Sobre alguns problemas da

Teoria das Funções

Holomorfas Generalizadas

Marcelo Reicher Soares

Tese Apresentada ao

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Área de concentração: Análise

Orientador: **Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo**

São Paulo, junho de 2000

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida por
Marcelo Reicher Soares e aprovada pela
Comissão Julgadora.

São Paulo, 22 de Setembro de 2000.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo (orientador)	IME-USP
Profa. Dra. Roseli Fernandez	IME-USP
Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado	FEIS-UNESP
Prof. Dr. João Toledo da Silva	FEIS-UNESP
Prof. Dr. Roberto Luiz Soraggi	UFRJ

Aos meus pais, por meio dos quais,

Deus me criou e educou.

A minha esposa, por meio da qual,

Deus me fez crescer e amadurecer.

Aos meus filhos, por meio dos

quais, Deus me fez feliz.

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas e Instituições que colaboraram na execução deste trabalho, este é o momento de agradecer a todos, em especial gostaria de citar Luis Antonio Fernandes de Oliveira, Neusa Augusto Pereira da Silva e Roseli Arbach Fernandes de Oliveira com os quais eu e minha família pudemos contar nos momentos mais difíceis. O que muito ajudou também foi ter um orientador experiente, capaz, dedicado, e que, ao final, mostrou-se melhor ainda como amigo, Jorge Aragona.

Minha esposa Ama e meus filhos Rafael e Lucas foram imprescindíveis em todos os momentos; sem tê-los como fonte motivadora, jamais teria conseguido finalizar a jornada.

Queria registrar finalmente, que ao longo do período de confecção deste trabalho, pude vivenciar muitas experiências. Além de sofrimentos e alegrias, elas me proporcionaram crescimento matemático, humano e espiritual. Agradeço a Deus por ter me sustentado, e ter-Se dado a conhecer ao longo do trajeto.

Ilha Solteira, junho de 2000

Marcelo Reicher Soares

RESUMO

Neste trabalho estudamos alguns problemas associados à álgebra das funções holomorfas generalizadas, estabelecemos uma nova abordagem por meio de funções holomorfas estritas e elementos híbridos. Discutimos o conceito de Domínio de Holomorfia Generalizado e apresentamos teoremas de extensão para funções holomorfas generalizadas. Tratamos também de Equações Diferenciais Parciais Lineares de 1ª ordem analíticas com coeficientes constantes.

ABSTRACT

In this work some problems associated with algebra of the generalized holomorphic functions are studied. It was developed an approach by means of strict holomorphic functions and hybrid elements. The concept of Generalized Holomorphy Domain was discussed and theorems of extension for generalized holomorphic functions were presented. Analytical Linear Partial Differential Equations of the first order with constant coefficients were also discussed.

ÍNDICE

Página

INTRODUÇÃO	i
ÍNDICE DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES.....	iv
 CAPÍTULO 1 - A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU.....	 1
1.1 DEFINIÇÕES E ALGUMAS PROPRIEDADES BÁSICAS	1
1.2 A $\mathbf{C}$ -ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS GENERALIZADAS	6
1.3 O CONJUNTO DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS ESTRITAS	22
 CAPÍTULO 2 - FUNÇÕES HÍBRIDAS NA ÁLGEBRA DE FUNÇÕES GENERALIZADAS E TEOREMAS DE EXTENSÃO	 31
2.1 ELEMENTOS HÍBRIDOS EM $\mathbf{G}(\Omega)$	31
2.2 DOMÍNIO DE HOLOMORFIA GENERALIZADO	45
2.3 TEOREMAS DE EXTENSÃO	54

CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE 1ª

ORDEM ANALÍTICAS COM COEFICIENTES

CONSTANTES64

3.1 TEOREMAS DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES.....64

3.2 CONSIDERAÇÕES ULTERIORES77

BIBLIOGRAFIA82

INTRODUÇÃO

Em 1906 F. Hartogs descobriu o primeiro exemplo exibindo a notável propriedade de extensão de funções holomorfas em mais de uma variável ([Har]). Hartogs descobriu o ponto inicial de uma genuína teoria de várias variáveis complexas, na qual o novo e fundamental conceito de Domínio de Holomorfia e as várias noções de convexidade usadas para caracterizá-lo vieram a ser indispensáveis ([Hör 1;2], [Nac], [Ran]).

De 1906 até os dias de hoje, muitos resultados fundamentais foram obtidos e a teoria clássica muito desenvolveu-se. Na última década, houve também um grande e rápido crescimento de um novo ramo da análise não linear conhecido como “Teoria Não Linear de Funções Generalizadas” (ou mais simplesmente, Funções Generalizadas) ([Col 2; 3]) e esforços foram feitos no sentido de tratar a Teoria de Funções de Várias Variáveis Complexas no contexto das Funções Generalizadas ([Ara4], [CoGa], [Col 1]). Dando prosseguimento a esses esforços, apresentamos este trabalho que consiste em três capítulos, dos quais fazemos uma explanação sucinta a partir de agora.

No Capítulo 1, parágrafos 1 e 2, procuramos coletar e ordenar logicamente os principais resultados sobre funções holomorfas generalizadas que utilizamos na tese e que

estão espalhados por diversos artigos ([Ara 1; 2; 3; 5], [Arco]). Na totalidade destes artigos a exposição é feita para a álgebra de Colombeau como apresentada em [ArBi] (a qual chamaremos “full” álgebra); aqui procuramos indicar o caminho para demonstrar tais resultados na álgebra simplificada que utilizamos. Fazemos uma demonstração mais pormenorizada da propriedade de feixe para $\mathbf{HG}(\cdot)$ (Proposição 1.2.4) e do Teorema de Extensão de Hartogs Generalizado Simplificado (Teorema 1.2.11). No parágrafo 3, introduzimos um conjunto de notações que serão utilizadas em todo trabalho, enunciemos e provamos alguns resultados que incluem-se em uma abordagem nova da $\mathbf{C}$ -álgebra das funções holomorfas generalizadas, abordagem esta feita por meio dos elementos estritos e estritíssimos (Definições 1.3.1).

No Capítulo 2, parágrafo 1, definimos elementos híbridos como aqueles que combinam comportamentos $\mathbf{C}^\infty$ e estrito em um mesmo aberto e discutimos a existência de tais elementos em $\mathbf{G}(\Omega)$. Para obtenção de alguns elementos híbridos interessantes, construímos um novo tipo de função de corte: a “Função de corte de Heaviside”, que tem existência em $\mathbf{G}(\Omega)$ e queda “instantânea” de 1 para 0, o que é impossível em $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$. É exibido um elemento $G \in \mathbf{G}(\Omega)$ que mistura um comportamento holomorfo estrito e um comportamento holomorfo clássico, com domínio de existência em uma parte aberta não vazia de Ω . A partir desse elemento, somos conduzidos à discussão, no parágrafo 2, do conceito de Domínio de Holomorfia Generalizado (Definição 2.2.1) e da relação deste conceito com a existência ou não de elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$. Introduzimos uma nova $\mathbf{C}$ -álgebra $\mathbf{HG}_r(\Omega)$ para discutirmos, a partir dela, as impossibilidades de

elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$, conforme sejam os comportamentos dos abertos V e Ω . No parágrafo 3, abordamos dois Teoremas de extensão de funções holomorfas generalizadas, sendo que o primeiro deles é uma nova versão para o Teorema de extensão de Hartogs, e o segundo é uma versão generalizada para um resultado clássico de 1943, devido a S. Bochner e F. Severi ([Sha]; Theorem 2, p.169). Para a operacionalização deste último resultado, trabalhamos em uma álgebra de funções holomorfas generalizadas definidas no fecho de um conjunto aberto ([Ara 5]) e utilizamos o núcleo de Bochner-Martinelli, bem como a representação de uma função holomorfa utilizando tal núcleo.

No Capítulo 3, parágrafo 1, resolvemos uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes em $\mathbf{C}$, do tipo: (I) $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f$, onde $\frac{\partial}{\partial z_j}$ é o operador derivação parcial complexo (Definição em: Capítulo 1 pag. 8), $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ e Ω é um aberto de $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 2$) que contém o fecho de um outro aberto X que é $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo e convexo. Esta é a versão generalizada de um resultado feito em [Hör 1], Theorem 6.3.2. Enquanto no caso clássico é exigido que o aberto X seja $\mathbf{C}$ -convexo, no caso generalizado a solução se dá em abertos menos arbitrários. Para a demonstração no caso generalizado, utilizamos fortemente resultados sobre o operador $\bar{\partial}$ generalizado ([Ara 1; 2; 3], [ArCo]). No parágrafo 2, fazemos algumas considerações sobre a existência de soluções estritas para a equação (I), bem como discutimos o que esperar de (I) quando os coeficientes ao invés de em $\mathbf{C}$, estão na álgebra $\overline{\mathbf{C}}$.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

$\overset{\circ}{\cup}$ indica a união disjunta, isto é, $A \overset{\circ}{\cup} B$ indica que: $A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$

$A := B$ significa que A está sendo definido como sendo igual a B

$\mathbf{N}$ página 1

$\mathbf{R}$ página 1

$\mathbf{C}$ página 1

$\mathbf{K}$ página 1

$\mathbf{I} :=]0, 1[\subset \mathbf{R}$ página 1

$A \setminus B := \{ x \in A \mid x \notin B \}$

$\mathbf{C}^m(\Omega)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ indica o conjunto das funções m vezes continuamente diferenciável

Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

$\partial^\alpha u(\varepsilon, x)$ página 2

$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ denota os elementos de $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ que têm suporte compacto contido em Ω

$\|\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ página 2

$K \subset\subset X$ página 2

$\mathbf{G}(\Omega)$ página 3

$\overline{K}$ página 4

$\mathbf{H}(\Omega)$ página 5

$\mathbf{HG}(\Omega)$ página 8

$\mathbf{HG}_e(\Omega)$ página 23

$\mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ página 23

$\mathbf{H}(\Omega)^*$ página 25

(V, Ω) é par admissível,.....página 32

$\mathbf{HG}_V(\Omega)$ página 47

$\text{supp}\varphi :=$ suporte da função φ

$\partial A :=$ fronteira ou bordo do conjunto A

$\text{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A} :=$ interior do conjunto A

$\overline{A} :=$ fecho do conjunto A

$|z| = \left(\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i \right)^{\frac{1}{2}}$, para $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$

$B_r(z_0) := \{ z \in \mathbf{C}^n \text{ tal que } |z - z_0| < r \}$, bola aberta com centro $z_0 \in \mathbf{C}^n$ e raio $r > 0$.

CAPÍTULO 1

A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU

Iniciamos este capítulo apresentando as definições básicas e as notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

1.1 DEFINIÇÕES E ALGUMAS PROPRIEDADES BÁSICAS

No que segue, Ω denotará um aberto de $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{K}$ denotará indistintamente o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$, ou o conjunto dos números complexos $\mathbf{C}$; $\mathbf{N}$ denotará o conjunto dos inteiros não negativos, e $I :=]0, 1] \subset \mathbf{R}$.

O símbolo $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ denotará o conjunto das funções com derivadas parciais de todas as ordens contínuas em Ω .

DEFINIÇÃO 1.1.1 Denotaremos por $\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{K}]$ o conjunto das funções

$\hat{u} : I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ para as quais $\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$.

NOTAÇÃO 1.1.2 Se $\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega, \mathbf{K}]$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ então $\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, x)$ denotará

$$(\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, \cdot))(x) \text{ e } \partial^\alpha \hat{u} := \frac{\partial^{|\alpha|} \hat{u}}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}, \text{ onde } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

DEFINIÇÃO 1.1.3 Denotaremos por $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]$ o conjunto dos elementos $\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega, \mathbf{K}]$ para os quais vale: $\forall K \subset\subset \Omega$ (K está contido em Ω , e é compacto), $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$, $\exists \sigma \in \mathbf{R}$ tal que $\|\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, \cdot)\|_K := \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, x)| = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, \cdot)\|_K}{\varepsilon^\sigma} = 0.$$

DEFINIÇÃO 1.1.4 Denotaremos por $\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{K}]$ o conjunto dos elementos $\hat{u} \in \mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]$ para os quais vale: $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$ temos $\|\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

OBSERVAÇÕES 1.1.5

- (i) O conjunto $\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{K}]$, munido das operações usuais de soma e produto de funções, e produto de elementos de $\mathbf{K}$ por função, é uma $\mathbf{K}$ -álgebra, $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]$ é uma subálgebra de $\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{K}]$, $\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{K}]$ é um ideal de $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]$.
- (ii) Os elementos em $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]$ são chamados de funções moderadas; os elementos de $\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{K}]$ são chamados de funções nulas.

DEFINIÇÃO 1.1.6 A álgebra de Colombeau das funções generalizadas sobre Ω é

definida por $\mathbf{G}(\Omega, \mathbf{K}) := \frac{\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{K}]}{\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{K}]}$.

OBSERVAÇÕES 1.1.7

- (i) No que segue $\mathbf{K}$ ficará subentendido, de modo que usaremos uma notação simplificada: $\mathcal{E}[\Omega]$; $\mathcal{E}_M[\Omega]$; $\mathcal{N}[\Omega]$; $\mathbf{G}[\Omega]$.
- (ii) Existe uma inclusão de $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ em $\mathbf{G}(\Omega)$ ela é tal que $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \tilde{f} = \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega]$ e $\hat{f}(\varepsilon, x) = f(x)$, $\forall (\varepsilon, x) \in I \times \Omega$. Isso permite-nos escrever $\mathbf{C}^\infty(\Omega) \subset \mathbf{G}(\Omega)$.

DEFINIÇÕES 1.1.8

- (i) Denotaremos por $\mathcal{E}(\mathbf{K})$ o conjunto das funções $\hat{z}: I \longrightarrow \mathbf{K}$.
- (ii) Denotaremos por $\mathcal{E}_M(\mathbf{K})$ o conjunto das funções $\hat{z} \in \mathcal{E}(\mathbf{K})$ para as quais $\exists \sigma \in \mathbf{R}$ tal que $|\hat{z}(\varepsilon)| = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
- (iii) Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathbf{K})$ o conjunto das funções $\hat{z} \in \mathcal{E}_M(\mathbf{K})$ para as quais: $\forall \sigma \in \mathbf{R}$ vale $|\hat{z}(\varepsilon)| = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

OBSERVAÇÕES 1.1.9

- (i) $\mathcal{E}(\mathbf{K})$ é uma $\mathbf{K}$ -álgebra; $\mathcal{E}_M(\mathbf{K})$ é uma subálgebra de $\mathcal{E}(\mathbf{K})$ e $\mathcal{N}(\mathbf{K})$ é um ideal de $\mathcal{E}_M(\mathbf{K})$.
- (ii) Os elementos em $\mathcal{E}_M(\mathbf{K})$ são chamados de elementos moderados; os elementos de $\mathcal{N}(\mathbf{K})$ são chamados de elementos nulos.

DEFINIÇÃO 1.1.10 A $\mathbf{K}$ -álgebra $\overline{\mathbf{K}}$ é definida por

$$\overline{\mathbf{K}} := \frac{\mathcal{E}_M(\mathbf{K})}{\mathcal{N}(\mathbf{K})}.$$

OBSERVAÇÕES 1.1.11

- (i) É fácil ver que as definições acima são equivalentes àquelas dadas em [ArBi] para as funções generalizadas simplificadas. No artigo [ArBi], os resultados são feitos para a álgebra de Colombeau, que aqui trataremos por “full” álgebra e denotaremos $\mathbf{G}_f$. As versões dos resultados em $\mathbf{G}_f$ são, em geral, traduzidos trivialmente para $\mathbf{G}$; quando isso não ocorrer, mencionaremos e, se necessário, refaremos as demonstrações.
- (ii) Temos uma inclusão natural de $\mathbf{K}$ em $\overline{\mathbf{K}}$ e de $\overline{\mathbf{K}}$ em $\mathbf{G}(\Omega)$; no primeiro caso, dado $r \in \mathbf{K}$ associamos a r a classe de $\hat{r} \in \mathcal{E}_M(\mathbf{K})$ para o qual $\hat{r}(\varepsilon) = r$, $\forall \varepsilon \in \mathbf{I}$; já, no segundo caso, dado o elemento $r = \hat{r} + \mathcal{N}(\mathbf{K})$ em $\overline{\mathbf{K}}$ associamos a ele o

elemento que tem como representante $\hat{z} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ para o qual $\hat{z}(\varepsilon, x) = \hat{r}(\varepsilon)$, $\forall (\varepsilon, x) \in I \times \Omega$. Estas aplicações nos permite escrever $\mathbf{K} \subset \overline{\mathbf{K}} \subset \mathbf{G}(\Omega)$.

TEOREMA 1.1.12 $\mathbf{G}(., \mathbf{K})$ é um feixe fino de $\mathbf{K}$ -álgebra sobre $\mathbf{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO Ver [ArBi] Theorema 2.3.2. $\square$

Daremos agora a definição clássica de Domínio de Holomorfia, conceito que trataremos, na versão generalizada, no Capítulo 2. Usaremos o símbolo $\mathbf{H}(\Omega)$ para denotar a $\mathbf{C}$ -álgebra das funções holomorfas clássicas, onde $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ é um aberto qualquer não vazio.

DEFINIÇÃO 1.1.13 Um aberto conexo $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ é um Domínio de Holomorfia se e somente se é impossível encontrar dois conjuntos abertos conexos Ω_1 e Ω_2 em $\mathbf{C}^n$ com as seguintes propriedades:

(a) $\Omega \cap \Omega_1 \supset \Omega_2 \neq \emptyset$; $\Omega_1 \not\subset \Omega$;

(b) para toda $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ existe $f_1 \in \mathbf{H}(\Omega_1)$ (necessariamente única) tal que $f|_{\Omega_2} = f_1|_{\Omega_2}$.

Muitas são as caracterizações dos Domínios de Holomorfia; a mais conhecida delas é aquela que provém da resposta ao Problema de Levi, isto é, Ω é Domínio de

Holomorfia se e somente se é Pseudoconvexo (ver [Ran] ou [Hör 2] ou [Kra] ou [Nac]). Outras caracterizações importantes, que também podem ser encontradas na bibliografia citada acima, são: Ω é Domínio de Holomorfia se e somente se

- (i) A equação $\bar{\partial}u = f$ pode ser resolvida em Ω para toda $(0,q)$ -forma $\bar{\partial}$ -fechada f com coeficientes em $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ ([Kra] p.108).
- (ii) Existe uma função $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ que não pode ser estendida analiticamente além de Ω ([Hör 2] Theorem 2.5.5), ou ainda, Existe $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que f é completamente singular em $\partial\Omega$ ([Nac], p.52).

OBSERVAÇÃO 1.1.14 A respeito da equivalência (ii) acima, queremos esclarecer que, se $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ e $\eta \in \partial\Omega$, dizemos que η é um ponto regular para f se existem abertos conexos Ω_1 e $\Omega_2 \subset \mathbf{C}^n$ com $\emptyset \neq \Omega_2 \subset \Omega \cap \Omega_1$, $\eta \in \Omega_1$ e $f_1 \in \mathbf{H}(\Omega_1)$ tal que $f|_{\Omega_2} = f_1|_{\Omega_2}$; η é um ponto singular para f , se tais Ω_1 e Ω_2 não existem. Nós diremos que f é completamente singular em $\partial\Omega$ se todos os pontos de $\partial\Omega$ são singulares para f . Dizemos ainda que f tem domínio de existência holomorfa, ou simplesmente que, f tem domínio de existência, em Ω , no caso de f ser completamente singular em $\partial\Omega$.

1.2 A $\mathbf{C}$ -ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS GENERALIZADAS

No que segue, Ω denotará um aberto de $\mathbf{C}^n$. Daremos as definições e enunciaremos os resultados necessários para o nosso trabalho.

Identificamos $\mathbf{C}^n$ com $\mathbf{R}^{2n}$, por meio da aplicação natural $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \rightarrow (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$, onde $z_j = x_j + iy_j$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Assim todo aberto de $\mathbf{C}^n$ é um aberto de $\mathbf{R}^{2n}$, de tal forma que temos definida $\mathbf{G}(\Omega, \mathbf{C})$, a qual denotaremos também por $\mathbf{G}(\Omega)$.

Para definirmos a $\mathbf{C}$ -álgebra das funções holomorfas generalizadas, precisamos do conceito de formas diferenciais generalizadas, que brevemente recordamos aqui (ver [Ara 4] exemplo 7.2.3, e [Ara 3] p.477). As notações aqui estabelecidas serão utilizadas até o final deste trabalho.

