Classes de Gevrey em Estruturas Hipo-Analíticas

Paulo Antonio Silvani Caetano

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

- São Paulo, agosto de 2000 -

Classes de Gevrey em Estruturas Hipo-Analíticas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e defendida
por Paulo Antonio Silvani Caetano
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 20 de setembro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) (IME-USP)
- Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo (IME-USP)
- Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie (DM-UFSCar)
- Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco (DM-UFSCar)
- Prof. Dr. Joaquim Tavares (DMat-UFPE)

Índice

Introdução	1
1. Hipo-analiticidade Gevrey em codimensão nula	5
1.1 Estruturas hipo-analíticas com codimensão nula: a base M	5
1.2 Diferenciabilidade Gevrey segundo M	6
1.3 Exemplos de funções Gevrey segundo M	13
1.4 Fórmulas de aproximação	16
1.5 Uma certa classe de operadores Gevrey segundo M	18
2. Soluções Gevrey hipo-analíticas	27
2.1 Estruturas hipo-analíticas com codimensão não nula: a base (M, L)	27
2.2 Diferenciabilidade Gevrey segundo (M, L)	29
2.3 Funções Gevrey hipo-analíticas	30
2.4 O Teorema de Baouendi-Treves Gevrey hipo-analítico	35
3. Resolubilidade Gevrey hipo-analítica parcial	38
3.1 O complexo diferencial L	38
3.2 A resolubilidade local Gevrey hipo-analítica parcial	39
3.3 Resolubilidade C^∞ versus Resolubilidade Gevrey hipo-analítica ..	42
4. Resolubilidade Gevrey para funções ($q = 1$)	46
4.1 Resolubilidade local em funções Gevrey segundo (M, L)	46
4.2 A condição $(\mathcal{P})$ versus resolubilidade Gevrey	50
5. Observações Finais	51
Simbologia	54
Referências	55

Introdução

Na presente tese introduzimos conceitos de diferenciabilidade Gevrey hipo-analítica para tratar da resolubilidade Gevrey local de complexos diferenciais associados a uma variedade hipo-analítica. Tais conceitos permitem, por exemplo, obter certos tipos de resolubilidade Gevrey a partir de resolubilidade clássica C^∞ .

Todos os conceitos envolvidos são locais e acontecem em vizinhanças abertas de um ponto qualquer fixado na variedade, denominado origem. As análises se dão numa carta hipo-analítica $(\Omega; Z)$ centrada na origem onde $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável, a valores em $\mathbb{C}^m$, com diferenciais $dZ_1, \dots, dZ_m$ $\mathbb{C}$ -linearmente independentes sobre Ω . Coordenadas especiais $(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ em Ω permitem expressar $Z(x, t)$ na forma $x + i\Phi(x, t)$ tornando Ω difeomorfo ao traço $\Sigma \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ da aplicação $(x, t) \mapsto (Z(x, t), t)$. Damos especial destaque para a base (M, L) de $\mathbb{C}T\Omega$ dual da base $(dZ, dt) = (dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n)$ de $\mathbb{C}T^*\Omega$, constituída por derivações $M_1, \dots, M_m, L_1, \dots, L_n$ satisfazendo a dualidade $M_k t_j = 0$, $L_j Z_k = 0$, $M_k Z_{k'} = \delta_{kk'}$, $L_j t_{j'} = \delta_{jj'}$; aqui δ é a função delta de Kronecker.

O complexo diferencial associado à estrutura hipo-analítica, denotado nesta tese por $\mathbb{L}$, se realiza em Ω através dos campos $L_1, \dots, L_n$ levando q -formas na variável t em $(q+1)$ -formas na variável t como abaixo:

$$f = \sum_{|J|=q} f_J(x, t) dt_J \quad \mapsto \quad \mathbb{L}f = \sum_{|J|=q-1} \sum_{j=1}^n L_j f_J dt_j \wedge dt_J.$$

Na expressão acima, $J = (j_1 < \dots < j_q)$ e $dt_J = dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_q}$. Tal complexo é intrínseco à estrutura hipo-analítica e corresponde ao complexo

de De Rham em $\mathbb{C}T^*\Omega$ após passagem ao quociente pelo subfibrado gerado por $dZ_1, \dots, dZ_m$ (cf.[T, Sec.I.6]).

A resolubilidade local clássica de $\mathbb{L}$, caracterizada em nível q pela condição dada $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem existe $U' \subset U$ vizinhança aberta da origem tal que, para toda $f \in C^\infty(U; \Lambda^q)$ com $\mathbb{L}f = 0$ em U existe $u \in C^\infty(U'; \Lambda^{q-1})$ com $\mathbb{L}u = f$ em U' ,

foi bastante estudada nestas últimas décadas, principalmente após François Treves ter conjecturado que, para $m = 1$, tal condição em nível q seria equivalente à condição a seguir em nível $q - 1$, a saber,

dada $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem existe $U' \subset U$ vizinhança aberta da origem tal que, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, a fibra $\mathcal{F}(U', z_0)$ é vazia ou o homomorfismo $\tilde{H}_q(\mathcal{F}(U', z_0)) \rightarrow \tilde{H}_q(\mathcal{F}(U, z_0))$ induzido pela inclusão $\mathcal{F}(U', z_0) \hookrightarrow \mathcal{F}(U, z_0)$ se anula identicamente.

Aqui $C^\infty(U; \Lambda^q)$ denota q -formas em dt com coeficientes em $C^\infty(U)$, $\mathcal{F}(U, z_0)$ representa a fibra $\{Z(x, t) = z_0 : (x, t) \in U\}$ e $\tilde{H}_*(\cdot)$ denota a homologia singular reduzida com coeficientes complexos. Do Teorema de Baouendi-Treves segue que os germes na origem de tais fibras independem da escolha de Z , tornando a condição acima intrínseca à estrutura. A necessidade da condição de Treves para a resolubilidade clássica de $\mathbb{L}$ foi demonstrada por Paulo Cordaro e François Treves para todo q no ano de 1991 (cf.[CT]). Já a suficiência foi demonstrada aos poucos, em casos envolvendo a regularidade da aplicação Z . No caso em que Z é analítica, François Treves demonstrou a suficiência em $q = 1$ no ano de 1983 (cf.[T1]); Paulo Cordaro e Jorge Hounie demonstraram a suficiência em $q = n$ no ano de 1991 (cf.[CH1]); Sagun Chanillo e François Treves completaram a demonstração da suficiência no ano de 1997 (cf.[ChT]). No caso geral em que Z é infinitamente diferenciável, Gerardo Mendoza e François Treves demonstraram a suficiência em $q = 1$ no ano de 1991 (cf.[MT]); Paulo Cordaro e Jorge Hounie demonstraram a suficiência em $q = n$ no ano de 1997 (cf.[CH2]); recentemente Paulo Cordaro e Jorge Hounie completaram a demonstração da suficiência, fechando assim a conjectura.

Nesta tese assumimos a resolubilidade local C^∞ do complexo $\mathbb{L}$ para estabelecer sua resolubilidade em certas classes de Gevrey, denominadas hipo-analíticas. O conceito de diferenciabilidade Gevrey hipo-analítica, isto é,

diferenciabilidade Gevrey segundo (M, L) , é introduzido a partir das estimativas Gevrey na base (M, L) a seguir:

$$\sup_{\bar{U}} |M^\alpha L^\gamma f| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|+|\gamma|} \cdot (|\alpha| + |\gamma|)!^s, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}.$$

Funções $f = f(x, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $U \subset\subset \Omega$ da origem, cumprindo a estimativa em questão numa amplitude $h > 0$, constituem espaços de Banach $G_{ML}^{s,h}(U)$ com a respectiva norma $\|f\|_{s,h,U}$ determinada pelo ínfimo das constantes na estimativa. Tal conceito de diferenciabilidade Gevrey de ordem $s \geq 1$ equivale ao conceito usual de ultradiferenciabilidade segundo a sequência não quase analítica $\{p!^s\}$ para o caso Roumieu, exceto por utilizar na estimativa Gevrey a base (M, L) ao invés da base usual $(D_x, D_t) = (\partial_x, \partial_t)$. Como no caso usual, as inclusões $G_{ML}^{s,h}(U) \hookrightarrow G_{ML}^{s,h_+}(U)$ são compactas para todo $h < h_+$, tornando $G_{ML}^s(U) = \lim_{h \rightarrow \infty} G_{ML}^{s,h}(U)$ Hausdorff e Montel com a topologia de limite indutivo. O conceito de diferenciabilidade Gevrey hipo-analítica parcial adotado nesta tese é obtido combinando a diferenciabilidade Gevrey em M com a diferenciabilidade em L , via estimativas

$$\forall \ell \exists C_\ell : \sup_{\bar{U}} |M^\alpha L^\gamma f| \leq C_\ell \cdot h^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!^s, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}, \quad |\gamma| \leq \ell.$$

Funções $f = f(x, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $U \subset\subset \Omega$ da origem, cumprindo a estimativa Gevrey parcial em questão numa amplitude $h > 0$, constituem espaços $\mathcal{G}_{ML}^{s,h}(U)$ e a união em $h > 0$ destes espaços determina o espaço $\mathcal{G}_{ML}^s(U)$ das funções Gevrey parciais segundo (M, L) .

O principal resultado desta tese estabelece a resolubilidade local do complexo $\mathbb{L}$ nas classes $\mathcal{G}_{ML}^s(U)$ a partir da resolubilidade local clássica C^∞ , para todo $s > 1$ e para todo $q = 1, \dots, n$ (cf. Teorema 3.1). A técnica da demonstração (Sec.1.5 e Sec.3.3) se espelha em processos de tipo *Mittag-Leffler* e em [C] para regularizar, via transformada FBI e via operadores $P(M)$ Gevrey-diferenciais de tipo *Beurling*, soluções infinitamente diferenciáveis de $\mathbb{L}v = P(M)f$ e obter, no final, uma solução u de $\mathbb{L}u = f$ Gevrey parcial segundo (M, L) . Tal técnica tem importantes consequências no nível $q = 1$ pois também garante a resolubilidade local de $\mathbb{L}$ nas classes $G_{ML}^s(U)$ a partir da resolubilidade local C^∞ (cf. Sec.4.1). Com efeito segue a resolubilidade Gevrey hipo-analítica local de operadores lineares de primeira

ordem de tipo principal satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves (cf. Sec.4.2). É importante ressaltar que, no caso das componentes $Z_1, \dots, Z_m$ serem Gevrey usuais de ordem $s > 1$, a diferenciabilidade Gevrey segundo (M, L) de ordem s coincide, módulo amplitudes, com a diferenciabilidade Gevrey usual de mesma ordem s . Tal coincidência, demonstrada na Proposição 1.3, utiliza extensões $\bar{\partial}$ -flat sobre o traço $\Sigma \subset \mathbb{C}^m$, estudadas de forma abstrata em [D] e de forma concreta nesta tese, através das classes Gevrey diferenciáveis segundo (M, L) . Com efeito, os teoremas anteriormente citados se estendem naturalmente para as classes Gevrey usuais no caso particular em que $Z_1, \dots, Z_m$ são também Gevrey usuais. Em particular segue que a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves é suficiente para a resolubilidade Gevrey local de operadores lineares de primeira ordem de tipo principal com coeficientes analíticos (cf. Teorema 4.2). Cabe aqui notar que, até o presente momento, é desconhecido se para um operador de ordem arbitrária P , de tipo principal, com coeficientes analíticos e satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$, a equação $Pu = f$ com f Gevrey diferenciável de ordem $s > 1$ admite solução u Gevrey diferenciável de mesma ordem s . Resultados parciais nesta direção podem ser consultados em [R] e [GP].

O último resultado que destacamos nesta introdução diz respeito ao teorema de aproximação de Baouendi-Treves, que garante a aproximação holomorfa de soluções infinitamente diferenciáveis com respeito a $L_1, \dots, L_n$ na topologia de C^∞ . Nosso teorema (cf. Sec.2.4) estabelece a aproximação holomorfa de soluções Gevrey hipo-analíticas de ordem $s > 1$ na topologia de $G_{ML}^s(U)$ utilizando fórmulas de aproximação por gaussianas. Observamos que tal aproximação já havia sido demonstrada em [D] no caso Gevrey usual sem o uso de gaussianas; no nosso entendimento o uso de gaussianas simplifica por demais a demonstração.

Capítulo 1

Hipo-analiticidade Gevrey em codimensão nula

Este capítulo trata de questões envolvendo a diferenciabilidade Gevrey de ordem $s > 1$ segundo uma estrutura hipo-analítica de codimensão nula numa variedade diferenciável m -dimensional.

1.1 Estruturas hipo-analíticas com codimensão nula: a base M

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável m -dimensional equipada com uma estrutura hipo-analítica de codimensão nula (cf. [T, Def.III.1.1]). Tal estrutura é caracterizada pela existência de uma coleção de cartas hipo-analíticas (B_i, Z_i) onde B_i são abertos cobrindo $\mathcal{M}$ e $Z_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{im})$ são aplicações infinitamente diferenciáveis em B_i , a valores em $\mathbb{C}^m$, satisfazendo

- para cada i , as diferenciais $dZ_{i1}, \dots, dZ_{im}$ são $\mathbb{C}$ -linearmente independentes em cada ponto de B_i ;
- para cada par $i \neq \kappa$ e para cada $P \in B_i \cap B_\kappa$, existe um biholomorfismo H de uma vizinhança aberta de $Z_i(P) \subset \mathbb{C}^m$ numa vizinhança aberta de $Z_\kappa(P) \subset \mathbb{C}^m$ tal que $Z_\kappa = H \circ Z_i$ numa vizinhança de P .

Observamos que as condições acima tornam cada $Z_i(B_i)$ imersas numa sub-variedade real maximal de $\mathbb{C}^m$.

Fixado um ponto 0 qualquer na variedade, doravante denominado origem, vamos utilizar [T, II.1. The Coarse Local Embedding] e biholomorfismos que preservam a origem para trabalhar numa situável carta hipo-analítica (B, Z) centrada na origem, tornando o aberto B difeomorfo a uma subvariedade real maximal $\Sigma \subset \mathbb{C}^m$ bem posicionada na origem de $\mathbb{C}^m$. Mais precisamente, vamos trabalhar em coordenadas especiais

$$x = (x_1, \dots, x_m) \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad B = \{x : \|x\| < d\} \quad (1.1)$$

nas quais

$$Z_k(x) = x + i\Phi_k(x) \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

com $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ infinitamente diferenciável em B , a valores em $\mathbb{R}^m$, satisfazendo

$$\Phi(0) = 0 \quad , \quad \Phi_x(0) = 0 \quad , \quad \|\Phi_x\| < \frac{1}{2} \text{ em } B \quad . \quad (1.3)$$

Aqui $\Phi_x(x)$ representa a matriz quadrada $m \times m$ com entradas na linha k e coluna k' dadas por $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{k'}}(x)$. Observe que a matriz $Z_x = \text{Id} + \Phi_x$ é não singular em todos os pontos de B , o que permite introduzir a base

$$M = (M_1, \dots, M_m) \quad (1.4)$$

do fibrado tangente complexo $\mathbb{C}T\mathcal{M}$ em B composta pelas derivações

$$M_k = \sum_{k'=1}^m \mu_{kk'}(x) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad (1.5)$$

onde $(\mu_{kk'})$ é a inversa da transposta de Z_x . Importante ressaltar que

$$M_k Z_k = 1 \quad , \quad M_k Z_{k'} = 0 \text{ se } k \neq k' \quad (1.6)$$

e que

$$\Sigma = \{Z(x) = x + i\Phi(x) : x \in B\} \quad . \quad (1.7)$$

1.2 Diferenciabilidade Gevrey segundo M

O conceito de diferenciabilidade Gevrey segundo M de ordem $s \geq 1$, no fecho de uma vizinhança $V \subset B$ da origem e numa amplitude $h > 0$, advém da estimativa

$$\sup_V |M^\alpha f| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|} |\alpha|!^s \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \quad , \quad (1.8)$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ e $M^\alpha = M_1^{\alpha_1} \dots M_m^{\alpha_m}$. Tal conceito equivale ao conceito usual de ultradiferenciabilidade com respeito à sequência não quase analítica $\{p!^s\}$ para o caso Roumieu (cf. [K]) exceto por utilizar em (1.8) a base $M = (M_1, \dots, M_m)$ ao invés da base usual $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$.

Definição 1.1 Dizemos que uma função $f = f(x)$ infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $V \subset\subset B$ da origem é de classe s -Gevrey segundo M em V numa amplitude $h > 0$ quando f cumpre a estimativa (1.8) para alguma constante positiva. O subespaço de $C^\infty(\overline{V})$ ¹ constituído por tais funções será denotado por $G_M^{s,h}(V)$.

