UMA PROVA DA INSOLUBILIDADE DO
DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT
E RELAÇÕES COM
COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

Edson Tsukimoto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Lógica e Fundamentos
Orientador: **Prof. Dr. Ricardo Bianconi**

– São Paulo, agosto de 2000 –

UMA PROVA DA INSOLUBILIDADE DO
DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT
E RELAÇÕES COM
COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

Edson Tsukimoto

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação apresentada por Edson Tsuki-
moto, devidamente corrigida e aprovada pela
Comissão Julgadora

São Paulo, agosto de 2000

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Finger
- Prof. Dr. Piotr Kozmider

Agradecimentos

Ao orientador Ricardo Bianconi, pelo estímulo e tranquilidade transmitidos durante este trabalho.

A meus pais, que tantos sacrifícios fizeram para que eu prosseguisse nos estudos.

À Olga, pela paciência e carinho que me deram forças para continuar.

Aos amigos do IME, Lúcia Ikemoto, João Paulo, Clóvis, Jefferson, Amélia, Rolo, Gaspar, Takeo, Solange, Edson, Sidney, Lenir, Samuel e em especial aos companheiros de batalha que vêm me acompanhando desde a graduação, Alexandre “Batman” Scalzitti e Flávio “Aleatório” Yamamoto.

Ao pessoal do café, Dalvina, Jovita e Maria, que me mantiveram acordado ao longo dos anos.

À Jane do CIC e suas honoráveis buchadas de bode.

A todo pessoal da biblioteca, Célia, Cristina, Lúcia, Márcia, Marina, Max, Renato, Sílvia e Vera, pelo convívio gostoso e bem-humorado.

Finalmente, ao Professor Jacob Zimbarg Sobrinho por me mostrar a filosofia e a beleza que se ocultam sob o árido manto da matemática.

Resumo

Em seu Décimo Problema, Hilbert indaga se existe um procedimento efetivo que decida se uma dada equação diofantina admite solução. Neste trabalho vamos mostrar uma prova, finalizada por Yuri Matyasevic na década de setenta, de que tal procedimento efetivo não existe.

Ao final, mostraremos como esse resultado tem relações com a teoria de complexidade de algoritmos. Mais especificamente, veremos que se a demonstração da insolubilidade do Décimo Problema de Hilbert puder ser formalizada em um certo fragmento da aritmética de Peano, em um sentido que iremos precisar, então $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

Abstract

Hilbert, in his Tenth Problem, questioned whether there would exist an effective procedure which decided if a given diofantine equation has solution. In this work, we will present a proof, published in the seventies by Yuri Matyasevic which states that such an effective procedure does not exist.

We will also show that the above result has implications with the theory of complexity of algorithms. Precisely, we will see that if the proof of the unsolvability of the Hilbert's Tenth Problem can be stated in a certain fragment of the Peano's Arithmetic, in a certain sense we are going to make precise, then $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

Conteúdo

1	Definições básicas	1
1.1	O décimo problema de Hilbert	1
1.2	Conjuntos diofantinos	3
1.3	As funções $F(x, y)$, $L(z)$ e $R(z)$	4
1.4	A função $S(i, u)$	7
1.5	Esquema da prova	9
2	Alguns lemas	11
3	A função exponencial é diofantina	29
4	As funções $\binom{n}{k}$, $n!$ e $\prod_{k=1}^n (a + bk)$ são diofantinas	37
5	Quantificadores limitados são diofantinos	45
6	Funções recursivas	53
7	O décimo problema de Hilbert é insolúvel	58
8	Conjuntos recursivamente enumeráveis, grau e dimensão	66
9	Relações com complexidade de algoritmos	70
9.1	Definições básicas	71
9.1.1	Linguagens formais e máquinas de Turing	71
9.1.2	Máquinas de Turing determinísticas (DTM) e a classe P	71
9.1.3	Máquinas não-determinísticas e a classe NP	74
9.1.4	NP -completude	76
9.1.5	Fragmentos de aritmética	77
9.1.6	O sistema P^-	78
9.2	O teorema de Parikh	80
9.3	O teorema de Wilkie	92
	Referências bibliográficas	99

Capítulo 1

Definições básicas

1.1 O décimo problema de Hilbert

O décimo problema de Hilbert pode ser assim formulado:

“Existe um algoritmo para decidir se dado um polinômio $P(x_1, \dots, x_n)$ com coeficientes inteiros, existem ou não soluções inteiras para a equação $P(x_1, \dots, x_n) = 0$?”

Aqui, vamos indagar a respeito de soluções no conjunto $\mathbb{N}$. Isso não será uma limitação, já que a insolubilidade do problema que procura soluções em $\mathbb{N}$ implica a insolubilidade do problema original.

De fato, suponhamos que H seja um algoritmo que solucione o problema que busca soluções em $\mathbb{Z}$. Dado então um polinômio $P(x_1, \dots, x_n)$ com coeficientes inteiros, poderíamos decidir se existem $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{1.1}$$

da seguinte maneira: tomamos o algoritmo H para decidir se existem $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, tal que

$$P(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2, \dots, a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = 0. \quad (1.2)$$

Teríamos então a seguinte situação:

- Se existe solução em $\mathbb{Z}$ para (1.2), então existe solução em $\mathbb{N}$ para (1.1), pois basta tomar $x_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2$, para $i = 1, \dots, n$;
- Se não existe solução em $\mathbb{Z}$ para (1.2), então não existe solução em $\mathbb{N}$ para (1.1), pois se existisse $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ satisfazendo (1.1), então pelo teorema de Lagrange, que afirma que todo número natural pode ser escrito como a soma de quatro quadrados, existiriam $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, \dots, n$ tais que $x_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2$, e portanto $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ seria uma solução para a equação (1.2), contra nossa suposição.

Isso demonstra nossa afirmação.

Fazemos ainda mais uma pequena restrição por comodidade técnica: excluiremos o zero do domínio das funções.

Deste ponto em diante, salvo menção explícita, os polinômios terão seus coeficientes em $\mathbb{Z}$, e suas variáveis, assim como de outras funções, percorrerão o conjunto dos números inteiros positivos.

1.2 Conjuntos diofantinos

Definição 1.1 Um conjunto $S \subseteq \mathbb{N}_*^n$ é *diofantino* se e somente se existe um polinômio $P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m)$ tal que

$$(x_1, \dots, x_n) \in S \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0).$$

Definição 1.2 Um predicado $A(x_1, \dots, x_n)$ é *diofantino* se e somente se o conjunto

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : A(x_1, \dots, x_n)\}$$

é diofantino.

Definição 1.3 Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é *diofantina* se e somente se seu gráfico é diofantino, ou seja, se e somente se existe um polinômio $P(x_1, \dots, x_n, y, t_1, \dots, t_m)$ tal que

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(x_1, \dots, x_n, y, t_1, \dots, t_m) = 0).$$

Exemplos: Os predicados $x \leq y$, $x|y$, $x \equiv y \pmod{m}$ e as funções $q(x, y)$ e $r(x, y)$ (o quociente e o resto da divisão de x por y , respectivamente) são diofantinos, pois

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists t (x + (t - 1) - y = 0)$$

$$x|y \Leftrightarrow \exists t (x \cdot t - y = 0)$$

$$x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow \exists t (x - m \cdot t - y = 0)$$

$$q(x, y) = z \Leftrightarrow \exists r (x = y \cdot z + r \wedge 0 \leq r < y)$$

$$r(x, y) = z \Leftrightarrow \exists q (x = y \cdot q + z \wedge 0 \leq z < y).$$

Proposição 1.4 *Se A e B são predicados diofantinos, então $\exists x A$, $A \vee B$, $A \wedge B$ também são predicados diofantinos.*

Demonstração: Sejam P e Q polinômios tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0) \quad \text{e}$$

$$B(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (Q(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0).$$

Então

- $\exists x_i A(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists x_i, t_1, \dots, t_m (P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0)$;
- $A(x_1, \dots, x_n) \vee B(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m (P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \cdot Q(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0)$;
- $A(x_1, \dots, x_n) \wedge B(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m (P^2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) + Q^2(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0)$.

Observação: Veremos adiante que os predicados diofantinos não são necessariamente fechados para $\neg$, $\rightarrow$ e $\forall$.

1.3 As funções $F(x, y)$, $L(z)$ e $R(z)$

Essas funções farão uma bijeção entre os inteiros positivos e pares ordenados de inteiros positivos.

Consideremos a função $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 0$. Definimos então a função $F(x, y)$:

Definição 1.5 $\forall x, y \geq 1 : F(x, y) = T(x + y - 2) + y$

Proposição 1.6 $\forall z \geq 1, \exists! x, y \geq 1 (z = F(x, y))$

Demonstração: Como a função $T(n)$ é estritamente crescente, então $\forall z \geq 1, \exists! n$ tal que

$$T(n) < z \leq T(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = T(n) + n + 1,$$

ou seja,

$$\forall z \geq 1, \exists! n \geq 0, \exists! y \geq 1 (z = T(n) + y \wedge y \leq n + 1),$$

ou ainda,

$$\forall z \geq 1, \exists! n \geq 0, \exists! x, y \geq 1 (z = T(n) + y \wedge n = x + y - 2)$$

e portanto

$$\forall z \geq 1, \exists! x, y \geq 1 (z = F(x + y - 2) + y).$$

Proposição 1.7 A função $F : \mathbb{N}_*^2 \rightarrow \mathbb{N}_*$ é bijetora.

Demonstração: Segue da Proposição 1.6.

A Proposição 1.7 permite definir a função inversa $F^{-1} : \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*^2$.

Sejam $L(z)$ e $R(z)$ as funções correspondentes à primeira e segunda coordenadas de F^{-1} , ou seja, $F^{-1}(z) = (L(z), R(z))$. Valem então as seguintes relações:

$$(a) \forall z \geq 1, F(F^{-1}(z)) = F(L(z), R(z)) = z;$$

(b) $\forall x, y \geq 1, F^{-1}(F(x, y)) = (L(F(x, y)), R(F(x, y))) = (x, y)$ e portanto, $\forall x, y \geq 1,$
 $L(F(x, y)) = x$ e $R(F(x, y)) = y$.

Proposição 1.8 $\forall x, y \geq 1: 1 \leq R(z) \leq z$ e $1 \leq L(z) \leq z$.

Demonstração: Segue da Proposição 1.6 e das definições de $L(z)$ e $R(z)$ que $\forall z \geq 1,$
 $z = T(L(z) + R(z) - 2) + R(z)$, com $L(z), R(z) \geq 1$. É então imediato que $1 \leq R(z) \leq z$.

Para mostrar que $L(z) \leq z$, notemos primeiramente que $\forall n \geq 0, n \leq T(n)$. Portanto,
 $L(z) - 1 \leq T(L(z) - 1)$ e como T é uma função estritamente crescente, temos então que

$$L(z) - 1 \leq T(L(z) - 1) \leq T(L(z) + R(z) - 2) < T(L(z) + R(z) - 2) + R(z) = z.$$

Portanto, $1 \leq L(z) \leq z$.

Proposição 1.9 As funções $F(x, y)$, $L(z)$ e $R(z)$ são diofantinas.

Demonstração: Pela Proposição 1.6,

$$\forall z \geq 1, \exists! x, y \geq 1 (z = T(x + y - 2) + y).$$

Lembrando que $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, segue das definições das funções $F(x, y)$, $L(z)$ e $R(z)$
que

$$z = F(x, y) \Leftrightarrow 2z = (x + y - 2)(x + y - 1) + 2y$$

$$x = L(z) \Leftrightarrow \exists y (2z = (x + y - 2)(x + y - 1) + 2y)$$

$$y = R(z) \Leftrightarrow \exists x (2z = (x + y - 2)(x + y - 1) + 2y)$$

Portanto, $F(x, y)$, $L(z)$ e $R(z)$ são funções diofantinas.

1.4 A função $S(i, u)$

A função $S(i, u)$, uma pequena variação da função β de Gödel, permitirá codificar seqüências de números naturais.

Definição 1.10 $\forall i, u \geq 1, S(i, u) = r(L(u), 1 + i.R(u))$ (resto da divisão de $L(u)$ por $1 + i.R(u)$).

Proposição 1.11 $\forall i, u \geq 1, 0 \leq S(i, u) \leq u$.

Demonstração: Como $S(i, u)$ é o resto da divisão de $L(u)$ por $1 + i.R(u)$, então existe um único número q tal que

$$L(u) = q.(1 + i.R(u)) + S(i, u),$$

com $0 \leq S(i, u) < 1 + i.R(u)$.

Então $0 \leq S(i, u) \leq L(u)$ e, pela Proposição 1.8, $L(u) \leq u$. Portanto, $0 \leq S(i, u) \leq u$.

Proposição 1.12 A função $S(i, u)$ é diofantina.

Demonstração: A função $r(x, y)$, o resto da divisão de x por y , é diofantina, pois

$$r(x, y) = z \Leftrightarrow \exists q (x = y.q + z \wedge 0 \leq z < y).$$

Então, $S(i, u)$ é uma função diofantina, pois

$$S(i, u) = z \Leftrightarrow \exists x, y (r(x, y) = z \wedge x = L(u) \wedge y = 1 + i.R(u))$$

e $x = L(u)$ e $y = 1 + i.R(u)$ são diofantinas pela Proposição 1.9.

Proposição 1.13 *Para toda seqüência de números naturais $a_1, a_2, \dots, a_n$, existe um número u tal que para cada $i = 1, \dots, n$, $S(i, u) = a_i$.*

Demonstração: Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma dada seqüência de números naturais,

$$m = \max\{n, a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ e } y = m!.$$

Afirmção: $0 \leq i < j \leq n \rightarrow \text{mdc}(1 + i.y, 1 + j.y) = 1$.

De fato, seja $0 \leq i < j \leq n$ e suponhamos que $\text{mdc}(1 + i.y, 1 + j.y) > 1$.

Seja então p um primo tal que $p|1 + i.y$ e $p|1 + j.y$.

Se $p|y$, como $p|1 + iy$, então teríamos que $p|1$. Portanto, $p \nmid y$.

Por outro lado, se $p|1 + i.y$ e $p|1 + j.y$, então $p|(j - i).y$, e como p é um primo tal que $p \nmid y$, então $p|j - i$. Como $j - i > 0$, então $p \leq j - i$, e como $0 < j - i \leq n \leq m = \max\{n, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, então $p \leq m$, e portanto $p|m!$, isto é, $p|y$, uma contradição.

Podemos agora aplicar o teorema chinês do resto para encontrar uma solução para o sistema $x \equiv a_i \pmod{1 + i.y}$, $i = 1, \dots, n$. Então $r(x, 1 + i.y) = r(a_i, 1 + i.y)$, $i = 1, \dots, n$. Mas $a_i < 1 + i.y$, pois $y = m!$ e $m = \max\{n, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Logo, $r(a_i, 1 + i.y) = a_i$, e portanto, para $i = 1, \dots, n$, $r(x, 1 + iy) = a_i$.

Seja agora $u = F(x, y)$. Então $L(u) = x$ e $R(u) = y$.

Portanto, para $i = 1, \dots, n$, teremos que

$$S(i, u) = r(L(u), 1 + i.R(u)) = r(x, 1 + i.y) = a_i.$$

1.5 Esquema da prova

A prova da insolubilidade do décimo problema de Hilbert é obtida por meio de várias reduções. Graças aos trabalhos de Júlia Robinson [11], era sabido que a insolubilidade do décimo problema de Hilbert se seguiria se a função exponencial fosse diofantina, fato este provado por Matyasevic em 1970 [8], [9], encerrando assim a questão levantada por Hilbert em seu décimo problema.

Nos capítulos que se seguem, definiremos duas funções $x_n(a)$ e $y_n(a)$, $a > 1$ fixo, por

$$x_n(a) + y_n(a)\sqrt{a^2 - 1} \stackrel{\text{def.}}{=} (a + \sqrt{a^2 - 1})^n,$$

e mostraremos que $x_n(a)$ e $y_n(a)$ são diofantinas. Desse fato, com o auxílio da equação de Pell, resultará que a função exponencial é diofantina. A seguir, mostramos que as funções $f(n, k) = \binom{n}{k}$, $g(n) = n!$ e $h(a, b, n) = \prod_{k=1}^n (a + bk)$ também são diofantinas, o que permitirá mostrar que predicados diofantinos são fechados para os quantificadores limitados $\forall x \leq t$ e $\exists y \leq t$. Com o auxílio desses resultados, chegamos finalmente à insolubilidade do décimo problema de Hilbert, segundo o esquema que apresentamos a seguir.