Para todo $\nu \in \mathbf{N}^*$ tal que $\nu \leq n$ consideramos o conjunto H_ν de multi-índices $I = (i_1, \dots, i_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$ tais que $1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq n$, e as formas diferenciais $dz^I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_\nu}$; $d\bar{z}^I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_\nu}$ onde $I = (i_1, \dots, i_\nu) \in H_\nu$.

Dados $p, q \in \mathbf{N}^*$ tal que $p \leq n$ e $q \leq n$, definimos $B_{p,q} := \{dz^I \wedge d\bar{z}^J \mid I \in H_p \text{ e } J \in H_q\}$, e, no caso onde $p \in \mathbf{N}^*$, $p \leq n$ e $q = 0$ (respectivamente $q \in \mathbf{N}^*$, $q \leq n$ e $p = 0$), nós consideramos $B_{p,0} := \{dz^I \mid I \in H_p\}$ (respectivamente $B_{0,q} := \{d\bar{z}^J \mid J \in H_q\}$).

Dados $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tal que $p \leq n$, $q \leq n$ e $p + q > 0$, uma forma diferencial generalizada de tipo (p, q) sobre Ω é qualquer elemento que pertence ao $\mathbf{G}(\Omega)$ -módulo livre sobre $B_{p,q}$. Esse módulo é denotado por $\mathbf{G}_{(p,q)}(\Omega)$. O $\mathbf{G}(\Omega)$ -módulo livre sobre a

união (disjunta) dos conjuntos $B_{r,s}$ com $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$ e $r+s > 0$ é denotado por

$\mathbf{G}_{[p,q]}(\Omega)$ e claramente temos que $\mathbf{G}_{[p,q]}(\Omega) = \bigoplus \mathbf{G}_{(r,s)}(\Omega)$.

Definimos $\mathbf{G}_{(0,0)}(\Omega) = \mathbf{G}(\Omega)$ e $\mathbf{G}_{(p,q)}(\Omega) = \{0\}$ caso $p > n$ ou $q > n$. Se $p, q \leq n$ e $p+q > 0$, todo $f \in \mathbf{G}_{(p,q)}(\Omega)$ pode ser escrito de modo único como

$$f = \sum_{I \in H_p, J \in H_q} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Se $f \in \mathbf{G}(\Omega)$, nós denotamos por df o elemento de $\mathbf{G}_{[1,1]}(\Omega)$, definido por

$$df := \partial f + \bar{\partial} f, \quad \text{onde} \quad \partial f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j; \quad \bar{\partial} f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

A extensão das definições dos operadores d , ∂ e $\bar{\partial}$ para formas diferenciais generalizadas arbitrárias, bem como a definição do produto exterior $f \wedge g$ para $f \in \mathbf{G}_{(p,q)}(\Omega)$ e $g \in \mathbf{G}_{(r,s)}(\Omega)$ é idêntico ao caso clássico (ver [ArCo] § 8), é fácil checar que $d^2=0$; $\partial^2=0$; $\bar{\partial}^2=0$ e $\partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial=0$ como no caso clássico.

DEFINIÇÃO 1.2.1 Uma função holomorfa generalizada sobre o aberto não vazio $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ é um elemento $f \in \mathbf{G}(\Omega)$ para o qual $\bar{\partial}f=0$.

NOTAÇÃO 1.2.2 Denotaremos por $\mathbf{HG}(\Omega)$ a $\mathbf{C}$ -álgebra de todas as funções holomorfas generalizadas.

OBSERVAÇÕES 1.2.3 Dado um aberto não vazio $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, é trivial verificar que:

- (i) $\mathbf{C} \subset \overline{\mathbf{C}} \subset \mathbf{HG}(\Omega)$, (ver Observação 1.1.11 (ii)).
- (ii) $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{HG}(\Omega)$, basta lembrar que $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{C}^\infty(\Omega) \subset \mathbf{G}(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 1.2.4 $\mathbf{HG}(\cdot)$ é um feixe de $\mathbf{C}$ -álgebras sobre $\mathbf{C}^n$.

DEMONSTRAÇÃO

- (i) Sejam $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ família de abertos de $\mathbf{C}^n$ tal que $\Omega := \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$; $f, g \in \mathbf{HG}(\Omega)$ tais que $f|_{\Omega_\alpha} = g|_{\Omega_\alpha}$, $\forall \alpha \in \Gamma$, então como $\mathbf{HG}(\Omega) \subset \mathbf{G}(\Omega)$, segue que $f, g \in \mathbf{G}(\Omega)$ e, pelo Teorema 1.1.12, temos que $f = g$.

- (ii) Sejam $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ família de abertos de $\mathbf{C}^n$; $f_\alpha \in \mathbf{HG}(\Omega_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Gamma$ tais que $f_\alpha|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta} = f_\beta|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta}$ sempre que $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$, como $f_\alpha \in \mathbf{G}(\Omega_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Gamma$, segue do Teorema 1.1.12, que $\exists f \in \mathbf{G}(\Omega)$ onde $\Omega := \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$ tal que

$$f|_{\Omega_\alpha} = f_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Gamma. \text{ Uma vez que } \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right)_{|_{\Omega_\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f|_{\Omega_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f_\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \Gamma$$

e $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, por (i) segue que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, logo $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$.

De (i) e (ii) segue que $\mathbf{HG}(\cdot)$ é feixe. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.2.5 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, temos que

$$\mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{HG}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO Segue de [Ara 4] proposição 10.1.3 e de [ArBi] Remarks 8.1.3(d). $\square$

Enunciaremos agora resultados importantes para o estudo de $\mathbf{HG}(\Omega)$. Tais resultados encontram-se demonstrados para a “full” álgebra $\mathbf{G}_f$, a transposição das demonstrações para a álgebra que trabalhamos aqui (simplificada) é trivial, mesmo porque, a inclusão de $\mathbf{G}$ em $\mathbf{G}_f$ garante a validade da maioria deles, exceto o Teorema de Extensão de Hartogs cuja demonstração será feita ainda neste parágrafo.

TEOREMA 1.2.6 Sejam $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) aberto conexo, $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$. Se $U \subset \Omega$ é um aberto não vazio para o qual $f|_U = 0$ então $f = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Usa-se [ArBi] Remarks 8.1.3(d) e [Ara 4] Theorem 10.3.2. $\square$

O resultado expresso por este último teorema é conhecido por Princípio do Prolongamento analítico generalizado simplificado; ele é utilizado na demonstração da versão generalizada simplificada de um dos importantes teoremas clássicos, a saber, o Teorema de Extensão de Hartogs.

A demonstração do Teorema de Extensão de Hartogs generalizado simplificado será feita aqui, pois ela ilustrará como se dá a transposição de uma demonstração da “full” álgebra para a álgebra simplificada, e principalmente porque ela é necessária, tendo em vista que a inclusão da álgebra simplificada (com a qual trabalhamos aqui) na álgebra “full” dada em [ArBi] 8.1.3(d), não tem porque, necessariamente, levar a $\mathbf{C}$ -álgebra das funções holomorfas generalizadas simplificadas sobrejetoramente na $\mathbf{C}$ -álgebra das funções holomorfas generalizadas.

No que segue, $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ denotará o conjunto das funções $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ para as quais o suporte de φ , que denotaremos por $\text{supp} \varphi$, está contido em Ω , e é compacto.

LEMA 1.2.7 Se $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{C})$, então a função $u: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ dada por

$$u(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \psi(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

é de classe $\mathbf{C}^\infty$ em $\mathbf{C}$ e $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \psi$.

DEMONSTRAÇÃO Caso particular do theorem 1.2.2 em [Hör 2]. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.2.8 No próximo Lema, vamos precisar da definição de suporte de uma função generalizada e tal definição é análoga à definição clássica; assim, se $f \in \mathbf{G}(\Omega)$ e $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ é a família de todos os abertos $\Omega_\alpha \subset \Omega$ para os quais $f|_{\Omega_\alpha} = 0$,

temos que o suporte de f , também denotado $\text{supp } f$, é definido por $\text{supp } f := \Omega \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha)$ (ver [Ara 4] p47).

LEMA 1.2.9 Sejam $f_1 \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ com suporte compacto, $K \subset\subset \mathbf{C}^n$ tal que $\text{supp } f_1 \subset \overset{\circ}{K}$,

e seja $\hat{f}_1$ um representante de f_1 tal que $\hat{f}_1(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}_0^\infty(\overset{\circ}{K})$, $\forall \varepsilon \in I$. Então a função

$$\hat{v}: I \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \quad \text{dada por} \quad \hat{v}(\varepsilon, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \hat{f}_1(\varepsilon, \zeta, z_2, \dots, z_n) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z_1}$$

$\forall (\varepsilon, z) \in I \times \mathbf{C}^n$, está bem definida e tem as seguintes propriedades:

- (i) $\hat{v} \in \mathcal{E}[\mathbf{C}^n]$;
- (ii) $\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{z}_1} = \hat{f}_1$ em $I \times \mathbf{C}^n$;
- (iii) $\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{z}_j}(\varepsilon, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{z}_j}(\varepsilon, \zeta + z_1, \dots, z_n) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}, \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times \mathbf{C}^n, \forall j \in \{2, \dots, n\}$;
- (iv) $\hat{v} \in \mathcal{E}_M[\mathbf{C}^n]$.

DEMONSTRAÇÃO A primeira consideração que faremos é a respeito da existência

de um representante $\hat{f}_1$ de f_1 tal que $\hat{f}_1(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}_0^\infty(\overset{\circ}{K})$, $\forall \varepsilon \in I$. Tomamos $\alpha \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{C}^n)$, tal

que, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\alpha \equiv 1$ em uma vizinhança W de $\text{supp } f_1$, com $\text{supp } \alpha \subset \overset{\circ}{K}$. Seja

$\beta := 1 - \alpha$ então $\beta|_W = 0$; além disso $f_1 = (\alpha + \beta) \cdot f_1 = \alpha f_1 + \beta f_1$, e temos $\beta f_1 = 0$, pois $\beta = 0$ em $\text{supp } f_1$.

Se $\hat{g}$ é um representante qualquer de f_1 , teremos que $f_1 = \alpha f_1 = \alpha \hat{g} + \mathcal{N}[\mathbf{C}^n]$, e para todo $\varepsilon \in I$ vale $\text{supp}[(\alpha \hat{g})(\varepsilon, \cdot)] \subset \text{supp } \alpha \subset \subset \overset{\circ}{K}$. Tomamos então $\hat{f}_1(\varepsilon, z) := (\alpha \hat{g})(\varepsilon, z) = \alpha(z) \cdot \hat{g}(\varepsilon, z)$, $\forall (\varepsilon, z) \in I \times \mathbf{C}^n$, e $\hat{f}_1$ será como queremos.

Para cada $\varepsilon \in I$ arbitrário fixo, $\hat{f}_1(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{C}^n)$, segue do Lema 1.2.7 que $\hat{v}$ está bem definida, e da derivação sob o sinal de integração vem que $\hat{v}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ assim vale (i).

A asserção (ii) segue diretamente do Lema 1.2.7, quando consideramos para $(\varepsilon, w) \in I \times \mathbf{C}^n$ arbitrário fixo, $\psi(\zeta) = \hat{f}_1(\varepsilon, \zeta, w_2, \dots, w_n)$ e $u(w_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \psi(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - w_1}$.

$$\begin{aligned} \text{(De fato: } \quad \hat{v}(\varepsilon, w) &= u(w_1) \quad \text{ assim } \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{z}_1}(\varepsilon, w) = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1}(w_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \hat{f}_1(\varepsilon, \zeta, w_2, \dots, w_n) \frac{\partial \zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - \cdot} \right) (w_1) = \psi(w_1) = \hat{f}_1(\varepsilon, w), \quad \forall (\varepsilon, w) \in I \times \mathbf{C}^n. \end{aligned}$$

A asserção (iii) segue, após a mudança de variáveis $\eta = \zeta - z_1$, da derivação sob o sinal de integração. Após a mudança de variável mencionada, temos que

$$\hat{v}(\varepsilon, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \hat{f}_1(\varepsilon, z_1 + \eta, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial \eta \wedge \partial \bar{\eta}}{\eta}, \text{ e se } z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}), \text{ onde}$$

$z_j = x_{2j-1} + i x_{2j}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ e ∂_x^α é um operador de derivação parcial arbitrário, temos

que $\partial_x^\alpha \hat{v}(\varepsilon, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \partial_x^\alpha \hat{f}_1(\varepsilon, \eta + z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta}$, e da moderação de $\hat{f}_1$ resultará

imediatamente a moderação de $\hat{v}$, e assim vale (iv). $\square$

O próximo teorema (Ehrenpreis generalizado) é importante na demonstração do Teorema de Extensão de Hartogs generalizado simplificado. Faremos aqui alguns comentários sobre sua demonstração e a ligação desta demonstração com o Lema 1.2.9.

TEOREMA 1.2.10 Seja $f \in \mathbf{G}_{(0,1)}(\mathbf{C}^n)$ com $n \geq 2$, suponha que f tem suporte compacto e que $\bar{\partial} f = 0$. Então existe uma única $v \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ de suporte compacto tal que $\bar{\partial} v = f$.

DEMONSTRAÇÃO Daremos aqui apenas uma idéia da demonstração que se encontra em [Ara 2] Proposition 1.2. O que queremos realçar é o fato de $f = \sum_{j=1}^n f_j d\bar{z}_j$ ter suporte compacto implicar a existência de um compacto $K \subset \mathbf{C}^n$ tal que $\text{supp}(f_j) \subset \mathring{K}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Na demonstração do Lema 1.2.9, vimos que podemos escolher representante, $\hat{f}_j$ de f_j , tais que $\hat{f}_j(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathring{K}), \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

O elemento $v \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ para o qual $\bar{\partial} v = f$, será então, a classe do seguinte elemento moderado que foi construído no Lema 1.2.9:

$$\hat{v}: I \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C} \quad \text{tal} \quad \text{que,} \quad \hat{v}(\varepsilon, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \hat{f}_1(\varepsilon_1, \zeta, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial \zeta \wedge \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z_1}$$

$$\forall (\varepsilon, z) = (\varepsilon, (z_1, \dots, z_n)) \in I \times \mathbf{C}^n. \quad \square$$

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Extensão de Hartogs generalizado simplificado:

TEOREMA 1.2.11 Sejam $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto, $n \geq 2$, $K \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \setminus K$ é conexo.

Então para cada $u \in \mathbf{HG}(\Omega \setminus K)$ existe uma única $\bar{u} \in \mathbf{HG}(\Omega)$ tal que $\bar{u}|_{\Omega \setminus K} = u$.

DEMONSTRAÇÃO Seja W um aberto tal que: $K \subset W \subset \bar{W} \subset\subset \Omega$ e $\chi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$

verificando as condições $0 \leq \chi \leq 1$ e $\chi|_W \equiv 1$. Consideremos as seguintes funções

generalizadas: $u_1 := (1 - \chi|_{\Omega \setminus K}) \cdot u \in \mathbf{G}(\Omega \setminus K)$ e $u_2 := 0 \in \mathbf{G}(W)$.

Pelo Teorema 1.1.12, existe $u_0 \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $u_0|_{\Omega \setminus K} = u_1$ e $u_0|_W = u_2$. Mostraremos

ser possível determinar $v \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ de modo que $\bar{u} := u_0 - v|_\Omega$ seja a solução procurada.

É claro que $\bar{\partial} u_0 = \begin{cases} -u \bar{\partial} \chi, & \text{em } \Omega \setminus K \\ 0, & \text{em } W \end{cases}$; assim, podemos definir uma forma

diferencial generalizada com suporte compacto $f \in \mathbf{G}_{(0,1)}(\mathbf{C}^n)$ dada por

$$f = \sum_{j=1}^n f_j d\bar{z}_j := \begin{cases} -u \bar{\partial} \chi, & \text{em } \Omega \setminus K \\ 0, & \text{em } W \cup (\mathbf{C}^n \setminus \text{supp}(\chi)) \end{cases},$$

$$\text{isto é, } f_j = \begin{cases} -u \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j}, & \text{em } \Omega \setminus K \\ 0, & \text{em } W \cup (\mathbf{C}^n \setminus \text{supp}(\chi)) \end{cases}.$$

Como $n \geq 2$ e $\bar{\partial}f = 0$, pelo Teorema 1.2.10 existe uma única $v \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ de suporte compacto tal que $\bar{\partial}v = f$ em $\mathbf{C}^n$, pela definição de f segue que $v \in \mathbf{HG}(\mathbf{C}^n \setminus \text{supp}(\chi))$.
 Sejam X a componente conexa não limitada de $\mathbf{C}^n \setminus \text{supp} \chi$ e $\Sigma := X \cap (\mathbf{C}^n \setminus \text{supp}(v))$.
 As relações $v \in \mathbf{HG}(X)$, $v|_{\Sigma} = 0$ e $\Sigma \subset X$ mostram (Teorema 1.2.6) que $v|_X = 0$,
 donde $v|_{X \cap \Omega} = 0$. Definindo $\bar{u} := u_0 - v|_{\Omega}$, temos que
 $\bar{\partial} \bar{u}|_{\Omega \setminus K} = \bar{\partial} u_0|_{\Omega \setminus K} - \bar{\partial} v|_{\Omega \setminus K} = \bar{\partial} u_0|_{\Omega \setminus K} - f|_{\Omega \setminus K} = 0$, e também que
 $\bar{\partial} \bar{u}|_W = \bar{\partial} u_0|_W - \bar{\partial} v|_W = 0 - f|_W = 0$; portanto, segue que $\bar{u} \in \mathbf{HG}(\Omega)$.

Por outro lado, a definição de $\bar{u}$ e a relação $v|_{X \cap \Omega} = 0$ implicam que
 $\bar{u}|_{X \cap \Omega} = u_0|_{X \cap \Omega} = (1 - \chi) \cdot u|_{X \cap \Omega} = u|_{X \cap \Omega}$, como $\Omega \setminus K$ é conexo, $X \cap \Omega$ é parte aberta não vazia de $\Omega \setminus K$, segue do Teorema 1.2.6 que $\bar{u}|_{\Omega \setminus K} = u$. $\square$

Dada $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto qualquer não vazio, a princípio, não podemos afirmar muito sobre os representantes $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ de f .

Na verdade podemos ter situações bastante interessantes ou mesmo estranhas como a que veremos a seguir:

OBSERVAÇÕES 1.2.12

(i) Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio ($n \geq 1$), existe $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ que tem um representante $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$, para o qual $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$ porém $f \notin \mathbf{H}(\Omega)$.

De fato: seja $\hat{f}: I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ definida por $\hat{f}(\varepsilon, z) = \varepsilon$, $\forall (\varepsilon, z) \in I \times \Omega$ então

temos que $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$; além disso, dado $\forall K \subset\subset \Omega$, teremos que

$\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^{-1})$ assim $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$. Já se tomarmos um compacto não vazio

qualquer $K \subset\subset \Omega$ teremos que $\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_K \neq o(\varepsilon^2)$, assim $\hat{f} \notin \mathcal{N}[\Omega]$.

Consideramos $f = \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{G}(\Omega)$ e observamos que

$$\bar{\partial}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}_j} + \mathcal{N}[\Omega] \right) d\bar{z}_j = 0, \quad \text{pois} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}_j}(\varepsilon, z) = \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}_j}(\varepsilon, \cdot) \right)(z) = 0$$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$; portanto, $f \in \mathbf{HG}(\Omega) \setminus \{0\}$ e $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$. Resta-nos

mostrar que $f \notin \mathbf{H}(\Omega)$. Para isso utilizaremos a proposição 1.2.5 e mostraremos

que $f \notin \mathbf{C}^\infty(\Omega)$. Suponha por absurdo que $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$; então $\exists \psi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$(\hat{f} - \psi) \in \mathcal{N}[\Omega]$. Tomando-se um ponto arbitrário $z_0 \in \Omega$ e fazendo

$K := \{z_0\} \subset\subset \Omega$, $\alpha = 0 \in \mathbf{N}^n$ e $\sigma = 1 \in \mathbf{R}$ teríamos que

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|(\hat{f} - \psi)(\varepsilon, \cdot)\|_K}{\varepsilon^1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\varepsilon - \psi(z_0)|}{\varepsilon}; \quad \text{logo, existe } \eta > 0 \text{ tal que}$$

$$\frac{|\varepsilon - \psi(z_0)|}{\varepsilon} < 1, \quad \forall \varepsilon \in]0, \eta[. \quad \text{Assim} \quad |\psi(z_0)| < 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in]0, \eta[, \quad \text{e pela}$$

arbitrariade de z_0 teríamos que $\psi=0$, porém já vimos que $f \neq 0$. Assim, $f \notin \mathbf{H}(\Omega)$.

