O Teorema de Nazarova-Roiter
e
Representações de Álgebras

Walter Martins Rodrigues

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra
Orientador: **Prof. Dr. Héctor Merklen Goldschmidt**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

-São Paulo, 15 de Setembro de 2000-

O Teorema de Nazarova-Roiter e Representações de Álgebras

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida
defendida por Walter Martins Rodrigues
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 5 de Setembro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMEC- UNICAMP

Aos meus pais,
João e Alcina,
e a meus irmãos
Mariínha, Creuza, Zélio, Lita, Deija. J. Cléber, Geraldo, Odete, J. Batista e Ivone,
Com muito amor !!

Agradecimentos

A Deus que me fortaleceu e animou-me nos momentos de dificuldade.

Agradeço encarecidamente ao meu orientador, o Prof. Dr. Héctor Merklen Goldschmidt pela paciência que teve comigo durante todo este período.

Desde 1993 tenho recebido apoio, incentivo e ensinamentos fundamentais de diversos professores do instituto. Nesta oportunidade aproveito para manifestar meus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas que contribuíram decisivamente para que eu pudesse realizar este trabalho. Estas pessoas especiais são:

Inicialmente gostaria de dizer que somente tenho palavras de elogios e agradecimentos a minha co-orientadora, Prof. Dra. Gladys Chalom, a qual além do acompanhamento, desde a iniciação científica (1994-1998), sempre me incentivou a ver mais além.

A Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço, que foi minha orientadora de iniciação científica, na área de Topologia, no período de 1995 a 1998, e ministrou os cursos que fiz de álgebra linear II e introdução à análise complexa em 1995 e 1997 respectivamente.

O Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos, que nos auxilia cotidianamente no estudo de diversos assuntos como Representações de Álgebras, Teoria de Bases de Gröebner, Álgebra Homológica e Categorias Derivadas, dentre outros assuntos, e ministrou o curso que fiz de geometria analítica e vetores em 1993.

Aos amigos Nelson, Santos, Jocirei, Olga, Daniela Mariz, Hernán Cuti, Ângela, Irma, Emivan, Ronaldo pela amizade e aos colegas de graduação, mestrado e doutorado, gostaria de expressar os meus agradecimentos.

Aos amigos Hernán, Cecília, Ana Tereza, Clézio, Edson Alvarez, Edson Iwaki, Calixto pelos seminários e pelas discussões sempre proveitosas.

Aos professores Prof. Dr. Viktor Bekkert, Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho e Prof. Dr. Michael Dokuchaev e José C. Simon. Pela extrema dedicação e atenção que mostram a cada dia.

Todas as pessoas que menciono aqui, não apenas elas, são muito especiais para mim. Simplesmente porque cada pessoa que passa em nossa vida é única. Sempre deixa um pouco de si e leva um pouco de nós. Há os que levaram muito, há os que não deixaram nada, mas há os que ficam para sempre, que ficam em nossos corações. São inesquecíveis!

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o conceito de representação matricial sobre um corpo k de um conjunto finito S dotado de uma ordem parcial $\preceq$ de acordo com [21]. O Teorema de Nazarova-Roiter que trata da equivalência do tipo de representação de um poset S e de seu derivado S' obtido a partir do algoritmo de Nazarova-Roiter, além disso quando o poset é de tipo de representação finito o teorema nos assegura que o número de indecomponíveis de S é maior que de S' , e o Teorema de Kleiner que classifica os conjuntos parcialmente ordenados (posets) de tipo de representação finito, que são apresentados no capítulo *IV*, são os principais resultados da dissertação.

No capítulo *I*, apresentamos sucintamente os principais conceitos de teoria de representações de álgebras de Artin (de acordo com [4]), e álgebra básica que precisamos para desenvolvermos aplicações do conhecimento da classificação dos posets na determinação do tipo de representação de algumas álgebras.

No capítulo *II*, introduzimos o conceito de representação de posets e apresentamos alguns resultados fundamentais dessa teoria.

No capítulo *III*, introduzimos o conceito de S -espaços, de acordo com [9]. Há uma bela conexão entre teoria de representação de posets e de S -espaços que é dada pelo funtor redução de Gabriel.

No último capítulo, fazemos algumas aplicações do uso dos teoremas de classificação de teoria de representações de posets (categoria vetorespaciais). Faremos duas aplicações. A primeira acontece quando Λ , álgebra de Artin de dimensão finita, é uma extensão por um ponto. A outra, quando Λ é a álgebra de incidência de um poset com algumas propriedades especiais.

Abstract

We present the concept of matricial representation of finite partial ordered set (poset), over a field k , according to Nazarova-Roiter in [21]. The two main theorems shown in this work are:

1) Nazarova-Roiter's theorem which states that if S is the S -derived posets from S , according [21], then they have same representation type and in the case S is finite representation type S' has less indecomposable.

2) Kleiner's theorem which classifies the posets of finite representation type.

Sumário

1	Preliminares	19
1.1	Anéis e Módulos	20
1.2	Categorias e Funtores	23
1.3	Álgebras	28
1.4	Produto Tensorial	29
1.5	Matrizes Triangulares	31
1.6	Morfismos minimais - Dualidade - Transposta	32
1.7	Álgebras de caminhos	34
1.8	Seqüências e Aljavas de Auslander-Reiten	38
2	Conjuntos Parcialmente Ordenados e Problemas Matriciais	43
2.1	Conjuntos Parcialmente Ordenados	44
2.2	Problemas Matriciais	46
2.3	Representações Matriciais dos Posets e Problemas Matriciais	48
2.4	Categorias correspondentes	56
3	I-espacos e álgebra de incidência	63
3.1	Categorias de I-espacos	64
3.2	A álgebra de incidência e teoria de representações de posets	70
3.3	Funtores de reflexão	73

SUMÁRIO	16
4 Os teoremas de Kleiner e Nazarova-Roiter	81
4.1 O Algoritmo de Nazarova Roiter	82
4.2 O Teorema de Kleiner	88
5 Aplicações	103
5.1 Extensões por um ponto	104
5.2 Categorias Vetorespaciais	104
5.3 Categorias Schurian	107
5.4 Álgebra de Incidência	117
(*)	

Introdução

Os objetivos de nosso trabalho são: apresentar o teorema de Nazarova-Roiter e discutir o teorema de Kleiner que classifica os conjuntos parcialmente ordenados (posets) de tipo de representação finito e tratar as extensões por um ponto como ente de conexão entre o estudo das categorias vetorespaciais e a teoria de representações de álgebras por métodos diagramáticos.

É conveniente lembrarmos que este teorema de Nazarova-Roiter desempenhou um papel de destaque para a resolução da conjectura de Brauer-Thral para posets e também para álgebras. O resultado foi demonstrado em 1972 num trabalho em que Nazarova e Roiter introduziram um interessante e enigmático algoritmo de diferenciação de posets. Estes conceitos foram estratégicos para a demonstração do grande teorema de classificação de Nazarova de 1975, ver [18]. As técnicas que utilizaram no estudo de representações de conjuntos parcialmente ordenados estão diretamente associadas ao tratamento de problemas matriciais, e desempenham um papel muito importante na teoria de representações de modo geral. Vale lembrar que com o uso de técnicas envolvendo problemas matriciais tornou-se possível a demonstração de teoremas fundamentais da teoria de representações de álgebras, como por exemplo o célebre Teorema da Dicotomia de Drozd. Por outro lado, gostaríamos de salientar que o trabalho desenvolvido pela escola de Kiev (Roiter, Nazarova e colaboradores) não é muito bem conhecido, na sua totalidade nem em profundidade, pelas escolas ocidentais.

Apresentaremos uma demonstração do Teorema de Nazarova-Roiter que trata da equivalência do tipo de representação de um poset I e de seu derivado I' obtido a partir do algoritmo de Nazarova-Roiter. Também apresentaremos uma prova do teorema de Kleiner que estabelece a classificação dos posets de tipo de representação finito. Procuraremos discutir também a idéia central, apresentada por Nazarova e Roiter em [21], de estabelecer uma estreita relação entre os posets e os problemas matriciais, fazendo com que o algoritmo de derivação tenha também uma interpretação significativa na área dos problemas matriciais. O poder de tais técnicas bem como as sutilezas que dificultam os trabalhos são inegavelmente muito grandes.

Estamos interessados também em apresentar certas aplicações da classificação do tipo de representação de posets para a determinação do tipo de representação de certas álgebras. Faremos esta conexão por intermédio das extensões por um ponto, olhadas como em [4], e do estudo das álgebras de incidência de um poset, de acordo com [28] e [17]. Desta forma estaremos aproveitando resultados obtidos em categorias vetorespaciais para resolver alguns problemas de teoria de representações de álgebras.

Capítulo 1

Preliminares

Como mencionamos na introdução neste trabalho trataremos de diversos conceitos tocantes à teoria de representações de álgebras e a teoria de problemas matriciais. Com relação à teoria de representações de álgebras todos os conceitos que estaremos utilizando podem ser encontrados com riqueza de detalhes na obra fundamental “Representation Theory of Artin Algebras” de M. Auslander, I. Reiten e S. Smalø ([4]). Os conceitos básicos de teoria de anéis e teoria de módulos podem ser encontrados na literatura clássica, por exemplo [12], [3], [2].

Em teoria de representações há conceitos fundamentais como morfismos minimais que desempenha um papel importante na construção das envolventes injetivas e das coberturas projetivas de módulos. Neste capítulo estaremos apresentando sucintamente estes conceitos e faremos uma breve discussão a respeito das álgebras de caminhos e das álgebras triangulares(veja capítulo III em [4] , veja [26]).

Estes conceitos serão usados, por exemplo, para construirmos as extensões por um ponto.

1.1 Anéis e Módulos

• Anéis

Um anel R é um conjunto munido de duas operações binárias, chamadas adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, tais que:

- (1) R é um grupo abeliano com relação à adição, isto é, $(R, +)$ é um grupo abeliano.
- (2) R é um semigrupo com relação à multiplicação, isto é, $(R, \cdot)$ é um semigrupo.
- (3) A operação de multiplicação é distributiva sobre a adição.

Sempre que não houver menção contrária estaremos considerando que o R contém unidade, isto é, existe $1 \in R$ tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in R$.

Seja S um subconjunto de um anel R . Dizemos que S é um **subanel** se são verificadas as seguintes condições:

- (i) S é fechado com relação às operações de R (isto é, $\forall a, b \in S$ tem-se: $a + b \in S$ e $a \cdot b \in S$).
- (ii) S é um anel com relação às operações induzidas pela restrição das operações de R .

Um subconjunto $\mathcal{I}$ de um anel R é **ideal à esquerda** (respectivamente à direita) se as seguintes propriedades são verificadas:

- (1) $\forall r \in R$ e $\forall a \in \mathcal{I}$ tem-se $ra \in \mathcal{I}$ (respectivamente $ar \in \mathcal{I}$).
- (2) $\mathcal{I}$ é subgrupo abeliano de R em relação a adição.

Chamamos de ideal bilateral de R os ideais que são simultaneamente ideal à esquerda e à direita.

Sejam R e S anéis. Uma transformação $f : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de anéis com unidades quando f preserva adição, multiplicação e unidade. Em outras palavras f satisfaz as condições:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- $f(x.y) = f(x).f(y)$
- $f(1) = 1$

A composição de homomorfismos de anéis é também um homomorfismo de anel. Chamamos de endomorfismos aos homomorfismos que vão de um anel em si mesmo. Um isomorfismo entre os anéis R e S é um homomorfismo $f : R \rightarrow S$ que é bijetivo. Neste caso, costumamos dizer que R e S são isomorfos como anéis.

Um divisor de zero à esquerda (respectivamente à direita) é um elemento $r \in R$ para o qual existe $s \in R - \{0\}$ tal que $r.s = 0$ (respectivamente $s.r = 0$). E um elemento invertível à esquerda (respectivamente à direita) em R é um elemento $r \in R$ para o qual existe $s \in R$ tal que $r.s = 1$ (respectivamente $s.r = 1$). Um anel em que todos os elementos não nulos são invertíveis à esquerda e à direita é chamado de anel com divisão.

• Módulos

Seja R um anel. Um R -módulo à esquerda é um grupo abeliano M , que denotaremos aditivamente, sobre o qual existe uma ação linear de R ; isto é, existe uma transformação $(-, -) : R \times M \rightarrow M$, denotada por $(r, m) = rm$, que satisfaz:

$$(1) (r + s)m = rm + sm$$

$$(2) r(m + n) = rm + rn$$

$$(3) (r.s)m = r(sm)$$

$$(4) 1m = m$$

para todos $r, s \in R$ e $m \in M$.

Equivalentemente, M é um grupo abeliano junto com um homomorfismo de anéis $\rho : R \rightarrow \text{End}(M)$, onde $\text{End}(M)$ é o anel dos endomorfismos do grupo abeliano M .

Seja R um anel. Considere as aplicações $\lambda, \rho : R \times R \rightarrow R$ definidas por: $\lambda(a, x) = ax$ e $\rho(a, x) = xa$. R munido de sua operação aditiva e a multiplicação determinada por λ (respectivamente ρ) é um R -módulo à esquerda (respectivamente à direita) o qual denotamos por ${}_R R$ (respectivamente R_R).

Sejam M e N R -módulos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos se preserva a operação de soma e a ação de R , ou seja, se satisfaz as condições:

$$(1) f(m+n)=f(m) + f(n) \forall m, n \in M$$

$$(2) f(rm)=rf(m) \forall m \in M \text{ e } r \in R$$

Neste caso também dizemos que f é R -linear.

Observe que a composição de dois homomorfismos de R -módulos é novamente um homomorfismo de R -módulos.

O anel dos endomorfismos de um módulo M é o anel dos homomorfismos de módulo de M em si mesmo.

Um isomorfismo de módulos é um homomorfismo bijetivo $f : M \longrightarrow N$. Neste caso dizemos que M e N são módulos isomorfos e denotamos por $M \cong N$.

Um subconjunto N de M é um submódulo de M , se N é um subgrupo aditivo de M e $rn \in N$ para todo $r \in R, n \in N$. (Os submódulos de ${}_R R$ são os ideais à esquerda de R)

Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. definem-se o núcleo e a imagem de f da seguinte forma:

- Núcleo da $f := Ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = o\}$
- Imagem da $f := Im(f) = \{n \in N \mid f(m) = n \text{ para algum } m \in M\}$

É de imediata verificação que $Ker(f)$ e $Im(f)$ são submódulos de M e N respectivamente.

Seja R um anel um R -módulo M à esquerda. Para cada $x \in M$ a aplicação ρ de R em M que a cada elemento $r \in R$ associa rx . Pode-se verificar que a imagem de ρ tem uma estrutura de R submódulo à esquerda de M . Um R -módulo M à esquerda é dito finitamente gerado à esquerda se existem $x_1, \dots, x_n \in M$ tais que $M = Rx_1 + \dots + Rx_n$

Seja R um anel com unidade. Lembramos que o radical de Jacobson de R , que denotaremos por $\mathcal{J}_R$, ou simplesmente $\mathcal{J}$, é a intersecção de todos os ideais maximais à esquerda de R . Aliás, $\mathcal{J}_R$ é também a intersecção de todos os ideais maximais à direita. Portanto $\mathcal{J}_R$ é um ideal bilateral de R .

Dado um R -módulo M o radical de M , que denotaremos por $radM$ é a intersecção de todos os R -módulos que são submódulos maximais de M . Se R for um anel artiniano pode-se mostrar que para todo R -módulo finitamente gerado M tem-se: $radM = \mathcal{J}_R.M$, para mais informações veja pag 11 [4].

1.2 Categorias e Funtores

Uma categoria $\mathcal{C}$ é uma classe que satisfaz os axiomas:

- (1) Para cada par de objetos de $\mathcal{C}$ A, B , existe um conjunto, possivelmente vazio, que denotamos por $\mathcal{C}(A, B)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, o qual chamamos de conjunto dos $\mathcal{C}$ -morfismos de A para B .
- (2) Para cada tripla de objetos A, B, D , está definida uma aplicação de $\mathcal{C}(B, D) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, D)$ associando $(\beta, \alpha) \longrightarrow \beta\alpha$ chamada composição de morfismos. Requeremos ainda que sejam cumpridas as condições:
 - (a) Se A, B, A', B' são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que $(A, B) \neq (A', B')$ então $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$
 - (b) Se A, B, C, D são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que α, β, γ são morfismos de A para B , B para C e de C para D respectivamente, então $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ (propriedade associativa da composição)
 - (c) Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe um morfismo 1_A de A para A tal que para qualquer objeto B de $\mathcal{C}$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ e todo $\beta \in \mathcal{C}(B, A)$ tem-se que $1_A\beta = \beta$ e $\alpha 1_A = \alpha$. A este morfismo 1_A chamamos identidade de A .

A categoria **oposta ou dual**, $\mathcal{C}^{op}$, da categoria $\mathcal{C}$ é definida da seguinte forma: os objetos de $\mathcal{C}^{op}$ são os mesmos de $\mathcal{C}$, o conjunto dos morfismos $\mathcal{C}^{op}(A, B)$ é igual a $\mathcal{C}(B, A)$, e, se $f \in \mathcal{C}^{op}(A, B)$ e $g \in \mathcal{C}^{op}(B, C)$ a composição em $\mathcal{C}^{op}$, é dada por $g \circ f = fg \in \mathcal{C}(C, A) = \mathcal{C}^{op}(A, C)$.

Em uma categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado de isomorfismo se existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$ e $gf = 1_A$. Quando existe um isomorfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ diz-se que A é isomorfo a B , e denota-se $A \cong B$.

Um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado monomorfismo em $\mathcal{C}$ (respectivamente epimorfismo) se quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(C, A)$ (respectivamente $\in \mathcal{C}(A, C)$), sempre que $fg_1 = fg_2$ (respectivamente $g_1f = g_2f$) implicar $g_1 = g_2$.

Dizemos que X é objeto **zero** de uma categoria $\mathcal{C}$ se para qualquer objeto $Y \in \mathcal{C}$, não vazio, tem-se: $\mathcal{C}(X, Y)$ e $\mathcal{C}(Y, X)$ são conjuntos unitários, este objeto é único a menos de isomorfismo e vamos denotá-lo por 0 .

Definição 1.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva se satisfizer as seguintes condições:

- Existe um objeto zero em $\mathcal{C}$
- Para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ está definida uma operação binária $(+)$ sobre $\mathcal{C}(A, B)$ tal que $(\mathcal{C}(A, B), +, 0_{A,B})$ é um grupo abeliano, denotamos por $0_{A,B}$ a composição $0_{A,0}0_{0,B}$ onde $0_{A,0}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(0, B)$ e $0_{A,0}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(0, B)$.
- Se $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}(A, B)$, e $g_1, g_2, g \in \mathcal{C}(B, C)$ então:

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)f &= g_1f + g_2f \\ g(f_1 + f_2) &= gf_1 + gf_2\end{aligned}$$

- Para qualquer conjunto finito $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe $A \coprod_i A_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e morfismos $p_j : A \rightarrow A_j$, $\iota_j : A_j \rightarrow A$, $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que: $p_j \iota_j = 1_{A_j}$, $\sum \iota_j p_j = 1_A$ e $p_k \iota_j = 0$ sempre que $k \neq j$.

Definição 1.2. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt se todo objeto indecomponível tem anel de endomorfismo local.

É possível demonstrar que se uma categoria $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt se e somente se cada objeto M de $\mathcal{C}$ pode ser expresso da forma: $M = \coprod_i M_i^{\alpha_i}$, onde $M_i^{\alpha_i}$ indica a soma de α_i cópias isomorfas do indecomponível M_i , e esta soma é única a menos de permutação.

Definição 1.3. Uma categoria é abeliana quando é aditiva e satisfaz as seguintes propriedades adicionais:

- (1) Para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ existem em $\mathcal{C}$ o núcleo e o conúcleo de f .
- (2) Todo monomorfismo é núcleo de seu conúcleo e qualquer epimorfismo é conúcleo de seu núcleo.
- (3) Qualquer morfismo f pode ser fatorado na forma: $e.m = f$, onde e é um epimorfismo e m é monomorfismo.

Definição 1.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Chamamos de kernel de f em $\mathcal{C}$ o morfismo $k_f \in \mathcal{C}(K_f, A)$ com as seguintes características.

- k_f é monomorfismo em $\mathcal{C}$
- $f k_f = 0_{K_f, A}$

- Para toda $g \in \mathcal{C}(X, A)$ tal que $fg = 0_{X,A}$ existe $g' \in \mathcal{C}(X, K)$ tal que $g = kg'$.

A definição de cokernel de um morfismo em uma categoria é feito de forma dual a definição de kernel.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um par de aplicações. Uma, que associa a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ um objeto $T(A) \in \mathcal{D}$ e a outra, que para cada morfismo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ associa o morfismo $T(\alpha) \in \mathcal{D}(T(A), T(B))$, tal que as duas condições seguintes são satisfeitas:

F_1 : Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, $T(1_A)$ é o morfismo identidade de $T(A)$;

F_2 : Se a composição $\beta\alpha$ de morfismos de $\mathcal{C}$ está definida então a composição $T(\beta)T(\alpha)$ também está definida em $\mathcal{D}$, além disso: $T(\beta)T(\alpha) = T(\beta\alpha)$.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ podemos definir o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que associa a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ o próprio X , e a cada morfismo $f \in \mathcal{C}$ o próprio morfismo f .

Um funtor contravariante da categoria $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor (covariante) $T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é um funtor é fiel(respectivamente pleno) se para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a transformação de $\mathcal{C}(A, B)$ em $\mathcal{C}(F(A), F(B))$ que associa f a $F(f)$ é injetora (respectivamente sobrejetora). O funtor é dito denso se para todo objeto $A \in \mathcal{D}$ existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong A$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\eta : F \rightarrow G$ é uma aplicação que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ associa um morfismo $\eta(A) \in \mathcal{D}(F(A), G(A))$ tal que para quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$ e qualquer $f \in \mathcal{C}(A, B)$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\eta(A)} & & G(A) \\ \downarrow F(f) & & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta(B)} & & G(B) \end{array}$$

Quando para todo $A \in \mathcal{C}$, $\eta(A)$ é um isomorfismo, dizemos que η é um isomorfismo natural.

Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ e $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$, onde $\cong$ denota um isomorfismo natural de funtores. É sabido que um funtor é uma equivalência de categorias se e somente se é fiel, pleno e denso.

Definimos uma dualidade entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, como um funtor contravariante, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, tal que o funtor $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ determinado por T é uma equivalência.

Notações:

Seja R um anel. Denotemos: a) por $Mod(R)$ a categoria dos R -módulos à direita; b) por $f.l.R$ a subcategoria plena de $Mod(R)$ formada pelos R -módulos de comprimento finito; (veja a definição logo a seguir) c) por $mod(R)$ a categoria dos R -módulos finitamente gerados. Ressaltamos que muitos autores denotam por $mod(R)$ a categoria dos R -módulos finitamente apresentados.

No caso em que A é uma álgebra de Artin, $f.l.R = mod A$

Definição 1.5. *Seja R um anel. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $Mod(R)$ é fechada para extensões se para toda sequência exata curta $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow 0$ com $M, T \in \mathcal{C}$ tem-se que $N \in \mathcal{C}$.*

Proposição 1.1. (pag.4 [4]) *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *A categoria $f.l.R$ é a menor subcategoria de $Mod(R)$, que é fechada para extensões e contém todos os simples.*
- (2) *Todo R -módulo M de comprimento finito é finitamente gerado.*

• Módulos de comprimento finito

Seja R um anel. Dada uma família de R -módulos $\{A_i\}_{i \in I}$ denotaremos por $\coprod_{i \in I} A_i$ a soma direta (co-produto) dos A_i (na categoria dos R -módulos).

Relembramos que um R -módulo é simples se seu único submódulo próprio é o submódulo nulo. Já um módulo que seja soma de módulos simples é dito semissimples e um anel é semissimples se o é quando visto como módulo sobre ele mesmo.

Dizemos que um R -módulo M tem comprimento finito se existe uma filtração finita de submódulos $F : M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = 0$ tal que M_i/M_{i+1} é zero ou um R -módulo simples, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso dizemos que F é uma série de composição generalizada de M . Os módulos quociente não nulos M_i/M_{i+1} são chamados fatores de composição da filtração F . No caso em que M_i/M_{i+1} é não nulo para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ dizemos que F é uma série de composição de M .

Sejam S um R -módulo simples e F é uma série de composição de M denotamos por $m_S^F(M)$ o número de fatores de composição da filtração F isomorfos à S , e por $l_F(M)$ a

soma: $\sum m_S^F(M)$, a qual é feita sobre todos os A -módulos simples. Finalmente, denotamos por $l(M)$ o mínimo dos $l_F(M)$ e por $m_S(M)$ o mínimo dos $m_S^F(M)$. O teorema de Jordan-Hölder nos garante que estes números $l_F(M)$ e $m_S^F(M)$ independem da escolha da série de composição F .

Seja R um anel. Uma sequência de R -módulos à direita (respectivamente à esquerda) $(M_l)_{l \in I}$, onde $I \subseteq \mathbb{N}$, é uma cadeia descendente (respectivamente ascendente) se $M_l \supseteq M_{l+1}$ (respectivamente $M_l \subseteq M_{l+1}$) para todo $l \in I$. Um R -módulo M é artiniano (respectivamente noetheriano) se toda cadeia descendente (respectivamente ascendente) é estacionária. Um anel R é dito artiniano à direita (respectivamente à esquerda) se R visto como R -módulo, isto é R_R (respectivamente ${}_R R$), é um módulo artiniano. Dizemos que R é artiniano se é artiniano à direita e à esquerda.

Os anéis artinianos possuem muitas propriedades interessantes, algumas das quais vamos apresentar de forma sucinta a seguir. Estes resultados são amplamente conhecidos e as demonstrações podem ser encontradas nos principais livros de álgebra básica (por exemplo [12], [2], [3]).

Proposição 1.2. (veja pag. 5 [4]) *Um R -módulo M é de comprimento finito, isto é $l(M) < \infty$, se e somente se M é artiniano e noetheriano.*

Teorema 1.1. (Krull-Schmidt) *Qualquer R -módulo M de comprimento finito pode ser expresso de forma única, a menos de isomorfismos, como soma direta (finita) de R -módulos indecomponíveis.*

Proposição 1.3. (veja pag. 9 [4]) *Seja R um anel artiniano à esquerda (respectivamente à direita). As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *O radical $\mathcal{J}_R$ é nilpotente*
- (2) *$R/\mathcal{J}_R$ é um anel semissimples*
- (3) *existe apenas um número finito de R -módulos simples não isomorfos.*

Seja R um anel artiniano à esquerda, desde que o radical $\mathcal{J}_R$ é nilpotente, R tem a seguinte filtração:

$$R \supseteq \mathcal{J}_R \supseteq (\mathcal{J}_R)^2 \supseteq \dots \supseteq (\mathcal{J}_R)^n = 0. \text{ Vamos denotar } R = (\mathcal{J}_R)^0.$$

Proposição 1.4. (pag. 10 [4]) *Seja R um anel. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) O radical $\mathcal{J}_R$ é nilpotente e $(\mathcal{J}_R)^i/(\mathcal{J}_R)^{i+1}$ é um R -módulo semissimples finitamente gerado para todo $i \in \mathbb{N}$
- (2) $R/\mathcal{J}_R$ é artiniano à esquerda
- (3) Todo R -módulo finitamente gerado tem comprimento finito.

Proposição 1.5. *Sejam M, N, T A -módulos de comprimento finito e $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow 0$ é uma sequência exata. Então $l(M) + l(T) = l(N)$.*

1.3 Álgebras

Definição 1.6. *Seja R um anel comutativo. Uma R -álgebra Λ consiste de um par (Λ, ϕ) , onde Λ é anel e ϕ é um R -homomorfismo $\phi : R \rightarrow \Lambda$ cuja imagem está contida no centro de Λ .*

Normalmente, ϕ é monomorfismo e neste caso identificamos R com a imagem de ϕ e dizemos que R está contido no centro de Λ

Definição 1.7. *Dizemos que Λ é uma R -álgebra de Artin, ou uma álgebra artiniana, se Λ é finitamente gerada como R -módulo.*

Quando R é um corpo, uma base para a R -álgebra A , é uma base para A vista como módulo, ou seja como R espaço vetorial. Se A admite uma R -base finita dizemos A tem dimensão finita sobre R .

Sejam A e B R -álgebras. Uma transformação $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de R -álgebras se F é um homomorfismo de R -módulos que também é homomorfismo de anéis; isto é, f satisfaz às condições:

- (1) $f(a + b) = f(a) + f(b) \forall a, b \in A$
- (2) $f(xa) = x.f(a) \forall a \in A, \forall x \in R$
- (3) $f(ab) = f(a).f(b) \forall a, b \in A$
- (4) $f(1) = 1$

Um homomorfismo de R álgebras que for sobrejetor e injetor é um isomorfismo de R -álgebras; neste caso dizemos que A e B são álgebras isomorfas e escreveremos $A \cong B$. Relembramos também que os homomorfismos injetores são monomorfismos e os sobrejetores são epimorfismos.

1.4 Produto Tensorial

Nesta seção vamos supor sempre que R é um anel comutativo. Sejam M, N, P R -módulos. Diremos que $f : M \times N \rightarrow P$ é uma aplicação R -bilinear (para simplificar podemos dizer simplesmente bilinear) se f é R -homomorfismo em cada variável quando a outra está fixa; ou seja, se as transformações $x \rightarrow f(x, y_0)$ e $y \rightarrow f(x_0, y)$ são ambas R -lineares para cada $x_0 \in M$ e cada $y_0 \in N$.

A idéia por trás da definição de produto tensorial é converter o trabalho com transformações bilineares em trabalho com transformações lineares, que é muito mais fácil.

Sejam M e N R -módulos. O produto tensorial de M e N (sobre R), denotado por $M \otimes_R N$, é caracterizado pela seguinte propriedade universal, que formaliza a idéia de converter transformações bilineares em lineares.