Capítulo 2

Alguns lemas

Um resultado chave na demonstração da insolubilidade do décimo problema de Hilbert consiste na prova de que a função exponencial é diofantina [8]. Para esse fim, apresentaremos agora alguns lemas relacionados com a equação de Pell.

Seja $a > 1$ e $d = a^2 - 1$.

$$\text{Equação de Pell: } \begin{cases} x^2 - dy^2 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Se x, y satisfazem a equação de Pell para $a > 1$ fixado, indicaremos esse fato por $\text{Pell}_a(x, y)$. Se estiver claro no contexto o número $a > 1$ fixado, omitiremos o índice a e escreveremos simplesmente $\text{Pell}(x, y)$.

É importante notar que $\sqrt{d}$ não é um número inteiro, pois se $d = a^2 - 1 = b^2$, então $b < a$, logo $b + 1 \leq a$, e portanto $(b + 1)^2 \leq a^2$, ou seja, $(b + 1)^2 = b^2 + 1 + 2b = a^2 + 2b \leq a^2$, de onde obteríamos $b = 0$, mas $b \neq 0$, pois supomos $b^2 = d = a^2 - 1 > 0$, já que $a > 1$.

Para os lemas que se seguem, salvo menção explícita, estarão fixados $a > 1$ e $d = a^2 - 1$.

Lema 2.1 *Não existem números x, y tais que $\text{Pell}(x, y)$ e $1 < x + y\sqrt{d} < a + \sqrt{d}$.*

Demonstração: Como $d = a^2 - 1$, então $(a + \sqrt{d})(a - \sqrt{d}) = 1$ e como $\text{Pell}(x, y)$, então $x > 0$ e $y > 0$ e também $(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = 1$. Portanto,

$$1 = (a + \sqrt{d})(a - \sqrt{d}) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) \quad (2.1)$$

Como $a + \sqrt{d} > 0$ e $x + y\sqrt{d} > 0$, então $(a - \sqrt{d}) > 0$ e $(x - y\sqrt{d}) > 0$.

Vamos supor agora que

$$1 < x + y\sqrt{d} < a + \sqrt{d} \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2), temos que $a - \sqrt{d} < x - y\sqrt{d}$ e como supomos $x + y\sqrt{d} > 1$, de (2.1) teremos $x - y\sqrt{d} < 1$, logo $a - \sqrt{d} < x - y\sqrt{d} < 1$ e portanto

$$-1 < -x + y\sqrt{d} < -a + \sqrt{d} \quad (2.3)$$

Somando (2.2) e (2.3), obtemos

$$0 < 2y\sqrt{d} < 2\sqrt{d}$$

e portanto $0 < y < 1$. Absurdo, pois $y \in \mathbb{N}^*$.

Lema 2.2 *Sejam x, y, z, w tais que $\text{Pell}(x, y)$, $\text{Pell}(z, w)$ e u, v tais que*

$$u + v\sqrt{d} = (x \pm y\sqrt{d})(z \pm w\sqrt{d}),$$

então $\text{Pell}(u, v)$

Demonstração: Vamos mostrar o caso $u + v\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})(z + w\sqrt{d})$:

$$\begin{aligned} u + v\sqrt{d} &= (x + y\sqrt{d})(z + w\sqrt{d}) \\ &= (xz + ywd) + (xw + yz)\sqrt{d} \end{aligned}$$

Então, $u = xz + ywd$ e $v = xw + yz$. Logo,

$$\begin{aligned} u^2 &= (xz + ywd)^2 = x^2z^2 + 2xyzwd + y^2w^2d^2 \\ dv^2 &= d(xw + yz)^2 = x^2w^2d + 2xyzwd + y^2z^2d \end{aligned}$$

Então temos que

$$\begin{aligned} u^2 - dv^2 &= x^2z^2 + y^2w^2d^2 - x^2w^2d - y^2z^2d \\ &= x^2(z^2 - dw^2) - dy^2(z^2 - dw^2) \end{aligned}$$

e como $\text{Pell}(z, w)$, então $z^2 - dw^2 = 1$, logo

$$u^2 - dv^2 = x^2 - dy^2$$

e como $\text{Pell}(x, y)$, então $x^2 - dy^2 = 1$, logo

$$u^2 - dv^2 = 1$$

Portanto, $\text{Pell}(u, v)$.

As demonstrações para os outros casos são feitas de forma análoga.

Definição 2.3 Dado $a > 1$, vamos definir duas funções $x_n(a)$ e $y_n(a)$ para $n \geq 0$:

$$x_n(a) + y_n(a)\sqrt{d} \stackrel{\text{def}}{=} (a + \sqrt{d})^n.$$

Observação: Quando o contexto permitir, omitiremos a dependência de a e escreveremos simplesmente x_n, y_n .

Lema 2.4 Para todo $n \geq 0$, $\text{Pell}(x_n, y_n)$.

Demonstração: Por indução sobre n : para $n = 0$ é imediato que $\text{Pell}(x_0, y_0)$, pois $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$. Suponhamos $\text{Pell}(x_n, y_n)$. Então

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= (a + \sqrt{d})^{n+1} = (a + \sqrt{d})^n(a + \sqrt{d}) \\ &= (x_n + y_n\sqrt{d})(a + \sqrt{d}) \end{aligned}$$

É imediato que $\text{Pell}(a, 1)$ e, por hipótese de indução, $\text{Pell}(x_n, y_n)$, e portanto, a equação acima juntamente com o Lema 2.2 nos mostra que $\text{Pell}(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Portanto, $\forall n \geq 0$, $\text{Pell}(x_n, y_n)$.

Lema 2.5 Sejam $x, y \geq 0$ tais que $\text{Pell}(x, y)$. Então existe n tal que $x = x_n$ e $y = y_n$.

Demonstração: Sejam $x, y \geq 0$ tais que $\text{Pell}(x, y)$ e consideremos o número $x + y\sqrt{d}$. Notemos que $x + y\sqrt{d} > 0$, pois $\text{Pell}(x, y)$. Como a função $f(n) = (a + \sqrt{d})^n$ é estritamente crescente, existe $n \geq 0$ tal que

$$(a + \sqrt{d})^n \leq x + y\sqrt{d} < (a + \sqrt{d})^{n+1}.$$

Lembrando que $(a + \sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, temos que se $(a + \sqrt{d})^n = x + y\sqrt{d}$, então $x = x_n$ e $y = y_n$. Suponhamos agora que $(a + \sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d}$. Então

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (a + \sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d} < (a + \sqrt{d})^{n+1}.$$

$$= (a + \sqrt{d})^n (a + \sqrt{d}) = (x_n + y_n \sqrt{d})(a + \sqrt{d}).$$

Por outro lado, como $(x_n + y_n \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) = 1$, então $x_n - y_n \sqrt{d} > 0$.

Segue das inequações acima que

$$\begin{aligned} (x_n + y_n \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) &< (x + y \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) \\ &< (x_n + y_n \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d})(a + \sqrt{d}) \end{aligned}$$

ou seja, $1 < (x + y \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) < a + \sqrt{d}$.

Como por hipótese $\text{Pell}(x, y)$ e pelo Lema 2.4, $\text{Pell}(x_n, y_n)$, segue do Lema 2.2 que $(x + y \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d})$ é uma solução da equação de Pell.

Portanto, o Lema 2.1 contradiz a inequação

$$1 < (x + y \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) < a + \sqrt{d}.$$

Portanto, existe $n \geq 0$ tal que $x = x_n$ e $y = y_n$.

Lema 2.6

$$(a) \quad x_{m+n} = x_m x_n + d y_m y_n$$

$$y_{m+n} = x_n y_m + x_m y_n$$

$$(b) \quad \text{Se } n \leq m :$$

$$x_{m-n} = x_m x_n - d y_m y_n$$

$$y_{m-n} = x_m y_m - x_m y_n$$

Demonstração: (a) $x_{m+n} + y_{m+n}\sqrt{d} = (a + \sqrt{d})^{m+n} = (a + \sqrt{d})^m(a + \sqrt{d})^n = (x_m + y_m\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = (x_mx_n + dy_my_n) + (x_ny_m + x_my_n)\sqrt{d}$. Portanto,

$$x_{m+n} = x_mx_n + dy_my_n$$

e

$$y_{m+n} = x_ny_m + x_my_n.$$

(b) Notemos que $(x_{m-n} + y_{m-n}\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = (x_{m-n}x_n + y_{m-n}y_nd) + (x_{m-n}y_n + x_ny_{m-n})\sqrt{d}$ e pela parte (a) deste lema:

$$x_{m-n}x_n + y_{m-n}y_nd = x_{(m-n)+n} = x_m$$

e

$$x_{m-n}y_n + x_ny_{m-n} = y_{(m-n)+n} = y_m$$

Portanto,

$$(x_{m-n} + y_{m-n}\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = x_m + y_m\sqrt{d}.$$

Logo

$$\begin{aligned} x_{m-n} + y_{m-n}\sqrt{d} &= (x_m + y_m\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) \\ &= (x_mx_n - y_my_nd) = (x_ny_m - x_my_n)\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_{m-n} = x_mx_n - y_my_nd \quad \text{e} \quad y_{m-n} = x_ny_m - x_my_n.$$

Lema 2.7 $x_{m\pm 1} = ax_m \pm dy_m \quad \text{e} \quad y_{m\pm 1} = ay_m \pm x_m.$

Demonstração: Basta tomar $n = 1$ no Lema 2.6.

Lema 2.8 $\text{mdc}(x_n, y_n) = 1$.

Demonstração: Suponha $k|x_n$ e $k|y_n$. Então $k|x_n^2 - dy_n^2$, mas $x_n^2 - dy_n^2 = 1$, logo $k = 1$.

Portanto, $\text{mdc}(x_n, y_n) = 1$.

Lema 2.9 $y_n|y_{nk}$.

Demonstração: Por indução sobre k : Para $k = 0$ é imediato. Agora, pelo Lema 2.6:

$y_{n(k+1)} = x_n y_{nk} + x_{nk} y_n$. Como por hipótese de indução $y_n|y_{nk}$, a expressão acima mostra que $y_n|y_{n(k+1)}$. Portanto, $y_n|y_{nk}$.

Lema 2.10 $n|t \Leftrightarrow y_n|y_t$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Segue do Lema 2.9

($\Leftarrow$) Suponha que $y_n|y_t$ mas $n \nmid t$ e seja $t = nq + r$, com $0 < r < n$. Então, usando o Lema 2.6:

$$y_t = y_{nq+r} = x_r y_{nq} + x_{nq} y_r.$$

Pelo Lema 2.9, $y_n|y_{nq}$, logo, como $y_n|y_t$ e $y_n|x_r y_{nq}$, temos que $y_n|x_{n.q} y_r$.

Afirmção: $\text{mdc}(y_n, x_{nq}) = 1$.

De fato, se $k|y_n$ e $k|x_{nq}$, então pelo Lema 2.9, $k|y_{nq}$. Mas pelo Lema 2.8,

$$\text{mdc}(x_{nq}, y_{nq}) = 1,$$

logo, $k = 1$. Agora, como $y_n|x_{nq}y_r$ e $\text{mdc}(y_n, x_{nq}) = 1$, temos que $y_n|y_r$. Além disso, como $r \neq 0$, então $y_r \neq y_0 = 0$. Portanto,

$$y_n \leq y_r \tag{2.4}$$

Por outro lado, pelo Lema 2.7, a função y_n é estritamente crescente e como $r < n$, temos que $y_r < y_n$, contra (2.4). Portanto, $r = 0$ e $t = nq$, isto é, $n|t$.

Lema 2.11 $y_{nk} \equiv kx_n^{k-1}y_n \pmod{y_n^3}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} x_{nk} + y_{nk}\sqrt{d} &= (a + \sqrt{d})^{nk} \\ &= (x_n + y_n\sqrt{d})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_n^{k-j} y_n^j \sqrt{d}^j \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^k \binom{k}{j} x_n^{k-j} y_n^j d^{j/2} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^k \binom{k}{j} x_n^{k-j} y_n^j d^{(j-1)/2} \right) \sqrt{d} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_{nk} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^k \binom{k}{j} x_n^{k-j} y_n^j d^{(j-1)/2} \\ &= kx_n^{k-1}y_n + y_n^3 \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impar}}}^k \binom{k}{j} x_n^{k-j} y_n^{j-3} d^{(j-1)/2} \end{aligned}$$

e essa expressão nos mostra que

$$y_{nk} \equiv kx_n^{k-1}y_n \pmod{y_n^3}.$$

Lema 2.12 $y_n^2 | y_n y_n$.

Demonstração: Fazendo $k = y_n$ no Lema 2.11, obtemos

$$y_n y_n \equiv y_n x_n^{y_n-1} y_n = x_n^{y_n-1} y_n^2 \pmod{y_n^3}$$

ou seja, $y_n^3 | y_n y_n - x_n^{y_n-1} y_n^2$. Portanto, $y_n^2 | y_n y_n$.

Lema 2.13 Se $y_n^2 | y_t$, então $y_n | t$.

Demonstração: Como $y_n^2 | y_t$, então $y_n | y_t$, e pelo Lema 2.10, $n | t$. Seja $t = kn$. Pelo Lema 2.11, $y_{nk} \equiv k x_n^{k-1} y_n \pmod{y_n^3}$, isto é, $y_n^3 | y_{nk} - k x_n^{k-1} y_n$. Como por hipótese $y_n^2 | y_t = y_{nk}$, a expressão acima mostra que $y_n^2 | k x_n^{k-1} y_n$, ou ainda, que $y_n | k x_n^{k-1}$. Pelo Lema 2.8, $\text{mdc}(x_n, y_n) = 1$, então $y_n | k$, e lembrando que $t = kn$, temos que $y_n | t$.

Lema 2.14 $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1}$ e $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1}$.

Demonstração: Pelo Lema 2.7, temos que

$$x_{n+1} = ax_n + dy_n \quad \text{e} \quad x_{n-1} = ax_n - dy_n$$

$$y_{n+1} = ay_n + x_n \quad \text{e} \quad y_{n-1} = ay_n - x_n,$$

de onde obtemos

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2ax_n \quad \text{e} \quad y_{n+1} + y_{n-1} = 2ay_n$$

Portanto, $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1}$ e $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1}$.

Lema 2.15 $y_n \equiv n \pmod{a-1}$.

Demonstração: Por indução sobre n : o resultado é imediato para $n = 0, 1$. Por hipótese de indução, temos que $y_{n-1} \equiv n-1 \pmod{a-1}$ e $y_n \equiv n \pmod{a-1}$. Como $a \equiv 1 \pmod{a-1}$, temos então que $2ay_n \equiv 2n \pmod{a-1}$. Agora, pelo Lema 2.14, $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1}$. Então, $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1} \equiv 2n - (n-1) = n+1 \pmod{a-1}$. Portanto, $y_n \equiv n \pmod{a-1}$.

Lema 2.16 Se $a \equiv b \pmod{c}$, então para todo n :

$$x_n(a) \equiv x_n(b) \pmod{c} \quad e \quad y_n(a) \equiv y_n(b) \pmod{c}.$$

Demonstração: Vamos mostrar que $x_n(a) \equiv x_n(b) \pmod{c}$ por indução sobre n :

O resultado vale para $n = 0, 1$, pois $x_0(a) = x_0(b) = 1$ e $x_1(a) = a$ e $x_1(b) = b$. Como $a \equiv b \pmod{c}$ e por hipótese de indução $x_n(a) \equiv x_n(b) \pmod{c}$, então

$$2ax_n(a) \equiv 2bx_n(b) \pmod{c}.$$

Agora, pelo Lema 2.14, $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1}$, então

$$x_{n+1}(a) = 2ax_n(a) - x_{n-1}(a) \equiv 2bx_n(b) - x_{n-1}(b) = x_{n+1}(b) \pmod{c}.$$

A demonstração para o outro caso é análoga.

Lema 2.17 n é par se e somente se y_n é par.

Demonstração: Pelo Lema 2.14, $y_{k+1} = 2ay_k - y_{k-1}$. Então,

$$y_{k+1} = 2ay_k - y_{k-1} \equiv y_{k-1} \pmod{2}$$

e a congruência $y_{k+1} \equiv y_{k-1} \pmod{2}$ mostra que se n é par, $y_n \equiv y_0 = 0 \pmod{2}$, logo, y_n é par. Se n é ímpar, $y_n \equiv y_1 = 1 \pmod{2}$, logo y_n é ímpar.