(ii) Com cálculos análogos aos feitos acima, podemos mostrar que $\hat{g}: I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$

com $\hat{g}(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon}$ é tal que $g = \hat{g} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{HG}(\Omega) \setminus \mathbf{H}(\Omega)$ e

$\hat{g}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$. Note que temos então que $f \cdot g = 1 \in \mathbf{H}(\Omega)$.

(iii) É trivial observar que, na verdade, para os exemplos f e g construídos anteriormente tem-se $f = c \in \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{HG}(\Omega)$ e $g = c' \in \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{HG}(\Omega)$.

Quando temos elementos $u \in \mathcal{E}[\Omega]$ para os quais $u(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$, a verificação da moderação ou nulidade ficam bastante facilitados como vemos na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1.2.13 Sejam $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto e $u: I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, tal que $u(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$. Então:

(i) $u \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ se, e somente se, para cada $K \subset\subset \Omega$ existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que

$$\|u(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

(ii) $u \in \mathcal{N}[\Omega]$ se, e somente se, para qualquer $K \subset\subset \Omega$ e $\forall \sigma \in \mathbf{R}$ temos

$$\|u(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

DEMONSTRAÇÃO [Ara 1] Lema 3, ou [Sor] Remark 1.5. $\square$

Muitos dos resultados que virão a seguir neste trabalho, pedem que os abertos envolvidos tenham propriedades que garantam às funções holomorfas generalizadas f , nele definidas, comportamento muito especial. Possuir representante $\hat{f}$ para o qual $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ seja holomorfa clássica, $\forall \varepsilon \in I$, numa parte aberta “grande” do aberto em questão, é uma propriedade que facilita certas demonstrações e torna outras possíveis.

Teremos a validade da propriedade acima citada, em domínios $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexos, o qual definimos a seguir.

DEFINIÇÃO 1.2.14 Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ um domínio limitado, dizemos que Ω é $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo, se existir uma função ρ de classe $\mathbf{C}^\infty$ e estritamente plurisubharmônica em uma vizinhança aberta $\tilde{\Omega}$ de $\overline{\Omega}$, tal que

$$\Omega = \{ z \in \tilde{\Omega} / \rho(z) < 0 \} \text{ e}$$

$$\partial\Omega = \{ z \in \tilde{\Omega} / \rho(z) = 0 \}.$$

Seguem resultados fundamentais para este trabalho, que usam fortemente a $\mathbf{C}^\infty$ -estrito pseudoconvexidade em suas hipóteses.

TEOREMA 1.2.15 Sejam $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) domínio $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexo, V um aberto contendo $\overline{\Omega}$, e $f \in \mathbf{HG}(V)$. Então existe $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ tal que $f|_\Omega = \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega]$ e $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{I}$.

DEMONSTRAÇÃO Análoga a [Ara 1] theorem 2. $\square$

TEOREMA 1.2.16 Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ ($n \geq 2$) domínio $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo, V um aberto contendo $\overline{\Omega}$ e $f \in \mathbf{G}_{(0,1)}(V)$ com $\overline{\partial}f = 0$ em V . Então existe $u \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $\overline{\partial}u = f$ em Ω .

DEMONSTRAÇÃO Análoga a [Ara 3] Theorem 3.2. $\square$

Para $n=1$ vale resultado análogo ao último teorema.

TEOREMA 1.2.17 Seja Ω aberto limitado de $\mathbf{C}$, V um aberto contendo $\overline{\Omega}$ e $f \in \mathbf{G}(V)$. Então existe $u \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f|_\Omega$.

DEMONSTRAÇÃO Análoga a [Ara 2] Proposition 1.1. $\square$

Um outro resultado importante que será utilizado no Capítulo 3 é o problema de Cousin no contexto generalizado que envolve a seguinte

DEFINIÇÃO 1.2.18 Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto. O primeiro problema de Cousin no sentido **G** (respectivamente sentido **HG**) é o seguinte:

[C G 1] (respectivamente **[C HG 1]**) Dada uma cobertura aberta $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de Ω e uma família $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in S}$, onde $S := \{(\alpha, \beta) \in \Gamma \times \Gamma / \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset\}$ verificando as condições:

[D G 1] (respectivamente **[D HG 1]**) $f_{\alpha\beta} \in \mathbf{G}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ (respectivamente

$f_{\alpha\beta} \in \mathbf{HG}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$) sempre que $(\alpha, \beta) \in S$,

[D₂] $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha} = 0$ em $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, $\forall (\alpha, \beta) \in S$,

[D₃] $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0$ em $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \cap \Omega_\gamma$, sempre que esta intersecção é não vazia;

encontrar uma família $(f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ satisfazendo as condições:

[S G 1] (respectivamente **[S HG 1]**) $f_\alpha \in \mathbf{G}(\Omega_\alpha)$ (respectivamente $f_\alpha \in \mathbf{HG}(\Omega_\alpha)$) para cada $\alpha \in \Gamma$,

[S₂] $f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta$ em $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ sempre que $(\alpha, \beta) \in S$.

Podemos agora enunciar o

TEOREMA 1.2.19 Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbf{C}^n$, então:

- (1) O problema $[C \mathbf{G} 1]$ tem uma solução.
- (2) As seguintes condições são equivalentes:
 - (i) O problema $[C \mathbf{HG} 1]$ tem uma solução;
 - (ii) Para toda $f \in \mathbf{G}_{(0,1)}(\Omega)$ verificando $\bar{\partial}f=0$, existe $u \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $\bar{\partial}u=f$.

DEMONSTRAÇÃO Análoga a [Ara 2] Theorem 2.6. $\square$

1.3 O CONJUNTO DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS ESTRITAS

Quando consideramos $\mathbf{HG}(\Omega)$, pensamos em uma $\mathbf{C}$ –álgebra que contém propriamente a $\mathbf{C}$ –álgebra $\mathbf{H}(\Omega)$. O quanto $\mathbf{HG}(\Omega)$ é “maior” que $\mathbf{H}(\Omega)$ é algo que ainda não está determinado, isto é, que tipos de elementos podemos encontrar em $\mathbf{HG}(\Omega)$, além dos que já tínhamos em $\mathbf{H}(\Omega)$? A discussão desse aspecto da teoria das funções holomorfas generalizadas está longe de ser simples, uma vez que até mesmo na teoria clássica, isto é, em $\mathbf{H}(\Omega)$ é muito difícil construir funções ([Kra] p12).

Procuramos, nesta seção, descrever de forma organizada os elementos de $\mathbf{HG}(\Omega) \setminus \mathbf{H}(\Omega)$ que conhecemos.

DEFINIÇÕES 1.3.1

- (i) $\mathbf{HG}_e(\Omega)$ denotará o conjunto dos elementos $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ tal que $f \notin \mathbf{H}(\Omega)$, um elemento desse conjunto será chamado de função holomorfa generalizada estrita.
- (ii) $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ denotará o conjunto dos elementos $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ tal que $f|_V \notin \mathbf{C}^\infty(V)$, $\forall V \subset \Omega$ aberto, $V \neq \emptyset$, um elemento desse conjunto será chamado de função holomorfa generalizada estritíssima.

OBSERVAÇÕES 1.3.2 Da Proposição 1.2.5 segue que:

- (i) $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega) \subset \mathbf{HG}_e(\Omega)$.
- (ii) $\mathbf{HG}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \dot{\cup} \mathbf{HG}_e(\Omega)$ (união disjunta).

Uma vez que $\overline{\mathbf{C}} \subset \mathbf{HG}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \dot{\cup} \mathbf{HG}_e(\Omega)$, estudaremos como $\overline{\mathbf{C}}$ se distribui nessa união disjunta.

Ao longo desta seção, consideraremos indistintamente os representantes de um elemento $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}$ e sua imagem em $\mathbf{HG}(\Omega)$, isto é, se $\lambda = \hat{\lambda} + \mathcal{N}(\mathbf{C})$, escreveremos indistintamente $\hat{\lambda}(\varepsilon, z) = \hat{\lambda}(\varepsilon)$, $\forall (\varepsilon, z) \in \mathbf{I} \times \Omega$. Isto também será feito para $f \in \mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{HG}(\Omega)$, isto é, $\hat{f}(\varepsilon, z) = f(z)$, $\forall (\varepsilon, z) \in \mathbf{I} \times \Omega$.

PROPOSIÇÃO 1.3.3 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, temos que $\mathbf{H}(\Omega) \cap \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$.

DEMONSTRAÇÃO Obviamente $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}(\Omega) \cap \overline{\mathbf{C}}$.

Seja então $\lambda = \hat{\lambda} + \mathcal{N}(\mathbf{C}) \in \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{H}(\Omega)$, então $\lambda = f$, com $f \in \mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{HG}(\Omega)$ e $(\hat{\lambda} - f) \in \mathcal{N}[\Omega]$. Na definição 1.1.4, tomemos o compacto $K := \{z_0\}$, z_0 arbitrário em Ω ; $\alpha = 0 \in \mathbf{N}^n$ e $\sigma = 0 \in \mathbf{R}$, teremos então que

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |(\hat{\lambda} - f)(\varepsilon, z_0)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\hat{\lambda}(\varepsilon) - f(z_0)|, \quad \text{logo} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{\lambda}(\varepsilon) = f(z_0).$$

Como z_0 é arbitrário, segue que, $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{\lambda}(\varepsilon) = f(z_0)$, isto é,

$$\lambda = f \equiv f(z_0) \in \mathbf{C}. \quad \square$$

COROLÁRIO 1.3.4 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, temos que

$$\mathbf{HG}_e(\Omega) \cap \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}.$$

DEMONSTRAÇÃO Óbvio do fato de $\overline{\mathbf{C}} \subset \mathbf{HG}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \cup \mathbf{HG}_e(\Omega)$ e da Proposição 1.3.3. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.3.5 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, conexo, temos que

$$\mathbf{HG}_e(\Omega) \cap \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C} \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\lambda = \hat{\lambda} + \mathcal{N}(\mathbf{C}) \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$ e suponha que $\lambda_{|\cdot} \in \mathbf{C}^\infty(V)$, para algum aberto não vazio $V \subset \Omega$. Então existe $\psi \in \mathbf{C}^\infty(V)$ tal que $(\hat{\lambda}_{|\cdot} - \psi) \in \mathcal{N}[V]$.

Na definição 1.1.4 tomemos $K := \{z_0\}$, z_0 arbitrário em V ; $\alpha = 0 \in \mathbf{N}^n$ e $\sigma = 0 \in \mathbf{R}$.

Então $0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| (\hat{\lambda}_{|\cdot} - \psi)(\varepsilon, z_0) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \hat{\lambda}(\varepsilon) - \psi(z_0) \right|$. Logo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{\lambda}(\varepsilon) = \psi(z_0)$ e,

dessa forma, $\lambda_{|\cdot} = \psi(z_0) \in \mathbf{C}$.

Pelo Teorema 1.2.6, segue que $\lambda = \psi(z_0) \in \mathbf{C}$ contrariando a hipótese. $\square$

COROLÁRIO 1.3.6 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, conexo, temos que

$$\overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{HG}_{ee}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}.$$

DEMONSTRAÇÃO Dada proposição 1.3.5 e da observação 1.3.2 (i), segue que

$\overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C} \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega) \subset \mathbf{HG}_e(\Omega)$. Agora utilizando o corolário 1.3.4 vem que

$\overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C} \subset \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{HG}_{ee}(\Omega) \subset \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{HG}_e(\Omega) = \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$, donde o resultado. $\square$

Assim sendo, as funções holomorfas generalizadas que obtemos, a partir das constantes não clássicas, são todas funções holomorfas estritíssimas. Um outro modo de obter funções holomorfas generalizadas estritas é o de multiplicar elementos de $\overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$ por elementos de $\mathbf{H}(\Omega)^* := \mathbf{H}(\Omega) \setminus \{0\}$; veremos que as funções assim obtidas também são estritíssimas.

PROPOSIÇÃO 1.3.7 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, conexo, temos que

$$(\overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}) \cdot \mathbf{H}(\Omega)^* \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO Tomemos $\lambda = \hat{\lambda} + \mathcal{N}(\mathbf{C}) \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$ e $f \in \mathbf{H}(\Omega)^*$. Se existisse aberto não vazio $V \subset \Omega$, tal que $(\lambda \cdot f)|_V = \psi \in \mathbf{C}^\infty(V)$, como $f \neq 0$, do Teorema 1.2.6, temos necessariamente que $f|_V \neq 0$. Assim existe $z_0 \in V$ e $B = B_r(z_0) \subset V$ tal que $f(z) \neq 0, \forall z \in B$. Teríamos então que $(\lambda \cdot f)|_B = \lambda|_B \cdot f|_B = \psi|_B$, logo

$$\lambda|_B = \left(\frac{\psi|_B}{f|_B} \right) \in \mathbf{C}^\infty(B), \text{ porém a proposição 1.3.5 nos diz que } \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C} \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega),$$

assim temos uma contradição. Portanto, $(\lambda \cdot f) \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$. $\square$

Podemos provar ainda, usando a mesma técnica que utilizamos na última proposição que

PROPOSIÇÃO 1.3.8 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio, conexo, temos que

$$\mathbf{HG}_{ee}(\Omega) \cdot \mathbf{H}(\Omega)^* \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO Análoga à da proposição 1.3.7, bastando substituir $\lambda \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$

por $h = \hat{h} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$. $\square$

Os elementos de $\mathbf{HG}_e(\Omega)$ que conhecemos, na verdade, encontram-se em $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$; obviamente existem funções em $\mathbf{HG}(\Omega)$, aquelas que surgem de Teoremas de existência como, por exemplo, no Teorema de Extensão de Hartogs generalizado simplificado, que não sabemos dizer se estão em $\mathbf{H}(\Omega)$, $\mathbf{HG}_e(\Omega)$, $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$, ou se são híbridos, isto é, se misturam comportamento clássico e estrito no mesmo aberto. Como veremos no Capítulo 2, o principal elemento híbrido que buscamos é um que esteja em $\mathbf{HG}_e(\Omega)$ sem estar em $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$; este é um problema que ainda está em aberto, e é uma dentre as versões possíveis de um conhecido problema proposto por Colombeau:

“ Holomorfia generalizada mais um pouco de holomorfia clássica implicam holomorfia clássica ? ”

Mais precisamente:

[PC] Dados Ω e V abertos conexos em $\mathbf{C}^n$ tal que $\emptyset \neq V \subsetneq \Omega$, se

$$f \in \mathbf{HG}(\Omega) \text{ e } f|_V \in \mathbf{H}(V), \text{ então } f \in \mathbf{H}(\Omega)?$$

O conjunto $\mathbf{HG}_e(\Omega)$ não possui uma estrutura algébrica própria, mesmo porque, para as operações de soma e produto que tornam $\mathbf{HG}(\Omega)$ um anel, os elementos neutros 0 e 1 estão em $\mathbf{H}(\Omega)$ (a Observação 1.2.12 (ii) mostra que $\mathbf{HG}_e(\Omega)$ não é fechado para o produto). O comportamento de alguns produtos que envolvem elementos de

$\mathbf{HG}_e(\Omega)$ são descritos na próxima proposição; esta também mostrará que $\mathbf{HG}(\Omega)$ não é um domínio de integridade.

PROPOSIÇÃO 1.3.9 Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ um aberto conexo não vazio, então:

- (1) Se $f, g \in \mathbf{H}(\Omega)$, $f \neq 0$ e $f \cdot g = 0$, então $g = 0$.
- (2) Se $f \in \mathbf{HG}_e(\Omega)$ (e, portanto, $f \neq 0$) e $g \in \mathbf{H}(\Omega)$, então $f \cdot g = 0 \Leftrightarrow g = 0$.
- (3) Existem $f, g \in \mathbf{HG}_e(\Omega)$ tais que $f \cdot g = 0$. Em consequência, $\mathbf{HG}(\Omega)$ não é um anel de integridade.

DEMONSTRAÇÃO

- (1) Como $f \neq 0$ existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$, assim existe $r > 0$ tal que:
 $B = B_r(z_0) \subset \Omega$ e $f(z) \neq 0, \forall z \in B$. Uma vez que $f \cdot g = 0$ segue que
 $(f \cdot g)|_B = f|_B \cdot g|_B = 0$ logo $g|_B \equiv 0$, pelo princípio de prolongamento analítico segue que $g = 0$.
- (2) Se $g = 0$, é óbvio que $f \cdot g = 0$. Suponha então que $f \cdot g = 0$ com $g \neq 0$, então existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g(z_0) \neq 0$; logo existe $B = B_r(z_0) \subset \Omega$ com $g(z) \neq 0, \forall z \in B$. Como $f \cdot g = 0$, teríamos que $(f \cdot g)|_B = f|_B \cdot g|_B = 0$. Isso implicaria $f|_B = 0$; pelo Teorema 1.2.6, seguiria que $f = 0$, porém $0 \notin \mathbf{HG}_e(\Omega)$. Assim, $g = 0$.

- (3) Consideremos as seguintes funções $\hat{f}, \hat{g}: I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ tais que, para quaisquer $(\varepsilon, z) \in I \times \Omega$ sejam válidos

$$\hat{f}(\varepsilon, z) := \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } \varepsilon \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } \varepsilon \text{ é irracional} \end{cases};$$

$$\hat{g}(\varepsilon, z) := \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } \varepsilon \text{ é irracional} \\ 0, & \text{se } \varepsilon \text{ é racional} \end{cases}.$$

É trivial verificar que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{E}_{\lambda'}[\Omega]$ (basta notar que, para $\forall K \subset\subset \Omega$, temos

$$\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_K = \|\hat{g}(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^{-1})); \text{ também é trivial verificar que } \hat{f}, \hat{g} \notin \mathcal{N}[\Omega] \text{ (basta}$$

notar que, para $\forall K \subset\subset \Omega$, temos $\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_K \neq o(\varepsilon^{-1}) \neq \|\hat{g}(\varepsilon, \cdot)\|_K$). Dessa

forma, teremos que $f = \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega]$, $g = \hat{g} + \mathcal{N}[\Omega]$ são elementos de $\mathbf{HG}(\Omega)$,

$f \neq 0$, $g \neq 0$, porém $f \cdot g = 0$.

Segue de (1) e (2) acima que, necessariamente, teremos $f, g \in \mathbf{HG}_e(\Omega)$. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.3.10 Os elementos f e g , na demonstração da proposição 1.3.9

(3), na verdade estão em $\overline{\mathbf{C}}$. Eles não estão em $\mathbf{C}$, pois $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}(\Omega)$ e $\mathbf{H}(\Omega)$ é domínio

de integridade. Assim, $f, g \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C} \subset \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ (proposição 1.3.5).

Na observação 1.2.12 (iii), vimos dois elementos c e c' que estavam em $\overline{\mathbf{C}} \subset \mathbf{HG}(\Omega)$ e que tinham a propriedade de $c \cdot c' = 1$; essa propriedade será importante na próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 1.3.11 Dado $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto não vazio conexo, teremos que

$$\mathbf{HG}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{HG}_e(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO Dada $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$, podemos ter $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ ou $f \in \mathbf{HG}_e(\Omega)$; para o último caso, temos trivialmente $f = 1 \cdot f$. Já, se $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, consideramos $c = \hat{c} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ tal que $\hat{c}(\varepsilon, z) = \varepsilon$, $\forall (\varepsilon, z) \in I \times \Omega$ (ver observação 1.2.12(i)); então devido à proposição 1.3.8 segue que $(c \cdot f) \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ (note que, por motivos óbvios, estamos considerando $f \in \mathbf{H}(\Omega)^*$).

Tomamos agora $c' = \hat{c}' + \mathcal{N}(\mathbf{C}) \in \overline{\mathbf{C}} \subset \mathbf{HG}(\Omega)$ (ver observação 1.2.12 (iii)) tal

que $\hat{c}'(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall \varepsilon \in I$; daí teremos que $f = c' \cdot (c \cdot f)$. $\square$

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES HÍBRIDAS NA ÁLGEBRA DE FUNÇÕES GENERALIZADAS E TEOREMAS DE EXTENSÃO

A inclusão $\mathbf{HG}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \overset{\circ}{\cup} \mathbf{HG}_e(\Omega) \subset \mathbf{G}(\Omega)$ oferece-nos a possibilidade de pensarmos em elementos híbridos, isto é, elementos que, em partes do aberto Ω , tenham um comportamento clássico (isto é, sejam $\mathbf{C}^\infty$) e, em outras partes do mesmo aberto, tenham um comportamento generalizado estrito (isto é, não sejam $\mathbf{C}^\infty$). A existência de tais elementos enriquece, sobretudo, nosso universo de funções e sugere-nos questionamentos acerca das versões generalizadas de conceitos fundamentais na teoria clássica, como, por exemplo, o conceito de Domínio de Holomorfia Generalizado.

