \text{ pela hipótese de indução, mas } \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i=1}^n a_i e_i)|_k = |\sum_{i=1}^n a_i e_i|_{k+1}.$$

$$\text{Portanto } |\sum_{i=1}^m a_i e_i|_k \leq |\sum_{i=1}^n a_i e_i|_k \quad \forall k, \forall (a_n)_n \text{ e } m < n.$$

$$\text{Assim } \max_k |\sum_{i=1}^m a_i e_i|_k \leq \max_k |\sum_{i=1}^n a_i e_i|_k, \text{ ou seja, } \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|.$$

3) $(e_i)_i$ gera TS .

Demonstração análoga a do espaço de Schreier.

4) $(e_i)_i$ é 1-incondicional para TS .

Pelo Teorema 0.5, basta verificarmos que

$$\|\sum_{i \in A} a_i e_i\| \leq \|\sum_{i \in B} a_i e_i\|$$

onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

$$|\sum_{i \in A} a_i e_i|_0 = \max_{i \in A} |a_i| \leq \max_{i \in B} |a_i| = |\sum_{i \in B} a_i e_i|_0.$$

Suponhamos que $|\sum_{i \in A} a_i e_i|_k \leq |\sum_{i \in B} a_i e_i|_k$, onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$. Vamos demonstrar que $|\sum_{i \in A} a_i e_i|_{k+1} \leq |\sum_{i \in B} a_i e_i|_{k+1}$.

$$|\sum_{i \in A} a_i e_i|_{k+1} = \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i \in A} a_i e_i)|_k \leq \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i \in B} a_i e_i)|_k \text{ pela hipótese de indução, mas } \max \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l |E_j(\sum_{i \in B} a_i e_i)|_k = |\sum_{i \in B} a_i e_i|_{k+1}.$$

Portanto $|\sum_{i \in A} a_i e_i|_k \leq |\sum_{i \in B} a_i e_i|_k, \forall k$, onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$. Logo $\max_k |\sum_{i \in A} a_i e_i|_k \leq \max_k |\sum_{i \in B} a_i e_i|_k$, ou seja, $\|\sum_{i \in A} a_i e_i\| \leq \|\sum_{i \in B} a_i e_i\|$, onde A e B são subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

Segue de 1), 2), 3) e 4) que $(e_i)_i$ é base 1-incondicional para TS .

b) Vamos primeiro fazer a demonstração para $x \in c_{00}$.

Se $\|x\| = |x|_0$, segue que para todo $l \geq 2$ e subconjuntos finitos $E_1, E_2, \dots, E_l$ dos $\mathbb{N}$ com $E_1 < E_2 < \dots < E_l$, $\frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\| = \max_{k \geq 0} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \leq$
 $\max_{k \geq 0} \max_{l \geq 2} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_k \leq \max_{k \geq 0} |x|_{k+1} = \max_{k \geq 1} |x|_k \leq \|x\|.$

Portanto para qualquer $l \geq 2$, $\frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\| \leq \|x\| \log \sup_{l \geq 2} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\| \leq \|x\|.$

Se $\|x\| = |x|_k > |x|_{k-1} \geq |x|_0$, para algum $k \geq 1$, existem $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, subconjuntos finitos do $\mathbb{N}$, $E_1, E_2, \dots, E_l$ com $E_1 < E_2 < \dots < E_l$ tal que $\|x\| = |x|_k =$
 $\frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l |E_i(x)|_{k-1} \leq \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\| \leq \sup_{\bar{l} \geq 2} \frac{1}{f(\bar{l})} \sum_{i=1}^{\bar{l}} \|\bar{E}_i(x)\|.$

Temos também que existe $l' \in \mathbb{N}$, $l' \geq 2$, subconjuntos finitos do $\mathbb{N}$, $E'_1, E'_2, \dots, E'_{l'}$ com $E'_1 < E'_2 < \dots < E'_{l'}$ e um $k' \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{\bar{l} \geq 2} \frac{1}{f(\bar{l})} \sum_{i=1}^{\bar{l}} \|\bar{E}_i(x)\| = \frac{1}{f(l')} \sum_{i=1}^{l'} \|E'_i(x)\| =$
 $\frac{1}{f(l')} \sum_{i=1}^{l'} |E'_i(x)|_{k'} \leq |x|_{k'+1} \leq |x|_k = \|x\|.$ Portanto $\|x\| = \sup_{\bar{l} \geq 2} \frac{1}{f(\bar{l})} \sum_{i=1}^{\bar{l}} \|\bar{E}_i(x)\|.$

Logo $\|x\| = \max\{|x|_0, \sup_{l \geq 2} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^l \|E_i(x)\|\}$ para $x \in c_{00}$.

A demonstração de que o item b) desta Proposição vale para todo $x \in TS$ é análoga a demonstração feita para o espaço de Tsirelson. ■

Observação 3.6 Como a base $(e_i)_i$ de c_{00} é 1-incondicional nesta norma, não há diferença se nós assumirmos que todas as sequências $E_1 < \dots < E_N$ são sequências de intervalos.

De fato, consideremos $\{E_j\}_{j=1}^n$ subconjuntos dos naturais. Se E_j não é um intervalo, então vamos substituí-lo pelo menor intervalo que o contém, vamos chamar este intervalo de $\bar{E}_j$. Então $E_j \subset \bar{E}_j$ para qualquer j , $1 \leq j \leq n$.

Como $(e_i)_i$ é 1-incondicional na norma de Schlumprecht temos $\|E_j(x)\| \leq \|\bar{E}_j(x)\|.$

Sendo assim $\frac{1}{f(n)} \sum_{j=1}^n \|E_j(x)\| \leq \frac{1}{f(n)} \sum_{j=1}^n \|\overline{E_j}(x)\|$, e como para formar a norma do espaço consideramos $\sup_{n \geq 2} \frac{1}{f(n)} \sum_{i=1}^n \|E_i(x)\|$ podemos tomar todos os subconjuntos como sendo intervalos. ■

Nós agora adotaremos a convenção de que todas as sequências mencionadas são sequências de intervalos.

Para os próximos dois Lemas necessitamos de algumas definições introduzidas por Gowers e Maurey.

Definição 3.7 *Seja $\mathcal{X}$ o conjunto dos espaços normados da forma $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ tal que $(e_i)_i$ é uma base normalizada de X . Se $f \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{X}$ e todo $x \in X$ satisfaz a desigualdade*

$$\|x\| \geq \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(x)\| : N \in \mathbb{N}, E_1 < \dots < E_N \right\}$$

dizemos que X satisfaz uma f -estimativa inferior.

Note que esta definição implica que $\|Ex\| \leq \|x\|$ para todo intervalo E e vetor x , pois basta fazermos $N = 1$ e $E_1 = E$ onde E é o intervalo desejado.

Definição 3.8 *Dado um vetor $x \in X$ e um espaço $X \in \mathcal{X}$, dizemos que x é um l_{1+}^n -average com constante C se $\|x\| = 1$ e $x = \sum_{i=1}^n x_i$ para alguma sequência $x_1 < \dots < x_n$ de elementos não nulos de X tal que $\|x_i\| \leq Cn^{-1}$ para cada i .*

Definição 3.9 *Um l_{1+}^n -vetor é qualquer múltiplo positivo de um l_{1+}^n -average. Em outras palavras, um vetor x é um l_{1+}^n -vetor com constante C se ele pode ser escrito como $x = x_1 + \dots + x_n$, onde $x_1 < \dots < x_n$, x_i não nulos, e $\|x_i\| \leq Cn^{-1}\|x\|$ para todo i .*

Definição 3.10 *Um subespaço de bloco de um espaço $X \in \mathcal{X}$ é um subespaço gerado por uma base de bloco.*

Lema 3.11 *Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{X}$ satisfazendo uma f -estimativa inferior. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $C > 1$, todo subespaço de bloco Y de X contém um l_{1+}^n -average com constante C .*

Demonstração:

Suponhamos que o resultado é falso. Seja k um inteiro tal que $k \log C > \log f(n^k)$. k existe porque $k \log C > \log f(n^k) \iff \log C^k > \log f(n^k) \iff C^k > f(n^k) \iff \frac{f(n^k)}{C^k} < 1$.

Pela propriedade 3) de $\mathcal{F}$ temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^q} = 0, \forall q > 0$. Seja q tal que $C = n^q$, logo $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(n^k)}{(n^q)^k} = 0$ e portanto para k suficientemente grande temos $\frac{f(n^k)}{(n^q)^k} < 1$.

Sejam $N = n^k$, $x_1 < \dots < x_N$ uma sequência de vetores sucessivos de norma 1 em Y e $x = \sum_{i=1}^N x_i$. Para todo $0 \leq i \leq k$ e todo $1 \leq j \leq n^{k-i}$, seja $x(i, j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t$. Assim $x(0, j) = x_j$, $x(k, 1) = x$ e para $1 \leq i \leq k$ cada $x(i, j)$ é a soma de n sucessivos $x(i-1, j)$'s. Vamos verificar esta afirmação. Seja $1 \leq r \leq k$.

Para $i = r$, temos $1 \leq j \leq n^{k-r}$.

$$x(r, 1) = \sum_{t=1}^{n^r} x_t = \sum_{t=1}^{n^{r-1}} x_t + \sum_{t=n^{r-1}+1}^{2n^{r-1}} x_t + \dots + \sum_{t=(n-1)n^{r-1}+1}^{nn^{r-1}} x_t, \text{ mas}$$

$$x(r-1, 1) = \sum_{t=1}^{n^{r-1}} x_t, x(r-1, 2) = \sum_{t=n^{r-1}+1}^{2n^{r-1}} x_t, \dots, x(r-1, n) = \sum_{t=(n-1)n^{r-1}+1}^{nn^{r-1}} x_t, \text{ onde os}$$

$$x(r-1, j)'s \text{ foram obtidos da fórmula } x(i, j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t.$$

Portanto $x(r, 1) = x(r-1, 1) + x(r-1, 2) + \dots + x(r-1, n)$.

$$x(r, 2) = \sum_{t=n^r+1}^{2n^r} x_t = \sum_{t=n^r+1}^{n^r+n^{r-1}} x_t + \sum_{t=n^r+n^{r-1}+1}^{n^r+2n^{r-1}} x_t + \dots + \sum_{t=2n^r-n^{r-1}+1}^{2n^r} x_t, \text{ mas}$$

$$x(r-1, n+1) = \sum_{t=n^r+1}^{n^r+n^{r-1}} x_t, x(r-1, n+2) = \sum_{t=n^r+n^{r-1}+1}^{n^r+2n^{r-1}} x_t, \dots, x(r-1, 2n) = \sum_{t=2n^r-n^{r-1}+1}^{2n^r} x_t.$$

Portanto $x(r, 2) = x(r-1, n+1) + x(r-1, n+2) + \dots + x(r-1, 2n)$.

Calculando para um j qualquer tal que $1 \leq j \leq n^{k-r}$ temos,

$$x(r, j) = \sum_{t=(j-1)n^r+1}^{jn^r} x_t = \sum_{t=(j-1)n^r+1}^{(j-1)n^r+n^{r-1}} x_t + \sum_{t=(j-1)n^r+n^{r-1}+1}^{(j-1)n^r+2n^{r-1}} x_t + \dots + \sum_{t=(j-1)n^r+(n-1)n^{r-1}+1}^{(j-1)n^r+nn^{r-1}} x_t,$$

mas

$$x(r-1, (j-1)n+1) = \sum_{t=(j-1)n^r+1}^{(j-1)n^r+n^{r-1}} x_t, x(r-1, (j-1)n+2) = \sum_{t=(j-1)n^r+n^{r-1}+1}^{(j-1)n^r+2n^{r-1}} x_t, \dots,$$

$$x(r-1, jn) = \sum_{t=jn^r-n^{r-1}+1}^{jn^r} x_t.$$

Portanto $x(r, j) = x(r-1, (j-1)n+1) + x(r-1, (j-1)n+2) + \dots + x(r-1, jn)$.

Logo para $1 \leq i \leq k$ temos que $x(i, j)$ é a soma de n sucessivos $x(i-1, j)$'s.

Pelo que supomos nenhum $x(i, j)$ é um l_{1+}^n -vetor com constante C , pois a soma dos n sucessivos $x(i-1, j)$'s não é um l_{1+}^n -average com constante C . Então temos que $\|x(i-1, j)\| \geq Cn^{-1}\|x(i, j)\|$, logo $\|x(i, j)\| \leq \|x(i-1, j)\|C^{-1}n$.

Vamos provar agora por indução que $\|x(i, j)\| \leq C^{-i}n^i$, em particular, $\|x\| \leq C^{-k}n^k = C^{-k}N$.

Para $i = 1$, $\|x(1, j)\| \leq \|x(0, j)\|C^{-1}n = \|x_j\|C^{-1}n$ logo $\|x(1, j)\| \leq C^{-1}n$.

Para $i = 2$, $\|x(2, j)\| \leq \|x(1, j)\|C^{-1}n \leq C^{-1}nC^{-1}n$ logo $\|x(2, j)\| \leq C^{-2}n^2$.

Suponhamos que para r vale $\|x(r, j)\| \leq C^{-r}n^r$. Vamos provar que vale para $r+1$. $\|x(r+1, j)\| \leq \|x(r, j)\|C^{-1}n \leq C^{-r}n^rC^{-1}n$ logo $\|x(r+1, j)\| \leq C^{-r-1}n^{r+1}$.

Portanto $\|x(i, j)\| \leq C^{-i}n^i$ para i , $1 \leq i \leq k$.

X satisfaz uma f -estimativa inferior então $\|x\| \geq \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(x)\| : N \in \mathbb{N}, E_1 < \dots < E_N \right\}$. Considerando $E_i = \text{ran}(x_i)$ temos $\|x\| \geq f(N)^{-1}(\|E_1(x_1)\| + \dots + \|E_N(x_N)\|) = f(N)^{-1}(\|x_1\| + \dots + \|x_N\|) = f(N)^{-1}N$. Portanto $\|x\| \geq f(N)^{-1}N$.

Logo $f(N)^{-1}N \leq \|x\| \leq C^{-k}N$, ou seja, $f(N)^{-1}N \leq C^{-k}N$ então $f(N)^{-1} \leq C^{-k}$. Contradição, pois pela escolha de k temos que $C^k > f(N)$ logo $C^{-k} < f(N)^{-1}$. ■

Observação 3.12 Pelo Lema acima temos que se $n \in \mathbb{N}$ e $C > 1$ considerando k um inteiro tal que $k \log C > \log f(n^k)$ e tomando $N = n^k$ temos que se $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ é uma sequência de sucessivos vetores de norma 1 de X , então existe $(x_{11}, \dots, x_{1n})$ tal que $\sum_{i=1}^n x_{1i}$ é um l_{1+}^n -average com constante C .

Lema 3.13 Sejam $M, N \in \mathbb{N}$, $C \geq 1$, $f \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{X}$ satisfazendo uma f -estimativa inferior, $x \in X$ um l_{1+}^N -vetor com constante C , e $E_1 < \dots < E_M$ uma sequência de

intervalos. Então $\sum_{j=1}^M \|E_j x\| \leq C(1 + 2M/N)\|x\|$.

Demonstração:

Por conveniência, vamos normalizar x tal que $\|x\| = N$ e $x = \sum_{i=1}^N x_i$, onde $x_1 < \dots < x_N$ e $\|x_i\| \leq C$. Dado j , seja $A_j = \{1 \leq i \leq N : \text{supp}(x_i) \subset E_j\}$ e $B_j = \{1 \leq i \leq N : E_j(x_i) \neq 0\}$, temos que $A_j \subset B_j$, $1 \leq j \leq M$.

Pela desigualdade triangular temos,
 $\|E_j x\| = \|E_j(x_1 + x_2 + \dots + x_N)\| = \|E_j(x_1) + \dots + E_j(x_N)\| = \|\sum_{i \in B_j} E_j(x_i)\| \leq \sum_{i \in B_j} \|E_j(x_i)\| \leq \sum_{i \in B_j} \|x_i\| \leq C(|B_j|) \leq C(|A_j| + 2)$, pois temos que $|A_j| = |B_j|$ ou $|B_j| = |A_j| + 1$ ou $|B_j| = |A_j| + 2$.

Visto que $\sum_{j=1}^M |A_j| = (|A_1| + \dots + |A_M|) \leq N$, obtemos $\sum_{j=1}^M \|E_j x\| \leq C(N + 2M)$ o que nos dá o resultado pela nossa normalização. ■

Para continuarmos será preciso introduzir mais duas definições.

Definição 3.14 Se $f \in \mathcal{F}$, seja $M_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $M_f = f^{-1}(36x^2)$. Dizemos que uma sequência $x_1 < \dots < x_N$ é uma sequência rapidamente crescente de l_{1+} -average, ou RIS, para f de comprimento N com constante $1 + \epsilon$ se x_k é um $l_{1+}^{n_k}$ -average com constante $1 + \epsilon$ para cada k , $n_1 \geq 2(1 + \epsilon)M_f(N/\epsilon')/\epsilon' f'(1)$ e $\frac{\epsilon'}{2} f(n_k)^{1/2} \geq |\text{ran}(x_{k-1})|$ para cada $k = 2, \dots, N$.

Aqui $f'(1)$ é a derivada a direita de f em 1 e ϵ' é a notação usual para $\min\{\epsilon, 1\}$.

Um ponto importante é que os n_k 's, aumentam bastante, a velocidade depende do tamanho do ran dos x_j 's, anteriores. Algumas vezes será conveniente chamar um vetor de um vetor-RIS se ele é um multiplo não nulo da soma de uma RIS.

Definição 3.15 Um funcional x^* é uma (M, g) -forma se $\|x^*\| \leq 1$ e $x^* = \sum_{j=1}^M x_j^*$ para alguma sequência $x_1^* < \dots < x_M^*$ de funcionais sucessivos tal que $\|x_j^*\| \leq g(M)^{-1}$ para cada j .

Lema 3.16 *Sejam $f, g \in \mathcal{F}$, $g \geq f^{1/2}$, $X \in \mathcal{X}$ satisfazendo uma f -estimativa inferior, $\epsilon > 0$, $x_1, \dots, x_N$ uma RIS em X para f com constante $1 + \epsilon$, $x = \sum_{i=1}^N x_i$, $M \geq M_f(N/\epsilon')$, x^* uma (M, g) -forma e E um intervalo qualquer. Então $|x^*(Ex)| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'$.*

Demonstração:

Temos que $x^*(Ex) = (Ex^*)(x)$, pois sejam $E_1 = \text{supp}(x_1^*)$, $E_2 = \text{supp}(x_2^*)$, ..., $E_M = \text{supp}(x_M^*)$, $I_1 = \text{supp}(x_1)$, $I_2 = \text{supp}(x_2)$, ..., $I_N = \text{supp}(x_N)$ e consideremos $F = \cup E_i$, $1 \leq i \leq M$ e $I = \cup I_i$, $1 \leq i \leq N$.

Então $x^* = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ onde $a_i \neq 0$ se $i \in F$ e $x = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ onde $b_i \neq 0$ se $i \in I$. Logo $x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, então $x^*(Ex) = \sum_{i \in E} a_i b_i = (Ex^*)(x)$.

Se x^* é uma (M, g) -forma então Ex^* também é, para qualquer intervalo E , pois $\|Ex^*\| \leq \|x^*\| \leq 1$, $Ex^* = E(\sum_{j=1}^M x_j^*) = \sum_{j=1}^M Ex_j^*$, onde como $x_1^* < \dots < x_M^*$ também temos $Ex_1^* < \dots < Ex_M^*$ e $\|Ex_j^*\| \leq \|x_j^*\| \leq g(M)^{-1}$ para cada j .

Para cada i seja n_i o máximo tal que x_i é um $l_{1+}^{n_i}$ -average com constante $1 + \epsilon$. Por hipótese $x^* = \sum_{j=1}^M x_j^*$, onde $x_1^* < \dots < x_M^*$. Consideremos $E_j = \text{ran}(x_j^*)$, vamos obter três estimativas para $|x^*(x_i)|$.

1) Como $\|x^*\| \leq 1$ temos que $|x^*(x_i)| \leq \|x^*\| \|x_i\| \leq 1$, pois $\|x_i\| = 1$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Sabendo que } \|x_j^*\| &\leq g(M)^{-1} \leq f(M)^{-1/2} \text{ temos que } |x^*(x_i)| = |\sum_{j=1}^M x_j^*(x_i)| \leq \\ \sum_{j=1}^M |x_j^*(x_i)| &= \sum_{j=1}^M |(E_j x_j^*)(x_i)| = \sum_{j=1}^M |x_j^*(E_j x_i)| \leq \sum_{j=1}^M \|x_j^*\| \|E_j x_i\| \leq \sum_{j=1}^M f(M)^{-1/2} \|E_j x_i\| = \\ f(M)^{-1/2} \sum_{j=1}^M \|E_j x_i\|. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.13 temos $\sum_{j=1}^M \|E_j x_i\| \leq (1 + \epsilon)(1 + 2M n_i^{-1})$, portanto $|x^*(x_i)| \leq f(M)^{-1/2}(1 + \epsilon)(1 + 2M n_i^{-1})$.

3) Pela nossa hipótese sobre X temos $f(n)\|x\| \geq \sum_{i=1}^n \|F_i(x)\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde os F_i s são intervalos de inteiros consecutivos. Consideremos $A = \{j : E_j(x_i) \neq 0\}$ logo $\sum_{j=1}^M \|E_j(x_i)\| = \sum_{j \in A} \|E_j(x_i)\| \leq f(|A|) \leq f(|\text{ran}(x_i)|)$, pois $|A| \leq |\text{supp}(x_i)| \leq |\text{ran}(x_i)|$. (I)

Seja t o maior índice tal que $n_t \leq M$ e consideremos $i \leq t-1$. Sabemos que $|\text{supp}(x_j)| \geq n_j$, já que x_j é um $l_{1+}^{n_j}$ -average, logo $|\text{ran}(x_j)| \geq n_j$.

Pela definição de RIS temos que $|\text{ran}(x_{k-1})| \leq \frac{\epsilon'}{2} f(n_k)^{1/2}$, logo $|\text{ran}(x_{t-2})| \leq \frac{\epsilon'}{2} f(n_{t-1})^{1/2} \leq \frac{1}{2} f(n_{t-1}) \leq \frac{1}{2} f(|\text{ran}(x_{t-1})|)$, então $f(|\text{ran}(x_{t-2})|) \leq |\text{ran}(x_{t-2})| \leq \frac{1}{2} f(|\text{ran}(x_{t-1})|)$.
 $|\text{ran}(x_{t-3})| \leq \frac{\epsilon'}{2} f(n_{t-2})^{1/2} \leq \frac{1}{2} f(n_{t-2}) \leq \frac{1}{2} f(|\text{ran}(x_{t-2})|) \leq \frac{1}{2^2} f(|\text{ran}(x_{t-1})|)$ então $f(|\text{ran}(x_{t-3})|) \leq |\text{ran}(x_{t-3})| \leq \frac{1}{2^2} f(|\text{ran}(x_{t-1})|)$.

Generalizando temos $f(|\text{ran}(x_i)|) \leq 2^{i-t+1} f(|\text{ran}(x_{t-1})|)$. (II)

Temos também que $f(|\text{ran}(x_{t-1})|) \leq |\text{ran}(x_{t-1})| \leq \frac{\epsilon'}{2} f(n_t)^{1/2} \leq \frac{\epsilon'}{2} f(M)^{1/2}$. (III)

Consequentemente $|x^*(x_i)| \leq f(M)^{-1/2} \sum_{j=1}^M \|E_j x_i\| \stackrel{(I)}{\leq} f(M)^{-1/2} f(|\text{ran}(x_i)|) \stackrel{(II)}{\leq}$

$f(M)^{-1/2} 2^{i-t+1} f(|\text{ran}(x_{t-1})|) \stackrel{(III)}{\leq} f(M)^{-1/2} 2^{i-t+1} \frac{\epsilon'}{2} f(M)^{1/2} = 2^{i-t+1} \frac{\epsilon'}{2}$ para $i \leq t-1$.

Por 1), 2) e 3) temos,

$$|x^*(x)| = |x^*\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)| \leq \sum_{i=1}^N |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^{t-1} |x^*(x_i)| + |x^*(x_t)| + \sum_{j=t+1}^N |x^*(x_j)| \leq \sum_{i=1}^{t-1} 2^{i-t+1} \frac{\epsilon'}{2} + 1 + \sum_{j=t+1}^N f(M)^{-1/2} (1+\epsilon) (1+2Mn_j^{-1}) = \frac{\epsilon'}{2} 2^{-t} 2 \sum_{i=1}^{t-1} 2^i + 1 + f(M)^{-1/2} (1+\epsilon) \sum_{j=t+1}^N (1+2\frac{M}{n_j}).$$

Como n_t é o máximo tal que $n_t \leq M$ temos que $n_{t+1} \geq M$, logo $\frac{M}{n_j} \leq 1$, $\forall j \geq t+1$.

Então prosseguindo,

$$\frac{\epsilon'}{2} 2^{-t} 2 \sum_{i=1}^{t-1} 2^i + 1 + f(M)^{-1/2} (1+\epsilon) \sum_{j=t+1}^N (1+2\frac{M}{n_j}) \leq \underbrace{\epsilon' 2^{-t} \sum_{i=1}^{t-1} 2^i + 1 + f(M)^{-1/2} (1+\epsilon) 3(N-t)}_{\leq 1} \leq \epsilon' + 1 + 3(1+\epsilon)(N-t)f(M)^{-1/2}.$$

Sabemos por hipótese que $M \geq M_f(N/\epsilon')$, ou seja $M \geq f^{-1}\left(36\frac{N^2}{(\epsilon')^2}\right)$, consequentemente $f(M)^{-1/2} \leq \frac{\epsilon'}{6N}$.

Substituindo na inequação acima obtemos $\epsilon' + 1 + 3(1 + \epsilon)(N - t)f(M)^{-1/2} \leq \epsilon' + 1 + 3(1 + \epsilon)N(\frac{\epsilon'}{6N}) = 1 + \epsilon' + (\epsilon'/2)(1 + \epsilon) \leq 1 + \epsilon' + \epsilon$.

Portanto $|x^*(x)| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'$, logo $|x^*(Ex)| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'$. ■

Corolário 3.17 *Sejam $f, X, \epsilon, M, x_1, \dots, x_N$ e x como no Lema 3.16, e sejam $E_1 < \dots < E_M$. Então $f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i x\| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'$.*

Demonstração:

Primeiro vamos definir x_i^* como sendo o funcional suporte de $E_i x$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Se $E_i x = 0$, coloquemos $x_i^* = 0$. Caso contrário seja $S_i^* : \left\langle \frac{E_i x}{\|E_i x\|} \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S_i^*\left(\alpha \frac{E_i x}{\|E_i x\|}\right) = \alpha$. S_i^* é um funcional linear contínuo, pois consideremos $z = \alpha \frac{E_i x}{\|E_i x\|}$ e $y = \beta \frac{E_i x}{\|E_i x\|}$, $\alpha \neq \beta$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$S_i^*(z + y) = S_i^*\left(\frac{E_i x}{\|E_i x\|}(\alpha + \beta)\right) = \alpha + \beta = S_i^*(z) + S_i^*(y).$$

$$S_i^*(\gamma z) = S_i^*\left(\gamma \alpha \frac{E_i x}{\|E_i x\|}\right) = \gamma \alpha = \gamma S_i^*(z).$$

$$\sup_{\|z\| \leq 1} \|S_i^*(z)\| = \sup_{\|z\| \leq 1} |\alpha| \leq 1, \text{ pois } \|z\| = \left\| \alpha \frac{E_i x}{\|E_i x\|} \right\| = |\alpha| \leq 1.$$

Portanto S_i^* é um funcional linear contínuo com $\|S_i^*\| = 1$.