Lema 2.18 $x_n - y_n(a - y) \equiv y^n \pmod{2ay - y^2 - 1}$.

Demonstração: Por indução sobre n : o resultado vale para $n = 0, 1$, pois $x_0 - y_0(a - y) = 1 = y^0$ e $x_1 - y_1(a - y) = y = y^1$. Pelo Lema 2.14, $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1}$ e $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1}$. Então $x_{n+1} - y_{n+1}(a - y) = (2ax_n - x_{n-1}) - (2ay_n - y_{n-1})(a - y) = 2ax_n - x_{n-1} - 2a^2y_n + 2ay_ny + ay_{n-1} - yy_{n-1} = 2a(x_n - y_n(a - y)) - (x_{n-1} - y_{n-1}(a - y))$.

Por hipótese de indução, da expressão acima, obtemos

$$x_{n+1} - y_{n+1}(a - y) \equiv 2ay^n - y^{n-1} = y^{n-1}(2ay - 1) \pmod{2ay - y^2 - 1}.$$

Notando que $2ay - 1 \equiv y^2 \pmod{2ay - y^2 - 1}$, obtemos

$$x_{n+1} - y_{n+1}(a - y) \equiv y^{n-1}y^2 = y^{n+1} \pmod{2ay - y^2 - 1}.$$

Lema 2.19 Para todo n , $y_{n+1} > y_n \geq n$.

Demonstração: Pelo Lema 2.7, $y_{n+1} = x_n + ay_n$. Então, $y_{n+1} > y_n$.

Mostremos agora que $y_n \geq n$ por indução sobre n . É claro que $0 \leq y_0 = 0$. E pelo Lema 2.7, $y_{n+1} = ay_n + x_n \geq a_n + x_n \geq n + x_n \geq n + 1$.

Lema 2.20 Para todo n , $x_{n+1} > x_n \geq a^n$ e $x_n \leq (2a)^n$.

Demonstração: Pelo Lema 2.7, $x_{n+1} = ax_n + dy_n$. Logo, $x_{n+1} = ax_n + dy_n \geq ax_n > x_n$.

Vamos mostrar $a^n \leq x_n$ por indução sobre n : $a^0 = 1 \leq 1 = x_0$.

Agora, pelo Lema 2.7, $x_{n+1} = ax_n + dy_n$, logo, $ax_n \leq x_{n+1}$. Então, $a^{n+1} = a^n a \leq ax_n \leq x_{n+1}$. Portanto, $a^n \leq x_n < x_{n+1}$.

Mostremos agora que $x_n \leq (2a)^n$ por indução sobre n : é claro que $x_0 = 1 \leq 1 = (2a)^0$.

Pelo Lema 2.14, $x_{n+1} = 2ax_n - x_{n-1}$, logo $x_{n+1} \leq 2ax_n$. Então, $x_{n+1} \leq 2ax_n \leq 2a(2a)^n = (2a)^{n+1}$. Portanto, $x_n \leq (2a)^n$.

Lema 2.21

$$(a) \quad x_{2n+j} \equiv -x_j \pmod{x_n};$$

$$(b) \quad \text{Se } 0 \leq j \leq 2n, \text{ então } x_{2n-j} \equiv -x_j \pmod{x_n}.$$

Demonstração: Usando o Lema 2.6, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{2n+j} &= x_{n+(n+j)} = x_n x_{n+j} + dy_n y_{n+j} \\ &= x_n x_{n+j} + dy_n (x_j y_n + x_n y_j) = x_n x_{n+j} + dy_n^2 x_j + dy_n x_n y_j \\ &\equiv dy_n^2 x_j \pmod{x_n} \end{aligned}$$

e como $dy_n^2 = x_n^2 - 1$, temos que

$$dy_n^2 x_j = (x_n^2 - 1)x_j = x_n^2 x_j - x_j \equiv -x_j \pmod{x_n}.$$

Portanto, $x_{2n+j} \equiv -x_j \pmod{x_n}$.

(b) Caso 1: $0 \leq j \leq n$.

Então, pelo Lema 2.6, da mesma forma que no item (a), teremos

$$x_{2n-j} \equiv -x_j \pmod{x_n}.$$

Caso 2: $n < j \leq 2n$.

Seja $k = 2n - j$. Então $0 \leq k < n$, e portanto pelo caso 1, temos que

$$x_{2n-k} \equiv -x_k \pmod{x_n}.$$

Mas $x_{2n-k} = x_{2n-(2n-j)} = x_j$ e $x_k = x_{2n-j}$. Portanto, $x_{2n-j} \equiv -x_j \pmod{x_n}$.

Lema 2.22

$$(a) \quad x_{4n+j} \equiv x_j \pmod{x_n};$$

$$(b) \quad \text{Se } 0 \leq j \leq 4n, \text{ então } x_{4n-j} \equiv x_j \pmod{x_n}.$$

Demonstração: (a) Usando duas vezes o Lema 2.21 a, temos

$$x_{4n+j} = x_{2n+(2n+j)} \equiv -x_{2n+j} \equiv x_j \pmod{x_n}.$$

(b) Caso 1: $0 \leq j \leq 2n$.

Usando o Lema 2.21 a e b, temos

$$x_{4n-j} = x_{2n+(2n-j)} \equiv -x_{2n-j} \equiv x_j \pmod{x_n}.$$

Caso 2: $2n < j \leq 4n$.

Seja $k = 4n - j$. Então $0 \leq k < 2n$. Pelo caso 1, temos $x_{4n-k} \equiv x_k \pmod{x_n}$. Mas $x_{4n-k} = x_{4n-(4n-j)} = x_j$, e $x_k = x_{4n-j}$. Portanto, $x_{4n-j} \equiv x_j \pmod{x_n}$.

Lema 2.23 *Seja $n > 0$, $0 \leq i \leq j \leq 2n$ e $x_i \equiv x_j \pmod{x_n}$. Então $(i = j)$ ou $(a = 2 \wedge n = 1 \wedge i = 0 \wedge j = 2)$.*

Demonstração: Vamos necessitar dos seguintes fatos:

(1) $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ (pelo Lema 2.20);

(2) $2x_{n-1} \leq x_n$,

pois pelo Lema 2.7, $x_n = ax_{n-1} + dy_{n-1}$, logo, $ax_{n-1} \leq x_n$, e como $a \geq 2$, temos que

$$2x_{n-1} \leq ax_{n-1} \leq x_n.$$

(3) $x_{n+1} \equiv -x_{n-1} \pmod{x_n}$

$$x_{n+2} \equiv -x_{n-2} \pmod{x_n}$$

$\vdots$

$$x_{2n} \equiv -x_0 \pmod{x_n}$$

(pelo Lema 2.21).

Agora vamos dividir a demonstração em dois casos:

CASO 1: x_n é ímpar.

Seja $q = \frac{x_n-1}{2}$. Então, por (2), temos que

$$2x_{n-1} \leq x_n = 2q + 1 < 2(q + 1).$$

Logo, $x_{n-1} < q + 1$ e, portanto, $x_{n-1} \leq q$ e de (1) teremos então

$$-q \leq -x_{n-1} < \dots < -x_0 = -1 < 1 = x_0 < \dots < x_{n-1} \leq q$$

e como $-q, \dots, -1, 0, 1, \dots, q$ é um sistema completo de resíduos módulo x_n , as desigualdades acima mostram que

$$-x_{n-1}, -x_{n-2}, \dots, -x_0, x_0, \dots, x_{n-1}$$

são incôngruos módulo x_n .

Além disso, como $\forall i \in \mathbb{N}$, $x_i \neq 0$, temos que

$$-x_{n-1}, -x_{n-2}, \dots, -x_0, x_0, \dots, x_{n-1}, x_n$$

são incôngruos módulo x_n .

Desse fato, juntamente com (3), concluímos que

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{2n}$$

são incôngruos módulo x_n .

Portanto, se $x_i \equiv x_j \pmod{x_n}$, com $i \leq j \leq 2n$, então $i = j$.

CASO 2: x_n é par.

Seja $q = \frac{x_n}{2}$. Então, por (2) temos que $x_{n-1} \leq \frac{x_n}{2} = q$ e de (1) teremos portanto que

$$-q \leq -x_{n-1} < \cdots < -x_0 = -1 < 1 = x_0 < \cdots < x_{n-1} = q.$$

Se ocorrer $-q < -x_{n-1}$, então $-q + 1 \leq -x_{n-1}$ e como $-q + 1, -q + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, q$ é um sistema completo de resíduos módulo x_n , como no caso anterior, teremos que $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{2n}$ são incôngruos módulo x_n . Mas se ocorrer $-q = -x_{n-1}$, então $x_{n-1} = q = \frac{x_n}{2}$, logo, $2x_{n-1} = x_n$.

Por outro lado, do Lema 2.7, temos que $x_n = ax_{n-1} + dy_{n-1}$, logo

$$2x_{n-1} = x_n = ax_{n-1} + dy_{n-1} \geq ax_{n-1},$$

mas como $a > 1$, concluímos que $a = 2$ e portanto $y_{n-1} = 0$, ou seja, $n = 1$. Mas, para $n = 1$, a hipótese torna-se $x_i \equiv x_j \pmod{x_1}$, com $0 \leq i \leq j \leq 2$, e como $x_0 = 1$, $x_1 = a = 2$, $x_2 = 2a^2 - 1 = 7$, por verificação direta, devemos ter $i = 0$ e $j = 2$.

Portanto, no caso $-x_{n-1} = -q$, devemos ter $a = 2$, $n = 1$, $i = 0$ e $j = 2$.

Lema 2.24 *Se $x_j \equiv x_i \pmod{x_n}$, com $n > 0$, $0 < i \leq n$, $0 \leq j < 4n$, então $j = i$ ou $j = 4n - i$.*

Demonstração: CASO 1: $0 < i \leq n \leq j \leq 2n$.

Pelo Lema 2.23, se $i \neq j$, então $(n = 1 \wedge a = 2 \wedge i = 0 \wedge j = 2)$, contra $i > 0$.

Portanto, $i = j$.

CASO 2: $0 \leq j < i \leq n < 2n$.

Pelo Lema 2.23, se $i \neq j$, então $(n = 1 \wedge a = 2 \wedge i = 2 \wedge j = 0)$, ou seja, $i = 2 > 1 = n$, contra $i \leq n$. Portanto, $i = j$.

CASO 3: $0 < i \leq n < 2n < j < 4n$.

Seja $k = 4n - j$. Pelo Lema 2.22 e a hipótese, temos $x_k = x_{4n-j} \equiv x_j \equiv x_i \pmod{x_n}$, e como $0 < k < 2n$, pelo Lema 2.23, se $i \neq k$, então devemos ter $a = 2$ e $n = 1$ e $[(i = 0 \text{ e } k = 2) \text{ ou } (i = 2, k = 0)]$, mas isso é impossível, pois $i, k > 0$. Portanto, $i = k = 4n - j$, ou seja, $j = 4n - i$.

Lema 2.25 Se $0 < i \leq n$ e $x_j \equiv x_i \pmod{x_n}$, então $j \equiv \pm i \pmod{4n}$.

Demonstração: Antes, mostremos por indução sobre q que para dados $n > 0$ e $r \geq 0$, vale $\forall q \geq 1, x_{4nq+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$.

De fato, para $q = 1$, pelo Lema 2.22, temos $x_{4n+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$. Agora, pelo Lema 2.22, novamente temos que

$$x_{4n(q+1)+r} = x_{4n+(4nq+r)} \equiv x_{4nq+r} \pmod{x_n}$$

e por hipótese de indução, $x_{4nq+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$, logo, $x_{4n(q+1)+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$. Portanto, $\forall q \geq 1, x_{4nq+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$.

Agora, vamos ao resultado principal: façamos $j = 4nq + r$, com $0 \leq r < 4n$. Pelo resultado obtido acima e da hipótese, temos $x_i \equiv x_j = x_{4nq+r} \equiv x_r \pmod{x_n}$. E como

$0 \leq r < 4n$ e $0 < i \leq n$, segue pelo Lema 2.24 que $i = r$ ou $i = 4n - r$ e portanto $j \equiv r \equiv \pm i \pmod{4n}$.

Lema 2.26 *Se $b > a > 1$, então $\forall n \geq 1$,*

$$x_n(b) > x_n(a) \quad e \quad y_n(b) \geq y_n(a).$$

Demonstração: Por indução sobre n .

$$\text{Base: } x_1(b) = b > a = x_1(a) \quad e \quad y_1(b) = 1 = y_1(a).$$

Agora, pelo Lema 2.7, temos que

$$x_{n+1}(b) = bx_n(b) + (b^2 - 1)y_n(b)$$

$$x_{n+1}(a) = ax_n(a) + (a^2 - 1)y_n(a)$$

Procedendo indutivamente, temos que

$$x_{n+1}(b) = bx_n(b) + (b^2 - 1)y_n(b) > ax_n(a) + (a^2 - 1)y_n(a) = x_{n+1}(a).$$

Portanto, $x_n(b) > x_n(a)$. Agora, como $x_n^2(a) = 1 + dy_n^2(a)$ e $x_n^2(b) = 1 + dy_n^2(b)$ e $x_n(b) > x_n(a)$, segue que $y_n(b) \geq y_n(a)$.

Capítulo 3

A função exponencial é diofantina

Teorema 3.1 *Considere o sistema de equações diofantinas:*

$$(I) \quad x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$$

$$(II) \quad u^2 - (a^2 - 1)v^2 = 1$$

$$(III) \quad s^2 - (b^2 - 1)t^2 = 1$$

$$(IV) \quad v = ry^2$$

$$(V) \quad b = 1 + 4py = a + qu$$

$$(VI) \quad s = x + cu$$

$$(VII) \quad t = k + 4(d - 1)y$$

$$(VIII) \quad y = k + e - 1$$

Então, dados x, k, a , com $a > 1$, existem $b, c, d, e, p, q, r, s, t, u, v, y$ que satisfazem o sistema (I) – (VIII) se e somente se $x = x_k(a)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$)

Por (V), temos $b > a > 1$, e de (I), (II), (III), pelo Lema 2.5, existem i, j, n tais que

$$\begin{aligned}x &= x_i(a), & y &= y_i(a), \\u &= x_n(a), & v &= y_n(a), \\s &= x_j(b), & t &= y_j(b).\end{aligned}$$

E como $y = y_i(a)$, $v = y_n(a)$, $t = y_j(a) \geq 1$, então $i, j, n > 0$. Por (IV), $y \leq v$ e como $y_k(a)$ é uma função crescente, temos que

$$i \leq n \tag{3.1}$$

De (V), temos que $b = a + qu \equiv a \pmod{u}$, ou seja, $b \equiv a \pmod{x_n(a)}$. Segue então do Lema 2.16, que $x_j(b) \equiv x_j(a) \pmod{x_n(a)}$ e como de (VI), $s = x + cu \equiv x \pmod{u}$, ou seja, $x_j(b) \equiv x_i(a) \pmod{x_n(a)}$, temos então que

$$x_i(a) \equiv x_j(a) \pmod{x_n(a)} \tag{3.2}$$

Segue de (3.1) e (3.2) e do Lema 2.25 que

$$j \equiv \pm i \pmod{4n}. \tag{3.3}$$

Agora, de (IV) temos que $y^2|v$, ou seja, $(y_i(a))^2|y_n(a)$ que pelo Lema 2.13, resulta que $y_i(a)|n$, e junto com (3.3), obtemos

$$j \equiv \pm i \pmod{4y_i(a)} \tag{3.4}$$

Por (V), $b = 1 + 4py \equiv 1 \pmod{4y}$, isto é, $b - 1 \equiv 0 \pmod{4y_i(a)}$, e como pelo Lema 2.15, $y_j(b) \equiv j \pmod{b - 1}$, segue que

$$y_j(b) \equiv j \pmod{4y_i(a)} \quad (3.5)$$

Agora, por (VII) temos $t = k + 4(d - 1)y \equiv k \pmod{4y}$, isto é,

$$y_j(b) \equiv k \pmod{4y_i(a)}. \quad (3.6)$$

Então de (3.4), (3.5) e (3.6), temos que

$$k \equiv \pm i \pmod{4y_i(a)}. \quad (3.7)$$

Por (VIII), $k \leq y$, isto é,

$$k \leq y_i(a) < 4y_i(a). \quad (3.8)$$

Além disso, pelo Lema 2.19, $i \leq y_i(a) < 2y_i(a)$. Então, $-2y_i(a) < -i$, logo $-2y_i(a) + 1 \leq -i$ e como $-2y_i(a) + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2y_i(a)$ é um sistema completo de resíduos módulo $4y_i(a)$, segue juntamente de (3.7) e (3.8) que $k = 1$. Portanto, $x = x_i(a) = x_k(a)$.