2.1 ELEMENTOS HÍBRIDOS EM $\mathbf{G}(\Omega)$

Iniciamos este capítulo exibindo dois exemplos de funções híbridas em $\mathbf{G}(\Omega)$.

Usaremos a notação seguinte: se V e Ω são abertos de $\mathbb{C}^n$, diremos que (V, Ω) é um par admissível (p.a.) se V e Ω são conexos não vazios para os quais $V \subset \Omega$ e $V \neq \Omega$.

PROPOSIÇÃO 2.1.1 Seja (V, Ω) um par de abertos não vazios de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, tal que $\overline{V} \subset\subset \Omega$; então, existe $g \in \mathbf{G}(\Omega) \setminus \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ tal que $g|_V \in \mathbf{H}(V)$ e $g|_V \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $h \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $h(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, e consideremos um aberto W para o qual $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$; seja então $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi|_W \equiv 1$. Tomamos agora $c \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega)$ e definimos $g := h \cdot [(1 - \varphi)c + 1]$; é óbvio que $g \in \mathbf{G}(\Omega)$, mostremos então que g satisfaz o exigido:

- (i) $g|_V = h|_V \in \mathbf{H}(V)$ e, assim, $g|_V \neq 0$
- (ii) consideremos o aberto $A := (\Omega \setminus \text{supp } \varphi) \neq \emptyset$, então $g|_A \notin \mathbf{C}^\infty(A)$; de fato, se

tivéssemos $g|_A \in \mathbf{C}^\infty(A)$, então como $g|_A = h|_A \cdot c|_A + h|_A$ seguiria

$$c|_A = \frac{g|_A - h|_A}{h|_A} \in \mathbf{C}^\infty(A) \text{ o que é um absurdo. Assim, } g \in \mathbf{G}(\Omega) \setminus \mathbf{C}^\infty(\Omega). \quad \square$$

PROPOSIÇÃO 2.1.2 Dado $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, aberto não vazio, existem abertos A e B não vazios, contidos em Ω com $A \cup B \neq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$, e $g \in \mathbf{G}(\Omega)$ tais que $g|_A \in \mathbf{HG}_e(A)$ e $g|_B \in \mathbf{H}(B)$.

DEMONSTRAÇÃO Sejam $K \subset\subset \Omega$, $h \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega \setminus K)$, $W \subset \Omega$ aberto tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset\subset \Omega$ e $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_W \equiv 1$.

Consideremos agora os seguintes elementos:

$u_1 := (1 - \varphi) \cdot h \in \mathbf{G}(\Omega \setminus K)$ e $u_2 := 0 \in \mathbf{H}(W) \subset \mathbf{G}(W)$, uma vez que $(\Omega \setminus K) \cup W = \Omega$ e que $u_1|_{(\Omega \setminus K) \setminus W} = u_2|_{(\Omega \setminus K) \setminus W}$; segue do Teorema 1.1.12, que existe $g \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $g|_{\Omega \setminus K} = u_1$ e $g|_W = u_2$. Dessa forma, teremos que $g|_W \in \mathbf{H}(W)$, e como

$g|_{\Omega \setminus \text{supp } \varphi} = u_1|_{\Omega \setminus \text{supp } \varphi} = h|_{\Omega \setminus \text{supp } \varphi}$, segue que $g|_{\Omega \setminus \text{supp } \varphi} \in \mathbf{HG}_e(\Omega \setminus \text{supp } \varphi)$.

Basta então tomarmos $A := \Omega \setminus \text{supp } \varphi$ e $B := W$. $\square$

Na última proposição, obtivemos um elemento de $\mathbf{G}(\Omega)$ com um comportamento bastante interessante, que é descrito no diagrama abaixo:

Podemos otimizar o comportamento anterior com um procedimento que resultará na existência de um elemento de $\mathbf{G}(\Omega)$ que será holomorfo generalizado estrito em $\Omega \setminus \overline{B}$ e holomorfo clássico em B , para abertos Ω e B convenientes. O processo de

construção do elemento, acima mencionado, ilustrará a dificuldade na obtenção de elementos híbridos com certos comportamentos iniciais pré-estabelecidos e passará pela construção de uma “função de corte” (cutoff function) só possível de ser obtida em $\mathbf{G}(\Omega)$.

LEMA 2.1.3 Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aberto, $f \in \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{R})$ e $\alpha \in \mathbf{R}$. Definimos

$F_\alpha := \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \alpha\}$ e $A_\alpha := \{x \in \Omega \mid f(x) < \alpha\}$; então, F_α é fechado em Ω , A_α é

aberto e, além disso, $A_\alpha \subset \overset{\circ}{F}_\alpha$ e $\overline{A}_\alpha^\Omega \subset F_\alpha$. Em geral, estas inclusões são estritas, e é indiferente o resultado se substituirmos os sinais $\leq$ e $<$ por $\geq$ e $>$ respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO Trivial exercício de topologia. $\square$

Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aberto e $f \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R})$ verificando as condições:

(a) $A := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} \neq \emptyset$;

(b) $\partial A = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$;

(c) $\Omega \setminus \overline{A} \neq \emptyset$.

OBSERVAÇÕES 2.1.4

(i) É claro que $\partial A \neq \emptyset$; de fato, como A é aberto (Lema 2.1.3), temos que

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus A, \quad \text{se, por absurdo, } \partial A = \emptyset; \quad \text{então, } \overline{A} \setminus A = \emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A = \mathbf{R}^n$, (pois $A \neq \emptyset$); daí teríamos então que $\Omega \setminus \bar{A} = \emptyset$ contrariando (c).

(ii) É claro que $\Omega \setminus \bar{A} = \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}$; de fato, dado $x \in \Omega \setminus \bar{A}$, de (a) e (b), segue que $f(x) < 0$; logo provamos a inclusão $\subset$. Se $x \in \Omega$ é tal que $f(x) < 0$, de (a) e (b) resultaria que $x \notin A$ e $x \notin \partial A$; logo $x \notin A \cup \partial A = \bar{A} \Rightarrow x \in \Omega \setminus \bar{A}$. Conseqüentemente, provamos a inclusão $\supset$, donde a igualdade.

O próximo resultado mostra que, em $\mathbf{G}(\Omega)$, podemos construir funções de corte com “queda instantânea” de 1 para 0, o que não pode ser feito no caso clássico.

PROPOSIÇÃO 2.1.5 Sejam $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aberto e $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$ verificando as condições (a), (b) e (c) precedentes. Então existe $H \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $H|_A = 1$ e $H|_{\Omega \setminus \bar{A}} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Para cada $\varepsilon \in I =]0, 1]$ é possível exibir uma função crescente $g_\varepsilon \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tal que: $0 \leq g_\varepsilon(t) \leq 1$, $\forall (\varepsilon, t) \in I \times \mathbf{R}$; $g_\varepsilon(t) > 0$, $\forall \varepsilon \in I$ e $t > -\varepsilon$; verificando $g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\varepsilon \\ 1 & \text{se } t \geq \varepsilon \end{cases}$; e tal que a função $\hat{h}: I \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$\hat{h}(\varepsilon, t) = g_\varepsilon(t)$, $\forall (\varepsilon, t) \in I \times \mathbf{R}$, seja moderada (ver [Ara 4] exemplo 8.3.4 (a)).

A função $h = \hat{h} + \mathcal{N}[\mathbf{R}] \in \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ é uma função de Heaviside, isto é, tem a função de Heaviside como aspecto macroscópico (basta definir $A: I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$, tal que $A(\varepsilon) = \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in I$ e verificar que $\hat{h}$ satisfaz as quatro condições de [ArVi], Example 1.5(a) p.117).

Consideremos a seguir $\hat{H}: I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\forall (\varepsilon, x) \in I \times \Omega$,

$$\hat{H}(\varepsilon, x) = \hat{h}(\varepsilon, f(x)) = g_\varepsilon(f(x)).$$

Para cada $\varepsilon \in I$ fixado, a função parcial

$$\hat{H}(\varepsilon, \cdot): x \in \Omega \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g_\varepsilon} g_\varepsilon(f(x)) = \hat{h}(\varepsilon, f(x))$$

é claramente de classe $\mathbf{C}^\infty$, pois f e g_ε o são. Além disso, temos que

$$|\hat{H}(\varepsilon, x)| = |\hat{h}(\varepsilon, f(x))| \leq 1, \quad \forall (\varepsilon, x) \in I \times \Omega$$

donde resulta que $\hat{H} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$; definimos então $H = \hat{H} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{G}(\Omega)$.

Resta-nos mostrar que $H|_A = 1$ e $H|_{\Omega \setminus \bar{A}} = 0$, para $A := \{x \in \Omega / f(x) > 0\}$ que por (a)

é não vazio e pelo Lema 2.1.3 é aberto.

- (i) Para mostrarmos que $H_{|A}=1$ basta verificar que $(\hat{H}_{|1 \times A}-1) \in \mathcal{N}[A]$. De fato, dados $K \subset\subset A$ e $\alpha \in \mathbf{N}^n$, tomemos $V \subset A$ aberto para o qual seja válido $K \subset V \subset \bar{V} \subset\subset A$, então $f(\bar{V}) \subset f(A) \subset (0, +\infty)$; assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f(\bar{V}) \subset [\varepsilon_0, +\infty)$ ($f(\bar{V})$ é compacto). Dessa forma, $\forall (\varepsilon, x) \in (]0, \varepsilon_0[\times V)$ teremos $\hat{H}(\varepsilon, x) - 1 = g_\varepsilon(f(x)) - 1 = 0$ o que implicará que $\partial^\alpha (\hat{H}(\varepsilon, \cdot) - 1)(x) = 0$, $\forall (\varepsilon, x) \in (]0, \varepsilon_0[\times K)$, e, portanto, $\|\partial^\alpha (\hat{H}(\varepsilon, \cdot) - 1)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$.
- (ii) Para mostrarmos que $H_{|\Omega \setminus \bar{A}} = 0$ basta verificar que $\hat{H}_{|I \times \Omega \setminus \bar{A}} \in \mathcal{N}[\Omega \setminus \bar{A}]$. De fato, dados $K \subset\subset \Omega \setminus \bar{A}$ e $\alpha \in \mathbf{N}^n$, tomemos $V \subset \Omega \setminus \bar{A}$ aberto para o qual seja válido $K \subset V \subset \bar{V} \subset\subset \Omega \setminus \bar{A}$. Lembrando a Observação 2.1.4 (ii), temos que $f(\bar{V}) \subset f(\Omega \setminus \bar{A}) \subset (-\infty, 0)$; assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f(\bar{V}) \subset (-\infty, -\varepsilon_0]$ ($f(\bar{V})$ é compacto). Dessa forma, seguirá que, para $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $x \in V$, teremos $f(x) < -\varepsilon_0 < -\varepsilon$ e seguirá então que $\hat{H}(\varepsilon, x) = g_\varepsilon(f(x)) = 0$, $\forall (\varepsilon, x) \in (]0, \varepsilon_0[\times V)$. Em particular, teremos $\partial^\alpha \hat{H}(\varepsilon, x) = 0$, $\forall (\varepsilon, x) \in (]0, \varepsilon_0[\times K)$, isto é, $\|\partial^\alpha \hat{H}(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$. $\square$

DEFINIÇÃO 2.1.6 Nas condições da Prop. 2.1.5, a função H será chamada: “Função de corte de Heaviside” para A (que denotamos FCH para A).

OBSERVAÇÃO 2.1.7 Se Ω é um domínio $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexo em $\mathbf{C}^n$, é claro pela Definição 1.2.14, e pela Proposição 2.1.5 que $\exists H \in \mathbf{G}(\tilde{\Omega})$ (onde $\tilde{\Omega}$ é um aberto de $\mathbf{C}^n$, que podemos supor conexo, tal que, $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$) para a qual $H|_{\Omega} = 1$ e $H|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = 0$. É óbvio também que podemos considerar $H \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$.

Na proposição 2.1.2, exibimos um elemento híbrido cujos comportamentos, clássico e estrito, estavam separados por um aberto. Exibiremos agora um elemento de $\mathbf{G}(\Omega)$ cujos comportamentos, clássico e estrito, estão separados apenas pela fronteira de um aberto.

PROPOSIÇÃO 2.1.8 Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ um conjunto $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexo e $\tilde{\Omega} \subset \mathbf{C}^n$ um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Então existe $g \in \mathbf{G}(\tilde{\Omega})$ tal que $g|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathbf{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ e $g|_{\Omega} \in \mathbf{H}(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO Sejam $H \in \mathbf{G}(\tilde{\Omega})$ uma FCH para Ω e $h \in \mathbf{HG}_{ee}(\tilde{\Omega})$. Definimos $g := (1-H) \cdot h \in \mathbf{G}(\tilde{\Omega})$, e teremos então que $g|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = (1-H)|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \cdot h|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = h|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathbf{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ e que $g|_{\Omega} = (1-H)|_{\Omega} \cdot h|_{\Omega} = 0 \in \mathbf{H}(\Omega)$. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.1.9 Se $\tilde{\Omega}$ for conexo, a função g da Proposição 2.1.8 é tal que $g \notin \mathbf{HG}(\tilde{\Omega})$. De fato, se $g \in \mathbf{HG}(\tilde{\Omega})$, como $g|_{\Omega} = 0$, segue do Teorema 1.2.6, que $g = 0$ donde viria que $0 = g|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = h|_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathbf{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ absurdo!

Construiremos agora um elemento que tem muita importância para o estudo que desenvolvemos no parágrafo 2 deste capítulo; ele tem a ver com a possibilidade de extensão estrita, de uma função holomorfa clássica que é completamente singular no bordo de seu domínio de definição (ver Observação 1.1.14). Observemos inicialmente um tipo de elemento muito interessante em $\mathbf{G}(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 2.1.10 Seja (V, Ω) um par de abertos não vazios de $\mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, tal que $\overline{V} \subset\subset \Omega$ então existe $g \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ tal que $g|_V \in \mathbf{H}(V)$, $g|_V \neq 0$ e $g|_{\Omega \setminus \overline{V}} \notin \mathbf{H}(\Omega \setminus \overline{V})$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $h \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $h(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Consideremos o aberto W para o qual $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset\subset \Omega$. Seja então $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi|_W \equiv 1$. Tome $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \setminus \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $f|_A \notin \mathbf{H}(A)$, qualquer que seja $A \subset \Omega$ aberto não vazio (por exemplo, $f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{v=1}^n x_v$, onde $z_v = x_v + iy_v, \forall v \in \{1, \dots, n\}$).

Definindo $g := h \cdot [(1 - \varphi)f + 1]$, é óbvio que $g \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$; mostremos que g satisfaz o exigido:

(i) $g|_V = h|_V \in \mathbf{H}(V)$ e $g|_{\bar{V}} \neq 0$

(ii) Seja $A := \Omega \setminus \text{supp } \varphi$, notemos que $A \subset \Omega \setminus \bar{V}$, e temos

$$g|_A = h|_A f|_A + h|_A \Rightarrow \bar{\partial} g|_A = h|_A \cdot \bar{\partial} f|_A \neq 0, \text{ pois } h(z) \neq 0, \forall z \in A \text{ e } f|_A \notin \mathbf{H}(A);$$

assim, $g|_A \notin \mathbf{H}(A)$ e, conseqüentemente, $g|_{\Omega \setminus \bar{V}} \notin \mathbf{H}(\Omega \setminus \bar{V})$. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.1.11 Note que, na Proposição 2.1.10, não temos controle sobre o fato de g ter ou não domínio de existência holomorfa em V (Observação 1.1.14). É possível, no entanto, obtermos um elemento $g \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, tal que g tenha domínio de existência holomorfa em V . Mais precisamente o seguinte resultado foi provado por D. Catlin ([Cat], ver [Ran] p. 73):

“Seja $V \subset \mathbf{C}^n$ um domínio de holomorfia limitado com bordo de classe $\mathbf{C}^\infty$.

Então existe uma função $g \in \mathbf{H}(V)$ que é restrição a V de uma função $\mathbf{C}^\infty$ em uma vizinhança de $\bar{V}$, e que, contudo, é completamente singular em ∂V ”.

A prova requer alguns resultados profundos acerca da regularidade no bordo, de soluções para as equações de Cauchy-Riemann. Chamaremos uma função com a propriedade da função g acima de função de Catlin associada a V .

LEMA 2.1.12 Sejam V um domínio de holomorfia com ∂V de classe C^∞ em $\mathbf{C}^n$; W um aberto de $\mathbf{C}^n$ tal que $\bar{V} \subset\subset W$; $h \in \mathbf{C}^\infty(W)$ tal que $h|_{\bar{V}} \in \mathbf{H}(V)$ e h é completamente

singular em ∂V . Então não existe nenhum par (ψ, Σ) verificando as duas condições seguintes:

- (a) Σ é um aberto conexo tal que $V \subsetneq \Sigma \subset W$ e $\psi \in \mathbf{H}(\Sigma)$;
- (b) $\psi|_V = h|_V$.

DEMONSTRAÇÃO Observemos inicialmente que h existe, pois é uma função de Catlin associada a V (ver Observação 2.1.11).

Suponha, por absurdo, que existe um par (ψ, Σ) verificando (a) e (b) e fixemos $a \in \Sigma \cap (W \setminus V)$. Se $a \notin \partial V$ então $a \in W \setminus \bar{V}$, dado $b \in V$ arbitrário, como $b \in \Sigma$ e Σ é conexo, existe uma polygonal ρ unindo a e b tal que $\rho \subset \Sigma$. Segue do “teorema da alfândega” que ρ corta ∂V num ponto c , com $c \in \Sigma \cap \partial V$. Se $a \in \partial V$, então $a \in \Sigma \cap \partial V$. Em qualquer caso, concluímos que $\exists \eta \in \Sigma \cap \partial V$ e uma bola aberta B_η de centro η tal que $B_\eta \subset \Sigma$. Definimos $f_\eta := \psi|_{B_\eta} \in \mathbf{H}(B_\eta)$ (por (a)) e, por (b) resulta que $f_\eta|_{B_\eta \cap V} = \psi|_{B_\eta \cap V} = h|_{B_\eta \cap V}$, e h não seria completamente singular em η , o que é absurdo. $\square$

LEMA 2.1.13 Sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ abertos de $\mathbf{C}^n$ tais que $\bar{\Sigma}_1 \subset\subset \Sigma_2 \subset \bar{\Sigma}_2 \subset \Sigma_3$ e $h \in \mathbf{C}^\infty(\Sigma_2)$. Então existe $\tilde{h} \in \mathbf{C}^\infty(\Sigma_3)$ tal que $\tilde{h}|_{\Sigma_1} = h|_{\Sigma_1}$ e $\tilde{h}$ não tem suporte compacto.

DEMONSTRAÇÃO Seja $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Sigma_2)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi|_{\bar{\Sigma}_1} \equiv 1$ então $h_1 := \varphi \cdot h \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$. Observemos que $h|_{\Sigma_3} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Sigma_3)$ e $h|_{\Sigma_1} = h|_{\Sigma_1}$. Seja agora $f \in \mathbf{C}^\infty(\Sigma_3)$ tal que $f(x) \neq 0, \forall x \in \Sigma_3$ e definamos $\tilde{h} := (h|_{\Sigma_3} + (1-\varphi) \cdot f) \in \mathbf{C}^\infty(\Sigma_3)$. Teremos então que $\tilde{h}|_{\Sigma_1} = (h|_{\Sigma_1} + (1-\varphi)|_{\Sigma_1} \cdot f|_{\Sigma_1}) = h|_{\Sigma_1}$ e $\tilde{h}|_{\Sigma_3 \setminus \text{supp } \varphi} = f|_{\Sigma_3 \setminus \text{supp } \varphi}$, logo $\tilde{h}(x) = f(x) \neq 0, \forall x \in \Sigma_3 \setminus \text{supp } \varphi$, logo $\text{supp } \tilde{h}$ não é compacto. $\square$

No próximo resultado, consideraremos um par admissível adequado (V, Ω) , para exibirmos um elemento, a princípio em $\mathbf{G}(\Omega)$, que tem o comportamento híbrido de função holomorfa clássica com domínio de existência em V e função holomorfa generalizada em $\Omega \setminus \bar{V}$.