Escrevendo $E_i = \{n_i, \dots, n_i + m_i\}$, pelo Teorema de Hahn-Banach (veja [15]) existe $\overline{S}_i^* : [e_{n_i}, \dots, e_{n_i+m_i}] \rightarrow \mathbb{R}$ linear contínuo tal que $\overline{S}_i^*|_{\left\langle \frac{E_i x}{\|E_i x\|} \right\rangle} = S_i^*$ e $\|\overline{S}_i^*\| = 1$.

Agora vamos definir $x_i^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $x_i^*(y) = \overline{S}_i^*(E_i y)$, para qualquer $y \in X$. Logo x_i^* é um funcional linear contínuo tal que:

$$1) x_i^*(x) = \overline{S}_i^*(E_i x) = \|E_i x\| \overline{S}_i^*\left(\frac{E_i x}{\|E_i x\|}\right) = \|E_i x\| S_i^*\left(\frac{E_i x}{\|E_i x\|}\right) = \|E_i x\|.$$

$$2) \text{supp}(x_i^*) \subset E_i.$$

$$3) \|x_i^*\| \leq 1, \text{ pois considere } y \in X \text{ com } \|y\| \leq 1, \text{ logo } |x_i^*(y)| = |\overline{S}_i^*(E_i y)| \leq \|\overline{S}_i^*\| \|E_i y\| \leq 1.$$

4) Consideremos $x^* = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M x_i^*$, x^* é uma (M, f) -forma. De fato, seja $y \in X$ com $\|y\| \leq 1$. Vamos calcular $|x^*(y)|$.

$$|x^*(y)| = \left| f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M x_i^*(y) \right| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |x_i^*(y)| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |\overline{S}_i^*(E_i y)| \leq$$

$$f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|\overline{S_i^*}\| \|E_i y\| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i y\| \leq \|y\|.$$

Portanto $\|x^*\| \leq 1$. Como $E_1 < E_2 < \dots < E_M$ temos $x_1^* < x_2^* < \dots < x_M^*$. Temos também que $\|f(M)^{-1} x_i^*\| = f(M)^{-1} \|x_i^*\| \leq f(M)^{-1}$. Portanto x^* é uma (M, f) -forma.

$$\text{Então temos } f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i x\| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M x_i^*(x) = x^*(x), \text{ logo basta aplicar o Lema}$$

$$3.16 \text{ com } f = g \text{ e teremos } f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i x\| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'. \quad \blacksquare$$

Para continuarmos precisaremos da noção de comprimento de um intervalo E associado a uma RIS.

Definição 3.18 *Sejam $x_1 < \dots < x_N$ uma sequência rapidamente crescente para f com constante $1 + \epsilon$ para alguma $f \in \mathcal{F}$ e algum $\epsilon > 0$. Para cada i , seja n_i o máximo tal que x_i é um $l_{1+}^{n_i}$ -average com constante $1 + \epsilon$, vamos escrever isto como $x_i = x_{i1} + \dots + x_{in_i}$ onde $\|x_{ij}\| \leq (1 + \epsilon)n_i^{-1}$ para cada j .*

Dado um intervalo $E \subset \mathbb{N}$, sejam $i = i_E$ e $j = j_E$ respectivamente o mínimo e o máximo tal que Ex_i e Ex_j são não nulos, e sejam $r = r_E$ e $s = s_E$ respectivamente o mínimo e o máximo tal que Ex_{ir} e Ex_{js} são não nulos. Definamos o comprimento $\lambda(E)$ do intervalo E por $j_E - i_E + (s_E/n_{j_E}) - (r_E/n_{i_E})$.

Observação 3.19 *Se $E_1 < \dots < E_M$ e $E = \cup_{i=1}^M E_i$ então $\sum_{i=1}^M \lambda(E_i) \leq \lambda(E)$.*

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \lambda(E_i) &= j_{E_1} - i_{E_1} + (s_{E_1}/n_{j_{E_1}}) - (r_{E_1}/n_{i_{E_1}}) + j_{E_2} - i_{E_2} + (s_{E_2}/n_{j_{E_2}}) - (r_{E_2}/n_{i_{E_2}}) + \dots + j_{E_M} - \\ &i_{E_M} + (s_{E_M}/n_{j_{E_M}}) - (r_{E_M}/n_{i_{E_M}}) = j_{E_M} - i_{E_1} + (s_{E_M}/n_{j_{E_M}}) - (r_{E_1}/n_{i_{E_1}}) + \sum_{k=1}^{M-1} (j_{E_k} - \\ &i_{E_{k+1}}) + \sum_{k=1}^{M-1} (s_{E_k}/n_{j_{E_k}} - r_{E_{k+1}}/n_{i_{E_{k+1}}}) = \lambda(E) + \sum_{k=1}^{M-1} (j_{E_k} - i_{E_{k+1}}) + \sum_{k=1}^{M-1} (s_{E_k}/n_{j_{E_k}} + \\ &r_{E_{k+1}}/n_{i_{E_{k+1}}}). \end{aligned}$$

Seja $F = \{1 \leq k \leq M - 1 : (j_{E_k} - i_{E_{k+1}}) \neq 0\}$ então

$$\sum_{i=1}^M \lambda(E_i) = \lambda(E) + \sum_{k \notin F} \underbrace{(j_{E_k} - i_{E_{k+1}})}_{=0} + \sum_{k \notin F} \underbrace{(s_{E_k}/n_{j_{E_k}} - r_{E_{k+1}}/n_{i_{E_{k+1}}})}_{<0} + \sum_{k \in F} \underbrace{(j_{E_k} - i_{E_{k+1}})}_{\leq -1} + \sum_{k \in F} \underbrace{(s_{E_k}/n_{j_{E_k}} - r_{E_{k+1}}/n_{i_{E_{k+1}}})}_{<1}.$$

Portanto $\sum_{i=1}^M \lambda(E_i) \leq \lambda(E) + R - |F| + |F| \leq \lambda(E)$, onde R é um número negativo. ■

Obviamente esta definição depende completamente da RIS, mas sempre estará claro no contexto que RIS estaremos considerando.

Lema 3.20 Dada uma RIS para f com constante $1 + \epsilon$, para alguma $f \in \mathcal{F}$, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ e E um intervalo com $\lambda(E) \geq 1$ temos que $\|Ex\| \geq \frac{1}{4}$, onde x é a soma da RIS.

Demonstração:

Sejam $x_1, \dots, x_n$ a RIS, $C = \{i : \text{supp}(x_i) \cap E \neq \emptyset\}$ e $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

Se $C = 0$ então $\lambda(E) = 0$.

Se $C = 1$ então $0 \leq \lambda(E) < 1$.

Se $C \geq 3$ então existe $x_i \subset E$ e $\lambda(E) > 1$. Como $\|Ex\| \geq \|x_i\| = 1$ temos o resultado.

Se $C = 2$, podemos ter,

1) $\lambda(E) > 1$, os dois $x_{i's}$ estão contidos em E .

Neste caso temos $\|Ex\| \geq \|x_i\| = 1$, ou seja, $\|Ex\| \geq \frac{1}{4}$.

2) $\lambda(E) \geq 1$, mas apenas um dos $x_{i's}$ está contido em E .

Análogo ao caso acima.

3) $\lambda(E) \geq 1$, mas não existe j tal que $x_j \subset E$.

Lembrando sempre que os $x_{i's}$ são consecutivos temos,

$$\lambda(E) = 1 + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} \geq 1 \text{ logo } \frac{s_E}{n_{j_E}} \geq \frac{r_E}{n_{i_E}}.$$

caso 1: Se $\frac{r_E}{n_{i_E}} < \frac{1}{2}$

$$1 = \|x_{i_E}\| \leq \|x_{i_E1}\| + \|x_{i_E2}\| + \dots + \|x_{i_E r_E}\| + \|x_{i_E r_E+1} + \dots + x_{i_E n_{i_E}}\|.$$

$$1 \leq r_E \frac{(1+\epsilon)}{n_{i_E}} + \|x_{i_E r_E+1} + \dots + x_{i_E n_{i_E}}\|. \text{ Como } \frac{r_E}{n_{i_E}} < \frac{1}{2} \text{ temos,}$$

$$1 \leq \frac{(1+\epsilon)}{2} + \|x_{i_E r_E+1} + \dots + x_{i_E n_{i_E}}\|, \text{ ou seja, } 1 - \frac{(1+\epsilon)}{2} \leq \|x_{i_E r_E+1} + \dots + x_{i_E n_{i_E}}\| \leq \|Ex\|.$$

Logo $\|Ex\| \geq 1 - \frac{(1+\epsilon)}{2}$. Basta então demonstrarmos que $1 - \frac{(1+\epsilon)}{2} \geq \frac{1}{4}$.

$$1 - \frac{(1+\epsilon)}{2} \geq \frac{1}{4} \iff \frac{(1-\epsilon)}{2} \geq \frac{1}{4} \iff -4\epsilon \geq -2 \iff \epsilon \leq \frac{1}{2}, \text{ que é o caso.}$$

caso 2: Se $\frac{r_E}{n_{i_E}} \geq \frac{1}{2}$

Como $\frac{r_E}{n_{i_E}} \geq \frac{1}{2}$ temos que $\frac{s_E}{n_{j_E}} \geq \frac{1}{2}$, sabemos também que $\frac{s_E}{n_{j_E}} + \frac{n_{j_E} - s_E}{n_{j_E}} = 1$ logo $\frac{n_{j_E} - s_E}{n_{j_E}} \leq \frac{1}{2}$.

$$1 = \|x_{j_E}\| \leq \|x_{j_E 1} + \dots + x_{j_E s_E}\| + \|x_{j_E s_E+1}\| + \dots + \|x_{j_E n_{j_E}}\|.$$

$$1 \leq \|x_{j_E 1} + \dots + x_{j_E s_E}\| + (n_{j_E} - s_E) \frac{(1+\epsilon)}{n_{j_E}}. \text{ Como } \frac{n_{j_E} - s_E}{n_{j_E}} \leq \frac{1}{2} \text{ temos,}$$

$$1 - \frac{(1+\epsilon)}{2} \leq \|x_{j_E 1} + \dots + x_{j_E s_E}\| \leq \|Ex\|.$$

Portanto $\|Ex\| \geq 1 - \frac{(1+\epsilon)}{2}$ que já vimos que é maior ou igual a $\frac{1}{4}$ quando $\epsilon \leq \frac{1}{2}$.

Vamos observar também que $\|Ex\| > \frac{1}{4}$ quando $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ já que $1 - \frac{(1+\epsilon)}{2} = \frac{1}{4}$ se, e somente se, $\epsilon = \frac{1}{2}$. ■

Lema 3.21 *Sejam $f, g \in \mathcal{F}$ com $g \geq \sqrt{f}$, $X \in \mathcal{X}$ satisfazendo uma f -estimativa inferior, $\epsilon > 0$, $x_1 < \dots < x_N$ uma RIS em X para f com constante $1 + \epsilon$, e $x = \sum_{i=1}^N x_i$. Suponha que $\|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$ para todo intervalo E de comprimento maior ou igual a 1. Então $\|x\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon') Ng(N)^{-1}$.*

Demonstração:

Sejam $I = \{1 \leq i \leq N : x_i \subset E\}$; $J = \{j \in \mathbb{N} : r_E + 1 \leq j \leq n_{i_E}\}$ e $K = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq s_E\}$.

Cada x_i é um $l_{1+}^{n_i}$ -average com constante $1 + \epsilon$, ou seja, $x_i = x_{i1} + \dots + x_{in_i}$ onde $\|x_{ij}\| \leq (1 + \epsilon)n_i^{-1}$, para cada j , $1 \leq j \leq n_i$, logo $\|x_i\| = \|\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\| \leq \sum_{j=1}^{n_i} \|x_{ij}\| \leq n_i(1 + \epsilon)n_i^{-1} = 1 + \epsilon$. Como $i_E \geq 1$ temos $n_{i_E} \geq n_1$ o que implica que $\frac{(1+\epsilon)}{n_{i_E}} \leq \frac{(1+\epsilon)}{n_1}$. Vamos calcular $\|Ex\|$.

$$\begin{aligned} \|Ex\| &= \left\| \sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \in J} x_{i_E j} + \sum_{k \in K} x_{j_E k} + x_{i_E r_E} \right\| \leq \left\| \sum_{i \in I} x_i \right\| + \left\| \sum_{j \in J} x_{i_E j} \right\| + \left\| \sum_{k \in K} x_{j_E k} \right\| + \|x_{i_E r_E}\| \leq \\ &|I|(1 + \epsilon) + |J| \frac{(1 + \epsilon)}{n_{i_E}} + |K| \frac{(1 + \epsilon)}{n_{j_E}} + \frac{(1 + \epsilon)}{n_{i_E}} \leq (1 + \epsilon)\lambda(E) + \frac{(1 + \epsilon)}{n_1} = (1 + \epsilon)(\lambda(E) + n_1^{-1}). \end{aligned}$$

Se $\lambda(E) \geq \frac{(1+\epsilon)}{\epsilon' n_1}$ então teremos que $(1 + \epsilon)n_1^{-1} \leq \lambda(E)\epsilon'$, logo obtemos que $\|Ex\| \leq$

$$(1 + \epsilon + \epsilon')\lambda(E).$$

Vamos definir G por $G(x) = x$ quando $0 \leq x \leq 1$ e por $G(x) = xg(x)^{-1}$ quando $x \geq 1$. Como verificamos, no capítulo 2, G é concava e crescente sobre $[1, +\infty)$ e satisfaz $G(xy) \geq G(x)G(y)$ para todo x, y no mesmo intervalo, e estas propriedades também são verdadeiras para todo $\mathbb{R}_+$.

Devemos mostrar que se $\lambda(E) \geq (1 + \epsilon)/\epsilon' n_1$, então $\|Ex\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda(E))$. Pela observação que fizemos sabemos que o resultado é verdadeiro quando $\lambda(E) \leq 1$.

Vamos supor então que E é o menor intervalo de comprimento $\lambda(E) \geq (1 + \epsilon)/\epsilon' n_1$ para o qual temos $\|Ex\| \geq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda(E))$.

Sabemos que $\lambda(E) \geq 1$ e que existe alguma (M, g) -forma $x^* = \sum_{i=1}^M x_i^*$ tal que $\|Ex\| \leq |x^*(Ex)|$, pois o supremo de $\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$ é assumido. Vejamos porque.

Temos que x é a soma de uma RIS, seja m um inteiro tal que $\text{supp}(x) \subset [1, m]$. Seja x^* uma (M, g) -forma logo $x^* = \sum_{i=1}^M x_i^*$, então existe y^* uma (N, g) -forma com $N \leq m$ e $x^*(x) = y^*(x)$.

caso 1: $M \leq m$, nada a fazer.

caso 2: $M \geq m$

Então $x^*(x) = \sum_{i=1}^M x_i^*(x)$. Seja y^* definida por $y^* = x^*|_{[e_1, \dots, e_m]}$, logo $\|y^*\| \leq 1$ e $y^*(x) = \sum_{i \in A} x_i^*(x)$, onde $A = \{i : \text{supp}(x_i^*) \cap [1, m] \neq \emptyset\}$ e como $\|x_i^*\| \leq g(M)^{-1} \leq g(|A|)^{-1}$, segue que y^* é uma $(|A|, g)$ -forma.

Seja $D = \{(N, g)\text{-formas com } N \leq m\}$. Para cada p partição de $[1, m] = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N$, consideremos D_p o conjunto de funcionais x^* satisfazendo 1. $\|x^*\| \leq 1$ e 2. $\|E_i(x^*)\| \leq \frac{1}{g(N)}$, $\forall i, i = 1, \dots, N$.

Consideremos $G = \{x^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Como as $E_{i'}$ s são contínuas, segue que $F_i = \{x^* : \|E_i x^*\| \leq \frac{1}{g(N)}\}$ é fechado, $\forall i, i = 1, \dots, N$.

Portanto $G \cap (\cap_{i=1}^N F_i)$ é compacto. Mas $x^* \in D \iff x^* \in D_p$ para algum alguma

p. Portanto $D = \cup D_p$, e como as partições de $[1, m]$ são em número finito segue que D é compacto.

Se $M \geq M_f(N/\epsilon')$, então pelo Lema 3.16 temos $|x^*(Ex)| \leq 1 + \epsilon + \epsilon'$. Como $\|Ex\| \leq |x^*(Ex)|$ temos $\|Ex\| \leq 1 + \epsilon + \epsilon' \leq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda(E))$ já que $\lambda(E) \geq 1$, mas assumimos que E satisfaz $\|Ex\| \geq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda(E))$ logo devemos ter $M \leq M_f(N/\epsilon') \leq \frac{n_1 \epsilon' f'(1)}{2(1+\epsilon)}$, pela condição de RIS.

Colocando $E_i = E \cap \text{ran}(x_i^*)$ e escrevendo x em função dessas projeções temos $x = E_1x + E_2x + \dots + E_Mx + y$ onde y representa os pedaços de x que não foram incluídos nas projeções. Então $Ex = E_1x + E_2x + \dots + E_Mx + Ey$ e $x^*(Ex) = x^*(\sum_{i=1}^M E_ix + Ey) = \sum_{i=1}^M x^*(E_ix) + x^*(Ey)$, onde $x^*(Ey) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Portanto } \|Ex\| &\leq |x^*(Ex)| = |\sum_{i=1}^M x^*(E_ix)| = |\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M x_j^*(E_ix)| = |\sum_{i=1}^M x_i^*(E_ix)| \leq \\ &\sum_{i=1}^M |x_i^*(E_ix)| \leq \sum_{i=1}^M \|x_i^*\| \|E_ix\| \leq g(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_ix\|. \end{aligned}$$

Seja $\lambda_i = \lambda(E_i)$ para cada i e $\lambda(E) = \lambda$. Como $M \geq 2$ podemos assumir que nenhum dos intervalos E_i são iguais a E , pois suponha $E_1 = E$ então $\|Ex\| \leq g(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_ix\| = g(M)^{-1} \|E_1x\| = g(M)^{-1} \|Ex\|$ logo $g(M) \leq 1$. Absurdo, pois $M \geq 2$ então $g(M) > 1$.

Para cada i devemos ter $\lambda_i \leq (1 + \epsilon)/\epsilon' n_1$ ou $\lambda_i \geq (1 + \epsilon)/\epsilon' n_1$ e neste caso, pela minimalidade de E , temos que $\|E_ix\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda_i)$. Sejam A o conjunto dos i com a primeira propriedade, B o complemento de A e k a cardinalidade de A .

É claro que $k < M$, pois se $k = M$ usando a definição de RIS teríamos $\|Ex\| \leq g(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_ix\| \leq M(\lambda(E_i)(1 + \epsilon) + \frac{(1 + \epsilon)}{n_1}) \leq M((1 + \epsilon)\frac{(1 + \epsilon)}{\epsilon' n_1} + \frac{(1 + \epsilon)}{n_1}) \leq \frac{n_1 \epsilon' f'(1)}{2(1+\epsilon)} [\frac{(1+\epsilon)}{n_1} (\frac{(1+\epsilon)}{\epsilon'} + 1)] = \frac{\epsilon' f'(1)}{2} (\frac{1+\epsilon+\epsilon'}{\epsilon'}) = \frac{f'(1)}{2} (1 + \epsilon + \epsilon') < (1 + \epsilon + \epsilon')$, mas sabemos que E foi tomado tal que $\|Ex\| \geq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda(E)) \geq (1 + \epsilon + \epsilon')$.
 $\sum_{i \in B} \|E_ix\| \leq \sum_{i \in B} (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda_i) = (1 + \epsilon + \epsilon') \sum_{i \in B} G(\lambda_i)$. G é concava, não decrescente e $\sum_{i=1}^M \lambda_i \leq \lambda$, pela Observação 3.19. então utilizando a desigualdade de Jensen vamos

mostrar que $\sum_{i \in B} G(\lambda_i) \leq (M - k)G(\frac{\lambda}{M - k})$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} \frac{1}{M - k} G(\lambda_i) &= \frac{1}{M - k} G(\lambda_1) + \frac{1}{M - k} G(\lambda_2) + \dots + \frac{1}{M - k} G(\lambda_u) \leq G(\frac{1}{M - k} \lambda_1 + \\ &\frac{1}{M - k} \lambda_2 + \dots + \frac{1}{M - k} \lambda_u) = G(\sum_{i \in B} \frac{1}{M - k} \lambda_i) = G(\frac{1}{M - k} \sum_{i \in B} \lambda_i) \leq G(\frac{\lambda}{M - k}). \text{ Logo} \\ \sum_{i \in B} G(\lambda_i) &\leq (M - k)G(\frac{\lambda}{M - k}). \text{ Portanto } \sum_{i \in B} \|E_i x\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')(M - k)G(\frac{\lambda}{M - k}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Consequentemente } \|Ex\| &\leq g(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i x\| \leq M^{-1} G(M) (\sum_{i \in B} \|E_i x\| + \sum_{i \in A} \|E_i x\|) \leq \\ M^{-1} G(M) [(1 + \epsilon + \epsilon')(M - k)G(\frac{\lambda}{M - k}) &+ \sum_{i \in A} \|E_i x\|]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } \sum_{i \in A} \|E_i x\| &\leq k(\lambda(E_i)(1 + \epsilon) + \frac{(1 + \epsilon)}{n_1}) \leq k(\frac{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon)}{\epsilon' n_1} + \frac{(1 + \epsilon)}{n_1}) = \\ \frac{(1 + \epsilon)}{n_1} (\frac{k(1 + \epsilon)}{\epsilon'} + 1) &= \frac{(1 + \epsilon)}{n_1} (\frac{k(1 + \epsilon) + \epsilon'}{\epsilon'}) = \frac{(1 + \epsilon)}{\epsilon' n_1} (k(1 + \epsilon) + \epsilon') \leq \frac{(1 + \epsilon)}{\epsilon' n_1} (k(1 + \epsilon) + k\epsilon') = \\ \frac{k(1 + \epsilon)(1 + \epsilon + \epsilon')}{\epsilon' n_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto } \|Ex\| &\leq M^{-1} G(M) [(1 + \epsilon + \epsilon')(M - k)G(\frac{\lambda}{M - k}) + \frac{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon + \epsilon')k}{\epsilon' n_1}] = \frac{G(M)}{M} (1 + \epsilon + \\ \epsilon') M (1 - \frac{k}{M}) G(\frac{\lambda}{M - k}) &+ \frac{G(M)}{M} \frac{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon + \epsilon')k}{\epsilon' n_1} \leq (1 + \epsilon + \epsilon') [(1 - \frac{k}{M}) G(M) G(\frac{\lambda}{M - k}) + \frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1}] \leq \\ (1 + \epsilon + \epsilon') [(1 - \frac{k}{M}) G((1 - \frac{k}{M})^{-1} \lambda) &+ \frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1}]. \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } g \geq \sqrt{f} \text{ temos } g'(1) &\geq (\sqrt{f(1)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} f'(1) = \frac{f'(1)}{2} > 0. \text{ Pela defini\c{c}\~ao de} \\ \text{RIS temos } n_1 &\geq 2(1 + \epsilon) M_f(N/\epsilon') / \epsilon' f'(1), \text{ logo } \frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1} \leq \frac{M_f(N/\epsilon')}{M} (\frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1}) = \\ (\frac{k}{M}) (\frac{(1 + \epsilon) M_f(N/\epsilon')}{\epsilon' n_1}) &\leq (\frac{k}{M}) \left(\frac{(1 + \epsilon) M_f(N/\epsilon')}{\epsilon' \left(\frac{2(1 + \epsilon) M_f(N/\epsilon')}{\epsilon' f'(1)} \right)} \right) = (\frac{k}{M}) (\frac{f'(1)}{2}) \leq (\frac{k}{M}) g'(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Colocando } t = \frac{k}{M} \text{ em } (*) \text{ e utilizando a majora\c{c}\~ao acima para } \frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1} \text{ obtemos} \\ (1 + \epsilon + \epsilon') [(1 - \frac{k}{M}) G((1 - \frac{k}{M})^{-1} \lambda) + \frac{(1 + \epsilon)k}{\epsilon' n_1}] &\leq (1 + \epsilon + \epsilon') ((1 - t) G(\frac{\lambda}{1 - t}) + t g'(1)). \end{aligned}$$

$$\text{Seja } G'(1) \text{ a derivada a direita de } G \text{ em } 1, G'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{G(x) - 1}{x - 1}.$$

Temos que $\lambda \geq 1$ e $0 \leq t < 1$, logo como G é concava temos $(1 - t)G(\frac{\lambda}{1 - t}) + tG(1) \leq G(\lambda + t)$. Subtraindo $G'(1)t$ dos dois lados da desigualdade temos $(1 - t)G(\frac{\lambda}{1 - t}) + tG(1) - G'(1)t \leq G(\lambda + t) - G'(1)t$. Pelo Teorema do valor médio temos $\frac{G(\lambda + t) - G(\lambda)}{t} \leq G'(1)$ logo $(1 - t)G(\frac{\lambda}{1 - t}) + t(G(1) - G'(1)) \leq G(\lambda)$ para todo $0 \leq t < 1$ e $\lambda \geq 1$.

Já que $G'(x) = \frac{g(x) - xg'(x)}{(g(x))^2}$ temos que $G(1) - G'(1) = 1 - 1 + g'(1) = g'(1)$. Portanto $(1 + \epsilon + \epsilon')((1 - t)G(\frac{\lambda}{1-t}) + tg'(1)) \leq (1 + \epsilon + \epsilon')G(\lambda)$.

Contradizendo nossa suposição sobre o intervalo E e provando o Lema, pois seja $E = \text{ran}(x)$, $\lambda(E) = N \geq 1$ então $\|x\| = \|Ex\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')Ng(N)^{-1}$. ■

Teorema 3.22 *TS admite um sistema biortogonal assintótico com constante $\theta, \theta \in (0, 1/2)$.*

Demonstração

Seja $\delta = \frac{\theta}{3-\theta}$, temos que $0 < \delta < 1$. Sejam $N_1 < N_2 < \dots$ uma sequência de quadrados satisfazendo $f(N_1)/N_1 < \delta/2$, $f(N_1) > 8\delta^{-1}$ e $N_j > M_f(2N_{j-1})$ para todo $j > 1$ e A_k o conjunto dos vetores de norma 1 da forma $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$ onde $x_1 = \alpha x'_1, \dots, x_{N_k} = \alpha x'_{N_k}$ com $x'_1, \dots, x'_{N_k}$ sendo uma RIS com constante $1 + \delta/2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos verificar que o espaço de Thomas Schlumprecht satisfaz uma f -estimativa inferior.

Pela norma do espaço temos $\|x\| \geq \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\}$. Resta mostrar que $\|Ex\| \leq \|x\|$, $\forall E \subset \mathbb{N}$.

Vejamos, $\|Ex\| = \|Ex\|_\infty \vee \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i Ex\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\}$ e $\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\}$.

Se $\|Ex\| = \|Ex\|_\infty$ temos que $\|Ex\|_\infty \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|$.

Se $\|Ex\| = \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i Ex\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\}$ temos que $\sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i Ex\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\} \leq \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N\} \leq \|x\|$. Portanto $\|Ex\| \leq \|x\|$, $\forall E \subset \mathbb{N}$.

Logo $\|x\| \geq \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i Ex\| : N \in \mathbb{N}, E_1 < \dots < E_N\}$.

Como o espaço de Schlumprecht satisfaz uma f -estimativa inferior, temos que a constante de multiplicidade α da RIS é menor ou igual a $f(N_k)N_k^{-1}$.

De fato, temos que $\|x\| \geq f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\|$ onde $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$.

Seja $E_i = \text{ran}(x_i)$ então $\|x\| \geq f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \|x_i\| = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} |\alpha| \|x'_i\|$ logo $\|x\| \geq f(N_k)^{-1} N_k |\alpha|$. Consequentemente $|\alpha| \leq f(N_k) N_k^{-1}$ já que $\|x\| = 1$. Temos também que $\|x_i\| = |\alpha| \|x'_i\| = |\alpha| \leq f(N_k) N_k^{-1}$, $i = 1, \dots, N_k$.