Teorema 1.2. (Propriedade Universal do Produto Tensorial) *Sejam M e N módulos sobre um anel comutativo R . Então existe um R -módulo $M \otimes_R N$ e uma transformação R -bilinear $i : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ que satisfazem a seguinte propriedade universal:*

Dado qualquer R -módulo P e qualquer transformação bilinear $f : M \times N \rightarrow P$, existe uma única transformação linear $\hat{f} : M \otimes_R N \rightarrow P$ tal que $f = \hat{f} \circ i$.

$$\begin{array}{ccc} i : M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ \downarrow f & \swarrow \hat{f} & \\ P & & \end{array}$$

Mais ainda, se existe um R -módulo S e uma transformação bilinear $j : M \times N \rightarrow S$ satisfazendo a mesma propriedade acima, então existe um isomorfismo $g : M \otimes_R N \rightarrow S$ de modo que $j = g \circ i$; isto é, o produto tensorial é único a menos de isomorfismo.

Retornemos ao contexto inicial. Sejam M, N, P R -módulos e $f : M \times N \rightarrow P$ uma transformação R -bilinear. Então para cada $x \in M$ podemos associar uma transformação linear $f_x : N \rightarrow P$ definindo $f_x(y) = f(x, y)$ para todo $y \in N$. É suficiente observar que

a transformação que associa a cada $x \in M$ o R -homomorfismo $f_x \in \text{Hom}_R(N, P)$ também é R -linear uma vez que f é linear na segunda variável.

Reciprocamente, qualquer homomorfismo $\phi : M \longrightarrow \text{Hom}_R(N, P)$ define uma transformação bilinear $\epsilon_\phi : M \times N \longrightarrow P$ da seguinte forma: $\epsilon_\phi(x, y) = (\phi(x))(y)$. Claro que para cada ϕ a transformação ϵ_ϕ é R -bilinear. Portanto o conjunto S das transformações R -bilineares de $M \times N$ em P esta em correspondência bijetora (que é natural) com $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$.

Por outro lado S admite uma correspondência bijetora com $\text{Hom}(M \otimes N, P)$, pela definição de produto tensorial. Logo podemos inferir, pode ser provado, que existe um isomorfismo canônico entre $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$ e $\text{Hom}(M \otimes N, P)$.

Ressaltamos que quando R é um anel mais geral, não necessariamente comutativo mas com unidade, dados M e N R -módulos à direita e à esquerda respectivamente, então o produto tensorial deles, $(M \otimes_R N)$, está bem definido e possui estrutura de grupo abeliano. Porém $(M \otimes_R N)$ em geral não é um R -módulo. Há dois importantes casos especiais em que o produto tensorial tem estrutura de R -módulo, a saber, quando $M = R_R$ ou $N = {}_R R$. Nestes casos além de $(M \otimes_R N)$ ter estrutura de R -módulo pode-se provar o resultado que enunciaremos a seguir, para mais detalhes sugerimos [12].

Teorema 1.3. *Sejam R um anel com unidade (não necessariamente comutativo), M e N R -módulos à direita e à esquerda respectivamente. Então o R -módulo à esquerda $((R_R) \otimes_R N)$ é isomorfo à N e o R -módulo à direita $(M \otimes_R ({}_R R))$ é isomorfo à M .*

• Grupo de Grothendieck

Definição 1.8. *Vamos associar à categoria dos A -módulos de comprimento finito o grupo abeliano livre $F(f.l.A)$ com base as classes de isomorfismo $[M]$ dos A -módulos de comprimento finito. E denotaremos por $R(f.l.A)$ o subgrupo de $F(f.l.A)$ gerado pelos elementos $[M] + [T] - [N]$ cada qual definido por uma sequência exata curta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow T \longrightarrow 0$ em $f.l.A$. O grupo de Grothendieck $K_o(f.l.A)$ é o grupo quociente $F(f.l.A)/R(f.l.A)$. Para cada A -módulo M de comprimento finito está associada uma classe $[M]$ no grupo de Grothendieck $K_o(f.l.A)$.*

Usando basicamente o teorema de Jordan-Hölder não é difícil mostrar o seguinte resultado.

Teorema 1.4. *([4]) Utilizando as notações acima, $K_o(f.l.A)$ é um grupo abeliano livre com base $\{[S_i]\}_{i \in I}$ onde S_i são os A -módulos simples. Cada coeficiente do representante*

do A -módulo de comprimento finito no grupo de Gronthendieck, é a multiplicidade de S_i como fator de composição de M .

1.5 Matrizes Triangulares

Definição 1.9. Sejam A, C anéis e B um $A - C$ -bimódulo, que denotaremos por ${}_A B_C$ bimódulo (A -módulo à esquerda e C -módulo à direita). Consideremos

$$R = \begin{bmatrix} A & {}_A B_C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Definindo as operações em R de acordo com as regras usuais de adição e multiplicação de matrizes resulta para R uma estrutura de anel que chamamos de anel de matrizes triangulares formais construída a partir de A, B, C .

Observação 1.1. Se R tiver um idempotente não trivial e para o qual $(1 - e)Re = 0$ então é fácil ver que:

$$R \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1 - e) \\ 0 & (1 - e)R(1 - e) \end{bmatrix}$$

Definição 1.10. Dados M um A -módulo à direita, N um C -módulo à direita e um C -homomorfismo (de módulos à direita) $f : M \otimes_A B \rightarrow N$, podemos construir um R -módulo P da seguinte forma. Aditivamente, P é o grupo abeliano $M \amalg N$. Dado um elemento $(m, n) \in P$ vamos considerá-lo como uma matriz 2×2 cuja primeira linha é $(m \ 0)$ e a segunda é $(0 \ n)$. Definimos o produto de (m, n) por um elemento de R da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma & f(m \otimes b) + nc \end{bmatrix}$$

Verifica-se que com esta estrutura P é um R -módulo à direita. Aliás todos os R -módulos podem ser vistos essencialmente com esta forma. Para tanto cabe considerar a categoria $\mathfrak{M}$ cujos objetos são as triplas (M, N, f) (onde $M \in \text{Mod} A, N \in \text{Mod} C$ e $f : M \otimes B \rightarrow N$ é um C -homomorfismo) e cujos morfismos são os seguintes: um morfismo de (M, N, f) para (M', N', f') é um par (g, h) , onde $g : M \rightarrow M'$ é um A -homomorfismo e $h : N \rightarrow N'$ é um C -homomorfismo que verificam $gf = f'(h \otimes 1)$. Não é difícil mostrar que a categoria $\mathfrak{M}$ é equivalente à categoria $\text{Mod} R$. (veja capIII de [4])

1.6 Morfismos minimais - Dualidade - Transposta

Vamos definir, de acordo com [4], morfismos minimais à direita e à esquerda entre módulos. Estes conceitos são especialmente interessantes quando tratamos dos conceitos de cobertura projetiva e envolvente injetiva.

Seja R um anel. Fixemos um R -módulo C . Consideremos $Mod(R)/C$ a categoria cujos objetos são os R -homomorfismos com imagem em C , isto é, f é um objeto $Mod(R)/C$ quando $f \in Hom_R(B, C)$. Tomando f, f' em $Obj(Mod(R)/C)$, um morfismo $g : f \rightarrow f'$ é um R -homomorfismo $g : B \rightarrow B'$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow g & \nearrow f' & \\ B' & & \end{array}$$

(Segue que $g : f \rightarrow f'$ é um isomorfismo em $Mod(R)/C$ se e somente se $g : B \rightarrow B'$ é isomorfismo em $Mod(R)$.)

Definição 1.11. Dizemos que $f : B \rightarrow C$ é *minimal à direita* se $Hom_{Mod(R)/C}(f, f) - \{0\}$ tem apenas isomorfismos.

Introduzimos uma relação de equivalência sobre os objetos de $Mod(R)/C$ determinando que $f \sim f'$ se e somente se $Hom_{Mod(R)/C}(f, f') \neq 0$ e $Hom_{Mod(R)/C}(f', f) \neq 0$. Em [4] proposição 2.1 do capítulo I mostra-se que para módulos de comprimento finito cada classe de equivalência desta relação contém um morfismo minimal à direita.

Teorema 1.5. Sejam R um anel, C um R -módulo e $g : X \rightarrow C$ em $Obj(Mod(R)/C)$ com X de comprimento finito. Então existe uma decomposição $X = X' \amalg X''$ tal que $g|_{X'} : X' \rightarrow C$ é minimal à direita e $g|_{X''} = 0$.

Com as notações do teorema acima diz-se que $g|_{X'}$ é uma versão minimal de g

Definição 1.12. Um epimorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado *essencial* se o morfismo $g : X \rightarrow M$ é epimorfismo sempre que $fg : X \rightarrow N$ é epimorfismo.

Quando R é um anel artiniano todo epimorfismo essencial é minimal à direita (a demonstração deste resultado pode ser vista em [4])

Seja R um anel. Lembramos que um R -módulo P é projetivo (respectivamente, I é injetivo) quando satisfaz a seguinte condição: dados M, N R -módulos e um epimorfismo

(respectivamente um monomorfismo) $f : M \longrightarrow N$ para qualquer R -morfismo $g : P \longrightarrow N$ (respectivamente $g : M \longrightarrow I$) existe $h : P \longrightarrow M$ (respectivamente $h : N \longrightarrow I$) tal que $f = gh$ (respectivamente $hf = g$).

Definição 1.13. *Seja R um anel artiniano. Dizemos que um epimorfismo $f : P \longrightarrow M$ é uma cobertura projetiva de M se P é projetivo e f é essencial. Dizemos que um monomorfismo $f : M \longrightarrow I$ é uma envolvente injetiva de M se I é injetivo e f é essencial.*

Um fato conhecido é que qualquer R -módulo M admite envolvente injetiva, e não necessariamente cobertura projetiva. Pode-se provar que se R é uma álgebra de Artin todos os R -módulos também admitem cobertura projetiva.

Seja X um R -módulo. Uma apresentação projetiva para X é uma seqüência exata da forma $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0$ com P_1, P_0 projetivos. E a apresentação projetiva é dita minimal quando $f_0 : P_0 \longrightarrow X$ e $f_1 : P_1 \longrightarrow \text{Ker}(f_0)$ são coberturas projetivas.

• Dualidade e Transposta

Lembramos que para um anel artinianamente comutativo R sempre existe uma dualidade $d : \text{mod}(R) \rightarrow \text{mod}(R)$. Em [4] é construída $D : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda)$ para uma R -álgebra de Artin Λ procedendo da seguinte forma:

Sendo Λ uma R -álgebra de Artin, $\text{mod}\Lambda$ tem apenas um número finito de módulos simples não isomorfos. Seja $\{S_1, \dots, S_n\}$ um conjunto completo de módulos simples não isomorfos de $\text{mod}\Lambda$. Considera-se $J = \coprod_{i=1}^n I(S_i)$, onde $I(S_i)$ é a envolvente injetiva de S_i em $\text{mod}R$. Para cada $X \in \text{mod}\Lambda$, $\text{Hom}_R(X, J)$ tem uma estrutura natural de Λ^{op} -módulo definida assim: Dada $f \in \text{Hom}_R(X, J)$ e $\lambda \in \Lambda$ definimos $(f(\lambda))(x) = f(\lambda x)$ para todo $x \in X$. Resulta que se X é finitamente gerado como Λ -módulo, então $\text{Hom}_R(X, J)$ é finitamente gerado como Λ^{op} -módulo. Visto isto, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.6. (3.3 cap 2 [4]) *Sempre que Λ for R -álgebra de Artin, o funtor $D : \text{mod}(\Lambda) \rightarrow \text{mod}(\Lambda^{\text{op}})$, induzido pela dualidade $d : \text{mod}(R) \rightarrow \text{mod}(R)$, é uma dualidade.*

Definição 1.14. (transposta de Auslander-Reiten) *Seja $C \in \text{mod}\Lambda$ e seja*

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

uma apresentação projetiva minimal. Então $C \cong \text{coker}(f)$. Aplicando a dualidade D ao morfismo f conseguiremos o morfismo: $f^ : P_0^* \xrightarrow{f} P_1^*$. Associado a f^* temos o módulo $\text{coker}(f^*) \in \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$ o qual é chamado transposta de C e denotado por $\text{Tr}(C)$.*

A composição $D\text{Tr} = \tau$ recebe o nome de translação de Auslander-Reiten e desempenha um papel chave na construção das seqüências de Auslander-Reiten em álgebras de Artin

1.7 Álgebras de caminhos

Agora vamos introduzir as noções de aljava e de álgebra de caminhos. Uma aljava é um sistema $\Gamma(\Gamma_0, \Gamma_1, o, t)$ onde Γ_0 é um conjunto (cujos elementos são chamados de vértices), Γ_1 é um conjunto (cujos elementos são chamados de flechas), e cada uma das aplicações $t, o : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ associa a cada flecha um vértice. Se $\alpha \in \Gamma_1$ $o(\alpha)$ é chamado origem de α e $t(\alpha)$ é chamado término de α . Uma aljava é dita finita se ambos os conjuntos Γ_0 e Γ_1 são finitos.

Definição 1.15. Um caminho γ de comprimento n , $n > 0$, na aljava Γ é uma seqüência de flechas $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. A cada vértice $i \in \Gamma_0$ associamos também um caminho e_i , chamado caminho trivial, definimos $o(e_i) = t(e_i) = i$, e diremos que esse caminho tem comprimento nulo.

Definição 1.16. Dado um caminho não trivial $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ definimos $o(\gamma) = o(\alpha_1)$ e $t(\gamma) = t(\alpha_n)$. No caso em que $o(\gamma) = t(\gamma)$ dizemos que γ é um circuito orientado. Para o caminho trivial e_i definimos $o(e_i) = t(e_i) = i$.

Definição 1.17. Dados $i, j \in \Gamma_0$ dizemos que i e j estão unidos por aresta se existe $\alpha \in \Gamma_1$ tal que $o(\alpha) = i$ e $t(\alpha) = j$ ou $o(\alpha) = j$ e $t(\alpha) = i$. Uma aljava é conexa quando para quaisquer dois vértices i e j em Γ_0 a seguinte condição é verificada:

- Sempre que $i \neq j$ existe uma seqüência de vértices $l_1 = i, \dots, l_n = j$ tais que l_i e l_{i+1} estão unidos por arestas, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Seja k um corpo. Consideremos $k\Gamma$ o k -espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos de Γ . É importante notarmos que $k\Gamma$ tem estrutura de k -álgebra, quando definimos a operação de multiplicação $(\cdot)$ de caminhos da seguinte maneira:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{se } o(\beta) \neq t(\alpha) \\ \alpha\beta & \text{se } o(\beta) = t(\alpha) \end{cases}$$

Observemos que $\alpha \cdot \beta = \beta$ se $\alpha = e_{o(\beta)}$ e $\alpha \cdot \beta = \alpha$ se $\beta = e_{t(\alpha)}$.

Dizemos que um anel é hereditário à direita se todos os seus ideais à direita são projetivos. Recentemente E. Green demonstrou que toda álgebra de caminhos é hereditária.

Definição 1.18. Sejam k um corpo e Γ uma aljava. Denotamos por F o ideal de $k\Gamma$ gerado por todas as flechas de Γ_1 . Dizemos que um ideal X de $k\Gamma$, é admissível quando satisfaz a:

- $X \subseteq F^2$
- $F^n \subseteq X$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Uma relação em Γ é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois com mesma origem e o mesmo término.

Um importante resultado com relação a estes conceitos é a proposição abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.6. *Seja I um ideal admissível da k -álgebra $k\Gamma$. Então existe um conjunto finito de relações $\rho_1, \dots, \rho_t$, $t \in \mathbb{N}$ tal que $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_t \rangle$.*

Definição 1.19. *Seja $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_t\}$ um conjunto de relações em $k\Gamma$. Dizemos que (Γ, ρ) é uma aljava com relações e a k -álgebra quociente de $k\Gamma$ pelo ideal $\langle \rho \rangle$ é chamada álgebra de caminhos de (Γ, ρ) sobre o corpo k .*

Lembramos que uma álgebra A é básica quando ${}_A A = P_1 \amalg \dots \amalg P_s$, onde P_i é A -módulo projetivo indecomponível e $P_i \not\cong P_j$ sempre que $i \neq j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, s\}$.

Sejam k um corpo algebricamente fechado, e Λ uma k -álgebra básica de dimensão finita. O primeiro **teorema de Gabriel** nos assegura que existe uma aljava Γ e um conjunto de relações ρ de $k\Gamma$ tal que Λ é isomorfa à álgebra de caminhos de (Γ, ρ) sobre o corpo k . Ademais, esta álgebra de caminhos está completamente determinada por Λ . A aljava Γ , associada à Λ , recebe o nome de aljava ordinária de Λ .

Queremos ressaltar ainda que se Λ é uma k -álgebra nas condições do teorema de Gabriel apesar de que álgebra de caminhos está determinada o mesmo não ocorre com o conjunto das relações, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. *Sejam k um corpo e Q a aljava apresentado na figura abaixo. Considerando os conjuntos de relações $\rho = \{\beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta, \gamma^3\}$ e $\rho' = \{\beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta - \alpha\gamma\beta, \gamma^3, \gamma^4\}$. Pode-se verificar que os ideais gerados por ρ e ρ' são admissíveis e distintos. Entretanto, as álgebras $kQ/\langle \rho \rangle$ e $kQ/\langle \rho' \rangle$ são isomorfas.*

Figura 1.1: aljava Q

Seja Λ uma k -álgebra de dimensão finita, indecomponível e básica, e tomemos $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de Λ . A determinação da aljava ordinária de Λ pode ser realizada tomando um conjunto (de vértices) em bijeção com E , e estipulando que entre os vértices i e j existem exatamente

$$\dim_k[e_j(\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda)e_i] \quad \text{flechas.}$$

Definição 1.20. *Seja (Γ, ρ) uma aljava com relações. Uma relação $\rho = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j w_j \in I$ é minimal se $m \geq 2$ e para todo J subconjunto próprio não vazio de $\{1, \dots, m\}$, $\sum_{j \in J} \lambda_j w_j \notin I$.*

Definição 1.21. *Seja $m(I)$ o conjunto das relações minimais do ideal I . No conjunto dos passeios em Γ definimos uma relação de homotopia $\sim$ como a menor relação de equivalência satisfazendo as seguintes condições:*

- (a) $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x \sim \beta^{-1}\beta$ para cada flecha $\alpha \in \Gamma_1$ com início em x e cada flecha $\beta \in \Gamma_1$ com término em x , onde e_x é o caminho trivial
- (b) $u \sim v$ para quaisquer par de caminhos u, v com mesma origem e mesmo término e tal que exista $x = \sum_{j \leq m} \lambda_j w_j \in m(I)$. com $t(u) = t(x)$ e $o(u) = o(x)$
- (c) A relação $u \sim v$ implica $wu \sim wv$ e $up \sim vp$ sempre que as operações fizerem sentido.

A composição de caminhos induz um produto de classes de homotopia: denotando por $\tilde{u}$ a classe de homotopia do caminho u então o produto $\tilde{u}\tilde{v}$ esteja definido sempre que $u.v$ está definido, e temos $\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{uv}$. Em particular, para cada $x_0 \in \Gamma_0$ a composição está bem definida no conjunto $\pi_1(\Gamma, I, x_0)$ das classes de homotopia dos caminhos de x_0 para x_0 . Mais ainda $\pi_1(\Gamma, I, x_0)$ é um grupo, o qual chamaremos de grupo fundamental de (Γ, I) em x_0 . Se Γ é uma aljava conexa para quaisquer $x, y \in \Gamma_0$ os grupos $\pi_1(\Gamma, I, x_0)$ e $\pi_1(\Gamma, I, y_0)$ são isomorfos; logo faz sentido definirmos $\pi_1(\Gamma, I)$ o grupo fundamental de (Γ, I) como o $\pi_1(\Gamma, I, x_0)$ para algum $x \in \Gamma_0$.

Definição 1.22. *Sejam Λ uma k álgebra de dimensão finita e k algebricamente fechado. Dizemos Λ é uma álgebra triangular se a aljava ordinária de Λ não possui circuitos orientados.*

Definição 1.23. *Uma álgebra triangular Λ é simplesmente conexa se, para qualquer apresentação $\Lambda \cong k\Gamma/I$, o grupo fundamental $\pi_1(\Gamma, I)$ é trivial.*

Seja Γ uma aljava. Uma representação de Γ é dada pelo sistema $V = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$, onde para cada $i \in \Gamma_0$, V_i é um k -espaço vetorial de dimensão finita e f_α é uma transformação k -linear de $V_{o(\alpha)}$ para $V_{t(\alpha)}$. Dado um caminho não trivial $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_t$, $t \in \mathbb{N}$, de i a j em Γ podemos definir $V(\gamma)$ como a transformação linear de V_i para V_j dada pela composta $f_{\alpha_t} \dots f_{\alpha_1}$ e estendemos esta definição para uma combinação linear de caminhos por linearidade.

Dizemos que uma representação V satisfaz uma relação r se $V(r) = 0$, e dizemos V satisfaz um sistema de relações ρ se V satisfizer cada relação $r \in \rho$. Uma representação de uma aljava com relações (Γ, ρ) é uma representação de Γ que satisfaz as relações de ρ .

Definição 1.24. *Sejam $V = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in \Gamma_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ duas representações de Γ . um morfismo $\phi : V \rightarrow W$ um sistema de transformações k -lineares $\phi = (\phi_i)_{i \in \Gamma_0}$ tal que para cada $\alpha \in \Gamma_1$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V_{o(\alpha)} & \xrightarrow{f_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\ \downarrow \phi_{o(\alpha)} & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\ W_{o(\alpha)} & \xrightarrow{g_\alpha} & W_{t(\alpha)} \end{array}$$

A composição de morfismos é definida coordenada a coordenada. Desta forma fica definida a **categoria das representações** de (Γ, ρ) . Dada Λ uma k -álgebra de dimensão finita, indecomponível, básica, e sendo k algebricamente fechado, pelo teorema de Gabriel Λ é isomorfa a uma álgebra de caminhos da forma (Γ, ρ) , nestas condições há um importante resultado que nos assegura que a categoria construída do forma acima e $\text{mod } \Lambda$ são equivalentes.

1.8 Seqüências e Aljavas de Auslander-Reiten

As seqüências que quase cindem, atualmente conhecidas como seqüências de Auslander-Reiten, desempenham um papel importantíssimo na teoria de representações de álgebras. M. Auslander e I. Reiten desenvolveram estas técnicas na década de 70 e elas influenciaram decisivamente o rumo de toda a teoria.

Apresentaremos sucintamente as definições básicas e enunciaremos alguns dos resultados mais importantes a este respeito. Para um tratamento mais aprofundado recomendamos [4] que traz com riqueza de detalhes todos estes conceitos.

Definição 1.25. *Seja Λ uma álgebra de Artin. Chamaremos de seqüência de Auslander-Reiten uma seqüência exata curta da forma:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

verificando as seguintes afirmações:

- M e N são indecomponíveis
- para qualquer morfismo $h : X \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$, que não seja um epimorfismo que cinde, existe $\hat{h} : X \longrightarrow E$ tal que $g\hat{h} = h$

O próximo resultado que enunciaremos nos garante a existência e unicidade, a menos de isomorfismos, de seqüências de Auslander-Reiten em $\text{mod}\Lambda$ quando Λ é uma álgebra de Artin.

Teorema 1.7. (Auslander-Reiten) *Sejam Λ uma álgebra de Artin e M um Λ -módulo indecomponível.*

- Se M não for projetivo existe uma (única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten terminando em M .

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Nesse caso, temos $N \cong D\text{Tr}(M)$.

- Se M não for injetivo existe uma (única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten iniciando em M .

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Nesse caso, temos $N \cong \text{Tr}D(M)$.

Definição 1.26. *Sejam Λ uma álgebra de Artin, M um Λ -módulo indecomponível e $g : E \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$. Diremos que g é um morfismo quase cindido à direita se: (a) g não for epimorfismo que cinde; (b) Se $h : X \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$ e não for epimorfismo que cinde, então existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$*

Dualmente um morfismo $f : M \longrightarrow E$ é quase cindido à esquerda, se f não é mono que cinde e todo morfismo $h : M \longrightarrow X$ que não for monomorfismo que cinde se fatora através da f .

Definição 1.27. Dizemos que $f : M \longrightarrow E$ é um morfismo **poço**, ou simplesmente **poço** em M , se f for um morfismo minimal à direita e quase cindido à direita. Analogamente, um morfismo é dito **fonte** quando for minimal á esquerda e quase cindido à esquerda.

Definição 1.28. Seja Λ uma álgebra de Artin. Um morfismo $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ que não cinde é dito **irredutível** se para cada decomposição de $f = gh$ ou g é um epimorfismo que cinde ou h é monomorfismo que cinde.

Um morfismo $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ que não é monomorfismo nem epimorfismo sempre pode ser fatorado naturalmente (ver [4] cap II), pensando em sua imagem. Portanto, se f é irredutível, f é um epimorfismo ou um monomorfismo.

Proposição 1.7. [4] Sejam Λ uma álgebra de Artin e M um Λ módulo indecomponível. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) Um morfismo $h : M \longrightarrow X$ é irredutível se e somente se existe $h' : M \longrightarrow X'$ tal que $(h, h')^t$ é uma fonte em M .

(b) Um morfismo $h : X \longrightarrow M$ é irredutível se e somente se existe $h' : X' \longrightarrow M$ tal que (h, h') é um poço em M .

Proposição 1.8. Dada um seqüência de Auslander-Reiten:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Vale que f é um morfismo fonte e g é um morfismo poço. Ademais qualquer outro morfismo fonte em N (ou poço em M) é isomorfo a f (ou a g).

Proposição 1.9. (a) Se P é um projetivo indecomponível não simples então a inclusão do radical de P em P é o único morfismo poço, a menos de isomorfismo chegando em P . (b) Se I é um injetivo indecomponível não simples então a projeção natural de I em $I/\text{soc}I$ é o único morfismo fonte, a menos de isomorfismo, saindo de I .

• Aljava de Auslander-Reiten

Definição 1.29. [4] Seja Λ uma álgebra de Artin. A **aljava de Auslander-Reiten** de Λ , a qual denotamos por Γ_Λ , é a aljava construída da seguinte forma:

- (1) Os vértices, $[M]$, estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos Λ -módulos, M , indecomponíveis, ou seja, para cada $M \in \text{ind}(\Lambda)$ associamos um vértice $[M] \in [M] = [M']$ se e somente se $M \cong M'$.

- (2) Existe uma flecha de $[M]$ para $[M']$ se e somente se existe um morfismo irredutível de M para M' .

Definição 1.30. [26] Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária. Dizemos que um Λ -módulo X é **pós-projetivo** (respectivamente **pré-injetivo**) quando existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(\text{Tr}D)^r P = X$ (respectivamente $(D\text{Tr})^r I = X$ para algum Λ -módulo projetivo P (respectivamente Λ -módulo injetivo I).

Queremos ressaltar que M. Auslander e S. Smalø definiram módulos pré-injetivos (e pós-projetivos) num contexto mais geral, contudo, neste trabalho necessitamos apenas deste conceito para álgebras artinianas hereditárias.

Observação 1.2. Muitos autores chamam os módulos pós-projetivos de pré-projetivos.

Capítulo 2

Conjuntos Parcialmente Ordenados e Problemas Matriciais

Neste Capítulo vamos iniciar o estudo das representações de posets de acordo com a proposta de Nazarova e Roiter em [21]. Gostaríamos de ressaltar que em [21] Nazarova e Roiter logo após apresentarem o conceito básico de representação de posets e, valendo-se apenas deste (ou seja, de forma direta) demonstraram que os posets de *largura* maior ou igual a quatro são de tipo de representação infinito e que os posets de largura menor ou igual a dois são de tipo de representação finito. Já os posets de largura três podem ser de tipo de representação finito ou não. A nossa demonstração deste segundo resultado difere da apresentação em [21] pois para este resultado seguimos mais de perto [28]. A maneira que os referidos pesquisadores encontraram para superar os obstáculos foi bastante engenhosa. Desenvolveram o que chamamos hoje de algoritmo de Nazarova-Roiter ou algoritmo de derivação de um poset com relação a um elemento maximal. Dado um poset I , aplicando o algoritmo obtém-se outro poset I' , que tem o mesmo tipo de representação do primeiro. Mais ainda, quando o poset é de tipo de representação finito o número de representações indecomponíveis de I' é estritamente menor que o de I . Desta forma, após um número finito de derivações sucessivas de um poset de tipo de representação finito se obtém o conjunto vazio. Apoiando-se neste raciocínio os autores puderam esclarecer quando um poset de largura três é de tipo de representação infinito.

Terminaremos o capítulo dando uma interpretação da categoria de representações como *problema matricial*, ou seja a cada poset associaremos um *problema matricial*, cujas

representações descrevem naturalmente as representações de I .

2.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição 2.1. *Seja I um conjunto finito dotado de uma ordem parcial $\preceq$. Chamaremos de **poset** $\mathbf{I}$ ao par ordenado $(I, \preceq)$, veja [21]. Um subposet $(I', \preceq)$ do poset $(I, \preceq)$ é o poset determinado por um subconjunto I' de I dotado da ordem de I restrita a I' .*

A notação $x \prec y$ significa que: $x \preceq y$ e $x \neq y$

Dado um poset $(I, \preceq)$ podemos considerar o poset oposto $(I^{op}, \preceq)$ formado por I e ordem parcial:

$$\forall a, b \in I, a \preceq b \text{ em } (I^{op}, \preceq) \iff b \preceq a \text{ em } (I, \preceq)$$

Se não há lugar a confusão, denotaremos o poset $(I, \preceq)$, simplesmente, por I .