($\Leftarrow$)

Seja então $x = x_k(a)$, e façamos $y = y_k(a)$. Como $k > 0$, então $x, y > 0$ e (I) está satisfeita.

Seja agora $m = 2ky_k(a) > 0$ e façamos $u = x_m(a) > 0$ e $v = y_m(a) > 0$. Então (II) está satisfeita.

Como $ky_k(a) | 2ky_k(a)$, então pelo Lema 2.10, temos que $y_{ky_k(a)}(a) | y_{2ky_k(a)}(a)$, e como pelo Lema 2.12, $y_k^2(a) | y_{ky_k(a)}(a)$, resulta então que $y_k^2(a) | y_{2ky_k(a)}(a) = y_m(a)$, isto é, $y^2 | v$. Portanto, existe $r > 0$ tal que $v = ry^2$, e (IV) está satisfeita.

Além disso, como $m = 2ky_k(a)$ é par, pelo Lema 2.17, $y_m(a) = v$ é par, e como (II) já está satisfeita, isto é, $u^2 - (a^2 - 1)v^2 = 1$, temos que u^2 é ímpar, logo u é ímpar, e portanto $\text{mdc}(u, v) = 1$.

Afirmamos agora que $\text{mdc}(u, 4y) = 1$.

De fato, seja p um primo tal que $p|u$ e $p|4y$ como u é ímpar, então $p \neq 2$, logo $p \nmid 4$. Portanto, $p|y$, e como $y|v$, teríamos $p|v$, de forma que $p|u$ e $p|v$, mas como já vimos, $\text{mdc}(u, v) = 1$. Portanto, $\text{mdc}(u, 4y) = 1$.

Pelo teorema chinês do resto, existe então b_0 tal que

$$\begin{cases} b_0 \equiv 1 \pmod{4y} \\ b_0 \equiv a \pmod{u} \end{cases}$$

Seja $j_0 = \min\{j \geq 0 : b_0 + 4juy > a\}$ e façamos $b = b_0 + 4j_0uy$. É fácil ver então que $b > a > 1$ e

$$\begin{cases} b \equiv 1 \pmod{4y} \\ b \equiv a \pmod{u} \end{cases}$$

Portanto, existem $b, p, q > 0$ tais que $b = 1 + 4py = a + qu$ e (V) está satisfeita.

Como já vimos, $b > a > 1$, então fazemos $s = x_k(b) > 0$ e $t = y_k(b) > 0$ e (III) está satisfeita.

Usando novamente que $b > a$, pelo Lema 2.26 temos que $s = x_k(b) > x_k(a) = x$. Além disso, como de (V) $b = a + qu \equiv a \pmod{u}$, pelo Lema 2.16, temos que

$$x_k(b) \equiv x_k(a) \pmod{u},$$

ou seja, $s \equiv x \pmod{u}$. Como $s > x$, existe $c > 0$ tal que $s = x + cu$, e (VI) está satisfeita.

Agora, pelo Lema 2.15, $y_k(b) \equiv k \pmod{b-1}$, ou seja, $t \equiv k \pmod{b-1}$, e por (V), $b = 1 + 4py$, logo $4y|b-1$, e desses dois fatos, temos que $t \equiv k \pmod{4y}$. Além disso, pelo Lema 2.19, $y_k(b) \geq k$, ou seja, $t \geq k$, e então existe $d > 0$ tal que $t = k + 4(d-1)y$ e (VII) está satisfeita.

Finalmente, pelo Lema 2.19, $y_k(a) \geq k$, isto é, $y \geq k$, portanto existe $e > 0$ tal que $e = y - k + 1$, e (VIII) está satisfeita.

Corolário 3.2 *A função $g(z, k) = x_k(z + 1)$ é diofantina.*

Demonstração: Seja S o sistema consistindo das equações (I) – (VIII) do Teorema 3.1 mais a equação $a = z + 1$. Então, pelo Teorema 3.1, S admite solução se e somente se $x = x_k(a) = x_k(z + 1) = g(z, k)$. Portanto, a equação diofantina que define a função g é obtida de maneira usual pela soma dos quadrados de nove polinômios obtidos a partir do sistema S .

Lema 3.3 *Seja $a > 1$, $n, k > 0$. Se $a > n^k$, então $2an - n^2 - 1 > n^k$.*

Demonstração: Seja $P(n) \equiv (1 \leq n \leq a \Rightarrow 2an - n^2 - 1 \geq a)$. Mostremos que $\forall n > 0$, $P(n)$ por indução sobre n :

Base: $n = 1$.

Então $2an - n^2 - 1 = 2a - 2 \geq a$, pois como $2 \leq a$, então $a + 2 \leq a + a = 2a$, logo, $a \leq 2a - 2$. Suponha agora que $1 \leq n + 1 \leq a$. Isso implica que $1 \leq n \leq a$, já que $n > 0$.

Logo, por hipótese de indução, $2an - n^2 - 1 \geq a$. Então,

$$\begin{aligned} 2a(n+1) - (n+1)^2 - 1 &= 2an + 2a - n^2 - 2n - 1 - 1 \\ &= (2an - n^2 - 1) + (2a - 2n - 1) > a + 0 = a, \end{aligned}$$

pois como $1 \leq n \leq a$, então $1 \leq n - a < 2n - 2a$, logo $2n - 2a - 1 > 0$.

Portanto, $\forall n \geq 1, P(n)$.

Agora é imediato que se $a > n^k$, então $a > n$ e pelo resultado acima, temos que $n^k < a \leq 2an - n^2 - 1$.

Lema 3.4 *Considere as equações*

$$(IX) \ (x - y(a - n) - m)^2 = (f - 1)^2(2an - n^2 - 1)^2$$

$$(X) \ m + g = 2an - n^2 - 1$$

$$(XI) \ w = n + h = k + l$$

$$(XII) \ a^2 - (w^2 - 1)(w - 1)^2 z^2 = 1$$

e seja S o sistema consistindo das equações (I) – (VIII) do Teorema 3.1 e de (IX) – (XII). Então existem $a, b, c, d, e, f, g, h, l, p, q, r, s, t, u, v, x, y, z, w$ que satisfazem o sistema S se e somente se $m = n^k$.

Demonstração: ($\Rightarrow$)

Por (XI), $w > 1$, logo $(w^2 - 1)(w - 1)^2 z^2 > 0$, então por (XII), $a > 1$, e segue do Teorema 3.1 que $x = x_k(a)$ e portanto, $y = y_k(a)$.

Do Lema 2.18, $x_k(a) - y_k(a)(a - n) \equiv n^k \pmod{2an - n^2 - 1}$ e de (IX),

$$x_k(a) - y_k(a)(a - n) = \pm(f - 1)(2an - n^2 - 1) + m,$$

portanto $m \equiv n^k \pmod{2an - n^2 - 1}$.

Afirmamos agora que $n^k < 2an - n^2 - 1$.

De fato, por (XII), como $w > 1$, temos que $\text{Pell}_w(a, (w - 1)z)$ e então, pelo Lema 2.5, existe j tal que $a = x_j(w)$ e $(w - 1)z = y_j(w)$. Além disso, pelo Lema 2.15, $y_j(w) = (w - 1)z \equiv j \pmod{w - 1}$. Logo, $j \equiv 0 \pmod{w - 1}$, e portanto $w - 1 \leq j$. Agora, pelo Lema 2.20, $x_j(w) = a \geq w^j$, logo, $a \geq w^j \geq w^{w-1}$, e como por (XI) temos que $k, n < w$, resulta que

$$a \geq w^j \geq w^{w-1} \geq w^k > n^k.$$

Portanto, $a > n^k$ e, então pelo Lema 3.4, temos que $n^k < 2an - n^2 - 1$. Como de (X) $m < 2an - n^2 - 1$, e como já vimos que $m \equiv n^k \pmod{2an - n^2 - 1}$, temos então que $m = n^k$.

($\Leftarrow$) Seja $m = n^k$.

Tomemos w tal que $w > n, k$ e seja $a = x_{w-1}(w)$. Como $n, k \geq 1$, então $w - 1 > 0$ e portanto $a = x_{w-1}(w) > 1$. Pelo Lema 2.15, $y_{w-1}(w) \equiv w - 1 \pmod{w - 1}$, logo

$y_{w-1}(w) \equiv 0 \pmod{w-1}$, e como $w-1 > 0$, temos que $y_{w-1}(w) > 0$, então existe $z > 0$ tal que $y_{w-1}(w) = z(w-1)$. Portanto, temos $\text{Pell}_w(a, z(w-1))$ e (XII) está satisfeita.

Como $w > n, k$, existem $h, l > 0$ tais que $w = n + h$ e $w = k + l$, e (XI) está satisfeita.

Agora pelo Lema 2.20, $a = x_{w-1}(w) \geq w^{w-1}$, e como $w > n, k$, temos que

$$a = x_{w-1}(w) \geq w^{w-1} \geq w^k > n^k.$$

Então, $a > n^k$ e pelo Lema 3.3, $m = n^k < 2an - n^2 - 1$, e portanto existe $g > 0$ tal que $m + g = 2an - n^2 - 1$, e (X) está satisfeita.

Façamos agora $x = x_k(a)$ e $y = y_k(a)$. Pelo Lema 2.18,

$$x_k(a) - y_k(a)(a - n) \equiv n^k = m \pmod{2an - n^2 - 1}.$$

Portanto existe $f > 0$ tal que

$$x_k(a) - y_k(a)(a - n) - m = \pm(f - 1)(2an - n^2 - 1),$$

e (IX) está satisfeita.

Finalmente, como $a > 1$, e $x = x_k(a)$, pelo Teorema 3.1, as equações (I) – (VIII) estão satisfeitas.

Teorema 3.5 *A função exponencial $h(n, k) = n^k$ é diofantina.*

Demonstração: Pelo Lema 3.4, obtemos o polinômio associado à função $h(n, k) = n^k$ a partir da soma dos quadrados dos polinômios presentes nas equações (I) – (XII).

Capítulo 4

As funções $\binom{n}{k}$, $n!$ e $\prod_{k=1}^n (a + bk)$ são diofantinas

Lema 4.1 Se $0 < k \leq n$ e $u > 2^n$, então

$$q((u+1)^n, u^k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^{i-k},$$

onde $q(x, y)$ é o quociente de x por y .

Demonstração: Pelo algoritmo da divisão, basta mostrar que existe R tal que

$$(u+1)^n = u^k \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^{i-k} + R, \text{ com } 0 \leq R < u^k.$$

Afirmamos que $R = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} u^i \geq 0$. De fato, pelo teorema do binômio, temos que

$$\begin{aligned} (u+1)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} u^i \\ &= u^k \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^{i-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} u^i \end{aligned}$$

Basta mostrar agora que $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} u^i < u^k$. De fato, como por hipótese $0 < k \leq n$ e $u > 2^n$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} u^i &\leq u^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} < u^{k-1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= u^{k-1} 2^n < u^{k-1} u = u^k. \end{aligned}$$

Lema 4.2 *Se $0 < k \leq n$ e $u > 2^n$, então*

$$q((u+1)^n, u^k) \equiv \binom{n}{k} \pmod{u}.$$

Demonstração: Basta usar o Lema 4.1 e notar que

$$q((u+1)^n, u^k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^{i-k} = \binom{n}{k} + u \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} u^{i-k-1}.$$

Teorema 4.3 *A função $f(n, k) = \binom{n}{k}$ é diofantina.*

Demonstração: Dados n, k , com $0 < k \leq n$, tomemos u tal que $u > 2^n$. Pelo Lema 4.2, temos que

$$q((u+1)^n, u^k) \equiv \binom{n}{k} \pmod{u}.$$

Além disso, $\binom{n}{k} \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n < u$. Isso mostra que $\binom{n}{k}$ é o único número inteiro positivo congruente a $q((u+1)^n, u^k)$ módulo u . Portanto,

$$\begin{aligned} z = \binom{n}{k} &\Leftrightarrow \exists u, v, w, r, s [v = 2^n \wedge u > v \wedge r = (u+1)^n \wedge s = u^k \\ &\wedge w = q(r, s) \wedge z < u \wedge z \equiv w \pmod{u}]. \end{aligned}$$

Isso mostra que a função $f(n, k) = \binom{n}{k}$ é diofantina, pois cada fórmula da expressão à direita, ligadas pelo conectivo $\wedge$, são diofantinas. De fato: $v = 2^n$, $r = (u + 1)^n$ e $s = u^k$ são diofantinas pelo Teorema 3.5. Além disso,

$$\begin{aligned} u > v &\Leftrightarrow \exists x(u = v + x), \\ w = q(r, s) &\Leftrightarrow \exists x, y(r = sx + y \wedge 0 \leq y < s). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$z \equiv w \pmod{u} \wedge z < u \Leftrightarrow \exists x, y(w = z + (x - 1)u \wedge u = z + y).$$

Lema 4.4 *Se $1 \leq x < r$, então $\binom{r}{x}x! \leq r^x$.*

Demonstração: $\binom{r}{x}x! = \frac{r!}{(r-x)!} = \prod_{i=0}^{x-1} (r-i) \leq \prod_{i=0}^{x-1} r = r^x.$

Lema 4.5 *Se $1 \leq x < r$, então $(r-x)^x < \frac{r!}{(r-x)!}$.*

Demonstração: $(r-x)^x = \prod_{i=0}^{x-1} (r-x) < \prod_{i=0}^{x-1} (r-i) = \frac{r!}{(r-x)!}.$

Lema 4.6 *Se $x \geq 1$ e $2x < r$, então $(r^x)^2 < (r-x)^x(r+2x)^x$.*

Demonstração: Por hipótese, $r - 2x > 0$, e como $x \geq 1$, temos que

$$x(r - 2x) = xr - 2x^2 > 0,$$

logo, $r^2 < r^2 + xr - 2x^2$, e como $x \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}(r^x)^2 &= (r^2)^x < (r^2 + xr - 2x^2)^x \\ &= [(r - x)(r + 2x)]^x = (r - x)^x (r + 2x)^x.\end{aligned}$$

Lema 4.7 Se $x \geq 1$ e $2x < r$, então $(r + 2x)^x < r^x + r^{x-1}2x2^x$.

Demonstração: Pelo teorema do binômio:

$$\begin{aligned}(r + 2x)^x &= \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} r^{x-i} (2x)^i = r^x + \sum_{i=1}^x \binom{x}{i} r^{x-i} (2x)^i \\ &= r^x + \sum_{i=1}^x \binom{x}{i} r^{x-i} (2x)^{i-1} 2x \\ &\stackrel{Hip.}{\leq} r^x + \sum_{i=1}^x \binom{x}{i} r^{x-i} r^{i-1} 2x = r^x + \sum_{i=1}^x \binom{x}{i} r^{x-1} 2x \\ &= r^x + r^{x-1} 2x \sum_{i=1}^x \binom{x}{i} < r^x + r^{x-1} 2x \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \\ &= r^x + r^{x-1} 2x 2^x.\end{aligned}$$

Lema 4.8 Se $x \geq 1$ e $(2x)^{x+1} < r$, então $r^x < \binom{r}{x} (x! + 1)$.

Demonstração: Notemos que como $(2x)^{x+1} < r$, as condições dos Lemas 4.4, 4.5 e 4.6 estão satisfeitas.