Seja A_k^* o conjunto dos funcionais da forma $f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} x_i^*$ onde $x_1^* < \dots < x_{N_k}^*$ e $\|x_i^*\| \leq 1$ para cada i , $1 \leq i \leq N_k$.

Se $k \leq j-1$ então $N_j > M_f(2N_k)$, pois por hipótese $N_j > M_f(2N_{j-1})$ e $(N_j)_j$ é uma sequência estritamente crescente.

Observação: $y^* \in A_j^*$ é uma (M, f) -forma onde $M = N_j$. De fato, $y^* = \sum_{i=1}^M f(M)^{-1} x_i^*$, onde $x_1^* < \dots < x_M^*$, $\|x_i^*\| \leq 1$ para qualquer i , $1 \leq i \leq M$.

$\|f(M)^{-1} x_i^*\| = f(M)^{-1} \|x_i^*\| \leq f(M)^{-1}$, $\forall i$. Seja $z \in TS$ com $\|z\| \leq 1$. Vamos calcular $|y^*(z)|$.

$|y^*(z)| = \left| \sum_{i=1}^M f(M)^{-1} x_i^*(z) \right| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |x_i^*(z)|$. Consideremos $E_i = \text{ran}(x_i^*)$ então

$$f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |x_i^*(z)| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |(E_i x_i^*)(z)| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M |x_i^*(E_i z)| \leq$$

$\leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|x_i^*\| \|E_i z\| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i z\| \leq \|z\|$. Portanto $\|y^*\| \leq 1$. Logo $y^* \in A_j^*$ é uma (M, f) -forma onde $M = N_j$.

Passaremos a verificar que se $x \in A_k$ e $y^* \in A_j^*$, $j \neq k$, então $|y^*(x)| < \delta$.

Para $j > k$ vamos aplicar o Lema 3.16 com $\epsilon = \frac{1}{2}$, $M = N_j$, $f = g$, $y^* \in A_j^*$, que já vimos que é uma (M, f) -forma, e sabendo que $1 + \delta/2 < 1 + 1/2 = 1 + \epsilon$.

No Lema 3.16 $x = \sum_{i=1}^N x_i$ onde $x_1, \dots, x_N$ é uma RIS. No nosso contexto $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$ onde $x_1, \dots, x_{N_k}$ é múltiplo de uma RIS então temos $|y^*(x)| = |\alpha| |y^*(\frac{x}{\alpha})| \leq \frac{f(N_k)}{N_k} (1 + \epsilon + \epsilon') = 2 \frac{f(N_k)}{N_k}$. Portanto $|y^*(x)| \leq 2 \frac{f(N_k)}{N_k}$.

Como $\frac{x}{f(x)}$ é não decrescente temos que $\frac{f(x_2)}{x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1}$ para $x_1 < x_2$.

Por construção $N_1 < N_2 < \dots$ logo $\dots < \frac{f(N_3)}{N_3} < \frac{f(N_2)}{N_2} < \frac{f(N_1)}{N_1} < \frac{\delta}{2}$, ou seja $\frac{f(N_k)}{N_k} < \frac{\delta}{2}$.

Por este resultado temos que $|y^*(x)| \leq 2 \frac{f(N_k)}{N_k} < 2 \frac{\delta}{2} = \delta$. Portanto $|y^*(x)| < \delta$ para qualquer $y^* \in A_j^*$ e $x \in A_k$, $j > k$.

Se $j < k$ vamos aplicar o Lema 3.21 para $y = \frac{x}{\alpha}$, que é a soma da RIS $x'_1, \dots, x'_{N_k}$, com $\epsilon = \frac{1}{2}$ e $f = g$, mas para isto vamos primeiro verificar que $\|Ey\| \leq \sup\{|x^*(Ey)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, f)\text{-forma}\}$ para qualquer intervalo E tal que $\lambda(E) \geq 1$.

Pela norma do espaço temos que $\|Ey\| = \|Ey\|_\infty$ ou $\|Ey\| = \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(Ey)\|, N \geq 2\}$. Verificaremos que para $\lambda(E) \geq 1$, $\|Ey\| = \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(Ey)\|, N \geq 2\}$.

Seja E um intervalo tal que $\lambda(E) \geq 1$. Temos que $y = \sum_{i=1}^{N_k} x'_i$ onde $x'_1, \dots, x'_{N_k}$ é uma RIS, logo cada x'_i é um $l_{1+}^{n_i}$ -average.

Pela definição de $l_{1+}^{n_i}$ -average temos que $x'_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in_i}$ onde $\|x_{ij}\| \leq \frac{1+\epsilon}{n_i} \leq \frac{1+\epsilon}{n_1}$. Pela definição de RIS sabemos que $n_1 \geq \frac{2(1+\epsilon)M_f(N_k/\epsilon')}{\epsilon' f'(1)}$. Seja $M_f(N_k/\epsilon') = x_0$ então $f(x_0) = 36(N_k/\epsilon')^2 \geq 36(N_k)^2 > N_k$, já que $(\epsilon')^2 \leq 1$. Portanto $\log_2(x_0 + 1) > N_k$, logo $x_0 > 2^{N_k} - 1$.

$f'(1) \leq 1$ e $\epsilon' \leq 1$ consequentemente $n_1 \geq \frac{2(1+\epsilon)x_0}{1.1} > 2(1+\epsilon)(2^{N_k} - 1)$. Com isto temos que $\frac{1+\epsilon}{n_1} < \frac{1+\epsilon}{2(1+\epsilon)(2^{N_k}-1)} = \frac{1}{2(2^{N_k}-1)} < \frac{1}{4}$, pois $\frac{1}{2^{N_k}-1} < \frac{1}{2} \iff 2 < 2^{N_k} - 1$, o que é verdadeiro.

Portanto $\|x_{ij}\| < \frac{1}{4}$ e como $\|x_{ij}\|_\infty \leq \|x_{ij}\|$ segue que $\|Ey\|_\infty \leq \|y\|_\infty < \frac{1}{4}$.

Mas já verificamos no Lema 3.20 que para intervalos com $\lambda(E) \geq 1$ e $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ temos que $\|Ey\| \geq \frac{1}{4}$.

Portanto $\|Ey\|$ não é $\|Ey\|_\infty$, ou seja, para $\lambda(E) \geq 1$ e $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ não ocorre a norma do supremo. Sendo assim $\|Ey\| = \sup\{f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(Ey)\|, N \geq 2\}$ para $\lambda(E) \geq 1$.

Então temos $\|Ey\| - \epsilon < \frac{1}{f(n)} \sum_{i=1}^n \|E_i Ey\|$. Consideremos z_i^* o funcional suporte de $E_i(Ey)$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$ e $x^* = f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n z_i^*$. A definição de z_i^* é análoga a feita na demonstração do Corolário 3.17 e como vimos nesta demonstração x^* é uma (M, f) -forma,

$M \geq 2$.

Logo $x^*(Ey) = f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n z_i^*(Ey) = f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i Ey\| > \|Ey\| - \epsilon$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos $\|Ey\| \leq x^*(Ey)$.

Portanto $\|Ey\| \leq \sup\{x^*(Ey) : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, f)\text{-forma}\}$ para qualquer intervalo E tal que $\lambda(E) \geq 1$.

Então aplicando o Lema 3.21 com $\epsilon = \frac{1}{2}$ e $f = g$ temos $\|\sum_{i \in A} x_i\| = |\alpha| \|\sum_{i \in A} \frac{x_i}{\alpha}\| \leq \frac{2f(N_k)}{N_k} \frac{|A|}{f(|A|)} = \frac{2|A|f(N_k)}{N_k f(|A|)}$ para qualquer subconjunto A de $\{1, 2, \dots, N_k\}$.

Se $|A| \geq \sqrt{N_k}$ então $f(|A|) \geq f(\sqrt{N_k})$ logo $\frac{1}{f(|A|)} \leq \frac{1}{f(\sqrt{N_k})}$. Com isto segue que $\frac{2f(N_k)|A|}{N_k f(|A|)} \leq \frac{2f(N_k)|A|}{N_k f(\sqrt{N_k})}$.

Vamos mostrar que $\frac{f(N_k)}{f(\sqrt{N_k})} \leq 2$, ou seja, $\frac{\log_2(N_k+1)}{\log_2(\sqrt{N_k}+1)} \leq 2$.
 $\frac{\log_2(N_k+1)}{\log_2(\sqrt{N_k}+1)} \leq 2 \iff \log_2(N_k+1) \leq 2\log_2(\sqrt{N_k}+1) \iff \log_2(N_k+1) \leq \log_2(\sqrt{N_k}+1)^2 \iff$
 $N_k + 1 \leq (\sqrt{N_k} + 1)^2$ o que é verdadeiro. Sendo assim $\frac{2f(N_k)|A|}{N_k f(|A|)} \leq \frac{4|A|}{N_k}$.

Dividindo x em pedaços sucessivos de tamanho $\sqrt{N_k}$, podemos verificar que x é um $l_{1+}^{\sqrt{N_k}}$ -average com constante 4.

De fato, $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$ considerando $y_1 = \sum_{i=1}^{\sqrt{N_k}} x_i, y_2 = \sum_{i=\sqrt{N_k}+1}^{2\sqrt{N_k}} x_i, \dots, y_{\sqrt{N_k}} = \sum_{i=(\sqrt{N_k}-1)\sqrt{N_k}+1}^{\sqrt{N_k}\sqrt{N_k}} x_i$
temos que $x = \sum_{i=1}^{\sqrt{N_k}} y_i, \|x\| = 1$ e $\|y_i\| \leq \frac{4\sqrt{N_k}}{N_k} = \frac{4\sqrt{N_k}\sqrt{N_k}}{N_k\sqrt{N_k}} = \frac{4N_k}{N_k\sqrt{N_k}} = 4(\sqrt{N_k})^{-1}$.

Portanto pela definição de l_{1+}^n -average temos que $x = \sum_{i=1}^{\sqrt{N_k}} y_i$ é um $l_{1+}^{\sqrt{N_k}}$ -average com constante 4. Vamos usar o Lema 3.13 para calcular $|y^*(x)|$.

$$\begin{aligned} |y^*(x)| &= |f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} x_i^*(x)| \leq f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |x_i^*(x)|. \text{ Considerando } E_i = \text{ran}(x_i^*) \text{ temos} \\ f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |x_i^*(x)| &= f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |(E_i x_i^*)(x)| = f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |x_i^*(E_i x)| \leq \\ &\leq f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} \|x_i^*\| \|E_i x\| \leq f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} \|E_i x\| \leq f(N_j)^{-1} 4(1 + \frac{2N_j}{\sqrt{N_k}}). \end{aligned}$$

Vamos provar que $\frac{2N_j}{\sqrt{N_k}} \leq 1$ quando $j < k$. Para isto basta mostrar que $\frac{2N_{j-1}}{\sqrt{N_j}} \leq 1$ já

que $j < k$.

Por hipótese sabemos que $N_j > M_f(2N_{j-1})$ logo $f(N_j) > 36(2N_{j-1})^2 = 144N_{j-1}^2$, ou seja, $\log_2(N_j + 1) > 144N_{j-1}^2$. Mas $4N_j \geq N_j + 1 \geq \log_2(N_j + 1)$ portanto $4N_j > 144N_{j-1}^2$, isto é, $2\sqrt{N_j} > 12N_{j-1}$. Em particular, $2\sqrt{N_j} > 4N_{j-1}$ e portanto $\sqrt{N_j} > 2N_{j-1}$. E com isto temos o resultado $\frac{2N_{j-1}}{\sqrt{N_j}} < 1$.

Assim $|y^*(x)| \leq 8f(N_j)^{-1} < 8\frac{\delta}{8} = \delta$, pois $\frac{8}{\delta} < f(N_1) < f(N_2) < \dots$

Portanto $|y^*(x)| < \delta$ para $x \in A_k$ e $y^* \in A_j^*$, $j < k$.

Verificaremos agora que se $x \in A_k$ e $y^* \in A_k^*$ então $y^*(x) > 1 - \delta$.

Novamente, aplicando o Lema 3.21 com $f = g$, sabendo que $0 < \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}$, $\frac{x}{\alpha}$ é uma RIS com constante $1 + \frac{\delta}{2}$ e que $\|E_{\alpha}^{\frac{x}{\alpha}}\| \leq \sup\{|x^*(E_{\alpha}^{\frac{x}{\alpha}})| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, f)\text{-forma}\}$, para $\lambda(E) \geq 1$, temos $\|\frac{x}{\alpha}\| \leq (1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2})N_k f(N_k)^{-1} = (1 + \delta)N_k f(N_k)^{-1}$. Portanto $\|x\| \leq (1 + \delta)N_k f(N_k)^{-1}|\alpha| = (1 + \delta)N_k f(N_k)^{-1}\|x_i\|$, para todo i .

Seja $E_i = \text{ran}(x_i)$, $i = 1, \dots, N_k$ e consideremos z_i^* o funcional suporte de $E_i x$, $i = 1, \dots, N_k$. A definição do funcional suporte é análoga a feita na demonstração do Corolário 3.17. Seja $x^* = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} z_i^*$, x^* é um elemento de A_k^* . De fato, já sabemos da demonstração do Corolário 3.17 que $\|z_i^*\| \leq 1$ para todo i e que $z_1^* < z_2^* < \dots < z_{N_k}^*$. Portanto $x^* \in A_k^*$.

$x^*(x) = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} z_i^*(x) = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \|x_i\| \geq \frac{N_k \|x\| f(N_k)}{f(N_k)(1 + \delta)N_k} = \frac{\|x\|}{(1 + \delta)} = \frac{1}{(1 + \delta)} = (1 + \delta)^{-1}$. Temos que $(1 + \delta)^{-1} > 1 - \delta$, pois $(1 + \delta)^{-1} > 1 - \delta \iff (1 + \delta)(1 - \delta) < 1 \iff -\delta^2 < 0$ o que é verdade. Logo $x^*(x) > (1 + \delta)^{-1} > 1 - \delta$, para $x \in A_k$ e $x^* \in A_k^*$.

Sejam $B_k = \{\frac{x}{\|x\|} : \exists a \in A_k, \|x - a\| < \delta\}$ e $B_k^* = A_k^*$.

Pela definição de B_k temos que $A_k \subset B_k$.

Afirmção: (B_k, B_k^*) é um sistema biortogonal assintótico com constante θ para TS .

De fato,

1) B_k é assintótico para todo k .

Seja Y um subespaço de dimensão infinita de TS , logo segue da Proposição 2.4, [15], que existe uma sequência $(z_i)_i$ normalizada tal que $\|z_i - z_j\| \geq 1$ para $j < i$.

Como $l_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \overline{Y} \subset TS$ (pág 85, [22]), temos pelo Teorema 0.16 que existe uma subsequência $(z_{i_n})_n$ de $(z_i)_i$ tal que $(z_{i_n})_n$ é fraca de Cauchy.

Seja $y_n = \frac{z_{i_n} - z_{i_{n+1}}}{\|z_{i_n} - z_{i_{n+1}}\|}$, então claramente $(y_n)_n$ é fraca nula.

Consideremos N_k e fixemos $n_1 \geq 2(1 + \frac{\delta}{2})M_f(\frac{N_k}{\delta'})/\delta'f'(1)$ e $\frac{\delta}{2n_1N_k} < \frac{1}{8}$. Tomemos q um inteiro tal que $q \log(1 + \frac{\delta}{2}) > \log f(n_1^q)$ e coloquemos $M_1 = n_1^q$.

Seja $y_{11} = y_1$, como c_{00} é denso em TS existe $c_{11} \in c_{00}$ tal que $\|y_{11} - c_{11}\| < \frac{\delta}{2n_1N_k}$.

Logo $\|y_{11}\| \leq \|y_{11} - c_{11}\| + \|c_{11}\|$, ou seja, $1 \leq \frac{1}{8} + \|c_{11}\|$. Portanto $t_{11} = \|c_{11}\| \geq \frac{7}{8} \geq \frac{1}{2}$.

Seja m_1 tal que $\text{supp}(c_{11}) \subset [1, m_1]$. Como $y_n \rightarrow 0$ fracamente, existe $y_{12} \in \{y_n\}_n$ tal que a j -essima coordenada de y_{12} fica pequena $\forall j$, $1 \leq j \leq m_1$, então podemos supor que $\|P_{m_1}(y_{12})\| < \frac{\delta}{6n_1N_k}$, onde P_{m_1} é a projeção de y_{12} sobre o intervalo $[1, m_1]$.

Novamente existe $d_{12} \in c_{00}$ tal que $\|y_{12} - d_{12}\| < \frac{\delta}{6n_1N_k}$.

Seja c_{12} a projeção de d_{12} no intervalo $[m_1 + 1, +\infty)$.

Podemos notar que $\|P_{m_1}(d_{12}) - P_{m_1}(y_{12})\| \leq \|d_{12} - y_{12}\| < \frac{\delta}{6n_1N_k}$. Logo $\|P_{m_1}(d_{12})\| \leq \|P_{m_1}(d_{12}) - P_{m_1}(y_{12})\| + \|P_{m_1}(y_{12})\| < \frac{\delta}{6n_1N_k} + \frac{\delta}{6n_1N_k} = \frac{\delta}{3n_1N_k} \leq \frac{1}{12}$.

Como $c_{12} = d_{12} - P_{m_1}(d_{12})$, temos que $\|d_{12}\| \leq \|c_{12}\| + \|P_{m_1}(d_{12})\|$, análogo ao que fizemos para $\|c_{11}\|$ temos que $\|d_{12}\| \geq \frac{23}{24}$. Portanto $\|c_{12}\| \geq \frac{23}{24} - \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$. Coloquemos $t_{12} = \|c_{12}\|$.

Continuando este processo encontraremos $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1M_1} \in c_{00}$, $c_{11} < c_{12} < \dots < c_{1M_1}$ e $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1M_1} \in Y$ com $t_{1i} = \|c_{1i}\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq M_1$ satisfazendo $\|y_{1i} - c_{1i}\| < \frac{\delta}{2n_1N_k}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq M_1$.

Pela observação 3.12, possivelmente renumerando os índices, nós podemos supor que $(\frac{c_{11}}{t_{11}} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{t_{1n_1}})$ é um $l_{1+}^{n_1}$ -average com constante $1 + \frac{\delta}{2}$.

De maneira análoga é possível construir N_k $l_{1+}^{n_1}$ -average $(\frac{c_{11}}{t_{11}} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{t_{1n_1}})$ satisfazendo a definição de RIS.

Sejam $b = \frac{c_{11}}{t_{11}} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{t_{1n_1}} + \dots + \frac{c_{N_k 1}}{t_{N_k 1}} + \dots + \frac{c_{N_k n_{N_k}}}{t_{N_k n_{N_k}}}$ e $s = \|b\| \geq \|\frac{c_{11}}{t_{11}} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{t_{1n_1}}\| = 1$.

Logo $a = \frac{b}{s} \in A_k$. Tomemos $x = \frac{1}{s}(\frac{y_{11}}{t_{11}} + \dots + \frac{y_{1n_1}}{t_{1n_1}} + \dots + \frac{y_{N_k 1}}{t_{N_k 1}} + \dots + \frac{y_{N_k n_{N_k}}}{t_{N_k n_{N_k}}}) \in Y$.

Logo $\|x - a\| \leq \frac{1}{s}(\|\frac{y_{11}}{t_{11}} - \frac{c_{11}}{t_{11}}\| + \dots + \|\frac{y_{N_k n_{N_k}}}{t_{N_k n_{N_k}}} - \frac{c_{N_k n_{N_k}}}{t_{N_k n_{N_k}}}\|) < \frac{1}{s}[n_1 \frac{\delta}{2n_1 N_k} + n_2 \frac{\delta}{2n_2 N_k} + \dots + n_{N_k} \frac{\delta}{2n_{N_k} N_k}] < \delta$. Portanto $\frac{x}{\|x\|}$ pertence a B_k e pertence a $S(Y)$, ou seja $B_k \cap S(Y) \neq \emptyset$, consequentemente B_k é assintótico.

2) Seja $b = \frac{x}{\|x\|} \in B_k$, logo existe $a \in A_k$ tal que $\|x - a\| < \delta$, em particular, $\|x\| \leq 1 + \delta$. Portanto existe $a^* \in A_k^*$ tal que $a^*(a) > 1 - \delta$.

De $|a^*(x) - a^*(a)| < \delta$, segue que $1 - 2\delta < a^*(a) - \delta < a^*(x)$ e portanto $1 - \theta = \frac{1-2\delta}{1+\delta} \leq \frac{1-2\delta}{\|x\|} \leq a^*(b)$. Portanto $a^*(b) \geq 1 - \theta$.

3) Sejam $n \neq m$, $b = \frac{x}{\|x\|} \in B_n$ e $a^* \in A_m^*$.

Existe $a \in A_n$ tal que $\|x - a\| < \delta$ e $|a^*(a)| < \delta$, em particular, $\|x\| > 1 - \delta$.

Consequentemente $|a^*(x)| \leq |a^*(x) - a^*(a)| + |a^*(a)| < 2\delta$, logo $|a^*(\frac{x}{\|x\|})| \leq \frac{2\delta}{1-\delta} < \theta$.

Por 1), 2) e 3) temos que (B_k, B_k^*) é um sistema biortogonal assintótico com constante θ para TS . ■

Corolário 3.23 Fixado $C \in \mathbb{R}$, $C > 1$ o espaço TS pode ser renormado de forma a não conter nenhuma sequência básica C -incondicional.

Demonstração

Segue do Teorema acima e do Teorema 3.3. ■

Capítulo 4

O espaço de Gowers e Maurey

Neste capítulo finalmente construiremos o espaço de Gowers e Maurey. Como já foi dito este espaço foi o primeiro exemplo de espaço de Banach hereditariamente indecomponível.

A sua construção é bem parecida com a construção do espaço de Thomas Schlumprecht feita no capítulo anterior.

Inicialmente fixaremos um, particular, subconjunto infinito J dos naturais e no Lema 4.2 estudaremos todas as propriedades de J usadas no decorrer do capítulo.

Em seguida fixada uma norma qualquer $\|\cdot\|$ em c_{00} e dividindo J em dois, particulares, subconjuntos infinitos disjuntos definiremos o que chamaremos funcionais especiais em $(c_{00}, \|\cdot\|)$.

E assim, estaremos em condições de partindo de c_{00} com a norma do supremo definir indutivamente o espaço de Gowers e Maurey.

Finalmente, com o auxílio de quatro Lemas provaremos que esse espaço é hereditariamente indecomponível, e a partir desta propriedade verificaremos que ele também não possui nenhuma sequência básica incondicional.

A teoria apresentada neste capítulo pode ser encontrada em [11].

Como no capítulo anterior fixemos $f(x) = \log_2(x + 1)$.

Definição 4.1 Seja $J \subset \mathbb{N}$ o conjunto denotado por $\{j_1, j_2, \dots\}$ onde, $j_1 = 10^{10^{10^{400}}}$, $j_2 = 10^{10^{10^4(j_1)^2}}$, ..., $j_{n+1} = 10^{10^{10^4(j_n)^2}}$.

Lema 4.2 Para os elementos do conjunto J temos:

- 1) $(j_n)^{1/40} \in \mathbb{N}$, $\forall n$.
- 2) $j_m > j_n \Rightarrow \ln \ln \ln j_m \geq 4(j_n)^2$.
- 3) $f(j_1) > 256$.
- 4) $j_n \geq n + 2$, $\forall n$. Em particular, $j_{n-1} \geq n + 1$ e portanto $(j_{n-1})^2 \geq n^2 + 1$.
- 5) $j_n \geq 10^{(10^{10})(n^2+1)}$, $\forall n$.
- 6) $(j_{2k})^{1/40} \geq \frac{40M_f(10k)}{f'(1)}$, $\forall k$.
- 7) $j_{2k} \geq 16k^4$, $\forall k$.

Demonstração

1) Vamos fazer a prova por indução.

$n = 1$, $(j_1)^{1/40} = (10^{10^{10^{400}}})^{1/40} = 10^{10^{10^{10}}}$ que é inteiro.

$n = 2$, $(j_2)^{1/40} = (10^{10^{10^4(j_1)^2}})^{1/40} = 10^{10^{10(j_1)^2/10}}$ que é inteiro, pois $(j_1)^2$ é divisível por 10.

Suponha que j_n é inteiro, vamos provar que j_{n+1} é inteiro.

$(j_{n+1})^{1/40} = (10^{10^{10^4(j_n)^2}})^{1/40} = 10^{10^{10(j_n)^2/10}}$ que é inteiro, pois $(j_n)^2$ é divisível por 10.

Portanto $(j_n)^{1/40} \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) De fato, $\ln \ln \ln j_m \geq \log \log \log j_m \geq \log \log \log j_{n+1} = 4(j_n)^2$.

3) De fato, $f(j_1) = \log_2(1 + 10^{10^{10^{400}}}) \geq \log_2(10^{10^{10^{400}}}) \geq 10^{10^{400}} > 256$.

4) Vamos fazer a prova por indução.

$n = 1$, $j_1 \geq 3$. Suponha que $i + 2 \leq j_i$, $\forall i \leq n$. Vamos provar que $n + 3 \leq j_{n+1}$.

Ora $j_{n+1} = 10^{10^{10^4(j_n)^2}} \geq 4(j_n)^2 \geq j_n j_n \geq (n+2)(n+2) = (n+2)^2 \geq (n+2)+1 = n+3$.

Portanto $j_n \geq n + 2$, $\forall n$.

5) De fato,

$j_n \geq 10^{(10^{10})(n^2+1)} \iff \log j_n \geq \log 10^{(10^{10})(n^2+1)} \iff 10^{10^4(j_{n-1})^2} \geq (10^{10})(n^2 + 1) \iff \log 10^{10^4(j_{n-1})^2} \geq \log(10^{10})(n^2 + 1) \iff 10^{4(j_{n-1})^2} \geq 10 \log 10 + \log(n^2 + 1) \iff 10^{4(j_{n-1})^2} \geq 10 + \log(n^2 + 1)$.

Mas $10^{4(j_{n-1})^2} = (10^4)^{(j_{n-1})^2} \geq (10 + 10)^{n^2+1} \geq 10^{n^2+1} + 10^{n^2+1} \geq 10 + \log(n^2 + 1)$.
pois $\log x \leq 10^x$ e $(a + a)^n \geq a^n + a^n, \forall a \in \mathbb{R}_+$. Portanto $j_n \geq 10^{(10^{10})(n^2+1)}, \forall n$.

$$6) f'(1) = \frac{1}{2} \log_2 e, \text{ logo } \frac{1}{2} \leq f'(1) \leq 1.$$

Como $f'(1) \geq \frac{1}{2}$, basta provarmos que $(j_{2k})^{1/40} \geq 80M_f(10k), \forall k$.

Seja x_0 tal que $M_f(10k) = x_0$, logo $f(x_0) = 36(10k)^2$, ou seja, $\log_2(x_0 + 1) = 36(10k)^2$ e portanto $x_0 + 1 = 2^{36 \cdot 5^2 \cdot (2k)^2}$.

Como $(80x_0)^{40} \leq (80(x_0 + 1))^{40}$ temos que provar que $(80 \cdot 2^{36 \cdot 5^2 \cdot (2k)^2})^{40} \leq j_{2k}$, isto é.
 $80^{40} 2^{36 \cdot 5^2 \cdot 40 \cdot (2k)^2} \leq j_{2k}$.

Mas $(80)^{40} 2^{36 \cdot 5^2 \cdot 40 \cdot (2k)^2} \leq (10^{10^{10}}) 10^{40^4 (2k)^2} \leq (10^{10^{10}}) 10^{(10^{10})(2k)^2} \leq 10^{(10^{10})((2k)^2+1)} \leq j_{2k}$ pelo item 5. Portanto $(j_{2k})^{1/40} \geq \frac{40M_f(10k)}{f'(1)} \forall k$.

7) Vamos fazer a prova por indução.

Para $k = 1$, $16 \leq j_2$. Suponha que $16k^4 \leq j_{2k}$ para $k \leq n$.