Como em [K, (2.4)], cada $G_M^{s,h}(V)$ é um espaço de Banach em relação à norma definida pelo ínfimo das constantes em (1.8), a saber,

$$\|f\|_{s,h,V} = \sup \left\{ \frac{|M^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} |\alpha|!^s} : x \in \overline{V}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \right\}. \quad (1.9)$$

Explicitando,

$$G_M^{s,h}(V) = \left\{ f \in C^\infty(\overline{V}) : \|f\|_{s,h,V} < \infty \right\}. \quad (1.10)$$

Proposição 1.1 Para todo $V \subset\subset B$ e para todo $s \geq 1$ as inclusões

$$G_M^{s,h}(V) \hookrightarrow G_M^{s,h_+}(V) \quad , \quad h < h_+$$

são compactas

Demonstração :

- ▷ Basta mostrarmos que a bola unitária $\mathcal{B} = \{\|f\|_{s,h,V} \leq 1\} \subset G_M^{s,h}(V)$ é totalmente limitada em $G_M^{s,h_+}(V)$.

Fixemos $\varepsilon > 0$.

Como $\mathcal{B}$ é totalmente limitada em $C^\ell(\overline{V})$ pelo Teorema de Ascoli, para cada ℓ fixado existem finitos $f_1, \dots, f_\nu \in \mathcal{B}$ tais que, para toda $f \in \mathcal{B}$ existe algum $\nu_0 \in \{1, \dots, \nu\}$ com

$$\sup_{\overline{V}} |M^\alpha [f - f_{\nu_0}]| \leq \varepsilon h_+^{|\alpha|} |\alpha|!^s \quad , \quad \forall |\alpha| \leq \ell.$$

¹Nesta tese $C^\infty(K)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis no interior de K cujas derivadas se estendem continuamente para a fronteira de K .

Com relação às derivações de ordem $|\alpha| > \ell$, tomando ℓ grande tal que $(h/h_+)^{\ell} < \varepsilon/2$ segue, via desigualdade triangular, que

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{V}} |M^{\alpha}[f - f_{\nu_0}]| &\leq 2h^{|\alpha|} |\alpha|!^s \leq \varepsilon h^{|\alpha|-\ell} h_+^{\ell} |\alpha|!^s, \quad \forall \alpha \\ &\leq \varepsilon h_+^{|\alpha|-\ell} h_+^{\ell} |\alpha|!^s = \varepsilon h_+^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \quad \forall |\alpha| > \ell. \end{aligned}$$

◄

Definição 1.2 Dizemos que uma função f é de classe s -Gevrey segundo M numa vizinhança $V \subset\subset B$ da origem quando f pertence a $G_M^{s,h}(V)$ para alguma amplitude $h > 0$. O subespaço de $C^{\infty}(\overline{V})$ constituído por tais funções será denotado por $G_M^s(V)$.

Segue da Proposição 1.1 e de [Bo] que os espaços

$$G_M^s(V) = \varinjlim_{h \nearrow \infty} G_M^{s,h}(V) \quad (1.11)$$

são Hausdorff e Montel com a topologia de limite indutivo. Em particular, sequências limitadas em algum $G_M^{s,h}(V)$ admitem subsequências convergentes em $G_M^{s,h_+}(V)$ para todo $h_+ > h$ e, consequentemente, em $G_M^s(V)$.

Vamos denotar por $G_M^s(0)$ o espaço dos germes na origem de funções s -Gevrey segundo M , caracterizados pela relação de equivalência que identifica duas funções s -Gevrey segundo M coincidentes no fecho de alguma vizinhança da origem. Só para evidenciar,

$$G_M^s(0) = \{\text{classes } f \text{ representadas por } f \in G_M^s(V), 0 \in V \subset\subset B\} \quad (1.12)$$

Observação: as classes de funções Gevrey usuais, denotadas nesta tese por $G^{s,h}(V)$, $G^s(V)$ e $G^s(0)$, são aquelas onde $M = D$ ou, equivalentemente, $Z(x) = x$.

Como veremos a seguir, as funções em $G_M^s(V)$ de ordem $s > 1$ podem ser caracterizadas em $\mathbb{C}^m$ através de funções infinitamente diferenciáveis em vizinhanças complexas de $Z(V)$ que são $\bar{\partial}$ -flat sobre Σ . Para tal vamos considerar funções $F = F(z)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $\mathcal{U} \subset\subset \mathbb{C}^m$ de $Z(V)$ com $\bar{\partial}F \sim_{\Sigma} 0$ ², isto é, com $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k}$ se anulando de

²Vamos usar a notação $\sim_{\Sigma} 0$ para caracterizar anulamento de ordem ∞ sobre Σ .

ordem infinita em $\Sigma \cap \mathcal{U}$ para todo $k = 1, \dots, m$. Dentre elas destacamos as Gevrey usuais em $\mathcal{U}$, nas classes $G^s(\mathcal{U})$, definidas a partir da estimativa (1.8) na base $(\partial_z, \bar{\partial}_z) = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m})$, a saber,

$$\sup_{\bar{\mathcal{U}}} \left| \partial_z^\alpha \bar{\partial}_z^\beta F \right| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)!^s, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (1.13)$$

Tal estimativa se traduz sobre Σ , via $\bar{\partial}F \sim_\Sigma 0$, em

$$\sup_{\Sigma \cap \bar{\mathcal{U}}} |\partial_z^\alpha F| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (1.14)$$

Definição 1.3 *Vamos denotar por $G_{\mathbf{M}\star}^s(\mathcal{U})$ o espaço das funções $F = F(z)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \subset \mathbb{C}^m$ da origem com $\bar{\partial}F \sim_\Sigma 0$ e satisfazendo a estimativa (1.14). Só para evidenciar,*

$$G_{\mathbf{M}\star}^s(\mathcal{U}) = \{ F \in C^\infty(\bar{\mathcal{U}}) \text{ com } \bar{\partial}F \sim_\Sigma 0 \text{ e satisfazendo (1.14)} \}.$$

A caracterização em $\mathbb{C}^m$ das funções Gevrey diferenciáveis segundo $\mathbf{M}$ de ordem $s > 1$ se dá através do seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Se f é infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $V \subset \subset B$ da origem e se $s > 1$ então são equivalentes:*

- (i) $f \in G_{\mathbf{M}}^s(V)$
- (ii) existem $\mathcal{U} \supset Z(V)$ e $F \in G_{\mathbf{M}\star}^s(\mathcal{U})$ com $f|_V = F \circ Z|_V$.
- (iii) existem $\mathcal{U} \supset Z(V)$ e $F \in G^s(\mathcal{U})$ com $f|_V = F \circ Z|_V$ e com $\bar{\partial}F \sim_\Sigma 0$.
- (iv) existe $F \in G^s(\mathbb{C}^m)$ com $f|_V = F \circ Z|_V$ e com $\bar{\partial}F \sim_\Sigma 0$.

Demonstração :

▷ As implicações $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$ são imediatas.

A implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ é uma consequência da aplicação da regra da cadeia junto com a dualidade (1.6) e com o anulamento $\bar{\partial}F \sim_{\Sigma} 0$, pois nestas condições vale a igualdade

$$|M^{\alpha}[F \circ Z]| = |\partial_z^{\alpha}[F] \circ Z|$$

e (1.14) implica (1.8).

A implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ segue encontrando uma solução $F = F(z)$ infinitamente diferenciável para o problema

$$\begin{cases} \bar{\partial}F \sim_{\Sigma} 0 \\ F|_{\Sigma} = f \end{cases} .$$

Por fim, as implicações $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ decorrem da seguinte variante fraca do Teorema de extensão de Whitney para classes de funções não quase-analíticas, demonstrado por Joaquim Bruna em [B, Teo.3.1]:

qualquer jato de Whitney Gevrey de ordem $s > 1$ sobre um compacto $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^{2m}$ se estende a uma função em $G^s(\mathbb{R}^{2m})$.

Em [B], jatos de Whitney Gevrey sobre compactos $\mathcal{K} \subset \subset \mathbb{R}^{2m}$ são sequências de funções $G = (G^{\gamma})$, indexadas em $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{2m}$, cumprindo as estimativas a seguir para todo $y, y' \in \mathcal{K}$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{2m}$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$, a saber,

$$|G^{\gamma}(y)| \leq C_1 h_1^{|\gamma|} |\gamma|!^s \quad (1.15)$$

$$|(\mathbf{R}_y^{\ell} G)_{\gamma}(y')| \leq C_2 \frac{|y - y'|^{\ell - |\gamma| + 1}}{(\ell - |\gamma| + 1)!} h_2^{\ell + 1} (\ell + 1)!^s, \quad |\gamma| \leq \ell ; \quad (1.16)$$

aqui C_1, C_2, h_1, h_2 são constantes positivas e $(\mathbf{R}_y^{\ell} G)_{\gamma}(y')$ se expressa por

$$(\mathbf{R}_y^{\ell} G)_{\gamma}(y') = G^{\gamma}(y') - \sum_{|\gamma + \gamma'| \leq \ell} \frac{G^{\gamma + \gamma'}(y)}{\gamma'!} (y' - y)^{\gamma'} . \quad (1.17)$$

Identificando $\mathbb{R}^{2m}$ com $\mathbb{C}^m$ e γ com $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{m+m}$, a condição (ii) determina o seguinte jato de Whitney Gevrey sobre Σ , a saber,

$$F^{\gamma}(Z) = \partial_z^{\alpha} \partial_{\bar{z}}^{\beta} F(Z) = \begin{cases} \partial_z^{\alpha} F(Z) & \text{se } \beta = 0 \\ 0 & \text{se } \beta \neq 0 \end{cases} .$$

Observe que (1.14) garante a primeira caracterização (1.15) de Jato de Whitney Gevrey para $F = (F^\gamma)$. Com relação à segunda caracterização, basta observar que

$$(\mathbf{R}_Z^\ell F)_\gamma(Z') = \begin{cases} \partial_z^\alpha F(Z') - \sum_{|\alpha'| \leq \ell - |\alpha|} \frac{\partial_z^{\alpha+\alpha'} F(Z)}{\alpha'!} (Z' - Z)^{\alpha'} & \text{se } \beta = 0 \\ 0 & \text{se } \beta \neq 0 \end{cases}$$

é precisamente o resto de ordem $\ell - |\alpha| + 1$ da expansão em série de Taylor de $\partial_z^\alpha F(Z')$ no ponto Z ; as estimativas para tal resto garantem que

$$|(\mathbf{R}_Z^\ell F)_\gamma(Z')| \leq \frac{\sup_\Sigma |\partial_z^{\ell-\alpha+1} F|}{(\ell - |\alpha| + 1)!} |Z' - Z|^{\ell-|\alpha|+1}$$

e (1.14) garante (1.16).

◁

Passemos agora a uma outra caracterização das classes de funções Gevrey diferenciáveis segundo $\mathbf{M}$, que utiliza os espaços das funções infinitamente diferenciáveis na origem de $\mathbb{C}^m$ que são *flat* sobre Σ .

Definição 1.4 *Vamos denotar por $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(\mathcal{U})$ o espaço das funções $F = F(z)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \subset \mathbb{C}^m$ da origem que se anulam de ordem infinita sobre Σ , isto é,*

$$\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(\mathcal{U}) = \{ F \in C^\infty(\overline{\mathcal{U}}) \text{ com } F \sim_\Sigma 0 \} .$$

O espaço dos germes na origem de tais funções será denotado por $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0)$

Proposição 1.2 *Para todo $s > 1$ a sequência*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0) \longrightarrow G_{\mathbf{M}\star}^s(0) \longrightarrow G_{\mathbf{M}}^s(0) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, garantindo assim o isomorfismo

$$G_{\mathbf{M}}^s(0) \simeq G_{\mathbf{M}\star}^s(0) / \mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0) . \quad (1.18)$$

Demonstração :

- ▷ Basta invocarmos o Teorema 1.1 e mostrarmos que o núcleo da aplicação $G_{\mathbf{M}^*}^s(0) \rightarrow G_{\mathbf{M}}^s(0)$ é precisamente $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\bullet}(0)$, já que sua sobrejetividade decorre diretamente da proposição invocada.

Observe que o núcleo em questão contém $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\bullet}(0)$, já que o item (ii) da Proposição 1.1 garante que o mesmo é constituído pelas soluções $F = F(z)$ infinitamente diferenciáveis do problema formal de Cauchy

$$\begin{cases} \bar{\partial}F \sim_{\Sigma} 0 \\ F|_{\Sigma} = 0 \end{cases}.$$

A unicidade das soluções para tal problema garante a inclusão recíproca, isto é, garante que $F \sim_{\Sigma} 0$.

◁

Cabe observar aqui que, fixada duas cartas hipo-analíticas (B, Z) e (B', Z') , a composição com o biholomorfismo $Z' = H(Z)$ existente induz um isomorfismo entre os espaços correspondentes $G_{\mathbf{M}^*}^s(0)$ e $G_{\mathbf{M}^*}'^s(0)$ e também entre os espaços correspondentes $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\bullet}(0)$ e $\mathcal{F}_{\Sigma'}^{\bullet}(0)$, tornando-os assim invariantes hipo-analíticos. Com efeito, o quociente em (1.18) também será um invariante hipo-analítico.

Finalizamos esta seção estabelecendo a equivalência entre os conceitos de diferenciabilidade Gevrey usual e diferenciabilidade Gevrey segundo $\mathbf{M}$ no caso particular em que Σ é uma subvariedade Gevrey, isto é, no caso particular em que as componentes $Z_1, \dots, Z_m$ da carta hipo-analítica (B, Z) são funções Gevrey usuais em B .

Proposição 1.3 *Se Σ é uma subvariedade Gevrey de ordem $s > 1$ então $G_{\mathbf{M}}^s(0) = G^s(0)$.*

Demonstração :

- ▷ A caracterização (iv) do Teorema 1.1, mais o fato da diferenciabilidade Gevrey ser invariante por composição, garante a inclusão de $G_{\mathbf{M}}^s(0)$ em $G^s(0)$, já que os germes $\mathbf{f} \in G_{\mathbf{M}}^s(0)$ podem ser representados pela função $F \circ Z(x)$ com F e Z Gevrey usuais.

A inclusão recíproca é garantida por [D, Prop.2.1], que estabelece a seguinte extensão local $\bar{\partial}$ -flat sobre Σ :

se Σ é uma subvariedade real maximal Gevrey e se $f \in G^s(V)$ então para todo $x_0 \in V$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $Z(x_0)$ em $\mathbb{C}^m$ e $F \in G^s(\mathcal{U})$ com $F \circ Z|_{\mathcal{U}} = f$ e com $\bar{\partial}F \sim_{\Sigma \cap Z(V)} 0$.

Fixada $\mathbf{f} \in G^s(0)$, tal extensão local garante a existência de $\mathbf{F} \in G_{\mathbf{M}\star}^s(0)$ com $F|_{\Sigma} = f$ e a Proposição 1.1 garante que $\mathbf{f} \in G_{\mathbf{M}}^s(0)$.

◄

1.3 Exemplos de funções Gevrey segundo M

Em princípio a dualidade (1.6) determina que as componentes $Z_1, \dots, Z_m$ da carta hipo-analítica (B, Z) são funções em $G_{\mathbf{M}}^{1,h}(V)$ para toda vizinhança aberta $V \subset\subset B$ da origem e para toda amplitude $h > 0$, inclusive no caso em que tais componentes são apenas infinitamente diferenciáveis.