TEOREMA 2.1.14 Sejam $r, \rho \in \mathbf{R}_+^*$ tais que $0 < r < \rho$; $\Omega := B_\rho(0)$ e $V := B_r(0)$, bolas abertas em $\mathbf{C}^n$. Então existe $G \in \mathbf{G}(\Omega)$ tal que $G|_V \in \mathbf{H}(V)$, $G|_{\Omega \setminus \bar{V}} \in \mathbf{HG}(\Omega \setminus \bar{V})$ e $G|_\Sigma \notin \mathbf{H}(\Sigma)$ qualquer que seja o aberto Σ verificando $V \subsetneq \Sigma \subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO Fixemos $\rho' > \rho$ e consideremos a função de Catlin (ver Observação 2.1.11) h associada à $B_r := B_r(0)$, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} h \in \mathbf{C}^\infty(B_{r+\varepsilon}(0)); h|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r) \quad \text{e} \quad h \text{ é completamente singular em } \partial B_r. \end{array} \right.$$

Pelo Lema 2.1.13, podemos estender h de modo $\mathbf{C}^\infty$ até o $B_{\rho'}(0)$; assim, podemos escrever (indicando ainda por h a extensão $\tilde{h}$):

$$(I') \quad \left\{ h \in \mathbf{C}^\infty(B_{\rho'}(0)); h|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r) \text{ e } h \text{ é completamente singular em } \partial B_r \right\}.$$

Em particular, $h|_{\bar{B}_\rho(0)} \in \mathbf{C}(\bar{B}_\rho(0))$ e, assim, existe $M := \max_{z \in \bar{B}_\rho(0)} |h(z)|$; definindo $\tilde{h} := h + M + 1$, teremos que $|\tilde{h}(z)| \geq 1, \quad \forall z \in \bar{B}_\rho(0)$ (pois $|\tilde{h}(z)| = |M + 1 + h(z)| \geq M + 1 - |h(z)| \geq 1 > 0, \quad \forall z \in \bar{B}_\rho(0)$).

Para $\rho' - \rho > 0$ suficientemente pequeno (por um argumento trivial de continuidade e compacidade) resulta $|\tilde{h}(z)| > 0, \quad \forall z \in B_{\rho'}(0)$.

Como evidentemente $\tilde{h}$ tem todas as propriedades (I'), indicando ainda por simplicidade $\tilde{h}$ por h , podemos escrever

$$(I'') \quad \left\{ \begin{array}{l} h \in \mathbf{C}^\infty(B_{\rho'}(0)); h|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r); h \text{ é completamente singular em } \partial B_r \\ \text{e } h(z) \neq 0, \forall z \in B_{\rho'}(0) \end{array} \right\}$$

e, pelo Lema 2.1.12, temos ainda que vale para h

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Não existe par } (\psi, \Sigma) \text{ verificando as condições (a) e (b) do Lema 2.1.12 (onde} \\ V = B_r \text{ e } W = B_{\rho'}(0) \text{ nas notações do referido Lema).} \end{array} \right.$$

Sejam agora: $f \in \mathbf{HG}_{ee}(B_{\rho'}(0))$ e H uma FCH para B_r (note que H existe devido à Observação 2.1.7).

Consideremos a função $g := h \cdot [f \cdot (1 - H) + 1] \in \mathbf{G}(B_{\rho'}(0))$; então teremos que

$$g|_{B_r} = h|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r) \quad (\text{Já que } H|_{B_r} \equiv 1).$$

Denotando por $U := B_\rho(0) \setminus \overline{B_r}(0)$, teremos que

$$g|_U = h|_U \cdot (f+1)|_U \in \mathbf{G}(U) \setminus \mathbf{C}^\infty(U) \quad (\text{Já que } H|_U \equiv 0).$$

De fato, se $g|_U \in \mathbf{C}^\infty(U)$, então como $h(z) \neq 0, \quad \forall z \in U$ teríamos

$$f|_U = \frac{g|_U - h|_U}{h|_U} \in \mathbf{C}^\infty(U) \text{ o que é impossível, pois } f \text{ é estritíssima. Em resumo:}$$

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} g \in \mathbf{G}(B_\rho(0)); \quad g|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r) \quad \text{e} \quad g|_U \in \mathbf{G}(U) \setminus \mathbf{C}^\infty(U). \end{array} \right.$$

Como $\bar{\partial}g \in \mathbf{G}_{(0,1)}(B_\rho(0))$ e $\bar{\partial}(\bar{\partial}g) = 0$, sabemos (ver Teorema 1.2.16) que existe

$w_0 \in \mathbf{G}(B_\rho(0))$ tal que $\bar{\partial}w_0 = \bar{\partial}g$ em $B_\rho(0)$; segue disso que

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} g|_{B_\rho(0)} - w_0 \in \mathbf{HG}(B_\rho(0)). \end{array} \right.$$

Sejam agora $\chi := 1 - H$ e $w := w_0 \cdot \chi$, então

$G := (g|_{B_\rho(0)} - w) \in \mathbf{G}(B_\rho(0))$, e tem as seguintes propriedades:

(i) Se denotarmos $W := B_\rho(0) \setminus \overline{B_r}(0)$, então

$$G|_W = g|_W - w|_W = g|_W - w_0|_W = (g - w_0)|_W \in \mathbf{HG}(W)$$

(uma vez que $W \subset B_\rho(0)$ e que vale (IV)), pela notação do enunciado do Teorema,

temos que $W = \Omega \setminus \overline{V}$, isto é, $G|_{\Omega \setminus \overline{V}} \in \mathbf{HG}(\Omega \setminus \overline{V})$.

(ii) $G|_{B_r} = g|_{B_r} - w|_{B_r} = g|_{B_r} = h|_{B_r} \in \mathbf{H}(B_r)$, pela notação do enunciado $G|_V \in \mathbf{H}(V)$.

- (iii) Como $G|_V = g|_V = h|_V$, segue de (II) que, para qualquer aberto Σ verificando $V \subsetneq \Sigma \subset \Omega$, teríamos $G|_\Sigma \notin \mathbf{H}(\Sigma)$, e o teorema está demonstrado. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.1.15 Se o elemento $G \in \mathbf{G}(\Omega)$, obtido no último teorema, estiver em $\mathbf{HG}(\Omega)$, seu comportamento único terá um reflexo significativo, tendo em vista que, no teorema, V é um domínio de holomorfia clássica, e $G|_V$ é completamente singular em ∂V ; pelo Lema 2.1.12, $G|_V$ teria extensão necessariamente estrita. Não sabemos, no entanto, responder se G está ou não em $\mathbf{HG}(\Omega)$.

A existência de uma extensão holomorfa generalizada estrita para uma função holomorfa clássica, com domínio de existência em um aberto dado, é ainda um problema em aberto, que passaremos a tratar a seguir. Exibiremos algumas situações para as quais tal extensão é impossível.

2.2 DOMÍNIO DE HOLOMORFIA GENERALIZADO

A possibilidade ou não de exibir elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$ (ver p 31) atinge em cheio o conceito de Domínio de Holomorfia generalizado que formulamos a seguir, conceito este motivado pelo Teorema 2.1.14 e pela Observação 2.1.15.

DEFINIÇÃO 2.2.1 Uma função holomorfa generalizada f sobre Ω é completamente singular em $\eta \in \partial\Omega$ se para toda vizinhança conexa U de η não existe $h \in \mathbf{HG}(U)$ que coincide com f em alguma componente conexa de $U \cap \Omega$. O aberto conexo $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ é um Domínio de Holomorfia Generalizado se existir $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ que é completamente singular em todo ponto $\eta \in \partial\Omega$.

PROPOSIÇÃO 2.2.2 A não existência de elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$ implica que todo Domínio de Holomorfia Clássico é Domínio de Holomorfia Generalizado.

DEMONSTRAÇÃO Se Ω é um domínio de holomorfia clássico, então existe $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ que é completamente singular em $\partial\Omega$ (ver Definição 1.1.13). Se existissem $\eta \in \partial\Omega$, U vizinhança aberta de η e $h \in \mathbf{HG}(U)$ tal que h e f coincidissem em alguma componente conexa de $U \cap \Omega$, então h seria holomorfa clássica em tal componente e, pela Observação 1.1.14, necessariamente, $h \in \mathbf{HG}_e(U)$; assim, h seria híbrida. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.2.3 Analisar a influência da existência de elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$, nos conceitos de Domínios de Holomorfia clássico e generalizado, é bem mais complicado. Podemos adiantar, no entanto, que pontos na fronteira de um aberto, singulares para uma função holomorfa clássica, podem tornar-se regulares (ver

Observação 1.1.14) se forem possíveis extensões generalizadas estritas. Damos, no final deste parágrafo, uma idéia melhor desse assunto.

Estudaremos a impossibilidade de elementos híbridos em $\mathbf{HG}(\Omega)$ a partir de uma $\mathbf{C}$ -álgebra $\mathbf{HG}_V(\Omega)$, obtida, considerando-se certos pares de abertos não vazios (V, Ω) com comportamentos especiais. Seja então a

DEFINIÇÃO 2.2.4 Dado um par de abertos não vazios (V, Ω) com $V \subset \Omega$, definimos :

$$\mathbf{HG}_V(\Omega) := \left\{ f \in \mathbf{HG}(\Omega) \mid f|_V \in \mathbf{H}(V) \right\}.$$

OBSERVAÇÕES 2.2.5 Para qualquer $\mathbf{HG}_V(\Omega)$ temos:

- (i) $\mathbf{HG}_V(\Omega)$ é uma $\mathbf{C}$ -álgebra, e devido à Proposição 1.3.7, não é uma $\overline{\mathbf{C}}$ -álgebra.
- (ii) $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{HG}_V(\Omega)$.
- (iii) $\mathbf{HG}_V(\Omega) \cap \mathbf{HG}_{ee}(\Omega) = \emptyset$.

Note que, se para algum par admissível (V, Ω) tivermos $\mathbf{H}(\Omega) \subsetneq \mathbf{HG}_V(\Omega)$, isso implicará necessariamente que $\mathbf{HG}_{ee}(\Omega) \subsetneq \mathbf{HG}_e(\Omega)$, o que significaria uma resposta negativa para o já mencionado Problema de Colombeau ([PC]).

PROPOSIÇÃO 2.2.6 Dado um par de abertos não vazios (V, Ω) em $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, tal que $V \subset \Omega$; Ω é conexo e Ω é extensão analítica de V , então $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO Recordamos que Ω ser extensão analítica de V significa que para $\forall f \in \mathbf{H}(V)$, $\exists \tilde{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $\tilde{f}|_V = f$.

Queremos mostrar que $\mathbf{HG}_V(\Omega) \subset \mathbf{H}(\Omega)$; de fato, dada $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega) \Rightarrow f|_V \in \mathbf{H}(V)$, logo $\exists \tilde{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $\tilde{f}|_V = f|_V$. Como $V \neq \emptyset$ e Ω é conexo, segue do Teorema 1.2.6 que $f = \tilde{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$. $\square$

EXEMPLO 2.2.7 A partir do Teorema de Extensão de Hartogs (Teorema 1.2.11) e da proposição 2.2.6 obtemos que, se (V, Ω) é um par admissível em $\mathbf{C}^n$, com $n \geq 2$, tal que $\bar{V} \subset\subset \Omega$ e $\Omega \setminus \bar{V}$ é conexo, então teremos necessariamente $\mathbf{HG}_{\Omega \setminus \bar{V}}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 2.2.8 Notemos que, para um par admissível (V, Ω) em $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 2$) tal que $\bar{V} \subset\subset \Omega$ e $\Omega \setminus \bar{V}$ é conexo, teremos Ω como extensão analítica própria de $\Omega \setminus \bar{V}$; porém, Ω não necessariamente será extensão analítica de V (basta tomar Ω e V iguais a bolas abertas).

Uma outra situação que inviabiliza a existência de elementos híbridos é descrita na próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 2.2.9 Seja Ω um aberto conexo de $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$ e $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma seqüência discreta de pontos, 2 a 2 distintos em Ω tal que $z_n \rightarrow b$, quando $n \rightarrow +\infty$, $b \in \overline{\Omega}$, tomando-se $V := \Omega \setminus (\{z_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{b\})$, temos que para o par admissível (V, Ω) vale $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO Consideraremos dois casos:

Caso 1: $b \in \Omega$; neste caso, $K := \{z_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{b\}$ é tal que $K \subset\subset \Omega$ e $V = \Omega \setminus K$ é claramente conexo, segue do Teorema 1.2.11 e da Proposição 2.2.6 que $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)$.

Caso 2: $b \notin \Omega$; seja $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, para cada $n \in \mathbf{N}$ seja $B_n := B_{\delta_n}(z_n) \subset \Omega$, a bola aberta com centro z_n e raio δ_n , para a qual $z_m \in B_n \Leftrightarrow m = n$. Então, como $f|_V \in \mathbf{H}(V)$, segue que $f|_{B_n^*} \in \mathbf{H}(B_n^*)$, onde $B_n^* := B_{\delta_n}^*(z_n) = B_{\delta_n}(z_n) \setminus \{z_n\}$ é a bola aberta perfurada de centro z_n e raio δ_n .

Pela versão clássica do Teorema 1.2.11 (ver [Hör 2] Theorem 2.3.2), temos que existe $\tilde{f} \in \mathbf{H}(B_n)$ tal que $\tilde{f}|_{B_n^*} = f|_{B_n^*}$; segue do Teorema 1.2.6 que

$f|_{B_n} = \tilde{f} \in \mathbf{H}(B_n)$. Uma vez que $\Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n \right) \cup V$; $f|_V \in \mathbf{H}(V)$ e

$f|_{B_n} \in \mathbf{H}(B_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$ segue que $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.2.10 Seja (V, Ω) um par admissível em $\mathbf{C}^n$, $(n \geq 2)$ tal que $\bar{V} \subset\subset \Omega$ e $\Omega \setminus \bar{V}$ é conexo; então não existe $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$ para o qual $f|_{\Omega \setminus \bar{V}} \in \left[(\bar{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}) \cdot \mathbf{H}(\Omega \setminus \bar{V})^* \right]$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ tal que $f|_{\Omega \setminus \bar{V}} \in \left[(\bar{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}) \cdot \mathbf{H}(\Omega \setminus \bar{V})^* \right]$; então existem $c \in \bar{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$ e $h \in \mathbf{H}(\Omega \setminus \bar{V})^*$ tais que $f|_{\Omega \setminus \bar{V}} = c \cdot h$.

Pela versão clássica do Teorema 1.2.11 (ver [Hör 2] Theorem 2.3.2), existe uma única $\tilde{h} \in \mathbf{H}(\Omega)^*$ tal que $\tilde{h}|_{\Omega \setminus \bar{V}} = h$; assim, se definirmos $\tilde{f} := c \cdot \tilde{h} \in \mathbf{HG}(\Omega)$, teremos que $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \bar{V}} = c \cdot (\tilde{h}|_{\Omega \setminus \bar{V}}) = c \cdot h = f|_{\Omega \setminus \bar{V}}$, como $\Omega \setminus \bar{V} \neq \emptyset$ e Ω é conexo segue do Teorema 1.2.6 que $\tilde{f} = f$.

Da Proposição 1.3.7 sabemos que $\tilde{f} \in \mathbf{HG}_{\text{ee}}(\Omega)$; sendo assim $f|_V = \tilde{f}|_V \notin \mathbf{H}(V)$.

Assim, $f \notin \mathbf{HG}_V(\Omega)$. $\square$

Para qualquer par de abertos não vazios (V, Ω) em $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 1)$ com $V \subset \Omega$, existe um “maior” aberto V^* tal que $V \subset V^* \subset \Omega$ e $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$. De fato,

PROPOSIÇÃO 2.2.11 Dado $\mathbf{HG}_V(\Omega)$ existe aberto $V^* \subset \mathbf{C}^n$, ($n \geq 1$), verificando as condições seguintes:

- (i) $V \subset V^* \subset \Omega$;
- (ii) $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$;
- (iii) Se U é um aberto tal que $V \subset U \subset \Omega$ e $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{HG}_U(\Omega)$ então $U \subset V^*$.

DEMONSTRAÇÃO Se definirmos $\Xi := \{W \mid W \text{ é aberto, } V \subset W \subset \Omega \text{ e } \mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{HG}_W(\Omega)\}$, teremos que Ξ não é vazio, pois $V \in \Xi$. Basta tomar $V^* := \bigcup_{W \in \Xi} W$. É óbvio então que são válidas (i) e (iii). Resta-nos mostrar que $\mathbf{HG}_V(\Omega) = \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$; de fato, se $f \in \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$, como $V \subset V^*$ segue que $f|_V \in \mathbf{H}(V)$ e, assim, $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, logo $\mathbf{HG}_{V^*}(\Omega) \subset \mathbf{HG}_V(\Omega)$. Dados $W \in \Xi$ arbitrário fixo e $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, temos, pela definição de Ξ , que $f \in \mathbf{HG}_W(\Omega)$, ou seja, $f|_W \in \mathbf{H}(W)$; pela definição de V^* , segue que $f|_{V^*} \in \mathbf{H}(V^*)$, logo $f \in \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$ e, assim, $\mathbf{HG}_V(\Omega) \subset \mathbf{HG}_{V^*}(\Omega)$. $\square$

Dado um par de abertos não vazios (V, Ω) de $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) com $V \subset \Omega$, para qualquer elemento $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$ está associado um aberto U_f , eventualmente maior que V^* , restrito ao qual f é holomorfa clássica.

DEFINIÇÃO 2.2.12 Se (V, Ω) é um par de abertos não vazios de $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) com $V \subset \Omega$ e $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, definimos:

- (i) $\Sigma_f := \{W \mid W \subset \Omega \text{ é aberto não vazio e } f|_W \in \mathbf{H}(W)\}$;
- (ii) $U_f := \bigcup_{W \in \Sigma_f} W$;
- (iii) $V_* := \text{int} \left(\bigcap_{f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)} U_f \right)$.

PROPOSIÇÃO 2.2.13 Seja (V, Ω) um par de abertos não vazios de $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 1$) com $V \subset \Omega$. São válidos:

- (a) Para toda $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, se $f|_W \in \mathbf{H}(W)$ então $W \subset U_f$; $f|_{U_f} \in \mathbf{H}(U_f)$.
- (b) $V_* = V^*$.

DEMONSTRAÇÃO O item (a) é trivial consequência das definições de Σ_f e de U_f .

Resta-nos mostrar (b). Dada $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$ arbitrária fixa, da Proposição 2.2.11 (ii), segue que $f|_{V^*} \in \mathbf{H}(V^*)$; logo, $V^* \subset U_f$. Da arbitrariedade de f segue que $V^* \subset V_*$. Se mostrarmos que $\mathbf{HG}_{V_*}(\Omega) = \mathbf{HG}_V(\Omega)$, seguirá da Proposição 2.2.11 (iii) que $V_* \subset V^*$; para isto observemos inicialmente que $\forall f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$ temos $V \subset U_f$, logo $V \subset V_*$. Assim, dada $f \in \mathbf{HG}_{V_*}(\Omega)$ como $f|_{V_*} \in \mathbf{H}(V_*)$ segue que $f|_V \in \mathbf{H}(V)$ e $f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$; já se

$f \in \mathbf{HG}_V(\Omega)$, temos que $f|_{U_f} \in \mathbf{H}(U_f)$ e uma vez que $V_* \subset U_f$ segue que $f|_{V_*} \in \mathbf{H}(V_*)$.

Logo, $f \in \mathbf{HG}_{V_*}(\Omega)$. $\square$

Como já dissemos, a existência de um elemento $f \in \mathbf{HG}_{V_*}(\Omega) \cap \mathbf{HG}_e(\Omega)$, para algum par admissível (V, Ω) , é um problema ainda em aberto; com as últimas definições, podemos situar as dificuldades na análise deste problema do seguinte modo:

Se admitirmos a existência de um elemento $f \in \mathbf{HG}_{V_*}(\Omega) \cap \mathbf{HG}_e(\Omega)$ então podemos ter duas situações:

- (i) $\Omega \setminus \overline{U_f} \neq \emptyset$, e, neste caso, teríamos que $f \in \mathbf{HG}_{ee}(\Omega \setminus \overline{U_f})$;
- (ii) $\Omega \setminus \overline{U_f} = \emptyset$ o que implicaria que $\Omega = U_f \dot{\cup} (\Omega \cap \partial U_f)$.

Poderíamos representar tais situações com os desenhos:

Mostrar a impossibilidade de elementos híbridos com tais comportamentos ou exibi-los seria então a solução do problema.