Ora $j_{2n+1} = 10^{10^{10^4(j_{2n})^2}} \geq 4(j_{2n})^2 \geq j_{2n}j_{2n} \geq 16n^4 16n^4 = 256n^8$.
 $256n^8 \geq 16(n+1)^4 \iff 16n^8 \geq (n+1)^4 \iff 4n^4 \geq (n+1)^2 \iff 4(n^2n^2) \geq (n+1)(n+1)$
o que é verdade pois $n^2 \geq n+1$. ■

Definição 4.3 Sejam K e L os subconjuntos de J dados por $K = \{j_1, j_3, j_5, \dots\}$ e $L = \{j_2, j_4, j_6, \dots\}$, Q o subconjunto de c_{00} consistindo de todas as seqüências de coordenadas racionais no intervalo $[-1, 1]$ e σ uma função injetora do conjunto das seqüências finitas de elementos sucessivos de Q com imagem no conjunto L com a propriedade de que se $z_1, \dots, z_s$ é uma qualquer dessas seqüências sucessivas, $S = \sigma(z_1, \dots, z_s)$ e $z = \sum_{i=1}^s z_i$, então $\frac{1}{20} f(S^{1/40})^{1/2} \geq |\text{ran}(z)|$.

Definição 4.4 Seja $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre as seqüências de suporte finito. Para todo $m \in \mathbb{N}$, definimos $A_m^*(X)$ como sendo o conjunto dos funcionais lineares da forma $f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m f_i$ tais que,
1) $f_1 < f_2 < \dots < f_m$.
2) $\|f_i\| \leq 1$ para todo i .

Observação 4.5 Seja $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ satisfazendo uma f -estimativa inferior então os funcionais pertencentes a $A_m^*(X)$ tem norma menor ou igual a um.

De fato, consideremos $\theta \in A_m^*(X)$ logo $\theta = f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m f_i$, onde $f_1 < \dots < f_m$ e $\|f_i\| \leq 1$ para todo i . Tomemos $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$ e calculemos $|\theta(x)|$.

$$|\theta(x)| = |f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m f_i(x)| \leq f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m |f_i(x)|.$$

Seja $E_i = \text{ran}(f_i)$ então $f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m |f_i(x)| = f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m |E_i f_i(x)| =$

$$f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m |f_i(E_i x)| \leq f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m \|f_i\| \|E_i x\| \leq f(m)^{-1} \sum_{i=1}^m \|E_i x\| \leq \|x\|.$$

Portanto $\|\theta\| \leq 1, \forall \theta \in A_m^*(X)$. ■

Definição 4.6 Seja $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$. Se $k \in \mathbb{N}$, seja Γ_k^X o conjunto das seqüências $g_1 < g_2 < \dots < g_k$ tais que $g_i \in Q$ para cada i , $g_1 \in A_{j_{2k}}^*(X)$ e $g_{i+1} \in A_{\sigma(g_1, \dots, g_i)}^*(X)$ para qualquer i , $1 \leq i \leq k-1$. Estas seqüências são chamadas de seqüências especiais.

Definição 4.7 Seja $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos $B_k^*(X)$ como sendo o conjunto dos funcionais lineares da forma $f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k g_j$ tal que $(g_1, \dots, g_k) \in \Gamma_k^X$. Estes funcionais são chamados de funcionais especiais.

Observação 4.8 Se $\theta \in \{g_i\}_{i=1}^k$ onde $(g_1, \dots, g_k) \in \Gamma_k^X$ então podemos escrever $\theta = (a_i)_i$ onde $(a_i)_i \in Q$ e portanto se $x = (b_i)_i \in c_{00}$ também podemos escrever $\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Definiremos agora uma norma em c_{00} como sendo o limite de uma seqüência de normas .

Seja $X_0 = (c_{00}, \|\cdot\|_0)$ onde $\|x\|_0 = \|x\|_{\infty}$ e para $N \geq 0$ definimos

$$\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_{X_N} \vee \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\}.$$

Observação Se $\|x\|_{X_N} \leq \|x\|_{X_{N+1}}$, para todo $x \in c_{00}$, então $B_k^*(X_N) \subset B_k^*(X_{N+1})$.

A demonstração de que $\|x\|_{X_N}$ é norma em c_{00} é análoga a demonstração feita para o espaço de Tsirelson.

Vamos estudar agora algumas propriedades de $(\|x\|_{X_N})_N$.

1) $(\|x\|_{X_N})_N$ é uma sequência crescente de normas.

De fato, pela definição de $\|x\|_{X_{N+1}}$ temos $\|x\|_{X_{N+1}} \geq \|x\|_{X_N}$ para qualquer $N \geq 0$.

2) $(\|x\|_{X_N})_N$ é limitada pela norma l_1 .

De fato, seja $x = (x_n)_n \in c_{00}$ temos que $\|x\|_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_{l_1}$.

Suponhamos que $\|x\|_{X_N} \leq \|x\|_{l_1}$. Vamos provar que $\|x\|_{X_{N+1}} \leq \|x\|_{l_1}$.

caso 1:

$$\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_{X_N} \leq \|x\|_{l_1}.$$

caso 2:

$$\|x\|_{X_{N+1}} = \sup \{ f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n \} \leq \sup \{ \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{l_1} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n \} \leq \|x\|_{l_1}.$$

caso 3:

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_{N+1}} &= \sup \{ |\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N} \} = \sup \{ |f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k g_j(Ex)| : \\ &k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N} \} \leq \sup \{ |\sum_{j=1}^k g_j(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N} \} \leq \\ &\sup \{ |g_1(Ex)| + |g_2(Ex)| + \dots + |g_k(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N} \} \leq \sup \{ \sum_{i \in E_1 \cap E} |x_i| + \\ &\sum_{i \in E_2 \cap E} |x_i| + \dots + \sum_{i \in E_k \cap E} |x_i| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N} \} \leq \|x\|_{l_1} \text{ onde } E_i = \text{ran}(g_i) \text{ e} \\ &\text{como } g_1 < \dots < g_k \text{ temos } \text{ran}(g_1) < \dots < \text{ran}(g_k). \end{aligned}$$

Logo $\|x\|_{X_{N+1}} \leq \|x\|_{l_1}$. Assim temos que $\|x\|_{X_N} \leq \|x\|_{l_1}, \forall N \geq 0$.

Por 1) e 2) temos que existe $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|x\|_{X_N}$. Definamos então $\|x\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|x\|_{X_N}$ e $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$.

Definição 4.9 O completado de $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ é o espaço de Gowers e Maurey, denotado por X_{GM} .

A seguir faremos uma Proposição que nos dará uma forma implícita para a norma do espaço X .

Proposição 4.10 Para $x \in c_{00}$ e qualquer $N \geq 0$ temos,

- a) $\|x\|_{X_{N+1}} = \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\}$ ou $\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_\infty$.
- b) $\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\| : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N}\}$.

Demonstração:

- a) Sejam $x \in c_{00}$ e $N \geq 0$. Suponhamos que $\|x\|_{X_{N+1}} > \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\}$.

Então pela definição de $\|x\|_{X_{N+1}}$ temos que $\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_{X_N}$. Segue assim que $\|x\|_{X_N} > \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\} \geq \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_{N-1}} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_{N-1}), E \subset \mathbb{N}\}$.

E assim pela definição de $\|x\|_{X_N}$ temos que $\|x\|_{X_N} = \|x\|_{X_{N-1}}$.

Continuando o raciocínio teremos que $\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_{X_0} = \|x\|_\infty$.

- b) Análogo ao que fizemos para o espaço de Tsirelson temos $\|x\|_{X_{N+1}} = \|x\|_\infty \vee \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\}$. Como a função máximo é contínua passando o limite temos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|x\|_{X_{N+1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty \vee \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\|_{X_N} : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X_N), E \subset \mathbb{N}\}.$$

Logo pela definição de $\|\cdot\|$ temos

$$\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup\{f(n)^{-1} \sum_{i=1}^n \|E_i x\| : n \geq 2, E_1 < \dots < E_n\} \vee \sup\{|\bar{g}(Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N}\}, \forall x \in c_{00}. \quad \blacksquare$$

Observação 4.11 Note que se permitíssemos que os $E_{i's}$ fossem subconjuntos finitos quaisquer de $\mathbb{N}$ e não necessariamente intervalos, então a base vetorial $(e_n)_n$ do espaço seria incondicional.

De fato, vamos assumir que os $E_{i's}$ possam ser subconjuntos e consideremos A e B subconjuntos finitos dos naturais com $A \subset B$.

Usando a definição implícita do espaço normado X temos

$$1) \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\| = \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\|_{\infty} \vee \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \left\| E_i \sum_{n \in B} a_n e_n \right\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N \right\} \vee \sup \left\{ \left| \bar{g} \left(E \sum_{n \in B} a_n e_n \right) \right| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N} \right\}.$$

$$2) \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| = \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\|_{\infty} \vee \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \left\| E_i \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N \right\} \vee \sup \left\{ \left| \bar{g} \left(E \sum_{n \in A} a_n e_n \right) \right| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N} \right\}.$$

$$\text{Se } \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| = \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\|_{\infty} \text{ temos que } \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\|_{\infty} \leq \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\|_{\infty} \leq \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\|.$$

$$\text{Se } \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| = \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \left\| E_i \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N \right\} \text{ temos que}$$

$$\sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \left\| E_i \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N \right\} \leq \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \left\| E_i \sum_{n \in B} a_n e_n \right\| : N \geq 2, E_1 < \dots < E_N \right\} \leq \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\|.$$

$$\text{Se } \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| = \sup \left\{ \left| \bar{g} \left(E \sum_{n \in A} a_n e_n \right) \right| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N} \right\} \text{ temos que}$$

$$\sup \left\{ \left| \bar{g} \left(E \sum_{n \in A} a_n e_n \right) \right| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N} \right\} \leq \sup \left\{ \left| \bar{g} \left(E \sum_{n \in B} a_n e_n \right) \right| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N} \right\} \leq \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\|.$$

$$\text{Portanto } \left\| \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in B} a_n e_n \right\| \text{ para subconjuntos finitos dos naturais com } A \subset B.$$

Logo pelo Teorema 0.5 temos que a inequação acima implica que $(e_n)_n$ é base incondicional para o espaço. Por isso só consideraremos intervalos para formar a norma do espaço de Gowers e Maurey. ■

Passaremos a enunciar os Lemas (bastante técnicos) necessários para demonstrarmos que o espaço é hereditariamente indecomponível. O leitor perceberá que a demonstração de cada Lema dependerá do Lema anterior.

As técnicas utilizadas no último Lema serão de grande importância para a demonstração do principal resultado desta dissertação, isto é, Teorema 4.17.

Lema 4.12 *Se $N \in J \setminus K_0$ então $G(x) = x f^{-1}(x)$ para todo x no intervalo $[\ln N, \exp N]$, onde $K_0 \subset K$ é um subconjunto dos naturais e G é a função construída na Observação 2.10.*

Demonstração:

Sejam $k, l \in K_0 \cup \{1\}$ o maior e o menor número respectivamente tal que $k < N$ e $l > N$.

Temos que $(k!)^4 < f^{-1}(f(l)^{1/2})$. De fato, sabemos que $\ln \ln N < \exp \exp N$ e vamos verificar que 1) $(k!)^4 < \ln \ln N$ e 2) $f^{-1}(f(l)^{1/2}) > \exp \exp N$.

1) $(k!)^4 < \ln \ln N \iff 4 \ln k! < \ln \ln \ln N$. Mas $4k^2 \leq \ln \ln \ln N$, logo basta demonstrarmos que $4 \ln k! < 4k^2$, isto é, $k! < e^{k^2}$. Por indução temos, $k = 1, 1 < e, k = 2, 2 < e^4$.

Suponha que é verdadeiro para $k \leq n$. Vamos provar que é verdadeiro para $n + 1$. $(n + 1)! = (n + 1)n! < (n + 1)e^{n^2} < e^{(n+1)^2}$, pois $e^{(n+1)^2} = e^{n^2+2n+1} = e^{n^2} \cdot e^{2n+1}$, e como vamos verificar $(n + 1) < e^{2n+1}$.

Temos que $n + 1 \leq 2n + 1$ e $e > 2$ portanto $n + 1 < e^{2n+1}$. Portanto $k! < e^{k^2}$.

2) $e^{e^N} < f^{-1}(f(l)^{1/2}) \iff f(e^{e^N}) < f(l)^{1/2}$, isto é, $\log_2(1 + e^{e^N}) < (\log_2(1 + l))^{1/2}$.

Como $e^{e^{4N^2}} \leq l \leq l + 1$ segue que $\log_2(e)^{e^{4N^2}} < \log_2(l + 1)$, ou seja, $e^{e^{4N^2}} \leq e^{e^{4N^2}} \log_2 e < \log_2(l + 1)$ e portanto $f(e^{e^N}) < e^{e^N} \leq e^{e^{2N^2}} < (\log_2(l + 1))^{1/2}$.

Seja x com $(k!)^4 < x < f^{-1}(f(l)^{1/2})$, logo $f(x) < f(l)^{1/2}$. Como $(k!)^4 < x < f^{-1}(f(l)^{1/2})$ temos que $x \notin K_0$, pois se $x \in K_0$ então $x \leq k$ ou $l \leq x$.

No primeiro caso teríamos $x \leq k \leq (k!)^4$, absurdo.

No segundo caso teríamos $f(l)^{1/2} \leq f(l) \leq f(x)$, absurdo.

Sabemos pela Observação 2.10 que $h(x) = \inf A$, onde $A = \{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) : x_1x_2\dots x_m \geq x\}$. Como $\phi(x) \in A$, segue que $h(x) \leq \phi(x) = f(x)$ pela definição de ϕ dada na Observação 2.10. Como $\phi(1) = 1$, podemos assumir que todos os x_i 's, com $x_1x_2\dots x_m \geq x$ são diferentes de 1.

Observação 1: $h(x) = \inf B$, onde $B = \{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) : x_1x_2\dots x_m \geq x, \text{ e tal que existe no máximo um } j \text{ com } x_j \notin K_0\}$. Pois mostraremos que dado $a \in A$, $\exists b \in B$, com $b \leq a$.

De fato, se x_1 e x_2 , por exemplo, não pertencem a K_0 , então $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) = f(x_1)f(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) \geq f(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m)$.

caso 1: $x_1x_2 \in K_0$.

Logo $\phi(x_1x_2) = f(x_1x_2)^{1/2}$ e portanto $f(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) \geq f(x_1x_2)^{1/2}\phi(x_3)\dots\phi(x_m) = \phi(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m)$, isto é, $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) \geq \phi(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m)$.

caso 2: $x_1x_2 \notin K_0$.

Logo $\phi(x_1x_2) = f(x_1x_2)$ e portanto $f(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) = \phi(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m)$, isto é, $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) \geq \phi(x_1x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m)$.

Procedendo analogamente com outros pares de pontos que eventualmente não pertençam a K_0 , pode se supor que $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_m) \geq \phi(x'_1)\phi(x'_2)\phi(x'_3)\dots\phi(x'_m)$ com $x'_1x'_2x'_3\dots x'_m \geq x$ e com no máximo um dos $x'_i \notin K_0$.

Observação 2: $h(x) = \inf C$, onde $C = \{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) : x_1x_2\dots x_m \geq x, \text{ e tal que existe no máximo um } j \text{ com } x_j \notin K_0 \text{ e não existe } r, s, t \text{ tal que } x_r = x_s = x_t \in K_0\}$. Pois mostraremos que dado $b \in B$, existe $c \in C$, com $c \leq b$.

Primeiro vamos verificar que $\forall p \in K, f(p)^{3/2} > f(p^3)$.

Consideremos $D(x) = (\log_2(x+1))^{3/2} - \log_2(x^3+1)$. Vamos verificar que $D(x) > 0$. $D(1048576) = (\log_2(1048576+1))^{3/2} - \log_2((1048576)^3+1) > 0$, pois $(\log_2(1048576+1))^{3/2} - \log_2((1048576)^3+1) > (\log_2 1048576)^{3/2} - \log_2((1048576)^3)$, $(\log_2 1048576)^{3/2} > 89$ e $\log_2((1048576)^3) = 60$.

$D'(x) = \frac{3\log_2 e}{x+1} \left(\frac{(\log_2(x+1))^{1/2}}{2} - \frac{x^2}{x^2-x+1} \right)$. Seja $H(x) = \frac{(\log_2(x+1))^{1/2}}{2} - \frac{x^2}{x^2-x+1}$.

$H(65535) > 0$, pois $\frac{(\log_2(65535+1))^{1/2}}{2} = 2$ e $\frac{(65535)^2}{(65535)^2-65535+1} < 1, 1$.

$H'(x) = \frac{\log_2 e}{4(x+1)(\log_2(x+1))^{1/2}} + \frac{x^2}{(x^2-x+1)^2} - \frac{2x}{(x^2-x+1)^2}$.

$H'(x) > 0 \iff \frac{x^2-2x}{(x^2-x+1)^2} > 0 \iff x^2-2x > 0 \iff x < 0 \text{ ou } x > 2$.

Como estamos trabalhando com valores maiores do que dois temos o resultado, ou seja, H é uma função positiva logo D é uma função positiva.

Então, se por exemplo, $x_1 = x_2 = x_3 \in K_0$ temos $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\dots\phi(x_m) = f(x_1)^{1/2}f(x_1)^{1/2}f(x_1)^{1/2}\phi(x_4)\dots\phi(x_m) = f(x_1)^{3/2}\phi(x_4)\dots\phi(x_m) > f(x_1^3)\phi(x_4)\dots\phi(x_m)$.

Verificaremos agora que se $p \in J$ então $p^3 \notin J$.

De fato, se p e p^3 estão em J , então como $p < p^3$ temos que ter $\ln \ln \ln p^3 \geq 4p^2$.

Ora $\ln \ln \ln p^3 \leq \ln \ln p^3 \leq \ln p^3$ e $\ln p^3 \leq 4p^2$ como veremos.

De fato, $\ln p^3 \leq 4p^2 \iff 3 \ln p \leq 4p^2$, o que é verdade para $p \geq 1$.

Portanto não temos $\ln \ln \ln p^3 \geq 4p^2$, logo $p^3 \notin J$.

Em particular, como $x_1 \in K_0$ temos que $x_1^3 \notin K_0$, logo $\phi(x_1^3) = f(x_1^3)$. Consequentemente $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\dots\phi(x_m) > \phi(x_1^3)\phi(x_4)\dots\phi(x_m)$.

Procedendo analogamente com outras eventuais triplas e também usando o que foi feito na Observação 1 teremos provado o desejado.

Observação 3: $h(x) = \inf D$, onde $D = \{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) : x_1x_2\dots x_m \geq x, \text{ e tal que existe no máximo um } j \text{ com } x_j \notin K_0 \text{ e não existe } r, s, t \text{ tal que } x_r = x_s = x_t \in K_0 \text{ e se } x_j \in K_0 \text{ então } x_j \leq k\}\}$.

Basta demonstrarmos que se $x_1x_2\dots x_m \geq x$, com algum $x_j \in K_0$ e $k < x_j$ então $\phi(x) < \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)$ e $\phi(x) \in D$.

De fato, como $x < f^{-1}(f(l)^{1/2})$ segue que $f(x) < f(l)^{1/2}$ e como $k < x_j$, então pela escolha de l concluímos que $l \leq x_j$, portanto $\phi(x) = f(x) < f(l)^{1/2} \leq f(x_j)^{1/2} \leq \phi(x_1)\dots\phi(x_j)\dots\phi(x_m)$ e por outro lado como $x \notin K_0$ então $\phi(x) \in D$.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementos de K_0 , com $x_j \leq k, \forall j, 1 \leq j \leq m$ e tal que não existe r, s, t com $x_r = x_s = x_t \in K_0$ então $x > x_1x_2\dots x_m$.

De fato, temos $x_1x_2\dots x_m \leq 2^23^2\dots k^2 = (k!)^2 < (k!)^4 < x$.

Da observação acima e da Observação 3 concluímos que $h(x) = \inf E$, onde $E = \{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) : x_1x_2\dots x_m \geq x, \text{ e tal que existe exatamente um } x_j \notin K_0 \text{ e não existe } r, s, t \text{ tal que } x_r = x_s = x_t \in K_0 \text{ e se } x_j \in K_0 \text{ então } x_j \leq k\}\}$.

Seja $\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)$ um elemento de E e, por exemplo, x_1 o único elemento que

não pertence a K_0 . Suponhamos que $m > 1$.

Como $x_2 \dots x_m \leq (k!)^2 \leq x^{1/2}$, temos que $x_1 \geq x^{1/2}$ e portanto $\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) = f(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) \geq f(x^{1/2})f(\min K)^{1/2}$.

Como $f(j_1) \geq 256$, segue que $f(\min K)^{1/2} \geq 16$ e portanto $\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) \geq 6f(x^{1/2}) > f(x) = \phi(x)$.

De fato $6f(x^{1/2}) > f(x)$, pois considere $D(x) = 6f(x^{1/2}) - f(x)$. $D(1) = 5 > 0$ e $D'(x) = \log_2 e \left(\frac{3}{x^{1/2}+x} - \frac{1}{x+1} \right)$. Vamos verificar que $D'(x) > 0$. $\frac{3}{x^{1/2}+x} - \frac{1}{x+1} > 0 \iff 3x+3 > x^{1/2}+x \iff 2x > x^{1/2}-3$ o que é verdade pois $\sqrt{x} < x < 2x$ e como $\sqrt{x}-3 < \sqrt{x} < 2x$ temos o que queríamos.

Portanto D é uma função positiva, logo $6f(x^{1/2}) > f(x)$.

Portanto qualquer elemento de E é maior que $\phi(x)$ e como $x \notin K_0$ temos que $\phi(x) \in E$, logo $\inf E = \phi(x) = f(x)$.

Sabemos agora que $H(x) = \frac{x}{f(x)}$, $\forall x \in ((k!)^4, f^{-1}(f(l)^{1/2}))$ e, em particular, para todo x no intervalo $[\ln \ln N, \exp \exp N]$. Temos que $[\ln N, \exp N] \subset [\ln \ln N, \exp \exp N]$. Consideremos $x_0 \in [\ln N, \exp N]$.

Teremos $G(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)}$ se a reta tangente $r(x)$ ao gráfico de $\frac{x}{f(x)}$ no ponto $(x_0, \frac{x_0}{f(x_0)})$ for pelo menos maior que $\frac{x}{\sqrt{f(x)}}$ para todo x positivo fora do intervalo $[\ln \ln N, \exp \exp N]$.

De fato, como $H(x) = \frac{x}{f(x)}$ é concava no intervalo $[\ln \ln N, \exp \exp N]$ temos que $\sup\{\lambda_1 H(x_1) + \lambda_2 H(x_2) + \dots + \lambda_n H(x_n) : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = x_0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ e } x_1, x_2, \dots, x_n \in [\ln \ln N, \exp \exp N]\} = H(x_0)$.

Por outro lado seja $x \in \mathbb{R}_+$, como $f(x)^{1/2}$ é submultiplicativa e $f(x)^{1/2} \leq \phi(x)$ segue pela definição de h que $f(x)^{1/2} \leq h(x)$ e portanto $H(x) = \frac{x}{f(x)} \leq \frac{x}{h(x)^{1/2}}$.

Se $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq r(x)$, $\forall x$ fora do intervalo $[\ln \ln N, \exp \exp N]$, então $H(x) \leq r(x)$, $\forall x$ fora do intervalo $[\ln \ln N, \exp \exp N]$ e portanto se $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = x_0$ teremos $\lambda_1 H(x_1) + \lambda_2 H(x_2) + \dots + \lambda_n H(x_n) \leq \lambda_1 r(x_1) + \lambda_2 r(x_2) + \dots + \lambda_n r(x_n)$.

r é uma reta logo $r(x) = ax + b$. Temos que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = x_0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. logo $\lambda_1 r(x_1) + \lambda_2 r(x_2) + \dots + \lambda_n r(x_n) = \lambda_1(ax_1 + b) + \lambda_2(ax_2 + b) + \dots + \lambda_n(ax_n + b) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = ax_0 + b = r(x_0) = H(x_0)$.

Portanto $\sup\{\lambda_1 H(x_1) + \lambda_2 H(x_2) + \dots + \lambda_n H(x_n) : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = x_0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} = H(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)}$, isto é, $G(x_0) = H(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)}$.

Cálculo de $r(x)$:

$(\frac{x}{f(x)})' = \frac{f(x) - xf'(x)}{f(x)^2}$, com $f'(x) = \frac{\log_2 e}{x+1}$. Logo, $r(x) = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f(x_0)^2}(x - x_0)$, isto é,
 $r(x) = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{1}{f(x_0)}(1 - \frac{x_0 \log_2 e}{(1+x_0) \log_2(x_0+1)})(x - x_0)$.

Então $r(x) = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{1}{f(x_0)}(1 - \frac{x_0}{(1+x_0) \ln(x_0+1)})(x - x_0)$.

Como o coeficiente angular é positivo a reta tangente é estritamente crescente.

Quando $x \geq 0$, tem-se $r(x) \geq r(0)$,

$$r(0) = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{1}{f(x_0)}(1 - \frac{x_0 \log_2 e}{(1+x_0) \log_2(x_0+1)})(-x_0) = \frac{x_0^2}{\log_2(x_0+1)(x_0+1) \ln(x_0+1)} = \frac{x_0^2 \ln 2}{(x_0+1)(\ln(x_0+1))^2}.$$

Mas $\frac{x_0^2 \ln 2}{(x_0+1)(\ln(x_0+1))^2} \geq \frac{x_0}{2(\log_2(x_0+1))^2}$, pois $\frac{x_0^2 \ln 2}{(x_0+1)(\ln(x_0+1))^2} \geq \frac{x_0}{2(\log_2(x_0+1))^2} \iff \frac{x_0^2 \ln 2}{(x_0+1)(\ln(x_0+1))^2} \geq \frac{x_0 (\ln 2)^2}{2(\ln(x_0+1))^2} \iff \frac{x_0^2}{(x_0+1)} \geq \frac{x_0 \ln 2}{2} \iff \frac{2x_0}{x_0+1} \geq \ln 2 \iff e^{\frac{2x_0}{x_0+1}} \geq 2$, o que é verdade pois $\frac{2x_0}{x_0+1} \geq 1$.

Para $x_0 \geq \ln N$ (que é o caso) e $x \leq \ln \ln N \leq \ln N \leq x_0$ (que é o caso), temos $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq \frac{x_0}{2f(x_0)^2}$.

De fato, como $x \leq \ln \ln N$ e $x_0 \geq \ln N$ temos $x \leq \ln \ln N \leq \ln x_0$, isto é, $e^x \leq x_0$.

Afirmção: $f(x) \leq x^{1/4}$, $\forall x \geq 32^4$, em particular, $f(x) \leq (\frac{x}{2})^{1/2}$, $\forall x \geq 32^4$, pois $x^{1/4} \leq (\frac{x}{2})^{1/2} \iff x^{1/2} \leq \frac{x}{2} \iff 2 \leq x^{1/2}$, o que é verdade já que $x \geq 32^4$.

Seja $d(x) = x^{1/4} - f(x)$, vamos provar que $d(x) > 0$.

$d(32^4) = 32 - \log_2(32^4 + 1) > 0 \iff \log_2(32^4 + 1) < 32 \iff 32^4 + 1 < 2^{32}$, mas $1 + 32^4 < 32^5 = (2^5)^5 < 2^{32}$. Portanto $d(32^4) > 0$.

$d'(x) = \frac{1}{4x^{3/4}} - \frac{\log_2 e}{x+1} > 0 \iff \frac{1}{4x^{3/4}} > \frac{\log_2 e}{x+1} \iff \frac{1+x}{x^{3/4}} > 4 \log_2 e$. Como $4 \log_2 e < 8$, basta demonstrar que $\frac{1+x}{x^{3/4}} > 8$, isto é, $1+x > 8x^{3/4}$. Seja $D(x) = 1+x - 8x^{3/4}$.