Pelo Lema 4.6, $(r^x)^2 < (r - x)^x (r + 2x)^x$, e portanto

$$\binom{r}{x} x! (r^x)^2 < \binom{r}{x} x! (r - x)^x (r + 2x)^x \quad (4.1)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.5, $(r - x)^x < \frac{r!}{(r - x)!}$. Então,

$$(r^x)^2(r - x)^x < \frac{r!}{(r - x)!x!}x!(r^x)^2 = \binom{r}{x}x!(r^x)^2 \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2), obtemos

$$(r^x)^2(r - x)^2 < \binom{r}{x}x!(r - x)^x(r + 2x)^x$$

e portanto $(r^x)^2 < \binom{r}{x}x!(r + 2x)^x$ e como pelo Lema 4.7, $(r + 2x)^x < r^x + r^{x-1}2x2^x$, temos que

$$(r^x)^2 < \binom{r}{x}x!(r^x + r^{x-1}2x2^x),$$

ou seja,

$$(r^{x-1})(r^{x+1}) = (r^x)^2 < \binom{r}{x}x!r^{x-1}(r + 2x2^x)$$

e portanto, teremos que

$$r^{x+1} < \binom{r}{x}(rx! + x!2x2^x)$$

e como $x! \leq x^x$, resulta que

$$r^{x+1} < \binom{r}{x}(rx! + x^x2x2^x) = \binom{r}{x}(rx! + (2x)^{x+1})$$

e como por hipótese $(2x)^{x+1} < r$, temos que

$$r^{x+1} < \binom{r}{x}(rx! + r) = \binom{r}{x}r(x! + 1),$$

de onde obtemos por fim que

$$r < \binom{r}{x}(x! + 1).$$

Lema 4.9 *Se $x \geq 1$ e $(2x)^{x+1} < r$, então $q(r^x, \binom{r}{x}) = x!$.*

Demonstração: Pelo algoritmo da divisão, devemos mostrar que existe um único R tal que

$$r^x = \binom{r}{x} x! + R, \text{ com } 0 \leq R < \binom{r}{x}.$$

Afirmamos que $R = r^x - \binom{r}{x} x!$. Devemos então mostrar que

$$0 \leq r^x - \binom{r}{x} x! < \binom{r}{x},$$

ou ainda

$$\binom{r}{x} x! \leq r^x < \binom{r}{x} (x! + 1),$$

e essas desigualdades são dadas pelos Lemas 4.4 e 4.8.

Teorema 4.10 $g(n) = n!$ é uma função diofantina.

Demonstração: Vimos no Lema 4.9 que se $r > (2n)^{n+1}$, então $q(r^n, \binom{r}{n}) = n!$, portanto,

$$\begin{aligned} m = n! \Leftrightarrow \exists s, t, w, r, u, v [s = 2n \wedge t = n + 1 \wedge w = s^t \wedge r = w + 1 \\ \wedge u = r^n \wedge v = \binom{r}{n} \wedge q(u, v) = m]. \end{aligned}$$

Isso mostra que $g(n) = n!$ é uma função diofantina, pois como já vimos, $s = 2n$, $t = n + 1$, $w = s^t$, $r = w + 1$, $u = r^n$, $q(u, v) = m$ são diofantinas e $v = \binom{r}{n}$ é diofantina pelo Teorema 4.3.

Lema 4.11 Se $bq \equiv a \pmod{m}$, então

$$\prod_{k=1}^y (a + bk) \equiv b^y y! \binom{q + y}{y} \pmod{m}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 b^y y! \binom{q+y}{y} &= b^y \frac{(q+y)!}{q!} = b^y \prod_{i=0}^{y-1} (q + (y-i)) \\
 &= \prod_{i=0}^{y-1} (bq + b(y-i)) \equiv \prod_{i=0}^{y-1} (a + b(y-i)) \\
 &= \prod_{k=1}^y (a + bk) \pmod{m}
 \end{aligned}$$

Teorema 4.12 $h(a, b, y) = \prod_{k=1}^y (a + bk)$ é uma função diofantina.

Demonstração: Para dados a, b, y , seja $m = b(a + by)^y + 1$. É claro que $\text{mdc}(m, b) = 1$ e portanto existe q que satisfaz a congruência $bq \equiv a \pmod{m}$. Pelo Lema 4.11, segue então que

$$\prod_{k=1}^y (a + bk) \equiv b^y y! \binom{q+y}{y} \pmod{m}.$$

Além disso, claramente

$$\prod_{k=1}^y (a + bk) < b(a + by)^y + 1 = m.$$

Portanto, $\prod_{k=1}^y (a + bk)$ é o único inteiro positivo congruente a $b^y y! \binom{q+y}{y}$ módulo m . Segue então que

$$\begin{aligned}
 z &= \prod_{k=1}^y (a + bk) \\
 &\Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\exists m, p, q, r, s, t, u, v, w, x [r = a + by \wedge s = r^y \wedge m = bs + 1$$

$$\wedge bq = a + mt \wedge u = b^y \wedge v = y! \wedge z < m \wedge w = q + y$$

$$\wedge x = \binom{w}{y} \wedge z + mp = uvx]$$

e isso mostra que $h(a, b, y) = \prod_{k=1}^y (a + bk)$ é diofantina, pois $v = y!$ é diofantina pelo Teorema 4.10 e as fórmulas restantes, como já comentamos, são diofantinas.

Capítulo 5

Quantificadores limitados são diofantinos

Lema 5.1 *Seja $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ um polinômio. Então*

$$(\forall k)_{\leq y} \exists y_1, \dots, y_m (P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists u (\forall k)_{\leq u} (\exists y_1, \dots, y_m)_{\leq u} (P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0)$$

Demonstração: ($\Uparrow$) Imediato.

($\Downarrow$) A hipótese afirma que para cada $k = 1, \dots, y$ existem $y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}$ tais que

$$P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) = 0.$$

Seja $u = \max\{y_j^{(k)} : j = 1, \dots, m \text{ e } k = 1, \dots, y\}$. Portanto,

$$\exists u (\forall k)_{\leq y} (\exists y_1, \dots, y_m)_{\leq u} (P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0).$$

Lema 5.2 Dado um polinômio $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, seja $Q(y, u, x_1, \dots, x_n)$ um polinômio tal que

$$(1) \quad Q(y, u, x_1, \dots, x_n) > u;$$

$$(2) \quad Q(y, u, x_1, \dots, x_n) > y;$$

$$(3) \quad k \leq y \text{ e } y_1, \dots, y_m \leq u \Rightarrow |P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)| \leq Q(y, u, x_1, \dots, x_n).$$

Então

$$(\forall k)_{\leq y} (\exists y_1, \dots, y_m)_{\leq u} (P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} \exists c, t, a_1, \dots, a_m \Big[1 + ct = \prod_{k=1}^y (1 + kt) \wedge t = Q(y, u, x_1, \dots, x_n)! \\ \wedge 1 + ct \Big| \prod_{j=1}^u (a_1 - j) \wedge \dots \wedge 1 + ct \Big| \prod_{j=1}^u (a_m - j) \\ \wedge P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \equiv 0 \pmod{1 + ct} \Big] \end{aligned}$$

Demonstração: ($\Downarrow$) Para cada $k = 1, 2, \dots, y$ e $j = 1, 2, \dots, m$, sejam $y_j^{(k)}$ tais que por hipótese $y_j^{(k)} \leq u$ e $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) = 0$. Seja

$$t = Q(y, u, x_1, \dots, x_n)!$$

Como $\prod_{k=1}^y (1 + kt) \equiv 1 \pmod{t}$, então existe $c > 0$ tal que

$$1 + ct = \prod_{k=1}^y (1 + kt).$$

Afirmamos agora que para $1 \leq k < l \leq y$, $\text{mdc}(1 + kt, 1 + lt) = 1$. De fato, suponha que p é um primo tal que $p|1 + kt$ e $p|1 + lt$. Então $p|l - k$ e como $0 < l - k < y$, então $p < y$. Mas, pela hipótese (2), $Q(y, u, x_1, \dots, x_n) > y$, logo $Q(y, u, x_1, \dots, x_n) > p$ e, portanto, $p|Q(y, u, x_1, \dots, x_n)!$, ou seja, $p|t$, e como $p|1 + kt$, isso implica que $p|1$. Absurdo.

Portanto, para $1 \leq k < l \leq y$, $\text{mdc}(1 + kt, 1 + lt) = 1$.

Podemos então aplicar o teorema chinês do resto nos m sistemas

$$\begin{cases} x \equiv y_1^{(1)} \pmod{1 + 1t} \\ x \equiv y_1^{(2)} \pmod{1 + 2t} \\ \vdots \\ x \equiv y_1^{(y)} \pmod{1 + yt} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} x \equiv y_m^{(1)} \pmod{1 + 1t} \\ x \equiv y_m^{(2)} \pmod{1 + 2t} \\ \vdots \\ x \equiv y_m^{(y)} \pmod{1 + yt} \end{cases}$$

e obter uma solução a_i para cada um dos sistemas, ou seja, para $i = 1, \dots, m$, teremos que

$$a_i \equiv y_i^{(k)} \pmod{1 + kt}, \quad k = 1, \dots, y.$$

Por outro lado, como $1 + ct = \prod_{k=1}^y (1 + kt)$, então, para $k = 1, \dots, y$, temos

$$1 + ct \equiv 0 \pmod{1 + kt},$$

donde $k + kct \equiv 0 \pmod{1 + kt}$. Também, para $k = 1, \dots, y$,

$$1 + kt \equiv 0 \pmod{1 + kt},$$

donde $c + kct \equiv 0 \pmod{1 + kt}$.

Portanto, para $k = 1, \dots, y$, $c \equiv k \pmod{1 + kt}$.

As congruências $a_i \equiv y_i^{(k)} \pmod{1 + kt}$ e $c \equiv k \pmod{1 + kt}$ permitem-nos afirmar que para $k = 1, \dots, y$:

$$P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \equiv P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \equiv 0 \pmod{1 + kt}$$

e como $k \neq l \Rightarrow \text{mdc}(1 + kt, 1 + lt) = 1$, temos que

$$P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \equiv 0 \pmod{\prod_{k=1}^y (1 + kt)},$$

ou seja,

$$P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \equiv 0 \pmod{1 + ct}.$$

Finalmente, como para $i = 1, \dots, m$ vale

$$a_i \equiv y_i^{(k)} \pmod{1 + kt}, \quad k = 1, \dots, y,$$

então $1 + kt \mid a_i - y_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, y$, e como $1 \leq y_i^{(k)} \leq u$, isso implica que

$$1 + kt \mid \prod_{j=1}^u (a_i - j), \quad \text{para } k = 1, \dots, y.$$

Usando novamente o fato de que $k \neq l \Rightarrow \text{mdc}(1 + kt, 1 + lt) = 1$, teremos que

$$\prod_{k=1}^y (1 + kt) \mid \prod_{j=1}^u (a_i - j),$$

ou seja,

$$1 + ct \mid \prod_{j=1}^u (a_1 - j) \quad \wedge \quad \dots \quad \wedge \quad 1 + ct \mid \prod_{j=1}^u (a_m - j).$$

($\uparrow$) Para cada $k = 1, \dots, y$, e para cada $i = 1, \dots, m$, seja p_k um primo tal que $p_k \mid 1 + kt$ e seja $y_i^{(k)} = r(a_i, p_k)$ (resto da divisão de a_i por p_k).

Afirmção 1: $1 \leq y_i^{(k)} \leq u$.

De fato, como $p_k | 1 + kt$, $1 + kt | 1 + ct$ e, para $i = 1, \dots, m$, $1 + ct | \prod_{j=1}^u (a_i - j)$, então para $i = 1, \dots, m$, $p_k | \prod_{j=1}^u (a_i - j)$ e como p_k é primo, para cada $i = 1, \dots, m$, existe $j = 1, \dots, u$ tal que $p_k | a_i - j$, ou seja, $a_i \equiv j \pmod{p_k}$. Além disso, como $y_i^{(k)} = r(a_i, p_k)$, temos que $a_i \equiv y_i^{(k)} \pmod{p_k}$, e portanto para cada $i = 1, \dots, m$, existe $j = 1, \dots, u$ tal que $y_i^{(k)} \equiv j \pmod{p_k}$. Afirmamos agora que $p_k > Q$, pois se $p_k \leq Q$, então $p_k | Q!$ e como $Q! = t$, teríamos $p_k | kt$, e como $p_k | 1 + kt$, resultaria $p_k | 1$, o que é impossível.

Logo, $p_k > Q$ e da hipótese (1), $Q > u$ e como $j \leq u$, temos portanto que $j < p_k$.

Por outro lado, como $y_i^{(k)} = r(a_i, p_k)$, então $y_i^{(k)} < p_k$. Reunimos então a seguinte situação:

$$y_i^{(k)} \equiv j \pmod{p_k}, \quad j < p_k \quad \text{e} \quad y_i^{(k)} < p_k.$$

Portanto, $y_i^{(k)} = j$, e como $1 \leq j \leq u$, temos que $1 \leq y_i^{(k)} \leq u$.

Afirmção 2: Para $k = 1, \dots, y$, $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) = 0$.

De fato, como $p_k | 1 + kt$ e $1 + kt | 1 + ct$, temos

$$1 + ct \equiv 1 + kt \equiv 0 \pmod{p_k},$$

donde

$$k + kct \equiv c + kct \equiv 0 \pmod{p_k},$$

e portanto, para $k = 1, \dots, y$, $k \equiv c \pmod{p_k}$.

Por outro lado, como $y_i^{(k)} = r(a_i, p_k)$, então $y_i^{(k)} \equiv a_i \pmod{p_k}$. Estas congruências

implicam que

$$P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \equiv P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \pmod{p_k}.$$

Isso nos leva a concluir, juntamente com a hipótese, que

$$P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \equiv 0 \pmod{p_k}.$$

Agora, como $k \leq y$ e da Afirmação 1, $1 \leq y_i^{(k)} \leq u$, resulta da hipótese (3) que

$$\left| P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \right| \leq Q(y, u, x_1, \dots, x_n).$$

Já vimos que $Q(y, u, x_1, \dots, x_n) < p_k$. Temos então a seguinte situação:

$$P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \equiv 0 \pmod{p_k}$$

e

$$\left| P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \right| < p_k.$$

Então, $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) = 0$. Portanto,

$$(\forall k)_{\leq y} (\exists y_1, \dots, y_m)_{\leq u} [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$$

Teorema 5.3 *Seja $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ um polinômio. Então os predicados*

$$(a) \ (\exists k)_{\leq y} \exists y_1 \cdots \exists y_m [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0];$$

$$(b) \ (\forall k)_{\leq y} \exists y_1 \cdots \exists y_m [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$$

são diofantinos.

Demonstração: (a) É imediato, pois basta observar que

$$(\exists k)_{\leq y} \exists y_1, \dots, y_m [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \exists y_1, \dots, y_m [k \leq y \wedge P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0].$$

(b) Dado o polinômio $P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, vamos construir um polinômio

$$Q(y, u, x_1, \dots, x_n)$$

que satisfaça as condições (1), (2) e (3) do Lema 5.2.

Primeiramente, escrevemos o polinômio dado como soma de monômios, isto é,

$$P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \sum_{r=1}^N t_r,$$

onde cada termo t_r é da forma $t_r = cy^ak^bx_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} y_1^{s_1} \dots y_m^{s_m}$, com $c \in \mathbb{Z}$.

Seja agora $u_r = |c|y^{a+b}x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} u^{s_1+\dots+s_n}$. O polinômio desejado será então

$$Q(y, u, x_1, \dots, x_n) = u + y + \sum_{r=1}^N u_r.$$

É fácil ver que as propriedades (1), (2) e (3) do Lema 5.2 são imediatamente satisfeitas.

De posse do polinômio $Q(y, u, x_1, \dots, x_n)$, podemos agora aplicar o Lema 5.2 e em seguida o Lema 5.1 para obter a equivalência:

$$(\forall k)_{\leq y} \exists y_1, \dots, y_m [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
& \exists u, c, t, a_1, \dots, a_m \left[1 + ct = \prod_{k=1}^y (1 + kt) \wedge t = Q(y, u, x_1, \dots, x_n)! \right. \\
& \quad \wedge 1 + ct \left| \prod_{j=1}^u (a_1 - j) \wedge \dots \wedge 1 + ct \right| \prod_{j=1}^u (a_m - j) \\
& \quad \left. \wedge P(y, c, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \equiv 0 \pmod{1 + ct} \right]
\end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned}
& \exists u, c, t, a_1, \dots, a_m, e, f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_m, l \left[e = 1 + ct \right. \\
& \quad \wedge e = \prod_{k=1}^y (1 + kt) \wedge f = Q(y, u, x_1, \dots, x_n) \wedge t = f! \\
& \quad \wedge g_1 = a_1 - u - 1 \wedge g_2 = a_2 - u - 1 \wedge \dots \wedge g_m = a_m - u - 1 \\
& \quad \wedge h_1 = \prod_{k=1}^u (g_1 + k) \wedge h_2 = \prod_{k=1}^u (g_2 + k) \wedge \dots \wedge h_m = \prod_{k=1}^u (g_m + k) \\
& \quad \wedge e|h_1 \wedge e|h_2 \wedge \dots \wedge e|h_m \wedge e|l \\
& \quad \left. \wedge l = P(y, k, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \right].
\end{aligned}$$

Portanto, essa equivalência mostra que o predicado

$$(\forall k)_{\leq y} \exists y_1, \dots, y_m [P(y, k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$$

é diofantino pelos teoremas anteriores.