Definição 2.2. : *Sejam $a, b \in (I, \preceq)$ diremos que b é sucessor de a quando $a \preceq b$. E neste caso diremos também que a é antecessor de b .*

Para cada elemento c do poset $(I, \preceq)$ definiremos:

$$c^\Delta = \{x \in I \mid c \preceq x\} \text{ o conjunto dos sucessores de } c \text{ em } (I, \preceq).$$

$$c^\nabla = \{x \in I \mid x \preceq c\} \text{ o conjunto dos antecessores de } c \text{ em } (I, \preceq).$$

Definição 2.3. : *Dado um poset I e um elemento $a \in I$, dizemos que a é um **sucessor imediato** de $b \in I$ se forem observadas as condições:*

- $b \prec a$;
- $\nexists x \neq a \text{ em } I \text{ tal que: } b \prec x \prec a.$

Definição 2.4. *Dois posets $(I, \preceq)$ e $(J, \preceq')$ são isomorfos se existe uma bijeção f entre seus elementos de forma que: $a \preceq b \iff f(a) \preceq' f(b)$.*

Definição 2.5. *Dizemos que o poset $(I, \preceq)$ está contido plenamente no poset $(J, \preceq')$ quando $(I, \preceq)$ é isomorfo a algum subposet de $(J, \preceq')$.*

Observação 2.1. *Dados um poset $(I, \preceq)$ e um conjunto S com o mesmo número de elementos que I podemos definir um poset $(S, \preceq)$ transportando a S a ordem de I da seguinte forma. Se δ , uma bijeção entre os elementos de I e os de S e definamos:*

$$\delta(a) \preceq \delta(b) \iff a \preceq b.$$

Graças a esta construção podemos identificar os elementos do poset $(I, \preceq)$ com os do conjunto $A = \{1, \dots, n\}$, onde n é o número de elementos de I porque podemos escolher uma bijeção δ entre I e A de forma que: $a \preceq b \implies \delta(a) \leq \delta(b)$. Obteremos desta forma o poset $(A, \preceq)$, o qual denotaremos por $\{1, \dots, n\}_\delta$, que é isomorfo a $(I, \preceq)$.

Dado um poset I podemos representá-lo diagramaticamente representando cada elemento $x \in I$ por um vértice v_x e desenhando uma flecha do vértice v_x para o vértice v_y sempre que y for sucessor imediato de x .

Exemplo 2.1. O conjunto dos ideais de $\mathbb{Z}$ que contém $30\mathbb{Z}$ forma um poset onde a ordem parcial é dada pela inclusão. Este poset tem a seguinte representação diagramática:

Figura 2.1: Um poset em representação diagramática

Definição 2.6. Um subposet a de $(I, \preceq)$ é dito **discreto** se seus elementos são dois a dois incomparáveis.

Definição 2.7. Chamaremos de **largura do poset** $(I, \preceq)$ e indicaremos $w(I)$ o seguinte número:

$$w(I) = \text{máximo} \{ \#A \mid A \text{ é subposet discreto de } I \}$$

2.2 Problemas Matriciais

Nesta seção trataremos dos principais fundamentos que necessitamos para trabalharmos com problemas matriciais. Começamos chamando a atenção para a interpretação das matrizes sobre um corpo k como representação de uma transformação linear entre dois k -espaços vetoriais de dimensão finita como sugere a definição:

Definição 2.8. *Sejam I, J subconjuntos de $\mathbb{N}$, com i e j elementos respectivamente, e k um corpo. Uma matriz sobre k é uma função $M_{i \times j}(k) : I \times J \longrightarrow k$.*

Agora vamos introduzir os conceitos de transformações elementares de linhas e colunas de matrizes e descrever sua interpretação como produto matricial.

Definição 2.9. *Dada uma matriz A . As seguintes operações são chamaremos de operações elementares sobre A .*

- $[E_1]$: *Permutação de duas linhas*
- $[E_2]$: *Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo.*
- $[E_3]$: *Substituição da i -ésima linha pela soma da i -ésima linha adicionada à j -ésima linha multiplicada por um escalar.*

O resultado de aplicar $[E_i]$ na matriz A será denotado por $[E_i](A)$.

Diz-se que uma matriz A é equivalente por linhas a uma matriz B quando B pode ser obtida de A por uma sequência finita das operações $[E_1], [E_2]$ e $[E_3]$.

As operações elementares de colunas são definidas de forma similar.

A cada operação elementar de linhas, $[E_i]$ associamos uma matriz E , quadrada de ordem m , obtida pela aplicação desta operação elementar na matriz identidade de ordem m , I_m , isto equivale a dizer que $E_i = [E_i](I_m)$. Analogamente, a uma operação elementar de colunas $[F_i]$ é associada a matriz $F_i := [F_i](I_m)$ resultará que $[F_i](A) = AF_i$.

Um resultado que vamos usar freqüentemente é um teorema muito conhecido do curso de álgebra linear que nos garante que uma matriz A é inversível se e somente se A é equivalente por linhas à matriz identidade.

Dada uma matriz $A \in M_{mt}(k)$ podemos descrever explicitamente quais as matrizes correspondentes as transformações elementares de linhas.

- $[E_1]A = (I_m - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})A$
- $[E_2]A = (I_m + (\lambda - 1)E_{ii})A$ para $\lambda \neq 0$
- $[E_3]A = (I_m + xE_{ii})A$, sendo $x \in K$.

Definição 2.10. *Seja k um corpo e consideremos Mat um subconjunto do conjunto de todas as matrizes de todas as dimensões, isto é, $Mat \subseteq \{A \in M_{s \times t}(k), \text{ tais que } s, t \in \mathbb{N}\}$. Seja G um conjunto de operações elementares de linhas ou colunas que atuam sobre o conjunto Mat .*

Definição 2.11. *Nas mesmas condições da definição acima. Diremos que uma matriz $A \in Mat$ é G -equivalente a uma matriz $B \in Mat$, e denotaremos $A \sim_G B$, quando a matriz A pode ser obtida a partir da matriz B através de um número finito de aplicações sucessivas de operações elementares de $G \cup G^{-1}$. Portanto, sem perda de generalidades, podemos supor que G é um grupo.*

Vamos supor os objetos de Mat estão expressos em blocos e que está definida uma soma $\oplus$ bloco a bloco em Mat . Diremos que a classe $A/\sim_G$ representada por A em Mat é **decomponível** em Mat se existe uma matriz B em Mat tal que:

$A \sim_G B$ e $B = C \oplus D$, sendo C e D matrizes de Mat diferentes de 0 (isto é com alguma linha ou coluna não nula). Uma matriz será **indecomponível** em Mat quando não for decomponível em Mat .

Ao problema de classificar os objetos indecomponíveis em Mat é o que chamaremos de **problema matricial**. Para ele usaremos a notação: (Mat, G) .

Observação 2.2. *Notemos que na definição de problemas matriciais estamos admitindo matrizes cujo número de linhas ou colunas é zero. Apesar de não ser muito intuitiva esta exigência ela se faz necessária, logo após associarmos a cada poset um problema matricial através de um exemplo ficará mais claro a importância desta exigência, até certo ponto, inesperada.*

As representantes das matrizes indecomponíveis (não isomorfas dois a dois) de (Mat, G) são as chamadas formas canônicas de Mat com relação a (Mat, G) e (Mat, G) fica resolvido quando se têm as formas canônicas. Diremos que (Mat, G) é de tipo de representação finito quando o conjunto das G -isoclasses indecomponíveis é finito.

- Exemplos de problemas matriciais

Exemplo 2.2. *Seja Mat o conjunto das matrizes retangulares, dotado da soma direta de matrizes e sendo G o conjunto das operações elementares de linhas e colunas. Neste caso (Mat, G) é um problema matricial, para o qual existem três formas canônicas que correspondem as matrizes simples (indecomponíveis de dimensão total 1 ou 2). De fato são G -equivalentes as matrizes A e VAU onde U e V são invertíveis de tamanho adequado, de modo que toda matriz A do problema matricial será equivalente a uma matriz da forma:*

$$A' = \begin{bmatrix} E_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde E_x é a matriz identidade de tamanho x

Exemplo 2.3. *Seja Mat o conjunto das matrizes quadradas, dotado da soma direta de matrizes, e seja G o conjunto de todas as conjugações de matrizes quadradas, isto é, cada operação elementar de linha é seguida pela mesma operação elementar de colunas. Neste caso temos transformações da forma: $A \longrightarrow U^{-1}AU$, onde U é uma matriz invertível. Aqui (Mat, G) é um problema matricial, e se K for um corpo algebricamente fechado, suas formas canônicas serão os blocos de Jordan. Assim qualquer matriz A indecomponível do problema matricial será equivalente a uma matriz A' da forma:*

$$A' = \begin{bmatrix} J_{\lambda, x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde

$$M_x(k) \ni J_{(\lambda, x)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda \end{bmatrix}$$

2.3 Representações Matriciais dos Posets e Problemas Matriciais

Definição 2.12. *Seja I um poset de n elementos. Diremos que uma matriz A é uma k -representação do poset I , quando A pode ser vista da forma: $(A_1 \mid \dots \mid A_n)$, tal que cada bloco A_i é um elemento de $M_{t_i \times s_i}(k)$ sendo t_i, s_i números naturais. ou seja, A pode ser vista como uma matriz de n blocos.*

Definição 2.13. *Seja A uma k -representação de I como acima. Chamaremos de vetor dimensão da matriz A e denotaremos por $\dim A$ a $n+1$ -upla $(s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$ onde para cada $x \in \{1, \dots, n\}$, s_x é o número de colunas da matriz-bloco A_x de A e s_{n+1} é o número de linhas de A . E chamaremos de dimensão total de A a soma das componentes do vetor $\dim A$.*

Seja Mat_I o conjunto das k -representações do poset I . Dadas as matrizes B, C de Mat definiremos a soma $B \oplus C$ como o objeto de Mat para o qual x -ésimo bloco é:

$$(B \oplus C)_x = \begin{bmatrix} B_x & 0 \\ 0 & C_x \end{bmatrix}$$

Observemos que: $\dim(B \oplus C) = \dim(B) + \dim(C)$.

Definição 2.14. *Ainda nos referindo ao poset I consideremos o conjunto de transformações elementares de linhas ou colunas G_I que é gerado pelas transformações elementares seguintes:*

- (1) *Todas as transformações elementares de linhas da matriz A ;*
- (2) *Todas as transformações elementares de colunas dentro de cada bloco;*
- (3) *sempre que $i \preceq j$, as adições de múltiplos de colunas do i -ésimo à colunas do j -ésimo bloco.*

Desta forma (Mat_I, G_I) é um problema matricial que se diz associado a I .

Dizemos que o poset I é de tipo de representação finito se e somente se (Mat_I, G_I) é de tipo de representação finito.

Observação 2.3. *No capítulo 5 vamos definir as categorias vetorespaciais e veremos que a cada poset está associado uma categoria vetorespacial. Em seguida será definido os tipos de representação finito, manso, e selvagem para categorias vetorespaciais.*

Dispondo da definição de tipo de representação de categorias vetorespaciais podemos definir o tipo de representação do poset a partir do tipo de representação da categoria vetorespacial associada a ele. Assim, por exemplo, diremos que o poset I é de tipo de representação manso se a categoria vetorespacial associada a ele o for.

É importante notarmos que se J está contido plenamente em I toda k -representação indecomponível de J é também uma k -representação indecomponível de I .

O exemplo a seguir está associado a observação 2.2,

Exemplo 2.4. Vamos supor por um instante que na definição de problemas matriciais estamos admitindo matrizes com uma ou mais linhas e uma ou mais colunas. Consideremos I o poset discreto com um único elemento, de acordo com a definição acima as seguintes matrizes seriam k -representações indecomponíveis de (Mat_I, G_I) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

E teríamos $C \oplus C \oplus C \oplus C = C \oplus B \oplus A$. Ou seja (Mat_I, G_I) não seria uma categoria de Krull-schmidt.

Exemplo 2.5. Consideremos o poset

$$I = \left\{ o \longrightarrow o \longrightarrow o \right\}$$

Uma k -representação de I , é: $A = (A_1 \mid A_2 \mid A_3)$ com $A_i \in M_{t \times s_i}(k)$, $1 \leq i \leq 3$. Por operações elementares no primeiro bloco podemos reduzi-lo à soma direta uma matriz identidade de tamanho a_1 e uma matriz nula. Por transformações elementares de colunas poderemos zerar as a_1 primeiras linhas do segundo e terceiro bloco. Mantendo fixa as primeiras a_1 -linhas e colunas poderemos por transformações de linhas poderemos expressar o bloco definido pelas últimas $(s_2 - a_1)$ -linhas do segundo bloco como soma direta uma matriz identidade de tamanho a_2 e uma matriz nula. Finalmente, podemos transformar de maneira análoga o terceiro bloco. Ou seja $A \sim_{G_I} B$, onde B tem a forma:

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{array} \right]$$

Sendo que as matrizes A_i $1 \leq i \leq 3$ são expressas do modo:

$$A_i = \left[\begin{array}{c|c} E_{a_i} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Onde a_1, a_2, a_3 são naturais tais que $a_1 + a_2 + a_3 \leq s_4$.

Indecomponíveis Canônicos

É conveniente neste instante fixarmos uma notação para representarmos certos indecomponíveis especiais os quais são chamados de indecomponíveis canônicos.

- K_1^0 para denotar o indecomponível com todos os blocos sem colunas e com uma linha
- K_0^j para denotar o indecomponível referente a matriz não possui linha, cujo j -ésimo bloco possui apenas uma coluna e todos os demais são sem coluna.
- K_1^j para denotar o indecomponível que possui apenas uma linha, tem o j -ésimo bloco com uma coluna e uma entrada não nula e todos os demais blocos são sem colunas.
- Sejam $j_1, \dots, j_s$ elementos incomparáveis de I , denotaremos por $K^{j_1, \dots, j_s}$ o indecomponível que possui uma linha, os blocos A_{j_r} todos com uma só coluna ($r \in \{1, \dots, s\}$), e entrada não nula, e todos os demais blocos sem colunas.

Seja $A \in Mat_I$ com vetor dimensão $\dim A = (s_1, \dots, s_n, t)$ então teremos:

$$\begin{aligned}
 A \oplus K_1^0 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & & & & \\ & A_1 & & | & \dots & & \dots & | & & A_n \\ - & - & - & | & - & \dots & - & | & - & - & - \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \\
 A \oplus K_0^i &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & | & & & | & |0| & & | \\ & & & | & \dots & & | & : & & | \\ A_1 & | & \dots & & \dots & | & A_i & |0| & & A_n \\ & & & | & \dots & & | & : & & | \\ & & & | & \dots & & | & |0| & & | \end{array} \right] \\
 A \oplus K_1^i &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & | & & & | & |0| & & | \\ & & & | & \dots & & | & : & & | \\ A_1 & | & \dots & & \dots & | & A_i & |0| & & A_n \\ - & - & - & | & - & \dots & - & : & - & - & - \\ 0 & \dots & & | & \dots & & 0 & |1| & & & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Seja $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)$, $\dim A = (s_1, \dots, s_n, t)$ uma k -representação indecomponível do poset I . Então $A = K_0^j$ para algum $j \in I$ ou A_i representa uma transformação linear injetora $A_i : K^{s_i} \rightarrow K^t$ com relação às bases canônicas.*

Demonstração. De fato ao tomarmos $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)$, $\dim A = (s_1, \dots, s_n, t)$ uma k -representação indecomponível do poset I que não seja da forma $A = K_0^j$ para algum

$j \in I$. Se o i -ésimo bloco de A não fosse injetora, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, ou seja existe um vetor $v = (v_1, \dots, v_{s_i}) \neq 0$ tal que $A_i(v) = 0$.

$$0 = A_i(v) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & \dots & a_{ts_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{s_i} \end{bmatrix}$$

Consideremos as seguintes operações elementares: multiplica-se a j -ésima coluna de A_i por v_j , para cada $j \neq s_i$ e adiciona-se última coluna multiplicada por v_{s_i} . Desta forma podemos obter uma matriz equivalente a A cujo i -ésimo bloco tem uma coluna nula, logo K_0^i é somando de A , como A é indecomponível segue $K_0^i = A$, que é uma contradição.

□

O primeiro teorema que iremos apresentar descreve como são os objetos indecomponíveis de (Mat, G_I) quando o poset I tem largura menor ou igual a dois.

Teorema 2.1. *Seja I um poset de n elementos com largura menor ou igual a dois, n um natural não nulo. As seguintes afirmações são válidas:*

- (1) *Se $w(I) = 1$ então (Mat_I, G_I) é de tipo de representação finito e as k -representações indecomponíveis de I são $K_1^i, K_1^0 e K_0^i, i \in I$.*
- (2) *Se $w(I) = 2$ então (Mat_I, G_I) é de tipo de representação finito e as k -representações indecomponíveis de I são $K_1^i, K_1^0, K_0^i e K_1^{r,s}; i, r, s \in I; r$ e s incomparáveis.*

Demonstração. Vamos realizar a prova por indução sobre n . Caso $n = 1$ claramente as únicas k -representações indecomponíveis de I são $K_1^1, K_1^0 e K_0^1$, logo a validade do teorema é verificada. Suponhamos que o teorema seja válido para todo poset com menos de n elementos; tomemos A , uma representação indecomponível de Mat_I , e seja $\dim A = (s_1, \dots, s_n, t)$. Se $t = 0$ então $A \sim_{G_I} K_0^j$ para algum $j \in I$, e portanto o teorema é válido. Agora, o caso $t \neq 0$ será subdividido em dois casos, quando $s_1 = 0$ e o caso $s_1 \neq 0$. No caso em que $s_1 = 0$ teremos que A é uma k -representação de $\{2, \dots, n\}$ e utilizando a hipótese de indução concluímos que o teorema é válido. Se $s_1 \neq 0$ novamente temos que avaliar dois casos possíveis, quando A_1 tem alguma linha nula e quando A_1 tem todas as linhas não nulas. Se A_1 tiver alguma linha nula teremos que K_0^1 é somando de A , como A é indecomponível, segue que $A = K_0^1$.

Vamos estudar agora o caso em que A_1 é uma matriz que não contém nenhuma coluna nula. Novamente vamos avaliar dois casos possíveis, a saber, (a) quando o poset $(I, \preceq)$

tem um único elemento minimal, e (b) o caso em que $(I, \preceq)$ tem dois elementos minimais, digamos 1 e c .

Caso (a): Por operações elementares de linhas podemos por 1 na posição (1,1) do bloco A_1) e anular todas as casas $(s, 1)$ deste bloco, $s \in \{1, ..t\}$ e por transformações elementares de colunas poderemo zerar todas as entradas $(1, r)$, onde $r \in \{2, .., s_1 + .. + s_n\}$, já que 1 é o único elemento minimal. Ou seja $A \sim_{G_I} B$ onde B tem a forma:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & \dots & - & - & - & - \\ & & & & & & & & \\ : & A'_1 & & \dots & & \dots & & & A'_n \\ 0 & \dots & & & \dots & & & & \dots \end{array} \right]$$

Caso em que 1 e c são elementos minimais, note que se $s_c = 0$ $A \in Mat_{I-\{c\}}$, pela hipótese de indução, segue a validade do teorema, e caso $A_c = 0$ também estaremos com o problema resolvido uma vez que nesta situação K_0^c será somando de A .

Vamos então estudar a situação em que A_c é não nula. Primeiramente vamos observar que os elementos: $1, .., (c-1)$ não são comparáveis à c . Por operações elementares de linhas e colunas podemos proceder de forma similar ao que fizemos no caso em que havia um único elemento minimal e zerar as entradas da primeira linha desde a segunda coluna do primeiro bloco até a última coluna do $(c-1)$ -ésimo bloco. Ou seja $A \sim_{G_I} B$ onde B tem a forma:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ - & - & - & - & \dots & - & - & - & - & - & - & - & \\ & & & & & & & & & & & & \\ : & A'_1 & & \dots & & \dots & A'_{c-1} & A'_c & & & & A'_n & \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & & & \end{array} \right]$$

Agora mantendo fixa a primeira linha efetuando operações elementares de linhas obtemos uma matriz $B' \in Mat_I$ tal que: $B' \sim_{G_I} B$ onde B' tem a forma:

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ - & - & - & - & \dots & - & - & - & - & - & - & - & \\ & & & & & & & & & & & & \\ : & A''_1 & & \dots & & \dots & A''_{c-1} & A''_c & & & & A''_n & \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & & & \end{array} \right]$$

Onde

$$A_c'' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & .. & x_l & x_{l+1} & ... & x_{x_c} \\ & I_h & & 0... & ... & 0 \\ 0 & & ... & 0 & ... & 0 \end{array} \right]$$

Dispondo do bloco A_c'' desta forma, poderemos zerar da segunda à h -ésima linha de todos os blocos A_x por operações de colunas, com $x \in c^\nabla$. Com operações elementares de linhas poderemos zerar os elementos x_i para $i \in \{1, ..l\}$, fazendo estas operações a primeira coluna dos primeiros $c - 1$ blocos serão todos nulos. mas com o 1 da posição $(1,1)$. e nos valendo das operações de linhas restauremos os elementos nulos na primeira linha destes blocos que eventualmente mudaram. Por isto podemos supor que em A_c'' $x_i = 0$ para $i \in \{1, ..l\}$. Agora observemos que caso exista os elementos x_i com $i \in \{(l+1), ..x_{s_c}\}$ e algum deles for nulo teremos que K_0^c é somando de A . Agora se alguns destes x_i com $i \in \{(l+1), ..x_{s_c}\}$ é não nulo, por operações de colunas poderemos zerar os demais, portanto teríamos apenas $x_{l+1} = 1$ e poderíamos zerar toda a primeira coluna a partir deste elemento, assim $K_1^{1,c}$ seria somando de A .

Resta estudarmos o caso em que não exista os elementos x_i com $i \in \{(l+1), ..x_{s_c}\}$. Nesta situação se $h = 0$ teremos: $A = K_1^{1,c}$ se x_1 não for nulo e $A = K_0^c$ caso $x_1 = 0$.

Antes de tratarmos do caso em que h for não nulo é interessante observar que podemos supor que caso todos elementos da primeira linha em colunas a partir do bloco A_c forem nulos segue que K_1^1 é somando direto de A . E caso exista algum elemento não nulo podemos supor sem perda de generalidades que ele pertence a um bloco A_s onde s não é comparável à 1.

Agora para avaliarmos o caso em que h for não nulo, consideremos $J = \{s \in I - \{1\} \mid 1 \not\leq s\}$. Observemos que como os elementos de J são não são comparáveis ao elemento minimal $1 \in I$ e $w(I) = 2$ segue que todos elementos de J é ordenado.

Por transformações elementares de colunas poderemos zerar todas as entradas entre a segunda e a $(h+1)$ -ésima linha de todos os blocos A_x em que $x \in J$. Como J é ordenado ou vazio, e o caso em que é vazio teremos que $A = K_1^1$, podemos tomar o elemento m mínimo de J e fazermos a verificação se o posto de A_m é não nulo (por transformações elementares de linhas das linhas posteriores à $h+1$ -ésima) transformações em linha em cada bloco A_x em que $s \in J$. No caso do posto ser nulo a existência de algum elemento não nulo neste bloco implicará que $A = K_1^{1,m}$ caso contrário $A = K_0^m$. Agora caso o posto de A_m seja não nulo, procedendo de forma análoga ao que fizemos na análise do bloco A_c teremos que a existência de algum elemento não nulo na primeira linha deste bloco

determina que $A = K_1^{1,m}$, a existência de alguma coluna nula neste bloco determina que $A = K_0^m$. E caso a primeira linha do bloco seja nula e não haja colunas nulas neste bloco devemos efetuar todo este processo que fizemos para o bloco A_m para o próximo elemento de J , uma vez que este é ordenado. Observando que $\text{posto}A_m + \text{posto}A_c + 1 \leq t$ segue que este processo termina com no máximo $(t - (\text{posto}A_m + \text{posto}A_c + 1))$ passos. (já que se em algum instante o posto for nulo a existência de elemento não nulo no bloco determina a descrição de A , terminando o processo). $\square$

Teorema 2.2. *Qualquer poset com largura maior ou igual à quatro é de tipo de representação infinito.*

Demonstração. Seja I um poset com largura maior ou igual à quatro. Logo existe um subposet discreto de I com quatro ou mais elementos conseqüentemente o poset

$$J = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = \left\{ \begin{array}{cccc} o & o & o & o \end{array} \right\}$$

é um subposet de I . É suficiente mostrarmos que J é de tipo de representação infinito, pois toda representação indecomponível de J pode ser vista como representação indecomponível de I da seguinte forma: Se $A = (A_1 \mid \cdots \mid A_4)$ é uma representação de J podemos considerar a representação $B = (B_1 \mid \cdots \mid B_n)$, definida da seguinte forma: $B_{ji} = A_i$ para $1 \leq i \leq 4$ e todos os demais blocos vazios. Claro que B é indecomponível sempre que A o é.

Afirmamos que J é de tipo de representação infinito.

Provamos a afirmação verificando que todas as k -representações da forma:

$$A_{n,\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & E_n & E_n & E_n \\ E_n & 0 & J_{n,\lambda} & E_n \end{bmatrix}$$

onde $J_{n,\lambda}$ é um bloco de Jordan de tamanho n e E_n é a matriz identidade de tamanho n são indecomponíveis para todo n natural. De fato, sobre a representação $A_{n,\lambda}$ não se pode efetuar operações de colunas entre os blocos uma vez que o poset J é discreto e $A_{n,\lambda}$ é invariante por transformações elementares de linhas, isto é, se usarmos operações de linhas para anularmos algum dos blocos obtemos uma outra representação com os blocos de $A_{n,\lambda}$ com distinção apenas de posição. $\square$

2.4 Categorias correspondentes

Definição 2.15. *Dados um poset I com n elementos e (Mat_I, G_I) seu correspondente problema matricial, podemos introduzir uma categoria cujos objetos são as k -representações do poset I , a qual será denotada pelo mesmo símbolo (Mat_I, G_I)*

Um morfismo entre dois objetos A e B de (Mat_I, G_I) consiste de um par (C, D) , onde C e D são matrizes quadradas tais que: $CA = BD$. Sejam (C, D) um morfismo de A para B e (C', D') um morfismo de B para C a composição de (C, D) por (C', D') é definida por $(C'C, D'D)$

Em particular um isomorfismo é dado por um par de matrizes invertíveis. Neste caso B , é uma cópia isomorfa de A , e portanto pode ser obtida a partir de A por transformações arbitrárias de linhas e/ou colunas, de acordo com I . Aqui C corresponde a transformações arbitrárias de linhas e D a transformações arbitrárias de colunas, em compatibilidade com o poset I .

Utilizando esta definição é fácil ver que (Mat_I, G_I) é uma categoria aditiva e de Krull-schmidt. Queremos ressaltar que o que geralmente costuma ser feito é considerar (Mat_I, G_I) como categoria cujos objetos são k -representações do poset I e cujos morfismos são somente os isomorfismos. Mas, deste modo a categoria não é aditiva, então classicamente é considerada também Mat^{ad} a categoria aditiva proveniente de (Mat_I, G_I) (veja [29], [17]). Aqui, nós optamos por já definir (Mat_I, G_I) como uma categoria aditiva.

Vamos definir uma outra categoria que permitirá uma interpretação diagramática de (Mat_I, G_I) .

Definição 2.16. *Seja $\mathcal{B}_I$ a categoria cujos objetos são triplas (V, V_{n+1}, ϕ) onde $V = V_1 \amalg \dots \amalg V_n$, V_{n+1}, V_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ são k -espaços vetoriais de dimensões finita e ϕ é uma família $(\phi_j)_{j \in I}$ de transformações k -lineares $\phi_i : V_i \rightarrow V_{n+1}$. Sejam (V, ϕ) e (V', ϕ') objetos de $\mathcal{B}_I$ um morfismo de (V_{n+1}, ϕ) para (V'_{n+1}, ϕ') é um par (g, g_{n+1}) de transformações lineares, sendo $g : V \rightarrow V'$, $g = (g_{ij})_{i,j \in I}$ com $g_{ij} : V_j \rightarrow V'_i$ é uma transformação k -linear e $g_{ij} = 0$ se $i \not\leq j$ em I .*

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

de maneira que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \oplus \cdots \oplus V_n & \xrightarrow{(\phi_j)} & V_{n+1} \\ \uparrow g & & \uparrow g_{n+1} \\ V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_n & \xrightarrow{(\phi'_j)} & V'_{n+1} \end{array}$$

Cálculos simples mostram que β_I é de fato uma categoria.

Definição 2.17. Dado um objeto $V = (V_1 \coprod \cdots \coprod V_n, V_{n+1}, \phi)$ de β_I definimos dimensão de V e denotamos por $\dim V$ a $(n+1)$ -upla $(\dim_k V_1, \dots, \dim_k V_n, \dim_k V_{n+1})$.

Agora podemos definir um funtor q da categoria (Mat_I, G_I) na categoria β_I da seguinte forma:

Definição 2.18. Se $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n) \in (Mat_I, G_I)$ e $\dim A = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$ então $q(A)$ será:

$$q(A) = \begin{array}{ccc} k^{s_1} & & \\ \coprod & \searrow^{A_1} & \\ \vdots & \longrightarrow & k^{s_{n+1}} \\ \coprod & \nearrow_{A_n} & \\ k^{s_n} & & \end{array}$$

E sendo $(C, D) : A \longrightarrow B$ um morfismo em (Mat_I, G_I) fazemos $q(C, D) = (D, C)$.

Proposição 2.2. A categoria β_I tem as propriedades:

- (1) A categoria β_I é aditiva e de Krull-Schmidt.
- (2) Um morfismo (g, g_{n+1}) é isomorfismo $\iff g_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$ e g_{n+1} são isomorfismos.
- (3) Se $V \neq 0$ é indecomponível e $\phi = (\phi_i)_{i \in I} \implies$ cada ϕ_i é injetora.

Demonstração. Utilizando apenas conceitos básicos de categorias, veja [2], podemos verificar a validade das afirmações (1) e (2).