$D(32^4) = 1 + 32^4 - 8(32^4)^{3/4} = 1 + 32^4 - 8(32^3) > 0$.

$D'(x) = 1 - \frac{6}{x^{1/4}} > 0 \iff 6 < x^{1/4}$ o que é verdade porque $x \geq 32^4$ logo $x^{1/4} > 32$.

Portanto $f(x) \leq x^{1/4}$, $\forall x \geq 32^4$.

Queremos provar que $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq \frac{x_0}{2f(x_0)^2}$. Vamos fazer $c = \frac{x_0}{2f(x_0)^2}$. Quero provar que $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq c$, isto é, $x \leq cf(x)^{1/2}$, isto é, $x^2 \leq c^2 f(x)$.

Seja $D(x) = c^2 f(x) - x^2$. Quero provar que $D(x) \geq 0$.

$$D(1) = \left(\frac{x_0}{2f(x_0)^2}\right)^2 - 1.$$

$D(1) \geq 0 \iff \left(\frac{x_0}{2f(x_0)^2}\right)^2 \geq 1 \iff \frac{x_0}{2f(x_0)^2} \geq 1$, isto é, $\frac{x_0}{2} \geq f(x_0)^2 \iff \left(\frac{x_0}{2}\right)^{1/2} \geq f(x_0)$, o que é verdade pela afirmação, já que $x_0 \geq 32^4$.

$$D'(x) = c^2 \frac{\log_2 e}{x+1} - 2x.$$

$$D'(x) > 0 \iff c^2 \frac{\log_2 e}{x+1} - 2x > 0 \iff c^2 \frac{\log_2 e}{x+1} > 2x \iff c^2 \log_2 e > (x+1)2x.$$

Como $\log_2 e > 1$, basta mostrar que $2x(x+1) < c^2$, isto é, $2x(x+1) < \left(\frac{x_0}{2f(x_0)^2}\right)^2 = \left(\frac{x_0^{1/4}}{f(x_0)}\right)^2 \left(\frac{x_0^{1/4}}{f(x_0)}\right)^2 \frac{x_0}{4}$. Como $x_0 \geq 32^4$, segue pela afirmação que $1 \leq \frac{x_0^{1/4}}{f(x_0)}$.

Logo basta provarmos que $2x(x+1) < \frac{x_0}{4}$, isto é, $8x(x+1) < x_0$.

Usando derivada é fácil verificar que $8x < e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \geq 14$ e $x+1 < e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \geq 6$.

Vamos separar a demonstração de que $8x(x+1) < x_0$ em dois casos.

caso 1: $x < 14$.

$$\text{Então } 8x(x+1) < \sqrt{\ln N} \sqrt{\ln N} = \ln N \leq x_0.$$

caso 2: $x \geq 14$.

$$\text{Então } 8x(x+1) \leq e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = e^x \leq x_0. \text{ Portanto } 8x(x+1) \leq x_0. \forall x.$$

Logo $2x(x+1) < c^2$, portanto $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq c$ como queríamos.

Quando $x \geq 2x_0$, note que $2x_0 \leq 2 \exp N \leq \exp \exp N$, temos $r(x) \geq \frac{x}{4f(x_0)}$.

$$\text{De fato, considere } D(x) = r(x) - \frac{x}{4f(x_0)} = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{1}{f(x_0)} \left(1 - \frac{x_0}{(1+x_0)\ln(x_0+1)}\right)(x-x_0) - \frac{x}{4f(x_0)}.$$

Quero provar que $D'(x) \geq 0$.

$$D'(x) = \frac{1}{f(x_0)} - \frac{x_0}{f(x_0)(x_0+1)\ln(x_0+1)} - \frac{1}{4f(x_0)} = \frac{3}{4f(x_0)} - \frac{x_0}{f(x_0)(x_0+1)\ln(x_0+1)} > 0 \iff \frac{x_0}{(x_0+1)\ln(x_0+1)} < \frac{3}{4}. \text{ Temos que, } \frac{x_0}{(x_0+1)\ln(x_0+1)} < \frac{1}{\ln(x_0+1)} \text{ e } \frac{1}{\ln(x_0+1)} < \frac{3}{4} \iff \frac{4}{3} < \ln(x_0+1) \text{ o que é verdade pois } \frac{4}{3} < \ln \ln N < \ln x_0 < \ln(x_0+1).$$

$$D(2x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{x_0}{f(x_0)} - \frac{x_0^2}{f(x_0)(x_0+1)\ln(x_0+1)} - \frac{2x_0}{4f(x_0)} = \frac{3x_0}{2f(x_0)} - \frac{x_0^2}{f(x_0)(x_0+1)\ln(x_0+1)} > 0 \iff \frac{x_0}{(x_0+1)\ln(x_0+1)} < \frac{3}{2}.$$

$$\frac{x_0}{(x_0+1)\ln(x_0+1)} < \frac{1}{\ln(x_0+1)} < \frac{3}{2} \iff \ln(x_0+1) > \frac{2}{3}, \text{ mas } \frac{2}{3} < \ln \ln N < \ln x_0 < \ln(x_0+1).$$

Para $x \geq \exp \exp N$ (que é o caso) a condição $x_0 \leq \exp N$ (que é o caso) garante que

$$\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq \frac{x}{4f(x_0)}.$$

De fato, $(4f(x_0))^2 \leq (f(x)^{1/2})^2$, ou seja, $16(f(x_0))^2 \leq f(x)$ pois $16f(x_0)^2 = 16(\log_2(x_0+1))^2$

$+1))^2 \leq 16(\log_2(e^N + 1))^2$ logo basta mostrar que $16(\log_2(e^N + 1))^2 \leq \log_2(e^{e^N} + 1)$, pois $\log_2(e^{e^N} + 1) \leq \log_2(x + 1) = f(x)$.

Isto é, basta mostrar que $16(\log_2(e^N + 1))^2 \leq \log_2 2^{e^N}$, pois $\log_2 2^{e^N} \leq \log_2(e^{e^N} + 1)$.
 $16(\log_2(e^N + 1))^2 \leq \log_2 2^{e^N} \iff 16(\log_2(e^N + 1))^2 \leq e^N \iff \log_2(e^N + 1) \leq \frac{e^N}{4}$.

Como $\log_2(e^N + 1) \leq \log_2 4^N = 2N$, basta demonstrar que $2N \leq \frac{e^N}{4}$, ou seja, $8N \leq e^N$, mas já vimos anteriormente que $8x \leq e^x$ para $x \geq 14$.

Portanto $8N \leq e^N$ e assim temos o resultado $\frac{x}{f(x)^{1/2}} \leq \frac{x}{4f(x_0)}$. ■

Lema 4.13 *Sejam $N \in L$, $n \in [lnN, expN]$, $0 < \epsilon \leq 1/2$ e $x_1, \dots, x_n$ uma RIS com constante $1 + \epsilon$. Então $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')nf(n)^{-1}$.*

Demonstração:

Pela definição implícita do espaço normado X temos que ele satisfaz uma f -estimativa inferior. (demonstração análoga a do espaço de Thomas Schlumprecht)

Seja g a função definida na Observação 2.10 considerando $K_0 = K$. Como $g \leq \phi$ temos

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x)^{1/2}, & x \in K \\ g(x) \leq f(x), & x \notin K \end{cases}$$

Sabemos também que $f(x)^{1/2} \leq g(x)$ logo $g(x) = f(x)^{1/2}$ quando $x \in K$.

Consideremos $k \in K$, $\bar{g} \in B_k^*(X)$ logo $\bar{g} = f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k g_i$, onde $(g_1, \dots, g_k) \in \Gamma_k^X$.

Como $k \in K$ temos que $f(k)^{-1/2} = g(k)^{-1}$ logo $\bar{g} = \sum_{i=1}^k g(k)^{-1} g_i$. Pela Observação 4.5 temos que $\|g_i\| \leq 1$, para qualquer i , $1 \leq i \leq k$. Seja $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$.

Pela definição de norma temos $|\bar{g}(Ex)| \leq \|x\|$, $E \subset \mathbb{N}$. Tomando $E = \text{ran}(x)$ segue $|\bar{g}(x)| \leq \|x\|$, logo $\|\bar{g}\| \leq 1$, $\forall x \in X$.

Portanto $\bar{g} \in B_k^*(X)$ quando $k \in K$ é uma (k, g) -forma ($k \geq 2$).

Verificaremos agora que dado $x \in X$, Ex é normado por uma (M, g) -forma ou tem a norma do supremo.

De fato, pela definição de norma temos 1) $\|Ex\| = \|Ex\|_\infty$ ou 2) $\|Ex\| = \sup\{|\bar{g}(\bar{E}Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), \bar{E} \subset \mathbb{N}\}$ ou 3) $\|Ex\| = \sup\{f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i Ex\| : 2 \leq M \in \mathbb{N}, E_1 < \dots < E_M\}$.

Em 2) temos que como $\bar{g} \in B_k^*(X)$ com $k \in K$ é uma (k, g) -forma, $k \geq 2$ o $\sup\{|\bar{g}(\bar{E}Ex)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), \bar{E} \subset \mathbb{N}\} \leq \sup\{|x^*(\bar{E}Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\} = \sup\{|(\bar{E}x^*)(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$. Como x^* é uma (M, g) -forma temos que $\bar{E}x^*$ também é uma (M, g) -forma, logo $\|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$.

Em 3) temos $\|Ex\| - \epsilon < f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i Ex\|$. Consideremos $(x_i^*)_{i=1}^M$ os funcionais suporte de $(E_i Ex)_{i=1}^M$ e $x^* = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M x_i^*$, os funcionais foram definidos como no Corolário 3.17 e como já verificamos neste Corolário x^* é uma (M, f) -forma. Logo $\|x^*\| \leq 1$, $\|f(M)^{-1} x_i^*\| = f(M)^{-1} \|x_i^*\| \leq f(M)^{-1} \leq g(M)^{-1}$, $\forall i$ e $x_1^* < \dots < x_M^*$. Portanto x^* é uma (M, g) -forma, $M \geq 2$.

Então $x^*(Ex) = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M x_i^*(Ex) = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i Ex\| > \|Ex\| - \epsilon$. Portanto $\|Ex\| - \epsilon < x^*(Ex) \leq |x^*(Ex)|$, onde x^* é uma (M, g) -forma, $M \geq 2$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos $\|Ex\| \leq |x^*(Ex)|$.

Portanto $\|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$.

Consideremos $x = \sum_{i=1}^n x_i$ e E um intervalo tal que $\lambda(E) \geq 1$. Como $\lambda(E) \geq 1$, temos pelo Lema 3.20 que $\|Ex\| \geq \frac{1}{4}$ e análogo ao que fizemos, na página 77, para o espaço de Schlumprecht temos $\|Ex\|_\infty < \frac{1}{4}$.

Portanto não ocorre a norma do supremo para intervalos com $\lambda(E) \geq 1$.

Como $g \in \mathcal{F}$, $\|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$ e $g \geq f^{1/2}$ todas as hipóteses do Lema 3.21 estão satisfeitas. Portanto $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon') n g(n)^{-1} = (1 + \epsilon + \epsilon') n \frac{G(n)}{n} = (1 + \epsilon + \epsilon') G(n)$.

Pelo Lema 4.12 temos $G(n) = nf(n)^{-1}$, logo $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')nf(n)^{-1}$. ■

Lema 4.14 *Sejam $N \in L$, $0 < \epsilon < 1/4$, $M = N^\epsilon$ e $x_1, \dots, x_N$ uma RIS com constante $1 + \epsilon$. Então $\sum_{i=1}^N x_i$ é um l_{1+}^M -vetor com constante $(1 + 4\epsilon)$.*

Demonstração:

Sejam $m = \frac{N}{M} = N^{1-\epsilon}$, $x = \sum_{i=1}^N x_i$ e para j , $1 \leq j \leq M$, $y_j = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} x_i$ então $y_1 = \sum_{i=1}^m x_i$, $x_1 < \dots < x_m$. y_1 é a soma de uma RIS de comprimento m com constante $(1 + \epsilon)$.
 $y_j = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} x_i$, $jm - [(j-1)m + 1] + 1 = jm - jm + m - 1 + 1 = m$. Portanto y_j é a soma de uma RIS de comprimento m com constante $(1 + \epsilon)$.

Vamos usar o Lema 4.13, mas para isto precisamos verificar que $m \in [\ln N, \exp N]$, ou seja, que $\ln N \leq m \leq \exp N$. Temos $0 < \epsilon < 1/4$ então $3/4 < 1 - \epsilon < 1$, $m = N^{1-\epsilon}$.

1) $x^{1-\epsilon} \leq e^x$. Seja $d(x) = e^x - x^{1-\epsilon}$, vamos provar que $d(x) \geq 0$.
 $d(0) = 1$, $d'(x) = e^x - (1 - \epsilon)x^{-\epsilon} = e^x - \frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon}$.
 $e^x - \frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} > 0 \iff e^x > \frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} \iff \ln e^x > \ln \frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} \iff x \ln e > \ln(1 - \epsilon) - \ln x^\epsilon \iff$
 $\underbrace{x}_{>0} > \underbrace{\ln(1 - \epsilon)}_{<0} - \underbrace{\epsilon \ln x}_{>0}$ o que é verdade pois um número positivo é maior que um número negativo.

Portanto $d(x) \geq 0$. Logo $x^{1-\epsilon} \leq e^x$.

2) $x^{1-\epsilon} \geq \ln x$. Seja $d(x) = x^{1-\epsilon} - \ln x$, vamos provar que $d(x) \geq 0$.
 $d(1) = 1$, $d'(x) = (1 - \epsilon)x^{-\epsilon} - \frac{1}{x} = \frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} - \frac{1}{x}$.
 $\frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x^{1-\epsilon}(1-\epsilon)-1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x}(x^{1-\epsilon}(1-\epsilon) - 1) > 0$.

Seja $H(x) = x^{1-\epsilon}(1 - \epsilon) - 1$.

$H(16) = (16)^{1-\epsilon}(1 - \epsilon) - 1$. Temos que $(16)^{1-\epsilon}(1 - \epsilon) > (16)^{3/4 \cdot 3/4} = 6 > 0$.

$H'(x) = (1 - \epsilon)^2 x^{-\epsilon} = \frac{(1-\epsilon)^2}{x^\epsilon} > 0$. Portanto H é positiva, logo $\frac{(1-\epsilon)}{x^\epsilon} - \frac{1}{x} > 0$.

Portanto $d(x) \geq 0$. Logo $x^{1-\epsilon} \geq \ln x$.

Então pelo Lema 4.13 $\|y_j\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')mf(m)^{-1} = (1 + 2\epsilon)mf(m)^{-1}$ para qualquer j . Verificaremos agora que x é um l_{1+}^M -vetor.

$$\sum_{i=1}^M y_i = \sum_{i=1}^M \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} x_j = \sum_{j=1}^m x_i + \sum_{j=m+1}^{2m} x_i + \sum_{j=2m+1}^{3m} x_i + \dots + \sum_{j=(M-1)m+1}^{Mm} x_i = \sum_{i=1}^N x_i = x.$$

Portanto $x = \sum_{i=1}^M y_i$. X satisfaz uma f -estimativa inferior, então consideremos $E_i = \text{ran}(x_i)$.

$$\|x\| \geq f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| = f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(x_1 + \dots + x_N)\| = f(N)^{-1} (\|E_1 x_1\| + \dots + \|E_N x_N\|) = f(N)^{-1} (\|x_1\| + \dots + \|x_N\|) = f(N)^{-1} N, \text{ pois } \|x_i\| = 1, \forall i.$$

$$\text{Ora } \|y_i\| \leq \frac{(1+2\epsilon)m}{f(m)} = \frac{(1+2\epsilon)\frac{N}{M}}{f(m)} = \frac{(1+2\epsilon)N}{Mf(m)} = \frac{(1+2\epsilon)}{f(m)M} N = \frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)M} \frac{N}{f(N)} = \frac{\frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)}}{M} \frac{N}{f(N)}.$$

$$\text{Portanto } \|y_i\| \leq \frac{\frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)}}{M} \frac{N}{f(N)} \leq \frac{\frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)}}{M} \|x\|.$$

Logo x é um l_{1+}^M vetor com constante $C = \frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)}$.

Temos que $m = N^{1-\epsilon}$, então vamos provar que $\frac{f(N)}{f(m)} \leq (1 - \epsilon)^{-1}$.
 $\frac{f(N)}{f(m)} \leq (1 - \epsilon)^{-1} \iff f(N)(1 - \epsilon) \leq f(m) \iff (1 - \epsilon)\log_2(N + 1) \leq \log_2(N^{1-\epsilon} + 1) \iff \log_2(N + 1)^{1-\epsilon} \leq \log_2(N^{1-\epsilon} + 1) \iff (N + 1)^{1-\epsilon} \leq N^{1-\epsilon} + 1 \iff (N + 1)^{1-\epsilon} - N^{1-\epsilon} \leq 1.$

Consideremos $h(x) = (N + x)^{1-\epsilon}$, então $h'(x) = (1 - \epsilon)(N + x)^{-\epsilon}$.

Pelo Teorema do Valor Médio temos que $\frac{h(1)-h(0)}{1-0} = h'(c)$, onde $0 < c < 1$.

Sabemos que $h(1) = (N + 1)^{1-\epsilon}$ e $h(0) = (N)^{1-\epsilon}$ então segue que $(N + 1)^{1-\epsilon} - (N)^{1-\epsilon} = (1 - \epsilon)(N + c)^{-\epsilon} = (1 - \epsilon)(\frac{1}{N+c})^\epsilon \leq 1$.

Sendo assim temos que $C = \frac{(1+2\epsilon)f(N)}{f(m)} \leq \frac{(1+2\epsilon)}{(1+\epsilon)}$. Vamos verificar agora que $\frac{(1+2\epsilon)}{(1+\epsilon)} \leq 1 + 4\epsilon$.

$\frac{(1+2\epsilon)}{(1+\epsilon)} \leq 1 + 4\epsilon \iff (1 + 2\epsilon) \leq (1 + \epsilon)(1 + 4\epsilon)$ o que é verdade pois $(1 + \epsilon)(1 + 4\epsilon) > (1 + 4\epsilon) > (1 + 2\epsilon)$. Portanto x é um l_{1+}^M -vetor com constante $(1 + 4\epsilon)$. ■

Lema 4.15 *Sejam $k \in K$ e $x_1^*, \dots, x_k^*$ uma sequência especial de comprimento k , onde cada x_i^* é uma (M_i, f) -forma. Seja $x_1, \dots, x_k$ uma sequência de vetores sucessivos tais que todo x_i é um vetor RIS normalizado de comprimento M_i e constante $1 + \epsilon/4$, $\epsilon = 1/10$ e $\text{ran}(x_i) = \text{ran}(x_i^*)$. Assuma que $|(\sum_{i=1}^k x_i^*)(\sum_{i=1}^k E x_i)| \leq 2$ para todo intervalo E .*

$$\text{Então } \left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\| \leq (1 + 2\epsilon)k/f(k).$$

Demonstração:

Seja $\mu = 1/40$. Temos que x_i é um vetor RIS normalizado, logo $x_i = \frac{x'_i}{\|x'_i\|}$ onde $x'_i = x_{i1} + \dots + x_{iM_i}$ é a soma de uma RIS com constante $(1 + \mu)$. Coloquemos $\alpha_i = \frac{1}{\|x'_i\|}$.

Pelo Lema 4.14 $\frac{x_i}{\alpha_i}$ é um $l_{1+}^{N_i}$ vetor com constante $(1 + 4\mu) = (1 + \epsilon)$ onde $N_i = M_i^{\epsilon/4}$. Logo $\frac{x_i}{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{N_i} y_j$ onde $\|y_j\| \leq \frac{(1+\epsilon)}{N_i} \left\| \frac{x_i}{\alpha_i} \right\|$, ou seja, $\|\alpha_i y_j\| \leq \frac{(1+\epsilon)}{N_i}$.

Então $x_i = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_i y_j$, $\|x_i\| = 1$ e $\|\alpha_i y_j\| \leq \frac{(1+\epsilon)}{N_i}$, portanto por definição x_i é um $l_{1+}^{N_i}$ - average com constante $(1 + \epsilon)$, onde $N_i = M_i^{\epsilon/4}$.

Temos que $M_1 = j_{2k}$, pois cada x_i^* é uma (M_i, f) -forma e $x_1^*, \dots, x_k^*$ é uma sequência especial, logo $x_1^* \in A_{j_{2k}}^*$ e $x_{i+1}^* \in A_{\sigma(x_1^*, \dots, x_i^*)}^*$ para qualquer i , $1 \leq i \leq k-1$. Sabemos pelo Lema 4.2 que $M_1^{\epsilon/4} = N_1 \geq 4M_f(k/\epsilon)/\epsilon f'(1)$.

Lembremos que σ foi escolhida de tal forma que se $z_1, \dots, z_s$ é uma sequência de vetores sucessivos em Q , $S = \sigma(z_1, \dots, z_s)$ e $z = \sum_{i=1}^s z_i$, então $\frac{1}{20}f(S^{1/40})^{1/2} \geq |ran(z)|$. Logo

$$1) N_1 \geq 4M_f(k/\epsilon)/\epsilon f'(1) > 2(1 + \epsilon)M_f(k/\epsilon)/\epsilon f'(1).$$

$$2) \text{ cada } x_i \text{ é um } l_{1+}^{N_i} \text{-average com constante } (1 + \epsilon), x_1 < \dots < x_k.$$

$$3) \frac{1}{20}f(S^{1/40})^{1/2} \geq |ran(z)| \text{ logo } \frac{\epsilon}{2}f(S^{1/40})^{1/2} \geq |ran(z)|.$$

$S^{1/40} = S^{\epsilon/4} = M_i^{\epsilon/4} = N_i$, pois $M_i = \sigma(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*)$ onde $x_1^*, \dots, x_k^*$ é uma sequência especial.

$$|ran(z)| = |ran(z_1 + \dots + z_s)| \geq |ran(z_i)|, \text{ para qualquer } i, 1 \leq i \leq s.$$

$$\text{Portanto } \frac{\epsilon}{2}f(N_i)^{1/2} \geq |ran(x_{i-1})|, i = 2, \dots, k.$$

Por 1), 2) e 3) segue que $x_1, \dots, x_k$ é uma RIS de comprimento k com constante $(1 + \epsilon)$.

Para provar o Lema vamos usar o Lema 3.21. Mas primeiro mostraremos que se $z_1^*, \dots, z_k^*$ é uma sequência especial de funcionais de comprimento k e E é qualquer intervalo,

então $|z^*(Ex)| \leq 1/4$, onde z^* é a $(k, \sqrt{f})$ -forma $f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k z_i^*$ e $x = \sum_{i=1}^k x_i$.

Seja t o maior índice tal que $z_t^* = x_t^*$ ou zero se t não existir. Suponha que $i \neq j$ ou que i ou j é maior do que $t+1$. Então, como σ é injetora podemos achar $L_1 \neq L_2 \in L$ tal que z_i^* é uma (L_1, f) -forma e x_j é a soma de uma RIS normalizada de comprimento L_2 e também um $l_{1+}^{L_2'}$ -average com constante $(1+\epsilon)$, onde $L_2' = L_2^{\epsilon/4}$. Como no fim do capítulo 3 nós usaremos os Lemas 3.13 e 3.16 para mostrar que $|z_i^*(Ex_j)| < k^{-2}$.

Se $L_1 < L_2$ segue do Lema 4.2 que $4L_1^2 \leq \ln \ln \ln L_2$, logo $L_2 \geq e^{4L_1^2}$ consequentemente $L_2^{1/40} \geq e^{\frac{4L_1^2}{40}} = e^{\frac{L_1^2}{10}} \geq \frac{L_1^2}{10} = \underbrace{\frac{L_1}{10}}_{>1} L_1 > L_1$. Portanto se $L_1 < L_2$ temos $L_1 < L_2'$.

Sabemos que $L_1 \geq j_{2k}$, visto que L_1 aparece em uma sequência especial de comprimento k . Assim temos, $|z_i^*(Ex_j)| \leq |z_i^*(x_j)| = \left| \sum_{k=1}^{L_1} y_k^*(x_j) \right| \leq \sum_{k=1}^{L_1} |y_k^*(x_j)|$, onde $z_i^* = \sum_{k=1}^{L_1} y_k^*$.

Considerando $E_k = \text{ran}(y_k^*)$ temos $\sum_{k=1}^{L_1} |y_k^*(x_j)| = \sum_{k=1}^{L_1} |E_k(y_k^*(x_j))| = \sum_{k=1}^{L_1} |y_k^*(E_k x_j)| \leq \sum_{k=1}^{L_1} \|y_k^*\| \|E_k x_j\| \leq f(L_1)^{-1} \sum_{k=1}^{L_1} \|E_k x_j\| \leq f(L_1)^{-1} (1+\epsilon) (1+2L_1/L_2').$ $L_1 < L_2'$ logo $L_1/L_2' < 1$, portanto $|z_i^*(Ex_j)| \leq \frac{3(1+\epsilon)}{f(L_1)}$.

A conclusão deste caso segue do fato de que $f(l) \geq 4k^2$ quando $l \geq j_{2k}$.

Observação: De $\ln x < x \leq x+1$ segue que $\ln \ln x \leq \ln(x+1)$. Mas $\ln(x+1) = \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 e}$, logo $\underbrace{\ln \ln x}_A \leq \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 e}$ então $\log_2 e \ln \ln x \leq \log_2(x+1)$.

Mas como $\ln A \leq A \leq \log_2 e A$ segue que $\ln \ln \ln x \leq \log_2 e \ln \ln x \leq \log_2(x+1)$.

Vamos provar que se $j_{2k} \leq l$ então $f(l) \geq 4k^2$.

Sabemos que $4k^2 \leq 4.4k^2 \leq 4(j_{2k})^2 \leq \ln \ln \ln l \leq f(l)$.

Portanto, $|z_i^*(Ex_j)| \leq \frac{3(1+\epsilon)}{f(L_1)} \leq \frac{3(1+\epsilon)}{4k^2} < \frac{4}{4k^2} = \frac{1}{k^2} = k^{-2}$. Logo $|z_i^*(Ex_j)| < k^{-2}$ se $L_1 < L_2$.

Se $L_2 < L_1$ aplicaremos o Lema 3.16 para x_j' , onde x_j' é a soma da RIS que originou x_j , com $\epsilon_1 = 1$, mas primeiro temos que verificar que $M_f(L_2) < L_1$.

Como $L_2 < L_1$ segue do Lema 4.2 que $\ln \ln \ln L_1 \geq 4L_2^2$, logo $L_1 \geq e^{e^{e^{4L_2^2}}}$. Como $L_1 \geq e^{e^{e^{4L_2^2}}}$ temos que $f(L_1) \geq f(e^{e^{e^{4L_2^2}}})$. Vamos verificar agora que $f(e^{e^{e^{4L_2^2}}}) > 36L_2^2$.
 $f(e^{e^{e^{4L_2^2}}}) > 36L_2^2 \iff \log_2(e^{e^{e^{4L_2^2}}} + 1) > 36L_2^2 \iff 2^{36L_2^2} = (2^9)^{4L_2^2} < e^{e^{e^{4L_2^2}}}$ o que é verdade pois $e^{e^e} > 2^9 = 512$. Então temos $f(L_1) \geq f(e^{e^{e^{4L_2^2}}}) > 36L_2^2$.
 $M_f(L_2) = f^{-1}(36L_2^2)$, $M_f(L_2) < L_1 \iff f(M_f(L_2)) < f(L_1) \iff 36L_2^2 < f(L_1)$ o que já vimos acima que é verdade. Portanto temos que se $L_2 < L_1$ então $M_f(L_2) < L_1$.

Vamos aplicar o Lema 3.16 para x'_j com $f = g$, $\epsilon_1 = 1$. Podemos aplicar este Lema porque $f \geq f^{1/2}$, X satisfaz uma f -estimativa inferior, $\epsilon_1 > 0$, $L_1 > M_f(L_2)$ e z_i^* é uma (L_1, f) -forma. Portanto $|z_i^*(Ex'_j)| \leq (1 + \epsilon_1 + \epsilon'_1) = 3$.