Capítulo 6

Funções recursivas

Definição 6.1 Função recursiva

(1) Funções iniciais

- as funções $c(x) = 1$ (constante), $s(x) = x + 1$ (sucessor) e $\cup_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$ (projeção) são *recursivas*.

(2) Composição

- se $f(y_1, \dots, y_m)$, $g_1(x_1, \dots, x_n)$, $\dots$, $g_m(x_1, \dots, x_n)$ são recursivas, então a função

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

é *recursiva*.

(3) Recursão primitiva

- se $f(x_1, \dots, x_n)$ e $g(t, y, x_1, \dots, x_n)$ são recursivas e $h(x_1, \dots, x_n, t)$ é uma função

que satisfaz a equação

$$\begin{cases} h(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, t+1) = g(t, h(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

então $h(x_1, \dots, x_n, t)$ é *recursiva*.

(4) Minimalização (Se $R(x)$ é uma relação tal que $\exists x R(x)$, então $\mu x R(x)$ é o menor número que satisfaz a relação $R(x)$.)

- se $f(x_1, \dots, x_n, y)$ e $g(x_1, \dots, x_n, y)$ são recursivas e tais que para todo $x_1, \dots, x_n$ existe y tal que $f(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y)$, então a função

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mu y (f(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y))$$

é *recursiva*.

(5) As funções recursivas são obtidas unicamente pela aplicação das cláusulas (1) - (4).

Observação: Usualmente as funções recursivas são definidas sobre os números naturais, ao passo que aqui as funções recursivas são definidas excluindo-se o zero de seu domínio. Notemos contudo que uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é recursiva como aqui definimos se e somente se a função $F(t_1, \dots, t_n) = f(t_1 + 1, \dots, t_n + 1) - 1$ é recursiva no sentido usual.

Proposição 6.2 A função $S(i, u)$ e as funções polinomiais com coeficientes inteiros positivos são recursivas.

Demonstração: Como a função $S(i, u)$ e os polinômios com coeficientes inteiros positivos definidas sobre os números naturais são recursivas na definição usual, a proposição segue da observação acima.

Teorema 6.3 *Uma função é diofantina se e somente se é recursiva.*

Demonstração: Abreviemos $(x_1, \dots, x_n)$ por $\vec{x}$.

($\Rightarrow$) Seja f diofantina. Então existem polinômios P e Q com coeficientes inteiros tal que

$$y = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(\vec{x}, y, t_1, \dots, t_m) = Q(\vec{x}, y, t_1, \dots, t_m)).$$

Então,

$$\exists t_1, \dots, t_m (P(\vec{x}, f(\vec{x}), t_1, \dots, t_m) = Q(\vec{x}, f(\vec{x}), t_1, \dots, t_m))$$

e então pela Proposição 1.13

$$\exists u (P(\vec{x}, S(1, u), S(2, u), \dots, S(m+1, u)) = Q(\vec{x}, S(1, u), S(2, u), \dots, S(m+1, u))).$$

Como $S(i, u)$ e os polinômios são funções recursivas, usando a composição e minimalização temos que também é recursiva a função

$$\varphi(\vec{x}) = \mu u (P(\vec{x}, S(1, u), \dots, S(m+1, u)) = Q(\vec{x}, S(1, u), \dots, S(m+1, u))).$$

Temos então que

$$P(\vec{x}, S(1, \varphi(\vec{x})), \dots, S(m+1, \varphi(\vec{x}))) = Q(\vec{x}, S(1, \varphi(\vec{x})), \dots, S(m+1, \varphi(\vec{x}))).$$

Isso implica que

$$\exists t_1, \dots, t_m (P(\vec{x}, S(1, \varphi(\vec{x})), t_1, \dots, t_m) = Q(\vec{x}, S(1, \varphi(\vec{x})), t_1, \dots, t_m)).$$

Como $y = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(\vec{x}, y, t_1, \dots, t_m) = Q(\vec{x}, y, t_1, \dots, t_m))$, segue então que $f(\vec{x}) = S(1, \varphi(\vec{x}))$.

Como já comentamos, $S(i, u)$ e $\varphi(\vec{x})$ são funções recursivas, logo, f é recursiva. Portanto, toda função diofantina é recursiva.

($\Leftarrow$) Seja f recursiva.

As funções iniciais $c(x) = 1$, $S(x) = x + 1$ e $\cup_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, são trivialmente diofantinas.

Analisemos os esquemas da composição, recursão e minimalização.

- Caso 1: Composição

Seja $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$, onde $h, g_1, \dots, g_m$ são recursivas. Então

$$y = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (t_1 = g_1(\vec{x}) \wedge \dots \wedge t_m = g_m(\vec{x}) \wedge y = h(t_1, \dots, t_m)).$$

Como por hipótese de indução $g_1, \dots, g_m, h$ são diofantinas, segue da equivalência acima que f é diofantina.

- Caso 2: Recursão

Seja $\begin{cases} f(\vec{x}, 1) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, t+1) = h(t, f(\vec{x}, t), \vec{x}) \end{cases}$ com g e h recursivas. Dado um número z , usamos a função $S(i, u)$ para codificar os números $f(\vec{x}, 1), \dots, f(\vec{x}, z)$. Então

$$\begin{aligned} y = f(\vec{x}, z) &\Leftrightarrow \exists u \left[\exists v (v = S(1, u) \wedge v = g(\vec{x})) \right. \\ &\quad \wedge (\forall t)_{\leq z} (t = z \vee \exists v (v = S(t+1, u) \wedge v = h(t, S(t, u), \vec{x}))) \\ &\quad \left. \wedge y = S(z, u) \right] \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, g e h são diofantinas e como predicados diofantinos são fechados para o quantificador limitado $(\forall t)_{\leq z}$, segue que f é diofantina.

- Caso 3: Minimalização

Seja $f(\vec{x}) = \mu y (g(\vec{x}, y) = h(\vec{x}, y))$, onde g e h são recursivos. Então

$$y = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u (u = g(\vec{x}, y) \wedge u = h(\vec{x}, y)) \\ \wedge (\forall t)_{\leq y} \left[t = y \vee \exists z, w (z = g(\vec{x}, t) \wedge w = h(\vec{x}, t) \wedge (z < w \vee w < z)) \right]$$

Por hipótese de indução, g e h são diofantinas, e como os predicados diofantinos são fechados para o quantificador limitado $(\forall t)_{\leq y}$, segue que f é diofantina.

Portanto, toda função recursiva é diofantina.

Capítulo 7

O décimo problema de Hilbert é insolúvel

Vamos apresentar uma enumeração de todos os conjuntos diofantinos $D \subseteq \mathbb{N}^*$.

Fixemos $x_0, x_1, x_2, \dots$ como variáveis.

A notação $P(x_0, x_1, \dots, x_n)|_{(t_0, t_1, \dots, t_n)}^{(x_0, x_1, \dots, x_n)}$ denotará o polinômio obtido a partir de P , pela substituição de $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ pelos termos $(t_0, t_1, \dots, t_n)$. Quando não houver risco de confusão, escreveremos $P(x_0, x_1, \dots, x_n)|_{(t_0, t_1, \dots, t_n)}^{(x_0, x_1, \dots, x_n)}$ simplesmente como $P(t_0, t_1, \dots, t_n)$. Usaremos de forma análoga a notação $P(x_0, x_1, \dots, x_n)|_t^{x_i}$.

- Enumeração de polinômios

Todo polinômio com coeficientes inteiros positivos pode ser obtido a partir de 1 e das variáveis por meio de adições e multiplicações sucessivas.

Apresentamos então a seguinte enumeração de polinômios com coeficientes inteiros

positivos utilizando as funções $L(z)$ e $R(z)$:

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_{3i-1} = x_{i-1} \\ P_{3i} = P_{L(i)} + P_{R(i)} \\ P_{3i+1} = P_{L(i)} \cdot P_{R(i)} \end{cases}$$

Ao escrevermos $P_i = P_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$, estará implícito que n será suficientemente grande para englobar todas as variáveis de P_i embora obviamente nem todas as variáveis $x_0, x_1, \dots, x_n$ ocorram em P_i .

Observamos ainda que em P_n não ocorrem variáveis com índice superior a n . De fato, para $n = 1$ é imediato. Se $n = 3i - 1$, então $P_n = P_{3i-1} = x_{i-1}$ e x_{i-1} não é x_j , para todo $j \geq n$. Se $n = 3i$, então $P_n = P_{3i} = P_{L(i)} + P_{R(i)}$ e como $L(i), R(i) \leq i < 3i = n$, por hipótese de indução não ocorrem variáveis x_j , com $j > n$, em $P_{L(i)}$ e em $P_{R(i)}$ e, portanto, em P_n . O caso $n = 3i + 1$ segue de maneira análoga.

A observação acima nos mostra que na expressão

$$\exists x_1, \dots, x_n (P_{L(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = P_{R(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n))$$

todas as variáveis estão quantificadas existencialmente, exceto x_0 , quando esta ocorre.

Definição 7.1 Para $n \geq 1$, definimos

$$D_n = \left\{ x : \exists x_1, \dots, x_n \left(P_{L(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) \Big|_x^{x_0} = P_{R(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) \Big|_x^{x_0} \right) \right\}$$

Teorema 7.2 Para todo conjunto diofantino $S \subseteq \mathbb{N}^*$, existe $n \geq 1$ tal que $S = D_n$.

Demonstração: Seja $S \subseteq \mathbb{N}^*$ diofantino. Então existe um polinômio $P(x, t_1, \dots, t_n)$ com coeficientes inteiros tal que

$$x \in S \leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n (P(x, t_1, \dots, t_n) = 0).$$

Podemos de maneira óbvia escrever a expressão $P(x, t_1, \dots, t_n) = 0$ como uma igualdade $Q(x, t_1, \dots, t_n) = R(x, t_1, \dots, t_n)$, onde Q e R são polinômios com coeficientes inteiros positivos. Então podemos escrever

$$x \in S \leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n (Q(x, t_1, \dots, t_n) = R(x, t_1, \dots, t_n)).$$

Basta tomar então n tal que $P_{L(n)} = Q$ e $P_{R(n)} = R$ e então

$$x \in S \leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n (P_{L(n)}(x, x_1, \dots, x_n) = P_{R(n)}(x, x_1, \dots, x_n)),$$

ou seja, $S = D_n$.

Teorema 7.3 *O conjunto $\{(n, x) : x \in D_n\}$ é diofantino.*

Demonstração: Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} x \in D_n \Leftrightarrow \exists u \Big[& S(1, u) = 1 \wedge S(2, u) = x \\ & \wedge (\forall i)_{\leq n} (S(3i, u) = S(L(i), u) + S(R(i), u)) \\ & \wedge (\forall i)_{\leq n} (S(3i + 1, u) = S(L(i), u) \cdot S(R(i), u)) \\ & \wedge S(L(n), u) = S(R(n), u) \Big] \end{aligned}$$

De fato:

($\Rightarrow$) Suponha $x \in D_n$. Então existem $t_1, \dots, t_n$ tais que

$$P_{L(n)}(x, t_1, \dots, t_n) = P_{R(n)}(x, t_1, \dots, t_n).$$

Tomemos u tal que $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$, para $j = 1, 2, \dots, 3n + 2$. Então temos que

- $S(1, u) = P_1(x, t_1, \dots, t_n) = 1$;
- $S(2, u) = P_2(x, t_1, \dots, t_n) = x$;
- Seja $i \leq n$. Então $3i \leq 3n < 3n + 2$. Logo,

$$S(3i, u) = P_{3i}(x, t_1, \dots, t_n) = P_{L(i)}(x, t_1, \dots, t_n) + P_{R(i)}(x, t_1, \dots, t_n)$$

e como $L(i), R(i) \leq i \leq n < 3n + 2$, segue que

$$P_{L(i)}(x, t_1, \dots, t_n) + P_{R(i)}(x, t_1, \dots, t_n) = S(L(i), u) + S(R(i), u).$$

Portanto,

$$(\forall i)_{\leq n} (S(3i, u) = S(L(i), u) + S(R(i), u));$$

- Notando que se $i \leq n$, então $3i + 1 \leq 3n + 1 < 3n + 2$, a afirmação

$$(\forall i)_{\leq n} (S(3i + 1, u) = S(L(i), u) \cdot S(R(i), u))$$

é justificada de forma análoga ao caso anterior;

- Finalmente, como $L(n), R(n) \leq n < 3n + 2$, segue que $S(L(n), u) = P_{L(n)}(x, t_1, \dots, t_n)$ e $S(R(n), u) = P_{R(n)}(x, t_1, \dots, t_n)$ e como $P_{L(n)}(x, t_1, \dots, t_n) = P_{R(n)}(x, t_1, \dots, t_n)$, temos que $S(L(n), u) = S(R(n), u)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que para dados x, n , a expressão do lado direito da equivalência seja válida. Para $i = 1, 2, \dots, n$, façamos $t_i = S(3i + 2, u)$.

Afirmção: Para $j \leq 3n + 2$, $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$.

De fato:

- $S(1, u) = 1 = P_1(x, t_1, \dots, t_n)$;
- $S(2, u) = x = P_2(x, t_1, \dots, t_n)$;
- Se $j = 3i$, então $3i \leq 3n + 2 < 3n + 3 = 3(n + 1)$. Logo, $i \leq n$. Então, por hipótese

$$S(j, u) = S(3i, u) = S(L(i), u) + S(R(i), u)$$

e como $L(i), R(i) \leq i < 3i = j$, por hipótese de indução, teremos que

$$\begin{aligned} S(L(i), u) + S(R(i), u) &= P_{L(i)}(x, t_1, \dots, t_n) + P_{R(i)}(x, t_1, \dots, t_n) \\ &= P_{3i}(x, t_1, \dots, t_n) = P_j(x, t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Portanto, se $j = 3i$, então $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$;

- Se $j = 3i + 1$, então $3i + 1 \leq 3n + 2 < 3n + 4 = 3(n + 1) + 1$, logo, $i \leq n$ e usando a mesma argumentação do caso anterior, concluímos que se $j = 3i + 1$, então $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$;
- Se $j = 3i + 2$, como $j = 3i + 2 \leq 3n + 2$, então $i \leq n$, logo, por definição, $S(3i + 2, u) = t_i$.

Notemos que na nossa enumeração de polinômios, $P_{3i-1} = x_{i-1}$ é equivalente a

$$P_2 = x_0 \wedge P_{3(i+1)-1} = x_i.$$

Já vimos que $S(2, u) = x = P_2(x, t_1, \dots, t_n)$. No outro caso, teremos então, para $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} S(j, u) &= S(3i + 2, u) = t_i = P_{3(i+1)-1}(x, t_1, \dots, t_n) \\ &= P_{3i+1}(x, t_1, \dots, t_n) = P_j(x, t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Portanto, se $j = 3i + 2$, então $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$.

Isso termina a prova de que para $j \leq 3n + 2$, $S(j, u) = P_j(x, t_1, \dots, t_n)$.

Em particular, como $L(n), R(n) \leq n < 3n + 2$, temos que $S(L(n), u) = P_{L(n)}(x, t_1, \dots, t_n)$ e $S(R(n), u) = P_{R(n)}(x, t_1, \dots, t_n)$. Por hipótese, $S(L(n), u) = S(R(n), u)$, então

$$P_{L(n)}(x, t_1, \dots, t_n) = P_{R(n)}(x, t_1, \dots, t_n),$$

ou seja, $x \in D$.

A equivalência está demonstrada e a expressão da direita é diofantina. Portanto, o conjunto $\{(n, x) : x \in D_n\}$ é diofantino.

Teorema 7.4 *O conjunto $V = \{n : n \notin D_n\}$ não é diofantino.*

Demonstração: Se V é diofantino, então $V = D_i$ para algum i , e nesse caso teríamos $i \in D_i \Leftrightarrow i \in V \Leftrightarrow i \notin D_i$, uma contradição.