Outros exemplos neste sentido podem ser obtidos através da composição da função Z com qualquer função inteira em $\mathbb{C}^m$, como no caso da função *colchete quadrado*, a saber,

$$\langle Z(x) \rangle^2 = (Z_1(x))^2 + \dots + (Z_m(x))^2. \quad (1.19)$$

Para os demais exemplos vamos fixar um valor $p > 0$ e considerar funções $f_p \in C^\infty(B)$ se anulando de ordem infinita na origem, definidas como segue:

$$f_p(x) = \begin{cases} e^{-1/(\langle Z(x) \rangle^2)^p} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \quad (1.20)$$

A determinação da regularidade Gevrey segundo M de f_p passa pela estimativa (1.8) no fecho de alguma vizinhança $V \subset\subset B$ da origem, posto que $f_p \in G_{\mathbf{M}}^1(B \setminus V)$. Neste sentido vamos considerar vizinhanças $V \subset\subset B$ suficientemente próximas da origem para validar, via (1.3), estimativas do tipo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Z(x) \rangle^2 &= \|x\|^2 - \|\Phi(x)\|^2 > (1 - \epsilon) \|x\|^2, \\ |\operatorname{Im} \langle Z(x) \rangle^2| &= 2|x \cdot \Phi(x)| < 2\epsilon \|x\|^2 \end{aligned}$$

num pequeno valor de ϵ a ser escolhido posteriormente. Vamos agora considerar discos complexos

$$\Gamma_\rho(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \langle z \rangle^2| \leq \rho \operatorname{Re} \langle z \rangle^2\}$$

e escolher V e ρ pequenos para validar

$$\operatorname{Re} \zeta^{-p} > \frac{1}{2(\operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^p}, \quad \forall \zeta \in \Gamma_\rho(z), \quad \forall z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\}).$$

A existência de V e ρ advém do fato dos elementos em $\Gamma_\rho(z)$ se expressarem na forma

$$\zeta = \operatorname{Re} \langle z \rangle^2 (1 + \rho e^{i\theta} + i\eta) \quad , \quad |\eta| = \left| \frac{\operatorname{Im} \langle z \rangle^2}{\operatorname{Re} \langle z \rangle^2} \right| \leq \frac{2\epsilon}{1 - \epsilon}$$

validando a estimativa

$$\operatorname{Re} \zeta^{-p} = \frac{\operatorname{Re} \bar{\zeta}^p}{|\zeta|^{2p}} = \frac{1}{(\operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^p} \frac{\operatorname{Re} (1 + \rho e^{-i\theta} - i\eta)^p}{|1 + \rho e^{i\theta} + i\eta|^{2p}} \geq \frac{1}{(\operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^p} \cdot \psi(\rho, \eta)$$

onde

$$\psi(\rho, \eta) = \frac{\max_\theta \operatorname{Re}(1 + \rho e^{-i\theta} - i\eta)^p}{\min_\theta |1 + \rho e^{i\theta} + i\eta|^{2p}};$$

a continuidade de ψ na origem determina a existência de $\delta > 0$ tal que $|\rho| < \delta$ e $|\eta| < \delta$ implicam $\psi(\rho, \eta) > 1/2$; basta escolher $\epsilon < \frac{\delta}{2+\delta}$ e considerar $\rho = \delta/2$. Passemos agora a estimar $|\mathbf{M}^\alpha f_p|$ no fecho de V . Como $e^{-\zeta^{-p}}$ é holomorfa na imagem de $\langle z \rangle^2$ para todo z em $Z(\bar{V} \setminus \{0\})$,

$$\mathbf{M}_k f_p = \frac{\partial}{\partial \zeta} [e^{-\zeta^{-p}}] (\langle z \rangle^2) \mathbf{M}_k [\langle z \rangle^2] = 2z_k \frac{\partial}{\partial \zeta} [e^{-\zeta^{-p}}] (\langle z \rangle^2).$$

Assumindo $|z| \leq 1$ em $Z(\bar{V})$ segue que

$$\sup_{\bar{V}} |\mathbf{M}^\alpha f_p| \leq \sup_{z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})} \sum_{\alpha' \leq \alpha} 2^{|\alpha - \alpha'|} \left| \partial_\zeta^{|\alpha'|} [e^{-\zeta^{-p}}] (\langle z \rangle^2) \right|.$$

Através das estimativas de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})} \left| \partial_{\zeta}^{\ell} [e^{-\zeta^{-p}}] (\langle z \rangle^2) \right| &= \sup_{z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})} \left| \frac{\ell!}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho}(z)} \frac{e^{-\zeta^{-p}}}{(\rho \operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^{\ell+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \sup_{\substack{\zeta \in \Gamma_{\rho}(z) \\ z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})}} \frac{\ell!}{(\rho \operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^{\ell}} e^{-\operatorname{Re} \zeta^{-p}} \\
&\leq \ell! \rho^{-\ell} \sup_{z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})} \frac{e^{-1/2(\operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^p}}{(\operatorname{Re} \langle z \rangle^2)^{\ell}} ,
\end{aligned}$$

e como a função $\frac{e^{-1/2\xi^p}}{\xi^{\ell}}$ assume seu valor máximo em $\xi = \left(\frac{p}{2\ell}\right)^{1/p}$ temos

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in Z(\bar{V} \setminus \{0\})} \left| \partial_{\zeta}^{\ell} [e^{-\zeta^{-p}}] (\langle z \rangle^2) \right| &\leq \ell! \rho^{-\ell} \left(\frac{p}{2\ell}\right)^{-\ell/p} e^{-\ell/p} \\
&= \ell! \rho^{-\ell} \left(\frac{pe}{2}\right)^{-\ell/p} (\ell^{\ell})^{1/p} \\
&\leq \ell! \rho^{-\ell} \left(\frac{pe}{2}\right)^{-\ell/p} (\ell! e^{\ell})^{1/p} \\
&= \left[\left(\frac{2}{p\rho^p}\right)^{1/p} \right]^{\ell} \cdot \ell!^{1+1/p} .
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \bar{V}} |M^{\alpha} f_p(x)| &\leq \sum_{\alpha' \leq \alpha} 2^{|\alpha - \alpha'|} \left[(2/(p\rho^p))^{1/p} \right]^{|\alpha'|} \cdot |\alpha'|!^{1+1/p} \\
&\leq \left(\sum_{\alpha' \leq \alpha} 2^{|\alpha - \alpha'|} \left[(2/(p\rho^p))^{1/p} \right]^{|\alpha'|} \right) \cdot |\alpha|!^{1+1/p} \\
&= \left[2 + (2/(p\rho^p))^{1/p} \right]^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!^{1+1/p} , \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m
\end{aligned}$$

Fica demonstrada a seguinte proposição.

Proposição 1.4 *Para todo $p > 0$ o germe $\mathbf{f}_p$ de (1.20) pertence a $G_{\mathbf{m}}^{1+1/p}(0)$.*

1.4 Fórmulas de aproximação

Nesta seção apresentamos fórmulas de aproximação por gaussianas para classes de funções Gevrey diferenciáveis segundo M de ordem $s > 1$.

Como em [T, (II.2.4)] vamos considerar funções $\tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)$ inteiras em $\mathbb{C}^m$, indexadas num parâmetro $\tau > 0$, definidas a partir de uma função $f \in G_{\mathbf{M}}^{s,h}(V)$ ($s > 1$) e de uma função de corte $\chi \in C_c^\infty(V)$ com $\chi \equiv 1$ em $V' \subset\subset V$; mais precisamente,

$$\tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)(z) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int e^{-\tau\langle z-Z(x') \rangle^2} \chi(x') f(x') dZ(x'). \quad (1.21)$$

Na fórmula, $dZ(x') = dZ_1(x') \wedge \cdots \wedge dZ_m(x') = \det Z_x(x') dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_m$. Vamos considerar também as respectivas restrições a Σ , a saber,

$$\mathcal{E}_\tau(\chi f)(x) = \tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)(Z(x)). \quad (1.22)$$

Teorema 1.2 *Para toda $V'' \subset\subset V' \subset\subset V$ a sequência $(\mathcal{E}_\tau(\chi f))_{\tau=1,2,\dots}$ é limitada em $G_{\mathbf{M}}^{s,h}(V'')$ e, consequentemente, admite subsequência convergente para f no espaço de Montel $G_{\mathbf{M}}^s(V'')$.*

Demonstração :

- ▷ Iniciamos invocando [T, II.2] para garantir que $\mathcal{E}_\tau(\chi f) \rightarrow \chi f$ em $C^\infty(V)$ e, consequentemente, garantir que

$$\mathcal{E}_\tau(\chi f) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} f \text{ em } C^\infty(\overline{V'}) .$$

Basta mostrarmos então que $(\mathcal{E}_\tau(f))_{\tau=1,2,\dots}$ é limitada em $G_{\mathbf{M}}^{s,h}(V'')$.

Utilizando V' para dividir o domínio de integração e usando o fato de $M^\alpha[\mathcal{E}_\tau(\chi f)] = \mathcal{E}_\tau(M^\alpha[\chi f])$ segue que

$$\sup_{x \in V''} |M^\alpha[\mathcal{E}_\tau(\chi f)](x)| \leq I_1^\alpha + I_2^\alpha$$

onde

$$\begin{aligned} I_1^\alpha &= \sup_{x \in V''} \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{x' \in V'} e^{-\tau \operatorname{Re}\langle Z(x) - Z(x') \rangle^2} |M^\alpha[f](x')| |dZ(x')| \\ I_2^\alpha &= \sup_{x \in V''} \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{x' \notin V'} M^\alpha[e^{-\tau \operatorname{Re}\langle Z(x) - Z(x') \rangle^2}] |(\chi f)(x')| |dZ(x')|. \end{aligned}$$

Com relação à primeira parcela, as estimativas Gevrey para f garantem que

$$I_1^\alpha \leq \text{const} \cdot \|f\|_{s, h_f, V} \cdot h_f^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Com relação à segunda parcela, segue de (1.3) que

$$\text{Re} \langle Z(x) - Z(x') \rangle^2 = |x - x'|^2 - |\Phi(x) - \Phi(x')|^2 \geq \frac{3}{4} |x - x'|$$

donde a exponenciação em questão é absolutamente majorada por $e^{-d\tau}$ para alguma constante $d > 0$ depende somente da distância de V'' ao bordo de V' . Assim,

$$I_2^\alpha \leq \text{const} \cdot \tau^{|\alpha|} e^{-\tau d}.$$

Observando que a função $\tau^{|\alpha|} e^{-\tau d}$ assume seu valor máximo em $\tau = \frac{|\alpha|}{d}$, segue que

$$I_2^\alpha \leq \text{const} \cdot d^{-|\alpha|} |\alpha|! \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m.$$

◁

Finalizamos esta seção comparando nosso Teorema 1.2 com o Teorema 5.6 em [D], a saber,

Seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^m$ um compacto regular e uniformemente H -convexo. Se $f \in G^s(\mathcal{K})$, $s > 1$, é a restrição de uma função $F \in G^s(\mathbb{C}^m)$ com $\bar{\partial}F \sim_\kappa 0$ então f pode ser aproximada por uma sequência $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(\mathcal{K})$ na topologia de $G^s(\mathcal{K})$.

O teorema [D, Teo.5.6] é caracterizado por Bernd Droste como uma versão abstrata de teoremas de aproximações holomorfas demonstrados anteriormente no artigo. Fazendo $\mathcal{K} = \Sigma$, a Proposição 1.1 identifica as funções f em [D, Teo.5.6] com funções nas classes Gevrey diferenciáveis segundo M de ordem s , tornando tal teorema equivalente ao Teorema 1.2. No nosso teorema, as classes $G_M^s(V)$ concretizam, de certa forma, a referida abstração do teorema [D, Teo.5.6].

1.5 Uma certa classe de operadores Gevrey segundo M

Iniciamos esta seção introduzindo o conceito de operadores ultradiferenciáveis de tipo *Beurling* segundo a sequência de Gevrey $\{p!^s\}$, $s > 1$, caracterizados pelas condições equivalentes da proposição a seguir envolvendo funções inteiras do tipo

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha \zeta^\alpha ; \quad (1.23)$$

aqui $\zeta \in \mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_m^{\alpha_m}$.

Proposição 1.5 *Se $P(\zeta)$ é como em (1.23) e se $s > 1$ então as condições abaixo são equivalentes:*

$$\exists \varepsilon, \exists C_\varepsilon : |a_\alpha| \leq C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|} |\alpha|!^{-s}, \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.24)$$

$$\exists \varepsilon', \exists C_{\varepsilon'} : |P(\zeta)| \leq C_{\varepsilon'} e^{(\varepsilon' |\zeta|)^{1/s}}, \forall \zeta \in \mathbb{C}^m. \quad (1.25)$$

Demonstração :

▷ A equivalência entre (1.24) e (1.25) utiliza a equivalência

$$\rho^{1/s} \simeq N(\rho) = \ln \left(\sup_p \rho^p p!^{-s} \right), \quad \rho > 0$$

(cf. [D, pg.297]) no sentido de existirem constantes H_1, H_2, B_1, B_2 tais que

$$N(H_1 \rho) + \ln(B_1) \leq \rho^{1/s} \leq N(H_2 \rho) + \ln(B_2). \quad (1.26)$$

Supondo (1.24) segue que

$$\begin{aligned} |P(\zeta)| &\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha| |\zeta_1|^{\alpha_1} \dots |\zeta_m|^{\alpha_m} \leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha| |\zeta|^{|\alpha|} \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{|\alpha| \geq 0} (\varepsilon |\zeta|)^{|\alpha|} |\alpha|!^{-s} = C_\varepsilon \sum_{|\alpha| \geq 0} 2^{-|\alpha|} (2\varepsilon |\zeta|)^{|\alpha|} |\alpha|!^{-s} \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{|\alpha| \geq 0} 2^{-|\alpha|} \cdot \sup_{|\alpha|} (2\varepsilon |\zeta|)^{|\alpha|} |\alpha|!^{-s} = C_\varepsilon \sum_{|\alpha| \geq 0} 2^{-|\alpha|} \cdot e^{N(2\varepsilon |\zeta|)} \\ &\leq \frac{C_\varepsilon \sum 2^{-|\alpha|}}{B_1} e^{(2\varepsilon |\zeta|/H_1)^{1/s}} \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo (1.25) segue pela fórmula integral de Cauchy que

$$\begin{aligned}
|a_\alpha| &= |\partial_\zeta^\alpha P(0)| \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{|\zeta_1|=\rho} \cdots \int_{|\zeta_m|=\rho} \frac{|P(\zeta)|}{\rho^{\alpha_1+1} \cdots \rho^{\alpha_m+1}} |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_m| \\
&\leq \frac{C_{\varepsilon'}}{(2\pi)^m} \int_{|\zeta_1|=\rho} \cdots \int_{|\zeta_m|=\rho} \frac{e^{(\varepsilon'|\zeta|)^{1/s}}}{\rho^{\alpha_1+1} \cdots \rho^{\alpha_m+1}} |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_m| \\
&\leq C_{\varepsilon'} e^{(\sqrt{m}\varepsilon'\rho)^{1/s}} \rho^{-|\alpha|} \leq C_{\varepsilon'} B_2 e^{N(H_2\sqrt{m}\varepsilon'\rho)} \rho^{-|\alpha|} \\
&= C_{\varepsilon'} B_2 (H_2\sqrt{m}\varepsilon')^{|\alpha|} \sup_p (H_2\sqrt{m}\varepsilon'\rho)^{p-|\alpha|} p!^{-s}, \quad \forall \rho > 0, \\
&\leq C_{\varepsilon'} B_2 (H_2\sqrt{m}\varepsilon')^{|\alpha|} \cdot \inf_\rho \sup_p \rho^{p-|\alpha|} p!^{-s} \\
&= C_{\varepsilon'} B_2 (H_2\sqrt{m}\varepsilon')^{|\alpha|} |\alpha|!^{-s}.
\end{aligned}$$

◁

Registramos para uso futuro que

$$\varepsilon = H_2\sqrt{m} \cdot \varepsilon' \quad \text{e} \quad C_\varepsilon = B_2 \cdot C_{\varepsilon'}. \quad (1.27)$$

Definição 1.5 Dizemos que um operador $P = P(\mathbf{M})$ do tipo

$$P(\mathbf{M}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (-i\mathbf{M})^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C} \quad (1.28)$$

é Gevrey diferencial segundo $\mathbf{M}$ de ordem $s > 1$ com símbolo dado por (1.23) quando seus coeficientes a_α satisfazem a condição (1.24) ou, equivalentemente, quando seu símbolo $P(\zeta)$ satisfaz a condição (1.25).

É importante ressaltar que os operadores Gevrey diferenciais segundo $\mathbf{M}$ acima definidos não estabelecem, a priori, endomorfismos nas classes Gevrey diferenciáveis segundo $\mathbf{M}$ abordadas nesta tese (diferenciabilidade Gevrey de tipo *Roumieu*). Na verdade tais operadores definem endomorfismos em classes Gevrey diferenciáveis segundo $\mathbf{M}$ definidas a partir da existência, na estimativa (1.8), de uma constante universal em relação às amplitudes $h > 0$ (diferenciabilidade Gevrey de tipo *Beurling*). Para (1.28) determinar endomorfismos nas classes $G_{\mathbf{M}}^s(U)$ basta trocar em (1.24) [resp.(1.25)] o quantificador $\exists \varepsilon$ por $\forall \varepsilon$ [resp. $\exists \varepsilon'$ por $\forall \varepsilon'$].

Vamos trabalhar nesta tese com certas classes de operadores Gevrey diferenciais segundo M, denominadas *classe de Kaneko de ordem $s > 1$* , onde os símbolos se expressam na forma

$$P_r(\zeta) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{p^{2s}} \langle \zeta \rangle^2 \right), \quad 0 < r < 1; \quad (1.29)$$

como lembrete, $\langle \zeta \rangle^2 = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_m^2$. Façamos um parênteses para observar que a classe de Kaneko considerada por Cordaro em [C] é construída a partir de símbolos

$$P(\zeta) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\langle \zeta \rangle^2}{p^2(\sigma(p-1))^2} \right)$$

satisfazendo estimativas exponenciais do tipo

$$\forall \epsilon, \exists C_\epsilon : |P(\zeta)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^m \quad (1.30)$$

$$\exists \rho \in]0, 1[, \exists C_\rho, \delta_\rho : |P(\zeta)| \geq C_\rho \exp \left\{ \delta_\rho \frac{|\zeta|}{\sigma(|\zeta|)} \right\}, \quad \forall \zeta \in \Gamma_\rho \quad (1.31)$$

onde $\sigma : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente ao infinito com $\sigma(0) = 1$ e Γ_ρ é o cone complexo $|\operatorname{Im} \zeta| \leq \rho |\operatorname{Re} \zeta|$. As classes de Kaneko de ordem $s > 1$ são construídas a partir das funções

$$\sigma_r(t) = \left(\frac{(t+1)^{s-1}}{r} \right)^2. \quad (1.32)$$

Iniciamos o estudo de nossas classes de Kaneko estabelecendo as estimativas exponenciais para seus elementos. No que segue, $P_r(\mathbf{M})$ denota um operador qualquer numa fixada classe de Kaneko de ordem $s > 1$.