Agora vamos verificar a validade da asserção (3). Sendo $V = (V_1 \dots, V_n, V_{n+1}, \phi)$, se existe algum $i \in I$ tal que ϕ_i não é injetora, podemos escrever $V_i = S_i \oplus \text{Ker}(\phi_i)$, desta forma podemos considerar $V' = (V'_1 \dots, V'_n, 0, 0)$ onde $V'_t = 0$ se $t \neq i$ e $V'_i = \text{Ker}(\phi_i)$, e teremos que $V = V' \oplus (V_1 \dots S_i, \dots V_n, V_{n+1}, (\phi)_{i \in I})$, ou seja obteremos que $q(K_0^i)$ é somando de V , portanto vale (3). $\square$

Teorema 2.3. *A transformação q tem as seguintes propriedades:*

- (1) $A \sim B \iff q(A) \cong q(B)$
- (2) A é indecomponível em $(Mat_I, G_I) \iff q(A)$ é indecomponível em β_I
- (3) q estabelece uma correspondência biunívoca entre as G_I -classes de equivalência de indecomponíveis de (Mat_I, G_I) e as classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis de β_I .

Demonstração. (1) $A \sim_{G_I} B$ se e somente se existem C e D matrizes invertíveis tais que $CA = BD$. De acordo com a definição de G_I temos que D é uma matriz triangular superior, e teremos que $(C, D) : A \longrightarrow B$ teremos é um isomorfismo pois C e D são ambas invertíveis. Logo $A \sim_{G_I} B \iff q(A) \cong q(B)$.

(2) $A \sim_{G_I} B' \oplus B$ pelo item anterior temos que $q(A) \cong q(B' \oplus B) = q(B') \oplus q(B)$. E reciprocamente se $q(A) = V' \oplus V$, podemos tomar B e B' em Mat_I tais que $q(B') = V'$ e $q(B) = V$, de novo pelo item (1) segue que $A \sim_{G_I} B' \oplus B$.

(3) Segue imediatamente de (1) e (2). □

Corolário 2.1. *Quando o poset I é discreto a categoria β_I é equivalente à categoria $mod\Lambda$ onde Λ é a álgebra de caminhos da aljava Q_Λ seguinte:*

$$Q_\Lambda = \begin{array}{ccc} & v_1 & \\ & \vdots & \\ & \searrow^{\alpha_1} & \\ v_j & \longrightarrow & v_{n+1} \\ & \vdots & \\ & \nearrow_{\alpha_n} & \\ & v_{s_n} & \end{array}$$

Demonstração. De fato sendo I um poset discreto e (g, g_i) um morfismo de A em B em β_I , pelo fato de I ser discreto temos que $i \not\leq j$ sempre que $i \neq j$ o que implica que $g_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, logo (g, g_i) pode ser visto de forma natural como um morfismo de $mod(kQ_\Lambda)$. E podemos associar a cada representação $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n) \in (Mat_I, G_I)$ a seguinte representação em $mod\Lambda$:

$$\begin{array}{ccc} & k^{s_1} & \\ & \vdots & \\ & \searrow^{A_1} & \\ k^{s_j} & \longrightarrow & k^{s_{n+1}} \\ & \vdots & \\ & \nearrow_{A_n} & \\ & k^{s_n} & \end{array}$$

□

Corolário 2.2. Quando o poset I é linearmente ordenado a categoria β_I é equivalente a categoria $\text{mod } \Lambda$ onde Λ é a álgebra de caminhos associada à aljava Q_Λ da forma:

$$Q_\Lambda = o \longrightarrow o$$

Demonstração. Sejam I um poset linearmente ordenado, $A \in \text{Mat}_I$ cuja dimensão é $\dim A = (s_1, \dots, s_{n+1})$, de acordo com o teorema 2.1 A é soma dos indecomponíveis K_1^i, K_1^0 e K_0^i de Mat_I , conseqüentemente A é G_I -equivalente a uma matriz da forma:

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{x_1} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & B_{x_2} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & B_{x_n} \end{array} \right]$$

onde para cada $i \in 1, \dots, n$, B_{x_i} é uma matriz reduzida a forma:

$$\left[\begin{array}{cc} E_{\gamma(x_i)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sendo $\gamma(x_i) \in \mathbb{N}$ tal que $s = \sum_{1 \leq i \leq n} \gamma(x_i) \leq s_{n+1}$.

Por outro lado a lista completa dos Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos é a seguinte.

$$\begin{array}{l} P_1 = k \longrightarrow k \\ P_2 = 0 \longrightarrow k \quad e \quad I_1 = k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Conseqüentemente B está de modo natural associada a representação

$$X = k^{\sum s_i} \xrightarrow{B} k^{s_{n+1}}$$

$X = P_1^s \amalg P_2^{s_{n+1}-b} \amalg I_1^{d-s}$, onde $d = \sum_{1 \leq i \leq n} s_i$ e b é o posto de B . Fazendo esta a associação obtemos a equivalência desejada. □

Agora vamos definir outra categoria dual à β_I

Observação 2.4. Quando definimos em 2.12 as k -representações de um poset poderíamos, em vez de termos tomado uma matriz em blocos de uma linha, ter optado por tomarmos uma matriz de blocos de uma coluna e, fazendo alterações duais na definição de G_I em

2.14, descreveríamos um sistema de operações elementares G'_I . Definindo a soma destas k -representações também como a soma direta bloco a bloco teríamos um problema matricial (Mat', G'_I) . Veremos a seguir que os problemas matriciais (Mat, G'_I) e (Mat, G_I) são equivalentes. Quando os problemas matriciais são definidos como em 2.12 costuma ser chamados de problemas matriciais horizontais, e quando se utiliza a definição dual dizemos se tratar de problemas matriciais verticais, (veja [17]). Temos o seguinte desenvolvimento análogo ao anterior.

Definição 2.19. Seja Υ_I a categoria cujos objetos são triplas (T, V, ϕ) onde $V = V_1 \amalg \dots \amalg V_n$, T, V_i k -espaços vetoriais de dimensões finita para $i \in \{1, \dots, n\}$ e ϕ uma família $(\phi_j)_{j \in I}$ de transformações k -lineares $\phi_i : T \rightarrow V_i$. Sejam (T, V, ϕ) e (T', V', ϕ') objetos de Υ_I . Um morfismo de (T, V, ϕ) para (T', V', ϕ') é um par (g, g_{n+1}) de transformações lineares, sendo $g : V \rightarrow V'$, $g = (g_{ij})_{i,j \in I}$ com $g_{ij} : V'_i \rightarrow V_j$ é uma transformação k -linear. É exigido que $g_{ij} = 0$ se $j \neq i$ e que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccccc} V_1 \oplus \dots \oplus V_n & \xleftarrow{(t_j)} & \xleftarrow{} & V_{n+1} \\ \uparrow g & \circlearrowleft & & \uparrow g_{n+1} \\ V'_1 \oplus \dots \oplus V'_n & \xleftarrow{(t'_j)} & \xleftarrow{} & V'_{n+1} \end{array}$$

Utilizando apenas conceitos básicos de categorias, podemos verificar a validade da seguinte proposição.

Proposição 2.3. A categoria Υ_I tem as propriedades:

- (1) A categoria Υ_I é aditiva e de Krull-Schmidt.
- (2) Um morfismo (g, g_{n+1}) é isomorfismo $\iff g_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}$ e g_{n+1} são isomorfismos.

Agora podemos definir um funtor s da categoria (Mat_I, G'_I) na categoria Υ_I da seguinte forma:

Definição 2.20. Se $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)^t \in (Mat'_I, G'_I)$ e $\dim A = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$ então $s(A)$ será:

$$s(A) = \begin{array}{ccc} & k^{s_1} & \\ & \amalg & \nwarrow A_1 \\ & \vdots & \xleftarrow{} k^{s_{n+1}} \\ & \amalg & \swarrow A_n \\ & k^{s_n} & \end{array}$$

E se $(C, D) : A \rightarrow B$ é um morfismo em (Mat_I, G_I) fazemos $s(C, D) = (D, C)$.

Teorema 2.4. *O funtor s tem as seguintes propriedades:*

- (1) $A \sim_{G'_I} B \iff s(A) \cong s(B)$
- (2) A é indecomponível em $(Mat'_I, G'_I) \iff s(A)$ é indecomponíveis em Υ_I
- (3) s estabelece uma correspondência biunívoca entre as G_I - classes de equivalência de indecomponíveis de (Mat'_I, G'_I) e as classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis de Υ_I .

Demonstração. Análoga à demonstração de 2.3

□

Agora considerando o funtor contravariante de β_I em Υ_I , isto é. $Tr(V_1 \dots V_n, T, (\phi_i)_{i \in I}) = (T, V_1 \dots V_n, (\phi_i^t)_{i \in I})$ e $Tr(C, D) = (C^t, D^t)$, vemos que ele é uma dualidade de categorias. Temos então que β_I e Υ_I são categorias duais e conseqüentemente, (Mat_I, G_I) e (Mat_I, G'_I) são categorias duais cujos problemas matriciais são, em certo sentido, equivalentes.

Capítulo 3

I-espços e álgebra de incidência

Nazarova e Roiter definiram as transformações $\mathbf{d}: \text{Mat}_I \rightarrow \text{Mat}_{I'}$, a qual chamamos de transformação derivação e também a transformação integração $\mathbf{i}: \text{Mat}_{I'} \rightarrow \text{Mat}_I$, que não são funtores, mas que possuem propriedades suficientemente boas para provar a equivalência do tipo de representação de um poset e seu derivado. As transformações $\mathbf{d}$ permite uma interpretação matricial do algoritmo. Contudo Mat_I pode ser interpretada como uma categoria e a transformação $\mathbf{d}$ como um funtor.

Mais tarde outros autores, entre os quais mencionamos Simson e Drozd consideraram a categoria aditiva Mat_I^{ad} gerada a partir Mat_I e utilizaram um funtor $\mathbf{q}: \text{Mat}_I \rightarrow \text{Mat}_I^{ad}$, veja [6] ou [10], que possui diversas propriedades especiais. Gabriel também deu boas contribuições. Por exemplo, definiu a categoria dos I-espços, $I\text{-sp}$, e os funtores: redução $\mathbf{H}: \text{Mat}_I^{ad} \rightarrow (I\text{-sp})$ e derivação de Gabriel $\partial: (I\text{-sp}) \rightarrow (I'\text{-sp})$. Após a introdução destes conceitos, pode ser apresentada uma demonstração mais elegante da equivalência dos tipos de representação de um poset e de seu derivado, mas com a desvantagem de não dar uma interpretação do algoritmo. Inclusive em [30] Simson descreve explicitamente $\mathbf{d}$ como funtor contudo não faz a prova do teorema de Nazarova-Roiter diretamente, e as provas indiretas caem sempre em demonstrações que não explicitam uma interpretação para o algoritmo.

Neste capítulo trataremos da categoria dos I -espços, definida por Gabriel em [10], e teremos a possibilidade de introduzir uma relação muito interessante entre a teoria de representações de posets e a teoria de representações de álgebras. Nossa abordagem estará em sintonia com [29] e [17].

3.1 Categorias de I-espços

Definição 3.1. *Seja $(I, \preceq)$ um poset. Um sistema (M, M_i) é um I-espço quando satisfaz as condições:*

- (1) *M é um k -espço vetorial de dimensão finita e $(M_i)_{i \in I}$ é uma família de subespços de M indexados por I*
- (2) *$M_i \subseteq M_j$ sempre que $i \preceq j$ em I*

Definição 3.2. *Sejam (M, M_i) e (M', M'_i) I-espços. Um morfismo entre (M, M_i) e (M', M'_i) é uma transformação k -linear f que preserva a estrutura de I-espços. Em outras palavras $f: M \rightarrow M'$ é morfismo de I-espços quando: $f: M \rightarrow M'$ é k -linear e $f(M_i) \subseteq M'_i, \forall i \in I$.*

Agora supondo que $f: M \rightarrow M'$ seja um morfismo entre I-espços definiremos:

- núcleo de f é o sistema $Ker(f) = (Ker(f), Ker(f) \cap M_i)_{i \in I}$
- conúcleo de f é o sistema $coker(f) = (coker(f), M'_i / im f(M_i))_{i \in I}$

Definição 3.3. *Sejam (M, M_i) e (N, N_i) I-espços. A soma de (M, M_i) e (N, N_i) é $(M \oplus N, (M \oplus N)_i)$ sendo $(M \oplus N)_i$ definida por: $(M \oplus N)_i := M_i \oplus N_i$*

É imediato que a soma direta de dois I-espços é um I-espço.

Definição 3.4. *Com as definições precedentes os I-espços formam uma categoria, denotada por I-sp.*

Definição 3.5. *Diremos que um I-espço M é indecomponível quando M é não nulo e M não pode ser expresso na forma de soma de dois I-espços ambos não nulos.*

Ainda de acordo com [29] podemos definir as seqüências exatas na categoria I-sp da seguinte forma:

Definição 3.6. *Sejam $A_j = (A_j, A_{ji})_{i \in I}$ com $j \in \{1, \dots, t\}$ uma seqüência de I-espços. Uma seqüência:*

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{t-1}} A_t \quad \text{onde os } f_i \text{ são morfismos de I-espços,}$$

será dita exata quando:

- a seqüência

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{t-1}} A_t \text{ é exata}$$

- e as seqüências

$$A_1 \xrightarrow{f_1|_{A_{i1}}} A_2 \xrightarrow{f_2|_{A_{i2}}} \dots \xrightarrow{f_{t-1}|_{A_{it-1}}} A_t \text{ são exatas para todo } i \text{ em } I$$

É de imediata verificação que $I\text{-sp}$ é uma categoria aditiva com núcleos. Isto é, se $f \in \text{Mor}(I\text{-sp})$ então $\text{Ker}(f) \in (I\text{-sp})$.

Exemplo 3.1. Seja o poset $I = \{o, o, o\}$ e consideremos o seguinte I -espaço:

$M = (k \oplus k, \langle (1, 0) \rangle, \langle (0, 1) \rangle, \langle (1, 1) \rangle)$. Afirmamos que $\text{End}_{I\text{-sp}} M \cong k$. De fato, se $f \in \text{End}_{I\text{-sp}}(M)$ então $f : k^2 \rightarrow k^2$ é uma transformação k -linear, tal que $f(|_{\langle (1, 0) \rangle}) \subseteq \langle (1, 0) \rangle$, $f(|_{\langle (0, 1) \rangle}) \subseteq \langle (0, 1) \rangle$ e $f(|_{\langle (1, 1) \rangle}) \subseteq \langle (1, 1) \rangle$. Logo, se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é a matriz de f com relação a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$: teremos necessariamente que $c = b = 0$. E pelo fato de se verificar que segue que $f(|_{\langle (1, 1) \rangle}) \subseteq \langle (1, 1) \rangle$ resulta que $f(1, 1) = (a, d) = \lambda(1, 1)$. Segue que f é múltiplo da identidade.

Observação 3.1. Se considerarmos $M' = (k^2, 0, 0, 0)$ e M do exemplo acima a transformação identidade $i : k^2 \rightarrow k^2$ é um morfismo dos I -espaços M' , M e terá o seguinte conúcleo: $\text{coker}(id) = (0, k(1, 0), k(0, 1), k(1, 1))$, que não é um I -espaço. Consequentemente $I\text{-sp}$ não é uma categoria abeliana.

Exemplo 3.2. O poset $I = \{a\}$ tem apenas dois I -espaços indecomponíveis, os quais são: $P_* = (k, 0)$ e $P_\alpha = (k, k)$. Claro que P_* e P_α são indecomponíveis, vamos mostrar que são os únicos. Seja $M = (M, M_\alpha) \in (I\text{-sp})$. Como M é um I -espaço segue que $M_\alpha \subseteq M$. Podemos considerar M' um complementar de M_α com relação à M e expressarmos:

$$M = (M, M_\alpha) = (M_\alpha \oplus M', M_\alpha) = (M_\alpha, M_\alpha) \oplus (M', 0).$$

Se M é indecomponível, da expressão acima, segue que $M_\alpha = 0$ ou $M' = 0$. Caso $M_\alpha = 0$ temos que P_* é um somando de M . Supondo $M_\alpha \neq 0$ temos que (k, k) é somando de (M_α, M_α) . Portanto temos que M é indecomponível se e somente se $M' = 0$ e $M_\alpha = k$ ou $M_\alpha = 0$ e $M' = k$.

Agora vamos definir o funtor redução de Gabriel.

Definição 3.7. *Seja I um poset com n elementos e β_I a categoria das k -representações de I . O funtor redução $H : \beta_I \rightarrow I\text{-sp}$ é definido da seguinte forma:*

- *A cada objeto de β_I , $V = (V_1, \dots, V_n, T, (\phi_i)_{i \in I})$ H associa o I -espaço $H(V) = (M, M_i)_{i \in I}$ onde $M = T$ e $M_j = \text{Im}(\phi_j : \bigoplus_{i \leq j} V_i \rightarrow T)$*
- *A cada morfismo de β_I , (C, D) H associa o morfismo de I -espaços determinado por C .*

É de imediata verificação que o funtor redução de Gabriel é um funtor aditivo e que se anula sobre os indecomponíveis da forma $V = (V_1, \dots, V_n, 0, \phi) = q(K_0^j)$ para algum $j \in I$. Outras interessantes propriedades do funtor redução de Gabriel são listadas no seguinte lema.

Lema 3.1. *Sejam I um poset, H o funtor redução de Gabriel e $(V_1, \dots, V_n, T, \phi)$ um objeto indecomponível de β_I . Então as seguintes afirmações são válidas:*

- (1) $H(V) = 0 \iff V = (V_1, \dots, V_n, 0, \phi) = q(K_0^j)$ para algum $j \in I$
- (2) Se $V \neq q(K_0^s)$ para todo $s \in I \implies W_j = \text{Im}(\phi_j) \cap \sum_{i < j} \text{Im}(\phi_i) = 0$ para cada $j \in I$

Demonstração. (1) Por um lado $H(V) = 0$ sempre que $V = q(K_0^j)$ para algum $j \in I$. E se $H(V) = 0$ e $V = (V_1, \dots, V_n, T, \phi)$ temos que $T = 0$ e segue que $q(K_0^j)$ é somando de V para algum $j \in I$.

(2) Vamos supor que existe algum j para o qual W_j é não nulo e provaremos que neste caso $q(K_0^j)$ é somando de V . De fato assumindo que existe algum j para o qual W_j seja não nulo podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\phi_i)_{i \leq j} : \bigoplus_{i \leq j} V_i & \longrightarrow & T & \longleftarrow & V_j : \phi_j \\
 & \nwarrow_{h_{ij}} & \uparrow_r & \nearrow_z & \\
 & & W_j & &
 \end{array}$$

Então, tomando $h_{jj} = -z$ poderemos construir o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\phi_i)_{i \leq j} : \bigoplus_{i \leq j} V_i & \longrightarrow & T & & \\
 (*) : & \uparrow_{h_{ij}} & \circlearrowleft & \uparrow & \\
 & W_j & \longrightarrow & 0 &
 \end{array}$$

O diagrama (*) é comutativo pois $\sum_{i \leq j} \text{Im}(\phi_I o h_{ij}) = \sum_{i < j} \text{Im}(\phi_I o h_{ij}) + \text{Im}(\phi_j o h_{jj}) = 0$, pela nossa escolha de h_{jj} . Agora construíamos $V' = (V'_1 \dots V'_n, 0, o)$, onde $V'_j = W_j$ e $V'_i = 0$ para todo $i \neq j$. Obteremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\phi_i)_{i \leq j} : \oplus_{i \leq j} V_i & \longrightarrow & T \\ \uparrow (h'_{is})_{i,s} & \circlearrowleft & \uparrow \\ V' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tomando $h'_{is} = 0$ sempre que $s \neq j$ e $h'_{is} = h_{i,j}$ se $s = j$.

Em conseqüência temos que $((h_{ij}), 0)$ é um monomorfismo que cinde, isto é, $q(K_0^j)$ é somando direto de V . $\square$

O próximo resultado estabelece um importante elo entre as categorias β_I e $I\text{-sp}$, pois nos assegura que ambas têm o mesmo tipo de representação.

Teorema 3.1. (Gabriel [10]) *Sejam I um poset e H o funtor redução de Gabriel. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- H é denso
- H é pleno
- H reflete isomorfismos

Demonstração. Prova de que H é denso. Seja dado $M = (M, M_i)_{i \in I}$ um I -espaço. Escolhamos $T = M$, e para j minimal consideremos $V_j = M_j$, suponhamos V_i definido para $i < j$ e tomemos V_j o subespaço de M_j complementar à soma de todos os V_i com i precedente a j , isto é, $V_j \oplus \sum_{i < j} V_i = M_j$. Consideremos também ϕ_i como sendo a inclusão de V_j em M . Desta forma teremos que $V = (V_1 \dots V_n, T, (\phi_i)_{i \in I}) \in \beta_I$ e $H(V) \cong M$, pela definição de H .

Vamos mostrar agora que H é pleno. Seja $f : M \rightarrow M', f \in \text{Morf}(I\text{-sp})$. Como H é denso existem $V, V' \in \beta_I$ tais que $H(V) = M$ e $H(V') = M'$. Precisamos determinar $(g, g_t) \in \text{Hom}_{\beta_I}(V, V')$ tal que $H(g, g_t) = f$, pela definição do funtor redução necessariamente $f = g_t$. Exibiremos a $g = (g_{ij})_{ij}, g_{ij} : V_i \rightarrow V'_j$ k -linear, escolhendo $g_{i,j} = 0$ se $i \not\leq j$ e, caso contrário, podemos definir g_{ij} de modo que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccccccc} (\phi'_i)_{i \leq j} : \oplus_{i \leq j} V'_i & \longrightarrow & M'_j & \hookrightarrow & M' \\ \uparrow (g_{is}) & \circlearrowleft & \uparrow f_i & \circlearrowleft & \uparrow f \\ \phi_j : V & \longrightarrow & M_j & \hookrightarrow & M_j \end{array}$$

Aqui estamos supondo $V = (V_1..V_n, T, (\phi_i))$, $V' = (V'_1..V'_n, T, (\phi'_i))$ e $f_i = f|_{M_i}$. Desta forma teremos que $g = (g_{ij})_{i,j \in I} : V_1 \amalg .. \amalg V_n \longrightarrow V'_1 \amalg .. \amalg V'_n$ é uma transformação k -linear tal que (g, g_t) é um morfismo de β_I e segue que $H(g, g_t) = f$. Portanto H é pleno.

Antes de verificarmos que H reflete isomorfismos vamos verificar a validade do seguinte resultado:

Lema 3.2. Definindo $\widehat{M}_j = \sum_{i \prec j} M_i$ as seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) $f : M' \longrightarrow M$, é dado por um morfismo de I -espços, então $f(\widehat{M}'_j) \subseteq \widehat{M}_j$ para todo $j \in I$.

(2) Se $0 \neq M = H(V)$, com V indecomponível. Então $M_j = \text{Im}(\phi_j) \oplus \sum_{i \prec j} M_i$.

Demonstração. (lema).

A afirmação (1) é verdadeira pois: $f(\widehat{M}'_j) = f(\sum_{i \prec j} M'_i) \subseteq \sum_{i \prec j} f(M'_i) \subseteq \sum_{i \prec j} M_i = \widehat{M}_j$.

A afirmação (2) é verdadeira pois pela definição do funtor H temos: $M_j = \text{Im}(\phi_j) + \sum_{i \prec j} M_i = \text{Im}(\phi_j) + \widehat{M}_j$. Utilizando o lema anterior podemos assegurar que $M_j = \text{Im}(\phi_j) \oplus \widehat{M}_j$. $\square$

Agora vamos provar que H reflete isomorfismos. De fato tomando $f : M' \longrightarrow M$, f definido por um morfismo de β_I , com $M = H(V)$ e $M' = H(V')$. Como H é pleno existe $(g, g_t) : V' \longrightarrow V$ tal que $H(g, g_t) = f$. Caso f seja isomorfismo é imediato que g_t também o é. Falta mostrarmos que g é isomorfismo, será suficiente mostrarmos que g_{jj} é isomorfismo para todo $j \in I$.

Temos $V = (V_1..V_n, T, (\phi_i))$, $V' = (V'_1..V'_n, T, (\phi'_i))$ e $f_i = f|_{M_i}$. Vale observar que $f_i = f|_{M_i}$ é isomorfismo para todo $i \in I$ pois $\text{Ker}(f) = (\text{Ker}(f), \text{Ker}(f) \cap M'_i)_{i \in I}$.

Se j é um elemento minimal em I , o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j : & V_j & \longrightarrow T \\ & \uparrow (g_{jj}) & \circlearrowleft \uparrow f_j \\ \phi'_j : & V'_j & \longrightarrow T' \end{array}$$

Agora supondo que g_{ii} é isomorfismo para todo $i \prec j$, vamos mostrar que g_{jj} é isomorfismo. Usando a definição de $\widehat{M}_j$ e a afirmação (2) do lema acima temos que o seguinte

diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} (\phi_i)_{i \leq j} : \oplus_{i \leq j} V_i & \longrightarrow & \text{Im}(\phi_j) \oplus \widehat{M}_j & \hookrightarrow & M \\ & \uparrow (g_{ij})_{i \leq j} & \circlearrowleft & \uparrow f_i & \circlearrowleft \uparrow f \\ \phi'_j : V' & \longrightarrow & \text{Im}(\phi'_j) \oplus \widehat{M}'_j & \hookrightarrow & M'_j \end{array}$$

Agora, com $M_j = \text{Im}(\phi_j) \oplus \sum_{i < j} M_i$ teremos que $f(\widehat{M}'_j) \subseteq \widehat{M}_j$ o que nos garante que $f|_j$ pode ser expressa na forma:

$$f|_{M_j} = \begin{bmatrix} a_j & 0 \\ b_j & c_j \end{bmatrix}$$

Sendo $a_j : \text{Im}(\phi'_j) \longrightarrow \text{Im}(\phi_j)$, $b_j : \text{Im}(\phi'_j) \longrightarrow \widehat{M}_j$ e $c_j : \widehat{M}'_j \longrightarrow \widehat{M}_j$ transformações k -lineares. O fato de $f|_{M_j}$ ser isomorfismo implica que a_j e c_j também são. Agora consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j : V_j & \longrightarrow & \text{Im}(\phi_j) \\ & \uparrow g_{jj} & \circlearrowleft \uparrow a_j \\ \phi'_j : V'_j & \longrightarrow & \text{Im}(\phi'_j) \end{array}$$

Observemos que ϕ_j e ϕ'_j são injetoras. Tendo em vista que H é aditivo e o lema que precede a este teorema, segue que ϕ_j e ϕ'_j são isomorfismos. Por outro lado a_j é um isomorfismo também. Assim o fato do diagrama acima comutar assegura que g_{jj} é um isomorfismo e conseqüentemente $(g, g_t) \in \text{Hom}_{\beta_I}(V', V)$ é um isomorfismo. $\square$

Corolário 3.1. *Seja $(\beta_I)_0$ a subcategoria plena de β_I cujos objetos não possuem somandos da forma $q(K_0^s)$ para qualquer $s \in I$. Então o funtor redução de Gabriel induz uma equivalência de categorias entre $(\beta_I)_0$ e $I\text{-sp}$.*

Demonstração. Imediato. $\square$

Como para cada poset I em (Mat_I, G_I) existem apenas um número finito de objetos indecomponíveis da forma $(K_0^s)s \in I$ temos assegurado o seguinte corolário:

Corolário 3.2. *As categorias (Mat_I, G_I) e $I\text{-sp}$ possuem o mesmo tipo de representação.*

3.2 A álgebra de incidência e teoria de representações de posets

Aqui vamos definir a álgebra de incidência kI^* de um poset I e construir o funtor δ que estabelece uma equivalência entre a subcategoria plena dos kI^* -módulos de socle projetivo e (Mat_I, G_I) .

Definição 3.8. ([28]) *Seja um poset $I = (I, \preceq)$ chamaremos de I -extendido (respectivamente co-extendido) o poset $I^* = I \dot{\cup} \{*\}$ (respectivamente $I_o = \{o\} \dot{\cup} I$) com um único elemento maximal $*$ (respectivamente único elemento minimal o).*

Definição 3.9. ([28]) *Sejam um poset $I = (I, \preceq)$, Q_I a álgebra dada pela representação diagramática de $(I, \preceq)$ e J o ideal gerado pelas relações de comutatividade da álgebra de caminhos kQ_I . Chamaremos de álgebra de incidência de I a álgebra $\Lambda_I = kQ_I/J$.*

É fácil ver que dado um poset I a álgebra de incidência do poset I^* , a qual denotaremos por kI^* , é isomorfa a seguinte álgebra de matrizes.

$$kI^* = \begin{bmatrix} k & {}_1k_2 & {}_1k_3 & \dots & {}_1k_n & {}_1k_{n+1} \\ 0 & k & {}_2k_3 & \dots & {}_2k_n & {}_2k_{n+1} \\ 0 & 0 & k & \dots & {}_3k_n & {}_3k_{n+1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & k & {}_nk_{n+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & k \end{bmatrix}$$

Onde ${}_ik_j = k$ se $i \preceq j$ e ${}_ik_j = 0$ caso contrário.

Se considerarmos um conjunto completo dos idempotentes primitivos ortogonais de kI^* , $\{e_1, \dots, e_n, e_*\}$, é claro que $e_*kI^* = S_*$, ou seja o kI^* -módulo projetivo associado a e_* é simples.

Neste momento é conveniente lembrarmos que a representação de um Λ_I -módulo X é expressa na forma: $X = (X_{i,j} \varphi_i)_{i \preceq j}$, onde X_i é um k -espaço vetorial de dimensão finita para todo $i \in I^*$. ${}_j\varphi_i : X_i \rightarrow X_j$ são transformações k -lineares de modo que ${}_j\varphi_i$ é a identidade de X_j quando $i = j$ e ${}_s\varphi_j \circ {}_j\varphi_i = {}_s\varphi_i$ sempre que $i \prec j \prec s$.

Um Λ_I -homomorfismo é uma transformação k -linear $f : X \rightarrow X'$, $f = (f_i)_{i \in I^*}$ sendo

$f_i : X_i \longrightarrow X'_i$ k -linear de modo que todos os diagramas seguintes comutam.

$$\begin{array}{ccccc} {}_i\varphi'_j : & X'_j & \longrightarrow & X'_t & \\ & \uparrow_{f_j} & \circlearrowleft & \uparrow_{f_t} & \\ {}_i\varphi_j : & X_j & \longrightarrow & X_t & \end{array}$$

Sempre que $1 \preceq j \preceq t \preceq *$.