X satisfaz uma f -estimativa inferior logo $\|x'_j\| \geq f(L_2)^{-1} \sum_{i=1}^{L_2} \|E_i x'_j\|$. Considere $E_i = \text{ran}(x_{ji})$, $i = 1, 2, \dots, L_2$. Então $\|x'_j\| \geq f(L_2)^{-1} L_2$.

Quando $l \geq j_{2k}$ temos que $\frac{f(l)}{l} \leq \frac{1}{4k^2}$, logo $\frac{L_2}{f(L_2)} \geq 4k^2$.
De fato, temos $j_{2k} \leq l$ e sabemos que a função $\frac{x}{f(x)}$ é não decrescente, então $\frac{j_{2k}}{f(j_{2k})} \leq \frac{l}{f(l)}$ logo $\frac{f(l)}{l} \leq \frac{f(j_{2k})}{j_{2k}}$. Usando derivada é fácil verificar que $\log_2(x+1) \leq \sqrt{x}$.

Sendo assim temos $\frac{f(l)}{l} \leq \frac{f(j_{2k})}{j_{2k}} \leq \frac{\sqrt{j_{2k}}}{j_{2k}} = \frac{1}{\sqrt{j_{2k}}}$. Pelo ítem 7 do Lema 4.2 temos $\sqrt{j_{2k}} \geq 4k^2$ logo $\frac{1}{\sqrt{j_{2k}}} \leq \frac{1}{4k^2}$.

$$\text{Então } |z_i^*(E \frac{x'_j}{\|x'_j\|})| = \frac{1}{\|x'_j\|} |z_i^*(Ex'_j)| \leq \frac{3}{\|x'_j\|} \leq \frac{3}{4k^2} < \frac{1}{k^2} = k^{-2}.$$

Portanto $|z_i^*(Ex_j)| < k^{-2}$ se $L_2 < L_1$.

Agora consideremos F um intervalo tal que $|(\sum_{i=1}^t z_i^*)(Ex)| = |(\sum_{i=1}^k z_i^*)(Fx)| \leq 2$.
(Basta pegar F igual ao intervalo $\{j_1, \dots, j_m\}$ com j_1 sendo o mínimo de E tal que $\text{ran}(z_i^*) \cap E \neq \emptyset$ e j_m sendo o máximo de E tal que $\text{ran}(z_j^*) \cap E \neq \emptyset$, onde i e j são respectivamente o menor e o maior valor tal que Ez_i^* e Ez_j^* são não nulos, $1 \leq i, j \leq t$.)

$$\begin{aligned} \text{Segue que } |(\sum_{i=1}^k z_i^*)(Ex)| &\leq |(\sum_{i=1}^t z_i^*)(Ex)| + |z_{t+1}^*(Ex)| + |(\sum_{i=t+2}^k z_i^*)(Ex)| \leq \\ &\leq 2 + |z_{t+1}^*(\sum_{i=1}^k Ex_i)| + |(\sum_{i=t+2}^k z_i^*)(\sum_{j=1}^k Ex_j)|. \end{aligned}$$

Calculando cada módulo da ultima desigualdade separadamente temos,

$$\begin{aligned}
1) \quad & |z_{t+1}^*(\sum_{i=1}^k Ex_i)| \leq \sum_{i=1}^k |z_{t+1}^*(Ex_i)| \leq |z_{t+1}^*(Ex_{t+1})| + (k-1)k^{-2}. \\
2) \quad & |\sum_{i=t+2}^k z_i^*(\sum_{j=1}^k Ex_j)| = |\sum_{i=t+2}^k \sum_{j=1}^k z_i^*(Ex_j)| \leq \sum_{i=t+2}^k \sum_{j=1}^k |z_i^*(Ex_j)| \leq (k-t-2+1)(kk^{-2}) = \\
& (k-t-1)(kk^{-2}).
\end{aligned}$$

Juntando tudo ficamos com,

$$\begin{aligned}
|(\sum_{i=1}^k z_i^*)(Ex)| &\leq 2 + |z_{t+1}^*(Ex_{t+1})| + (k-1)k^{-2} + k^{-2}(k^2 - kt - k) = 2 + |z_{t+1}^*(Ex_{t+1})| + \\
&k^{-2}(k^2 - kt - 1) \leq 2 + |z_{t+1}^*(Ex_{t+1})| + k^{-2}k^2 \leq 2 + \underbrace{\|z_{t+1}^*\|}_{\leq 1} \underbrace{\|(Ex_{t+1})\|}_{\leq 1} + 1 \leq 4.
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos que $|z^*(Ex)| = |(f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k z_i^*)(Ex)| = f(k)^{-1/2} |(\sum_{i=1}^k z_i^*)(Ex)| \leq$

$$f(k)^{-1/2} 4 = \frac{4}{\sqrt{f(k)}} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \text{ já que } \sqrt{f(j_1)} > 16.$$

Agora seja ϕ' a função

$$\begin{cases} (\log_2(y+1))^{1/2}, & y \in K, y \neq k \\ \log_2(y+1), & y \notin K, y = k \end{cases}$$

Seja g' a função obtida de ϕ' pela construção explicada na Observação 2.10 no caso $K_0 = K \setminus \{k\}$.

Pelo Lema 4.12 temos que $G(y) = yf(y)^{-1}$ para todo y no intervalo $[\ln l, \exp l]$ onde $l \in L \cup \{k\}$. Assim temos $g'(l) = \frac{l}{G(l)} = \frac{l}{f(l)} = f(l)$ para todo $l \in L \cup \{k\}$.

Segue do que mostramos sobre sequências especiais de comprimento k que $\frac{1}{4} < \|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g')\text{-forma}\}$ quando E é um intervalo de comprimento maior ou igual a 1.

Como x é a soma de uma RIS, temos pelo Lema 3.21 que $\|x\| \leq (1 + \epsilon + \epsilon')kg'(k)^{-1} = (1 + 2\epsilon)kg'(k)^{-1} = (1 + 2\epsilon)kf(k)^{-1}$. ■

Lema 4.16 *Sejam z^* uma (M, f) -forma, $M \in L$, $k \in K$, x um vetor RIS normalizado de comprimento M satisfazendo $\text{ran}(z^*) \subset \text{ran}(x)$ e $z^*(x) = \frac{1}{2}$. Então existe uma (M, f) -forma $x^* \in Q$ tal que $|x^*(x) - 1/2| \leq 1/k$ com $\text{ran}(x^*) = \text{ran}(x)$.*

Demonstração

Temos por hipótese que $z^* = \sum_{i=1}^M z_i^*$, onde $\|z^*\| \leq 1$, $\|z_i^*\| \leq f(M)^{-1}$ e $z_1^* < \dots < z_M^*$;
 $x = \sum_{i=1}^M x_i$, $x_1 < \dots < x_M$ e $\text{ran}(z_i^*) \subset \text{ran}(x_i)$.

Sejam $n_i = \max \text{ran}(x_i)$, $i = 1, \dots, M$, $N = \max_{1 \leq i \leq M} n_i$ e coloquemos $z_i^* = (c_1^i, c_2^i, \dots, c_{n_i}^i)$, onde alguns desses $c_{j'}^i$, são nulos.

Seja $\epsilon \in \mathbb{R}$, definindo

1. $\alpha = \frac{1}{f(M)}$,
2. $\beta(\epsilon) = \epsilon N + \alpha$,
3. $\gamma(\epsilon) = \epsilon NM + 1$,
4. $\theta(\epsilon) = (1 - \frac{\alpha}{\epsilon N + \alpha})(\epsilon NM + 1) + \epsilon NM$,
5. $\mu(\epsilon) = \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}$.

Como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \theta(\epsilon) = 0$, $\mu(0) = 1$, $\mu(\epsilon) \leq 1$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ e μ é contínua, pelo teorema do valor intermediário do cálculo, existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$6. \theta(\epsilon) < \frac{1}{k} \text{ e}$$

7. $\mu(\epsilon)$ é um número racional.

Seja $r_i^* = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_{n_i}^i) \in Q$ onde os $b_{j'}^i$, são não nulos, $i = 1, \dots, M$ com $|c_j^i - b_j^i| \leq \epsilon$, $j = 1, \dots, n_i$.

Seja $w \in X$, $\|w\| \leq 1$ com $w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, temos $|r_i^*(w) - z_i^*(w)| = |\sum_{j=1}^{n_i} a_j (c_j^i - b_j^i)| \leq \epsilon n_i \max_{1 \leq j \leq n_i} |a_j| \leq \epsilon N$. Logo $|r_i^*(w)| \leq |r_i^*(w) - z_i^*(w)| + |z_i^*(w)| \leq \epsilon N + \frac{1}{f(M)} = \beta(\epsilon)$ e ainda $\|\frac{r_i^*}{\beta(\epsilon)}\| \leq 1$, $\forall i$, $\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)} \leq 1$.

Consideremos, agora, $r^* = \sum_{i=1}^M r_i^*$. Seja $w \in X$, $\|w\| \leq 1$. Logo $|r^*(w) - z^*(w)| \leq \sum_{i=1}^M |r_i^*(w) - z_i^*(w)| \leq \epsilon NM$. Portanto $|r^*(w)| \leq |r^*(w) - z^*(w)| + |z^*(w)| \leq \epsilon NM + 1 = \gamma(\epsilon)$ e ainda $\|\frac{r^*}{\gamma(\epsilon)}\| \leq 1$, $\gamma(\epsilon) \geq 1$.

Vamos definir x^* pondo $x^* = \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r^*$, logo $x^* = \sum_{i=1}^M \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r_i^*$. Portanto x^* tem as seguintes propriedades:

- a) $\|\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r_i^*\| = \frac{1}{\gamma(\epsilon)}\|\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)}r_i^*\| \leq \alpha = \frac{1}{f(M)}.$
- b) $\|x^*\| = \|\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r^*\| \leq \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)}\|\frac{1}{\gamma(\epsilon)}r^*\| \leq 1.$
- c) $r_1^* < \dots < r_M^*$ e $\text{ran}(x^*) = \text{ran}(x).$
- d) $|x^*(x) - \frac{1}{2}| = |\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r^*(x) - z^*(x)| \leq |\frac{\alpha}{\beta(\epsilon)\gamma(\epsilon)}r^*(x) - r^*(x)| + |r^*(x) - z^*(x)| \leq \|r^*(x)\|(1 - \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)}) + \epsilon NM \leq (1 - \frac{\alpha}{\beta(\epsilon)})(\epsilon NM + 1) + \epsilon NM < \frac{1}{k}.$

Por a), b) , c) e d) temos que x^* é uma (M, f) -forma, $x^* \in Q$ e $|x^*(x) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k}.$ ■

Finalmente já estamos em condições de demonstrarmos o seguinte Teorema.

Teorema 4.17 *O espaço de Gowers e Maurey é hereditariamente indecomponível.*

Demonstração

Sejam Y e Z dois subespaços fechados de dimensão infinita de X_{GM} tal que $Y \cap Z = \{0\}$. Mostraremos que a projeção de $Y + Z$ para Y dada por $y + z \rightarrow y$ não é contínua, logo $Y + Z$ não é fechado em X_{GM} e então não teremos W fechado tal que $W = Y \oplus Z$.

Pois se $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z$ é fechado em X_{GM} então definindo $P : Y \oplus Z \rightarrow Y$ por $P(y + z) = y$, temos que P é contínua. Vamos demonstrar esta afirmação usando o Teorema do Gráfico fechado.

Sejam $y_n + z_n \rightarrow 0$ e $P(y_n + z_n) \rightarrow y$. Temos que $P(y_n + z_n) = y_n \rightarrow y$ e $z_n = (y_n + z_n) - y_n$, logo $z_n \rightarrow -y$ e como Z é fechado $-y \in Z$ logo $y \in Y \cap Z$. Portanto $y = 0$. Sendo assim segue pelo Teorema do Gráfico Fechado que P é contínua.

Para mostrarmos que a projeção de $Y + Z$ para Y não é contínua construiremos, para todo $\delta > 0$, vetores $y \in Y$ e $z \in Z$ tal que $\delta\|y + z\| > \|y - z\|$. Pois neste caso teremos $\|\frac{y-z}{\delta\|y+z\|}\| < 1$ e $P(\frac{y-z}{\delta\|y+z\|}) = \frac{y}{\delta\|y+z\|}$.

Mas $\|\frac{y}{\delta\|y+z\|}\| \geq \frac{1-\delta}{2\delta}$, pois $\|y + z\| = \|-y - z\| = \|-y - z + y - y\| \leq \|-2y\| + \|y - z\| < \|2y\| + \delta\|y + z\|$.

Portanto $\|y + z\| < \|2y\| + \delta\|y + z\|$, logo $(1 - \delta)\|y + z\| < 2\|y\|$ o que implica que

$$\frac{1-\delta}{2\delta} < \frac{\|y\|}{\delta\|y+z\|}.$$

Conclusão: $\|P\|$ não é limitada, logo não é contínua.

Vamos dividir o estudo em dois casos.

caso 1: Y e Z são gerados por bases de blocos.

Consideremos $\delta > 0$, e $k \in K$ tal que $f(k)^{-1/2} < \delta/4$, k existe porque sabemos que $\sqrt{f(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.

Como X satisfaz uma f -estimativa inferior temos pelo Lema 3.11 que todo subespaço de bloco de X contém, para todo $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, um l_{1+}^N -average com constante $1 + \epsilon$. (Tomamos $C = 1 + \epsilon$ no Lema 3.11).

Seja g a função obtida de ϕ na Observação 2.10 no caso $K_0 = K$, então como foi verificado na demonstração do Lema 4.13 temos que todo vetor ou tem a norma do supremo ou satisfaz a inequação $\|Ex\| \leq \sup\{|x^*(Ex)| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$. Faremos agora as seguintes construções.

Sejam $M_1 = j_{2k} \in L$, $\mu = 1/40$ e $\epsilon = 1/10$. Consideremos $x'_1 = x_{11} + \dots + x_{1M_1}$, onde $x_{11}, \dots, x_{1M_1}$ é uma RIS com constante $(1 + \mu)$ em Y . Notemos que para construir a RIS basta construir os l_{1+} -averages, usando o Lema 3.11. satisfazendo as condições de RIS.

Seja $x_1 = \frac{x'_1}{\|x'_1\|}$ logo $x_1 = \frac{1}{\|x'_1\|}(x_{11} + \dots + x_{1M_1})$ é um vetor RIS normalizado com constante $(1 + \mu)$ em Y . Coloquemos $\alpha_1 = \frac{1}{\|x'_1\|}$.

Análogo ao que foi feito na demonstração do Lema 4.15 temos que x_1 é um $l_{1+}^{N_1}$ average com constante $(1 + 4\mu) = (1 + \epsilon)$, onde $M_1^{\epsilon/4} = N_1 \geq 4M_f(k/\epsilon)/\epsilon f'(1)$.

Temos que $\frac{x_1}{\alpha_1}$ é uma RIS com constante $1 + \mu$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$, então pelo Lema 3.20 temos que $\|E \frac{x_1}{\alpha_1}\| \geq \frac{1}{4}$ para intervalos com $\lambda(E) \geq 1$ e análogo ao que fizemos no capítulo 3, pág 77, temos que $\|E \frac{x_1}{\alpha_1}\|_\infty < \frac{1}{4}$, logo não ocorre a norma do supremo para $\frac{x_1}{\alpha_1}$. Portanto pela observação feita no começo desta demonstração temos que $\|E \frac{x_1}{\alpha_1}\| \leq \sup\{|x^*(E \frac{x_1}{\alpha_1})| : M \geq 2, x^* \text{ é uma } (M, g)\text{-forma}\}$.

Logo pelo Lema 3.21 temos que $\|\frac{x_1}{\alpha_1}\| \leq (1 + \mu + \mu')M_1g(M_1)^{-1} \leq (1 + \epsilon)M_1g(M_1)^{-1}$.

Portanto $\|x_1\| \leq (1 + \epsilon)M_1g(M_1)^{-1}|\alpha_1| = (1 + \epsilon)M_1g(M_1)^{-1}\frac{1}{\|x'_1\|}$.

Pelo Lema 4.12 $G(x) = xf(x)^{-1}$ se $N \in J \setminus K_0$ e $x \in [lnN, expN]$ então $g(x) =$

$\frac{x}{f(x)} = f(x)$ para todo $x \in L$. Logo não existe diferença entre uma (M_1, g) -forma e uma (M_1, f) -forma.

Para cada j entre 1 e M_1 sejam $E_j = \text{ran}(x_{1j})$, x_{1j}^* o funcional suporte de $E_j(\frac{x_1}{\alpha_1})$ e $x_1'^* = g(M_1)^{-1} \sum_{j=1}^{M_1} x_{1j}^*$, a definição dos funcionais suporte é análoga a feita na demonstração do Corolário 3.17, e como foi visto nesta demonstração $x_1'^*$ é uma (M_1, g) -forma.

Então $x_1'^*(x_1) = \alpha_1 x_1'^*(\frac{x_1}{\alpha_1}) = \alpha_1 g(M_1)^{-1} \sum_{j=1}^{M_1} x_{1j}^*(\frac{x_1}{\alpha_1}) = \frac{1}{\|x_1'\|} g(M_1)^{-1} (\|E_1(\frac{x_1}{\alpha_1})\| + \dots + \|E_{M_1}(\frac{x_1}{\alpha_1})\|) = \frac{1}{\|x_1'\|} g(M_1)^{-1} M_1$. Temos que $\frac{\|x_1\|}{1+\epsilon} \leq \frac{M_1 g(M_1)^{-1} (1+\epsilon)}{\|x_1'\| (1+\epsilon)} = \frac{M_1 g(M_1)^{-1}}{\|x_1'\|}$.

Portanto $x_1'^*(x_1) \geq (1+\epsilon)^{-1} \|x_1\| = \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{10}{11}$.

Temos que $x_1'^*(x_1) = \frac{10}{11}$, coloquemos $\beta = \frac{10}{11}$ logo $\beta \geq \frac{1}{2}$ e $\frac{x_1'^*(x_1)}{2\beta} = \frac{1}{2}$.

Seja $z^* = \frac{x_1'^*}{2\beta}$, z^* é uma (M_1, g) -forma com $\text{ran}(z^*) = \text{ran}(x_1'^*)$. De fato, $z^* = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{x_{1j}^*}{2\beta}$, $\frac{x_{11}^*}{2\beta} < \dots < \frac{x_{1M_1}^*}{2\beta}$. $\|\frac{x_{1j}^*}{2\beta}\| = \frac{1}{2\beta} \|x_{1j}^*\| \leq \frac{1}{g(M_1)}$ e $\|z^*\| = \|\frac{x_1'^*}{2\beta}\| = \frac{1}{2\beta} \|x_1'^*\| \leq 1$. Portanto z^* é uma (M_1, g) -forma com $\text{ran}(z^*) = \text{ran}(x_1'^*)$ e $z^*(x_1) = \frac{1}{2}$.

Pelo Lema 4.16 temos que existe uma (M_1, g) -forma $x_1^* \in Q$ tal que $|x_1^*(x_1) - 1/2| \leq k^{-1}$ e $\text{ran}(x_1^*) = \text{ran}(x_1)$.

Agora seja $M_2 = \sigma(x_1^*)$, e considere um vetor RIS normalizado $x_2 \in Z$ de comprimento M_2 com constante $(1+\mu)$ tal que $x_1 < x_2$ (a construção de x_2 é análoga a de x_1). Como no caso de x_1 temos que x_2 é um $l_{1+}^{N_2}$ -average com constante $(1+\epsilon)$, onde $N_2 = M_2^{\epsilon/4}$ e, como acima, podemos achar uma (M_2, g) -forma x_2^* tal que $|x_2^*(x_2) - 1/2| \leq k^{-1}$ e $\text{ran}(x_2^*) = \text{ran}(x_2)$.

Continuando desta maneira, obtemos um par de seqüências $x_1, \dots, x_k$ e $x_1^*, \dots, x_k^*$ com várias propriedades que precisamos.

- 1) $x_i \in Y$ quando i é ímpar e $x_i \in Z$ quando i é par.
- 2) $\|x_i\| = 1$ para qualquer i e $\|x_i^*\| \leq 1$, x_i^* é uma (M_i, g) -forma para todo i .
- 3) $|x_i^*(x_i) - 1/2| \leq 1/k$ para todo i .

Como na demonstração do Lema 4.15, nossa escolha de σ e a baixa limitação para N_1 garante que $x_1, \dots, x_k$ é uma RIS de comprimento k . A sequência $x_1^*, \dots, x_k^*$ é uma sequência especial de comprimento k , pois $x_i^* \in Q, \forall i$, $x_1^* \in A_{j_{2k}}^*(X)$ já que x_1^* é uma (M_1, f) -forma e $x_{i+1}^* \in A_{\sigma(x_1^*, \dots, x_i^*)}^*(X)$, $i = 1, \dots, k-1$.

Segue da definição de norma que $\|\sum_{i=1}^k x_i\| \geq \sup\{|\bar{g}(E \sum_{i=1}^k x_i)| : k \in K, \bar{g} \in B_k^*(X), E \subset \mathbb{N}\} \geq |\bar{g}(E \sum_{i=1}^k x_i)|$. Tomando $E = \text{ran}(w)$ onde $w = \sum_{i=1}^k x_i$ temos que $|\bar{g}(E \sum_{i=1}^k x_i)| = |f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k g_j(\sum_{i=1}^k x_i)| \geq f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k g_j(\sum_{i=1}^k x_i)$.

$(g_j)_{j=1}^k$ é uma sequência especial de comprimento k então em particular podemos tomar $g_j = x_j^*$, para qualquer j , $1 \leq j \leq k$. Então continuando temos $f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k g_j(\sum_{i=1}^k x_i) = f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k x_j^*(\sum_{i=1}^k x_i) = f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k x_j^*(x_i)$.

Como $\text{ran}(x_i^*) = \text{ran}(x_i)$ segue que $f(k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k x_j^*(x_i) = f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k x_i^*(x_i)$. Portanto $\|\sum_{i=1}^k x_i\| \geq f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k x_i^*(x_i)$. Mas $|x_i^*(x_i) - 1/2| \leq 1/k$. logo $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leq x_i^*(x_i) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$ então $x_i^*(x_i) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ para todo i . Portanto $f(k)^{-1/2} \sum_{i=1}^k x_i^*(x_i) \geq f(k)^{-1/2}(k/2 - 1)$.

A prova estará completa se acharmos para $\|\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i\|$ uma limitação superior conveniente. Para isto vamos utilizar o Lema 4.15, mas para usá-lo temos que verificar que $|(\sum_{i=1}^k x_i^*)(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} E x_i)| \leq 2$ para todo intervalo E .

Podemos verificar que para $x_i^*(E x_i)$ também temos $|x_i^*(E x_i) - 1/2| \leq 1/k$, $\forall i$ então vejamos,
 $|(\sum_{i=1}^k x_i^*)(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} E x_i)| = |\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i^*(E x_i)|$, pois como $\text{ran}(x_i^*) = \text{ran}(x_i)$ temos que $x_i^*(E x_j) = 0$ para $i \neq j$.

Sabemos que $|x_i^*(E x_i) - 1/2| \leq \frac{1}{k}$ logo $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leq x_i^*(E x_i) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$ e $-\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leq -x_i^*(E x_i) \leq$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

Suponha que k é par então,

$$|\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i^*(Ex_i)| \leq \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) = \frac{k}{2} \left(\frac{2}{k} \right) = 1 \leq 2.$$

Suponha que k é ímpar então,

$$|\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i^*(Ex_i)| \leq \frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq 2.$$

$$\text{Portanto } |(\sum_{i=1}^k x_i^*)(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} Ex_i)| \leq 2.$$

Portanto podemos utilizar o Lema 4.15 já que todas as hipóteses estão satisfeitas.

Com isso construímos $y \in Y$, onde y é a soma dos $x_{i's}$ ímpares, e $z \in Z$, onde z é a soma dos $x_{i's}$ pares, com $\|y + z\| = \|\sum_{i=1}^k x_i\| \geq f(k)^{-1/2}(k/2 - 1)$ e

$$\|y - z\| = \|\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i\| \leq (1 + 2\epsilon)kf(k)^{-1}.$$

Temos também que $\frac{\|y-z\|f(k)^{1/2}}{3} \leq \frac{(1+2\epsilon)kf(k)^{-1}f(k)^{1/2}}{3} = \frac{(1+2\epsilon)kf(k)^{-1/2}}{3}$. Verificaremos agora que $\frac{(1+2\epsilon)k}{3} \leq \frac{(k-2)}{2}$.
 $\frac{(1+2\epsilon)k}{3} \leq \frac{(k-2)}{2} \iff (1+2\epsilon)2k \leq 3(k-2) \iff 2k + 4k\epsilon - 3k + 6 \leq 0 \iff -k + 4k\epsilon + 6 \leq 0 \iff -k + \frac{4k}{10} + 6 \leq 0 \iff k \geq 10$, o que é verdade.

Portanto $\frac{(1+2\epsilon)kf(k)^{-1/2}}{3} \leq (k/2 - 1)f(k)^{-1/2} \leq \|y + z\|$. Sabemos que $f(k)^{-1/2} < \delta/4$ logo $\sqrt{f(k)} > 4/\delta$. Sendo assim temos que $\frac{f(k)^{1/2}}{3}\|y - z\| > \frac{4}{3\delta}\|y - z\| > \frac{1}{\delta}\|y - z\| = \delta^{-1}\|y - z\|$. Portanto $\|y + z\| \geq \frac{f(k)^{1/2}}{3}\|y - z\| > \delta^{-1}\|y - z\|$.

caso 2: Sejam agora Y e Z subespaços quaisquer de X_{GM} .

Seja $0 < \delta < 1$. Lembrando que $\epsilon = 1/10$ e que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{f(k)}} = 0$ e

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{f(k)} \left(\frac{k/2 - 1}{k} \right) = +\infty$, podemos escolher $k \in K$ tal que $f(k)^{-1/2} < \delta/4$ e $\frac{(1+2\epsilon)k}{f(k)} < \frac{\delta(k/2-1)}{\sqrt{f(k)}}$.

Seja c o ponto médio do segmento que une $\frac{(1+2\epsilon)k}{f(k)}$ e $\frac{\delta(k/2-1)}{\sqrt{f(k)}}$ e seja θ , $\theta < \frac{1}{2}$ tal que $2\theta + \frac{(1+2\epsilon)k}{f(k)} < c$.

Pelo Teorema 0.10 e sua demonstração temos que existe $(y_n)_n$ base de Y equivalente a uma base de blocos $(b_n)_n$ de $(e_n)_n$, com $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - b_n\| \leq \theta$ e $(z_n)_n$ base de Z equivalente a uma base de blocos $(B_n)_n$ de $(e_n)_n$, com $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - B_n\| \leq \theta$.

Consideremos agora $Y' = [(b_n)_n]$ e $Z' = [(B_n)_n]$. Análogo ao que foi feito no caso 1 temos que existe $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$ tais que os $\overline{x_{i's}}$ ímpares estão em Y' e os $\overline{x_{i's}}$ pares estão em Z' , onde os $\overline{x_{i's}}$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{x_1} &= \alpha_1 [\underbrace{(b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1n_1})}_{=x_{11}} + \underbrace{(b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2n_2})}_{=x_{12}} + \dots + \underbrace{(b_{M_11} + b_{M_12} + \dots + b_{M_1n_{M_1}})}_{=x_{1M_1}}] \\ &, \text{ onde } b_{ij} \in \{b_n\} \text{ e } \alpha_1 = \frac{1}{\|x_{11} + \dots + x_{1M_1}\|}, \\ \overline{x_2} &= \alpha_2 [\underbrace{(B_{11} + B_{12} + \dots + B_{1m_1})}_{=x_{21}} + \underbrace{(B_{21} + B_{22} + \dots + B_{2m_2})}_{=x_{22}} + \dots + \\ &+ \underbrace{(B_{M_21} + B_{M_22} + \dots + B_{M_2m_{M_2}})}_{=x_{2M_2}}], \text{ onde } B_{ij} \in \{B_n\} \text{ e } \alpha_2 = \frac{1}{\|x_{21} + \dots + x_{2M_2}\|}, \text{ e assim por} \\ &\text{diante.} \end{aligned}$$

Com isto construímos $y' \in Y'$ onde y' é a soma dos $\overline{x_{i's}}$ ímpares e $z' \in Z'$ onde z' é a soma dos $\overline{x_{i's}}$ pares.