2.3 TEOREMAS DE EXTENSÃO

Neste parágrafo, exibimos dois teoremas de extensão de funções holomorfas generalizadas. O primeiro deles trata da extensão de uma função que, a princípio, é holomorfa generalizada em uma vizinhança da fronteira de um aberto limitado. O resultado abaixo é a versão generalizada de uma das formas usuais do Teorema de extensão de Hartogs.

TEOREMA 2.3.1 Sejam V um aberto limitado de $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, para o qual $\mathbf{C}^n \setminus V$ é conexo, U uma vizinhança aberta de ∂V e $f \in \mathbf{HG}(U)$. Então existem uma vizinhança aberta $U_0 \subset U$ de ∂V e $g \in \mathbf{HG}(V)$ tais que $g|_{U_0 \cap V} = f|_{U_0 \cap V}$.

DEMONSTRAÇÃO Como V é limitado, temos que $\partial V \subset\subset U$. Seja N uma vizinhança compacta de ∂V tal que $N \subset U$ (isto é, $\partial V \subset \overset{\circ}{N}$ e $N \subset\subset U$); tomemos $\alpha \in \mathbf{C}_0^\infty(U)$ tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\alpha \equiv 1$ em N . Se definirmos $D := U \cup V$; $u_1 := \alpha \cdot f \in \mathbf{G}(U)$ e $u_2 := 0 \in \mathbf{G}(V \setminus \text{supp } \alpha)$, teremos que $D = U \cup (V \setminus \text{supp } \alpha)$ e $u_1|_{U \cap (V \setminus \text{supp } \alpha)} = u_2|_{U \cap (V \setminus \text{supp } \alpha)} = 0$, como $\mathbf{G}(\cdot)$ é um feixe (Teorema 1.1.12), existe $F \in \mathbf{G}(D)$ tal que $F|_U = u_1 = \alpha \cdot f$ e $F|_{V \setminus \text{supp } \alpha} = u_2 = 0$.

Definimos agora, a partir de F , um elemento $\psi \in \mathbf{G}_{(0,1)}(\mathbf{C}^n)$ tal que

$$\psi := \begin{cases} \bar{\partial} F & \text{em } V \\ 0 & \text{em } \mathbf{C}^n \setminus V \end{cases},$$

como $\alpha \equiv 1$ em N , temos que $F|_{\overset{\circ}{N}} = f|_{\overset{\circ}{N}}$; logo, $\psi|_{\overset{\circ}{N}} = \bar{\partial} F|_{\overset{\circ}{N}} = \bar{\partial} f|_{\overset{\circ}{N}} = 0$ (uma vez que $N \subset U$ e $f \in \mathbf{HG}(U)$). Assim, ψ está bem definida e como $\text{supp} \psi \subset V$ segue que $\text{supp} \psi \subset \subset \mathbf{C}^n$ (pois V é limitado). Evidentemente $\bar{\partial} \psi = 0$. Segue do Teorema 1.2.10 que existe $u \in \mathbf{G}(\mathbf{C}^n)$ com $\text{supp} u \subset \subset \mathbf{C}^n$ e tal que $\bar{\partial} u = \psi$.

Para qualquer aberto $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbf{C}^n$, para o qual $\psi|_A \equiv 0$ teremos que $u \in \mathbf{HG}(A)$.

Em particular, temos que $\psi \equiv 0$ em $\Sigma := (\mathbf{C}^n \setminus V) \cup \overset{\circ}{N}$, (notemos que Σ é vizinhança aberta de $\mathbf{C}^n \setminus V$, logo de ∂V); assim, $u|_{\Sigma} \in \mathbf{HG}(\Sigma)$.

Se definirmos $K := \text{supp} u \subset \subset \mathbf{C}^n$, obviamente teremos $u|_{\mathbf{C}^n \setminus K} \equiv 0$. Como $\mathbf{C}^n \setminus V$ é conexo e V limitado, dado uma vizinhança aberta conexa W de $\mathbf{C}^n \setminus V$, teremos necessariamente que vale

(i) $W \cap (\mathbf{C}^n \setminus K) \neq \emptyset$ (De fato, se $W \cap (\mathbf{C}^n \setminus K) = \emptyset$, teríamos $W \subset K$ o que é absurdo, pois W é ilimitado e K compacto).

Obviamente podemos supor (ii) $W \subset \Sigma$. Como $u|_{\mathbf{C}^n \setminus K} = 0$, segue que (iii) $u|_{W \cap (\mathbf{C}^n \setminus K)} = 0$. Uma vez que $u|_{\Sigma} \in \mathbf{HG}(\Sigma)$, segue de (i), de (ii), de (iii), de W ser conexo e do Teorema 1.2.6 que (iv) $u|_W = 0$.

Seja então $g := F|_V - u|_V \in \mathbf{G}(V)$. Como $\partial V \subset (\mathbf{C}^n \setminus V)$, e, conseqüentemente, W é uma vizinhança aberta de ∂V , podemos escolher uma vizinhança aberta U_0 de ∂V tal que $U_0 \subset W \cap \overset{\circ}{N}$, donde segue que $\alpha \equiv 1$ em U_0 , como $U_0 \subset W$ segue de (iv) que $u|_{U_0} = 0$.

Teremos então que $g|_{U_0 \cap V} = F|_{U_0 \cap V} - u|_{U_0 \cap V} = F|_{U_0 \cap V} = \alpha|_{U_0 \cap V} \cdot f|_{U_0 \cap V} = f|_{U_0 \cap V}$, e como $\bar{\partial} g = \bar{\partial} F|_V - \bar{\partial} u|_V = \bar{\partial} F|_V - \psi|_V = 0$, segue que $g \in \mathbf{HG}(V)$. $\square$

COROLÁRIO 2.3.2 Se $V \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, é um aberto limitado, para o qual $\mathbf{C}^n \setminus V$ é conexo, U é uma vizinhança aberta conexa de ∂V e $f \in \mathbf{HG}(U)$, então existe $F \in \mathbf{HG}(U \cup V)$ tal que $F|_U = f$.

DEMONSTRAÇÃO Pelo Teorema 2.3.1, temos que existem vizinhança aberta U_0 de ∂V e $g \in \mathbf{HG}(V)$ tais que $g|_{U_0 \cap V} = f|_{U_0 \cap V}$.

Definindo $A := (U \setminus V) \cup U_0$, temos que $A \neq \emptyset$ e $A \subset U$ (ver definição de U_0 na demonstração do Teorema 2.3.1). Para $u_1 := f|_A \in \mathbf{HG}(A)$ e $u_2 := g \in \mathbf{HG}(V)$, como $A \cup V = U \cup V$ e temos $u_1|_{A \cap V} = u_1|_{U_0 \cap V} = f|_{U_0 \cap V} = g|_{U_0 \cap V} = u_2|_{U_0 \cap V} = u_2|_{A \cap V}$, segue da Proposição 1.2.4 que $\exists F \in \mathbf{HG}(U \cup V)$ tal que $F|_A = u_1 = f|_A$, do Teorema 1.2.6 obtemos então que $F|_U = f$. $\square$

Apresentaremos agora um teorema de extensão para funções holomorfas generalizadas que reflete a especificidade do caso de dimensão $n \geq 2$; ele assegura que toda função f (em uma álgebra generalizada que definiremos a seguir) que possui um representante $\hat{f}$ para o qual $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ é holomorfa em “algum sentido” sobre o bordo de um domínio limitado, $\forall \varepsilon I$, pode ser estendida holomorfa generalizadamente para o domínio todo. Estamos “radicalizando” a hipótese do Teorema 2.3.1, onde exigimos que a função fosse holomorfa em um aberto U contendo ∂V , agora partiremos de uma holomorfia em ∂V .

O resultado clássico que corresponde a esta versão generalizada foi feito independentemente em 1943 por S. Bochner e F. Severi (ver [Sha], Theorem 2, p. 169), e é o seguinte:

TEOREMA 2.3.3 Suponha que em $\mathbf{C}^n, n \geq 2$, seja dado um domínio limitado D com bordo $S = \partial D$ de classe $\mathbf{C}^\infty$ e para o qual $\mathbf{C}^n \setminus D$ é conexo. Se uma função $f \in C^1(S)$ satisfaz a equação tangencial de Cauchy-Riemann em todos os pontos de S , então f pode ser estendida holomorficamente para D , e tal extensão será contínua em $\bar{D}$.

DEMONSTRAÇÃO A demonstração está feita em [Sha] Theorem 2, p. 169; enunciamos os passos que lá são executados com a finalidade de tornar a demonstração do caso generalizado mais clara:

- (i) Define-se $\tilde{f}:\mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $\tilde{f}(z) := \int_S f(\zeta) \omega_{BM}(\zeta - z)$.
- (ii) A partir de uma propriedade da forma de Bochner – Martinelli $\omega_{BM}(\zeta - z)$, mostra-se que $\tilde{f}$ é holomorfa em $\mathbf{C}^n \setminus S$.
- (iii) Mostra-se que $\tilde{f}|_{\mathbf{C}^n \setminus \bar{D}} \equiv 0$.
- (iv) Finalmente mostra-se que $\tilde{f}|_S = f$. $\square$

Nossa Versão do Teorema, utilizará uma outra álgebra de funções holomorfas generalizadas simplificadas, aquela definida sobre o fecho de um conjunto aberto e cujas definições básicas damos a seguir (ver [Ara 5]).

Dado Ω aberto não vazio de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$), denotaremos por $\partial\Omega$ o bordo de Ω . Uma função $u: I \times \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ é chamada de 0-moderada se, para cada $K \subset\subset \partial\Omega$ existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que $\|u(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A função $u: I \times \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ é dita ser 0-nula se, para cada $K \subset\subset \partial\Omega$ e para qualquer $\sigma \in \mathbf{R}$, tivermos $\|u(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

É claro que o conjunto $\mathcal{E}_m[\partial\Omega] = \mathcal{E}_m[\partial\Omega, \mathbf{K}] := \{u: I \times \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{K} \mid u \text{ é } 0\text{-moderada e } u(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}(\partial\Omega) \text{ para cada } \varepsilon \in I\}$ é uma $\mathbf{K}$ -álgebra com as operações de soma e produto pontualmente definidas, e o conjunto $\mathcal{N}[\partial\Omega] = \mathcal{N}[\partial\Omega, \mathbf{K}] := \{u \in \mathcal{E}_m[\partial\Omega] \mid u \text{ é } 0\text{-nula}\}$ é um ideal de $\mathcal{E}_m[\partial\Omega]$.

DEFINIÇÃO 2.3.4 $\mathbf{G}^b(\partial\Omega) := \frac{\mathcal{E}_m[\partial\Omega]}{\mathcal{N}[\partial\Omega]}.$

Se fixarmos $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, denotaremos $\mathbf{C}^k(\overline{\Omega})$ a $\mathbf{K}$ -álgebra de todas as funções $f \in \mathbf{C}^k(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha f$ tem uma extensão contínua a $\overline{\Omega}$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$.

Nós definimos a $\mathbf{K}$ -álgebra (operações pontuais) $\mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}] = \mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}; \mathbf{K}] := \{u: I \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbf{K} \mid u(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^k(\overline{\Omega}) \text{ para todo } \varepsilon \in I; u|_{I \times \Omega} \in \mathcal{E}_M[\Omega] \text{ e } u|_{I \times \partial\Omega} \in \mathcal{E}_m[\partial\Omega]\}$; e o ideal de $\mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}]$: $\mathcal{N}_k[\overline{\Omega}] = \mathcal{N}_k[\overline{\Omega}; \mathbf{K}] := \{u \in \mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}] \mid u|_{I \times \Omega} \in \mathcal{N}[\Omega] \text{ e } u|_{I \times \partial\Omega} \in \mathcal{N}[\partial\Omega]\}$; com essas notações temos a $\mathbf{K}$ -álgebra

DEFINIÇÃO 2.3.5 $\mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega}) := \frac{\mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}]}{\mathcal{N}_k[\overline{\Omega}]}$

Por convenção, no caso $k=0$, omitimos o índice k nas notações acima, isto é,

$$\mathbf{G}^b(\overline{\Omega}) := \mathbf{G}_0^b(\overline{\Omega}); \quad \mathcal{E}_M[\overline{\Omega}] := \mathcal{E}_M^0[\overline{\Omega}]; \quad \mathcal{N}[\overline{\Omega}] := \mathcal{N}_0[\overline{\Omega}].$$

Claramente nós temos duas restrições, que são as seguintes: para $f = \hat{f} + \mathcal{N}_k[\overline{\Omega}]$

$${}^k R_{\partial\Omega}^{\overline{\Omega}}: f \in \mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega}) \longrightarrow \hat{f}|_{I \times \Omega} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{G}(\Omega)$$

e
$$B_{\partial\Omega}^k: f \in \mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega}) \longrightarrow \hat{f}|_{I \times \partial\Omega} + \mathcal{N}[\partial\Omega] \in \mathbf{G}^b(\partial\Omega)$$

suas notações serão $f|_{\Omega}$ e $f|_{\partial\Omega}$ respectivamente.

Para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$ nós definimos a aplicação $\mathbf{K}$ -linear

$$\partial^\alpha = \partial_k^\alpha : f \in \mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega}) \longrightarrow \partial^\alpha(f|_\Omega) \in \mathbf{G}(\Omega) \text{ e } \partial^\alpha f \text{ é a derivada de ordem } \alpha \text{ de } f \in \mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega})$$

Se Ω é um aberto de $\mathbf{C}^n$, então temos as definições das seguintes álgebras:

DEFINIÇÕES 2.3.6 Para $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

- (i) $\mathbf{HG}_k(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathbf{G}_k^b(\overline{\Omega}) \mid f|_\Omega \in \mathbf{HG}(\Omega)\}$, se $k=0$ $\mathbf{HG}_0(\overline{\Omega}) := \mathbf{HG}(\overline{\Omega})$;
- (ii) $\mathbf{HG}_{k,*}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathbf{HG}_k(\overline{\Omega}) \mid f \text{ tem um representante } \hat{f} \in \mathcal{E}_M^k[\overline{\Omega}] \text{ para o qual,}$
 $\forall \varepsilon \in I, \hat{f}(\varepsilon, \cdot)|_\Omega \in \mathbf{H}(\Omega)\}$, se $k=0$ $\mathbf{HG}_{0,*}(\overline{\Omega}) := \mathbf{HG}_*(\overline{\Omega})$.

Recordaremos rapidamente a fórmula de representação integral de Bochner-Martinelli (ver [Sha], Theorem 1, p157).

O núcleo de Bochner-Martinelli é definido por

$$\omega_{BM}(\zeta - z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{v=1}^n \frac{(-1)^{v-1}(\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v)}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[v] \wedge d\zeta$$

onde $d\bar{\zeta}[v] := d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{v-1} \wedge d\bar{\zeta}_{v+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n$, $d\zeta := d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, ζ e z são elementos de $\mathbf{C}^n$. Então vale o teorema seguinte:

TEOREMA 2.3.7 Dado um domínio limitado $D \subset \mathbf{C}^n$ com bordo (∂D) de classe $\mathbf{C}^\infty$ por partes, e uma função $f \in \mathbf{H}(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D})$, para qualquer $z \in D$ teremos

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \omega_{BM}(\zeta - z).$$

DEMONSTRAÇÃO Ver [Sha] Theorem 1, p 157. $\square$

Nas hipóteses do nosso teorema, exigiremos que o representante $\hat{f}$ de uma função $f \in \mathbf{G}^b(\partial D)$ tenha a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon \in I$ $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ satisfaz a equação tangencial de Cauchy-Riemann, ou ainda, $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ é uma CR-function, sobre ∂D . Essa condição vai expressar que a componente tangencial de $\bar{\partial}\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$, denotada por $\bar{\partial}_T \hat{f}(\varepsilon, \cdot)$, será identicamente nula sobre ∂D , determinando assim um conceito de “holomorfia tangente”. Tais conceitos clássicos não admitem uma explanação sucinta o suficiente para incluirmos aqui; indicamos o livro de Shabat [Sha], §11, subseção 31 como referência.

TEOREMA 2.3.8 Sejam D um aberto limitado de $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, tal que ∂D é de classe $\mathbf{C}^\infty$ e $\mathbf{C}^n \setminus D$ é conexo, $f \in \mathbf{G}^b(\partial D)$ tem um representante $\hat{f} \in \mathcal{E}_m[\partial D]$ tal que $\forall \varepsilon \in I$ valem : (a) $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^1(\partial D)$; (b) $\bar{\partial}_T \hat{f}(\varepsilon, \cdot) \equiv 0$ em ∂D . Então existe $F \in \mathbf{HG}_*(\bar{D})$ para a qual $F|_{\partial D} = f$.

DEMONSTRAÇÃO Consideremos inicialmente $\hat{F}_0 : I \times D \longrightarrow \mathbf{C}$ definida por

$$\hat{F}_0(\varepsilon, z) := \int_{\partial D} \hat{f}(\varepsilon, \zeta) \omega_{BM}(\zeta - z), \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times D.$$

Das hipóteses (a) e (b) segue que para cada $\varepsilon \in I$, $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ é uma CR-function sobre ∂D . De (i), (ii) e (iv) na demonstração do Teorema 2.3.3 segue que

$\hat{F}_0(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(D) \cap C(\overline{D})$ e que $\hat{F}_0(\varepsilon, \cdot)|_{\partial D} = \hat{f}(\varepsilon, \cdot)$, para cada $\varepsilon \in I$ arbitrário fixo dado.

Definimos então $\hat{F}: I \times \overline{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que

$$\hat{F}(\varepsilon, z) := \begin{cases} \hat{F}_0(\varepsilon, z) & \text{se } (\varepsilon, z) \in I \times D \\ \hat{f}(\varepsilon, z) & \text{se } (\varepsilon, z) \in I \times \partial D \end{cases}.$$

Teremos então que, para cada $\varepsilon \in I$, são válidas:

$$(I) \quad \hat{F}(\varepsilon, \cdot)|_D = \hat{F}_0(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D});$$

$$(II) \quad \hat{F}(\varepsilon, \cdot)|_{\partial D} = \hat{f}(\varepsilon, \cdot).$$

Se mostrarmos que $\hat{F} \in \mathcal{E}_M[\overline{D}]$, então resulta que $F = \hat{F} + \mathcal{N}[\overline{D}] \in \mathbf{G}^b(\overline{D})$ e por (I) $F \in \mathbf{HG}_*(\overline{D})$, de (II) seguiria que $F|_{\partial D} = f$ o que prova o teorema.

Uma vez que $\mathcal{E}_M[\overline{D}] = \mathcal{E}_M^0[\overline{D}] := \{u: I \times \overline{D} \longrightarrow \mathbf{C} \mid u(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}(\overline{D}), \forall \varepsilon \in I; u|_{I \times D} \in \mathcal{E}_M[D] \text{ e } u|_{I \times \partial D} \in \mathcal{E}_m[\partial\Omega]\}$, devido a (I) e (II), só precisamos mostrar que $\hat{F}|_{I \times D} = \hat{F}_0 \in \mathcal{E}_M[D]$, para provar que $\hat{F} \in \mathcal{E}_M[\overline{D}]$.