Definição 3.10. *Seja $\delta : (I\text{-sp}) \longrightarrow \text{mod}\Lambda_{I^*}$ definido da seguinte forma:*

- Dado $\mathbb{M} \in I\text{-sp}$, $\mathbb{M} = (M, M_i)_{i \in I}$ define-se $\delta(\mathbb{M}) = (X_{i,j} \varphi_i)_{i \preceq j}$ onde $X_* = M$, $X_j = M_j$, para todo $j \in I$, e onde ${}_j\varphi_i$ é a inclusão de X_i em X_j sempre que $i \preceq j$ em I^* .
- Se $f \in \text{Hom}_{I\text{-sp}}(M, N)$ define-se $\delta(f) = (f_i)_{i \in I^*}$ onde $f_i = f|_{M_i}$ para cada $i \in I$ e $f_* = f$.

Definição 3.11. *Chamamos, $\text{mod}_{sp}\Lambda_{I^*}$, a subcategoria plena dos Λ_{I^*} -módulos de socle projetivo.*

Teorema 3.2. *Seja $(I, \preceq)$ um poset. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *As categorias $I\text{-sp}$ e $\text{mod}_{sp}\Lambda_{I^*}$ são equivalentes.*
- (2) *Todo morfismo não nulo entre kI_0 -módulos projetivos indecomponíveis é monomorfismo.*

Demonstração. Para provarmos a afirmação (1) vamos inicialmente mostrar que:

(a) $\text{Hom}_{kI^*}(S_j, \delta(M)) = 0$ para todo $j \in I$. O que significa que o socle de $\delta(M)$ é soma de cópias de S_* . Ou seja que $\delta(M) \in \text{mod}_{sp}\Lambda_{I^*}$ para todo $M \in I\text{-sp}$. De fato supondo que $\text{Hom}_{kI^*}(S_j, \delta(M)) \neq 0$ para algum $j \in I$, ou seja, a inclusão de S_j em $\delta(M)$ é um kI^* -homomorfismo. Desta forma necessariamente teremos ${}_*\varphi_j \neq 0$ e $S_j \subseteq \delta(M)$. Logo o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} {}_*\varphi_j : & X_j & \longrightarrow & X_* & \\ & \uparrow_i & \circlearrowleft & \uparrow & \\ & X_j & \longrightarrow & 0 & \end{array}$$

O que é um absurdo. Portanto $\delta(M) \in \text{mod}_{sp}\Lambda_{I^*}$ para todo $M \in I\text{-sp}$.

(b) Reciprocamente para qualquer $Y = (Y_{i,j} \varphi_i)_{i \preceq j \preceq *}$ em $\text{mod}_{sp}\Lambda_{I^*}$ temos que ${}_j\varphi_i$ é injetora sempre que $i \preceq j$ em I^* . De fato suponhamos que uma destas transformações não

é injetora, digamos, ${}_j\varphi_i$. Assim o $\text{Ker}({}_j\varphi_i) \neq 0$, o que significa que a inclusão do núcleo de ${}_j\varphi_i$ em Y é um morfismo em $I\text{-sp}$, ou seja o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} {}_j\varphi_i : X_i & \longrightarrow & X_j & & \\ \uparrow_i & \circlearrowleft & \uparrow & & \\ \text{ker}({}_j\varphi_i) & \longrightarrow & 0 & & \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & & \\ k & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Segue que $S_j \subseteq \text{socle} Y$ e $j \in I$, e portanto $\text{Hom}_{kI^\bullet}(S_j, Y) \neq 0$, sendo $j \neq *$, o que é uma contradição.

Em consequência de (a) e (b) deduzimos que δ induz uma equivalência de categorias entre $I\text{-sp}$ e $\text{mod}_{sp} \Lambda_{I^\bullet}$.

A veracidade da afirmação (2) segue imediatamente do fato de existir um isomorfismo $\text{Hom}_{kI^\bullet}(P_j, P_i) \cong {}_ik_j$. $\square$

Dado um poset I o sistema $(N, N_{j,j}\phi_i)_{j \in I}$ onde N e N_j são k -espaços vetoriais de dimensão finita para todo $j \in I$, ${}_j\phi_i : N_i \longrightarrow N_j$ é um epimorfismo natural sempre que $i \preceq j$, para cada j existe um epimorfismo natural ${}_j\phi_0 : N \longrightarrow N_j$, e estes morfismos são tais que: ${}_s\phi_j \circ {}_j\phi_t = {}_s\phi_t$, sempre que $t \preceq j \preceq s$ e ${}_s\phi_0 = {}_s\phi_t \circ {}_t\phi_0$ para todo $t \preceq s$, é chamado de espaço quociente ou I -fator. Poderíamos introduzir a categoria $I\text{-fsp}$ dos I -fatores de forma similar à categoria $I\text{-sp}$. Contudo a existência da equivalência acima nos permite definir os I -fatores já como kI_0 -módulos da seguinte forma:

Definição 3.12. *Seja I um poset e I_0 a sua co-extensão minimal. O kI_0 -módulo $N = (N_{j,j}\varphi_i)_{i \preceq j \in I_0}$ é um I -fator ou I -espaço quociente se todas as transformações ${}_j\varphi_i : N_i \longrightarrow N_j$, são epimorfismos sempre que $i \preceq j$.*

Denotemos por $I\text{-fsp}$ a subcategoria plena de $\text{mod}(kI_0)$ dos I -fatores.

Uma consequência direta das definições é o corolário seguinte:

Corolário 3.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- Um kI_0 -módulo N é um I -fator se e somente se $\text{Top}(N)$ é injetivo.
- Todo morfismo não nulo entre kI_0 -módulos injetivos indecomponíveis é epimorfismo.

3.3 Funtores de reflexão

Aqui apresentamos resultados que podem ser encontrados em [10], [29] e [17]. Inicialmente apresentamos os funtores ∇ .

Definição 3.13. Considere o funtor $\nabla_+ : I\text{-fsp} \rightarrow I\text{-sp}$ definido em objetos como segue. $\nabla_+(N_{j,j} \varphi_i)_{i \leq j \in I_0} = (M, M_j)_{j \in I}$ onde $M = N_0$ e $M_j = \text{Ker}(j\varphi_0 : N_0 \rightarrow N_j)$, e em morfismos como segue. Dada $f \in \text{Hom}_{I\text{-sp}}(M, N)$, temos a seqüência:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

que é exata em $I\text{-sp}$. e também as seqüências.

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f)_i \rightarrow M_i \rightarrow N_i \rightarrow 0$$

Aplicando ∇_+ em M e N obteremos para cada $j \in I$: $(\nabla_+(M))_j = \text{Ker}(j\varphi_0 : M_0 \rightarrow M_j)$ e $(\nabla_+(N))_j = \text{Ker}(j\varphi'_0 : N_0 \rightarrow N_j)$ ∇_+ , ou seja as seguintes seqüências são exatas:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(j\varphi_0) \rightarrow M_0 \rightarrow M_j \rightarrow 0$$

e também

$$0 \rightarrow \text{Ker}(j\varphi'_0) \rightarrow N_0 \rightarrow N_j \rightarrow 0$$

Assim conseguimos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ker}(j\varphi_0) & \rightarrow & M_0 & \rightarrow & M_j \rightarrow 0 \\ \varepsilon : & & \downarrow g_j & & \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow f_j \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker}(j\varphi'_0) & \rightarrow & N_0 & \rightarrow & N_j \rightarrow 0 \end{array}$$

$\nabla_+(f) = (g, g_j)_{j \in I}$, onde $g_j : \text{ker}(j\varphi_0) \rightarrow \text{ker}(j\varphi'_0)$ é a transformação induzida pelo diagrama ε .

O funtor $\nabla_- : I\text{-sp} \rightarrow I\text{-fsp}$ é definido da seguinte maneira. Para cada I -espaço $(M, M_i)_{i \in I}$, definimos $\nabla_-((M, M_i)_{i \in I}) = (N_{j,j} \phi_i)_{i \leq j \in I_0}$ onde $N_0 = M$, e $N_j = \text{coker}(\xi_j : M_j \rightarrow M)$, sendo ξ_j a inclusão de M_j em M . Sobre os morfismos ∇_- é definido, de forma análoga a ∇_+ , pela passagem aos conúcleos.

O seguinte resultado decorre imediatamente:

Teorema 3.3. As afirmações seguintes são verdadeiras.

- (1) ∇_- e ∇_+ são equivalências de categorias, inversas entre si.

- (2) $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0 \in I\text{-sp}$ é exata em $\text{mod}(kI^*)$ se e somente se $0 \rightarrow \nabla_-(X') \rightarrow \nabla_-(X) \rightarrow \nabla_-(X'') \rightarrow 0$ é exata em $I\text{-fsp}$.
- (3) A seqüência $0 \rightarrow Y' \rightarrow Y \rightarrow Y'' \rightarrow 0 \in I\text{-fsp}$ é exata em $\text{mod}(kI_0)$ se e somente se $0 \rightarrow \nabla_+(Y') \rightarrow \nabla_+(Y) \rightarrow \nabla_+(Y'') \rightarrow 0$ é exata em $\text{mod}(kI)$.

Demonstração. (1) segue da definição e (2) do lema da serpente. $\square$

Definição 3.14. Seja $f \in \text{Hom}_{(I\text{-sp})}(M, M')$. O morfismo f é dito próprio se: $f(M_i) = f(M) \cap M'_i \forall i \in I$.

Vale observar que f é morfismo próprio se e somente se $\text{coker}(f)$ é um I -espaço.

Definição 3.15. Seja $f \in \text{Hom}_{(I\text{-sp})}(M, M')$ um monomorfismo. Dizemos que f é *sp-essencial* se satisfizer a seguinte condição:

$g : M' \rightarrow M''$ é monomorfismo próprio $\iff$ gof é monomorfismo próprio.

Definição 3.16. Um I -espaço Q é *sp-injetivo* se toda seqüência exata da forma:

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

cinde, sempre que f for monomorfismo próprio de $I\text{-sp}$.

Definição 3.17. Um monomorfismo $g : M' \rightarrow Q$ em $I\text{-sp}$ é uma *sp-envolvente injetiva* de M se g é *sp-essencial* e Q é *sp-injetivo*.

Definição 3.18. Sejam I um poset com n elementos e Λ a álgebra de incidência de I^* . Para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ definimos o j -ésimo Λ -módulo de Gabriel como Λ -módulo $((Q^{(j)})_{t,s} \phi_t)_{t \leq s \leq *}$ onde

$$Q_t^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \not\leq j \text{ em } I_0 \\ k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(para $t \leq j$) e ${}_s\phi_t : Q_t^{(j)} \rightarrow Q_s^{(j)}$, é a aplicação identidade quando $s = t$ e a inclusão se $s \neq t$.

Dado um poset I com n elementos denotaremos por P_* o kI^* -módulo projetivo indecomponível associado ao vértice $*$. Calculando a envolvente injetiva de P_* vemos que esta é exatamente $((Q^{(0)})_{t,s} \phi_t)_{t \leq t \leq *}$.

Lema 3.3. *Sejam I um poset com n elementos e Λ a álgebra de incidência de I^* . Então para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ o j -ésimo Λ -módulo de Gabriel tem socle projetivo.*

Demonstração. Sabemos que I^* tem um único elemento maximal $*$ conseqüentemente $*$ é um vértice poço na aljava de Λ , logo o simples S_* associado a $*$ é projetivo. Vamos provar que S_* é o único somando direto do socle do j -ésimo Λ -módulo de Gabriel para cada $j \in \{0, \dots, n\}$.

De fato, suponhamos que para algum $j \in \{0, \dots, n\}$ o socle de $Q = ((Q^{(j)})_{t,s} \phi_t)_{t \leq t \leq *}$ admite um simples isomorfo a S_t como somando direto, onde $t < *$. Teremos que $\text{Hom}_\Lambda(S_t, Q) \neq 0$, ou seja, a inclusão de S_t em Q é um Λ -homomorfismo. Portanto o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} {}_*\phi_t : X_t & \longrightarrow & X_* \\ \uparrow \iota & \circlearrowleft & \uparrow \\ k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ou seja, ${}_*\phi_t \circ \iota = 0$, que é uma contradição. □

Em virtude do lema anterior temos que o j -ésimo Λ -módulo de Gabriel é um I -espaço, o qual denotaremos por $Q^{(j)}$.

Seja X um kI^* -módulo. Denotaremos por $E_{kI^*}(X)$, ou simplesmente $E(X)$, a envolvente injetiva de X em $\text{mod}(kI^*)$.

Vale o seguinte resultado relevante:

Teorema 3.4. *Sejam I um poset com n elementos e $E_{kI^*}(P_*)$ como acima. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) $Q \in I\text{-sp}$ é sp -injetivo $\iff \nabla_-(Q)$ é um kI_o -módulo injetivo.
- (2) Todo $X \in I\text{-sp}$ admite uma sp -envolvente injetiva.
- (3) $X \in I\text{-sp}$ é sp -injetivo $\iff X \cong Q^{(j)}$ para algum $j \in I$

Demonstração. (1) Primeiro notemos que se $E \in \text{mod}(kI_o)$ é um módulo injetivo então pelo teorema anterior $\nabla_+(E)$ é um I -espaço sp -injetivo. Depois, suponhamos que Q seja sp -injetivo. Consideremos a seguinte seqüência de kI_o -módulos que, pelo corolário 3.3 é formado por I -fatores. $0 \longrightarrow \nabla_-(Q) \longrightarrow E_{kI_o}(\nabla_+(Q)) \longrightarrow Y \longrightarrow 0$

De acordo com o teorema anterior a sequência acima cinde. Conseqüentemente Y é injetivo, logo vale (1).

Para provarmos (2) é suficiente notarmos que segue do teorema 3.3 o seguinte.

$\nabla_-(u)$ é envolvente injetiva em $\text{mod } kI_o$ se e somente se $u \in \text{Morf}(I\text{-sp})$ é uma sp -envolvente injetiva. (3) é verdadeira, pois, desde que a envolvente injetiva de cada simples S_j é o injetivo $I_j \in \text{mod}(kI_o)$, onde

$$I_i^j = (I_i^j, j\varphi_i)_{i,j \in I_o} = \begin{cases} k & \text{se } i \preceq j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos $\nabla_-(I^j) = Q^{(j)}$. Assim fica demonstrado o teorema. $\square$

Exemplo 3.3. Consideremos o poset

$$I = \begin{array}{ccc} & 4 & 3 \\ & \uparrow \swarrow & \uparrow \\ 1 & & 2 \end{array}$$

De acordo com o teorema anterior a lista completa dos I -espaços indecomponíveis sp -injetivos é:

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow \nwarrow & \\ Q^{(3)} = & \begin{array}{ccc} k & & 0 \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ k & & 0 \end{array} & Q^{(4)} = \begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow \nwarrow & \\ 0 & & k \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ 0 & & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow \nwarrow & \\ Q^{(1)} = & \begin{array}{ccc} k & & k \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ 0 & & k \end{array} & Q^{(2)} = \begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow \nwarrow & \\ k & & k \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ k & & 0 \end{array} & Q^{(0)} = \begin{array}{ccc} & k & \\ & \nearrow \nwarrow & \\ k & & k \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ k & & k \end{array} \end{array}$$

Observemos que $Q^{(4)}, Q^{(3)}, Q^{(2)}$ coincidem com os kI^* -módulos projetivos indecomponíveis associados aos vértices 2, 4, 1 respectivamente. Podemos determinar todos os indecomponíveis de (Mat_I, G_I) aplicando o funtor redução de Gabriel e calculando diretamente como procedemos nos exemplos 3.1 e 3.2, ou determinando todos os kI^* -módulos

indecomponíveis de socle projetivo. Assim verificamos que a lista completa dos I -espaços que não são sp -injetivos é a seguinte:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 0 & & & & k \\
 P_3 = \uparrow & & \nwarrow & \uparrow & \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 0 & & & & 0 \\
 P_* = \uparrow & & \nwarrow & \uparrow & \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 k & & & & k \\
 P_{(3,4)} = \uparrow & & \nwarrow & \uparrow & \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Corolário 3.4. *Dado um poset I e sendo I^{op} seu poset oposto o funtor*

$$D^\bullet := D \circ \nabla_- : I - sp \longrightarrow (I^{op} - sp)^{op} \quad , \text{ onde } D(-) = Hom_k(-, k),$$

é uma dualidade. Ademais existe uma equivalência natural dos funtores $D \circ \nabla_- \cong \nabla_+ \circ D$

Definição 3.19. *Seja M um I -espaço. Dizemos que M é sp -simples se os únicos monomorfismos próprios com imagem em M são apenas isomorfismos ou o homomorfismo nulo.*

Seja $L_I(E(P_*))$ o conjunto dos submódulos de $E(P_*)$. Este conjunto com a ordem parcial dada pela inclusão é um poset. Claro que todo elemento não nulo de $L_I(E(P_*))$ pode ser visto como um I -espaço sp -simples.

Lema 3.4. *Seja M um I -espaço. Se $M \neq 0$ então M admite uma filtração da forma:*

$0 = M_{(s)} \subseteq M_{(s-1)} \subseteq \cdots \subseteq M$; onde as inclusões são monomorfismos próprios e $M^{(t)}/M^{(t+1)}$ é sp -simples para todos $t \in \{1, \dots, s\}$.

Demonstração. Suponhamos que $M \in I-sp$ não nulo então M pode ser visto como um kI^* -módulo de socle projetivo, portanto existe um monomorfismo $u : M \longrightarrow E(P_*)^r$ para algum natural $r \in \mathbb{N}$ não nulo. Logo existe uma projeção $\pi : E(P_*)^r \longrightarrow E(P_*)$ tal que a composição $f = \pi \circ u$ é um morfismo não nulo. Segue que $Im(f)$ é sp -simples, uma vez que está contida em $E(P_*)$. É claro que $Ker(f)$ é um subespaço próprio de M . Ou seja a seguinte sequência é exata em $I-sp$:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow M \longrightarrow Im(f) \longrightarrow 0$$

Como kI^* é uma álgebra artiniana, M admite uma série de composição como kI^* -módulo; digamos que seja: $0 = M_{(s)} \subseteq M_{(s-1)} \subseteq \cdots \subseteq M_I = M$. Vamos mostrar que esta série de decomposição passa para $I-sp$.

De fato, se $[M_1/M_2] = 0$ não temos nada à fazer. Caso contrário teremos que $[M_1/M_2]$ é um kI^* -módulo simples, conseqüentemente M_2 é um submódulo próprio de M_1 que também tem socle projetivo, segue então que M_2 é um I -subespaço próprio M_1 cujo quociente é simples ou nulo. Seguindo indutivamente desta maneira a série explicitada no lema é conseguida. $\square$

Teorema 3.5. *Seja M um I -espaço. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) M é sp -simples
- (2) M é um I -subespaço de $Q^{(0)} = E(P_*)$, isto é, $M \in L_I E(P_*)$.
- (3) Existe J um subposet discreto de I tal que $M \cong \sum_{i \in J} P_i \subseteq E(P_*)$.
- (4) $\text{soc}(M)$ é simples

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Segue imediatamente da demonstração do lema anterior.

(1) $\implies$ (3). Desde que $Q^{(0)}$ é representado diagramaticamente pela representação que tem k em cada vértice da aljava de $kI^{(*)}$ logo $\dim_k M = 1$ e $\dim_k M_i \leq 1$ para todo $i \in I$. Seja $\{i_1, \dots, i_r\}$ o conjunto de todos os elementos minimais do subposet $J = \{j \in I \mid M_j \neq 0\}$. É fácil ver que $M = \sum_{i \in J} P_i$ e portanto vale (3). As demais implicações são imediatas. $\square$

Agora poderemos caracterizar os I -espaços quando I é um poset de largura menor ou igual a dois.

Teorema 3.6. *Seja I um poset. As seguintes condições são equivalentes:*

- $w(I) \leq 2$
- $\forall M \in I\text{-sp}$ tem-se: $M \cong N$ para algum $N \in E_{kI^\bullet}(P_*)$
- $\forall M \in \text{ind}(I\text{-sp})$ tem-se: M é projetivo ou existem r e s incomparáveis tais que $M = P_r + P_s$.
- $I\text{-sp}$ é uma categoria sp -semisimples, isto é, $\forall M \in I\text{-sp}$ tem-se que M é soma de sp -simples.

Demonstração. (1) $\implies$ (3) Considere o funtor composição $H \circ q : Mat_I \longrightarrow I\text{-sp}$, onde q é o funtor da def. 2.15 e H é o funtor de Gabriel. Pelo teorema 2.1 sabemos que os indecomponíveis de Mat_I são apenas os canônicos, assim obteremos as seguintes imagens.

$$P_j = H(K_1^j), \quad P_{r,s} = H(K_1^{r,s}), \quad 0 = H(K_0^j) = H(K_j^0) \quad \text{onde } P_{r,s} = P_r + P_s$$

Conseqüentemente (1) $\implies$ (3).

A implicação (3) $\implies$ (1) é imediata.

(2) $\implies$ (1) Pois se o poset I tiver largura maior do que dois necessariamente conterá como subposet pleno o poset $J = \{o, o, o\}$ e tomando o objeto $M \in J\text{-sp}$ como no exemplo 3.1, isto é, $M = (k \oplus k, , < (1, 0) >, < (0, 1) >, < (1, 1) >)$. Temos que $End M \cong k$ e, conseqüentemente, M é indecomponível. Vamos mostrar que M não é sp -simples. Com efeito M tem a seguinte representação diagramática:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & & \searrow^{A_1} & & \\
 M = & k^2 & \xrightarrow{A} & k^2 & \\
 & & \nearrow_{A_2} & & \\
 & & k & &
 \end{array}$$

Como vimos no exemplo 3.1 A_1 e A_2 são imersões e A é múltipla da identidade. Desta forma $Soc(M)$ não é simples.

(2) $\iff$ (4) pelo teorema anterior. O que completa a demonstração. $\square$

Capítulo 4

Os teoremas de Kleiner e Nazarova-Roiter

Neste Capítulo apresentaremos o algoritmo de Nazarova-Roiter e os teoremas principais do trabalho. Os algoritmos de diferenciação desempenham um papel fundamental na teoria de representações de posets, eles permitem a redução do estudo das representações de um poset I ao estudo de representações de um poset I' , obtido a partir de I , o qual tem menor grau de dificuldade.

Nazarova e Roiter definiram a transformação $d: \text{Mat}_I \longrightarrow \text{Mat}_{I'}$, a qual chamamos de transformação derivação e também a transformação integração $i: \text{Mat}_{I'} \longrightarrow \text{Mat}_I$ que possuem propriedades suficientemente boas para mostrar a equivalência do tipo de representação de um poset e seu derivado. Utilizando este resultado e conceitos básicos de posets demonstraremos o teorema de Kleiner.

Quanto ao teorema de Nazarova-Roiter apresentaremos uma demonstração completamente fiel à demonstração original. Optamos por esta escolha pelo fato de ser esta demonstração a que permite uma interpretação matricial para o algoritmo de Nazarova-Roiter.

Já no caso do teorema de Kleiner daremos uma demonstração distinta da original. Nossa demonstração estará de acordo com o trabalho Roiter apresentou no seminário da Inglaterra, veja [27].

4.1 O Algoritmo de Nazarova Roiter

Agora descreveremos o algoritmo de Nazarova-Roiter.

Definição 4.1. *Seja I é um poset e c um elemento maximal tal que $w(I - c^\nabla) \leq 2$. Então, denotaremos por I'_c o novo conjunto*

$$I'_c := (I - \{c\}) \cup \{r \vee s \mid r \vee s \text{ está definido se } \{r, s, c\} \text{ é discreto em } I\}$$

o qual é definida uma ordem parcial mediante as regras:

- $(t \preceq r \vee s) \iff (t \preceq r \text{ ou } t \preceq s);$
- $(r \vee s \preceq t) \iff (r \preceq t \text{ e } s \preceq t);$
- $(r \vee s \preceq r' \vee s') \iff [(r \preceq r' \text{ ou } r \preceq s') \text{ e } (s \preceq r' \text{ ou } s \preceq s')]$

Teorema 4.1. (Nazarova-Roiter) *Sejam I um poset e $c \in I$ um elemento maximal tal que $w(I - c^\nabla) \leq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *Os posets I e I'_c têm mesmo tipo de representação.*
- (2) *Se I é de tipo de representação finito teremos $\# \text{ ind}(Mat_{I'_c}) < \# \text{ ind}(Mat_I)$*

Demonstração. Para provarmos o teorema inicialmente iremos definir a transformação derivada $d : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_{I'_c}, G_{I'_c})$.

Definição da Transformação d

Sejam I um poset, c um elemento maximal, com $w(I - c^\nabla) \leq 2$ e $A \in Mat_I$. Suponhamos que:

$$c^\nabla = \{i_1, \dots, i_r, i_{r+1} = c\} \quad , \quad I - c^\nabla = \{j_1, \dots, j_m\}$$

digamos que $A = (A_{i_1} \mid \dots \mid A_{i_r} \mid A_c \parallel A_{j_1} \mid \dots \mid A_{j_m})$ com $\dim A = (s_{i_1}, \dots, s_{i_r}, s_c, s_{j_1}, \dots, s_{j_m}, s_{n+1})$. A transformação d será definida a partir da composição de seis aplicações auxiliares, as quais definiremos a seguir.

- (1) Seja $\delta_1 : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_I, G_I)$ que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa $\delta_1(A) = \tilde{A} = A \oplus (s_{i_1} + \dots + s_{i_r})K_0^c$ ou seja,

$$\tilde{A} = (A_{i_1} \mid \dots \mid A_{i_r} \mid \tilde{A}_c \parallel A_{j_1} \mid \dots \mid A_{j_m}) \in Mat_I, \text{ onde } \tilde{A}_c = \left[\underbrace{A_c}_{s_c} \mid \underbrace{0 \dots 0}_{s_{i_1} + \dots + s_{i_r}} \right]^{s_{n+1}}.$$

- (2) Seja $\delta_2 : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_I, G_I)$ a aplicação que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa $\delta_2(A)$, que é obtida (a partir das operações elementares de linhas) reduz o c -ésimo bloco de A a soma de uma matriz identidade e uma matriz nula. Ou seja, $\delta_2(\delta_1(A)) \sim \tilde{A} = \delta_1(A)$, o que significa que existe uma matriz invertível U correspondente a estas operações elementares tal que $UA = A'$ difere de $\delta_2(A)$ apenas no c -ésimo, com relação ao qual guardam a seguinte relação:

$$\delta_2(A)_c = \left[\underbrace{A'_c}_{s_c} \mid \underbrace{0..0}_{s_{i_1} + \dots + s_{i_r}} \right]^{s_{n+1}} \text{ com } A'_c = [E_x \mid 0]^t \text{ sendo } x \text{ o posto de } A_c.$$

- (3) Seja $\delta_3 : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_I, G_I)$ a aplicação que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa a matriz obtida a partir de A da seguinte forma: seja j_0 o elemento comparável a c cujo bloco A_{j_0} tem posto maximal. Por transformações elementares de linhas do tipo 3 da definição de G_I e transformações de colunas dentro do c -ésimo bloco determina-se no c -ésimo bloco a matriz identidade de posto igual ao posto de A_{j_0} .

Desta forma a composição $\delta_3\delta_2\delta_1(A) \sim_G \delta_2(A)$ e tem a seguinte forma: (com duas faixas horizontais bem nítidas):

$$\delta_3\delta_2\delta_1(A) = \left[\begin{array}{c|ccc|c|c|c|c|c} \widehat{A_{i_1}} & \cdots & \widehat{A_{i_r}} & E & 0 & \widehat{A'_{j_1}} & \cdots & \widehat{A'_{j_m}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \widehat{A_{j_1}} & \cdots & \widehat{A_{j_m}} \end{array} \right]$$

Vamos supor que a faixa superior de $\delta_3\delta_2\delta_1(A)$ possui r linhas e a inferior r' linhas, ou seja, $r + r' = s_{n+1}$.

- (4) Definimos $\delta_4 : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_I, G_I)$ a aplicação que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa a matriz obtida da seguinte forma:

Dada $A \in (Mat_I, G_I)$, seja $A' \sim_G A$ tal que:

$$A' = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M' & M'' \\ 0 & N' \end{bmatrix}$$

Ou seja M e N são matrizes cujos vetores dimensões possuem a seguinte propriedade:

(*) $\dim N = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r}, x_c, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, x_{j_{n+1}})$, $\dim M = (y_{i_1}, \dots, y_{i_r}, y_c, y_{j_1}, \dots, y_{j_m}, y_{j_{n+1}})$ são tais que $m_{it} = 0 \ \forall t \in \{1, \dots, r\}$ e $x_c = \dots = x_{i_r} = 0 \iff x_t = 0 \ \forall t \in \{c, j_1, \dots, j_m\}$.

É fácil ver que a matriz A' pode ser obtida simplesmente calculando $\delta_3\delta_2(A)$.

Nestas condições $N' \in (Mat_{I-c^\nabla}, G_I)$, como $w(I - c^\nabla) \leq 2$ o teorema 2.1 nos assegura que os somandos diretos de N' são apenas os canônicos, logo existem matrizes invertíveis $U_{N'}, V_{A'}$, correspondentes a transformações elementares admissíveis tais que $U_{N'}N'V_{A'}$ está reduzida a sua forma canônica. Tomamos $U_A = I_{x_{s_{n+1}}} \oplus U_{N'}$ e $V_A = I_{x_{s_{n+1}}} \oplus V_{A'}$, finalmente, definimos $\delta_4(A) = U_A A V_A$.