Observação: Os Teoremas 7.3 e 7.4 nos mostram que os predicados diofantinos não são fechado para os conectivos $\neg$, $\rightarrow$ e o quantificador $\forall$. De fato, pelo Teorema 7.3, existe um polinômio Q tal que

$$x \in D_n \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (Q(n, x, t_1, \dots, t_m) = 0)$$

e portanto, lembrando que $V = \{n : n \notin D_n\}$, temos

$$\begin{aligned} x \in V &\Leftrightarrow x \notin D_x \Leftrightarrow \neg \exists t_1, \dots, t_m (Q(x, x, t_1, \dots, t_m) = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (Q(x, x, t_1, \dots, t_m) = 0) \rightarrow 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t_1, \dots, t_m (Q(x, x, t_1, \dots, t_m) > 0 \vee Q(x, x, t_1, \dots, t_m) < 0). \end{aligned}$$

Como $x \in V$ não é diofantino e os predicados

$$\begin{aligned} &\exists t_1, \dots, t_m (Q(x, x, t_1, \dots, t_m) = 0), \quad 1 = 0 \quad \text{e} \\ &(Q(x, x, t_1, \dots, t_m) > 0 \vee Q(x, x, t_1, \dots, t_m) < 0) \end{aligned}$$

são diofantinos, as equivalências acima mostram que a introdução do quantificador $\forall$ e dos conectivos $\neg$, $\rightarrow$ pode resultar em predicados não diofantinos.

Teorema 7.5 *O predicado $x \in D_n$ não é recursivo.*

Demonstração: Suponhamos que $x \in D_n$ é recursivo. Então sua função característica

$$g(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin D_n \\ 2 & \text{se } x \in D_n \end{cases}$$

é recursiva e, portanto, pelo Teorema 6.3, $g(n, x)$ é uma função diofantina.

Então existe um polinômio $P(n, x, y, t_1, \dots, t_m)$ tal que

$$g(n, x) = y \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(n, x, y, t_1, \dots, t_m) = 0)$$

e portanto

$$g(n, n) = 1 \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(n, n, 1, t_1, \dots, t_m) = 0)$$

e como $g(n, n) = 1 \Leftrightarrow n \notin D_n$, segue que

$$n \notin D_n \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(n, n, 1, t_1, \dots, t_m) = 0)$$

e isso mostra que $n \notin D_n$ é um predicado diofantino, contra o Teorema 7.4.

Teorema 7.6 (*O décimo problema de Hilbert é insolúvel.*)

Não existe um algoritmo que decida se uma equação polinomial qualquer $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ admite soluções.

Demonstração: Suponhamos que um tal algoritmo H exista. Pelo Teorema 7.3, o predicado $x \in D_n$ é diofantino, ou seja, existe um polinômio $Q(n, x, y, t_1, \dots, t_m)$ tal que

$$x \in D_n \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (Q(n, x, t_1, \dots, t_m) = 0).$$

Então, para cada x, n , poderíamos utilizar o algoritmo H para verificar se existe ou não solução para a equação $Q(n, x, t_1, \dots, t_m) = 0$. A expressão acima mostra que se existe solução, então $x \in D_n$, caso contrário, $x \notin D_n$, e portanto o predicado $x \in D_n$ seria recursivo, contra o Teorema 7.5.

Portanto, não existe tal algoritmo e o décimo problema de Hilbert é insolúvel.

Capítulo 8

Conjuntos recursivamente enumeráveis, grau e dimensão

Definição 8.1 Um conjunto $R \subseteq \mathbb{N}_*^n$ é *recursivamente enumerável (r.e.)* se e somente se existem funções recursivas f e g tais que

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \exists x(f(x, x_1, \dots, x_n) = g(x, x_1, \dots, x_n))\}.$$

Teorema 8.2 Um conjunto é diofantino se e somente se é r.e.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $R \subseteq \mathbb{N}_*^n$ diofantino. Então existem polinômios P e Q tais que

$$(x_1, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = Q(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m)).$$

Utilizando a função $S(i, u)$ temos então que

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in R &\Leftrightarrow \exists u (P(x_1, \dots, x_n, S(1, u), \dots, S(m, u)) \\ &= Q(x_1, \dots, x_n, S(1, u), \dots, S(m, u))). \end{aligned}$$

Como P , Q e S são funções recursivas, segue que R é r.e.

($\Leftarrow$) Seja $R \subseteq \mathbb{N}_*^n$ r.e. Então existem funções recursivas f e g tais que

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \in R &\Leftrightarrow \exists x (f(x, x_1, \dots, x_n) = g(x, x_1, \dots, x_n)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists y (y = f(x, x_1, \dots, x_n) \wedge y = g(x, x_1, \dots, x_n)).\end{aligned}$$

Como f e g são recursivas, pelo Teorema 6.3, os predicados

$$y = f(x, x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad y = g(x, x_1, \dots, x_n)$$

são diofantinos. Portanto, R é diofantino.

Definição 8.3 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^*$ um conjunto diofantino. A *dimensão* de S é o menor número n para o qual existe um polinômio P tal que

$$x \in S \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n (P(x, t_1, \dots, t_n) = 0).$$

Definição 8.4 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^*$ um conjunto diofantino. O *grau* de S é o menor grau de um polinômio P tal que

$$x \in S \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n (P(x, t_1, \dots, t_n) = 0).$$

Observamos que o grau e a dimensão de um conjunto S são conceitos a princípio independentes.

Teorema 8.5 *Todo conjunto diofantino tem grau $n \leq 4$.*

Demonstração: Seja S um conjunto diofantino e P um polinômio tal que

$$x \in S \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n (P(x, t_1, \dots, t_n) = 0).$$

Podemos então reduzir o grau de P introduzindo novas variáveis z_j satisfazendo equações da forma $z_j = x^2$, $z_j = xt_i$, $z_j = t_i^2$, $z_j = t_i t_k$ e continuar o processo até obtermos equações de grau 2. Somando então os quadrados obtemos polinômio de grau 4.

Exemplo: Consideremos a equação $x^4 y^3 w + y^2 z = 0$. Então

$$\begin{aligned} x^4 y^3 w + y^2 z = 0 &\Leftrightarrow a = x^2 \wedge b = y^2 \wedge a^2 b y w + b z = 0 \\ &\Leftrightarrow a = x^2 \wedge b = y^2 \wedge c = a^2 \wedge c b y w + b z = 0 \\ &\Leftrightarrow a = x^2 \wedge b = y^2 \wedge c = a^2 \wedge d = c b \wedge e = y w \wedge f = b z \wedge d e + f = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - a = 0 \wedge y^2 - b = 0 \wedge a^2 - c = 0 \wedge c b - d = 0 \wedge y w - e = 0 \\ &\quad \wedge b z - f = 0 \wedge d e + f = 0 \end{aligned}$$

Obtivemos equações polinomiais de grau ≤ 2 . Basta agora somar os quadrados de cada polinômio e obteremos uma equação polinomial de grau 4.

Teorema 8.6 *Existe um número m tal que todo conjunto diofantino tem dimensão menor ou igual a m .*

Demonstração: Já vimos que para todo conjunto diofantino S existe um número n tal que $S = D_n$, e pelo Teorema 7.3, existe um polinômio Q tal que

$$x \in D_n \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m (Q(x, n, t_1, \dots, t_m) = 0).$$

Portanto, a dimensão de S é menor ou igual a m .

Observação: Podemos construir o polinômio Q do Teorema 7.3 pelos métodos aqui expostos e chegaremos então a um polinômio cuja dimensão é próxima a 50. No entanto, é possível reduzir bastante tal dimensão.

Capítulo 9

Relações com complexidade de algoritmos

Neste capítulo, mostraremos as relações entre a prova da insolubilidade do décimo problema de Hilbert (que doravante chamaremos de MRDP em homenagem a Matyasevic, J. Robinson, M. Davis e H. Putnam) e alguns problemas de complexidade de algoritmos. Faremos inicialmente uma breve exposição de alguns conceitos fundamentais de complexidade de algoritmos e as definições básicas de fragmentos de aritmética [3]. Passaremos depois para o teorema de Parikh [9], e com o auxílio de um teorema de Manders e Adleman [7], chegaremos finalmente ao resultado obtido por Wilkie [11], a saber, que se MRDP puder ser provado no fragmento de aritmética $I\Sigma_0$, então $\mathbf{NP} = \mathit{coNP}$.

9.1 Definições básicas

9.1.1 Linguagens formais e máquinas de Turing

O modelo computacional adotado para a análise de complexidade de algoritmos serão as máquinas de Turing determinísticas e não determinísticas. A seguir, descreveremos de forma sucinta o modelo aqui utilizado.

Um conjunto Σ finito e não vazio de símbolos será denominado *alfabeto*.

O conjunto de todas as seqüências finitas de símbolos de Σ será denotado por Σ^* , e um elemento $x \in \Sigma^*$ será chamado de *palavra*.

Se x é uma palavra, $|x|$ denotará o número de símbolos que compõe x .

9.1.2 Máquinas de Turing determinísticas (DTM) e a classe P

Uma *máquina de Turing determinística* (DTM) consiste de uma fita infinita dividida em células, que pode mover-se para a direita ou para a esquerda, e por um cabeçote que permite ler e imprimir símbolos na célula sobre a qual se encontra.

Consideremos os seguintes conjuntos:

$\Sigma = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ será o alfabeto;

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ o conjunto de estados internos, e

$S = \{L, H, R\}$ os comandos que indicam se o cabeçote de leitura deve permanecer parado (H), ir para a esquerda (L), ou para a direita (R).

Dentre os elementos de Q , três serão destacados: q_0 (estado inicial), q_a (estado final aceita) e q_r (estado final rejeita)

Definição 9.1 O *programa* de uma máquina de Turing determinística (DTM) é um conjunto de quádruplas de uma das seguinte formas:

$$\begin{array}{cccc} q_i & s_j & s_k & q_l \\ q_i & s_j & L & q_l \\ q_i & s_j & R & q_l \\ q_i & s_j & H & q_l \end{array}$$

e que satisfaça a seguinte *condição de consistência*: duas quádruplas distintas não podem iniciar com o mesmo par $q_i s_j$.

Vamos omitir maiores detalhes sobre os aspectos funcionais das máquinas de Turing. Omitiremos também algumas definições usuais como por exemplo de configuração e computação, pois são comuns na literatura.

Definição 9.2 Dizemos que uma DTM T com entrada x *pára* se a computação atingir um dos estados finais q_a ou q_r , e que T *aceita* uma palavra x se e somente se T com entrada x pára no estado final q_a .

Se x é uma palavra aceita por T , $\theta_T(x)$ denotará o número de passos executados por T até a parada.

Definição 9.3 Seja Σ um alfabeto. Uma *linguagem* sobre o alfabeto Σ é um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Definição 9.4 Uma DTM T *reconhece* uma linguagem L se para todo $x \in \Sigma^*$,

$$x \in L \Leftrightarrow T \text{ aceita } x.$$

A linguagem reconhecida por T será denotada por $L(T)$.

Dizemos também que uma linguagem L é *reconhecível* se existe uma DTM que reconhece L .

Definição 9.5 Uma DTM T *decide* uma linguagem L se para todo $x \in \Sigma^*$, ocorrer:

se $x \in L$, então T pára em q_a para a entrada x ;

se $x \notin L$, então T pára em q_r para a entrada x .

Dizemos também que uma linguagem L é *decidível* se existe uma DTM T que decide L , e nesse caso, dizemos que T *decide* L .

Definição 9.6 Uma linguagem L é *decidível em tempo polinomial* (indicamos $L \in \mathbf{P}$) se existe um polinômio $p(n)$ com coeficientes positivos e uma DTM T que decide L tal que para toda palavra x aceita por T , $\theta_T(x) \leq p(|x|)$ (lembramos que $\theta_T(x)$ é o número de passos executados por T até a parada, para uma entrada aceita x).

9.1.3 Máquinas não-determinísticas e a classe NP

As máquinas de Turing não-determinísticas (NDTM) são definidas da mesma maneira que as máquinas determinísticas, exceto pelo fato de não satisfazerem necessariamente a condição de consistência. Assim, toda DTM é também uma NDTM.

A computação não-determinística se processa da mesma forma que a determinística, até ocorrer (se ocorrer) a seguinte situação a que chamaremos de *nó*:

se em certo passo de uma computação a NDTM se encontra no estado q_i e o cabeçote lê o símbolo s_j , e além disso existirem duas (ou mais) quádruplas distintas que se iniciam pelo mesmo par $q_i s_j$, então o curso da computação se bifurca, dando origem a duas (ou mais) computações distintas e independentes. O processo se repete quando ocorrer novamente a mesma situação.

Para uma entrada x , a cada uma dessas computações paralelas daremos o nome de *ramo* da computação não-determinística.

Definição 9.7 Dizemos que uma NDTM *pára* se um de seus ramos atinge um dos estados finais q_a ou q_r , e que uma NDTM *aceita* uma palavra x se um de seus ramos atinge o estado final q_a .

O menor número de passos executados por uma NDTM T com uma entrada aceita x até a parada será denotado por $\theta_T(x)$ (a distinção com o caso determinístico ficará clara pelo contexto).

Definição 9.8 Dizemos que uma NDTM T reconhece uma linguagem L se para todo $x \in \Sigma^*$: $x \in L \leftrightarrow T$ aceita x

Definição 9.9 Uma linguagem L é verificável em tempo polinomial (indicamos $L \in \mathbf{NP}$) se existe um polinômio $p(n)$ com coeficientes positivos e uma NDTM T que aceita L tal que se $x \in L$, então $\theta_T(x) \leq p(|x|)$.

Alternativamente, podemos também caracterizar a classe $\mathbf{NP}$ da seguinte forma:
 $L \in \mathbf{NP}$ se e somente se existe um polinômio $p(x)$ e uma linguagem $Q \in \mathbf{P}$ tal que

$$x \in L \leftrightarrow \exists y (|y| \leq p(|x|) \text{ e } (x, y) \in Q).$$

Intuitivamente, uma linguagem $L \in \mathbf{NP}$ se a afirmação $x \in L$ puder ser verificada em tempo polinomial.

Para ilustrar, tomemos como exemplo o problema SAT: “Dada uma fórmula do cálculo proposicional, existe uma valoração que a torne verdadeira?”.

Sabemos que pelo método das tabelas de verdade, a resposta a esse problema é obtida após um tempo exponencial em relação ao número de letras proposicionais presentes na fórmula, tempo este que é gasto fundamentalmente na busca de uma valoração que satisfaça a fórmula dada. No entanto, se for afirmado que a fórmula é satisfatível e for dada uma valoração que a satisfaça, podemos verificar rapidamente a veracidade dessa afirmação. Essa é a noção que o conceito de verificabilidade polinomial pretende capturar. O exemplo também nos mostra que na discussão acima, não podemos trocar o sim pelo

não, ou seja, aparentemente a verificação de que uma fórmula é satisfatível é mais rápida do que a verificação de que não é satisfatível. Isso nos motiva a definir:

Definição 9.10 Seja Σ um alfabeto. Então $\text{coNP} = \{\Sigma^* \setminus L : L \in \text{NP}\}$.

9.1.4 NP-completude

Definição 9.11 Sejam Σ_1 e Σ_2 alfabetos. Uma função $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ é *computável em tempo polinomial* se existe uma DTM T que computa f e um polinômio $p(n)$ com coeficientes positivos tal que para cada entrada x , $\theta_T(x) \leq p(|x|)$.

Definição 9.12 Sejam Σ_1 e Σ_2 alfabetos, e $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ e $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ linguagens. Dizemos que L_1 é *reduzível à L_2 em tempo polinomial* ($L_1 \leq_p L_2$) se existe uma função $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ computável em tempo polinomial tal que $x \in L_1 \leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Definição 9.13 Uma linguagem L é *NP-completa* se $L \in \text{NP}$ e para toda linguagem $Q \in \text{NP}$, $Q \leq_p L$.

Analogamente:

Definição 9.14 Uma linguagem L é *coNP-Completa* se $L \in \text{coNP}$ e para toda linguagem $Q \in \text{coNP}$, $Q \leq_p L$.

O problema SAT a que já nos referimos, é um problema **NP**-completo (teorema de Cook).

O maior problema aberto da teoria da complexidade de algoritmos é saber se $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

A inclusão $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ é imediata, pois toda DTM é também uma NDTM. Como comentamos, a inclusão contrária permanece em aberto, a despeito de algumas evidências de que a inclusão seja própria.

Aqui, esboçaremos um resultado mostrando que se admitirmos certas hipóteses, então $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

9.1.5 Fragmentos de aritmética

Um fragmento de aritmética é um subsistema da aritmética de Peano obtido por meio de certas restrições ao esquema da indução.

Consideremos a linguagem $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$.