Lema 1 *Os operadores $P_r(\mathbf{M})$ satisfazem as estimativas (1.25) e (1.24) em respectivos $C_{\epsilon'} = 1$, $\epsilon' = Hr$ e $C_\epsilon = B_2$, $\epsilon = H_2 \sqrt{m} Hr$, onde H_2, B_2 advém de (1.26) e $H = (32^s s^{2s})$. Mais ainda, $P_r(\mathbf{M})$ também satisfaz a estimativa infra-exponencial (1.30).*

Demonstração :

▷ Observe inicialmente que

$$|P_r(\zeta)| \leq \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{p^{2s}} (|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_m|^2) \right) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2 |\zeta|^2}{p^{2s}} \right).$$

Aplicando logaritmo no produtório obtemos

$$\sum_{p=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2 |\zeta|^2}{p^{2s}} \right) \leq \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2 |\zeta|^2}{\eta^{2s}} \right) d\eta .$$

Integrando duas vezes por partes, as contribuições da fronteira

$$\left[\eta \ln (1 + r^2 |\zeta|^2 / \eta^{2s}) + 2s\eta r^2 |\zeta|^2 / (\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2) \right]_{\eta \rightarrow 0}^{\eta \rightarrow \infty}$$

se anulam e a integral resultante será

$$(4s)^2 \int_0^{\infty} \frac{r^2 |\zeta|^2 \eta^{2s}}{(\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2)^2} d\eta .$$

Dividindo o intervalo de integração em $(r |\zeta|)^{1/s}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{(r|\zeta|)^{1/s}} \frac{r^2 |\zeta|^2 \eta^{2s}}{(\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2)^2} d\eta &\leq \int_0^{(r|\zeta|)^{1/s}} \frac{(r^2 |\zeta|^2)^2}{(\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2)^2} d\eta \leq (r |\zeta|)^{1/s} \\ \int_{(r|\zeta|)^{1/s}}^{\infty} \frac{r^2 |\zeta|^2 \eta^{2s}}{(\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2)^2} d\eta &\leq r^2 |\zeta|^2 \int_{(r|\zeta|)^{1/s}}^{\infty} \eta^{-2s} d\eta \leq (r |\zeta|)^{1/s} . \end{aligned}$$

Assim

$$(4s)^2 \int_0^{\infty} \frac{r^2 |\zeta|^2 \eta^{2s}}{(\eta^{2s} + r^2 |\zeta|^2)^2} d\eta \leq 32s^2 (r |\zeta|)^{1/s} = (32^s s^{2s} r |\zeta|)^{1/s}$$

e

$$|P_r(\zeta)| \leq e^{\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2 |\zeta|^2}{\eta^{2s}} \right) d\eta} \leq e^{(32^s s^{2s} r |\zeta|)^{1/s}} .$$

Portanto existe $\varepsilon' = (32^s s^{2s})r$ e $C_{\varepsilon'} = 1$ cumprindo (1.25).

A existência de $\varepsilon = H_2 \sqrt{m} (32^s s^{2s})r$ e $C_{\varepsilon} = B_2$ cumprindo (1.24) é uma consequência imediata de (1.27).

Com relação à (1.30), como existe $\delta = 32s^2 r^{1/s}$ tal que

$$|P_r(\zeta)| \leq e^{\delta |\zeta|^{1/s}} , \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^m$$

segue, para $\epsilon > 0$ fixado, que

$$\begin{aligned} |\zeta| \leq (\delta/\epsilon)^{\frac{s-1}{s}} &\Rightarrow |P_r(\zeta)| \leq e^{\delta |\zeta|^{1/s}} \leq e^{\delta(\delta/\epsilon)^{\frac{s-1}{s^2}}} = C_{\epsilon} \leq C_{\epsilon} e^{\epsilon |\zeta|} ; \\ |\zeta| > (\delta/\epsilon)^{\frac{s-1}{s}} &\Rightarrow \epsilon |\zeta| > \delta |\zeta|^{1/s} \Rightarrow |P_r(\zeta)| \leq e^{\delta |\zeta|^{1/s}} \leq e^{\epsilon |\zeta|} , \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração.

◁

Lema 2 Para todo $\varrho \in]0, 1[$ e para todo $\theta \in \mathbb{C}^m$ com $|\operatorname{Im} \theta| < \varrho |\operatorname{Re} \theta|$, valem as estimativas supra-exponenciais

$$|P_r(\theta)| \geq |\theta|^p (\tilde{\varrho} r)^p p!^{-s}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.33)$$

$$|P_r(\theta)| \geq \frac{1}{B_2} \exp \left\{ (\tilde{\varrho}/H_2)^{1/s} \frac{|\theta|}{\sigma_r(|\theta|+1)} \right\} \quad (1.34)$$

onde $\tilde{\varrho} = \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}}$ e H_2, B_2 advém de (1.26).

Demonstração :

▷ Observe que no cone em questão

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \theta \rangle^2 &= |\operatorname{Re} \theta|^2 - |\operatorname{Im} \theta|^2 \geq (1 - \varrho^2) |\operatorname{Re} \theta|^2 = \tilde{\varrho}^2 (1 + \varrho^2) |\operatorname{Re} \theta|^2 \\ &\geq \tilde{\varrho}^2 (|\operatorname{Re} \theta|^2 + |\operatorname{Im} \theta|^2) = \tilde{\varrho}^2 |\theta|^2. \end{aligned}$$

A estimativa (1.33) segue de

$$\begin{aligned} |P(\theta)| &= \sup_p \prod_{q=1}^p \left| 1 + \frac{r^2}{q^{2s}} \langle \theta \rangle^2 \right| \geq \sup_p \prod_{q=1}^p \left(1 + \frac{r^2}{q^{2s}} \operatorname{Re} \langle \theta \rangle^2 \right) \\ &\geq \sup_p \prod_{q=1}^p \left(1 + \frac{\tilde{\varrho}^2 r^2 |\theta|^2}{q^{2s}} \right) \geq \sup_p \prod_{q=1}^p \frac{\tilde{\varrho} r |\theta|}{q^s} \\ &= \sup_p (\tilde{\varrho} r |\theta|)^p p!^{-s}. \end{aligned}$$

A estimativa (1.34) segue de (1.33) e (1.26), ou seja,

$$\begin{aligned} |P(\theta)| &\geq \sup_p (\tilde{\varrho} r |\theta|)^p p!^{-s} = e^{N(\tilde{\varrho} r |\theta|)} \\ &\geq \frac{1}{B_2} \exp \left\{ (\tilde{\varrho} r / H_2)^{1/s} |\theta|^{1/s} \right\} \\ &= \frac{1}{B_2} \exp \left\{ (\tilde{\varrho} / H_2)^{1/s} \frac{|\theta|}{(|\theta|^{s-1}/r)^{1/s}} \right\} \\ &\geq \frac{1}{B_2} \exp \left\{ (\tilde{\varrho} / H_2)^{1/s} \frac{|\theta|}{((|\theta|+1)^{s-1}/r)^2} \right\} \\ &\geq \frac{1}{B_2} \exp \left\{ (\tilde{\varrho} / H_2)^{1/s} \frac{|\theta|}{\sigma(|\theta|+1)} \right\}. \end{aligned}$$

◁

Neste ponto vamos invocar [C]. Os operadores $P_r(\partial_z)$ definidos como em (1.28) através da base $\partial_z = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m})$ determinam, via estimativa (1.30), endomorfismos nos espaços $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ das funções holomorfas em $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^m$. Em particular, $P_r(\partial_z)[e^{i\zeta \cdot z}] = P_r(\zeta)e^{i\zeta \cdot z}$ e

$$P_r(\mathbf{M})[e^{i\zeta \cdot Z(x,t)}] = P_r(\zeta)e^{i\zeta \cdot Z(x,t)}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^m. \quad (1.35)$$

Vamos trabalhar também numa pequena vizinhança $V \subset\subset B$ da origem e com números reais $\kappa, \delta_0 > 0$ pequenos para validar as estimativas

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\zeta \cdot (Z - Z' - iv) + i\langle \zeta \rangle \langle Z - Z' - iv \rangle^2] &\geq (1 - \kappa) |Z - Z'|^2 |\zeta| - 3|v| |\zeta| \\ |\operatorname{Im} \theta| &< \frac{1}{2\sqrt{3}} |\operatorname{Re} \theta|, \quad \frac{|\zeta|}{2} \leq |\theta| \leq 3|\zeta|, \quad \operatorname{Re} \langle \theta \rangle^2 \geq \frac{|\zeta|^2}{2} \end{aligned} \quad (1.36)$$

em quaisquer

- $Z, Z' \in Z(v)$ com $Z = Z(x)$ e $Z' = Z(x')$,
- $\zeta \in \mathbb{R}T'_{Z', \Sigma} = \{\zeta \cdot dZ' : \zeta = {}^t Z_x^{-1}(x') \cdot \xi, \xi \in \mathbb{R}^m\}$,
- $v \in \mathbb{R}^m$ com $|v| \leq 1$,
- $\theta = \zeta + i(Z - Z' + iy) \langle \zeta \rangle$ onde $y \in \mathbb{R}^m$ e tal que $|y| < \delta_0$; aqui a função $\langle \zeta \rangle = ((\zeta)^2)^{1/2}$ é bem definida já que $|\operatorname{Im} \zeta| < |\operatorname{Re} \zeta|$.

O contexto acima (cf. [C, (1.12)-1.15])) é fundamental para os dois lemas a seguir.

Lema 3 *Fixado $r \in]0, 1[$ existe $h_r > 0$ tal que qualquer função $v \in C^\infty(V)$ é representada numa vizinhança $V' \subset\subset V$ da origem por $v = P_r(\mathbf{M})w$ onde $w \in G_{\mathbf{M}}^{s, h_r}(V')$.*

Demonstração :

- ▷ Iniciamos introduzindo uma função de corte χ suportada em V com $\chi \equiv 1$ em V' .

Fixada $v \in C^\infty(V)$ vamos definir, para cada $\epsilon > 0$, funções $v_\epsilon : V \rightarrow \mathbb{C}$ através das representações integrais

$$v_\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{x' \in \mathbb{R}^m} \int_{\xi \in \mathbb{R}^m} \frac{e^{i\xi \cdot (Z(x) - Z(x')) - \epsilon \langle \xi \rangle^2}}{P_r(\xi)} [\chi v](x') \det Z_x(x') d\xi dx'.$$

Desnecessário observar que a estimativa supra-exponencial (1.34) justifica a presença de $P_r(\xi)$ no denominador.

Utilizando (1.35) e integrando em ξ é possível expressar

$$\begin{aligned} P_r v_\epsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \int e^{i\zeta \cdot (Z(x) - Z(x')) - \epsilon \langle \zeta \rangle^2} [\chi v](x') \det Z_x(x') d\xi dx' \\ &= \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{m/2}} \int e^{-\frac{1}{4\epsilon} (Z(x) - Z(x'))^2} [\chi v](x') \det Z_x(x') dx' \end{aligned}$$

através de gaussianas que convergem uniformemente para χv em compactos de V (cf. [T, Sec.II.2]), donde

$$P_r v_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} v \text{ uniformemente em } \overline{V'}.$$

Por outro lado, a presença de $e^{-i\xi \cdot Z'_k}$ no integrando de v_ϵ permite, após integração por partes em x'_k , introduzir o fator $(1 + |\xi_k|^2)$ no denominador pagando-se o preço de substituir χv por $(1 - M_k^2)[\chi v]$. Mais ainda, após uma deformação do tipo $\xi \mapsto \zeta \mapsto \theta = \zeta + i(Z - Z') \langle \zeta \rangle$, vamos obter a seguinte expressão para $M^\alpha v_\epsilon$, a saber,

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{Z' \in \Sigma} \int_{\zeta \in \mathbb{R} T'_{Z', \Sigma}} \frac{(i\theta)^\alpha e^{i\theta \cdot (Z - Z') - \epsilon \langle \theta \rangle^2}}{P_r(\theta) \prod (1 + |\theta_k|^2)} \prod (1 - M_k^2) [\chi v]_{\Delta(Z - Z', \zeta)} d\zeta dZ'$$

onde $\Delta(Z - Z', \zeta)$ denota o determinante Jacobiano da aplicação $\zeta \mapsto \theta$. O primeiro fato importante é que (1.36) garante, via estimativa (1.33) do Lema 2, que

$$|P_r(\theta)| \geq |\theta|^{|\alpha|} (\sqrt{\frac{11}{13}} r)^{-|\alpha|} |\alpha|!^{-s}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m.$$

O segundo fato importante é que (1.36) garante que

$$\left| e^{i\theta \cdot (Z - Z') - \epsilon \langle \theta \rangle^2} \right| = e^{-\text{Im}[\zeta \cdot (Z - Z') + i \langle \zeta \rangle \langle Z - Z' \rangle^2] - \epsilon \text{Re} \langle \theta \rangle^2} \leq 1.$$

Isto posto, o integrando de $M^\alpha v_\epsilon$ é absolutamente e uniformemente majorado por

$$\text{const} \cdot (\sqrt{\frac{11}{13}} r)^{-|\alpha|} |\alpha|!^s (1 + |\theta|^2)^{-m}$$

onde a constante independe de θ e de α . O teorema da convergência dominada garante a existência de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon = w \in G_{\mathbf{M}}^{s, h_r}(V') \quad , \quad h_r = (\sqrt{\frac{11}{13}} r)^{-1} \quad ,$$

e a unicidade do limite garante que

$$P_r(\mathbf{M})w = v \quad \text{em} \quad V' \quad .$$

◁

O próximo lema é uma aplicação direta do Teorema 1.2 em [C].

Lema 4 *Fixada qualquer vizinhança $V' \subset\subset V$ da origem sempre existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^m$ de $Z(V')$ na qual as soluções $g \in G_{\mathbf{M}}^{s, h}(V)$ de $P_r(\mathbf{M})g = 0$ se estendem holomorficamente, isto é, existe $G = G(z)$ holomorfa em $\mathcal{U}$ com $G \circ Z|_{V'} = g|_{V'}$.*

Finalizamos esta seção estabelecendo a atuação de certos operadores na classe de Kaneko de ordem $s > 1$ nos espaços $G_{\mathbf{M}}^{s, h}(V)$.

Lema 5 *Fixada $h > 0$ existe $r_h > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_h$,*

$$P_r(\mathbf{M}) : G_{\mathbf{M}}^{s, h}(V) \rightarrow G_{\mathbf{M}}^{s, h^+}(V) \quad , \quad \forall h^+ > h \quad .$$

Demonstração :

▷ Pelo Lema 1 podemos expressar $P_r(\mathbf{M})$ na forma $\sum a_{\alpha'} \mathbf{M}^{\alpha'}$ com $|a_{\alpha'}|$ satisfazendo (1.24) para $\varepsilon = H_2 \sqrt{m} H r$ e $C_\varepsilon = B_2$.

Fixada $f \in G_{\mathbf{M}}^{s, h}(V)$ as parcelas $a_{\alpha'} \mathbf{M}^{\alpha'} f$ de $P_r(\mathbf{M})f$ satisfazem

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{V}} \left| \mathbf{M}^\alpha [a_{\alpha'} \mathbf{M}^{\alpha'} f] \right| &= |a_{\alpha'}| \sup_{\overline{V}} \left| \mathbf{M}^{\alpha + \alpha'} f \right| \\ &\leq B_2 \|f\|_{s, h, V} (H_2 \sqrt{m} H r)^{|\alpha'|} h^{|\alpha|} \frac{(|\alpha| + |\alpha'|)!^s}{|\alpha'|!^s} \quad . \end{aligned}$$

Usando a estabilidade da sequência $\{p!^s\}$ sobre operadores Gevrey-diferenciais, a saber,

$$\forall \epsilon \exists C_\epsilon : p!^s \leq C_\epsilon (1 + \epsilon)^p \min_{0 \leq q \leq p} q!^s (p - q)!^s \quad , \quad \forall p \quad (1.37)$$

com $p = |\alpha'| + |\alpha|$ e $q = |\alpha'|$, vamos obter

$$\sup_{\overline{V}} \left| M^\alpha [a_{\alpha'} M^{\alpha'} f] \right| \leq B_2 \|f\|_{s,h,V} C_\epsilon ((1+\epsilon)H_2\sqrt{m}Hhr)^{|\alpha'|} ((1+\epsilon)h)^{|\alpha|} |\alpha|!^s.$$

O lema segue tomando r_h pequeno para tornar

$$((1+\epsilon)H_2\sqrt{m}Hhr_h)^{|\alpha'|}$$

somável em α' .

◁

Capítulo 2

Soluções Gevrey hipo-analíticas

Este capítulo trata de questões envolvendo a diferenciabilidade Gevrey de ordem $s > 1$ segundo estruturas hipo-analíticas de codimensão n numa variedade diferenciável $(m + n)$ -dimensional. O espaço das soluções Gevrey segundo a estrutura é introduzido e o principal resultado estabelece o teorema de Baouendi-Treves para tais soluções.