Segundo a definição no núcleo de Bochner-Martinelli, a expressão de $\hat{F}(\varepsilon, z)$ é dada por

$$\hat{F}(\varepsilon, z) = \hat{F}_0(\varepsilon, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{v=1}^n (-1)^{v-1} \int_{\partial D} \hat{f}(\varepsilon, \zeta) \cdot \frac{(\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v)}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta,$$

$$\forall (\varepsilon, z) \in I \times D.$$

Basta então mostrarmos a moderação para as parcelas

$$\hat{G}(\varepsilon, z) := \int_{\partial D} \hat{f}(\varepsilon, \zeta) \frac{(\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v)}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[v] \wedge d\zeta, \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times D$$

$\forall v \in \{1, \dots, n\}$. Para isso sejam $K \subset\subset D$ e $\alpha \in \mathbf{N}^n$, denotando por ∂_z^α o operador de derivação (em $\mathbf{R}^{2n}$), façamos as seguintes considerações:

1ª) Para cada $\zeta \in \partial D$ temos que a função

$$\psi_\zeta : z \in D \longrightarrow \left(\frac{\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v}{|\zeta - z|^{2n}} \right) \in \mathbf{C}, \text{ é de classe } \mathbf{C}^\infty, \text{ como } D \text{ é limitado segue que}$$

$\partial D \subset\subset \mathbf{C}^n$, assim a função

$$(\zeta, z) \in \partial D \times K \longrightarrow \left| \partial_z^\alpha \left(\frac{\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v}{|\zeta - z|^{2n}} \right) \right| \in \mathbf{R} \text{ é contínua. Concluimos então que existe e é}$$

finito:

$$M := \sup_{(\zeta, z) \in \partial D \times K} \left| \partial_z^\alpha \left(\frac{\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v}{|\zeta - z|^{2n}} \right) \right|$$

2ª) Uma vez que $\hat{f} \in \mathcal{E}_m[\partial D]$, dado $\partial D \subset\subset \partial D$ existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que $\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_{\partial D} = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

De 1ª) e 2ª) temos que, para $\forall (\varepsilon, z) \in I \times K$ vale

$$\left| \partial_z^\alpha \hat{G}(\varepsilon, z) \right| \leq \left| \int_{\partial D} \hat{f}(\varepsilon, \zeta) \partial_z^\alpha \left(\frac{\bar{\zeta}_v - \bar{z}_v}{|\zeta - z|^{2n}} \right) d\bar{\zeta}[v] \wedge d\zeta \right| \leq \|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_{\partial D} \cdot M \cdot L,$$

onde $L := \int_{\partial D} \sigma(d\zeta)$, e $\sigma(d\zeta)$ indica o $(2n-1)$ -dimensional elemento de volume de ∂D . $\square$

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE 1ª ORDEM ANALÍTICAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

3.1 TEOREMAS DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Se $X \subset \mathbf{C}$ é um domínio simplesmente conexo e $f \in \mathbf{H}(X)$, então é bem conhecido, ([Rud] theor 13.11, por exemplo), que existe $F \in \mathbf{H}(X)$ para a qual $F'(z) = f(z), \forall z \in X$. No caso generalizado, com uma exigência a mais para X , isto também ocorre, como vemos na seguinte

PROPOSIÇÃO 3.1.1 Se $X \subset \mathbf{C}$ é um aberto simplesmente conexo, cuja fronteira é uma curva de Jordan de classe C^1 e V é um aberto de $\mathbf{C}$ com $\overline{X} \subset V$, então, dada

$f \in \mathbf{HG}(V)$, existe $F \in \mathbf{HG}(X)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial z} = f|_X$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $f|_X = \hat{f} + \mathcal{N}[X]$ tal que $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(X)$, $\forall \varepsilon \in I$

(ver [Ara 4]. Theor 10.2.4), tomemos então $\hat{F}: I \times X \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que

$$\hat{F}(\varepsilon, z) := \int_a^z \hat{f}(\varepsilon, \eta) d\eta, \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times X, \text{ onde } a \text{ é um ponto arbitrário fixo de } X, \text{ a integral}$$

se dá em um caminho qualquer ligando a até z .

É fácil verificar a moderação de $\hat{F}$ quando observamos que, derivado do caso clássico, para cada $\varepsilon \in I$ fixado, temos que $\hat{F}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(X)$. Assim, dado $\forall K \subset\subset X$, como podemos recobrir tal K com um número finito de discos fechados $D_1, \dots, D_n$ contidos em X , basta então verificar a moderação de $\hat{F}$ em um disco fechado arbitrário $D \subset X$. Para atingir tal objetivo, consideremos z_1 um ponto arbitrário da fronteira de D , e γ um caminho ligando a até z_1 , caminho este contido em X . Se d é o diâmetro de D , então para $M = d + L$, onde L é o comprimento do caminho dado que liga a até z_1 , e, considerando na integral que define $\hat{F}$ o caminho entre a e z , como sendo aquele que vai de a até z_1 por meio de γ , e de z_1 linearmente até z , teremos que

$$\|\hat{F}(\varepsilon, \cdot)\|_D \leq \|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_{\tilde{D}} \cdot M \quad \text{onde } \tilde{D} = (D \cup \gamma) \subset\subset X.$$

Dessa forma, segue, utilizando-se a Proposição 1.2.13 (i), que $\hat{F} \in \mathcal{E}_M[X]$. Se tomarmos $F = \hat{F} + \mathcal{N}[X]$, teremos: $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \bar{z}} + \mathcal{N}[X]$ e $\frac{\partial \hat{F}}{\partial \bar{z}}(\varepsilon, z) =$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\int_a^z \hat{f}(\varepsilon, \eta) d\eta \right) = 0, \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times X \quad \text{e,} \quad \text{assim,} \quad F \in \mathbf{HG}(X). \quad \text{Do fato de}$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \bar{z}}(\varepsilon, z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\int_a^z \hat{f}(\varepsilon, \eta) d\eta \right) = \hat{f}(\varepsilon, z), \quad \forall (\varepsilon, z) \in I \times X, \quad \text{segue que} \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f|_X. \quad \square$$

Observamos que para cada aberto $\tilde{X}$, simplesmente conexo, relativamente compacto em V , existe $F \in \mathbf{HG}(\tilde{X})$ tal que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f|_{\tilde{X}}$. A demonstração é exatamente a mesma da Proposição 3.1.1 apenas acrescentando que existe X contendo $\tilde{X}$ e com fecho de X contido em V para o qual ∂X é uma curva de Jordan de classe C^1 .

No caso em que $X \subset \mathbf{C}^n$ e $n \geq 2$, a resolução da equação diferencial de 1ª ordem:

$$(I) \quad \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f, \quad \text{feita em [Hör1] theor 6.3.2, exige que } X \text{ seja } \mathbf{C}\text{-convexo. No}$$

contexto generalizado, resolveremos (I) para f holomorfa generalizada e $a_1, \dots, a_n$ complexos nem todos nulos; no entanto, a solução terá lugar em abertos $A \subset X$, obtidos de maneira menos arbitrária do que no caso clássico.

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, faremos algumas considerações e demonstraremos um lema.

Vamos supor para o próximo lema (e utilizaremos em sua demonstração com a notação indicada) que seja válida a seguinte afirmação: (i) dada qualquer $g \in \mathbf{HG}(\Omega)$

existe representante $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ de g , tal que $\hat{g}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$. Sabemos que, para garantir a existência de uma tal representante, precisamos fazer exigências sobre Ω (ver Teorema 1.2.15); no entanto, quando formos aplicar o lema em questão tais exigências estarão satisfeitas.

LEMA 3.1.2 Para resolver (I) $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = F$ com $F \in \mathbf{HG}(\tilde{\Omega})$, onde

$(a_1, \dots, a_n) \neq \vec{0}$ basta resolver (II) $\frac{\partial g}{\partial \zeta_1} = f$ com $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$, onde Ω é a imagem de

$\tilde{\Omega}$ por um biholomorfismo conveniente.

DEMONSTRAÇÃO Sejam $\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ e $C = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ bases do $\mathbf{C}$ -espaço vetorial $\mathbf{C}^n$, para as quais $\vec{v}_1 = (a_1, \dots, a_n)$, e C é a base canônica. Tomemos o isomorfismo linear $T: \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ para o qual $T(\vec{v}_i) = \vec{e}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Se denotarmos por $B = (B_{ij}) \in GL(\mathbf{C}, n)$ a matriz inversível do operador T na base canônica, então teremos que

$$T(\vec{v}_1) = B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1, \text{ isso implica (ii) } \sum_{j=1}^n B_{1j} a_j = 1; \text{ e}$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^n B_{lj} a_j = 0, \text{ para } l \geq 2. \text{ Além disso, do fato de : } \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \zeta = B \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = T(z),$$

teremos que $\zeta_l = \sum_{j=1}^n B_{lj} z_j$ o que implica (iv) $\frac{\partial \zeta_l}{\partial z_j} = B_{lj}$. Seja $B: \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ o

biholomorfismo obtido a partir de T com $B(w) = T(w) = (B_{lj}) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$,

$\forall w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{C}^n$. Observe que B foi obtido a partir de $a = (a_1, \dots, a_n)$ (não

denotaremos B_a , para não sobrecarregar a notação). Seja $\Omega := B(\tilde{\Omega}) \subset \mathbf{C}^n$, de [ArBi]

Theorem 9.1.2 sabemos que existe um isomorfismo de $\mathbf{C}$ -álgebras

$B^*: \mathbf{HG}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{HG}(\tilde{\Omega})$ para o qual, dada $h = \hat{h} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{HG}(\Omega)$ temos

$B^* h = H = \hat{H} + \mathcal{N}[\tilde{\Omega}]$ onde $\hat{H}$ é tal que: (v) $\hat{H}(\varepsilon, z) := \hat{h}(\varepsilon, B(z)) = \hat{h}(\varepsilon, \zeta)$,

$\forall (\varepsilon, z) \in I \times \tilde{\Omega}$.

Seja $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ o único elemento para o qual $B^* f = F$, e suponha que

$g = \hat{g} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathbf{HG}(\Omega)$ seja solução de (II), isto é, (vi) $\frac{\partial g}{\partial \zeta_1} = f = \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega]$.

Tomemos $u \in \mathbf{HG}(\tilde{\Omega})$ o elemento para o qual $B^* g = u$; então de (v) segue que

$u = \hat{u} + \mathcal{N}[\tilde{\Omega}]$ e $\hat{u}(\varepsilon, z) = \hat{g}(\varepsilon, B(z)) = \hat{g}(\varepsilon, \zeta)$, $\forall (\varepsilon, z) \in I \times \tilde{\Omega}$.

Teremos então que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_j}(\varepsilon, z) &= \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}(\hat{g}(\varepsilon, \cdot) \circ B)(z) = \\
&= \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta_l}(\varepsilon, \zeta) \frac{\partial \zeta_l}{\partial z_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{\zeta}_l}(\varepsilon, \zeta) \frac{\partial \bar{\zeta}_l}{\partial z_j} \right) \stackrel{(i)}{=} \\
&= \sum_{j,l=1}^n a_j \frac{\partial \zeta_l}{\partial z_j} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta_l}(\varepsilon, B(z)) \stackrel{(iv)}{=} \sum_{j,l} a_j B_{lj} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta_l}(\varepsilon, B(z)) \stackrel{(iii)}{=} \\
&= \sum_{j=1}^n a_j B_{1j} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta_1}(\varepsilon, B(z)) \stackrel{(ii)}{=} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta_1}(\varepsilon, B(z)) = \\
&\stackrel{(vi)}{=} \hat{f}(\varepsilon, B(z)) \stackrel{(v)}{=} \hat{F}(\varepsilon, z), \quad \text{para } \forall (\varepsilon, z) \in I \times \tilde{\Omega}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, vale (I), isto é, $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = F$. $\square$

Estamos em condições agora de enunciar o

TEOREMA 3.1.3 Sejam $X \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, um aberto $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexo e convexo, $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ um aberto tal que $\bar{X} \subset \Omega$, $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ e $a_1, \dots, a_n$ complexos nem todos nulos. Então existe $u \in \mathbf{HG}(A)$ tal que

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f|_A$$

onde $A := \pi^{-1}(A') \cap X$; $\pi : (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \longrightarrow (z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ e A' é um aberto $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexo de $\mathbf{C}^{n-1}$ tal que $\bar{A}' \subset X' := \pi(X)$; ou ainda, A é a imagem, via um biholomorfismo, de um conjunto desse tipo.

DEMONSTRAÇÃO Segue do Lema 3.1.2 que basta mostrar que a equação $\frac{\partial u}{\partial z_1} = f|_A$

tem solução $u \in \mathbf{HG}(A)$ para toda $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ quando A é obtido segundo as hipóteses do teorema. De fato, se tivermos $a_1 \neq 0$ e $a_j = 0, \quad \forall j \in \{2, \dots, n\}$, então basta tomar

$f' = \frac{1}{a_1} f$ e resolver $\frac{\partial u}{\partial z_1} = f'$; a solução u será tal que $u \in \mathbf{HG}(A)$. Do contrário, isto

é, se nossa EDPL for $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f$, e $(a_1, \dots, a_n)$ não satisfizer a condição anteriormente

tratada, tomo o biholomorfismo $B: \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ como no Lema 3.1.2. Isso nos conduzirá

a resolver $\frac{\partial g}{\partial \zeta_1} = h$ onde $B^*h = f$. Essa última equação seria resolvida pensando-se no

convexo e $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo $B(X)$, que teria a propriedade de

$\overline{B(X)} \subset B(\Omega) \subset \mathbf{C}^n$ (De fato, $X \subset \overline{X} \subset \Omega \Rightarrow B(X) \subset B(\overline{X}) \subset B(\Omega)$ e, assim,

$\overline{B(X)} \subset \overline{B(\overline{X})} = B(\overline{X}) \subset B(\Omega)$); logo, escolheríamos $A = \pi^{-1}(A') \cap B(X)$, onde A' é

um aberto $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo de $\mathbf{C}^{n-1}$ tal que $\overline{A'} \subset \pi(B(X))$.

Uma vez resolvido $\frac{\partial g}{\partial \zeta_1} = h$, usamos a demonstração do Lema 3.1.2, e obtemos a

solução da forma $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f|_{B^{-1}(A)}$, isto é, $u \in \mathbf{HG}(B^{-1}(A))$, e a solução dar-se-ia na

imagem, por um biholomorfismo, de um conjunto do tipo descrito nas hipóteses do teorema.

Passemos então à resolução de $\frac{\partial u}{\partial z_1} = f|_A$:

para $a \in \mathbf{C}$ definimos $X'_a := \{z' \in \mathbf{C}^{n-1} \mid (a, z') \in X\} = \{z' \in X' \mid (a, z') \in X\} \subset X' \subset \mathbf{C}^{n-1}$.

Temos que esses conjuntos abertos cobrem X' (De fato, dado $z' \in X' = \pi(X)$ segue que $z' = \pi(b, z')$, com $(b, z') \in X$; assim, $z' \in X'_b$). Logo $X' = \bigcup_{a \in \mathbf{C}} X'_a$. Temos também que

$X'_a = \pi(\{a\} \times \mathbf{C}^{n-1}) \cap X$; logo, aberto em $\mathbf{C}^{n-1}$.

Em $X_a := X \cap \pi^{-1}(X'_a)$ a equação dada tem solução, isto é, existe

$u_a = \hat{u}_a + \mathcal{N}[X_a] \in \mathbf{HG}(X_a)$ tal que $\frac{\partial u_a}{\partial z_1} = f|_{X_a}$; a solução é obtida da seguinte forma:

sendo X um conjunto $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo, devido ao Teorema 1.2.15,

podemos tomar $f|_X = \hat{f} + \mathcal{N}[X]$ tal que $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(X)$, $\forall \varepsilon \in I$.

Definimos $\hat{u}_a : I \times X_a \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que, $\forall (\varepsilon, (z_1, \dots, z_n)) \in I \times X_a$

$$\hat{u}_a(\varepsilon, z_1, z_2, \dots, z_n) = \hat{u}_a(\varepsilon, z_1, z') = \int_a^{\varepsilon_1} \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta$$

(i) $\hat{u}_a$ está bem definida, pois para cada ε arbitrário fixo, $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ é separadamente holomorfa, em particular, $\hat{f}(\varepsilon, \cdot, z')$ é holomorfa, $\forall (\varepsilon, z') \in I \times X'_a$ arbitrários fixados; a integral indicada é calculada sobre o segmento $[a, z_1]$ ligando a até z_1 (observemos que dado $(z_1, z') \in X_a$, $\pi(z_1, z') = z' \in X'_a$ logo $(a, z') \in X_a \subset X$, como X é convexo, temos que o segmento $[a, z_1] \times \{z'\}$, que liga (a, z') até (z_1, z') , está contido em X , onde $\hat{f}(\varepsilon, \cdot)$ está definida). Na verdade, como X é convexo, dado qualquer outro caminho $\gamma := (\gamma_1, z')$

ligando (a, z') até (z_1, z') e, contido em X , teríamos $\int_{\gamma_1} \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta = \int_a^{z_1} \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta$, pois $\pi_1(X) \subset \mathbb{C}$ é convexo logo simplesmente conexo.

Temos a seguinte figura ilustrativa:

(ii) Claramente $\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(X_a)$, na verdade $\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(X_a)$ para $\forall \varepsilon \in I$ arbitrário fixo, devido a isto e à Proposição 1.2.13 (i), para verificarmos a moderação de $\hat{u}_a$, basta fazê-lo com $\alpha=0 \in \mathbf{N}^n$, isto é, $\hat{u}_a \in \mathcal{E}_M[X_a] \Leftrightarrow \forall K \subset\subset X_a, \exists \sigma \in \mathbf{R}$ tal que $\|\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot)\|_K = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Observemos ainda que basta mostrar o resultado para polidiscos compactos $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset\subset X_a$, uma vez que todo compacto $K \subset X_a$ pode ser recoberto por um número finito de tais polidiscos compactos. Assim, dado $D \subset\subset X_a$, basta exibir $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que $\|\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot)\|_D = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Como $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[X]$, dado $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset\subset X_a$, encontraremos um compacto conveniente $\mathcal{D} \subset\subset X$ onde vale a moderação para $\hat{f}$.

Tomaremos $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ onde $\mathcal{D}_1 = D_1$ se $a \in D_1$; se $a \notin D_1$, tomo $\mathcal{D}_1 = D_1 \cup \Delta$, onde Δ é o triângulo (e seu interior) formado pelos vértices a, w_1, w_2 , sendo que w_1 e w_2 são pontos na fronteira de D_1 pelos quais passam as retas tangentes que também passam por a . Vejamos a figura abaixo:

Em qualquer dos casos $\mathcal{D}_1 \subset\subset \mathbf{C}$; assim, $\mathcal{D}$ será compacto. Basta verificarmos então que $\mathcal{D} \subset X$.

Seja $(z_1, z') \in \mathcal{D}$, se $z_1 \in D_1$ teremos $(z_1, z') \in D \subset X_a \subset X$; já se $z_1 \in \mathcal{D}_1 \setminus D_1$, existe $\tilde{z}_1 \in D_1$, tal que $z_1 \in [a, \tilde{z}_1]$, como (a, z') e $(\tilde{z}_1, z') \in X$, o segmento $[a, \tilde{z}_1] \times \{z'\}$ que os une, está inteiramente contido no convexo X , uma vez que (z_1, z') está nesse segmento, $(z_1, z') \in X$, logo $\mathcal{D} \subset X$.

Assim, como $\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_0 = o(\varepsilon^\sigma)$, para algum $\sigma \in \mathbf{R}$, e vale

$$\|\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot)\|_D \leq \|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_0 \cdot \max_{\lambda \in D_1} |a - \lambda|, \quad \text{teremos que} \quad \|\hat{u}_a(\varepsilon, \cdot)\|_D = o(\varepsilon^\sigma) \quad \text{quando}$$

$$\varepsilon \rightarrow 0^+.$$

De (i) e (ii) obtemos que $\hat{u}_a \in \mathcal{E}_M[X_a]$, $\forall a \in \mathbf{C}$. É trivial, a partir da definição de $\hat{u}_a$, verificar que $u_a := \hat{u}_a + \mathcal{N}[X_a] \in \mathbf{HG}(X_a)$; além disso, $\frac{\partial u_a}{\partial z_1} = \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial z_1} + \mathcal{N}[X_a] = \hat{f}_{X_a} + \mathcal{N}[X_a]$, pois $\frac{\partial \hat{u}_a}{\partial z_1}(\varepsilon, z_1, z') = \hat{f}(\varepsilon, z_1, z')$, $\forall (\varepsilon, (z_1, z')) \in I \times X_a$.

Temos ainda que $u_a - u_b = (\hat{u}_a - \hat{u}_b) + \mathcal{N}[X_a \cap X_b]$ está em $\mathbf{HG}(X_a \cap X_b)$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$ ($X_a \cap X_b \neq \emptyset$).

Denotando $u_a - u_b := u_{ab} = \hat{u}_{ab} + \mathcal{N}[X_a \cap X_b]$, temos que $(\hat{u}_a - \hat{u}_b)(\varepsilon, z_1, z') = \int_a^{z_1} \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta - \int_b^{z_1} \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta = \int_a^b \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta := \hat{u}_{ab}(\varepsilon, z_1, z')$, $\forall (\varepsilon, (z_1, z')) \in I \times (X_a \cap X_b)$ (observe que a última integral se dá no segmento ligando a até b : $[a, b]$, pois, como $z' \in X'_a \cap X'_b$, segue que (a, z') e $(b, z') \in X$; logo, $[a, b] \times \{z'\} \subset X$).