Observação 4.1. De acordo com a definição de δ_4 , temos $\delta_4(\delta_3\delta_2\delta_1(A)) = \delta_4(\delta_1(A)')$ sendo:

$$(\delta_1(A))' = \begin{bmatrix} C' & C'' \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

onde $C = [\widehat{A_{j_1}} \mid \cdots \mid \widehat{A_{j_m}}]$

Desta forma, o número de linhas de C é r , $U_C \in Gl(r, k)$, $V_C \in Gl(\sum_{1 \leq i \leq m} s_{j_i} +, k)$

$$U_C C V_C = [\widehat{A_{j_1}} \mid \cdots \mid \widehat{A_{j_m}}] \quad \text{é soma de indecomponíveis canônicos}$$

Assim temos que as linhas de $U_C C V_C$ são nulas ou admitem no máximo dois elementos não nulos que só podem estar em blocos referentes a elementos incomparáveis de $I - c^\nabla$. Vamos denotar as linhas não nulas de $U_C C V_C$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega_h : & \quad (0 \dots 010 \dots 0) && h\text{-ésima posição não nula} \\ \omega_{h,t} : & (0 \dots 010 \dots 010 \dots 0) && h \text{ e } t\text{-ésimas posições não nulas} \end{aligned}$$

(5) Agora vamos definir $\delta_5 : (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_I, G_I)$ a aplicação que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa a matriz obtida da seguinte forma:

Dada $A \in (Mat_I, G_I)$, seja $A'' = \delta_4\delta_3\delta_2(A)$, isto é,

$$A'' = \begin{bmatrix} C' & C'' \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Onde M e N são matrizes cujos vetores dimensões possuem a propriedade (*).

E sabemos também que C está em sua forma canônica. Por meio de transformações elementares de linhas podemos utilizar as entradas unitárias C das linhas do tipo ω_h para anular todas as entradas desta correspondente a esta coluna da matriz C'' . Utilizando transformações elementares de linhas podemos utilizar as linhas da forma $\omega_{h,t}$ para anular uma das correspondentes colunas. digamos que $h < t$, iremos zerar

as entradas acima do elemento unitário da t -ésima coluna de C'' . Seja F a matriz invertível associada a estas transformações elementares.

Definimos $\delta_5(A) = (A'')F = \delta_4\delta_3\delta_2(A)F$, isto é, $\delta_5(A)$ tem a forma seguinte.

$$\delta_5(A) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \widehat{A_{i_1}} & \cdots & \widehat{A_{i_r}} & E & 0 & \widehat{A''_{j_1}} & \cdots & \widehat{A''_{j_m}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \widehat{A_{j_1}} & \cdots & \widehat{A_{j_m}} \end{array} \right]$$

(As linhas de $[\widehat{A_{j_1}} \mid \cdots \mid \widehat{A_{j_m}}]$ são do tipo ω_h, ω_{ht} ou nulas)

- (6) Por fim definiremos $d: (Mat_I, G_I) \longrightarrow (Mat_{I'_c}, G_{I'_c})$ a aplicação que a cada matriz $A \in (Mat_I, G_I)$ associa a matriz obtida da seguinte forma.

Dada $A \in (Mat_I, G_I)$, seja $\widehat{A''} = \delta_5\delta_4\delta_3\delta_2(A)$. Portanto $\widehat{A''}$ tem a forma:

$$A'' = \left[\begin{array}{cc} C' & C'' \\ 0 & C \end{array} \right] \text{ (as linhas de } C \text{ são do tipo } \omega_h, \omega_{ht} \text{ ou nulas)}$$

Para cada elemento novo $j_a \vee j_b$ de I'_c , $j_a < j_b$, seja $\Omega_{j_a j_b} = \{\omega_{st} \mid s \text{ é uma coluna do } j_a\text{-ésimo bloco de } C\}$.

Para cada $l \in \{1, \dots, m\}$ o j_l -ésimo bloco de C um bloco (interno) de colunas nulas e todo subposet discreto $\{j_l, j_b, c\}$ de I , $\Omega_{j_a j_b}$ determina um bloco (interno) identidade no j_l -ésimo e no j_b -ésimo blocos de C . Pela definição de δ_5 , se $j_a < j_b$, acima do j_b -ésimo bloco há um bloco nulo. É importante notar que para cada elemento novo de I'_c está definido um bloco interno de C .

Então, definimos.

$d(A) = (\widehat{A_{i_1}} \mid \cdots \mid \widehat{A_{i_r}} \mid D_{\alpha_1} \mid \cdots \mid D_{\alpha_u}) \in Mat_{I'_c}$ onde $D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_u}$ são matrizes consistindo das colunas de $\widehat{A''_{j_1}}, \dots, \widehat{A''_{j_m}}$ definidas assim:

- 1) Se $\alpha = j_l$ então D_α são as colunas de $\widehat{A''_{j_l}}$ que são nulas no bloco inferior.
- 2) Se $\alpha = j_a \vee j_b$ onde $\{c, j_a, j_b\}$ é discreto (digamos $j_a < j_b$ na ordem natural), então D_α são as colunas de $\widehat{A''_{j_a}}$ que têm componentes não nulas exatamente em posições que correspondentes a colunas dos blocos j_a e j_b .

Destacamos os seguintes resultados que são consequências direta da definição de d .

Corolário 4.1. Se $A, B \in Mat_I$ e $A \sim_G B$ então $d(A) \sim_G d(B)$.

Corolário 4.2. *Seja $A \in (Mat_I, G_I)$ uma representação indecomponível com vetor dimensão $\dim A = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$. Se A não é um indecomponível canônico então $\sum s_i \geq 3$ e $\sum s_i > s_{n+1} \neq 0$.*

Demonstração. De fato se A tiver apenas uma linha e não for um indecomponível canônico o seu número de colunas é maior que dois. E se A tiver mais do que uma linha e não tiver nenhuma coluna é fácil ver que K_1^0 é somando de A . $\square$

Agora podemos provar o lema seguinte, que é suficiente para finalizar a demonstração do teorema.

Lema 4.1. *Seja I um poset e c um elemento maximal tal que $w(I - c^\nabla) \leq 2$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) $A' \in Mat_{I'_c}$ existe $B \in Mat_I$ tal que $A' \sim_G d(B)$.
- (b) d se anula apenas sobre um número finito de classes de equivalências.
- (c) se $A \in \text{ind}(Mat_I, G_I)$ com $d(A) \neq 0$, então $d(A) \in \text{ind}(Mat_{I'_c}, G_{I'_c})$.

Demonstração. (a) Vamos provar que: $A' \in Mat_{I'_c}$ existe $B \in Mat_I$ tal que $A' \sim_G d(B)$. Construiremos um processo de determinação, chamado de integração, que se baseará novamente nos detalhes da definição de d .

Dada A uma k -representação do poset I'_c , supondo:

$$A = (A_{i_1} \mid \dots \mid A_{i_r} \mid A_{j_1} \dots \mid A_{j_{m+x}})$$

Seja $x = \#\{j_r \vee j_s \mid j_r \vee j_s \in I'_c\}$ e seja $\dim(A) = (s_{i_1}, \dots, s_{i_r}, s_{j_1}, \dots, s_{j_{m+x}})$

Não há perda de generalidade em supormos que $j_t < j_s$ na ordem natural sempre que $t < s$. E lembramos que pela definição de I'_c as posições $j_1, \dots, j_m$ no poset I'_c são as mesmas do poset I (não mudaram).

Para cada $i \in \{1, \dots, x\}$ consideremos os conjuntos:

- (1) $Y_{j_i} = \{j_i \vee j_s \text{ tais que: } j_i \vee j_s \in I'_c \text{ e } j_i > j_s\}$
- (2) ${}_i Y = \{j_i \vee j_s \text{ tais que: } j_i \vee j_s \in I'_c \text{ e } j_i < j_s\}$

Consideremos $y = \max\{\text{posto}(A_{i_j}) \mid j \in \{1, \dots, r\}\}$, tomemos, B_c , uma matriz com o mesmo número de linhas que A e posto y . Como temos a liberdade de usar todas as transformações de linhas podemos expressar:

$$B_c = \begin{bmatrix} E_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $B_{ij} = A_{ij}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$.

Agora vamos definir B_{jt} com $t \in \{1, \dots, m\}$.

Definiremos $B_{jt} = \left[\underbrace{A_{jt}}_{s_c} \mid \underbrace{0 \dots 0}_{\sum s_{ji} : (j_t \vee j_i) \in Y_{jt}} \mid \underbrace{\text{Concat}(A_{ji})}_{(j_t \vee j_i) \in Y_{jt}} \right]$ Onde *Concat* é a função

que concatena matrizes por justaposição de colunas, isto é, dadas duas matrizes X e Y com colunas $X_1, \dots, X_a$ e $Y_1, \dots, Y_b$ associa a matrix cujas colunas são $X_1, \dots, X_a, Y_1, \dots, Y_b$.

Agora consideremos

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} A_{i_1} & \dots & A_{i_r} & B_c & B_{j_1} & \dots & B_{j_m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{B_{j_1}} & \dots & \widehat{B_{j_m}} \end{array} \right]$$

Seja $j_a \vee j_b$ é um elemento novo no poset I'_c , Consideremos $\zeta = \sum s_{jh} \vee j_t$ (soma dos números de colunas dos blocos de A associados a elementos novos de I'_c). A faixa horizontal inferior da matriz B é obtida da seguinte maneira. Pela concatenação de linhas da forma $\omega_{t,k}$ onde $t \neq k$ e $t, k \in \{1, \dots, j_m\}$ determina-se uma matriz B' . Por transformações elementares de linhas obtemos uma matriz a qual cada bloco $A_{j_a \vee j_b}$ é a matriz identidade de posto $s_{j_a \vee j_b}$. Ou seja, a faixa horizontal é construída pela concatenação por justaposição de linhas de matrizes da forma:

$$B_{j_a \vee j_b} \left[\underbrace{0 \dots 0}_{\sum_{h \leq r} s_{i_h}} \mid \underbrace{0}_y \mid 0 \dots 0 E_{s_{j_a \vee j_b}} \mid 0 \dots 0 E_{s_{j_a \vee j_b}} \mid 0 \dots 0 \right]$$

Desta modo o primeiro bloco $E_{s_{j_a \vee j_b}}$ estará exatamente abaixo do bloco $A_{j_a \vee j_b}$ (de A_{j_a}), enquanto o segundo bloco $E_{s_{j_a \vee j_b}}$ de $B_{j_a \vee j_b}$ estará abaixo de um bloco nulo de A_{j_b} (aqui estamos supondo $j_a < j_b$).

Agora pela construção de B temos que $d(B) = A$

Vamos provar a afirmação (b)

Sublema 4.1. *A transformação d se anula apenas sobre um número finito de classes de equivalências.*

Demonstração. É imediato que $d(K_0^c) = 0$ e $d(K_1^0) = 0$. Notemos que $d(K_1^h) = 0$ e $d(K_1^{h,c}) = K_1^h$ (sempre que h e c são incomparáveis), pois a única coluna que poderia contribuir para a imagem não ser nula é excluída na definição de d . Mais ainda por este mesmo motivo $d(K_1^{h,t}) = K_0^t$ sempre que: $\{h, t, c\}$ é discreto e $h < t$. Sabemos que se $A \in \text{ind}(\text{Mat}_I)$ que não seja canônico necessariamente A tem mais do que uma linha e

alguma coluna ou uma linha e mais do que duas colunas; deste modo quando reduzida a forma de faixas, que buscamos para expressar $d(A)$, aplicando a definição de d segue que a imagem de A terá ao menos alguma coluna tanto no caso em que tem apenas uma linha quanto no caso em que o número de linhas de A ; aliás se A tem mais do que uma linha teremos a seguinte situação: se o posto do c -ésimo bloco é nulo ou igual ao número de linhas de A então $d(A)$ tem alguma coluna. No caso em que o posto seja um número intermédio entre zero e o número de linhas de A temos que $d(A)$ tem alguma linha e alguma coluna ou linha. Consequentemente $d(A) \neq 0$ $\square$

Suponhamos que A é indecomponível tal que $d(A) \neq 0$, se $d(A) = X_1 \oplus X_2$, onde $X_1 \neq 0 \neq X_2$ pelo item (a) existem $A_1, A_2 \in (Mat_I, G_I)$ tais que $d(A_1) = X_1$ e $d(A_2) = X_2$, em virtude do corolário 4.1 e da construção feita na demonstração de (a) segue que $X_1 \sim A \sim X_2$ em consequência $d(A) = X_1 \oplus X_2 = X_i$, onde $i = 1$ ou 2 , daqui vem que $d(A) = 0$, contradição. $\square$

$\square$

Corolário 4.3. *Uma condição necessária e suficiente para que um poset $(I, \preceq)$ seja de tipo de representação finito é que $w(I) \leq 3$ e após um número finito de derivações sucessivas do poset $(I, \preceq)$ obtém-se o poset vazio.*

4.2 O Teorema de Kleiner

Vale observar que o primeiro poset crítico de Kleiner, K_1 , tem largura 4 e portanto é de tipo de representação infinito. Para verificar que os outros posets críticos de Kleiner também são de tipo de representação infinito basta aplicar a eles o algoritmo de Nazarova-Roiter. Não é difícil verificar que, após no máximo 4 repetições, obtém-se o primeiro poset crítico. A outra implicação já é de demonstração bem mais difícil, como vemos já na demonstração dada por Kleiner em 1972, (veja [13]), onde o autor faz uso de resultados envolvendo diversos arranjos combinatoriais, além do algoritmo, apresentados por Nazarova e Roiter em [21]. Também há uma demonstração do teorema Kleiner apresentada por Róiter, no trabalho [27]. (Também em [29], [30] é demonstrado este teorema, mas estas versões diferem muito da elaboração original). Com o uso dos teoremas supra citados de Nazarova-Roiter e da equivalência do tipo de representação de um poset e de seu derivado obteremos que todo poset de tipo de representação infinito contém algum poset crítico de Kleiner, que por sua vez tem mesmo tipo de representação que K_1 , que é de tipo de representação

“manso”. Desta forma fica provada a segunda conjectura de Brauer-Thrall para posets. Mas o teorema de caracterização dos posets selvagens de Nazarova exige novos conceitos, entre os quais destacamos as sequências de Auslander-Reiten para posets.

Algumas definições

Definição 4.2. *Sejam $I = (I, \preceq)$ um poset e $c \in I$ um elemento qualquer. Definiremos largura de c em I sendo:*

$$w(c) = \max\{\#A \mid A \text{ é subposet discreto de } I \text{ e } c \in A\}$$

Definição 4.3. *Sejam $I = (I, \preceq)$ um poset e A um subposet de I com n elementos. Diremos que A é uma cadeia e o denotaremos por (n) , se A é um subposet totalmente ordenado de n elementos, isto é, se $w(A) = 1$.*

Definição 4.4. *Sejam $I = (I, \preceq)$ um poset e A um subposet de I . Diremos que A é um subposet primitivo de I de largura t , e denotaremos por $(k_1, \dots, k_t)$ se A é a união de t cadeias $(k_1), \dots, (k_t)$ com a propriedade de que cada elemento de uma das cadeias é incomparável a todos os elementos das demais cadeias.*

Definição 4.5. *Uma semicadeia de um poset I é um subposet G de largura dois e que não admite o seguinte poset como subposet pleno.*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} o & \longrightarrow & o \\ & o & \end{array} \right\}$$

O seguinte poset é denotado por N :

$$N = \begin{array}{ccc} o & & o \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ o & & o \end{array}$$

Teorema 4.2. (Kleiner) *Seja $(I, \preceq)$ um poset e k um corpo. As seguintes condições são equivalentes:*

- *A categoria $I - sp$ é de tipo de representação finito.*
- *O poset I não contém como subposet pleno nenhum dos posets seguintes, chamados posets críticos de Kleiner:*

$$K_1 = (1, 1, 1, 1) = \left\{ \begin{array}{cccc} o & o & o & o \end{array} \right\}$$

$$K_2 = (2, 2, 2) = \left\{ \begin{array}{ccc} o & o & o \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ o & o & o \end{array} \right\}$$

$$K_3 = (1, 3, 3) = \left\{ \begin{array}{ccc} & o & o \\ o & \uparrow & \uparrow \\ & o & o \\ & \uparrow & \uparrow \\ & o & o \end{array} \right\}$$

$$K_4 = (N, 4) = \left\{ \begin{array}{cccc} & & & o \\ & & & \uparrow \\ o & & o & o \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ o & & o & o \\ & & & \uparrow \\ & & & o \end{array} \right\}$$

$$K_5 = (1, 2, 5) = \left\{ \begin{array}{ccc} & o & \\ & \uparrow & \\ & o & o \\ o & \uparrow & \uparrow \\ & o & o \\ & \uparrow & \\ & o & \\ & \uparrow & \\ & o & \end{array} \right\}$$

Demonstração. Em virtude do teorema 2.2 qualquer poset que contenha K_1 será de tipo de representação infinito.

Agora usando o algoritmo de Nazarova-Roiter e o teorema 4.1 mostraremos que os demais posets críticos de Kleiner também são de tipo de representação infinito, donde seguirá que nenhum poset de tipo de representação finito contém K_i , para $i \in \{1, \dots, 5\}$.

Consideremos inicialmente o poset K_2 .

$$K_2 = \begin{pmatrix} c_1 \cdot & b_1 \cdot & a_1 \odot \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c_2 \cdot & b_2 \cdot & a_2 \cdot \end{pmatrix}$$

Derivando K_2 com relação à a_1 , temos

$$(K_2)'_{a_1} = \begin{array}{ccccc} & & c_1 \vee b_1 \cdot & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ c_1 \vee b_2 \cdot & & & & c_2 \vee b_1 \cdot \\ \uparrow & \nwarrow & \nearrow & \uparrow & \\ c_1 \cdot & & c_2 \vee b_2 \cdot & & b_1 \cdot \\ \uparrow & \nearrow & \nwarrow & \uparrow & \\ c_2 \cdot & & & b_2 \cdot & a_2 \cdot \end{array}$$

Observemos que $\{a_2, b_1, c_1, c_2 \vee b_2\} \cong K_1 \subset (K_2)'_{a_1}$. Portanto $(K_2)'_{a_1}$ é de tipo de representação infinito e pelo teorema 4.1 segue que K_2 é de tipo de representação infinito.

Agora vamos mostrar, de forma completamente similar, que K_3 é de tipo de representação infinito.

$$K_3 = \begin{pmatrix} & b_1 \cdot & a_1 \odot \\ c \cdot & \uparrow & \uparrow \\ & b_2 \cdot & a_2 \cdot \\ & \uparrow & \uparrow \\ & b_3 \cdot & a_3 \cdot \end{pmatrix}$$

Derivando K_3 com relação à a_1 . Temos o poset seguinte.

Agora observemos que

$$(K_3)'_{a_1} \supseteq \left\{ \begin{array}{ccc} c \vee b_3 & b_1 & a_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c & b_2 & a_3 \end{array} \right\}, \text{ que é isomorfo a } K_2$$

Novamente pelo teorema 4.1 segue que K_3 é de tipo de representação infinito.

Finalmente, vamos derivar o quinto poset crítico de Kleiner.

$$K_5 = \left\{ \begin{array}{ccc} & & b_1 \\ & & \uparrow \\ & a_1 \odot & b_2 \\ c & \uparrow & \uparrow \\ & a_2 & b_3 \\ & & \uparrow \\ & & b_4 \\ & & \uparrow \\ & & b_5 \end{array} \right\}$$

com relação à a_1 .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c \vee b_1 & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & c \vee b_2 \cdot & & b_1 & \\
 (K_5)'_{a_1} = & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \\
 & c \vee b_3 \cdot & & b_2 & \\
 & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & a_2 \cdot \\
 & c \vee b_4 \cdot & & b_3 & \\
 & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \\
 & c \vee b_5 \cdot & & b_4 & \\
 & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \\
 & c \cdot & & b_5 &
 \end{array}$$

K_3 é isomorfo a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} b_1 \cdot & c \vee b_4 \cdot & \\ a_2 \cdot & \uparrow & \uparrow \\ b_2 \cdot & c \vee b_5 \cdot & \\ \uparrow & \uparrow & \\ b_3 \cdot & c \cdot & \end{array} \right\} \text{ que é um subposet crítico de } (K_5)'_{a_1}$$

Temos que K_5 é de tipo de representação infinito.

Com relação à K_4 vamos proceder de outra forma. Agora que sabemos que K_5 é de tipo de representação infinito vamos inicialmente derivar K_5 com relação à b_1 , desta forma obteremos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c \vee a_1 \odot & & b_2 \cdot \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \uparrow \\
 & c \vee a_2 \cdot & & \cdot a_1 & b_3 \cdot \\
 & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \uparrow \\
 & c \cdot & & \cdot a_2 & b_4 \cdot \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & b_5 \cdot
 \end{array}$$

Agora derivando $(K_5)'_{b_1}$ com relação à $c \vee a_1$ obteremos:

$$((K_5)'_{b_1})'_{c \vee a_1} = \begin{array}{ccccc} & & & & \cdot b_2 \\ & & & & \uparrow \\ & c \vee a_2 & & a_1 & \cdot b_3 \\ & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \uparrow \\ & c & & a_2 & \cdot b_4 \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \cdot b_5 \end{array}$$

Claramente $((K_5)'_{b_1})'_{c \vee a_1}$ é isomorfo a K_4 e novamente pelo teorema 4.1 temos que K_4 é de tipo de representação infinito. Desta forma fica demonstrado que um poset de tipo de representação finito não contém nenhum subposet isomorfo a qualquer poset crítico de Kleiner.

Falta demonstrar que se um poset não contém nenhum poset crítico de Kleiner então ele é de tipo de representação finito.

Observação 4.2. *Notemos que com exceção à K_4 os demais posets críticos de Kleiner são todos primitivos e que o próprio K_4 contém plenamente o poset primitivo $(1, 1, 3)$. Ademais, ao excluirmos algum ponto de qualquer poset crítico de Kleiner obtemos um poset de tipo de representação finito. De certa forma são estas as idéias que iremos explorar para efetuar a demonstração da segunda parte do teorema.*

Considere os seguintes posets:

$$X_1 = (1, 2, 4) \quad X_2 = \begin{array}{ccccc} & & & & o \\ & & & & \uparrow \\ & o & & o & o \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & o & & o & o \\ & & & & \uparrow \\ & & & & o \end{array}$$

$$X_3 = (1, 2, 3) \quad X_4 = (1, 2, 2) \quad X_5 = (1, 1, 1)$$

Estes posets de certa forma estão ordenados por complexidade, isto é X_i é mais complexo que X_j sempre que $i \leq j$ e $i, j \in \{1, \dots, 5\}$.

Seja S um poset. Chamaremos de sêxtupla comparatriz de S o seguinte vetor:

$$s(S) = (s_1(S), s_2(S), s_3(S), s_4(S), s_5(S), s_6(S)) \in \mathbb{N}^6$$

$$\text{onde } \begin{cases} s_6(S) \text{ é a cardinalidade de } S \\ s_i(S) = \#\{A \mid A \text{ é subposet de } S \text{ e } A \cong X_i\} \quad \text{se } 1 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

Estaremos olhando para $\mathbb{N}^6$ dotado da ordem lexicográfica. Desta forma dados dois posets poderemos compará-los através da aplicação de s .

Lema 4.2. *Seja S é um poset e $\mathcal{L} = \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subposets de S tais que $s(S_i) \geq s(S_{i+1})$ para todo $i \in J \subset \mathbb{N}$. Então $\mathcal{L}$ é estacionária; isto é, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $S_t = S_{t+h}$ par todo $h \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam S um poset e $\mathcal{L}$ uma seqüência na condição do enunciado. Consideremos $(\mathbb{N}^6, \preceq_{LEX}) : \mathbb{N}^6$ dotado da ordem lexicográfica.

Para cada $X \in \mathcal{L}$, definimos $\mathfrak{X} = \{I \mid I \text{ é um poset, e } s(I) \leq X\}$ e vamos tomar $\hat{\mathfrak{X}} = \{z \in (\mathbb{N}^6, \preceq_{LEX}) \mid z = s(I) \text{ par algum } I \in \mathfrak{X}\}$.

A partir de $\mathcal{L}$ podemos construir uma cadeia descendente $\{\widehat{\mathfrak{G}}_i\}_{i \in J \subset \mathbb{N}}$ em $(\mathbb{N}^6, \preceq_{LEX})$ que admite uma cota inferior. $(\bigcap_{i \in J} \mathfrak{G}_i)$, pelo lema de Zorn segue que a cadeia é estacionária. $\square$

Lema 4.3. *Seja S um poset de largura três. Então existe um elemento maximal $x \in S$ tal que $s(S'_x) <_{lex} s(S)$ em $\mathbb{N}^6$.*

Demonstração. Faremos a demonstração deste lema dividindo em dois casos, o primeiro quando o poset S admite no máximo dois elementos maximais; e o outro quando S tem três elementos maximais.

Se existe apenas um elemento maximal em S ; é imediato que $S'_a = S - \{a\}$, como a é comparável a todos os demais elementos significa que a não pertence a nenhum suposet isomorfo a qualquer X_i , onde $i \in \{1, \dots, 5\}$. Logo $s_i(S) = s_i(S'_a)$ para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$, e claramente $s_6(S) > s_6(S'_a)$. Vamos tratar agora do caso em que S admite exatamente dois elementos maximais distintos. Sejam a e b os elementos maximais de S .

Sublema 4.2. *Seja S um poset de largura três que admite exatamente dois elementos maximais a e b . Então $w(a) \leq 2$ ou $w(b) \leq 2$. Consequentemente $S'_a = S - \{a\}$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $w(a) = w(b) = 3$. Isto significa que existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$ tais que $\{a_1, a_2, a\}$ e $\{b_1, b_2, b\}$ são conjuntos discretos.

Por outro lado temos:

$$\begin{array}{llll} \{a_1, a_2, a\} \text{ é discreto} & \implies \{a_1, a_2, b\} \text{ não é discreto} & \implies a_1, a_2 \preceq b, & \text{pois } b \text{ é maximal} \\ \text{analogamente,} & \{b_1, b_2, b\} \text{ é discreto} & \implies b_1, b_2 \preceq a \end{array}$$

Como $b_j \preceq a$ segue que $a_i \not\preceq b_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$. E também $a_i \preceq b$ implicando que $b_j \not\preceq a_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$. Portanto, obtemos o poset discreto $\{b_1, b_2, a_1, a_2\} \subseteq S$, que é um absurdo. Logo necessariamente $w(a) \leq 2$ ou $w(b) \leq 2$

Seja a o elemento maximal para o qual $w(a) \leq 2$. Em particular S não admite subposet discreto de largura três, conseqüentemente S'_a não possui elementos novos, portanto $S'_a = S - \{a\}$ $\square$

Observação 4.3. *Vamos tratar do caso em que o poset admite três elementos maximais, digamos a, b, c . Iremos utilizar um famoso teorema de Dilworth cuja demonstração pode ser encontrada no seção 3 do capítulo 7 do livro “Combinatorial Analysis” (ou também em [14]), publicado pela editora MIR, de autoria de M. Hall. Este teorema de Dilworth nos diz que: Dado um poset I de largura t existem t cadeias de I que contém todos os elementos de I . Notemos que a simples união das cadeias não é o poset, uma vez que em a descrição do poset exige que tenhamos todas as relações de ordem bem descritas. O teorema de Dilworth nos permite representar os elementos de S mediante colunas com possíveis interligações.*

Seja $S^+ = \{x \in S \mid x \text{ tem apenas um sucessor maximal}\}$. Inicialmente mostraremos que:

S^+ é um subposet primitivo e se S não possui posets críticos de Kleiner então S^+ assume uma das formas:

$$\diamond : \quad S^+ \cong \begin{array}{c} o \\ \uparrow \\ o \quad o \quad \vdots \\ \uparrow \\ o \end{array} \quad \text{ou} \quad S^+ \cong \begin{array}{c} o \\ \uparrow \\ o \quad \vdots \\ \uparrow \quad \uparrow \\ o \quad o \quad o \end{array}$$

De fato S^+ é um subposet primitivo pois supondo o contrário ao expressarmos os elementos S^+ como união de três cadeias, uma vez que $w(S^+) = 3$ pois $\{a, b, c\} \subseteq S^+$, teríamos que algum elemento de S^+ teria ao menos dois sucessores maximais.

Claro que se S não contém posets críticos de Kleiner S^+ também não possui donde segue que S^+ assume uma das formas acima.

No caso em que S^+ assume a primeira forma acima, isto é, $S^+ \cong (1, 1, n)$ provaremos:

Sublema 4.3. *Seja S um poset de largura três e com três elementos maximais, e suponha que S^+ é um poset da forma $(1, 1, n)$. Então existe um elemento maximal $x \in S$ tal que todos os pontos novos de S'_x são de largura menor ou igual a dois.*

Demonstração. Seja $S^+ = (1, 1, n)$. Não há perda de generalidades em supor que a é o elemento maximal da cadeia (g) de S^+ . Os elementos de S podem aparecer como união de três cadeias $\mathcal{C} = \{c = c_1 \leftarrow \dots \leftarrow c_n\}$, $\mathcal{B} = \{b = b_1 \leftarrow \dots \leftarrow b_m\}$ e $\mathcal{A} = \{a = a_1 \leftarrow \dots \leftarrow a_g \leftarrow \dots \leftarrow a_l\}$ tendo a seguinte forma diagramática:

(a) Se $b_i \preceq a$ para todo $i \geq 2$ então $b \vee c$ é o único elemento novo em S'_a e $w(b \vee c) \leq 2$.

De fato a afirmação (a) é verdadeira pois qualquer elemento novo em S'_a é da forma $x \vee y$ onde $\{x, y, a\}$ é discreto em S o que significa que x e y são elementos de colunas distintas na representação acima e que nem x , nem y são elementos da coluna $\mathcal{A}$, como $b_i \preceq a$ para todo $i \geq 2$ podemos assumir que $y = b$. Por outro lado para todo $x \prec c$ temos que $x \notin S^+$, ou seja, $x \preceq b$ ou $x \preceq a$. Logo $\{x, b, a\}$ não é discreto em S . Portanto existe um único elemento novo em S'_a que é exatamente $b \vee c$.

Claro que todos os elementos das colunas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são comparáveis à $b \vee c$ e do fato de $b \vee c$ ser o único elemento novo segue que $w(b \vee c) \leq 2$ em S'_a .