2.1 Estruturas hipo-analíticas com codimensão: a base (M, L)

Seja M uma variedade diferenciável $(m + n)$ -dimensional, $m, n \geq 1$, equipada com uma estrutura hipo-analítica de codimensão n . Tal estrutura é caracterizada, como no capítulo anterior, pela existência de uma coleção de cartas hipo-analíticas (Ω_i, Z_i) onde Ω_i são abertos cobrindo M e $Z_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{im})$ são aplicações infinitamente diferenciáveis em Ω_i , a valores em $\mathbb{C}^m$, satisfazendo

- para cada i , as diferenciais $dZ_{i1}, \dots, dZ_{im}$ são $\mathbb{C}$ -linearmente independentes em cada ponto de Ω_i ;
- para cada par $i \neq \kappa$ e para cada $P \in \Omega_i \cap \Omega_\kappa$, existe um biholomorfismo H de uma vizinhança aberta de $Z_i(P) \subset \mathbb{C}^m$ numa vizinhança aberta de $Z_\kappa(P) \subset \mathbb{C}^m$ tal que $Z_\kappa = H \circ Z_i$ numa vizinhança de P .

Fixada uma origem O qualquer na variedade vamos trabalhar, via biholomorfismos que preservam a origem e [T, Sec.II.1], numa situável carta hipo-

analítica (Ω, Z) , onde Ω é um domínio local de coordenadas

$$(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) \quad (2.1)$$

centrado na origem nas quais

$$Z_k(x, t) = x_k + i\Phi_k(x, t) \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

com $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ infinitamente diferenciável em Ω , a valores em $\mathbb{R}^m$, satisfazendo

$$|\Phi(x, t)| \leq \text{const} \cdot (|x|^3 + |t|) \quad (2.3)$$

Vamos assumir

$$\Omega = B \times \Theta \ni (x, t) \quad , \quad (2.4)$$

onde B e Θ são pequenas bolas abertas centradas nas respectivas origens do x -espaço $\mathbb{R}^m$ e do t -espaço $\mathbb{R}^n$, tornando a aplicação

$$\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n \quad , \quad (x, t) \mapsto (Z(x, t), t) \quad (2.5)$$

um difeomorfismo entre Ω e a subvariedade

$$\Sigma = \{(Z(x, t), t) : (x, t) \in \Omega\} \quad (2.6)$$

A pequenez de B e Θ torna as aplicações $x \mapsto Z(x, t)$ difeomorfismos entre $B \times \{t\}$ e as subvariedades reais maximais de $\mathbb{C}^m$ dadas por

$$\Sigma_t = \{Z(x, t) : x \in B\} \quad (2.7)$$

Destacamos a base de $\mathbb{C}T\mathcal{M}$ sobre Ω dual de $(dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n)$, a saber,

$$(M, L) = (M_1, \dots, M_m, L_1, \dots, L_n) \quad (2.8)$$

onde M_k e L_j são tais que

$$M_k t_j = 0 \quad , \quad L_j Z_k = 0 \quad , \quad M_k Z_{k'} = \delta_{kk'} \quad , \quad L_j t_{j'} = \delta_{jj'} \quad (2.9)$$

Aqui δ é a função delta de Kronecker.

2.2 Diferenciabilidade Gevrey segundo (M, L)

O conceito de diferenciabilidade Gevrey segundo (M, L) de ordem $s \geq 1$, no fecho de uma vizinhança $U \subset \Omega$ da origem e numa amplitude $h > 0$, advém da estimativa

$$\sup_{\overline{U}} |M^\alpha L^\gamma f| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|+|\gamma|} (|\alpha| + |\gamma|)!^s, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}. \quad (2.10)$$

Tal conceito equivale ao conceito usual de ultradiferenciabilidade com respeito à sequência não quase analítica $\{p!^s\}$ para o caso Roumieu (cf. [K]) exceto por utilizar em (2.10) a base $(M, L) = (M_1, \dots, M_m, L_1, \dots, L_n)$ ao invés da base usual $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n})$.

Definição 2.1 Dizemos que uma função f infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $U \subset \subset \Omega$ da origem é de classe s -Gevrey segundo (M, L) em U numa amplitude $h > 0$ quando f cumpre a estimativa (2.10) para alguma constante positiva. O subespaço de $C^\infty(\overline{U})$ constituído por tais funções será denotado por $G_{ML}^{s,h}(U)$.

Como no capítulo anterior, cada $G_{ML}^{s,h}(U)$ é um espaço de Banach em relação à norma definida pelo ínfimo das constantes em (2.10), a saber,

$$\|f\|_{s,h,U} = \sup \left\{ \frac{|M^\alpha L^\gamma f(x)|}{h^{|\alpha|+|\gamma|} (|\alpha| + |\gamma|)!^s} : (x, t) \in \overline{U}, (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n} \right\}, \quad (2.11)$$

e as inclusões

$$G_{ML}^{s,h}(U) \hookrightarrow G_{ML}^{s,h_+}(U), \quad h < h_+ \quad (2.12)$$

também são compactas. Só para evidenciar,

$$G_{ML}^{s,h}(U) = \left\{ f \in C^\infty(\overline{U}) : \|f\|_{s,h,U} < \infty \right\}. \quad (2.13)$$

Definição 2.2 Dizemos que uma função f é de classe s -Gevrey segundo (M, L) numa vizinhança $U \subset \subset \Omega$ da origem quando f pertence a $G_{ML}^{s,h}(U)$ para alguma amplitude $h > 0$. O subespaço de $C^\infty(\overline{U})$ constituído por tais funções será denotado por $G_{ML}^s(U)$.

Também como no capítulo anterior, os espaços

$$G_{\mathbf{ML}}^s(U) = \varinjlim_{h \nearrow \infty} G_{\mathbf{ML}}^{s,h}(U) \quad (2.14)$$

são Hausdorff e Montel com a topologia de limite indutivo. Em particular, sequências limitadas em algum $G_{\mathbf{ML}}^{s,h}(U)$ admitem subsequências convergentes em $G_{\mathbf{ML}}^{s,h_+}(U)$ para todo $h_+ > h$ e, consequentemente, em $G_{\mathbf{ML}}^s(U)$.

Vamos denotar por $G_{\mathbf{ML}}^s(0)$ o espaço dos germes na origem de funções Gevrey segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$, caracterizados pela relação de equivalência que identifica duas funções Gevrey segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$ coincidentes no fecho de alguma vizinhança da origem. Só para evidenciar,

$$G_{\mathbf{ML}}^s(0) = \{\text{classes } f \text{ representadas por } f \in G_{\mathbf{ML}}^s(U), 0 \in U \subset \subset \Omega\}. \quad (2.15)$$

Segue como no capítulo anterior as seguintes observações:

Observação 1: as classes de funções Gevrey usuais, denotadas nesta tese por $G^{s,h}(U)$, $G^s(U)$ e $G^s(0)$, são aquelas onde $(\mathbf{M}, \mathbf{L}) = \mathbf{D}$ ou, equivalentemente, $Z(x, t) = x$.

Observação 2: as classes de funções Gevrey segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$ de ordem s coincidem com as classes de funções Gevrey usuais de ordem s no caso em que as componentes $Z_1, \dots, Z_m$ da carta hipo-analítica (Ω, Z) são Gevrey usuais de ordem s em Ω .

2.3 Funções Gevrey hipo-analíticas

Como no caso C^∞ , o conceito de soluções Gevrey hipo-analíticas com respeito à estrutura gerada por $dZ_1, \dots, dZ_m$ é obtido através das soluções do sistema homogêneo $L_j h = 0$.

Definição 2.3 Dizemos que uma função $h \in G_{\mathbf{ML}}^s(U)$ é uma função s -Gevrey hipo-analítica quando $L_j h = 0$ em U para todo $j = 1, \dots, n$. O subespaço fechado de $G_{\mathbf{ML}}^s(U)$ constituído por tais funções será denotado por $G_{\mathbf{ha}}^s(U)$ e o espaço dos germes na origem de tais funções será denotado por $G_{\mathbf{ha}}^s(0)$.

Da mesma forma que as funções Gevrey diferenciáveis segundo $\mathbf{M}$ são caracterizadas em $\mathbb{C}^m$ através de funções $F = F(z)$ que são $\bar{\partial}_z$ -flat sobre

o traço em $\mathbb{C}^m$ da aplicação Z , as soluções Gevrey hipo-analíticas também são caracterizadas em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ através de funções $F = F(z, t)$ que são $(\bar{\partial}_z + d_t)$ -flat sobre o traço em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ da aplicação λ . Mais precisamente, a caracterização em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ de $G_{ha}^s(U)$ se dá através de funções $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ de $\lambda(U)$ com $(\bar{\partial}_z + d_t)F \sim_{\Sigma} 0$, isto é, com $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k}$ e $\frac{\partial F}{\partial t_j}$ se anulando de ordem infinita em $\Sigma \cap \mathcal{W}$ para todo $k = 1, \dots, m$ e para todo $j = 1, \dots, n$. Dentre elas destacamos as que satisfazem a estimativa (1.14), a saber,

$$\sup_{\Sigma \cap \overline{\mathcal{W}}} |\partial_z^\alpha F| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (2.16)$$

Definição 2.4 *Vamos denotar por $G_{ha\star}^s(\mathcal{W})$ o espaço das funções $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de uma vizinhança $\mathcal{W}$ da origem de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ com $(\bar{\partial}_z + d_t)F \sim_{\Sigma} 0$ e satisfazendo (2.16). O espaço dos germes na origem de tais funções será denotado por $G_{ha\star}^s(0)$. Só para evidenciar,*

$$G_{ha\star}^s(\mathcal{W}) = \{F \in C^\infty(\overline{\mathcal{W}}) \text{ com } (\bar{\partial}_z + d_t)F \sim_{\Sigma} 0 \text{ e satisfazendo (2.16)}\}.$$

Temos então a seguinte caracterização em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ das funções Gevrey hipo-analíticas.

Proposição 2.1 *Se $f = f(x, t)$ é infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $U \subset \subset \Omega$ da origem e se $s > 1$ então são equivalentes:*

- (i) $f \in G_{ha}^s(U)$;
- (ii) *existe $F \in G_{ha\star}^s(\mathcal{W})$, $\mathcal{W} \supset \lambda(U)$, com $F \circ \lambda|_U = f|_U$.*

Demonstração :

- ▷ A implicação (ii) $\Rightarrow$ (i) é uma consequência da aplicação da regra da cadeia junto com a dualidade (2.9) e com o anulamento $(\bar{\partial}_z + d_t)F \sim_{\Sigma} 0$; nestas condições vale a igualdade

$$|M^\alpha L^\gamma[F \circ \lambda]| = |\partial_z^\alpha \partial_t^\gamma[F] \circ \lambda|, \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n},$$

$$L_j[F \circ \lambda] = \frac{\partial F}{\partial t_j} \circ \lambda = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \text{ e (2.16) implica (2.10).}$$

Para a implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) vamos considerar $\Sigma = \lambda(\overline{U})$ como uma subvariedade real maximal de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \ni (z, \zeta)$, onde $z = x + iy \in \mathbb{C}^m$ e $\zeta = t + is \in \mathbb{C}^n$. A restrição a $s = 0$ da solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} (\overline{\partial}_z + \overline{\partial}_\zeta)F \sim_\Sigma 0 \\ F|_\Sigma = f \end{array} \right.$$

determina uma função $F(z, t)$ infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $\mathcal{W}$ de Σ satisfazendo $\overline{\partial}_z F \sim_\Sigma 0$ com $F \circ \lambda|_U = f|_U$. A unicidade das soluções para o problema formal de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} (\overline{\partial}_z + \overline{\partial}_\zeta) \left[\frac{\partial F}{\partial t_j} \right] \sim_\Sigma 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t_j}|_\Sigma = L_j f = 0 \end{array} \right.$$

determina que $d_t F \sim_\Sigma 0$.

◁

Vamos trabalhar agora no sentido de mostrar a invariância hipo-analítica das classes $G_{\text{ha}\star}^s(0)$ no seguinte sentido: se (Ω, Z) e (Ω, Z') são duas cartas hipo-analíticas com

$$\begin{aligned} Z &= x + i\Phi(x, t) \quad , \quad \Sigma = \{(Z(x, t), t) : (x, t) \in \Omega\} \, , \\ Z' &= x' + i\Phi'(x', t') \quad , \quad \Sigma' = \{(Z'(x', t'), t') : (x', t') \in \Omega\} \end{aligned}$$

então a mudança de coordenadas $(Z', t') = (H(Z), G(Z, t))$ existente induz um isomorfismo natural entre os respectivos espaços $G_{\text{ha}\star}^s(0)$ e $G_{\text{ha}\star'}^s(0)$ correspondentes.

Proposição 2.2 $G_{\text{ha}\star}^s(0)$ é um invariante hipo-analítico.

Demonstração :

- ▷ Iniciamos considerando os espaços $G_{\text{ha}\star}^s(\mathcal{W})$ e $G_{\text{ha}\star'}^s(\mathcal{W}')$ definidos respectivamente a partir de duas cartas hipo-analíticas (Ω, Z) e (Ω, Z') .

Vamos considerar também a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} Z'(x', t') &= H(Z(x, t)) \quad , \quad H = H(z) \text{ biholomorfismo} \\ t' &= G(Z(x, t), t) \quad , \quad G = G(z, t) \text{ infinitamente diferenciável} \end{aligned}$$

determinada pelo fato da estrutura ser hipo-analítica.

Naturalmente cada função $F' \in G_{\text{ha}\star'}^s(\mathcal{W}')$ determina uma função

$$F(z, t) = F'(H(z), G(z, t)) = F'(z', t')$$

infinitamente diferenciável numa vizinhança $\mathcal{W}$ de $\Sigma = H^{-1}(\Sigma' \cap \mathcal{W}')$.

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z_k}|_{\Sigma} &= \sum_{k'=1}^m \frac{\partial F'}{\partial z'_{k'}}|_{\Sigma'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial z_k}|_{\Sigma_t} + \sum_{k'=1}^m \frac{\partial F'}{\partial \bar{z}'_{k'}}|_{\Sigma'} \frac{\partial \bar{H}_{k'}}{\partial z_k}|_{\Sigma_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F'}{\partial t'_j}|_{\Sigma'} \frac{\partial G_j}{\partial z_k}|_{\Sigma} \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k}|_{\Sigma} &= \sum_{k'=1}^m \frac{\partial F'}{\partial z'_{k'}}|_{\Sigma'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \bar{z}_k}|_{\Sigma_t} + \sum_{k'=1}^m \frac{\partial F'}{\partial \bar{z}'_{k'}}|_{\Sigma'} \frac{\partial \bar{H}_{k'}}{\partial \bar{z}_k}|_{\Sigma_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F'}{\partial t'_j}|_{\Sigma'} \frac{\partial G_j}{\partial \bar{z}_k}|_{\Sigma} \\ \frac{\partial F}{\partial t_j}|_{\Sigma} &= \sum_{j'=1}^n \frac{\partial F'}{\partial t'_{j'}}|_{\Sigma'} \frac{\partial G_{j'}}{\partial t_j}|_{\Sigma} \end{aligned}$$

segue que

$$\left. \begin{array}{l} H \text{ holomorfa} \\ (\bar{\partial}_{z'} + d_{t'})F' \sim_{\Sigma'} 0 \end{array} \right| \Rightarrow (\bar{\partial}_z + d_t)F \sim_{\Sigma} 0 .$$

Por outro lado (cf. [H1, Prop.8.4.1]), as derivações $\partial_z^\alpha F(Z, t)$ de ordem $\kappa = 0, 1, \dots$ coincidem com as mesmas derivações da aplicação

$$z \mapsto S_\kappa(z) = \sum_{|\beta| \leq \kappa} \frac{1}{\beta!} \partial_z^\beta F'(H(Z), G(Z, t)) [H(z) - H(Z)]^\beta$$

quando $z = Z$, donde $|\partial_z^\alpha F(Z, t)| = |\partial_z^\alpha S_{|\alpha|}(Z)|$. Por continuidade vamos considerar um poli-raio $(\rho, \dots, \rho)$ pequeno a ponto de incluir no domínio de H todos os poli-discos $\Delta(Z, \rho)$ centrados em $Z \in \Sigma_t$ e, consequentemente via Fórmula Integral de Cauchy, expressar

$$\partial_z^\alpha S_{|\alpha|}(Z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^m} \int_{|z_k - Z_k| = \rho} \frac{S_{|\alpha|}(z)}{(z - Z)^{\alpha + (1, \dots, 1)}} dz .$$

Assim, para todo $(Z, t) \in \mathcal{W} \cap \Sigma$ e para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$,

$$\begin{aligned} |\partial_z^\alpha F(Z, t)| &= |\partial_z^\alpha S_{|\alpha|}(Z)| \leq \sup_{|z_j - Z_j| = \rho} |S_{|\alpha|}(z)| \cdot \rho^{-|\alpha|} \alpha! \\ &\leq \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \frac{1}{\beta!} |\partial_z^\beta F'(H(Z), G(Z, t))| \sup_{|z_j - Z_j| = \rho} |H(z) - H(Z)|^\beta \cdot \rho^{-|\alpha|} \alpha! . \end{aligned}$$

Admitindo que F' satisfaz (2.16) em $h_{F'}$, que C_H é uma constante de Lipshitz satisfazendo $|H(z) - H(Z)| \leq C_H|z - Z|$ e utilizando a equivalência $\alpha! \leq |\alpha|! \leq m^{|\alpha|}\alpha!$, seque que

$$\begin{aligned} |\partial_z^\alpha F(Z, t)| &\leq \text{const} \cdot \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (h_{F'} C_H \rho / m)^{|\beta|} |\beta|!^{s-1} \cdot \rho^{-|\alpha|} |\alpha|! \\ &\leq \text{const} \cdot (\max\{1, h_{F'} C_H \rho / m\})^{|\alpha|} |\alpha|!^s \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} 1 \\ &\leq \text{const} \cdot (2 \max\{1, h_{F'} C_H \rho / m\})^{|\alpha|} |\alpha|!^s \end{aligned}$$

e, portanto, F satisfaz (2.16). ◁

Passemos agora a uma caracterização das classes $G_{\text{ha}}(0)$ do tipo (1.18).