Temos pelo que vimos no caso 1 que $\delta \|y' + z'\| \geq \frac{\delta(k/2-1)}{\sqrt{f(k)}}$, $\|y' - z'\| \leq \frac{(1+2\epsilon)k}{f(k)}$ e $\delta \|y' + z'\| > \|y' - z'\|$.

Sejam $x_1 = \alpha_1 [(y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_1}) + (y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2n_2}) + \dots + (y_{M_11} + y_{M_12} + \dots + y_{M_1n_{M_1}})]$ pertencente a Y , onde $y_{ij} \in \{y_n\}$, e ij são os índices usados para construir b_{ij} ,

$x_2 = \alpha_2 [(z_{11} + z_{12} + \dots + z_{1m_1}) + (z_{21} + z_{22} + \dots + z_{2m_2}) + \dots + (z_{M_21} + z_{M_22} + \dots + z_{M_2m_{M_2}})]$ pertencente a Z , onde $z_{ij} \in \{z_n\}$, e ij são os índices usados para construir B_{ij}

Procedendo analogamente obtemos $x_1, \dots, x_k$. Consideremos $y \in Y$ onde y é a soma dos $x_{i's}$ ímpares e $z \in Z$ onde z é a soma dos $x_{i's}$ pares. Então,

$$\text{I) } \|y - z\| \leq \|y - y'\| + \|y' - z'\| + \|z' - z\| \leq \|y' - z'\| + 2\theta < c.$$

$$\text{II) } \|y' + z'\| \leq \|y' - y\| + \|y + z\| + \|-z + z'\| \leq \|y + z\| + 2\theta. \text{ Logo } \delta \|y' + z'\| \leq \delta \|y + z\| + 2\theta\delta \leq \delta \|y + z\| + 2\theta, \text{ mas } c < \delta \|y' + z'\| - 2\theta \leq \delta \|y + z\|.$$

Portanto por I) e II) temos que $\|y - z\| < \delta \|y + z\|$. Assim Y e Z não formam uma soma direta topológica, então X_{GM} é hereditariamente indecomponível. ■

Corolário 4.18 *O espaço de Gowers e Maurey não tem nenhuma sequência básica incondicional.*

Demonstração

Suponhamos que existe uma sequência básica incondicional $(x_n)_n$ em X_{GM} . Seja $W = [(x_n)_n]$ então podemos tomar $Y = [(x_{2n})_n]$ e $Z = [(x_{2n-1})_n]$ logo $W = Y \oplus Z$, o que é absurdo já que X_{GM} é hereditariamente indecomponível.

Portanto X_{GM} não contém nenhuma sequência básica incondicional. ■

Proposição 4.19 *X_{GM} é reflexivo.*

Demonstração

Vamos fazer esta demonstração provando que a base $(e_n)_n$ de X_{GM} é shrinking e limitadamente completa.

1) $(e_n)_n$ é shrinking.

Suponhamos que $(e_n)_n$ não seja shrinking, então existe $x^* \in X_{GM}^*$ tal que $\|x^*|_{[e_{n_0}, e_{n_1}, \dots]}\| \not\rightarrow 0$. Podemos supor que $\|x^*\| = 1$, pois se $\|x^*\| \neq 1$ basta tomar $\frac{x^*}{\|x^*\|}$ e ainda teremos a condição $\|x^*|_{[e_{n_0}, e_{n_1}, \dots]}\| \not\rightarrow 0$.

De $\|x^*|_{[e_{n_0}, e_{n_1}, \dots]}\| \not\rightarrow 0$ temos que existe $\epsilon > 0$, podemos supor que $2\epsilon < 1$, tal que $\forall n_0$, existe $n \geq n_0$ de modo que $\|x^*|_{[e_n, e_{n+1}, \dots]}\| \geq 2\epsilon$.

Tomemos $n_0 = 1$ então existe $n_1 > 1$ com $\|x^*|_{[e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots]}\| \geq 2\epsilon$, ou seja, existe $v_1 = \sum_{i=n_1}^{\infty} a_i e_i$, $\|v_1\| \leq 1$, satisfazendo $\|x^*(v_1)\| \geq 2\epsilon$.

Como $x^*(v_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^*\left(\sum_{i=n_1}^n a_i e_i\right)$, segue que existe n_2 tal que $\|x^*\left(\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i e_i\right)\| \geq \epsilon$. Seja $w_1 = \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i e_i$, então $\|x^*\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}\right)\| \geq \frac{1}{\|w_1\|}\epsilon \geq \frac{1}{\|v_1\|}\epsilon \geq \epsilon$ já que w_1 é uma projeção de v_1 e $\|v_1\| \leq 1$.

Coloquemos $x_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$. e eventualmente trocando por $-x_1$, podemos supor que $x^*(x_1) \geq \epsilon$.

Consideremos n_2 então existe $n_3 > n_2$ com $\|x^*|_{[e_{n_3}, e_{n_3+1}, \dots]}\| \geq 2\epsilon$, ou seja, existe $v_2 = \sum_{i=n_3}^{\infty} a_i e_i$, $\|v_2\| \leq 1$, satisfazendo $\|x^*(v_2)\| \geq 2\epsilon$.

Como $x^*(v_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^*(\sum_{i=n_3}^n a_i e_i)$, segue que existe n_4 tal que $\|x^*(\sum_{i=n_3}^{n_4} a_i e_i)\| \geq \epsilon$. Seja $w_2 = \sum_{i=n_3}^{n_4} a_i e_i$, então $\|x^*(\frac{w_2}{\|w_2\|})\| \geq \frac{1}{\|w_2\|}\epsilon \geq \frac{1}{\|v_2\|}\epsilon \geq \epsilon$ já que w_2 é uma projeção de v_2 e $\|v_2\| \leq 1$.

Coloquemos $x_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$, e eventualmente trocando por $-x_2$, podemos supor que $x^*(x_2) \geq \epsilon$.

Continuando o raciocínio temos que existe $(x_n)_n$ sequência normalizada de blocos, tais que $x^*(x_n) \geq \epsilon$.

Afirmção: $\sum_{n \in A} x_n$ é um $l_{1+}^{|A|}$ vetor com constante $\frac{1}{\epsilon}$, $\forall A$ finito contido nos naturais.

Temos que provar que $\|x_n\| \leq \frac{1}{\epsilon|A|} \|\sum_{n \in A} x_n\|$, isto é, $\epsilon|A| \leq \|\sum_{n \in A} x_n\|$. Ora $x^*(\sum_{n \in A} x_n) = \sum_{n \in A} x^*(x_n) \geq \epsilon|A|$ e como $\|\sum_{n \in A} x_n\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(\sum_{n \in A} x_n)|$ temos $\|\sum_{n \in A} x_n\| \geq \epsilon|A|$. Temos que $\frac{1}{\epsilon} > 1$, então seja $\frac{1}{\epsilon} = 1 + \epsilon_1$.

Dado $N \in L$, vamos construir uma RIS, $y_1, y_2, \dots, y_N$, com constante $1 + \epsilon_1$ onde cada y_i é da forma $\lambda_i(\sum_{j \in A_i} x_j)$, com $\frac{1}{\lambda_i} \leq |A_i|$, A_i finito.

Tomemos $A_1 \subset \mathbb{N}$ finito com $|A_1| > 2(1 + \epsilon_1)M_f(N/\epsilon'_1)/\epsilon'_1 f'(1)$ e $y_1 = \lambda_1(\sum_{j \in A_1} x_j)$, onde $\lambda_1 = \frac{1}{\|\sum_{j \in A_1} x_j\|}$, portanto $\frac{1}{\lambda_1} = \|\sum_{j \in A_1} x_j\| \leq |A_1|$. Vamos agora escolher y_2 . Sejam

$n_2 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\frac{\epsilon'_1}{2} f(n_2)^{1/2} \geq |ran y_1|$ e $j_1 = \max A_1$. Tomemos agora n_2 $x_{j'_s}$, tais que $j > j_1$ e indiquemos por A_2 o conjunto desses índices. Coloquemos $y_2 = \lambda_2(\sum_{j \in A_2} x_j)$, onde

$\lambda_2 = \frac{1}{\|\sum_{j \in A_2} x_j\|}$, portanto $\frac{1}{\lambda_2} = \|\sum_{j \in A_2} x_j\| \leq |A_2|$.

Continuando o raciocínio construímos a RIS $y_1, \dots, y_N$.

Logo $x^*(y_1 + \dots + y_N) = x^*(\lambda_1(\sum_{j \in A_1} x_j) + \lambda_2(\sum_{j \in A_2} x_j) + \dots + \lambda_N(\sum_{j \in A_N} x_j)) = \lambda_1(\sum_{j \in A_1} x^*(x_j)) + \lambda_2(\sum_{j \in A_2} x^*(x_j)) + \dots + \lambda_N(\sum_{j \in A_N} x^*(x_j)) \geq \lambda_1 \epsilon |A_1| + \lambda_2 \epsilon |A_2| + \dots + \lambda_N \epsilon |A_N|$ e como $\frac{1}{\lambda_i} \leq |A_i|$ temos que $\lambda_i |A_i| \geq 1$, portanto $\lambda_1 \epsilon |A_1| + \lambda_2 \epsilon |A_2| + \dots + \lambda_N \epsilon |A_N| \geq \epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon = \epsilon N$.

Então em particular temos que $\|y_1 + \dots + y_N\| \geq N\epsilon$. E portanto para N suficientemente grande temos uma contradição pelo Lema 4.13. Pois por este Lema temos, $N\epsilon \leq \|\sum_{i=1}^N y_i\| \leq (1 + \epsilon_1 + \epsilon'_1) N f(N)^{-1}$, isto é, $f(N) \leq \frac{(1+\epsilon_1+\epsilon'_1)}{\epsilon}$, absurdo para N suficientemente grande.

Portanto $(e_n)_n$ é shrinking.

2) $(e_n)_n$ é limitadamente completa.

Seja $(a_n)_n$ sequência em $\mathbb{R}$, tal que $\sum_{n=1}^N a_n e_n$ é limitada, ou seja, existe k tal que $\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\| \leq k$ para qualquer N .

Mostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge, isto é. $(S_n)_n$ é de Cauchy em X_{GM} onde $S_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Suponhamos que $(S_n)_n$ não é de Cauchy. Portanto existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, existe $m_1, m_2 \geq m$ tal que $\|S_{m_2} - S_{m_1}\| \geq \epsilon$. Seja $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M}{f(M)} > \frac{k}{\epsilon}$ e consideremos os seguintes intervalos $E_i = \{M + i\}$ com $1 \leq i \leq M$.

Pela definição de norma temos

$$k \geq \|S_{M+M}\| \geq \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^M \|E_i(S_{M+M})\| = \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^M \|S_{i+M} - S_{(i-1)+M}\| \geq \frac{1}{f(M)} \epsilon M; \text{ absurdo.}$$

Portanto $(S_n)_n$ é de Cauchy, logo $(e_n)_n$ é limitadamente completa. ■

Como já mencionamos na introdução desta dissertação ainda não é conhecida a solução do seguinte problema.

Problema 4.20 *Existe espaço de Banach HI não separável ?*

Capítulo 5

Operadores sobre espaços hereditariamente indecomponíveis

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades de operadores sobre espaços hereditariamente indecomponíveis complexos e reais. A partir dessas propriedades demonstraremos que espaços hereditariamente indecomponíveis tanto reais como complexos são contra-exemplos para o Problema do Hiperplano, isto é, eles não são isomorfos a nenhum de seus hiperplanos.

Inicialmente estudaremos os operadores sobre espaços hereditariamente indecomponíveis complexos e para isto precisamos de algumas definições e Lemas relacionados com a Teoria Espectral.

A teoria apresentada neste capítulo pode ser encontrada em [11], exceto a definição 5.10 que se encontra em [14].

Definição 5.1 Dizemos que $T \in L(X, Y)$ com $T(X)$ fechado é um operador de Fredholm se o índice de T é finito, isto é colocando $\alpha(T) = \dim \text{Ker } T$ e $\beta(T) = \dim \frac{Y}{T(X)}$ então $i(T) = \alpha(T) - \beta(T)$ é finito.

Definição 5.2 Seja $T \in L(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ é infinitamente singular para T se $\forall \epsilon > 0, \exists Y_\epsilon$ subespaço fechado de dimensão infinita de X tal que $\|(T - \lambda I)|_{Y_\epsilon}\| \leq \epsilon$.

Lema 5.3 Seja $T \in L(X)$ são equivalentes:

1) T não é um isomorfismo quando restrito a qualquer subespaço de codimensão finita de X .

2) $\forall \epsilon > 0, \exists Y_\epsilon$ subespaço fechado de dimensão infinita de X tal que $\|T|_{Y_\epsilon}\| \leq \epsilon$.

Demonstração:

1) $\rightarrow$ 2) Segue do Teorema 0.22.

2) $\rightarrow$ 1) Vamos negar 1) e chegar na negação de 2).

Seja Y um subespaço de codimensão finita de X . Suponhamos que $T|_Y$ é um isomorfismo, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon\|y\| \leq \|T(y)\|, \forall y \in Y$. Seja Z um subespaço fechado de dimensão infinita de X , pelo Teorema 0.20 existe V subespaço de X de dimensão finita tal que $Z = Z \cap Y \oplus V$.

Portanto existe $z \in Z \cap Y, \|z\| = 1$. logo $\|T(z)\| \geq \epsilon$. Sendo assim, $\|T|_Z\| \geq \epsilon$. ■

Lema 5.4 *Sejam $T \in L(X)$ e $F_T = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ não é infinitamente singular para } T\}$. Então:*

1) F_T é aberto em $\mathbb{C}$.

2) $\text{Ker}(T - \lambda I)$ é de dimensão finita quando $\lambda \in F_T$.

Demonstração

1) De fato, seja $\lambda_0 \in F_T$ logo existe Z subespaço de X de codimensão finita tal que $T - \lambda_0 I$ restrito a Z é um isomorfismo. isto é, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $k\|z\| \leq \|Tz - \lambda_0 z\|, \forall z \in Z$.

Seja λ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{k}{2}$, como $Tz - \lambda_0 z = Tz - \lambda z + \lambda z - \lambda_0 z$ temos que $k\|z\| \leq \|Tz - \lambda_0 z\| \leq \|Tz - \lambda z\| + |\lambda - \lambda_0|\|z\|$, logo $k\|z\| \leq \|Tz - \lambda z\| + \frac{k}{2}\|z\|$. Portanto $\frac{k}{2}\|z\| \leq \|Tz - \lambda z\|, \forall z \in Z$, isto é, $\lambda \in F_T$.

2) De fato, existe Z subespaço de X de codimensão finita tal que $T - \lambda I|_Z$ é um isomorfismo.

Como o $\text{Ker}(T - \lambda I) \cap Z = \{0\}$, pois $T - \lambda I|_Z$ é um isomorfismo, segue que $\text{Ker}(T - \lambda I)$ só pode ter uma quantidade finita de vetores linearmente independente, logo $\dim \text{Ker}(T - \lambda I)$ é finita. ■

Lema 5.5 *Seja $T \in L(X)$ se $\lambda \in F_T$ e se $(x_n)_n$ é uma sequência limitada tal que $(T -$*

$\lambda I)x_n$ é convergente na norma, então $(x_n)_n$ tem uma subsequência convergente na norma; além disso, a imagem de qualquer subespaço fechado de X por $T - \lambda I$ é fechado.

Demonstração:

Seja $S = T - \lambda I$, como $\lambda \in F_T$ existe Y subespaço de X de codimensão finita tal que $S|_Y$ é um isomorfismo sobre a imagem.

Sejam $X = Y \oplus Z$, onde Z é um subespaço de dimensão finita de X , e $x_n = y_n + z_n$ com $y_n \in Y$ e $z_n \in Z$, então $S(x_n) = S(y_n + z_n) = S(y_n) + S(z_n)$.

Consideremos $P : X \rightarrow Z$ uma projeção, logo $z_n = P(x_n)$ e portanto $\|z_n\| = \|P(x_n)\| \leq \|P\| \|x_n\|$.

Como $(x_n)_n$ é limitada temos que $(z_n)_n$ também é limitada. consequentemente existe subsequência $(z_{n_k})_k$ que converge, logo $S(z_{n_k})$ é convergente, pois S é contínuo.

Desde que $S(z_{n_k})$ é convergente, segue que $S(y_{n_k}) = S(x_{n_k}) - S(z_{n_k})$ é convergente, mas $S|_Y$ é isomorfismo logo $(y_{n_k})_k$ é convergente, consequentemente $x_{n_k} = y_{n_k} + z_{n_k}$ também é convergente.

Para terminar a demonstração consideremos F um subespaço fechado de X , pelo Teorema 0.20 existe G subespaço de X de dimensão finita tal que $F = F \cap Y \oplus G$.

Portanto $S(F) = S(F \cap Y \oplus G) = S(F \cap Y) + S(G)$.

Temos que $S(G)$ é de dimensão finita porque G é de dimensão finita e S é linear e $S(F \cap Y)$ é fechado porque $F \cap Y$ é fechado em Y e $S|_Y$ é um isomorfismo, logo $S|_{F \cap Y}$ ainda é um isomorfismo.

Vamos definir $\bar{T} : X \rightarrow \frac{X}{S(F \cap Y)}$ pondo $\bar{T}(x) = \bar{x}$, claramente $\bar{T}$ é linear e como $\|\bar{T}(x)\| = \|\bar{x}\| = \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| \leq \|x\|$ temos que $\bar{T}$ é contínua.

Então como $S(G)$ é de dimensão finita e $\bar{T}$ é linear temos que $\bar{T}(S(G))$ é de dimensão finita e com isto $\bar{T}(S(G))$ é fechado, consequentemente $\bar{T}^{-1}\bar{T}(S(G)) = S(G) + S(F \cap Y)$ é fechado. ■

Lembrando que $S_p(T)$ é o espectro de T , veja definição 0.27. e indicando por $\partial S_p(T)$ a sua fronteira temos

Lema 5.6 *Seja $T \in L(X)$ se $\lambda \in \partial S_p(T) \cap F_T$, então λ é um autovalor de T com multiplicidade finita.*

Demonstração:

Como $\lambda \in \partial S_p(T)$ temos pelo Teorema 0.29 que λ é um autovalor aproximado de T , isto é, existe uma sequência $(x_n)_n$ de norma 1 tal que $(T - \lambda I)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

A sequência $(x_n)_n$ é limitada. Então pelo Lema 5.5, $(x_n)_n$ tem uma subsequência convergente, ou seja, $\exists x_{i_j}$ convergente para x , logo $(T - \lambda I)x_{i_j} \rightarrow (T - \lambda I)x$.

Mas como $(x_{i_j})_j$ é subsequência de $(x_n)_n$ e $(T - \lambda I)x_n \rightarrow 0$ temos $(T - \lambda I)x_{i_j} \rightarrow 0$ logo $(T - \lambda I)x = 0$, ou seja, $Tx = \lambda x$.

Com isso temos que x é um autovetor com autovalor λ . A multiplicidade de λ é a dimensão do $\text{Ker}(T - \lambda I)$ que é finita pois $\lambda \in F_T$. ■

Lema 5.7 *Seja $T \in L(X)$ se $\lambda \in \partial S_p(T) \cap F_T$ então λ é um ponto isolado do $S_p(T)$.*

Demonstração:

Como F_T é aberto basta mostrarmos que λ é um ponto isolado de $\partial S_p(T) \cap F_T$, pois se λ é ponto isolado da $\partial S_p(T) \cap F_T$ é porque existe um aberto A tal que $A \cap \partial S_p(T) \cap F_T = \{\lambda\}$, logo $A \cap F_T \cap \partial S_p(T) = \{\lambda\}$ onde $A \cap F_T$ é aberto.

Suponhamos que λ não é ponto isolado de $\partial S_p(T) \cap F_T$.

Como λ não é ponto isolado, existe uma sequência $(\lambda_n)_n \in \partial S_p(T) \cap F_T$ que converge para λ , com $\lambda_n \neq \lambda$ para todo n .

Desde que $\lambda_n \in F_T \cap \partial S_p(T)$, temos pelo Lema 5.6 que λ_n é um autovalor de T .

Seja $x_n, \|x_n\| = 1$, um autovetor para λ_n . Como $Tx_n - \lambda x_n = \lambda_n x_n - \lambda x_n = (\lambda_n - \lambda)x_n$ temos que $(T - \lambda I)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, logo como $(x_n)_n$ é limitada podemos assumir pelo Lema 5.5 que x_n é convergente na norma para algum $x, \|x\| = 1$. Então temos que $x_n \rightarrow x$ logo $(T - \lambda I)x_n \rightarrow (T - \lambda I)x$, mas $(T - \lambda I)x_n \rightarrow 0$ portanto $(T - \lambda I)x = 0$, ou seja, $Tx = \lambda x$.

Sejam $Y = [(x_n)_n]$ e $U = (T - \lambda I)|_Y$. Temos que $(x_n) \in Y$ e $x_n \rightarrow x$ logo $x \in Y$, pois Y é fechado.

$U(Y) \subset Y$, pois $U(x_n) = (T - \lambda I)(x_n) = Tx_n - \lambda x_n = \lambda_n x_n - \lambda x_n = (\lambda_n - \lambda)x_n$, logo $U(x_n) = x_n(\lambda_n - \lambda)$ e pela continuidade de U segue que $U(Y) \subset Y$.

Como $(T - \lambda I)(Y) = U(Y)$ e $\lambda \in F_T$ segue do Lema 5.5 que $U(Y)$ é fechado, mas $U(x_n) = \alpha x_n$ logo $x_n \in U(Y)$, $\forall n$. Então pela definição de Y temos $Y = [(x_n)_n] \subset U(Y)$, consequentemente $UY = Y$. Como já vimos anteriormente $(T - \lambda I)x_n \rightarrow 0$ e $(T - \lambda I)x_n \rightarrow (T - \lambda I)x$ então $U(x) = 0$, logo $x \in \text{Ker} U = \text{Ker}(T - \lambda I)|_Y$ e como $\lambda \in F_T$ temos que $\text{Ker} U$ tem dimensão finita. Seja $Y_0 = \text{Ker} U$.

Escrevendo $Y = Y_0 \oplus Y_1$, temos $U(Y) = U(Y_0 \oplus Y_1) = U(Y_0) + U(Y_1)$ mas como $U(Y_0) = 0$ temos que $U(Y) = U(Y_1)$, e como $U(Y) = Y$ segue que $U(Y_1) = Y$. Para ϵ suficientemente pequeno ainda temos $(U - \epsilon I)(Y_1) = Y$, pois $U : Y \rightarrow Y$ é linear, contínua e sobrejetora então considerando $U|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Y$ temos que $U|_{Y_1}$ é linear, contínua, sobrejetora e injetora.

Então pelo Teorema da Aplicação Aberta temos que $U|_{Y_1}$ é um isomorfismo. Desde que $\|U|_{Y_1} - (U|_{Y_1} - \epsilon I)\| = \epsilon$ temos que pelo Teorema 0.30 que para $\epsilon < \frac{1}{\|U^{-1}|_{Y_1}\|}$ $(U - \epsilon I)(Y_1)$ também é um isomorfismo, ou seja, é bijetor logo $(U - \epsilon I)(Y_1) = Y$.

Mas como para $\epsilon \neq 0$ e $\forall y_0 \in Y_0$, $(U - \epsilon I)(\frac{y_0}{-\epsilon}) = y_0$ temos $(U - \epsilon I)(Y_0) = Y_0$.

Visto que $(U - \epsilon I)(Y_1) = Y$ temos $(U - \epsilon I)(Y) = (U - \epsilon I)(Y_0 \oplus Y_1) = Y_0 + Y = Y$.

Seja $y_0 \neq 0$, $y_0 \in Y_0$ então $(U - \epsilon I)(\frac{y_0}{-\epsilon}) = y_0$. mas sabemos que $(U - \epsilon I)(Y_1) = Y$ o que implica que $(U - \epsilon I)(y_1) = y_0$ para algum $y_1 \neq 0$, $y_1 \in Y_1$ e portanto $(U - \epsilon I)(\frac{y_0}{-\epsilon} - y_1) = 0$, onde $\frac{y_0}{-\epsilon} - y_1 \neq 0$.

Assim temos $\text{Ker}(U - \epsilon I) \neq \{0\}$ para todo ϵ pequeno, contradizendo o fato de que $\lambda \in \partial S_p(T)$, pois como $\text{Ker}(U - \epsilon I) \neq \{0\}$ existe $z \neq 0$, $z \in X$ tal que $(U - \epsilon I)(z) = 0$ logo $(T - \lambda I - \epsilon I)(z) = 0$, ou seja, $T(z) = (\lambda + \epsilon)z$.

Como $\text{Ker}(T - (\lambda + \epsilon)I) \neq \{0\}$ temos que $T - (\lambda + \epsilon)I$ não é injetora logo $T - (\lambda + \epsilon)I$ não é bijetora, assim $T - (\lambda + \epsilon)I$ não é inversível então $\lambda + \epsilon \in S_p(T)$, absurdo pois $\lambda \in \partial S_p(T)$. ■

Lema 5.8 *Seja $T \in L(X)$. Suponha que $S_p(T) = \{0\}$. Se X é de dimensão infinita então zero é infinitamente singular para T .*

Demonstração:

Suponhamos que $0 \in F_T$ mas que X é de dimensão infinita. Então $T|_Z$ é um isomorfismo sobre a imagem para algum subespaço Z de X de codimensão finita.

Como é isomorfismo temos que $k\|z\| \leq \|T(z)\| \leq l\|z\|, \forall z \in Z$ e algum $k, l \in \mathbb{R}$. Portanto $\|z\| \leq \|\frac{T}{k}(z)\|$. Logo trocando T por um multiplo de T podemos supor que $\|z\| \leq \|T(z)\|, \forall z \in Z$.

Agora vamos definir $Z_0 = Z, Z_1 = Z \cap T(Z), \dots, Z_{k+1} = Z \cap T(Z_k)$. Todos estes subespaços de X são de dimensão infinita, pois $X = Z \oplus V$ onde $\dim V < \infty$. Como $\dim X = \infty$ e $\dim V < \infty$ temos $\dim Z = \infty$.

$T(Z) = Z \cap T(Z) \oplus W$, onde $\dim W < \infty$ e $Z \cap T(Z) = Z_1$. T é isomorfismo e Z é de dimensão infinita logo $\dim T(Z) = \infty$, e como a dimensão de W é finita temos que a dimensão de Z_1 é infinita, prosseguindo neste raciocínio temos o resultado.

Seja $z \neq 0$ um elemento de Z_k , então $z = T^k(z_0)$ para algum $z_0 \neq 0, z_0 \in Z$. De fato, $z = T(z_{k-1}) = T(T(z_{k-2})) = \dots = T^k(z_0)$ e $0 < \|z_0\| \leq \|T(z_0)\| \leq \|T^2(z_0)\| \leq \dots \leq \|T^k(z_0)\|$.

Portanto $\|z_0\| \leq \|T^k(z_0)\|$, dividindo por $\|z_0\|$ temos $1 \leq \|T^k(\frac{z_0}{\|z_0\|})\|$, isto é, $1 \leq \|T^k\|$.