Evidentemente, se $c_i \preceq a$ para todo $i \geq 2$, teremos a validade da mesma afirmação. Passamos a considerar o caso em que $b_2 \not\preceq a$ e $c_2 \not\preceq a$.

Como $b_2 \notin S^+$ e $c_2 \notin S^+$ segue que $b_2 \preceq c$ e $c_2 \preceq c$. Escolhendo $x = c$ e derivando S

com relação à c teremos: os elementos de

Ou seja os elementos novos de S'_c formam exatamente a cadeia

$\{a_g \vee b \rightarrow \dots \rightarrow a_g \vee b\}$, pois se há um conjunto discreto com três elementos envolvendo c , sabendo que $b_i \preceq a$ para todo $i \geq 2$, o conjunto tem que conter $\{c, b\}$. Donde segue que os elementos novos são exatamente os expressos acima.

Agora vamos mostrar que $w(a_i \vee b) \leq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$. De fato supondo que $w(a_i \vee b) = 3$ para algum $i \in \{1, \dots, g\}$ segue que existe um conjunto discreto da forma $\{a_i \vee b, x, y\}$. Desta forma $y \notin \mathcal{B}'$ e $x \notin \mathcal{B}'$, podemos supor $y \in \mathcal{C}'$ e $x \in \mathcal{A}'$. Como $c_2 \preceq b \preceq a_i \vee b$ segue que todos os elementos da coluna $\mathcal{C}'$ são comparáveis à $a_i \vee b$, dando uma contradição. (Olhando para o diagrama acima isto parece imediato.) $\square$

Para um poset S nas condições do sublema anterior vale o seguinte resultado.

Corolário 4.4. *Seja S um poset de largura três e com três elementos maximais, suponhamos que S^+ é um poset da forma $(1, 1, n)$ e seja x um elemento maximal de S tal que todos os pontos novos de S'_x são de largura menor ou igual à dois. Então $s(S) > s(S'_x)$*

Demonstração. De fato, se $y \in S'_x - S$ temos que $w(y) < 3$, em particular não existe um subposet J de S'_x tal que $y \in J$ e $J \cong X_i$ para algum $i \in \{1, \dots, 5\}$. Consequentemente, todo subposet de S'_x é subposet de S . Por outro lado, S contém um subposet $\{x, b, c\}$ formado pelos elementos maximais. Claro que, $\{x, b, c\}$ não é subposet de S'_x , portanto $s(S) > s(S'_x)$. $\square$

Falta analisarmos a situação em que S^+ assume a segunda das formas $\diamond$. Ou seja tem a forma:

$$S^+ = \{b, \underbrace{a_g \rightarrow \dots \rightarrow a_1}_g, \underbrace{c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_h}_h\} \text{ onde } \min\{g, h\} = 2 \text{ e } \max\{g, h\} = 4$$

Como $b_2 \notin S^+$ podemos supor $b_2 \preceq a_1 = a$. Calculando S'_a obteremos o seguinte poset:

Seja $\mathcal{P}$ um conjunto primitivo maximal em S'_a de largura três e que contenha $b \vee c_j$ para algum $j \in \{1, \dots, h\}$.

Pelo fato de $b \vee c_j$ pertencer à $\mathcal{P}$ e $w(\mathcal{P}) = 3$ segue que $\mathcal{P}$ é formado por três cadeias cada qual em uma das colunas da decomposição de Dilworth acima. Ou seja podemos supor que $\mathcal{P} = (A, B, C)$ onde A, B e C são cadeias em $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ respectivamente. Vamos destacar abaixo algumas propriedades de $\mathcal{P}$:

- (1) Supondo $b \vee c_j \in \mathcal{P}$ segue um elemento $c_k \in \mathcal{P}$ somente se $k < j$. De fato, $c_k \in \mathcal{P}$ implica que $\{c_k, b \vee c_j\}$ é discreto, como para todo $k \geq j$ tem-se que $c_k \leq c_j < b \vee c_j$, o que significa que para $k \geq j$ o conjunto $\{c_k, b \vee c_j\}$ não é discreto.
- (2) Necessariamente $b = b_1 \in \mathcal{P}$. Isto decorre do fato de $\mathcal{P}$ ser maximal. Pois, caso contrário, $\{b\} \cup \mathcal{P}$ seria comparável não seria primitivo, em decorrência da maximalidade de $\mathcal{P}$ o que implicaria que b seria comparável a algum $x \in \mathcal{P}$, isto é, $x \leq b \leq b \vee c_j$ implicando que $\{b \vee c_j, x\}$ não é discreto, o que contradiz o fato de $\mathcal{P}$ ser primitivo.
- (3) O índice j é maior do que um pois $c_j \leq b \vee c_j$.

- (4) O elemento $c_{j-1} \in \mathcal{P}$. De fato, se supormos o contrário teremos que existe algum $x \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$, tal que x é comparável a c_{j-1} e $x \in \mathcal{P}$. O elemento c_{j-1} não pode ser sucessor de x , pois isto acarretaria $x \prec c_l$ sempre que $l \leq (j-1)$ implicando que $c_l \notin \mathcal{P}$. Pelo ítem (1), segue que $C = \emptyset$. Agora se $c_{j-1} \preceq x$ implica $c_{j-1} \preceq x \preceq b$ ou a , como $c_j \preceq c_{j-1}$ teríamos que $\{a, b, c_j\}$ não seria discreto, uma contradição.

Na Figura abaixo expressamos $\mathcal{P}$ sob decomposição de Dilworth, e ao lado determinamos $\widehat{\mathcal{P}}$ o poset primitivo de S obtido a partir de $\mathcal{P}$:

A	B	C	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
a_{i+1}	$b \vee a_{h-r+1}$	$c_{h-r-s+1}$	a_1	b_1	$c_{h-r-s+1}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
a_{i+p}	$b \vee a_h$	c_{h-r}	a_{i+p}	b_q	c_{h-r}
	$\uparrow$				$\uparrow$
	b				c_{h-r+1}
	$\uparrow$				$\uparrow$
$\#A = p$	$\vdots$		$\#\widehat{A} = p$		$\vdots$
$\#B = s + q$	$\uparrow$		$\#\widehat{B} = q$		$\uparrow$
$\#C = s$	b_q		$\#\widehat{C} = s + r$		c_h

Sabemos que S não contém nenhum poset crítico de Kleiner. Usando este fato, veremos provar que S'_a também não contém posets críticos de Kleiner e que $s(S'_a) < s(S)$. Vamos provar a validade das seguintes afirmações:

- $p = 1$ ou $s = 1$. É claro que $p = 1$ ou $s = 1 \iff (2, 2, 2) \not\subseteq S'_a$. Se S'_a contiver $K_2 = (2, 2, 2)$, uma vez que S não contém K_2 , segue que um dos elementos, digamos x , é novo, isto é, $x = b \vee c_t$ para algum $t \in \{1, \dots, h\}$. Por outro lado $(2, 2, 2)$ é primitivo. Como $\mathcal{P}$ é maximal, $s > 1, p > 1$ e $h + q > 1$. Vamos supor, por absurdo, que $p > 1$ e $s > 1$. Desta forma a cadeia C tem pelo menos dois elementos distintos c_{t-2}, c_{t-1} , a cadeia A contém a_{i+1}, c_{i+2} e $b \vee c_t, b$ está contido em B , formando um subposet da forma $(2, 2, 2)$.

Consequentemente $\{c_{t-2} \leftarrow c_{t-1} \leftarrow c_t, b, a \leftarrow a_{i+1} \leftarrow c_{i+2}\} \subseteq S$ (obtido pela integração de $\mathcal{P}$), o que contradiz o fato de que S não contém nenhum poset crítico de Kleiner.

- $S'_a \not\supseteq (1, 3, 3)$

De fato se $S'_a \supseteq (1, 3, 3) \implies q + r \geq 3$ e $(p \geq 3 \text{ ou } s \geq 3)$. Caso $p \geq 3$. Já sabemos que $s = 1$ ou $p = 1$, supondo $p \geq 3$ teremos $s = 1$ e a_3 é incomparável às cadeias B e C . Agora $q + r \geq 3$ o que significa que $q \geq 2$ ou $r \geq 2$. No primeiro caso a partir de $\{a_2 \leftarrow a_3, b \vee c_{h-r+1} \rightarrow b, c_{h-r}\} \subset S'_a$ obtemos o poset $\{a_2 \leftarrow a_3, b \rightarrow b_2, c_{h-r} \rightarrow c_h\} \subset S$ o que é uma contradição. E na segunda situação obteremos $(1, 3, 3)$ em S a partir do poset:

$$S'_a \supseteq \begin{array}{ccccc} a_4 & \longrightarrow & a_3 & & \longrightarrow a_2 \\ b & \longrightarrow & b \vee c_h & \longrightarrow & b \vee c_{h-1} \\ & \nearrow & & & \\ c_h & \longrightarrow & c_{h-1} & & \longrightarrow c_{h-2} \end{array}$$

Se supormos $s \geq 3$ teremos $p = 1$ e as situações em que $r = 1$ ou $r \geq 2$. Se $r \geq 2$ o poset $(1, 2, 5)$ é obtido em S a partir do poset

$$S'_a \supseteq \begin{array}{ccccc} a_{1+3} & \longrightarrow & a_{1+2} & & \longrightarrow a_{i+1} \\ b & \longrightarrow & b \vee c_h & \longrightarrow \dots \longrightarrow & b \vee c_{h-r+1} \\ & \nearrow & & & \\ c_h & \longrightarrow & c_{h-r} & \longrightarrow \dots \longrightarrow & c_{h-r-s+1} \end{array}$$

E no caso em que $r = 1$ e $s \geq 3$ obteríamos $N_4 = \hat{J} \cup \{a\}$ em S , onde J é poset:

$$S'_a \supseteq J = \begin{array}{ccccc} a_{1+3} & \longrightarrow & a_{1+2} & & \\ b_2 & \longrightarrow & b & \longrightarrow & b \vee c_h \\ & \nearrow & & & \\ c_h & \longrightarrow & c_{h-r} & \longrightarrow \dots \longrightarrow & c_{h-r-s+1} \end{array}$$

Até agora vimos que $S \not\supseteq K_2$ e nem $S \not\supseteq K_3$. Vamos estudar o caso em que $\mathcal{P}$ é da forma $(1, 2, k)$ para k maximal.

Se $k = 1 \implies s_i(S'_a) \leq s_i(S)$ sempre que $i \leq 4$. Além disto $\hat{\mathcal{P}} \cup \{a\} = (2, 2, 1) \not\subseteq S'_a$, consequentemente $s_4(S'_a) < s_4(S)$

Vamos analisar o caso em que $k > 1$. Como para cada primitivo em S'_a obtemos um primitivo em S o fato de $S \not\supseteq (2, 2, 2)$ nos garante que $q = 1$ ou $p = 1$. No caso em que $q = 1$ a partir de $\mathcal{P}$ obteremos que $\hat{\mathcal{P}} \cup \{a\}$ é um poset primitivo da forma $(p+1, 1, r+s) \subseteq S$. Assim $(p+1, 1, r+s) = (k+1, 1, 2)$ ou $(p+1, 1, r+s) = (2, 1, k+1)$ donde vem que $k \leq 3$ e $s_i(S'_a) \leq s_i(S)$. Em particular $S'_a \not\supseteq (1, 2, 5)$ ou N_4 . Ademais

se $k = 3$ teremos $\widehat{\mathcal{P}} \cup \{a\} = (1, 2, 4)$ donde segue que $s_4(S'_a) < s_4(S)$, e quando $k = 2$ teremos que $s_2(S'_a) \leq s_2(S)$ e $s_3(S'_a) \leq s_3(S)$, pois $\widehat{\mathcal{P}} \cup \{a\} = (1, 2, 3)$ e $(1, 2, 3) \not\subseteq S'_a$.

Vamos estudar o caso em que $p = 1$ e $q > 1$. Caso $q \geq 3$ ou $s \geq 3$ teríamos que $\mathcal{P}$ ou $\widehat{\mathcal{P}} \cup \{a\}$ conteria um subposet isomorfo à $(1, 3, 3)$. Logo precisamos considerar apenas o caso em que $q = s = 2$.

É interessante observarmos que de acordo com as configurações de $\mathcal{P}$ necessariamente $\widehat{\mathcal{P}} \cup \{a\} S \supseteq N_{r+2}$, e pelo fato de $N_4 \not\subseteq S$ segue que $r = 1$. Assim temos que $s_1(S'_a) \leq s_1(S)$. Bem, caso $s_2(S'_a) < s_2(S)$ segue imediatamente que $s(S'_a) < s(S)$. Vamos supor que $s_2(S'_a) \geq s_2(S)$. Neste caso existe $N' \cong N_3$ que está contido em S' e não está contido em S .

$$\begin{array}{ccc} z_3 & \longrightarrow & z_2 \longrightarrow z_1 \\ y_2 & \longrightarrow & y_1 \\ & \searrow & \\ x_2 & \longrightarrow & x_1 \end{array}$$

Vamos supor que y_1 é um elemento novo, ou seja, $y_1 = b \vee c'_h > b$. Desta forma obteremos o poset $\{b \longrightarrow y_1, z_2 \longrightarrow z_1, x_2 \longrightarrow x_1\} \cong (2, 2, 2) \subseteq S'_a$, uma contradição.

Se x_1 fosse um elemento novo $S'_a \supseteq Y = \{z_3 \longrightarrow z_2 \longrightarrow z_1, y_1, x_2 \longrightarrow x_1\} \cong \mathcal{P}$. Aqui $x_2 \longrightarrow x_1 \subseteq \mathcal{B}$ pois Y é primitivo e $x_1 > b$. Ou seja, estamos no caso em que $\mathcal{P} = (1, 2, k)$ donde segue que $s_1(S'_a) < s_1(S)$, e portanto $s(S'_a) < s(S)$.

Finalmente, se $z_1 \notin S$, isto é, $S'_a \supseteq H = \{z_3 \longrightarrow z_2 \longrightarrow z_1, x_1, y_2 \longrightarrow y_1\}$ ou $S'_a \supseteq H = \{z_3 \longrightarrow z_2 \longrightarrow z_1, y_1, x_2 \longrightarrow x_1\}$, teremos $z_3 \longrightarrow z_2 \longrightarrow z_1 \subseteq \mathcal{B}$, pois $z_1 > b$ e H é primitivo. De qualquer forma $\mathcal{P} = (1, 2, k)$ e novamente teremos que $s_1(S'_a) < s_1(S)$, implicando $s(S'_a) < s(S)$. $\square$

Em virtude do lema 4.2 terminamos a demonstração. $\square$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações do uso dos teoremas de classificação de teoria de representações de posets, mais precisamente faremos duas aplicações. A primeira acontece quando Λ , álgebra de Artin de dimensão finita é uma extensão por um ponto. Estaremos interessados em $\Lambda = \Lambda'[M]$, onde Λ' é uma álgebra de Artin e $M \in \text{mod}(\Lambda')$.

A idéia será estudar M no quiver de Auslander-reiten de Λ' a fim de calcular a categoria vetorespacial $\text{Hom}_{\Lambda'}(M, -)$ para classificarmos a álgebras Λ . Claro que há diversos complicadores, uma vez que nem sempre é fácil apresentar o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra e encontrar o módulo requerido. Apesar destas limitações em diversas ocasiões este método é suficiente para classificarmos certas álgebras quanto ao seu tipo de representação.

Na última seção do capítulo apresentaremos exemplos destas aplicações, trataremos de algumas situações em que podemos determinar o tipo de representação de uma álgebra a partir da classificação de categorias vetorespaciais.

5.1 Extensões por um ponto

Seja Λ' uma k -álgebra de dimensão finita e M um Λ' módulo. Chamaremos de extensão por um ponto de Λ' com relação à M e denotaremos por $\Lambda = \Lambda'[M]$, a álgebra definida pela seguinte matriz triangular:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k & {}_k M_{\Lambda'} \\ 0 & \Lambda' \end{bmatrix}$$

Observação 5.1. *A razão para este nome vem do seguinte: quando k é algebricamente fechado e Λ' é básica tem-se que Λ é uma álgebra de Artin, básica, e, pelo teorema de Gabriel, $\Lambda \cong k(\Gamma, \rho)$, onde $k(\Gamma, \rho)$ é a álgebra de caminhos da aljava com relação (Γ, ρ) . Seja $i \in \Gamma_0$ uma fonte e seja $\widehat{e}_i$ seu correspondente idempotente em Λ . Desde que não existe caminhos não triviais terminando em i temos que $\widehat{e}_i R \widehat{e}_i \cong k$ e $(1 - \widehat{e}_i) R \widehat{e}_i = 0$.*

Se (Γ', ρ') é o quiver com relações que obtemos pela remoção do vértice i e das relações iniciadas em i , então $(1 - \widehat{e}_i) R (1 - \widehat{e}_i) \cong k(\Gamma', \rho')$. Desta forma $k(\Gamma, \rho)$ é obtida a partir de $\Lambda' = k(\Gamma', \rho')$ pela inclusão desse vértice, junto com as flechas e relações iniciadas em i . Desta modo Λ assume a forma acima.

Seja C_Λ a categoria cujos objetos são triplas: (V, X, α) onde V é um k -espaço vetorial, X é um Λ' módulo e $\alpha : V \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda'}(M, X)$ é uma aplicação k -linear.

Os morfismo de C_Λ são definidos como segue. $g \in \text{Hom}_{C_\Lambda}(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ (digamos que $\mathbb{V} = (V, X, \alpha)$ e $\mathbb{V}' = (V', X', \alpha')$) quando g é um par da forma $g = (f, \phi)$ onde $f : V \rightarrow V'$ uma transformação k -linear e $\phi : X \rightarrow X'$ um Λ' -homomorfismo tais que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \alpha' : V' & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Lambda'}(M, X') \\ \uparrow_f & \circlearrowleft & \uparrow_{\text{Hom}_{\Lambda'}(M, \phi)} \\ \alpha : V & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Lambda'}(M, X) \end{array}$$

O seguir enunciaremos, um importante resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [4] página 74, que nos permite uma interessante identificação dos Λ -módulos

Teorema 5.1. *A categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ é equivalente à categoria C_Λ .*

5.2 Categorias Vetorespaciais

Definição 5.1. *Uma categoria $\mathcal{D}$ é pré-aditiva se são satisfeitas as seguintes condições:*

- Para todo par de objetos A, B de $\mathcal{D}$ tem-se que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$ é um grupo abeliano
- A composição de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, C)$ é bilinear.

Lembramos que as categorias aditiva são as pré-aditivas que admitem somas finitas.

Seja R um anel comutativo artiniano. Dizemos que uma categoria $\mathcal{D}$ é pré-aditiva é uma R -categoria se $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$ é um R -módulo para cada par de objetos A, B de $\mathcal{D}$ e a composição de morfismos é R -bilinear.

Definição 5.2. *Sejam R um anel comutativo artiniano, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias pré-aditivas e $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor covariante. Dizemos que F é um R funtor se para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a aplicação induzida por $(A, B) \longrightarrow (F(A), F(B))$ é R -homomorfismo.*

Seja k um corpo e uma álgebra $\Lambda = kQ/I$, onde Q é uma aljava e I é um ideal admissível. Podemos definir uma k -categoria C_{Λ} em que os objetos são os vértices de Q e $\text{Hom}_{C_{\Lambda}}(v, w) = v(kQ/I)w$.

Em particular se J for um poset. Considerando Q a aljava associada a representação diagramática de J e I o ideal gerados pelas relações de comutatividade C_{Λ} é a álgebra de incidência do poset J .

Definição 5.3. *Sejam k um corpo, A uma k -categoria de Krull-Schmidt e $|\cdot| : A \longrightarrow \text{mod}(k)$ um k -funtor. Chamaremos de categoria vetorespacial $(A, |\cdot|)$ à categoria imagem de $|\cdot|$, ou seja a categoria*

$$X \in \text{Obj}((A, |\cdot|)) \iff X = |Y| \text{ para algum } Y \in \text{Obj}(A).$$

$$f \in \text{Mor}((A, |\cdot|)) \iff f = |g| \text{ para algum } g \in \text{Mor}(A).$$

A cada poset I podemos associar uma categoria vetorespacial da seguinte maneira. Ao poset I associamos a categoria cujos objetos são os pontos de I . E definimos $\text{Hom}(a_i, a_j) = k$ se $i \preceq j$ em I e $\text{Hom}(a_i, a_j) = 0$ caso contrário.

Tipo de representação

Seja $L = (L', |\cdot|)$ uma categoria vetorespacial. Denotaremos por $\mathcal{U}(L)$ a categoria cujos objetos são triplas $V = (U, \alpha, X)$, onde U é um k -espaço vetorial de dimensão finita, X é um objeto de L' , $\alpha : U \longrightarrow |X|$ é uma aplicação k -linear e cujos morfismos

$F \in \text{Hom}_{\mathcal{U}(L)}(V, V')$ são pares $F = (f, g)$ onde $f : U \rightarrow U'$ e $g : X \rightarrow X'$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \alpha' : U' & \longrightarrow & |X'| \\ \uparrow_f & \circlearrowleft & \uparrow_{|g|} \\ \alpha : U & \longrightarrow & |X| \end{array}$$

Dado um objeto $\mathbb{V} = (U, \alpha, X) \in \mathcal{U}(L)$ definimos dimensão de $\mathbb{V}$ sendo: $\dim \mathbb{V} = \dim_k U + \dim_k |X|$

Definição 5.4. Dizemos que a categoria vetorespacial $L = (L', | \cdot |)$ é de tipo de representação finita quando existe apenas um número finito de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis em $\mathcal{U}(L)$. Diremos que $L = (L', | \cdot |)$ é de tipo de representação selvagem quando é possível definir um funtor imersão $F : \text{mod } k[x, y] \rightarrow \mathcal{U}(L)$. $L = (L', | \cdot |)$ será dita de tipo de representação mansa quando não é de tipo de representação finito e para cada dimensão d , for possível definir um número finito de funtores $F_i : \text{mod } k[x] \rightarrow \mathcal{U}(L)$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ de modo que todo objeto indecomponível de $\mathcal{U}(L)$ seja isomorfo a algum objeto da imagem de F_i para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

5.3 Categorias Schurian

Definição 5.5. *Seja k um corpo. Uma categoria vetorespacial L é dita Schurian se para todo objeto indecomponível $X \in \mathcal{U}(L)$ tem-se que $\text{End}_k X \cong A$, onde A é um anel com divisão sobre k .*

Vale notar que se o corpo k for algebricamente fechado e L for uma categoria Schurian então $\text{End}_k X \cong k$ para todo $X \in \text{ind}(\mathcal{U}(L))$

Lema 5.1. ([15]) *Sejam k um corpo e A uma k -álgebra associativa de dimensão finita temos*

- (1) *Existe um funtor fiel $F : \text{mod} A \longrightarrow \text{mod} K \langle x, y \rangle$*
- (2) *Se $\dim_k A = 3$ F é pleno.*

Demonstração. Inicialmente observemos que $k \langle x, y \rangle$ é álgebra de caminhos associada à aljava Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma base de A como k -espaço vetorial, e consideremos a ca-

Figura 5.1: aljava associada a $k \langle x, y \rangle$

tegoria vetorespacial $(\text{mod} A, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ é o funtor esquecimento. Para cada A -módulo finitamente gerado M consideremos a $U, T : |M|^{n+2} \longrightarrow |M|^{n+2}$ as transformações lineares com relação a base canônicas dadas pelas matrizes em blocos $U = U_{ij}, T = T_{ij}$, para $i, j \in \{1, \dots, s\}$, onde $s = \dim_k |M|$ sendo $U_{ij} = T_{ij} : |M| \longrightarrow |M|$ a transformação linear nula se $j \neq i$, e definamos para os blocos da diagonal $U_{ii} = T_{ii}$ da seguinte maneira:

$$T_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, U_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(M) = |M|^{n+2} \rightrightarrows_U^T |M|^{n+2}$$

Para cada morfismo de A -módulos $f : M \longrightarrow N$ definimos $F(f) : M^{n+2} \longrightarrow N^{n+2}$ dado da seguinte forma

$$F(f) = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f' & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & f' & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f' \end{bmatrix}$$

Onde $f' = |f|$, isto é, f vista como k -homomorfismo.

A partir desta definição, por verificação direta, mostra-se que F é fiel. Portanto vale (1).

Agora vamos provar que se $n = 3$ então F é pleno.

De fato, supondo $n = 3$, um morfismo $((a_{ij})^t, (a_{ij})^t) : F(M) \longrightarrow F(N)$ é dado por uma transformação linear $(a_{ij})^t : |^5 \longrightarrow |N|^5$, $1 \leq i, j \leq 3$, $t \in 1, \dots, s$, tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} |N|^5 & \rightrightarrows_U^T & |N|^5 \\ (*) \quad \uparrow_{(a_{ij})^t} & \circlearrowleft & \uparrow_{(a_{ij})^t} \\ |M|^5 & \rightrightarrows_U^T & |M|^5 \end{array}$$

Desta forma para cada t fixo temos:

$$(a_{ij})^t \cdot T_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11}^t & a_{12}^t & a_{13}^t & a_{14}^t \\ 0 & a_{21}^t & a_{22}^t & a_{23}^t & a_{24}^t \\ 0 & a_{31}^t & a_{32}^t & a_{33}^t & a_{34}^t \\ 0 & a_{41}^t & a_{42}^t & a_{43}^t & a_{44}^t \\ 0 & a_{51}^t & a_{52}^t & a_{53}^t & a_{54}^t \end{bmatrix}$$

E também

$$T.(a_{ij})^t.T_{ii} = \begin{bmatrix} a_{11}^t & a_{12}^t & a_{13}^t & a_{14}^t & a_{15}^t \\ a_{21}^t & a_{22}^t & a_{23}^t & a_{24}^t & a_{25}^t \\ a_{31}^t & a_{32}^t & a_{33}^t & a_{34}^t & a_{35}^t \\ a_{41}^t & a_{42}^t & a_{43}^t & a_{44}^t & a_{45}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto obtemos as seguintes igualdades:

$$a_{21}^t = a_{31}^t = a_{41}^t = a_{51}^t = a_{52}^t = a_{53}^t = a_{54}^t = 0$$

$$a_{11}^t = a_{22}^t = a_{33}^t = a_{32}^t, a_{12}^t = a_{23}, a_{43}^t = a_{33}^t = a_{44}^t$$

$$a_{21}^t = a_{32}^t = 0 = a_{31}^t = a_{42} = a_{41}^t = a_{52}^t = a_{43}^t = a_{54}^t = 0$$

Portanto $a_{43}^t = a_{32}^t = 0$, $a_{15}^t = a_{25}^t$, $a_{24}^t = a_{35}^t$, $a_{34}^t = a_{45}^t$, $a_{44}^t = a_{55}^t$.

Para simplificar a notação façamos

$a_{11}^t = a_{22}^t = a_{33}^t = a_{44}^t = a_{55}^t = a$, $a_{12}^t = a_{23} = a_{34}^t = a_{45}^t = b$, $a_{13}^t = a_{24}^t = a_{35}^t = c$, $a_{14}^t = a_{25}^t = d$, e $a_{15}^t = r$.

Pelo fato de $(a_{ij})^t.U_{ii} = U_{ii}.(a_{ij})^t$ temos:

$$\begin{bmatrix} b + ca_1 & c + da_2 & d + ra_3 & r & 0 \\ a + ba_1 & b + ca_2 & c + da_3 & d & 0 \\ aa_1 & a + ba_2 & b + ca_3 & c & 0 \\ 0 & aa_2 & a + ba_3 & b & 0 \\ 0 & 0 & aa_3 & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & r \\ a_1a & a_1b + a & a_1c + b & a_1d + c & a_1r + r \\ 0 & a_2c & a + a_2b & b + a_2c & a_2d + c \\ 0 & 0 & a_3a & a + a_3b & b + a_3c \end{bmatrix}$$

Daqui obtemos: $r = d = c = b = 0$, $a_1a = aa_1$, $a_2a = aa_2$ e $a_3a = aa_3$. Como a comuta com os geradores de A , segue que a comuta com todos os elementos da base, consequentemente com todos os elementos de A . Portanto a determina um morfismo de A -módulos de M em N dado da seguinte forma. Suponhamos que $a = x_1e_1 + \dots + x_se_s$, onde $\{e_1, \dots, e_s\}$ é uma base $|M|$, tomando $\hat{a} = \sum_{1 \leq i \leq s} x_i$, em virtude de a comutar com os elementos A , segue que cada x_i também comuta. Consequentemente a multiplicação por $\hat{a}$ define um A -morfismo de módulos entre M e N . Portanto F é pleno. $\square$

Teorema 5.2. *Sejam L uma categoria vetorespacial Schurian, k um corpo algebricamente fechado. Valem as seguintes afirmações:*

- (1) Se L é de tipo de representação finito então $\dim |X| = 1$ para todo $X \in \text{ind}(L)$.
- (2) Se L não é de tipo de representação selvagem então $\dim |X| \leq 2$ para todo $X \in \text{ind}(L)$.
- (3) Se L é de tipo de representação mansa e existe algum $X \in \text{ind}(L)$ para o qual $\dim X = 2$ então para todo $Y \in \text{ind}(L)$ tem-se $\text{Hom}(Y, X) \neq 0$ ou $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$.

Demonstração. Sejam $L = (L', | \cdot |)$ uma categoria vetorespacial, X um indecomponível de L' , $\dim |X| = n$, e $\text{Add}(X)$ a subcategoria plena de L' cujos objetos são somas finitas de X . Vamos tomar a subcategoria plena $\mathcal{U}(\text{Add}(X))$. A idéia é mostrar que categoria $\mathcal{U}(\text{Add}(X))$ é equivalente à categoria das representações da aljava Q_X

$$\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{a_n} \end{array} \bullet$$

E depois explorarmos este fato para obtermos a demonstração do lema.

De fato, como sabemos, um objeto de $V \in \mathcal{U}(\text{Add}(X))$ é da forma $V = (k^m, \alpha, X^s) \in \mathcal{U}(L)$ onde $\alpha : k^m \rightarrow |X^s|$ é uma aplicação k -linear.