Definição 2.5 *Vamos denotar por $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(\mathcal{W})$ o espaço das funções $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de uma vizinhança $\mathcal{W} \subset \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ da origem que se anulam de ordem infinita sobre Σ , isto é,*

$$\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(\mathcal{W}) = \{F \in C^\infty(\overline{\mathcal{W}}) \text{ com } F \sim_\Sigma 0\} \ .$$

O espaço dos germes na origem de tais funções será denotado por $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0)$.

Proposição 2.3 *Para todo $s > 1$ a sequência*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0) \longrightarrow G_{\text{ha}\star}^s(0) \longrightarrow G_{\text{ha}}^s(0) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, garantindo assim o isomorfismo

$$G_{\text{ha}}^s(0) \simeq G_{\text{ha}\star}^s(0) / \mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0) \ . \quad (2.17)$$

Demonstração :

- ▷ Basta invocarmos a Proposição 2.1 e mostrarmos que o núcleo da aplicação $G_{\text{ha}\star}^s(0) \rightarrow G_{\text{ha}}^s(0)$ é precisamente $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0)$, já que sua sobrejetividade decorre diretamente da proposição invocada.

Observe que o núcleo em questão contém $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0)$, já que o item (ii) da Proposição 2.1 garante que o mesmo é constituído pelas soluções $F = F(z, \zeta)$ infinitamente diferenciáveis do problema formal de Cauchy

$$\begin{cases} \bar{\partial}F \sim_\Sigma 0 \\ F|_\Sigma = 0 \end{cases}.$$

A unicidade das soluções para tal problema garante a inclusão recíproca, isto é, garante que $F \sim_\Sigma 0$.

◁

Como $G_{\text{ha}\star}^s(0)$ e $\mathcal{F}_\Sigma^\bullet(0)$ são invariantes hipo-analíticos, o isomorfismo (2.17) garante a invariância hipo-analítica das classes $G_{\text{ha}}^s(0)$. Tal invariância sugere uma generalização do conceito de hipocomplexidade de Treves (cf. [T, III.5]) na seguinte direção:

- uma estrutura hipo-analítica seria dita *s-hipocomplexa* de ordem $s \geq 1$ se toda solução distribuição (ou mesmo hiperfunção) do sistema $L_j u = 0$ é Gevrey hipo-analítica de ordem s .

Quando $m = 1$ segue de [T, Cor.III.5.3] que *s-hipocomplexidade* para algum s implica hipocomplexidade. O estudo para $m \geq 2$ constitui um interessante tema de investigação.

Finalizamos esta seção observando que as funções hipo-analíticas numa vizinhança U da origem introduzidas por Treves (cf.[T, Def.III.1.2]) constituem o espaço das funções Gevrey hipo-analíticas em U de ordem $s = 1$ (cf.[T, Prop.III.2.1]) e que quando s percorre $]1, \infty[$ obtemos uma modulação entre tais funções e as soluções infinitamente diferenciáveis em U .

2.4 O Teorema de Baouendi-Treves Gevrey hipo-analítico

Nesta seção vamos demonstrar o teorema de Baouendi-Treves para soluções Gevrey hipo-analíticas enunciado a seguir:

Teorema 2.1 *Dada $U \subset\subset \Omega$ vizinhança da origem existe $U'' \subset\subset U$ vizinhança da origem tal que qualquer solução $f \in G_{\text{ha}}^s(U)$ é o limite em $G_{\text{ML}}^s(U'')$ de uma sequência de funções $(F_\tau \circ Z)_{\tau=1,2,\dots}$ onde cada F_τ é inteira em $\mathbb{C}^m$.*

Iniciamos assumindo $U = V \times W \ni (x, t)$ e fixando uma função de corte $\chi \in C_c^\infty(V)$ com χ identicamente um numa vizinhança $V' \subset\subset V$ da origem.

Como na Seção 1.5 vamos trabalhar com as fórmulas de aproximação

$$\tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)(z, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int e^{-\tau(z-Z(x', t))^2} \chi(x') f(x', t) dZ(x', t) \quad (2.18)$$

e suas respectivas restrições $\mathcal{E}_\tau(\chi f)(x, t) = \tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)(Z(x, t), t)$ a Σ . Mais precisamente, vamos trabalhar com as funções

$$\begin{aligned} H_\tau(z, t) &= \tilde{\mathcal{E}}_\tau(\chi f)(z, t) \\ G_\tau(z, t) &= H_\tau(z, t) - H_\tau(z, 0) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \tilde{\mathcal{E}}_\tau(L_j \chi f)(z, \rho t) t_j d\rho \\ F_\tau(z) &= H_\tau(z, 0) = H_\tau(z, t) - G_\tau(z, t). \end{aligned}$$

Um resultado preliminar com demonstração análoga à demonstração do Teorema 1.2 (pg. 16) é:

- existe $C > 0$ tal que, para todo $V'' \subset\subset V'$,

$$\sup_{V'' \times W} |M^\alpha[H_\tau(Z(x, t), t)]| \leq Ch^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \forall \tau > 0.$$

Outro resultado preliminar é obtido através de [T, Lema II.2.4] observando que as funções $(L_j \chi)f$ se anulam identicamente em $V' \times W$, a saber,

- existe uma vizinhança $\Delta \times W'' \subset\subset \mathbb{C}^m \times W$ da origem na qual G_τ convergem uniformemente para zero.

Como $H_\tau \circ \lambda$ convergem para χf uniformemente em compactos de $V \times W$ e como G_τ convergem uniformemente para zero em compactos de $\Delta \times W''$, as funções $F_\tau \circ Z$ convergem para χf em compactos de $U'' \subset\subset V' \times W$ com $\lambda(U'') \subset \Delta \times W''$. Basta tomar um tal U'' e mostrar que a sequência $(F_\tau \circ Z)$ é limitada em algum $G_{\text{ML}}^{s, h}(U'')$, pois assim tal sequência admitirá subsequência convergente (para f) no espaço de Montel $G_{\text{ML}}^s(U'')$. Mais ainda, basta mostrarmos a limitação em questão somente em relação a $\mathbf{M}$, posto que as funções F_τ são inteiras.

Observe que a limitação da sequência $(H_\tau \circ \lambda)$ em $G_{\text{ML}}^{s, h}(U'')$ para algum $h > 0$ já está garantida.

Com relação à limitação de $(G_\tau \circ \lambda)$, vamos considerar poli-discos $\Gamma_\rho(z)$ centrados em $z = Z(x, t)$, $(x, t) \in \overline{U''}$, de poli-raios $(\rho, \dots, \rho)$ pequenos tal que $\Gamma_\rho(z) \subset \Delta$ para todo $(x, t) \in \overline{U''}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{U''}} |M^\alpha[G_\tau \circ \lambda]| &= \sup_{\overline{U''}} |\partial_z^\alpha[G_\tau] \circ \lambda| \\ &\leq \rho^{-|\alpha|} |\alpha|! \sup_{(z,t), \tau} |G_\tau(z, t)| \\ &\leq \text{const} \cdot \rho^{-|\alpha|} |\alpha|! , \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m , \forall \tau > 0 \end{aligned}$$

donde $(G \circ \lambda)$ é limitada em $G_{\text{ml}}^{1, \rho^{-1}}(U'')$.

Capítulo 3

Resolubilidade Gevrey hipo-analítica parcial

Este capítulo trata de questões envolvendo a resolubilidade local Gevrey hipo-analítica parcial do complexo de De Rham associado a uma estrutura hipo-analítica de codimensão n sobre uma variedade diferenciável $(m+n)$ -dimensional. As análises se dão numa carta hipo-analítica (Ω, Z) cumprindo as condições (2.1)-(2.9) da Seção 2.1 e o resultado principal estabelece, a partir da resolubilidade C^∞ , a resolubilidade local do complexo em questão em classes Gevrey parciais segundo a mesma estrutura.

3.1 O complexo diferencial $\mathbb{L}$

Nesta seção vamos introduzir o complexo diferencial $\mathbb{L}$ associado à estrutura

$$T' = \text{Span} \{dZ_1, \dots, dZ_m\} \quad (3.1)$$

de subfibrado vetorial do fibrado cotangente complexo $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ sobre Ω .

Iniciamos pelos espaços das formas diferenciais de grau $q \in \{0, 1, \dots, n\}$ de tipo

$$f = \sum_{|J|=q} f_J(x, t) dt_J \quad (3.2)$$

com coeficientes f_J infinitamente diferenciáveis. Aqui estamos assumindo a notação usual de multi-índices, onde $J = (j_1 < j_2 < \dots < j_q)$ e dt_J representa formas $dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_q}$ de tamanho $|J|$.

Como as derivações $L_1, \dots, L_n$ definem endomorfismos nos espaços de funções infinitamente diferenciáveis, fica bem definido um complexo $\mathbb{L}$ de operadores diferenciais que leva a q -forma (3.2) na $(q+1)$ -forma

$$\mathbb{L}f = \sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^n L_j f_J dt_j \wedge dt_J . \quad (3.3)$$

Como em [T, Sec.I.6], tal complexo corresponde ao complexo de De Rham em $\mathbb{C}T'|_{\Omega}\mathcal{M}$ após passagem ao quociente por T' .

3.2 A resolubilidade local s -Gevrey hipo-analítica parcial

Um dos resultados significativos desta tese diz respeito à realização do complexo $\mathbb{L}$ em classes de funções Gevrey parciais segundo (M, L) definidas a partir das estimativas abaixo:

$$\text{existe } h > 0 \text{ tal que para todo } \ell \in \mathbb{Z}_+ \text{ existe } C_\ell > 0 \text{ com} \\ \sup_{\overline{U}} |M^\alpha L^\gamma f| \leq C_\ell h^{|\alpha|} (|\alpha|)!^s, \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}, |\gamma| \leq \ell . \quad (3.4)$$

Definição 3.1 Dizemos que uma função $f \in C^\infty(\overline{U})$ é s -Gevrey parcial segundo (M, L) em U numa amplitude $h > 0$ quando cumpre a estimativa (3.4). O subespaço de $C^\infty(\overline{U})$ constituído por tais funções será denotado por

$$\mathcal{G}_{ML}^{s,h}(U) = \{f \in C^\infty(\overline{U}) : f \text{ cumpre (3.4)}\}$$

e a união destes espaços será denotado por

$$\mathcal{G}_{ML}^s(U) = \bigcup_{h>0} \mathcal{G}_{ML}^{s,h}(U) .$$

O espaço dos germes na origem parcialmente Gevrey diferenciáveis segundo (M, L) será denotado por

$$\mathcal{G}_{ML}(0) = \{\text{classes } f \text{ representadas por } f \in \mathcal{G}_{ML}^s(U), 0 \in U \subset \subset \Omega\} .$$

É importante ressaltar que (3.4) garante apenas que as derivações com respeito a L numa ordem qualquer $\ell > 0$ satisfazem as estimativas Gevrey com respeito a M numa aptitude $h > 0$ fixa, independente de ℓ . Esta independência de h faz com que as classes Gevrey totais definidas a partir das estimativas (2.10) não estejam contidas nas classes Gevrey parciais definidas a partir da estimativa (3.4) (na Seção 5.2 nos comentamos mais a este respeito). Os exemplos a seguir justificam de certa forma a Definição 3.1.

Exemplos de funções em $\mathcal{G}_{ML}^1(U)$: Considere uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ do tipo $\Delta \times \Theta$, onde Δ (resp. Θ) é um polidisco aberto (resp. bola aberta) centrado(a) na origem de $\mathbb{C}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$), com $\lambda(U) \subset\subset \Sigma \cap (\Delta \times \Theta)$. Se $F \in C^\infty(\Delta \times \Theta)$ é holomorfa nas variáveis $z_1, \dots, z_m$ então existe $h > 0$ tal que $F \circ \lambda \in \mathcal{G}_{ML}^{1,h}(U)$.

A realização do complexo diferencial L nas classes Gevrey parciais segundo (M, L) passa pelos endomorfismos naturais

$$L_j : \mathcal{G}_{ML}^s(U) \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(U) \quad , \quad j = 1, \dots, n . \quad (3.5)$$

Introduzindo os espaços $\mathcal{G}_{ML}^s(U; \Lambda^q)$ das q -formas diferenciais de tipo (3.2) com coeficientes em $\mathcal{G}_{ML}^s(U)$, os endomorfismos (3.5) definem, via (3.3), um complexo diferencial

$$L : \mathcal{G}_{ML}^s(U; \Lambda^q) \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(U; \Lambda^{q+1}) \quad , \quad q = 0, \dots, n-1 . \quad (3.6)$$

Com efeito, se $\mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^q)$ denota germes na origem de formas em $\mathcal{G}_{ML}^s(U; \Lambda^q)$, temos a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^0) \xrightarrow{L} \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^1) \xrightarrow{L} \dots \xrightarrow{L} \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^n) \xrightarrow{L} 0 \quad (3.7)$$

cujas cohomologia algébrica associada

$$\begin{aligned} H^0(0) &= \text{Ker}[L : \mathcal{G}_{ML}^s(0) \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^1)] \\ H^q(0) &= \frac{\text{Ker}[L : \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^q) \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^{q+1})]}{\text{Im}[L : \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^{q-1}) \rightarrow \mathcal{G}_{ML}^s(0; \Lambda^q)]} \quad , \quad q = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.8)$$

mede obstruções na resolubilidade local de (3.6) em nível q . Observe que $H^0(0) = G_{ha}^s(0)$.

Definição 3.2 Dizemos que o complexo L é parcialmente s -Gevrey hipanalítico resolúvel na origem em nível $q \in \{1, \dots, n\}$ quando $H^q(0) = 0$

ou, equivalentemente, quando para todo $f \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(0, \Lambda^q)$ com $\mathbb{L}f = 0$ existe $u \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(0, \Lambda^{q-1})$ com $\mathbb{L}u = f$. Em termos de representantes, a resolubilidade s -Gevrey hipo-analítica parcial na origem se traduz na seguinte condição:

$$\begin{aligned} & \text{dada } U \subset\subset \Omega \text{ vizinhança da origem e dada } f \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U; \Lambda^q) \\ & \text{com } \mathbb{L}f = 0 \text{ em } U \text{ existe } U' \subset U \text{ vizinhança da origem e} \\ & \text{existe } u \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U'; \Lambda^{q-1}) \text{ com } \mathbb{L}u = f \text{ em } U'. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A caracterização das classes Gevrey parciais segundo (M, L) em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ utiliza os espaços $\mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(0)$ a seguir, que envolvem funções $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de vizinhanças $\mathcal{W}$ da origem de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ cumprindo a estimativa (3.4) complexificada, a saber,

$$\begin{aligned} & \text{existe } h > 0 \text{ tal que para todo } \ell \in \mathbb{Z}_+ \text{ existe } C_\ell > 0 \text{ com} \\ & \sup_{\overline{W}} |\partial_z^\alpha \partial_t^\gamma F| \leq C_\ell h^{|\alpha|} |\alpha|!^s, \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}, |\gamma| \leq \ell \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definição 3.3 Vamos denotar por $\mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(\mathcal{W})$ o espaço das funções $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciáveis no fecho de uma vizinhança $\mathcal{W}$ da origem de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ com $\overline{\partial}_z F \sim_\Sigma 0$ e satisfazendo (3.10). Só para evidenciar

$$\mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(\mathcal{W}) = \{F : F \in C^\infty(\overline{\mathcal{W}}) \text{ com } \overline{\partial}_z F \sim_\Sigma 0 \text{ e satisfazendo (3.10)}\}.$$

O espaço dos germes na origem de tais funções será denotado por $\mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(0)$.

Proposição 3.1 Se $f = f(x, t)$ é infinitamente diferenciável no fecho de uma vizinhança $U \subset\subset \Omega$ da origem e se $s > 1$ então são equivalentes:

- (i) $f \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U)$;
- (ii) existe $F \in \mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(\mathcal{W})$, $\mathcal{W} \supset \lambda(U)$, com $F \circ \lambda = f$.