Consideremos agora a função $\hat{u}'_{ab} : I \times (X'_a \cap X'_b) \longrightarrow \mathbf{C}$, definida por $\hat{u}'_{ab}(\varepsilon, z') = \int_a^b \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta$. Essa última integral calculada no caminho reto que liga a até b , isto é, sobre $[a, b]$. Temos que $\hat{u}'_{ab}(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{H}(X'_a \cap X'_b)$, $\forall \varepsilon \in I$; logo, para verificarmos a moderação de $\hat{u}'_{ab}$, basta fazê-lo para $\alpha = 0 \in \mathbf{N}^n$ (Proposição 1.2.13 (i)).

Assim, dado o polidisco fechado $D = D_2 \times \dots \times D_n \subset \subset (X'_a \cap X'_b)$, considere o compacto

$$\mathbb{D} := [a, b] \times D_2 \times \dots \times D_n \subset \subset X \quad (\text{De fato, } (z_1, z') \in \mathbb{D} = [a, b] \times D \Rightarrow z' \in D \Rightarrow$$

$$(a, z') \text{ e } (b, z') \in X \Rightarrow [a, b] \times \{z'\} \subset X; \text{ como } z_1 \in [a, b] \text{ segue que } (z_1, z') \in X).$$

Uma vez que $\|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathbb{D}} = o(\varepsilon^\sigma)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para algum $\sigma \in \mathbf{R}$, e que

$$\|\hat{u}'_{ab}(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathbb{D}} \leq \|\hat{f}(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathbb{D}} \cdot |b - a| \quad \text{vem que } \|\hat{u}'_{ab}(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathbb{D}} = o(\varepsilon^\sigma) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ e,}$$

portanto, $\hat{u}'_{ab} \in \mathcal{E}_M[X'_a \cap X'_b]$.

Temos então $u'_{ab} := \hat{u}'_{ab} + \mathcal{N}[X'_a \cap X'_b] \in \mathbf{HG}(X'_a \cap X'_b)$; além disso, temos também, um cociclo analítico, isto é, $u'_{ab} = -u'_{ba}$ em $X'_a \cap X'_b$ e $u'_{ab} + u'_{bc} + u'_{ca} = 0$ em $X'_a \cap X'_b \cap X'_c$ (ou seja, são verificadas D_2 e D_3 na Definição 1.2.18) (verificação trivial).

Recordaremos agora como achar $v'_a \in \mathbf{HG}(A'_a)$ tal que $u'_{ab|A'_a \cap A'_b} = v'_a - v'_b$,

$$\forall a, b \in \mathbf{C} \text{ onde } A'_a := A' \cap X'_a.$$

Resolvemos o primeiro problema de Cousin (ver Definição 1.2.18) em $\mathbf{G}(X')$; assim é, que temos a cobertura $(X'_a)_{a \in \mathbf{C}}$ de X' e a família $u'_{ab} \in \mathbf{HG}(X'_a \cap X'_b) \subset \mathbf{G}(X'_a \cap X'_b)$. Pelo Teorema 1.2.19 (1), existe família $(g_a)_{a \in \mathbf{C}}$, com $g_a \in \mathbf{G}(X'_a)$, $\forall a \in \mathbf{C}$ tal que $u'_{ab} = g_a - g_b$ em $X'_a \cap X'_b$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$ ($X'_a \cap X'_b \neq \emptyset$).

Logo teremos que $0 = \bar{\partial} u'_{ab} = \bar{\partial} g_a - \bar{\partial} g_b \Rightarrow \bar{\partial} g_a = \bar{\partial} g_b$ em $X'_a \cap X'_b$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$.

Como $\mathbf{G}(\cdot)$ é um feixe (Teorema 1.1.12), segue que existe uma única $F \in \mathbf{G}_{(0,1)}(X')$ tal

que $F|_{X'_a} = \bar{\partial} g_a$, $\forall a \in \mathbf{C}$. Obviamente $\bar{\partial} F = 0$ em X' , pois $\bar{\partial} F|_{X'_a} = \bar{\partial}(\bar{\partial} g_a) = 0$,

$\forall a \in \mathbf{C}$. Como $\bar{A}' \subset X'$ é tal que A' é $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente pseudoconvexo, segue do

Teorema 1.2.16 (Teorema 1.2.17 se $n=2$) que existe $v \in \mathbf{G}(A')$ tal que $\bar{\partial} v = F|_{A'}$.

Definimos então $v'_a := g_{a|A'_a} - v|_{A'_a}$ onde $A'_a = X'_a \cap A'$; assim,

$\bar{\partial} v'_a = \bar{\partial}(g_{a|A'_a}) - \bar{\partial}(v|_{A'_a}) = F|_{A'_a} - F|_{A'_a} = 0$ em A'_a (observemos que $(A'_a)_{a \in \mathbf{C}}$ cobre A'

uma vez que $(X'_a)_{a \in \mathbf{C}}$ cobre $X' \supset A'$); logo, $v'_a \in \mathbf{HG}(A'_a)$, $\forall a \in \mathbf{C}$.

Temos então que vale (*) $v'_a - v'_b = (g_{a|A'_a \cap A'_b} - v|_{A'_a \cap A'_b}) - (g_{b|A'_a \cap A'_b} - v|_{A'_a \cap A'_b}) =$
 $= g_{a|A'_a \cap A'_b} - g_{b|A'_a \cap A'_b} = u'_{ab}$, em $A'_a \cap A'_b$.

Definimos então $\hat{v}_a : I \times A_a \longrightarrow \mathbf{C}$ onde $A_a := X \cap \pi^{-1}(A'_a)$ tal que
 $\hat{v}_a(\varepsilon, z_1, z') := \hat{v}'_a(\varepsilon, z')$, onde $\hat{v}'_a$ é um representante qualquer de v'_a ; obviamente para
qualquer $\varepsilon \in I$, $\hat{v}_a(\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(A_a)$ e trivialmente $\hat{v}_a \in \mathcal{E}_M[A_a]$ (dado $K \subset\subset A_a$
consideramos o compacto $K' := \pi(K) \subset \pi(A_a) = A'_a$ e assim $\hat{v}'_a$ é moderada; note ainda
que se $\alpha \in \mathbf{N}^n$ é tal que $\alpha_1 \neq 0$, segue que $\partial^\alpha \hat{v}_a = 0$; já, se $\alpha_1 = 0$, teremos que
 $\partial^\alpha \hat{v}_a = \partial^\alpha \hat{v}'_a$).

Temos então a família $(v_a)_{a \in \mathbf{C}}$ onde $v_a := \hat{v}_a + \mathcal{N}[A_a] \in \mathbf{HG}(A_a)$, $\forall a \in \mathbf{C}$ (De fato,

$\bar{\partial} v_a = \bar{\partial} \hat{v}_a + \mathcal{N}[A_a]$ e $\bar{\partial} \hat{v}_a = \bar{\partial} \hat{v}'_a = 0$ pois $v'_a \in \mathbf{HG}(A'_a)$).

Observemos agora que $u_{ab|A_a \cap A_b} = v_a - v_b$; de fato, $(\hat{v}_a - \hat{v}_b)(\varepsilon, z_1, z') =$

$$(\hat{v}'_a - \hat{v}'_b)(\varepsilon, z) \stackrel{(*)}{=} \hat{u}'_{ab}(\varepsilon, z') = \int_a^b \hat{f}(\varepsilon, \eta, z') d\eta = \hat{u}_{ab}(\varepsilon, z_1, z'), \quad \forall (\varepsilon, (z_1, z')) \in I \times (A_a \cap A_b).$$

$$\begin{aligned} \text{Dessa forma, } u_{a|A_a} - u_{b|A_b} &= u_{ab|A_a \cap A_b} = v_a - v_b \Rightarrow u_{a|A_a \cap A_b} - v_{a|A_a \cap A_b} = \\ &= u_{b|A_a \cap A_b} - v_{b|A_a \cap A_b}, \text{ em } A_a \cap A_b, \quad \forall a, b \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Definimos $U_a := u_{a|A_a} - v_a \in \mathbf{HG}(A_a)$; logo a família $(U_a)_{a \in \mathbf{C}}$ é tal que $U_{a|A_a \cap A_b} = U_{b|A_a \cap A_b}$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$. Como $\mathbf{HG}(\cdot)$ é um feixe (Proposição 1.2.4), segue que existe $u \in \mathbf{HG}(A)$ tal que $u|_{A_a} = U_a$, $\forall a \in \mathbf{C}$, daí vem que

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(u|_{A_a}) = \frac{\partial U_a}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}(u_{a|A_a} - v_a) = f|_{A_a} - \frac{\partial v_a}{\partial z_1} = f|_{A_a} - \frac{\partial v'_a}{\partial z_1} = f|_{A_a} - 0 = f|_{A_a}, \quad \forall a \in \mathbf{C}.$$

$$\begin{aligned} \text{Observando finalmente que } A &= \pi^{-1}(A') \cap X = \pi^{-1}\left(\bigcup_{a \in \mathbf{C}} A'_a\right) \cap X = \bigcup_{a \in \mathbf{C}} (\pi^{-1}(A'_a) \cap X) = \\ &= \bigcup_{a \in \mathbf{C}} A_a, \text{ segue que } \frac{\partial u}{\partial z_1} = f|_A. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 CONSIDERAÇÕES ULTERIORES

Iniciamos este parágrafo, exibindo um exemplo para ilustrar o Teorema 3.1.3

EXEMPLO 3.2.1 Denotemos por $B(n, \rho)$ uma bola aberta em $\mathbf{C}^n$ com centro 0 e raio ρ . Como as bolas abertas são conjuntos convexos e $\mathbf{C}^\infty$ –estritamente pseudoconvexos,

podemos supor nas hipóteses do Teorema 3.1.3 que $X := B(n, r)$ e $\Omega := B(n, R)$ onde $0 < r < R$, obviamente $\overline{X} \subset \Omega$. Segue então que para $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ temos:

(a) Se $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, 0, \dots, 0)$, $a_1 \neq 0$, então escolhendo $A' := B(n-1, s)$, $0 < s < r$ (note

que $X' = \pi(X) = B(n-1, r) \supset \overline{A'}$), teremos que, para $A = \pi^{-1}(A') \cap X =$

$= \{(z_1, z') \in \mathbf{C}^n \mid \sum_{j=2}^n |z_j|^2 < s^2 \text{ e } |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^2 < r^2\}$ existirá $u \in \mathbf{HG}(A)$ para a qual

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} = f|_A.$$

(b) Se $(a_1, \dots, a_n) \neq (a_1, 0, \dots, 0)$, $\sum_{j=1}^n |a_j| \neq 0$, então tomamos B e B^* como no Lema

3.1.2 e resolvemos $\frac{\partial g}{\partial \zeta_1} = h$, onde $h \in \mathbf{HG}(B(\Omega))$ é o elemento para o qual $B^*h = f$.

A solução g será tal que $g \in \mathbf{HG}(A)$ onde $A = \pi^{-1}(A') \cap B(X)$, e A' é $\mathbf{C}^\infty$ -estritamente

pseudoconvexo em $\mathbf{C}^{n-1}$ para o qual $\overline{A'} \subset \pi(B(X))$. Assim, $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f|_{B^{-1}(A)}$ e

$u \in \mathbf{HG}(B^{-1}(A))$ é o elemento para o qual $B^*g = u$. Obviamente $B^{-1}(A) \subset X = B(n, r)$.

OBSERVAÇÃO 3.2.2 Nas hipóteses do Teorema 3.1.3, como não temos um problema de valor inicial ou de valor de contorno, a discussão de unicidade de solução não é pertinente. Com o propósito de obter soluções estritas para a equação $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f$,

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, $a \neq \vec{0}$, estudamos o conjunto solução da equação homogênea

associada (i) $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = 0$, esta tem infinitas soluções clássicas como é simples

constatar. Consideremos a equação algébrica de 1º grau, de incógnitas $z_1, \dots, z_n$:

(ii) $\sum_{j=1}^n a_j z_j = 0$. Visivelmente, o conjunto S_a das soluções de (ii) é um subespaço não

trivial de $\mathbf{C}^n$ e, para qualquer $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_a \setminus \{0\}$, a função $u_\alpha \in \mathbf{H}(A)$ definida

por $u_\alpha(z) := \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$, $\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in A$, é solução de (i), pois $\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_j} = \alpha_j$ em A ,

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ donde $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j = 0$ em A . Donde resulta que

$\Sigma_a := \{u_\alpha / \alpha \in S_a\}$ é um subespaço vetorial não trivial de $\mathbf{H}(A)$ de soluções de (i).

É claro também que não há inconvenientes em construir soluções de (i) em $\mathbf{HG}_e(A)$. De fato, fixados $\alpha \in S_a \setminus \{\vec{0}\}$ e $\beta \in \mathbf{R}^*$ arbitrários, a função

$\hat{u}_{\alpha\beta} : I \times A \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $\hat{u}_{\alpha\beta}(\varepsilon, z) := \varepsilon^\beta \cdot u_\alpha(z)$, $\forall (\varepsilon, z) \in I \times A$ é manifestamente

moderada, pois dado $H \subset\subset A$ arbitrário, para $\sigma \in \mathbf{R}^n$ com $\sigma < \beta$, temos

$\frac{\|\hat{u}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \cdot)\|_H}{\varepsilon^\sigma} = \varepsilon^{\beta-\sigma} \|u_\alpha\|_H \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Na verdade, se tomarmos

$\hat{z}_\beta : I \longrightarrow \mathbf{C}$, tal que $\hat{z}_\beta(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$, então $\hat{z}_\beta \in \mathcal{E}_M(\mathbf{C})$ e $z_\beta := \hat{z}_\beta + \mathcal{N}(\mathbf{C}) \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{C}$,

logo o elemento $u_{\alpha\beta} := \hat{u}_{\alpha\beta} + \mathcal{N}[A] = z_\beta \cdot u_\alpha$ é, pela Proposição 1.3.7, um elemento de

$\mathbf{HG}_e(A)$, e uma vez que temos $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^n a_j (\varepsilon^\beta \cdot \alpha_j) = \varepsilon^\beta \cdot \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j = 0$, segue

que $u_{\alpha\beta}$ é solução de (i).

Observemos que o precedente implica que o sub- $\mathbf{C}$ -módulo de $\mathbf{HG}(A)$, gerado por $\Xi := \{u_{\alpha\beta} \mid \alpha \in S_a \text{ e } \beta \in \mathbf{R}\}$, está contido no conjunto solução de (i). Em outros termos, todo elemento de $\mathbf{HG}(A)$ do tipo $\sum_{v=1}^p \lambda_v \cdot u_{\alpha_v \beta_v}$, onde $p \in \mathbf{N}^*$; $(\lambda_v)_{1 \leq v \leq p}$, $(\alpha_v)_{1 \leq v \leq p}$ e $(\beta_v)_{1 \leq v \leq p}$ são seqüências em $\overline{\mathbf{C}}$, S_a e $\mathbf{R}$ respectivamente, é uma solução de (i). É claro que o sub- $\mathbf{C}$ -módulo acima, isto é, $\overline{\mathbf{C}}^{(\Xi)}$ contém $\Sigma_a = \{u_{\alpha 0} \mid \alpha \in S_a\} \subset \Xi$.

É natural, a seguir, olhar a equação $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f$, considerando válidas as hipóteses do Teorema 3.1.3, exceto que os coeficientes $a_1, \dots, a_n$ são escalares generalizados não todos nulos. Mostraremos que, nessa situação, não podemos esperar resultados tão bons quanto ao do Teorema 3.1.3

Usaremos a seguir as notações:

$$\overline{\mathbf{C}}^* = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}; \quad \text{Inv}(\overline{\mathbf{C}}) = \{z \in \overline{\mathbf{C}} \mid \exists w \in \overline{\mathbf{C}} \text{ com } z \cdot w = 1\}.$$

Em [ArJu] propriedades de $\overline{\mathbf{C}}$ são estudadas, entre elas que $\overline{\mathbf{C}}^* \setminus \text{Inv}(\overline{\mathbf{C}}) \neq \emptyset$, assim podemos enunciar a :

PROPOSIÇÃO 3.2.3 Sejam $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ um aberto conexo e $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, $f \neq 0$. Se

$a \in \overline{\mathbf{C}}^* \setminus \text{Inv}(\overline{\mathbf{C}})$, então a equação (i) $a \frac{\partial u}{\partial z_1} = f$ não tem solução em nenhum aberto

W , tal que $\emptyset \neq W \subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO Pelo Theor 2.18 de [ArJu], sabemos que a é um divisor do zero,

isto é, $\exists a_0 \in \overline{\mathbf{C}}^*$, tal que (ii) $a \cdot a_0 = 0$. Suponha por absurdo que exista um aberto W ,

$\emptyset \neq W \subset \Omega$ e $u \in \mathbf{HG}(W)$ (ou mesmo $u \in \mathbf{G}(W)$) tal que vale (i) em W ; então,

multiplicando ambos os membros por a_0 , em vista de (ii), resulta $0 = a_0 a \frac{\partial u}{\partial z_1} = a_0 f|_W$.

Pela Proposição 1.3.9 (2), resulta que $f|_W = 0$, e pelo princípio do prolongamento analítico (Teorema 1.2.6), resultaria que $f = 0$, contrariando a hipótese. $\square$

OBSERVAÇÃO 3.2.4 Decorre da última proposição que, se tivermos $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aberto

conexo, $f \in \mathbf{HG}(\Omega)$ e $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{\mathbf{C}}^n$ com $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, não podemos esperar

um Teorema de existência de solução analítica (nem mesmo generalizada) para a equação

$\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial u}{\partial z_j} = f$, em alguma parte aberta não vazia de Ω , se existir algum $a_j \in \overline{\mathbf{C}}^* \setminus \text{Inv}(\overline{\mathbf{C}})$.

BIBLIOGRAFIA

- [Ara 1] Aragona, J. *Some properties of holomorphic generalized functions on $\mathbf{C}^\infty$ – strictly pseudo convex domains*. Acta Math Hungar 70(1-2) (1996), 167-175.
- [Ara 2] Aragona, J. *Some results for the $\bar{\partial}$ operator on generalized differential forms*. J. Math Anal. Appl. 180, 2(1993), 458-468.
- [Ara 3] Aragona, J. *On existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator on generalized differential forms*. Proc. London Math. Soc. (3) 53(1986), 474-488.
- [Ara 4] Aragona, J. *Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau* IME-USP, São Paulo, 1989 (Notas de Aula da disciplina MAT 829, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).
- [Ara 5] Aragona, J. *Generalized Functions on the Closure of an Open Set*. Submetido para publicação.
- [Ara 6] Aragona, J. *Distribuições e Análise de Fourier* IME-USP, São Paulo (Notas de Aulas da disciplina MAT 811, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).

- [ArBi] Aragona, J. and Biagioni, H. A. *Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions*. Anal. Math., 17(1991), 75-132.
- [ArCo] Aragona, J. and Colombeau, J. F. *On the $\bar{\partial}$ -Neumann Problem for Generalized Functions*. J. Math Anal. Appl. 110, 1(1985), 179-199.
- [ArJu] Aragona, J. and Juriaans, S. O. *Some Structural Properties of the Topological Ring of Colombeau's Generalized Numbers*. To appear in Comm. in Algebra.
- [ArVi] Aragona, J. and Villarreal, F. *Colombeau's Theory and Shock Waves in a Problem of Hydrodynamics*. J. d'Analyse Math. 61 (1993), 113-143.
- [Cat] Catlin, D., *Boundary behavior of holomorphic functions on weakly pseudoconvex domains*. Dissertation, Princeton Univ., 1978.
- [CoGa] Colombeau, J. F. and Galé, J. E. *Holomorphic generalized functions*, J. Math. Anal. Appl. 103(1984), 117-133.
- [Col 1] Colombeau, J. F. *Differential Calculus and Holomorphy, Real and Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North Holland, Amsterdam, 1982.
- [Col 2] Colombeau, J. F. *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North Holland, Amsterdam, 1984.
- [Col 3] Colombeau, J. F. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [Har] Hartogs, F. *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*. Münch. Ber. 36(1906), 223-242.

- [Hör 1] Hörmander, L. *Notions of Convexity*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [Hör 2] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand, 1966.
- [Kra] Krantz, S. G. *Function Theory of Several Complex Variables*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [Nac] Nachbin, L., *Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties*. North-Holland, Amsterdam, 1972.
- [Ran] Range, R. M., *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Rud] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, New York, 1987.
- [Sha] Shabat, B. V., *Introduction to Complex Analysis, Parte II: Functions of Several Variables*. Translations of Mathematical Monographs, volume 110.
- [Sor] Soraggi, R.L., *Fourier Analysis on Colombeau's Algebra of Generalized Functions*. J. d'Analyse Math. 69 (1996).