Como k -espaço vetorial $\dim |X| = n$. Seja $\{b_1, \dots, b_n\}$ uma base de $|X|$. Um morfismo $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{U}(\text{Add}(X))}(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ é representado na forma:

$$\begin{array}{ccc} \alpha' : k^{m'} & \longrightarrow & |X^{s'}| \\ \uparrow_f & \circlearrowleft & \uparrow_{|g|} \\ \alpha : k^m & \longrightarrow & |X^s| \end{array}$$

$|g| = b_1 A_1 + \dots + b_n A_n$ onde $A_i \in M_{s's}(k)$ Podemos relacionar este morfismo com a seguinte morfismo de representação da aljava Q_X :

$$\begin{array}{ccc} \alpha' : k^{m'} & \longrightarrow & |k^{s'}| \\ \uparrow_f & \circlearrowleft & \uparrow_{|g|} \\ \alpha : k^m & \longrightarrow & |k^s| \end{array}$$

Suponhamos que temos duas flechas na aljava, isto é, $\bullet \rightrightarrows_u^v \bullet$, então as transformações u e v podem ser vistas da forma: $u(x_1, \dots, x_n) : k^m \rightarrow k^s$ e $v(x_1, \dots, x_n) : k^m \rightarrow k^s$, logo temos $(u(x), v(x))^t = \phi(x) : k^m \rightarrow k^{2s}$. Usando esta idéia associaremos:

$$k^m \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{a_n} \end{array} \bullet k^s \longrightarrow (k^m, k^{n.s}, \phi)$$

Aqui $\phi(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$. Como a categoria é Schurian e k é algebricamente fechado $k \cong \text{End} X$, logo podemos associar a cada morfismo $(f, g) \in \mathcal{U}(\text{Add}(X))$ o morfismo (f', g') de representações da aljava Q_X onde $f' = f$ e $g' = \underbrace{(g, \dots, g)}_n$.

Observação 5.2. A álgebra associada à aljava $\bullet \rightrightarrows_u^v \bullet$ é chamada álgebra de Kröenecker. Na seção 7 do capítulo 8 do livro *Representation Theory of Artin algebras* (seção 7 do capítulo VIII [4]) está feito um elegante estudo da descrição dos módulos indecomponíveis da álgebra de Kröenecker, em particular é demonstrado que ela é de tipo de representação infinito e a classificação dos seus módulos indecomponíveis é a seguinte:

1) Os módulos pré-injetivos são da forma $Q_n = k^{n+1} \rightrightarrows_{u_n}^{v_n} k^n$, sendo u_n e v_n são as transformações lineares dada por $[E_n \mid 0]$ e $[0 \mid E_n]$ onde E_n é a matriz identidade $n \times n$, v_n e $n \in \mathbb{N}$.

2) Os módulos pós-projetivos são da forma $Q_n = k^n \rightrightarrows_{u_n^t}^{v_n^t} k^{n+1}$ onde u_n^t e v_n^t são as transformações dadas pelas matrizes transpostas de $[E_n \mid 0]$ e $[0 \mid E_n]$ respectivamente.

3) Os módulos regulares são da forma $Q_n = k^n \rightrightarrows_{E_n}^{J_{\lambda, n}} k^n$, para cada $\lambda \in k, n \in \mathbb{N}$, sendo $J_{\lambda, n}$, o bloco de Jordan $n \times n$ com elementos da diagonal λ .

Finalizamos a observação ressaltando que uma outra abordagem do mesmo problema pode ser encontrada em [15]

Ao tomarmos a álgebra dos polinômios em uma variável $k[x]$, para cada $\lambda \in k, n \in \mathbb{N}$, o $k[x]$ -módulo $k_\lambda^m = k[x] / \langle (t - \lambda)^m \rangle$ é indecomponível de dimensão m sobre k . Além disso, as seqüências da forma:

$$0 \longrightarrow k_\lambda^m \xrightarrow{h_m} k^{m+1} \longrightarrow k_\lambda^1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow k_\lambda^1 \longrightarrow k^{m+1} \xrightarrow{\pi_m} k_\lambda^m \longrightarrow 0$$

Aqui h_m é o morfismo tal que $h_m(\bar{1}) = \bar{x}_\lambda$ onde $\bar{x}_\lambda$ indica a classe de $x - \lambda$ em k_λ^{m+1} e π_m é o epimorfismo natural. São seqüências de Auslander-Reiten para todo $m \in \mathbb{N}$ $\lambda \in k$.

Notemos ainda que, com relação a base de k_λ^m formada pelos elementos $\{\bar{1}, x_\lambda, \dots, x_\lambda^{m-1}\}$ o $k[x]$ -morfismo k^m em k^m induzido pelo produto por x tem representação matricial dada exatamente $J_{\lambda, m}$. A partir desta descrição vamos mostrar que a álgebra de caminhos A proveniente de $\bullet \rightrightarrows_u^v \bullet$ é de tipo de representação mansa. Lembramos que uma álgebra é mansa se para cada dimensão quase todos os módulos indecomponíveis não isomorfos, isto é, a menos de um número finito, é equivalente a uma subcategoria de $\text{mod} k[x]$.

Dado M um A -módulo cuja representação é $V_1 \rightrightarrows_{\alpha}^{\beta} V_2$, onde V_1, V_2 é um k -espaço vetorial de dimensão finita, e, α, β são transformações lineares. O vetor dimensão de M é dado pelo par $(\dim V_1, \dim V_2)$, e a dimensão de M é dada por $\dim M = \dim V_1 + \dim V_2$. Desta forma para cada $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ associamos os pares $(r/2, r/2)$ se r for par, e, $((r-1)/2, r/2)$ e $(r/2, (r+1)/2)$ se r for ímpar.

Para cada r par, digamos da forma $r = 2m$, temos uma associação natural dos A -módulos de dimensão r aos $k[x]$ -módulos da forma $k[x]/\langle (x-\lambda)^m \rangle$, e se r for ímpar há apenas dois módulos indecomponíveis não isomorfos de dimensão r . Consequentemente $\bullet \rightrightarrows_u^v \bullet$ é de tipo de representação mansa. para mais informações veja [28] seções 2 e 3 do capítulo 14.

Para $n = 3$ consideremos o funtor: $G : K \langle x, y \rangle \longrightarrow kQ_X$ que sobre os objetos está definido da seguinte forma

$$G(V \rightrightarrows_u^v V) = V \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{I_d} \end{array} V$$

E sobre os morfismo atua como a identidade. G é um funtor fiel e pleno. Portanto para $n = 3$ a álgebra kQ_X é de tipo de representação selvagem.

Por outro lado, o lema anterior nos assegura que existe um funtor fiel e pleno

$$F : \text{mod } kQ_X \longrightarrow \text{mod } k \langle x, y \rangle.$$

Portanto uma forma alternativa de determinarmos que uma álgebra Λ é selvagem é mostrando a existência de um funtor que induz uma imersão de quase todos as representações indecomponíveis da álgebra de caminhos proveniente de

$$\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \bullet$$

em $\text{mod } \Lambda$. Logo podemos concluir que kQ_X é de tipo de representação selvagem sempre que $n \geq 3$. $\square$

Como vimos anteriormente a cada poset está associado a categoria vetorespacial em que todos os objetos indecomponíveis têm dimensão unitária, esta construção é feita associando a cada vértice e um k -espaço vetorial de dimensão V_e e sempre que $i \preceq j$ associamos uma transformação linear que leva uma base de V_i em uma base de V_j .

Agora enunciaremos o teorema de Nazarova que classifica os posets de tipo de representação selvagem. Dispondo do teorema de Nazarova e do teorema de Kleiner os posets ficam completamente classificado quanto ao tipo de representação.

Teorema 5.3. (Nazarova [18]) *Um poset S é de tipo de representação selvagem se e somente se contém um subposet pleno isomorfo a algum dos seguintes posets críticos:*

$$\begin{array}{lll} Naz_1 = (1, 1, 1, 1, 1) & Naz_2 = (1, 1, 1, 2) & Naz_3 = (1, 3, 4) \\ Naz_4 = (2, 2, 3) & Naz_5 = (1, 2, 6) & Naz_6 = (N, 5) \end{array}$$

Além disso: se S não é de tipo selvagem então é de tipo manso ou finito.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [28] e em [18].

Sejam $R = kQ/I$ uma k -álgebra básica de dimensão finita e k algebricamente fechado que possui um injetivo simples E em $\text{mod}(R)$, desta forma, E estará associado a um vértice a que é uma fonte no carcaz Q .

Denotaremos a cobertura projetiva de E por $P(E)$ e seja $M = \text{rad}P(E)$ o seu radical. Vamos tomar S o maior fator do anel R sem fatores de composição isomorfos a E . S será representado por $(\Gamma_a, p'_j)_{j \in J}$, onde $(\Gamma, p_{i \in I})$ é a aljava com relações que expressa R . A representação diagramática de S é obtida pela exclusão do vértice a e ajustamento das relações da aljava de R .

Γ_a é uma subaljava plena de Γ , obtido excluindo o vértice a , e as relações $\{p'_i\}_{i \in J}$ são as relações $\{p_i\}_{i \in I}$ exceto aquelas iniciadas em a . Logo, $\text{mod}(S)$ é a subcategoria plena de $\text{mod}(R)$ dos R -módulos sem o fator de composição E .

Definição 5.6. Definimos $\Omega(kM_S)$ a categoria das representações do k - S -bimódulo kM_S da seguinte forma. Um objeto nesta categoria tem a forma: (U_T, X_S, γ) , onde $\gamma : U_T \otimes kM_S \rightarrow X_S$. Um morfismo entre (U_T, X_S, γ) e (U'_T, X'_S, γ') é um par (α, β) de transformações k -lineares, $\alpha : U_T \rightarrow U'_T$ e $\beta : X_S \rightarrow X'_S$ tais que $\beta\gamma = \gamma'(\alpha \otimes_k 1_M)$. (para mais detalhes veja [4] cap. III).

Lema 5.2. A categoria $\text{mod}(R)$ é equivalente à categoria das representações de kM_S (isto é, as representações dos k - S -bimódulos).

Demonstração. Para demonstrarmos o lema basta vermos R como extensão por um ponto $R = S[M]$ onde $M = P(E)$. Seja e o idempotente associado à $P(E)$, isto é,

$e.R = P(E)$. Então $eR(i - e) = 0$, uma vez que não há caminhos que iniciam em $(1 - e)$ e termina em e .

$$R = \begin{bmatrix} eRe & (1 - e)Re \\ eR(1 - e) & (1 - e)R(1 - e) \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } eRe \cong k \quad (1 - e)R(1 - e) \cong S \quad (1 - e)Re \cong M$$

Conseqüentemente $\text{mod}(R)$ é equivalente à categoria $\Omega(kM_S)$. $\square$

Seja ainda R uma k -álgebra nas condições do lema anterior, isto é, $R = S[M]$, uma extensão por um ponto de S com relação a um vértice fonte. Seja $\nabla_l(M_S)$ a subcategoria plena de $\text{mod}(S)$ cujos objetos $X_S \in \text{mod}(S)$ tais que $\text{Hom}_S(M_S, X_S) = 0$. Seja $\mathcal{L}$ a categoria vetorespacial $(\text{mod}(S), \text{Hom}(M_S, -))$.

Lema 5.3. (Ringel, veja [26]) *Sejam S uma k -álgebra de dimensão finita e $R = S[M]$ nas condições acima. A subcategoria plena de $\Omega(kM_S)$ das representações de kM_S sem somandos da forma $(0, Y, 0)$ com $Y \in \nabla_l(M_S)$ tem o mesmo tipo de representação que $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.*

Demonstração. Vamos definir um funtor de $\Omega(kM_S)$ em $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ que seja pleno, denso e reflita isomorfismos. Definiremos este funtor explorando o conhecido isomorfismo:

$$w : \text{Hom}(U, \text{Hom}(M, X_S)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(U \otimes M, X_S)$$

Agora vamos definir o funtor $F : \Omega(kM_S) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L})$ da seguinte forma:

Sobre os objetos: $F(U, X, \gamma) = (U, X, w(\gamma))$

Sobre os morfismos: $F(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.

É fácil ver que F é denso, pleno, que reflete isomorfismos e que $F(0, Y, 0) = 0$ para todo $Y \in \text{mod}S$, ou seja $\ker(F) = \nabla_l(M_S)$. $\square$

Sejam S e T álgebras e M um $T - S$ -bimódulo. Identificando os k -módulos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} T & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

com as representações do bimódulo M , podemos olhar $\text{mod}(S)$ como imersa em $\text{mod}(\Lambda)$ e sendo identificada com as triplas da forma: $(0, X_S, 0)$.

Lema 5.4. *Admitindo as identificações acima podemos assegurar:*

Sempre que $f \in \text{Hom}_S(X_S, Y_S)$ for um morfismo irreduzível e $\text{Hom}(M_S, X_S) = 0$ teremos que o Λ -homomorfismo $(0, f) : (0, X, 0) \Rightarrow (0, Y, 0)$ também é irreduzível.

Demonstração. De fato, consideremos uma fatoração de $(0, f) = (g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2)$, aqui $(h_1, h_2) : (0, X_S, 0) \Rightarrow (U, Z, \gamma)$ sendo $\gamma : U_T \otimes_T M_S \rightarrow Z_S$. Desta forma $f = g_2 h_2$ é a fatoração de um morfismo irreduzível, donde segue que h_2 é um monomorfismo ou epimorfismo que cinde. Sendo g_2 um epimorfismo que cinde, (g_1, g_2) é também epimorfismo que cinde. Ora, se $h_2 : X_S \Rightarrow Z_S$ é um monomorfismo que cinde, temos que $Z_S = h_2(X_S) \otimes C_S$ onde C_S é o complemento da imagem de h_2 e $\gamma(U_T \otimes_T M_S) \subseteq C_S$. Portanto (h_1, h_2) é um monomorfismo que cinde. $\square$

Corolário 5.1. *Sejam S uma álgebra de caminhos, $S = kQ$, onde Q é uma aljava conexa, ${}_T M_S$ um bimódulo que visto como S -módulo é pré-injetivo. Então salvo as pré-injetivas que passam conter ${}_T M_S$ as componentes de Γ_S não mudam ao passar à aljava de Auslander-Reiten de $\Lambda = S[{}_T M_S]$.*

Demonstração. Segue do lema anterior e do fato dos projetivos de $\text{mod}(S)$, identificados com as triplas da forma $(0, P, 0)$, continuarem projetivos em $\text{mod}(\Lambda)$ que qualquer sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}(S)$:

$$0 \longrightarrow X_S \xrightarrow{f} Y_S \xrightarrow{g} Z_S \longrightarrow 0$$

Desta forma f e g são morfismos irreduzíveis, não é difícil verificar que $(0, f)$ e $(0, g)$ são morfismos irreduzíveis em $\text{mod}(\Lambda)$ sempre que $\text{Hom}(M_S, X_S) = 0$ e $\text{Hom}(M_S, Y_S) = 0$. Consequentemente obtemos uma sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}(\Lambda)$. $\square$

Seja Λ uma k -álgebra de caminhos cujo carcaz, Q_Λ , não tem laços e fixemos uma fonte v de Q_Λ . Olhemos Λ como extensão por um ponto relativamente a v : $\Lambda = \Lambda'[M]$. Poderemos em diversas ocasiões determinar o tipo de representação de Λ a partir do tipo de representação de Λ' e quando M for indecomponível.

Primeiro precisamos conhecer a aljava de Auslander-Reiten de Λ'

Considerando a categoria vetorespacial $U = \text{Hom}_{\Lambda'}(M, -)$

A partir do lema 5.3 e de uma imersão natural de $\text{mod}\Lambda'$ em $\text{mod}\Lambda$ obtém-se o teorema de Ringel nos garante que o tipo de representação de Λ é maior entre o tipo de representação de Λ' e o tipo de representação de U .

Exemplo 5.1. consideremos a álgebra $\Lambda = kQ_\Lambda/I$ onde I é o ideal gerado pelas relações de comutatividade da seguinte aljava Q_Λ :

Figura 5.2: Q_Λ

$\Lambda = \Lambda'[M]$, onde M é o módulo:

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & k \\ & & \downarrow \delta & & \uparrow \theta \\ k & \xrightarrow{\gamma} & k & \xleftarrow{\beta} & k \end{array}$$

Onde a aljava ordinária de Λ' é:

$$Q_\Lambda = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & o & & o \\ & & \downarrow \delta & & \uparrow \theta \\ o & \xrightarrow{\gamma} & o & \xleftarrow{\beta} & o \end{array} \right.$$

Calculando a aljava de Auslander-Reiten Γ'_Λ de Λ' e localizando nele o módulo M .

Vemos que a categoria vetorespacial associada à $\Lambda'[M]$ é descrita pelo seguinte poset:

$$P_M = \left(\begin{array}{ccc} o & & o \\ \uparrow & \nearrow & \\ o & \longrightarrow & o \\ \uparrow & & \uparrow \\ o & \longrightarrow & o \end{array} \right)$$

Como estamos olhando $\Lambda = \Lambda'[M]$ poderemos construir a aljava de Auslander-Reiten de Λ a partir da aljava de Auslander-Reiten de Λ' . Faremos isto utilizando o fato de que os Λ -módulos podem ser representados por triplas da forma: (A, B, f) onde A é um k -módulo, B é um Λ' módulo e $f : \text{Hom}_{\Lambda'}(M, A) \Rightarrow B$. Desta forma poderemos identificar a tripla $(0, X, 0)$ com o Λ' -módulo X . Escrevendo $\Lambda = e_1\Lambda \amalg e_2\Lambda$, observemos que $M = \text{rade}_1\Lambda$, de forma que não teremos mudanças na aljava de Auslander Reiten antes de M).

A aljava de Auslander-Reiten de Λ ficará assim:

5.4 Álgebra de Incidência

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados de aplicação dos resultados apresentados no capítulo 3 na classificação do tipo de representação de algumas álgebras.

Sejam $(I, \preceq)$ um poset com n elementos e kI^* a álgebra de incidência do poset I^* . De acordo com nossos resultados do capítulo 3 sabemos que há uma equivalência de tipo de

representação entre $\text{Mat}^a d_I$ e $I\text{-sp}$, dada pelo funtor redução de Gabriel. Vimos também que a categoria $I\text{-sp}$ é equivalente a subcategoria plena dos kI^* -módulos finitamente gerados de socle projetivo.

Exemplo 5.2. *Sejam I_1 e I_2 os posets cujas representações diagramáticas são:*

Em virtude do teorema de Kleiner sabemos que estes dois posets são de tipo de representação finito. Consideremos porém $\Lambda_{I_j} = kI_j^*$, $j \in \{1, 2\}$, a álgebra de incidência do poset I_j^* . A forma quadrática associada a Λ_{I_1} que é dada por $\sum_{1 \leq j \leq 7} x_j^2 + x_4x_7 - (x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_6x_7 + x_5x_7)$ é não negativa e a base do seu radical é $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)$ (considerando a ordenação dos vértices de modo que $i \preceq j \implies i < j$). Como elas são hereditárias, segue, que Λ_I é uma álgebra de tipo de representação mansa. Enquanto a forma quadrática associada a Λ_{I_2} é dada por $\sum_{1 \leq j \leq 8} x_j^2 + x_5x_8 - (x_1x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 - x_5x_7 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_7x_8 + x_6x_8)$ é indefinida, (é negativa para $(6, 8, 7, 12, 18, 16, 14, 6)$), e, conseqüentemente, Λ_{I_2} é uma álgebra de tipo de representação selvagem.

Uma questão que se coloca imediatamente às pessoas habituadas a trabalhar com métodos diagramáticos em representações de álgebras é: Dada uma representação diagramática de um poset I , e Λ_I , o quociente da álgebra de caminhos cuja aljava é Q_I pelo ideal gerado pelas relações de comutatividade, como aproveitar o conhecimento da classificação do tipo de representação do poset I para tirar conclusões à respeito do tipo de representação de Λ_I ?

O exemplo seguinte mostra que se não impusermos outras restrições podemos ter I de tipo de representação selvagem e Λ_I de tipo de representação mansa.

Exemplo 5.3.

Figura 5.3: aljava de uma álgebra disfarçada

O poset I é de tipo de representação selvagem, uma vez que contém plenamente o poset crítico de Nazarova $(1, 1, 1, 2)$, o qual apresenta-se assinalado na Figura 5.3. Por outro lado, Λ_I é uma álgebra hereditária disfarçada (concealed) de tipo de representação mansa de acordo com a classificação de Ringel (esta álgebra aparece na tabela da página 365 em [24]).

Agora se nos restringirmos ao caso em que escolhemos posets com somente um elemento maximal dispomos do seguinte resultado:

Proposição 5.1. *Sejam I um poset conexo e Λ_I o quociente da álgebra de caminhos cuja aljava coincide com a representação diagramática de I pelo ideal gerado pelas relações de comutatividade. Se I admite um único elemento maximal então o tipo de representação de Λ_I é maior ou igual ao tipo de representação de I*

Demonstração. (1) Seja I um poset com um único elemento maximal c . Se I é de tipo de representação finito o resultado é imediato. Se I não é de tipo de representação finito então ele contém plenamente J um poset crítico de Kleiner ou Nazarova que determina seu tipo de representação. Como o elemento maximal c é comparável a todos os elementos do poset, segue que c não pertence a nenhum poset crítico, logo o poset crítico J está contido plenamente em $I - \{c\}$. Como c é o único elemento maximal necessariamente J^* é subposet de I . Portanto $\text{mod } kJ^*$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda_I$. Pelo teorema 3.2 o tipo de representação kJ^* é maior ou igual ao tipo de representação de J . Logo o tipo de representação de I é menor ou igual ao tipo de representação de Λ_I . $\square$

Exemplo 5.4. Consideremos $\Lambda'_{I'}$ a álgebra de incidência do seguinte poset:

Seja $I = I'_0$ a co-extensão de I' , isto é, o poset com um único elemento minimal obtido a partir de I' . A álgebra de incidência de $\Lambda_I = \Lambda'_{I'}[M]$, onde M é o $\Lambda'_{I'}$ módulo com a seguinte representação diagramática:

Abaixo localizamos M na aljava de Auslander-Reiten de $\Lambda'_{I'}$

Logo a categoria vetorespacial à Λ_I vista como extensão por um ponto de $\Lambda'_{I'}$ pelo módulo M é:

$$\mathcal{U}_{I'} = \begin{array}{ccc} & o & \\ \uparrow & & \\ o & \longrightarrow & o \\ \uparrow & & \\ o & \longrightarrow & o \end{array}$$

Pelo teorema de Kleiner $\mathcal{U}_I$ é de tipo de representação finita, e como Λ'_I também o é, segue que Λ_I é de tipo de representação finita.

Observemos que a álgebra Λ_I referida no exemplo acima (5.4) tem a seguinte aljava ordinária:

Figura 5.4: Aljava ordinária de Λ_I

Definição 5.7. Diremos que uma álgebra Λ é **fortemente simplesmente conexa** se toda subcategoria plena convexa de Λ for simplesmente conexa.

Observação 5.3. No ano de 1993 A. Skowroński em [31] levanta seguinte conjectura: Uma álgebra A é fortemente simplesmente conexa se e somente se A não contém nenhuma subcategoria convexa do tipo $\widetilde{A}_n$. Recentemente Eduardo N. Marcos e Ibrahim Assen apresentaram dois contra-exemplos em um trabalho ainda não publicado. (A informação de que dispomos a este respeito foi obtida através de conversas informais com Eduardo). Chamaremos de AM_1 e AM_2 , os exemplos representados por meio de aljavas com relações na Figura 5.5. Não é difícil verificar que AM_2 não contém nenhuma subcategoria convexa do tipo $\widetilde{A}_n$ e que não é fortemente simplesmente conexa.

Usando a proposição 5.1 é imediato que AM_1 é de tipo de representação selvagem. Já AM_2 é uma álgebra mansa, mas a verificação deste fato não é tão breve. Por intermédio de [1], subemos informalmente que, a pedido do professor E. Marcos a professora G. Chalon provou que AM_2 é mansa. Conhecemos duas maneiras para determinar o tipo de representação de AM_2 , a primeira usando a forma quadrática. Para resolver o problema desta forma é preciso enxergar AM_2 como extensão por um ponto de uma álgebra disfarçada mansa (concealed), digamos Λ . Ou seja, Λ deve ser uma álgebra para a qual todos

os vértices projetivos da aljava de Auslander-Reiten devem estar na mesma componente conexa pós-projetiva e todos os vértices injetivos também devem estar na mesma componente conexa pré-injetiva da aljava de Auslander-Reiten. Nestas condições o teorema de De la Peña, veja [22], nos garante que o tipo de representação de AM_2 é determinado pela sua forma quadrática.

Em nosso próximo exemplo mostraremos que a álgebra AM_2 é de tipo de representação manso através da determinação explícita da categoria corresponde à co-extensão de Λ_I por um Λ_I -módulo indecomponível N .

Figura 5.5: Contra-exemplos de E. Marcos e I. Assem

Exemplo 5.5. *Seja A a álgebra de incidência do poset cuja representação diagramática coincide com AM_2 . Para mostrarmos que AM_2 é mansa procederemos da seguinte forma. Inicialmente observemos que A é a co-extensão por um ponto da álgebra Λ_I do exemplo anterior (5.4), mais precisamente $AM_2 = [N]\Lambda_I$ onde N é o Λ_I -módulo abaixo:*

Figura 5.6: Módulo da co-extensão

A seguir apresentamos a aljava de Auslander-Reiten de Λ_I

A categoria vetorespacial associada à co-extensão $[N]\Lambda_I$ é $\mathcal{U}_I = \text{Hom}(-, N)$ e tem o seguinte padrão:

De acordo com [26], pag. 255 padrão 3, a categoria vetorespacial acima é de tipo de representação mansa, conseqüentemente AM_2 é uma álgebra de tipo de representação manso.

Uma conseqüência deste exemplo é que existem álgebras de incidência de posets que não são fortemente simplesmente conexas.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem, E. N. Marcos, *Conversas Informais*, IME-USP. 2000
- [2] F.W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate texts in Mathematics 13, Springer-Verlag, Heildeberg-Berlin, 1973.
- [3] I.T. Adamson. *Rings, Modules and Algebras*, Oliver & Boyd - Edinburgh - 1971
- [4] M. Auslander, I. Reiten, S. SmalØ, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press
- [5] M. Auslander, *Representation of artin algebras I*, Comm. Algebra 1 (1974), 177-268
- [6] Ju.A. Drozd, *Representation of partially ordered sets*, Funkc. Anal. i. Prilozen 8 (1974), 34 - 42 (em Russo)
- [7] B. Farb, R.K. Dennis, *Noncommutative Algebra*, Graduate texts in Mathematics 144, Springer-Verlag, 1981.
- [8] P. Gabriel, A.V. Rojter, *Matrix Problems*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1986
- [9] P. Gabriel. *Indecomposable Representation I*, Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103
- [10] P. Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representaion-finite algebras*, Proc. ICRA II(Otawa,1979), in Lecture Notes in Math. No. 903, Springer-Verlag, (1981), pp 68-105.
- [11] K.R Goodearl, *Ring Theory - "Nonsingular Rings and Modules"*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 1976
- [12] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H Freeman and Company (1980) - San Francisco, U.S.A

- [13] M. Kleiner. *Partially Ordered Sets of finite Representaion Type*, in Zap. Nauchn. Seminarov Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 28 (1972), 32 - 41 (em Russo)
- [14] J.H. van Lint, R.M. Wilson, *A Course in Combinatorics* Cambridge University Press. 1992
- [15] R. Martinez-Villa, *Introducción a la Teoria Clasica de representaciones de algebras*. Monografías del Instituto de Matematicas UNAM (1990)
- [16] H. Merklen, A. Jones, *Introdução à teoria de representação de álgebras*, IME-USP (1984)
- [17] H. Merklen *Introducción a las representaciones de conjuntos parcialmente ordendos y categorías véctor-espaciales*, Universidad del Nacional del Sur, Bahia Blanca - Argentina, 1997
- [18] L.A. Nazarova, *Partially Ordered Sets of Infinite type*, IZV. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 752-791 (em Russo)
- [19] L.A. Nazarova, *Representations of Tetrads*, IZV. Akad. Nauk SSSR 31 (1967), 1361-1378 (em Russo)
- [20] L.A. Nazarova, *Poset Representations*, in Lecture Notes in Math. No.882, Springer-Verlag, 1981
- [21] L.A. Nazarova, A.V. Roiter, *Representations of partially ordered sets*, in Zap. Nauchn. Seminarov Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 28 (1972), 5 - 31 (em Russo)
- [22] J.A. de la Peña, *On Representation Types of one point extensions of Tame Concelead Algebras* , in Manuscripta Math. 61, (1988) 183 - 194
- [23] C.M. Ringel, *Hall polynomial for the representation-finite hereditary algebras*, Adv. in Math. 84(1990), 137- 178
- [24] C.M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic forms*, Lecture Notes in Math. No. 1099, Springer-Verlag, (1984), 1- 371
- [25] C.M. Ringel. V. Dlab. *On Algebras of finite representations type*. J. Algebra 33(1975), 306 - 394.

- [26] C.M. Ringel, *Report on the Thrall Conjectures*, in Lecture Notes in Math. No. 831, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo, (1980), pp. 137 - 287
- [27] A.V. Roiter. *Representations of Posets and Tame Matrix Problems*, London Mathematic Society LNM, 116(1986), p. 91-107
- [28] D. Simpson, *Linear Representations of Partially ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra. Logic and Applications Series, Volume 4 - Gordon and Breach Science Publishers, 1992
- [29] D. Simpson, *Representations of partially ordered sets, Vector Space Categories and socle Projective Modules*, Paderborn, July, 1983, 141p.
- [30] D. Simpson. *Right pure semisimple l-hereditary PI-rings*, Rend. Sem. Univ. Padova 71(1984), 141-175.
- [31] A. Skowroński, *Simply Connected Algebras and Hochschild cohomologies*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. 14 (1993) - 431 - 447