Demonstração :

- ▷ A implicação (ii) $\Rightarrow$ (i) é uma consequência imediata da aplicação da regra da cadeia junto com a dualidade (2.9) e o anulamento $\overline{\partial}_z F \sim_\Sigma 0$, já que neste caso $M^\alpha L^\gamma[F \circ \lambda] = \partial_z^\alpha \partial_t^\gamma[F] \circ \lambda$ e (3.10) implica (3.4).

Para a implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) vamos considerar, como na Proposição 2.1, uma função $F = F(z, t)$ infinitamente diferenciável numa vizinhança $\lambda(U) \subset \mathcal{W} \supset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\overline{\partial}_z F \sim_\Sigma 0$ com $F|_\Sigma = f$. Tal função, via $M^\alpha L^\gamma[F \circ \lambda] = \partial_z^\alpha \partial_t^\gamma[F] \circ \lambda$ e estimativa (3.4), representa um elemento em $\mathcal{G}_{\text{ML}*}^s(\mathcal{W})$.

◁

3.3 Resolubilidade C^∞ versus resolubilidade Gevrey hipo-analítica

Nesta seção estabelecemos a resolubilidade local s -Gevrey hipo-analítica parcial do complexo $\mathbb{L}$ para todo $s > 1$ a partir da sua resolubilidade local clássica C^∞ , caracterizada em nível q pela condição

$$\begin{aligned} &\text{dada } U \subset\subset \Omega \text{ vizinhança da origem existe } U' \subset U \text{ vizinhança} \\ &\text{da origem tal que para toda } f \in C^\infty(U; \Lambda^q) \text{ com } \mathbb{L}f = 0 \text{ em } U \\ &\text{existe } u \in C^\infty(U'; \Lambda^{q-1}) \text{ com } \mathbb{L}u = f \text{ em } U'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aqui $C^\infty(U; \Lambda^q)$ denota o espaço das formas diferenciais de grau q de tipo (3.2) com coeficientes em $C^\infty(\overline{U})$.

Teorema 3.1

$$(3.11) \Rightarrow (3.9) \quad , \quad \forall s > 1 \quad , \quad \forall q = 1, \dots, n \quad .$$

A demonstração do teorema acima utiliza adaptações dos Lemas 3, 4 e 5 da Seção 1.5 para as classes Gevrey parciais segundo (M, L) . Lembramos que tais lemas envolvem operadores Gevrey diferenciais do tipo

$$P_r(M) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{p^{2s}} [M_1^2 + \dots + M_m^2] \right) \quad , \quad r > 0 \quad . \quad (3.12)$$

A adaptação dos Lemas 3 e 4 utiliza as estimativas (1.36) com parâmetros, em vizinhanças complexas de fatias Σ_t do tipo

$$\Sigma_{t,\delta} = \{ z + iv : z \in \Sigma_t \quad , \quad v \in \mathbb{R}^m \quad , \quad |v| < \delta \} \quad (3.13)$$

e em n -uplas complexas θ_t expressas na forma

$$\theta_t = \zeta + i(z - w) \langle \zeta \rangle \quad , \quad z \in \Sigma_t \quad , \quad \zeta \in \mathbb{R}T'_z \Sigma_t \quad , \quad w \in \mathbb{C}^m \quad . \quad (3.14)$$

Trabalhando como em [C, Sec.2] numa pequena vizinhança $U \subset\subset \Omega$ da origem e com números reais $\kappa, \delta_0 > 0$ também pequenos, é possível validar (1.36) com θ_t no lugar de θ , $z = Z(x, t)$, $z' = Z(x', t)$, $\zeta \in \mathbb{R}T'_z \Sigma_t$, $v \in \mathbb{R}^m$ com $|v| \leq 1$ e $w \in \Sigma_{t,\delta_0}$ para todo $(x, t) \in U$. Neste contexto os lemas em questão são facilmente adaptados através dos lemas a seguir.

Lema 6 Fixado $r \in]0, 1[$ existe $h_r > 0$ tal que qualquer função $v \in C^\infty(U)$ é representada numa vizinhança $U' \subset\subset U$ da origem por $P_r(M)w = v$ onde $w \in \mathcal{G}_{ML}^{s, h_r}(U')$.

Demonstração :

- ▷ Basta repetir a demonstração do Lema 3 com funções $v_\epsilon = v_\epsilon(x, t)$ definidas através das representações integrais

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{x' \in \mathbb{R}^m} \int_{\xi \in \mathbb{R}^m} \frac{e^{i\xi \cdot (Z(x, t) - Z(x', t) - \epsilon \langle \xi \rangle^2)}}{P_r(\xi)} \chi(x') v(x', t) \det Z_x(x', t) d\xi dx'.$$

A única diferença é a expressão das derivações $M^\alpha L^\gamma v_\epsilon$ de ordem $|\gamma| < \ell$, a saber,

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Sigma_t} \int_{\mathbb{R}^{T'_Z, \Sigma_t}} \frac{(i\theta)^\alpha e^{i\theta \cdot (Z - Z') - \epsilon \langle \theta \rangle^2}}{P_r(\theta) \prod (1 + |\theta_k|^2)} \prod (1 - M_k^2) L^\gamma [\chi v]_{\Delta(Z - Z', \zeta)} d\zeta dZ'$$

que torna a constante em

$$\text{const} \cdot (\sqrt{\frac{11}{13}} r)^{-|\alpha|} |\alpha|!^s (1 + |\theta|^2)^{-m}$$

dependente de ℓ .

◁

O próximo lema é uma aplicação direta do Teorema 2.2 em [C].

Lema 7 Fixada qualquer vizinhança $U' \subset\subset U$ da origem sempre existe uma vizinhança $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ de $\lambda(U')$ na qual as soluções $g \in \mathcal{G}_{ML}^s(U)$ de $P_r(M)g = 0$ se estendem holomorficamente em z , isto é, existe $G \in C^\infty(\mathcal{W})$ holomorfa em z com $G \circ \lambda|_{U'} = g|_{U'}$.

Com relação ao Lema 5, temos

Lema 8 Fixado $h > 0$ existe $r_h > 0$ tal que, para todo $s > 1$ e para toda vizinhança $U \subset\subset \Omega$ da origem, os operadores $P_r(M)$ com $0 < r \leq r_h$ definem aplicações

$$P_r(M) : \mathcal{G}_{ML}^{s, h}(U) \rightarrow C^\infty(U) \quad .$$

Demonstração :

- ▷ A única diferença na demonstração do Lema 5 é que as derivações $M^\alpha \mathbb{L}^\gamma[a_\alpha, M^{\alpha'} f]$ de ordem $|\gamma| \leq \ell$ vão satisfazer

$$\sup_{\overline{U}} \left| M^\alpha \mathbb{L}^\gamma[a_\alpha, M^{\alpha'} f] \right| \leq B_2 C_\ell C_\epsilon ((1 + \epsilon) H_2 \sqrt{m} H h r)^{|\alpha'|} ((1 + \epsilon) h)^{|\alpha| + \ell} (|\alpha| + \ell)!^s.$$

◁

Demonstração do Teorema 3.1 :

De início vamos trabalhar numa pequena vizinhança Ω da origem e com números κ e δ_0 pequenos para podermos utilizar os lemas demonstrados até agora.

Fixemos $U \subset\subset \Omega$ vizinhança da origem e $f \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^{s,h}(U; \Lambda^q)$ com $\mathbb{L}f = 0$ em U .

Vamos considerar, via Lema 8, um operador $P(M)$ do tipo (3.12) tal que

$$P(M) : \mathcal{G}_{\text{ML}}^{s,h}(U; \Lambda^q) \rightarrow C^\infty(U; \Lambda^q),$$

onde a atuação de $P(M)$ se dá nos coeficientes das formas.

A comutatividade entre M_k e L_j e a constância dos coeficientes complexos de $P(M)$ faz com que $\mathbb{L}P(M) = P(M)\mathbb{L}$, donde

$$\mathbb{L}[P(M)f] = P(M)[\mathbb{L}f] = 0 \text{ em } U.$$

Através da resolubilidade clássica (3.11), existe uma vizinhança $U_1 \subset U$ da origem (universal em relação a f e $P(M)$) e existe uma $(q-1)$ -forma

$$v \in C^\infty(\overline{U}_1; \Lambda^{q-1}) \quad \text{com} \quad \mathbb{L}v = P(M)f \text{ em } U_1.$$

Pelo Lema 6, existe uma vizinhança $U_2 \subset\subset U_1$ da origem e existe uma $(q-1)$ -forma

$$w \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U_2; \Lambda^{q-1}) \quad \text{com} \quad P(M)w = v \text{ em } U_2.$$

Podemos então definir

$$g = \mathbb{L}w - f|_{\overline{U_2}} \quad \text{com} \quad P(\mathbb{M})g = 0 \quad \text{em} \quad U_2 ,$$

já que $P(\mathbb{M})g = P(\mathbb{M})[\mathbb{L}w] - P(\mathbb{M})f = \mathbb{L}[P(\mathbb{M})w] - P(\mathbb{M})f = \mathbb{L}v - P(\mathbb{M})f$.

Pelo Lema 7, existe uma vizinhança $U_3 \subset U_2$ da origem, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_3$ de $\lambda(U_3)$ em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ e existe uma q -forma

$$G \in C^\infty(\mathcal{U}_3; \Lambda^q) \quad [\text{holomorfa em } z] \quad \text{com} \quad G \circ \lambda|_{U_3} = g|_{U_3} .$$

A q -forma G é d_t -fechada em $\lambda(U_3)$, já que

$$d_t G|_{\lambda(U_3)} = \mathbb{L}[G \circ \lambda]|_{U_3} = \mathbb{L}(\mathbb{L}w - f) = 0 .$$

O Lema de Poincaré garante a existência de uma vizinhança $U' \subset U_2$ da origem, uma vizinhança $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_3$ de $\lambda(U')$ em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ e uma $(q-1)$ -forma

$$H \in C^\infty(\mathcal{U}'; \Lambda^{q-1}) \quad [\text{holomorfa em } z] \quad \text{com} \quad d_t H|_{\lambda(U')} = G|_{\lambda(U')} .$$

Basta definir então

$$u = w|_{\overline{U'}} - H \circ \lambda|_{\overline{U'}}$$

e observar que, em U' ,

$$\mathbb{L}u = \mathbb{L}w - \mathbb{L}[H \circ \lambda] = \mathbb{L}w - d_t H \circ \lambda = g + f - G \circ \lambda = f .$$

O fato dos coeficientes de H serem infinitamente diferenciável em $\mathcal{U}'$ e holomorfos nas variáveis $z_1, \dots, z_m$ os inclui, como nos exemplos da pg.40, em $\mathcal{G}_{\text{ML}}^{1, h'}$ para algum h' dependendo somente da espessura de $\mathcal{U}'$ em relação à $\lambda(U')$, isto é, dependendo somente de δ_0 (cf.[C]). Assim

$$H \circ \lambda \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^1(U'; \Lambda^{q-1}) \subset \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U'; \Lambda^{q-1})$$

donde

$$u \in \mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U'; \Lambda^{q-1}) .$$

Capítulo 4

Resolubilidade Gevrey para funções ($q = 1$)

Este capítulo trata de questões envolvendo a resolubilidade local Gevrey hipo-analítica do complexo $\mathbb{L}$ em $q = 1$. As análises se dão como no capítulo anterior e o resultado principal utiliza a mesma técnica da demonstração do Teorema 3.1 para estabelecer a resolubilidade local de $\mathbb{L}$ nas classes Gevrey (totais) segundo (M, L) a partir da resolubilidade clássica C^∞ . Uma consequência imediata é a suficiência da condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves para a resolubilidade Gevrey local de operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem com coeficientes analíticos não degenerados na origem.

4.1 Resolubilidade local em funções Gevrey segundo (M, L)

Nesta seção vamos apresentar algumas questões relevantes envolvendo a resolubilidade local do complexo diferencial $\mathbb{L}$ em classes de funções Gevrey diferenciáveis segundo (M, L) , definidas na Seção 2.2.

A realização de $\mathbb{L}$ em tais classes utiliza a seguinte proposição.

Proposição 4.1 *As derivações $L_1 \dots, L_n$ definem aplicações*

$$L_j : G_{ML}^{s,h}(U) \rightarrow G_{ML}^{s,h^+}(U) , \quad h^+ > h \quad (4.1)$$

em qualquer vizinhança $U \subset\subset \Omega$ da origem e em qualquer $s \geq 1$.

Demonstração :

- ▷ A proposição segue da estabilidade sobre operadores diferenciais da sequência $\{p!^s\}$, que se traduz na estimativa

$$\forall \epsilon > 0 \exists C_\epsilon : (p+1)!^s \leq C_\epsilon(1+\epsilon)^p p!^s, \forall p \geq 0. \quad (4.2)$$

Fixada $f \in G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$, tal estabilidade permite estimar

$$\begin{aligned} \sup_{\bar{U}} |M^\alpha L^\beta [L_j f]| &\leq \|f\|_{s,h,U} h^{|\alpha|+|\beta|+1} (|\alpha| + |\beta| + 1)!^s \\ &\leq \|f\|_{s,h,U} C_\epsilon h \cdot ((1+\epsilon)h)^{|\alpha|+|\beta|} \cdot (|\alpha| + |\beta|)!^s. \end{aligned}$$

◁

De acordo com a proposição anterior, o complexo $\mathbb{L}$ se realiza nas classes de funções Gevrey segundo (M, L) , via (3.3), definindo aplicações

$$\mathbb{L} : G_{\text{ML}}^{s,h}(U) \rightarrow G_{\text{ML}}^{s,h^+}(U; \Lambda^1), \forall h < h_+ \quad (4.3)$$

$$\mathbb{L} : G_{\text{ML}}^s(U) \rightarrow G_{\text{ML}}^s(U; \Lambda^1), \quad (4.4)$$

$$\mathbb{L} : G_{\text{ML}}^s(0) \rightarrow G_{\text{ML}}^s(0; \Lambda^1), \quad (4.5)$$

e a resolubilidade Gevrey hipo-analítica local em $q = 1$ se traduz em termos de germes na origem na condição

dada $f_1, \dots, f_n \in G_{\text{ML}}^s(0)$ com $L_j f_{j'} = L_{j'} f_j$ para todo $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ existe $u \in G_{\text{ML}}^s(0)$ com $L_j u = f_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

ou, em termos de seus representantes, na condição

dados $U \subset\subset \Omega$ vizinhança da origem, $h > 0$ e $f_1, \dots, f_n \in G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$ com $L_j f_{j'} = L_{j'} f_j$ em U para todo $j, j' \in \{1, \dots, n\}$, existem $U' \subset U$ vizinhança da origem, $h' > 0$ e $u \in G_{\text{ML}}^{s,h'}(U')$ com $L_j u = f_j$ em U' para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. (4.6)

Como na resolubilidade local C^∞ , uma aplicação do Teorema de Baire torna (4.6) equivalente à formulação a seguir, onde U' e h' são tomadas independentes de $f_1, \dots, f_n$, a saber,

dados $U \subset\subset \Omega$ vizinhança da origem e $h > 0$ existem $U' \subset U$ vizinhança da origem e $h' > 0$ tais que, se $f_1, \dots, f_n \in G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$ satisfaz $L_j f_{j'} = L_{j'} f_j$ em U para todo $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ então existe $u \in G_{\text{ML}}^{s,h'}(U')$ satisfazendo $L_j u = f_j$ em U' para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. (4.7)

A aplicação consiste em considerar espaços

$$\begin{aligned} E &= \{f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{L}f = 0\} \subset G_{\mathbf{ML}}^{s,h}(U; \Lambda^1), \\ E_\ell &= \{(u, f) : \mathbb{L}u = f\} \subset G_{\mathbf{ML}}^{s,\ell}(U_\ell) \times E \end{aligned}$$

onde U_ℓ são vizinhanças se exaurindo a origem; a formulação (4.6) garante que E é a união das projeções $\pi_\ell(u, f) = f$; pelo teorema de Baire, existem $U' = U_{\ell_0}$ e $h' = \ell_0$ tais que $\pi_{\ell_0}(E_{\ell_0})$ não é magro; pelo teorema da aplicação aberta, $\pi_{\ell_0} : E_{\ell_0} \rightarrow E$ é sobrejetora.