Contradizendo o fato de que $0 = r_{S_p(T)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup(\|T^n\|)^{1/n}$, onde $r_{S_p(T)}$ é o raio espectral de T . O raio espectral de T é igual a zero porque $r_{S_p(T)} = \sup|\lambda|, \lambda \in S_p(T)$ e como $S_p(T) = \{0\}$ temos que $r_{S_p(T)} = 0$. ■

Lema 5.9 *Se X é de dimensão infinita então $F_T \neq \mathbb{C}$.*

Demonstração:

Suponhamos que $F_T = \mathbb{C}$. Segue do Lema 5.7 que cada ponto na fronteira do $S_p(T)$ é isolado no $S_p(T)$, logo $S_p(T)$ é finito pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Vamos então escrever $S_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ e consideremos o polinômio $P = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$.

Para todo $\lambda \neq 0$ podemos escrever $P - \lambda = (z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n)$ onde $\mu_i \notin S_p(T)$, pois apenas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in S_p(T)$, os μ_i 's são raízes de $P - \lambda$.

Logo $(P - \lambda)(T) = (T - \mu_1 I)(T - \mu_2 I) \dots (T - \mu_n I) = P(T) - \lambda I$ tem inversa contínua, para qualquer $\lambda \neq 0$. A imagem de $(P - \lambda)(T)$ é densa em X , pois a imagem de

$(T - \mu_n I)X$ é denso em X e $(T - \mu_n I)$ é contínua e sobrejetora e sabemos que a imagem de um denso por uma função contínua e sobrejetora é denso. Portanto $S_p(P(T)) = \{0\}$.

Como X é de dimensão infinita temos pelo Lema 5.8 que zero é infinitamente singular para $P(T)$, isto é, $0 \notin F_{P(T)}$.

Portanto existe uma sequência básica normalizada $(x_n)_n$ tal que $P(T)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (ver demonstração do Teorema 0.22).

Escrevendo $P(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I)(T - \lambda_n I)$ e fazendo n repetidas aplicações do Lema 5.5, temos que existe $(x_{n_k})_k$ subsequência convergente de $(x_n)_n$. O que é absurdo, pois $(x_n)_n$ é sequência básica então $\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leq k \|\sum_{i=1}^m a_i x_i\|$ logo $\|x_n\| \leq k \|x_n - x_m\|$, $n < m$.

Mas $1 = \|x_n\| \leq k \|x_n - x_m\|$ então $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{k}$. Portanto $(x_n)_n$ não é Cauchy logo $(x_n)_n$ não é convergente. ■

Na Proposição 5.12 será apresentada uma visão geométrica dos espaços hereditariamente indecomponíveis, mas antes de enunciá-la definiremos ângulo entre subespaços e provaremos uma Proposição.

Definição 5.10 *Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita.*

$\gamma(Y, Z) = \inf\{\|y - z\| : \|y\| = \|z\| = 1, y \in Y, z \in Z\}$ é definido como sendo o ângulo entre Y e Z .

Proposição 5.11 *Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de um espaço de Banach X tal que $Y \cap Z = \{0\}$. Então $Y + Z$ é fechado se, e somente se, $\gamma(Y, Z) > 0$.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponha que $Y + Z$ é fechado e defina $T : Y \oplus Z \rightarrow Y + Z$ por $T(y, z) = y - z$, $Y \oplus Z$ com a norma infinito.

1) Claramente T é linear.

Como $Y + Z$ é fechado, basta mostrarmos que o gráfico de T é fechado para termos pelo Teorema do Gráfico Fechado que T é contínua.

2) T é contínua.

De fato, sejam $(y_n, z_n) \rightarrow (0, 0)$ e $T(y_n, z_n) \rightarrow x$. Como $(y_n, z_n) \rightarrow (0, 0)$ temos que $y_n \rightarrow 0$ e $z_n \rightarrow 0$ logo $T(y_n, z_n) = y_n - z_n \rightarrow 0$ e assim segue que $x = 0$. Portanto pelo Teorema do Gráfico Fechado temos que T é contínua.

3) T é injetora.

De fato, $T(y, z) = 0 \iff y - z = 0 \iff y = z$ e como $Y \cap Z = \{0\}$ temos $y = z = 0$.

4) T é sobre a imagem.

Então pelo Teorema da Aplicação Aberta T é um isomorfismo, logo existe $k > 0$ tal que $k\|(y, z)\|_\infty \leq \|T(y, z)\|$, ou seja, $k \max(\|y\|, \|z\|) \leq \|T(y, z)\|$. Em particular, se $\|y\| = \|z\| = 1$, temos $\|y - z\| \geq k > 0$. Portanto, $\inf\{\|y - z\| : \|y\| = \|z\| = 1, y \in Y, z \in Z\} > 0$.

$\Leftarrow$) Defina $T : Y \oplus Z \rightarrow Y + Z$ por $T(y, z) = y - z$, $Y \oplus Z$ com a norma infinito.

1) Claramente T é linear.

2) T é contínua.

De fato, $\|T(y, z)\| = \|y - z\| \leq \|y\| + \|z\| \leq 2\|(y, z)\|_\infty$.

3) T é injetora.

De fato, $T(y, z) = 0 \iff y - z = 0 \iff y = z$ e como $Y \cap Z = \{0\}$ temos $y = z = 0$.

4) T é sobre a imagem.

Suponhamos que T não tem inversa contínua. Então existe $(m_i, n_i) \in Y \oplus Z$, $\max(\|m_i\|, \|n_i\|) = 1$ tal que $\|m_i - n_i\| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$.

Escolha i_j tal que $\|m_{i_j}\| = 1$. Como $1 = \|m_{i_j}\| = \|m_{i_j} - n_{i_j} + n_{i_j}\| \leq \|m_{i_j} - n_{i_j}\| + \|n_{i_j}\|$, temos $1 - \|m_{i_j} - n_{i_j}\| \leq \|n_{i_j}\| \leq 1$, logo $\|n_{i_j}\| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 1$. Sendo assim podemos supor que $n_{i_j} \neq 0, \forall j$.

$$\|m_{i_j} - \frac{n_{i_j}}{\|n_{i_j}\|}\| = \|m_{i_j} - n_{i_j} + n_{i_j} - \frac{n_{i_j}}{\|n_{i_j}\|}\| \leq \|m_{i_j} - n_{i_j}\| + \|n_{i_j} - \frac{n_{i_j}}{\|n_{i_j}\|}\|.$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$ temos que $\|m_{i_j} - \frac{n_{i_j}}{\|n_{i_j}\|}\| = 0$, absurdo pois deveríamos ter $\|m_{i_j} - \frac{n_{i_j}}{\|n_{i_j}\|}\| > 0$.

Portanto T tem inversa contínua. Logo T é um isomorfismo e com isto temos que $Y + Z$ é fechado. ■

Proposição 5.12 *X é hereditariamente indecomponível se, e somente se, para qualquer Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de X , e para qualquer $\epsilon > 0$ existe $y \in Y$, $z \in Z$, $\|y\| = \|z\| = 1$ e $\|y - z\| < \epsilon$.*

Demonstração:

$\Rightarrow$) Suponhamos que não, então existem Y, Z subespaços fechados de dimensão infinita de X e $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $y \in Y, z \in Z$ com $\|y\| = \|z\| = 1$, temos $\|y - z\| \geq \epsilon > 0$.

1) $Y \cap Z = \{0\}$. pois se $x \in Y \cap Z$ então $\|x - x\| \geq \epsilon$, absurdo.

2) $Y + Z$ é fechado em X pela Proposição 5.11.

Então tomando $W = Y + Z$ temos que W é fechado e $W = Y \oplus Z$, absurdo pois X é hereditariamente indecomponível.

$\Leftarrow$) Suponhamos que X não é H.I, então existem Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de X tal que $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z$ é fechado em X . Então pela Proposição 5.11 temos que $\inf\{\|y - z\| : \|y\| = \|z\| = 1, y \in Y, z \in Z\} > 0$, absurdo. ■

Agora já estamos em condições de provar o principal resultado envolvendo operadores em espaços complexos hereditariamente indecomponíveis. Mostraremos que eles se escrevem de uma maneira simples e como Corolário teremos a demonstração de que esse espaço é um contra-exemplo para o Problema do Hiperplano.

Teorema 5.13 *Se X é um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível então todo $T \in L(X)$ pode ser escrito como $T = \lambda I + S$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e S é um operador estritamente singular.*

Demonstração:

Suponhamos que existam λ_1 e λ_2 infinitamente singular para T com $\lambda_2 = \lambda_1 + \beta, \beta \neq 0$.

Então $T - \lambda_i I$ não é um isomorfismo quando restrito a um subespaço de codimensão finita de X .

Se $Y_0 = \text{Ker}(T - \lambda_i I)$ é de dimensão finita, então $X = Y_0 \oplus Y$, onde Y é um subespaço de X de codimensão finita. Para $T - \lambda_i I|_Y$ temos

- 1) $T - \lambda_i I|_Y$ é linear e contínua.
- 2) $T - \lambda_i I|_Y$ é injetor, pois $\text{Ker}(T - \lambda_i I|_Y) = \{0\}$.
- 3) $T - \lambda_i I|_Y$ é sobre a imagem.

Então pelo Teorema da Aplicação Aberta $T - \lambda_i I|_Y$ é um isomorfismo sobre a imagem. Absurdo, logo Y_0 tem dimensão infinita.

Consideremos $M = \text{Ker}(T - \lambda_1 I)$ e $N = \text{Ker}(T - \lambda_2 I)$. M e N são subespaços fechados de dimensão infinita.

1) $M \cap N = \{0\}$, pois suponha que exista $0 \neq x \in M \cap N$ então $T(x) = \lambda_1 x$ e $T(x) = \lambda_2 x$, logo $\lambda_1 = \lambda_2$; absurdo.

2) Vamos calcular $\|m - n\|$. Sejam $n \in N, \|n\| = 1$ e $m \in M, \|m\| = 1$. Temos $T(m) = \lambda_1 m$ e $T(n) = \lambda_2 n$.

$$\begin{aligned} \|T\| \|m - n\| &\geq \|T(m - n)\| = \|T(m) - T(n)\| = \|\lambda_1 m - \lambda_2 n\| = \|\lambda_1 m - \lambda_1 n - \beta n\| = \\ &= \|-(\lambda_1 m - \lambda_1 n - \beta n)\| = \|\beta n - (\lambda_1 m - \lambda_1 n)\| \geq \|\beta n\| - \|\lambda_1(m - n)\| = |\beta| \|n\| - |\lambda_1| \|m - n\|. \end{aligned}$$

Com isto temos $\|T\| \|m - n\| \geq |\beta| \|n\| - |\lambda_1| \|m - n\|$ então $\|T\| \|m - n\| + |\lambda_1| \|m - n\| \geq |\beta|$, logo $\|m - n\| \geq \frac{|\beta|}{(\|T\| + |\lambda_1|)} > 0$.

Então pela Proposição 5.11 $M + N$ é fechado em X . Tomando $W = M + N$ temos que W é fechado e $W = M \oplus N$, absurdo pois X é H.I. Portanto só pode existir no máximo um λ infinitamente singular para T , então seja λ infinitamente singular para T .

Suponhamos agora que $U = T - \lambda I$ não é estritamente singular, logo existem $\delta > 0$ e M subespaço fechado de X de dimensão infinita tal que $\delta \|x\| \leq \|U(x)\|$.

O Kernel de U é de dimensão infinita, pois se o Kernel fosse de dimensão finita $T - \lambda I|_Y$ seria um isomorfismo, onde Y é um subespaço de X de codimensão finita; absurdo já que λ é infinitamente singular. Seja $N = \text{Ker} U$ então temos

1) $M \cap N = \{0\}$, pois $U|_M$ é isomorfismo logo dos elementos que estão em M apenas $0 \in \text{Ker} U$.

2) Sejam $x \in M, \|x\| = 1$ e $y \in N, \|y\| = 1$, então $\|U\|\|x - y\| \geq \|U(x - y)\| = \|U(x) - U(y)\| = \|U(x)\| \geq \delta\|x\| = \delta > 0$.

Logo pela Proposição 5.11 segue que $M + N$ é fechado em X , então tomando $W = M + N$ temos que W é fechado e $W = M \oplus N$; absurdo pois X é H.I.

Portanto $T - \lambda I$ é estritamente singular, ou seja $T - \lambda I = S$ onde S é estritamente singular, logo $T = S + \lambda I$. ■

Corolário 5.14 *Se X é um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível, então X não é isomorfo a nenhum subespaço próprio fechado. Em particular X não é isomorfo a nenhum hiperplano fechado.*

Demonstração:

Seja Y um subespaço fechado de X e $T : X \rightarrow Y \subset X$ um operador qualquer.

Pelo Teorema 5.13 existe $\lambda \in \mathbb{C}$ e $S : X \rightarrow X$ estritamente singular tal que $T = \lambda I + S$.

Se $\lambda = 0$, então T não é um isomorfismo, pois $T = S$.

Se $\lambda \neq 0$, então $i(\lambda I) = 0$ e pelo Teorema 0.26 temos que $i(T) = i(\lambda I + S) = i(\lambda I) = 0$. Se T é injetor então $\beta(T) = 0$, logo T é sobrejetor, em particular $X = Y$. Portanto Y não é um subespaço próprio de X . ■

A partir de agora passaremos a estudar os operadores sobre espaços hereditariamente indecomponíveis reais.

Para demonstrarmos que esses espaços também são contra-exemplos para o Problema do Hiperplano, veja Teorema 5.17, precisamos de dois Lemas que nos ajudarão a trabalhar com o complexificado do espaço real, veja [20] pág 81, que estaremos considerando.

Para os próximos resultados $\hat{X}$ indicará o complexificado do espaço de Banach real X , ou seja, $\hat{X} = \{(u, v) : u, v \in X\}$. Lembremos que o produto de $(u, v) \in \hat{X}$ pelo número complexo $a + ib$ é dado por $(a + ib)(u, v) = (au - bv, av + bu)$ e a norma em $\hat{X}$ é dada por $\|(u, v)\| = \max\{(\|au - bv\|^2 + \|av + bu\|^2)^{1/2} : a^2 + b^2 = 1\}$.

Lema 5.15 *Seja X um espaço de Banach real de dimensão infinita e Y um subespaço de codimensão finita de X , então $\hat{Y}$ também é um subespaço de codimensão finita de $\hat{X}$.*

Demonstração:

Como Y é um subespaço de codimensão finita de X podemos escrever $X = Y \oplus A$ onde A é um subespaço de X de dimensão finita. Verificaremos agora que $\hat{X} = \hat{Y} \oplus \hat{A}$.

Seja $(x_1, x_2) \in \hat{X}$ então $x_1 = y_1 + a_1$ e $x_2 = y_2 + a_2$, $y_i \in Y$, $a_i \in A$ onde $i = 1, 2$,
 $(x_1, x_2) = (y_1 + a_1, y_2 + a_2) = (y_1, y_2) + (a_1, a_2)$.

Logo cada elemento de $\hat{X}$ é escrito como a soma de um elemento de $\hat{Y}$ mais um elemento de $\hat{A}$. Verificaremos agora que esta soma é direta.

$$1) \hat{Y} \cap \hat{A} = \{0\}.$$

De fato, seja $(x_1, x_2) \in \hat{Y} \cap \hat{A}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Logo $(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (a_1, a_2)$ o que implica que $y_1 = a_1$ e $y_2 = a_2$, com isto temos que $Y \cap A \neq \{0\}$, absurdo.

$$2) \hat{A} \text{ tem dimensão finita.}$$

De fato, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base real de A , logo $\{(e_1, 0), (0, e_1), (e_2, 0), (0, e_2), \dots, (e_n, 0), (0, e_n)\}$ é base para $\hat{A}$, pois consideremos $(a, b) \in \hat{A}$ então $(a, b) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \beta_i e_i)$, com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = (\alpha_1 e_1, \beta_1 e_1) + \dots + (\alpha_n e_n, \beta_n e_n) = \\ = \alpha_1 (e_1, 0) + \beta_1 (0, e_1) + \dots + \alpha_n (e_n, 0) + \beta_n (0, e_n).$$

Portanto $\hat{A}$ tem dimensão finita.

Por 1) e 2) temos que $\hat{X} = \hat{Y} \oplus \hat{A}$, $\hat{A}$ de dimensão finita e $\hat{Y}$ codimensão finita. ■

Lema 5.16 *Seja $V : X \rightarrow X$ onde X é um espaço de Banach real de dimensão infinita e considere $U : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ tal que $U(x, y) = (V(x), V(y))$. Se existe $Y \subset X$ de codimensão finita, tal que $V|_Y$ é isomorfismo sobre a imagem então $U|_{\hat{Y}}$ também é isomorfismo sobre a imagem.*

Demonstração:

Por hipótese, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k\|y\| \leq \|V(y)\|$, $\forall y \in Y$. Calculemos $U(x, y)$, $(x, y) \in \hat{Y}$. $U(x, y) = (V(x), V(y))$, logo

$\|U(x, y)\| \geq \max\{\|(V(x)), \|V(y)\|\} \geq \max\{k\|x\|, k\|y\|\} \geq k \max\{\|x\|, \|y\|\} \geq \frac{k}{2\sqrt{2}}\|(x, y)\|$. Portanto $U|_{\hat{Y}}$ é isomorfismo sobre a imagem. ■

Teorema 5.17 *Seja X um espaço de Banach real hereditariamente indecomponível, então X não é isomorfo a nenhum de seus subespaços próprios.*

Demonstração:

Consideremos $T \in L(X)$ e denotemos por S a extensão natural de T para a complexificação de X , ou seja, $S(x, y) = (T(x), T(y))$

Pelo Lema 5.9 existe λ tal que $\lambda \notin F_S$, então λ é infinitamente singular para S , ou seja, $S - \lambda I|_Z$ não é isomorfismo sobre a imagem, onde Z é um subespaço de codimensão finita de $\hat{X}$.

caso 1: $\lambda = 0$.

Afirmamos que $T|_Y$ não é isomorfismo sobre a imagem para todo subespaço Y de codimensão finita de X . Pois se existisse $Y \subset X$, Y de codimensão finita tal que $T|_Y$ fosse um isomorfismo sobre a imagem então teríamos pelos Lemas 5.15 e 5.16 que $\hat{Y}$ seria de codimensão finita e $S|_{\hat{Y}}$ seria um isomorfismo sobre a imagem, absurdo pois λ é infinitamente singular para S . Verificaremos agora que $T - \lambda I = T$ é estritamente singular.

De fato, suponhamos que T não é estritamente singular, logo existem $\delta > 0$ e M subespaço fechado de X de dimensão infinita tal que $\delta\|x\| \leq \|T(x)\|$.

O Kernel de T é de dimensão infinita, pois se o Kernel de T fosse de dimensão finita $T|_Y$ seria um isomorfismo, Y de codimensão finita, absurdo. Seja N o Kernel de T , temos

a) $M \cap N = \{0\}$.

De fato, $T|_M$ é um isomorfismo, logo dos elementos que estão em M apenas $0 \in \text{Ker} T$.

b) $M + N$ é fechado em X .

De fato, sejam $x \in M$ e $y \in N$, $\|x\| = \|y\| = 1$ então $\|T\|\|x - y\| \geq \|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x)\| \geq \delta\|x\| = \delta > 0$.

Portanto $M + N$ é fechado em X pela Proposição 5.11. Então tomando $W = M + N$

temos que W é fechado e $W = M \oplus N$, absurdo, pois X é H.I.

Portanto T é estritamente singular, logo T não é um isomorfismo.

caso 2: $\lambda \neq 0$.

Consideremos $T_\lambda = T^2 - 2\operatorname{Re}\lambda T + |\lambda|^2 I$. Então $(S - \bar{\lambda}I)(S - \lambda I) = (T_\lambda(x), T_\lambda(y))$.

De fato, seja $\lambda = a + ib$, temos que $S(x, y) = (T(x), T(y))$.

$$\begin{aligned} (S - \bar{\lambda}I)(S - \lambda I) &= (T(T(x) - ax + by), T(T(y) - ay - bx)) - (a[T(x) - ax + by] + b[T(y) - ay - bx], \\ &a[T(y) - ay - bx] - b[T(x) - ax + by]) = (T^2(x) - 2aT(x) + a^2x + b^2x, T^2(y) - 2aT(y) + a^2y + b^2y) = (T_\lambda(x), T_\lambda(y)). \end{aligned}$$

Como $\lambda \notin F_S$ temos que $\forall \epsilon > 0$ existe Z_ϵ subespaço fechado de dimensão infinita de $\hat{X}$ tal que $\|S - \lambda I\| \leq \frac{\epsilon}{\|S - \bar{\lambda}I\|}$ sobre Z_ϵ , logo $\|(S - \bar{\lambda}I)(S - \lambda I)\| \leq \|(S - \bar{\lambda}I)\| \|(S - \lambda I)\| \leq \epsilon$ sobre Z_ϵ .

Segue do Lema 5.3 que $(S - \bar{\lambda}I)(S - \lambda I)|_W$ não é isomorfismo sobre qualquer subespaço W de codimensão finita de $\hat{X}$.

Seja $L = (S - \bar{\lambda}I)(S - \lambda I) : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ definida por $L(x, y) = (T_\lambda(x), T_\lambda(y))$.

Análogo ao que vimos anteriormente temos que $T_\lambda|_Y$ não é um isomorfismo sobre qualquer subespaço Y , $Y \subset X$ de codimensão finita. Novamente pelo Lema 5.3 temos que $\forall \epsilon > 0$, existe Y_ϵ subespaço fechado de X de dimensão infinita tal que $\|T_\lambda\| \leq \epsilon$ sobre Y_ϵ . Verificaremos agora que T_λ é estritamente singular.

Suponhamos que T_λ não é estritamente singular, então existe Y subespaço fechado de dimensão infinita de X e $\delta > 0$ tal que $\delta\|y\| \leq \|T_\lambda(y)\|$, $\forall y \in Y$. Tomemos $\epsilon < \delta$ e consideremos Y e Y_ϵ .

a) $Y \cap Y_\epsilon = \{0\}$.

De fato, pois se $0 \neq x \in Y \cap Y_\epsilon$, tomemos $\|x\| = 1$, então $\delta\|x\| \leq \|T_\lambda(x)\| < \epsilon$ logo $\delta \leq \|T_\lambda(x)\| < \epsilon$ portanto $\delta < \epsilon$, absurdo.

b) $Y + Y_\epsilon$ é fechado.

De fato, seja $y \in Y$, $\|y\| = 1$ e $x \in Y_\epsilon$, $\|x\| = 1$.

$$\|T_\lambda\| \|(y - x)\| \geq \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\| \geq \|T_\lambda(y)\| - \|T_\lambda(x)\| \geq \delta - \epsilon > 0.$$

Portanto $\|y - x\| > 0$, logo pela Proposição 5.11 $Y + Y_\epsilon$ é fechado.

Então tomando $W = Y + Y_\epsilon$ temos que W é fechado e $W = Y \oplus Y_\epsilon$, absurdo X é H.I. Portanto T_λ é estritamente singular.

Verificaremos agora que T é Fredholm com índice zero. Seja $K = T^2 - 2\operatorname{Re}\lambda T + |\lambda|^2 I$.

Afirmção: Escrevendo $T^2 - 2\operatorname{Re}\lambda T + |\lambda|^2 I = (T - aI)(T - bI)$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ temos que $T - z$ é Fredholm para todo $z \neq a$ e $z \neq b$.

De fato, seja $v \in \mathbb{C}$, $v \neq a$ e $v \neq b$. Escolhamos $w \in \mathbb{C}$, tal que $v + w = 2\operatorname{Re}\lambda$.

Logo $vw \neq |\lambda|^2$, pois caso contrário v seria raiz de $z^2 - 2\operatorname{Re}\lambda z + |\lambda|^2 = 0$ e portanto seria igual a a ou b .

Como $(T - vI)(T - wI) = T^2 - (v + w)T + vwI = T^2 - 2\operatorname{Re}\lambda T + vwI = K - (|\lambda|^2 - vw)I$ e K é estritamente singular e ainda $|\lambda|^2 - vw \neq 0$, temos pelo Teorema 0.26 que $(T - vI)(T - wI)$ é Fredholm.

Consequentemente $T - vI$ também é Fredholm, pois $\operatorname{Ker}(T - vI) \subset \operatorname{Ker}((T - wI)(T - vI))$ e $\operatorname{Im}((T - vI)(T - wI)) \subset \operatorname{Im}(T - vI)$.

Observemos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois a e b são raízes de $z^2 - 2\operatorname{Re}\lambda z + |\lambda|^2 = 0$ e $\lambda \neq 0$.

Resta mostrarmos que o índice de T é zero.

Vamos definir $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}$, pondo $\varphi(z) = i(T - zI)$. φ é contínua.

De fato, seja $z_0 \in \mathbb{C}$, pelo Teorema 0.25 existe $\mu = \mu(T - z_0I)$ tal que se $P \in L(X)$ e $\|P\| < \mu$ então $i(P + T - z_0I) = i(T - z_0I)$.

Logo se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\|z - z_0\| < \mu$, então $\|(-z + z_0)I\| < \mu$, logo $i(T - zI) = i(T - z_0I)$ e portanto φ é contínua.

Mas $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ é conexo, portanto φ é constante. No entanto sabemos que se $|z| > \|T\|$ então $-zI + T$ é inversível, isto é, $i(T - zI) = 0$, consequentemente φ é nula, em particular $\varphi(0) = i(T) = 0$.

Consequentemente se $T \in L(X)$ e é injetor então $\beta(T) = 0$, isto é a imagem de T é todo X e portanto X não pode ser isomorfo a nenhum de seus subespaço próprios. ■

Terminamos a dissertação observando ainda que não se sabe se o Teorema 5.13 é

verdadeiro para espaços de Banach reais, isto é:

Problema 5.18 *Seja X um espaço de Banach real hereditariamente indecomponível. É verdade que todo $T \in L(X)$ pode ser escrito na forma $T = \lambda I + S$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e S é um operador estritamente singular ?*

Referências Bibliográficas

- [1] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland, New York 1982.
- [2] C. Bessaga and A. Pelczynski, *A generalization of results R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math., 17, 1958, 165-174.
- [3] P. G. Casazza and T. J. Shura, *Tsirelson's space*, Lecture Notes in Mathematics, 1363.
- [4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York 1984.
- [5] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operator*, vol 1. New York Interscience, 1958.
- [6] E. M. Galego, *Alguns aspectos de Geometria de espaços de Banach através de $c_0(\mathbb{N})$* , IME-USP 1996.
- [7] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators, Theory and Applications*, Mc Graw-Hill Book Company.
- [8] W. T. Gowers, *Banach spaces not containing c_0 , l_1 or reflexive subspace*, Trans. Amer. Math. Soc. 344, 1994, 407-420.
- [9] W. T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bull. London Math. Soc. 26, 1994, 523-530.
- [10] W. T. Gowers, *A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach space*, Bull. London Math. Soc. 28, 1996, 297-304.
- [11] W. T. Gowers, *The unconditional basic sequence problem*. Journal of the American Mathematical Society, vol. 6, número 4, outubro de 1993. 851-874.

- [12] W. T. Gowers, *Banach spaces with small spaces of operator*, Math. Ann. 307, (1997) 543-568.
- [13] W. T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), número 6, 1083-1093.
- [14] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York 1975.
- [15] C. S. Honig, *Análise Funcional e Aplicações*, vol 1, IME-USP 1970.
- [16] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52, 1950, 518-527.
- [17] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. 80 (1964), 542-550.
- [18] R. C. James, *Bases in Banach spaces*, Amer. Math. Monthly 89 (1982), 9, 625-640.
- [19] Elon Lages Lima, *Curso de análise*, vol. 2, R.J, Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [20] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, vol 1, Springer-Verlag, New York 1977.
- [21] H. P. Rosenthal, *The unconditional basic sequence problem*, Contemp. Math. 52, AMS, 1986.
- [22] Thomas Schlumprecht, *An arbitrarily distortable Banach space*, Israel Journal of Mathematics 76 (1991), 81-95.
- [23] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, S. A, 1970.
- [24] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, second edition, New York Chichester Brisbane Toronto, 1979.