Uma variante forte de (4.7) ocorre quando U' independe de h , a saber,

dados $U \subset\subset \Omega$ vizinhança da origem existe $U' \subset U$ vizinhança da origem tal que, se $f_1, \dots, f_n \in G_{\mathbf{ML}}^s(U)$ satisfaz $\mathbb{L}_j f_{j'} = \mathbb{L}_{j'} f_j$ em U para todo $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ então existe $u \in G_{\mathbf{ML}}^s(U')$ satisfazendo $\mathbb{L}_j u = f_j$ em U' para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. (4.8)

Um exemplo interessante onde vale (4.7) e não vale (4.8) é a estrutura de Mizohata no plano $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$, definida pela carta $Z = x + it^2/2$. Neste exemplo a diferenciabilidade Gevrey usual e a diferenciabilidade Gevrey segundo a estrutura de Mizohata coincidem, posto que Z é analítica. O complexo $\mathbb{L}$ se reduz ao único campo $\mathbb{L} = \frac{\partial}{\partial t} - it \frac{\partial}{\partial x}$. As funções em $G^{1,h}(U)$ correspondem às analíticas reais em $\overline{U}$ que se estendem holomorficamente numa vizinhança $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^2 : \text{dist}(z, \overline{U}) < h^{-1}\}$ de $\overline{U}$. A condição (4.7) é uma consequência imediata do Teorema de Cauchy. Por outro lado, o teorema [H, Teo.6.1.4] garante que:

existe uma vizinhança U da origem tal que, para toda $U' \subset\subset U$, existe uma função f tornando o problema $\mathbb{L}u = f$ sem solução em $\mathcal{D}'(U')$, embora f possa ser estendida holomorficamente numa vizinhança complexa $\mathcal{U}$ de U .

Mais precisamente, dada $U' \subset\subset U$ existe uma amplitude $h > 0$ e existe uma função $f \in G^{1,h}(U)$ tal que a equação $\mathbb{L}u = f$ não possui solução em $\mathcal{D}'(U')$ para todo $U' \subset U$; em particular, a equação $\mathbb{L}u = f$ não possui solução em $G^1(U')$ para todo $U' \subset U$, contrariando (4.8).

Passemos agora a um fato importante sobre a resolubilidade Gevrey hipanalítica que ocorre no nível $q = 1$.

Proposição 4.2 *Se $f \in G_{\text{ML}}^{s,h}(U; \Lambda^1)$ é tal que $\mathbb{L}f = 0$ em U e se $u \in C^\infty(U')$ é tal que $\mathbb{L}u = f$ em U' então*

$$\sup_{\overline{U'}} |M^\alpha L^\gamma u| \leq \text{const} \cdot h^{|\alpha|+|\gamma|} (|\alpha| + |\gamma|)!^s, \quad \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}, \quad |\gamma| > 0.$$

Demonstração :

- ▷ As estimativas em questão decorrem diretamente das estimativas (2.10) para os coeficientes $f_1, \dots, f_n$ de f . Por exemplo, supondo que $\gamma_1 > 0$ temos

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{U'}} |M^\alpha L^\gamma u| &= \sup_{\overline{U'}} \left| M^\alpha L^{(\gamma_1-1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)} L_1 u \right| \\ &= \sup_{\overline{U'}} \left| M^\alpha L^{(\gamma_1-1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)} f_1 \right| \\ &\leq \|f_1\|_{s,h,U} h^{|\alpha|+|\gamma|-1} (|\alpha| + |\gamma| - 1)!^s \\ &\leq \frac{\|f_1\|_{s,h,U}}{h} h^{|\alpha|+|\gamma|} (|\alpha| + |\gamma|)!^s. \end{aligned}$$

◁

A Proposição 4.2 e a técnica da demonstração do Teorema 3.1 viabilizam o seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Se $s > 1$ e se $q = 1$ então*

$$(3.11) \Rightarrow (4.8).$$

Demonstração :

Basta observar que os lemas da Seção 3.3 também se aplicam em $G_{\text{ML}}^{s,h}(U)$. Com isto, podemos reproduzir a demonstração do Teorema 3.1 e obter uma solução $u \in C^\infty(\overline{U'})$ de $\mathbb{L}u = f$ satisfazendo as estimativas (2.10) para todo $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n}$ com $|\gamma| = 0$.

A Proposição 4.2 garante tais estimativas para $|\gamma| > 0$.

Concluimos então que $u \in G_{\text{ML}}^s(U')$.

◁

4.2 A condição $(\mathcal{P})$ versus resolubilidade Gevrey

Nesta seção vamos tratar da resolubilidade Gevrey de operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem não degenerados na origem de $\mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 1$.

De acordo com [T2], podemos considerar um sistema de coordenadas

$$\Omega = B \times \Theta \ni (x, t) = (x_1, \dots, x_m, t)$$

centrado na origem onde a parte principal dos operadores em questão (sem o termo de ordem zero) se reduz, módulo multiplicações por funções não nulas em Ω , à forma *standard*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{k=1}^m b_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (4.9)$$

onde $b = (b_1, \dots, b_m)$ é uma função infinitamente diferenciável em Ω a valores em $\mathbb{R}^m$.

A condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves, a saber,

$$\text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^m \text{ e para todo } x \in B, \text{ a função que a} \quad (4.10) \\ \text{cada } t \in \Theta \text{ associa } b(x, t) \cdot \xi \in \mathbb{R} \text{ não muda de sinal.}$$

garante a existência de m soluções $Z_1, \dots, Z_m$ para o problema $Lu = 0$, soluções estas infinitamente diferenciáveis com $dZ_1, \dots, dZ_m$ linearmente independentes em Ω . Com efeito, podemos considerar as classes $G_{\text{ML}}^s(U)$ de funções Gevrey diferenciáveis segundo a base $(M, L) = (M_1, \dots, M_m, L)$ dual de $(dZ_1, \dots, dZ_m, dt)$. Mais ainda, a condição $(\mathcal{P})$ também é suficiente para a resolubilidade local C^∞ de L .

Segue então o seguinte corolário do Teorema 4.1:

Corolário 4.1.1 *Todo operador diferencial parcial linear L satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves é localmente Gevrey resolúvel nas classes de Gevrey de ordem $s > 1$ definidas a partir da estrutura localmente integrável gerada por L .*

Em particular, segue da Proposição 1.3 um dos principais resultados deste trabalho:

Teorema 4.2 *A condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves é suficiente para a resoluibilidade Gevrey local de operadores lineares de primeira ordem não degenerados com coeficientes analíticos.*

Capítulo 5

Observações Finais

5.1 A questão da existência de funções cortes nas classes de Gevrey segundo M

A questão da existência de funções cortes em $G_M^s(V)$ no caso em que $Z_1, \dots, Z_m$ não são usualmente s -Gevrey não foi respondida nesta tese. Utilizando a teoria de feixes desenvolvida em [Br] vamos dar indícios da não existência de tais cortes neste caso particular em que a subvariedade Σ não é s -Gevrey. Por comodidade vamos assumir $m = 1$.

Iniciamos listando os feixes abaixo construídos a partir dos respectivos pré-feixes:

$$\begin{aligned} G_M^s &: B \supset V \mapsto G_M^s(V) \\ G^s &: B \supset V \mapsto G^s(V) \\ \mathcal{G}^s &: \mathbb{C} \supset \mathcal{U} \mapsto G^s(\mathcal{U}) \\ \mathcal{G}_*^s &: \mathbb{C} \supset \mathcal{U} \mapsto \mathcal{G}_*^s(\mathcal{U}) = \{F \in G^s(\mathcal{U}) : \bar{\partial}F \sim_{\Sigma} 0\} \\ \mathcal{G}_{\bullet}^s &: \mathbb{C} \supset \mathcal{U} \mapsto \mathcal{G}_{\bullet}^s(\mathcal{U}) = \{F \in G^s(\mathcal{U}) : F \sim_{\Sigma} 0\} \end{aligned}$$

A existência de funções cortes Gevrey diferenciáveis segundo M equivale, via [Br, Cap.II:Prop.9.2 e Ex.12], ao feixe G_M^s ser *soft* ou, via isomorfismo (1.18), ao feixe quociente $\mathcal{G}_*^s/\mathcal{G}_{\bullet}^s$ ser *C-soft* sobre Σ , onde C denota a família dos compactos de $\mathbb{C}$. Por fim, através de [Br, Cap.II:Prop.15.1], tal existência equivale ao feixe $\mathcal{G}_*^s/\mathcal{G}_{\bullet}^s$ ser *C-acíclico* sobre abertos de $\mathbb{C}$ ou, equivalentemente,

$$H_C^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_*^s/\mathcal{G}_{\bullet}^s|_{\mathcal{U}}) = 0, \quad \forall \mathcal{U} \subset \mathbb{C}.$$

Os feixes $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}_\bullet^s$ são claramente $\mathbb{C}$ -soft, já que a restrição de suas seções aos compactos de $\mathbb{C}$ é sobrejetora. Como o quociente de feixes *soft* também é *soft* ([Br, Cap.II:Prop.9.7]), temos a resolução *soft*

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^s / \mathcal{G}_\bullet^s \longrightarrow \mathcal{G}^s / \mathcal{G}_\bullet^s \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{G}^s / \mathcal{G}_\bullet^s \rightarrow 0$$

que permite calcular $H_C^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_\bullet^s / \mathcal{G}_\bullet^s |_{\mathcal{U}})$ através da sequência associada

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{s(\mathcal{U})} / \mathcal{G}_\bullet^{s(\mathcal{U})} \longrightarrow \mathcal{G}^{s(\mathcal{U})} / \mathcal{G}_\bullet^{s(\mathcal{U})} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{G}^{s(\mathcal{U})} / \mathcal{G}_\bullet^{s(\mathcal{U})} \rightarrow 0 ,$$

já que

$$H_C^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_\bullet^s / \mathcal{G}_\bullet^s |_{\mathcal{U}}) \simeq (\mathcal{G}^{s(\mathcal{U})} / \mathcal{G}_\bullet^{s(\mathcal{U})}) / \text{Im } \bar{\partial} .$$

Concluimos então que a existência de funções cortes nas classes $G_{\mathbf{M}}^s(V)$ equivale à validade do seguinte problema em abertos $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$:

- dada $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{C})$ suportada em $\mathcal{U}$ existe $G \in \mathcal{G}^s(\mathbb{C})$ também suportada em $\mathcal{U}$ tal que $(\bar{\partial}F - G) \sim_\Sigma 0$.

Finalizamos observando que a condição de Σ ser Gevrey, além de suficiente, deve ser necessária para a resolução Gevrey $\bar{\partial}$ -flat sobre Σ do problema em questão.

5.2 A questão da diferenciabilidade Gevrey parcial segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$

Num primeiro momento o conceito de diferenciabilidade Gevrey parcial segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$ foi estabelecido a partir das estimativas

$$\forall \ell \exists C_\ell \exists h_\ell : \sup_{\bar{U}} |\mathbf{M}^\alpha \mathbf{L}^\gamma f| \leq C_\ell h_\ell^{|\alpha|} |\alpha|!^s , \forall (\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^{m+n} , |\gamma| \leq \ell . \quad (5.1)$$

Observe que tais estimativas são mais abrangentes que (3.4) e também mais abrangentes que (2.10), já que

$$(|\alpha| + |\gamma|)!^s \leq C_{|\gamma|} h_{|\gamma|}^{|\alpha|} |\alpha|!^s .$$

Com efeito, as classes $G_{\mathbf{ML}}^s(U)$ estavam contidas nas classes $\mathcal{G}_{\mathbf{ML}}^s(U)$.

Infelizmente a técnica utilizada na demonstração do teorema central não se casa com as classes $\mathcal{G}_{\text{ML}}^s(U)$ definidas a partir de (5.1), pois a dependência qualquer de h em relação a ℓ inviabiliza o Lema 8. Neste caso é possível mostrar que, para cada ℓ fixado, existe $P_\ell(\mathbf{M})$ na classe de Kaneko de ordem s com $P_\ell(\mathbf{M})f$ infinitamente diferenciável em x e de classe C^ℓ em t . Assumindo uma resolubilidade do tipo C^ℓ em t e utilizando um processo do tipo *Mittag Leffler*, acreditamos ser possível num futuro próximo enunciar nosso teorema nas classes Gevrey parciais segundo $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$ definidas a partir de (5.1).

5.3 A questão da resolubilidade ultradiferencial

Apesar desta tese tratar somente da resolubilidade ultradiferencial relacionada à sequência de Gevrey $\{p!^s\}$, conjecturamos ser possível estender nossos resultados para casos mais gerais de ultradiferenciabilidade, envolvendo sequências $\{N_p\}$ satisfazendo propriedades de

- convexidade logarítmica

$$N_p^2 \leq N_{p-1}N_{p+1} \quad , \quad \forall p = 1, 2, \dots \quad ,$$

- estabilidade segundo operadores ultradiferenciais

$$N_p \leq CH^p \min_{0 \leq q \leq p} N_q N_{p-q} \quad , \quad \forall p = 0, 1, \dots \quad ,$$

- não-quase-analiticidade forte

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{N_{q-1}}{N_q} \leq Cp \frac{N_{p-1}}{N_p} \quad , \quad \forall p = 1, 2, \dots \quad .$$

Simbologia

- as variáveis

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$$

- os domínios

$$V \ni x, \mathcal{U} \ni z, U \ni (x, t), \mathcal{W} \ni (z, t)$$

- os espaços de funções Gevrey

- Gevrey usual

$$\begin{aligned} G^{s,h}_M(V), G^s_M(V), G^s_M(0) &\dots\dots\dots 8, 8, 8 \\ G^{s,h}_M(U), G^s_M(U), G^s_M(0) &\dots\dots\dots 30, 30, 30 \\ G^s(\mathcal{U}) &\dots\dots\dots 9 \end{aligned}$$

- Gevrey segundo a estrutura hipo-analítica

$$\begin{aligned} G^{s,h}_M(V), G^s_M(V), G^s_M(0) &\dots\dots\dots 7, 8, 8 \\ G^{s,h}_{ML}(U), G^s_{ML}(U), G^s_{ML}(0) &\dots\dots\dots 29, 30, 30 \end{aligned}$$

- Gevrey hipo-analítico

$$G^s_{ha}(U), G^s_{ha}(0) \dots\dots\dots 30, 30$$

- Gevrey parcial segundo a estrutura hipo-analítica

$$\mathcal{G}^s_{ML}(U), \mathcal{G}^s_{ML}(0) \dots\dots\dots 39, 39$$

- Caracterizações Gevrey em $\mathbb{C}^m$

$$\begin{aligned} G^{s}_{M\star}(\mathcal{U}) &\dots\dots\dots 9 \\ \mathcal{F}^{\bullet}_{\Sigma}(\mathcal{U}) &\dots\dots\dots 11 \\ \mathcal{F}^{\bullet}_{\Sigma}(0) &\dots\dots\dots 11 \end{aligned}$$

- Caracterizações Gevrey em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} G^{s}_{ha\star}(\mathcal{W}) &\dots\dots\dots 31 \\ \mathcal{F}^{\bullet}_{\Sigma}(\mathcal{W}) &\dots\dots\dots 34 \\ \mathcal{F}^{\bullet}_{\Sigma}(0) &\dots\dots\dots 34 \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [B] J. Bruna, *An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions*. J. LONDON MATH. SOC. (2), **22**(1980), 495-505
- [Bo] Bourbaki, N., *Topological Vector Spaces* (cap. 1-5). SPRINGER-VERLAG, 1987
- [Br] Bredon, Glen E., *Sheaf Theory*. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1967
- [C] P. Cordaro, *Representation of hyperfunction solutions in a hypo-analytic structure*. MATH.Z. (2000), a aparecer
- [CH1] P. Cordaro e J. Hounie, *On local solvability of underdetermined system of vector fields*. AMER.J.MATH., **112**(1990), 243-270
- [CH2] P. Cordaro e J. Hounie, *Local solvability for top degree forms in a class of systems of vector fields*. AMER.J.MATH., **121**(1999), 487-495
- [CT] P. Cordaro e F. Treves, *Homology and cohomology in hypo-analytic structures of the hypersurface type*. J.GEOMETRIC ANALYSIS, **1**(1991), 39-70
- [ChT] S. Chanillo e F. Treves, *Local exactness in a class of differential complexes*. J.AMER.MATH.SOC., **10**(2)(1997), 393-426
- [D] B. Drost, *Holomorphic approximations of ultradifferentiable functions*. MATH.ANN., **257**(1981), 293-316

- [GP] T. Gramchev e P. Popivanov, *Partial differential equations: approximate solutions in scales of functional spaces*. MATHEMATICAL RESEARCH, **108**, WILEY-VCH, Berlin, 2000
- [H] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*. SPRINGER-VERLAG, 1969
- [H1] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. SPRINGER-VERLAG, 1983
- [K] H. Komatsu, *Ultradistributions I. Structures theorems and a characterization*. J.FAC.SCI.UNIV.TOKIO, Sec IA **20**(1973), 25-105
- [Ka] A. Kaneko, *Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications*. J.FAC.SCI.UNIV.TOKIO, Sec IA **19**(1972), 321-352
- [MT] G. Mendoza e F. Treves, *Local solvability in a class of overdetermined systems of linear PDE*. DUKE MATH.J., **62**(2)(1991), 355-377
- [R] L. Rodino, *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*. WORLD SCIENTIFIC, 1993
- [T] F. Treves, *Hypo-analytic structures (local theory)*. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, Princeton, NJ, 1992
- [T1] F. Treves, *On the local integrability and local solvability of systems of vector fields*. ACTA MATH., **151**(1983), 1-48
- [T2] F. Treves, *Integral Representation of Solutions of First-Order Linear Partial Differential Equations*. ANN. SC. NORM. SUP. PISA, Serie IV Vol. II **1**(1976), 1-35