Definição 9.15 Um quantificador limitado é da forma $\forall x \leq t$ (universal) ou $\exists x \leq t$ (existencial), onde t é um termo que não contém x .

As interpretações de $\forall x \leq t \varphi$ e $\exists x \leq t \varphi$ são, respectivamente, as interpretações usuais de $\forall x(x \leq t \rightarrow \varphi)$ e $\exists x(x \leq t \wedge \varphi)$.

Definição 9.16 Uma fórmula é *limitada* se todos os seus quantificadores são limitados.

Vamos definir indutivamente os conjuntos Σ_n e Π_n :

$\Sigma_0 = \Pi_0 =$ conjunto das fórmulas limitadas;

$\Sigma_{n+1} = \{\exists x_1 \dots \exists x_k \varphi : \varphi \in \Pi_n\};$

$\Pi_{n+1} = \{\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi : \varphi \in \Sigma_n\}$

(a cadeia de quantificadores antes da fórmula φ ser vazia).

Definição 9.17 $I\Sigma_n$ (indução sobre as Σ_n -fórmulas) é o conjunto consistindo do fecho universal de todas as fórmulas do tipo

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\varphi(x),$$

onde $\varphi \in \Sigma_n$.

9.1.6 O sistema P^-

O sistema P^- consiste dos axiomas de Peano sem o esquema da indução, que vamos expor a seguir:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) $x + y = y + x$

3) $x + z = y + z \rightarrow x = y$

- 4) $x + 0 = x$
- 5) $x + 1 \neq 0$
- 6) $(x.y).z = x.(y.z)$
- 7) $x.y = y.x$
- 8) $x.1 = x$
- 9) $x.(y + z) = x.y + x.z$
- 10) $x < y < z \rightarrow x < z$
- 11) $(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$
- 12) $x < y \rightarrow x + z < y + z$
- 13) $x < x + (y + 1)$
- 14) $x < y \rightarrow \exists z(x + z + 1 = y)$

Notação: indicaremos por $P^- + I\Sigma_n$ o sistema que consiste dos axiomas de P^- e das fórmulas de $I\Sigma_n$.

Para os resultados que se seguem, se T for uma teoria, T' é a teoria obtida a partir de T adicionando-se novas constantes, mas sem nenhum novo axioma não lógico.

9.2 O teorema de Parikh

Lema 9.18 Para todo $n > 0$, se

$$P^- \vdash \exists y(y \leq t_1 \wedge \varphi(y)) \vee \cdots \vee \exists y(y \leq t_n \wedge \varphi(y)),$$

então $P^- \vdash \exists y(y \leq t_1 + \cdots + t_n \wedge \varphi(y))$.

Demonstração: Por indução sobre n . Para $n = 1$ é imediato. No passo indutivo, para simplificar a notação, vamos supor que

$$P^- \vdash \exists y(y \leq a \wedge \varphi(y)) \vee \exists y(y \leq b \wedge \varphi(y))$$

e mostrar então que $P^- \vdash \exists y(y \leq a + b \wedge \varphi(y))$.

De fato, como

$$P^- \vdash y \leq a \wedge \varphi(y) \rightarrow (y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y),$$

então

$$P^- \vdash \exists y(y \leq a \wedge \varphi(y)) \rightarrow \exists y[(y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y)] \quad (I)$$

Analogamente, como

$$P^- \vdash y \leq b \wedge \varphi(y) \rightarrow (y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y),$$

então

$$P^- \vdash \exists y(y \leq b \wedge \varphi(y)) \rightarrow \exists y[(y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y)]. \quad (II)$$

De (I) e (II) obtemos

$$P^- \vdash \exists y(y \leq a \wedge \varphi(y)) \vee \exists y(y \leq b \wedge \varphi(y)) \rightarrow \exists y[(y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y)]. \quad (III)$$

Da hipótese

$$P^- \vdash \exists y(y \leq a \wedge \varphi(y)) \vee \exists y(y \leq b \wedge \varphi(y)),$$

juntamente com (III), obtemos:

$$P^- \vdash \exists y[(y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y)]. \quad (IV)$$

Por outro lado, como

$$P^- \vdash y \leq a \rightarrow y \leq a + b \quad \text{e} \quad P^- \vdash y \leq b \rightarrow y \leq a + b,$$

teremos então que

$$P^- \vdash y \leq a \vee y \leq b \rightarrow y \leq a + b.$$

e isso implica

$$P^- \vdash (y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y) \rightarrow (y \leq a + b) \wedge \varphi(y)$$

e portanto

$$P^- \vdash \exists y[(y \leq a \vee y \leq b) \wedge \varphi(y)] \rightarrow \exists y(y \leq a + b \wedge \varphi(y)). \quad (V)$$

De (IV) e (V) obtemos então

$$P^- \vdash \exists y(y \leq a + b \wedge \varphi(y)).$$

Lema 9.19 *Seja*

$$\Gamma = \{\forall x[\varphi(0) \wedge \forall y < x(\varphi(y) \rightarrow \varphi(y + 1)) \rightarrow \varphi(x)] : \varphi \in \Sigma_0\}$$

e $m \models P^-$. Então $m \models \Gamma \Leftrightarrow m \models I\Sigma_0$.

Demonstração: ($\Rightarrow$)

Suponhamos que $m \models \varphi(0)$ e $m \models \forall y(\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1))$. Devemos mostrar que $m \models \forall x\varphi(x)$.

Seja $a \in m$. Tomemos $b \in m$ tal que $m \models b < a$ e $m \models \varphi(b)$. Como por hipótese $m \models \forall y(\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1))$, segue que $m \models \varphi(b+1)$. Portanto,

$$m \models \forall y < a(\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1)).$$

Como $m \models \varphi(0)$ e $m \models \Gamma$, teremos que $m \models \varphi(a)$. Portanto, $m \models \forall x\varphi(x)$. Isso mostra que $m \models I\Sigma_0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $m \models I\Sigma_0$ mas $m \not\models \Gamma$. Se $m \not\models \Gamma$, então existem uma fórmula $\varphi \in \Sigma_0$ e um elemento $a \in m$ tal que $m \models \varphi(0)$, $m \models \forall y < a(\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1))$ mas $m \not\models \varphi(a)$.

Afirmção 1: Existe $b \in m$ tal que

$$m \models \forall y < b\varphi(y) \quad \text{e} \quad \forall c \in m(m \models b < c \Rightarrow m \not\models \forall y < c\varphi(y)).$$

De fato, suponhamos que não, ou seja, para todo $b \in m$:

$$m \models \forall y < b\varphi(y) \Rightarrow \exists c \in m(m \models b < c \quad \text{e} \quad m \models \forall y < c\varphi(y)) \quad (*)$$

Consideremos $\psi(x) \equiv \forall y < x\varphi(y)$. Vamos mostrar usando $m \models I\Sigma_0$, que $m \models \forall x\psi(x)$, o que nos levará a uma contradição.

Trivialmente, temos $m \models \psi(0)$. Suponha que $y_0 \in m$ é tal que $m \models \psi(y_0)$, ou seja, $m \models \forall y < y_0\varphi(y)$. Então, por (*), existe $x_0 \in m$ tal que $m \models y_0 < x_0$ e $m \models \forall y < x_0\varphi(y)$.

Mostremos que $m \models \forall y < y_0 + 1 \varphi(y)$. De fato, seja em m , $y < y_0 + 1$. Como $y_0 < x_0$, então $y_0 + 1 \leq x_0$, logo, $y < x_0$, e como $m \models \forall y < x_0 \varphi(y)$, então $m \models \varphi(y)$. Logo, $m \models \forall y < y_0 + 1 \varphi(y)$, isto é, $m \models \psi(y_0 + 1)$. Portanto,

$$m \models \forall y (\psi(y) \rightarrow \psi(y + 1)).$$

Temos então a seguinte situação:

$$m \models \psi(0) \quad \text{e} \quad m \models \forall y (\psi(y) \rightarrow \psi(y + 1)),$$

e

$$\psi(x) \equiv \forall y < x \varphi(y) \in \Sigma_0,$$

pois $\varphi \in \Sigma_0$. Como $m \models I\Sigma_0$, temos então que $m \models \forall x \psi(x)$, ou seja,

$$m \models \forall x (\forall y < x \varphi(y))$$

e isso implica que $m \models \forall x \varphi(x)$, pois dado $z_0 \in m$, como $m \models \forall x (\forall y < x \varphi(y))$, então $m \models \forall y < z_0 + 1 \varphi(y)$, logo, $m \models \varphi(z_0)$. Portanto, de fato, $m \models \forall x \varphi(x)$, contra $m \not\models \varphi(a)$. Absurdo! Isso prova a Afirmação 1.

Seja então $b \in m$ tal que

$$(1) \quad m \models \forall y < b \varphi(y)$$

e

$$(2) \quad \forall c \in m (m \models b < c \Rightarrow m \not\models \forall y < c \varphi(y)).$$

Afirmação 2: $m \not\models \varphi(b)$.

De fato, se $m \models \varphi(b)$, como de (1) temos $m \models \forall y < b \varphi(y)$, então $m \models \forall y < b+1 \varphi(y)$. Por outro lado, por (2), temos que $m \not\models \forall y < b+1 \varphi(y)$, uma contradição.

Portanto, $m \not\models \varphi(b)$, e isso prova a Afirmação 2.

Afirmação 3: $0 < b \leq a$.

De fato, $b \neq 0$ pela Afirmação 2.

Por outro lado, se $a < b$, por (1) teríamos $m \models \varphi(a)$, mas supomos $m \not\models \varphi(a)$. Portanto $b \leq a$. Isso prova a Afirmação 3.

Como $0 < b \leq a$, então $0 \leq b-1 < a$ e, por (1), temos que $m \models \varphi(b-1)$. Reunimos então a seguinte situação:

$$0 \leq b-1 < a, \quad m \models \varphi(b-1) \quad \text{e} \quad m \not\models \varphi(b),$$

contra a suposição inicial $m \models \forall y < a (\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1))$. Absurdo! Isso mostra que $m \models \Gamma$. Portanto,

$$m \models \Gamma \Leftrightarrow m \models I\Sigma_0.$$

Teorema 9.20 (Parikh) *Seja $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$. Se $P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall x \exists y \varphi(x, y)$, então existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$ tal que*

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall x \exists y \leq t(x) \varphi(x, y).$$

Demonstração: Suponhamos que não, ou seja, para todo termo $t(x) \in \mathcal{L}$:

$$P^- + I\Sigma_0 \not\vdash \forall x \exists y \leq t(x) \varphi(x, y). \quad (*)$$

Seja c uma nova constante.

Afirmção 1: Para todo $t(x)$ de $\mathcal{L}$:

$$(P^- + I\Sigma_0)' \not\models \exists y \leq t(c)\varphi(c, y).$$

De fato, se existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$ tal que $(P^- + I\Sigma_0)' \vdash \exists y \leq t(c)\varphi(c, y)$, então como c é uma nova constante, temos que $P^- + I\Sigma_0 \vdash \exists y \leq t(x)\varphi(x, y)$, de onde, por generalização, obtemos $P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall x \exists y \leq t(x)\varphi(x, y)$ contra $(*)$. Isso prova a Afirmção 1.

Afirmção 2: Existe uma estrutura m tal que

$$m \models (P^- + I\Delta_0)' \sqcup \{\forall y \leq t(c)\neg\varphi(c, y) : t(x) \text{ é termo de } \mathcal{L}\}.$$

De fato, seja $(t_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de todos os termos de $\mathcal{L}$ que contém no máximo a variável x . Mostremos primeiramente que $\forall k \geq 0$, o conjunto

$$(P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t_i(c)\neg\varphi(c, y) : i \leq k\}$$

é consistente.

De fato, suponhamos que não. Seja então $k \geq 0$ tal que

$$(P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t_i(c)\neg\varphi(c, y) : i \leq k\}$$

é inconsistente. Então,

$$(P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t_0(c)\neg\varphi(c, y) \wedge \cdots \wedge \forall y \leq t_k(c)\neg\varphi(c, y)\}$$

é inconsistente, e portanto

$$(P^- + I\Sigma_0)' \vdash \neg (\forall y \leq t_0(c)\neg\varphi(c, y) \wedge \cdots \wedge \forall y \leq t_k(c)\neg\varphi(c, y)),$$

ou seja,

$$(P^- + I\Sigma_0)' \vdash \exists y \leq t_0(c)\varphi(c, y) \vee \cdots \vee \exists y \leq t_k(c)\varphi(c, y),$$

de onde, pelo Lema 9.18, obtemos

$$(P^- + I\Sigma_0)' \vdash \exists y \leq (t_0(c) + \cdots + t_k(c))\varphi(c, y),$$

contra a Afirmação 1.

Isso mostra que $\forall k \geq 0$, o conjunto

$$(P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t_i(c)\neg\varphi(c, y) : i \leq k\}$$

é consistente e, portanto, pelo teorema da completude, admite modelo. Segue pelo teorema da compacidade que o conjunto de sentenças

$$(P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t(c)\neg\varphi(c, y) : t(x) \text{ é termo de } \mathcal{L}\}$$

também admite modelo. Isso prova a Afirmação 2.

Seja então m dado pela Afirmação 2 tal que

$$m \models (P^- + I\Sigma_0)' \sqcup \{\forall y \leq t(c)\neg\varphi(c, y) : t(x) \text{ é termo de } \mathcal{L}\}$$

e consideremos o seguinte conjunto:

$$\eta = \{a \in m : m \models a \leq t(c), \text{ para algum termo } t(x) \text{ de } \mathcal{L}\}.$$

Afirmação 3: A seguinte definição é uma interpretação de $\mathcal{L}' = \{0, 1, c, +, \cdot, \leq\}$ em η :

$$0^\eta = 0^m; \quad 1^\eta = 1^m; \quad c^\eta = c^m;$$

$$+^\eta = +^m|_\eta; \quad \circ^\eta = \circ^m|_\eta; \quad \leq^\eta = \leq^m|_\eta \quad (\text{restrições à } \eta).$$

De fato, notemos primeiramente que $0^m, 1^m, c^m \in \eta$, pois

$$m \models 0^m \leq 0, \quad m \models 1^m \leq 1 \quad \text{e} \quad m \models c^m \leq c.$$

Basta agora mostrar que $+^\eta$ e $\circ^\eta$ são fechadas em η . Sejam então $a, b \in \eta$. Então existem termos $t_1(x)$ e $t_2(x)$ de $\mathcal{L}$ tais que

$$m \models a \leq t_1(c) \quad \text{e} \quad m \models b \leq t_2(c).$$

Tomando o termo $t_1(x) + t_2(x)$, teremos então que $m \models a + b \leq t_1(c) + t_2(c)$ e, portanto, $a + b \in \eta$.

Analogamente, $a.b \in \eta$. Isso prova a Afirmação 3.

Afirmação 4: η é subestrutura de m .

De fato, pela definição dada na Afirmação 3, temos que

$$0^\eta = 0^m, \quad 1^\eta = 1^m \quad \text{e} \quad c^\eta = c^m.$$

Também temos trivialmente que para todo $a, b \in \eta$,

$$a +^\eta b = a +^m b \mid_\eta b = a +^m b$$

$$a \circ^\eta b = a \circ^m b \mid_\eta b = a \circ^m b$$

$$\text{e} \quad a \leq^\eta b \Leftrightarrow a \leq^m b \mid_\eta b \Leftrightarrow a \leq^m b.$$

Isso prova a Afirmação 4.

Afirmação 5: Se $\varphi(x) \in \Sigma_0$, então para todo $a \in \eta$,

$$m \models \varphi[a] \Leftrightarrow \eta \models \varphi[a].$$

De fato, mostremos por indução no comprimento de φ :

- Se φ é atômica, então para todo $a \in \eta$,

$$m \models \varphi[a] \Leftrightarrow \eta \models \varphi[a],$$

pela Afirmação 4.

- Se φ é $\neg\psi$, então para todo $a \in \eta$,

$$m \models \varphi[a] \Leftrightarrow m \models \neg\psi[a] \Leftrightarrow m \not\models \psi[a]$$

$$\text{hip. indução} \Leftrightarrow \eta \not\models \psi[a] \Leftrightarrow \eta \models \neg\psi[a] \Leftrightarrow \eta \models \varphi[a].$$

- Se φ é $\psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 \vee \psi_2$ ou $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, a prova é análoga ao caso anterior.

- Se φ é $\forall y \leq x \psi(y)$ e $a \in \eta$,

$$(\Rightarrow) m \models \varphi[a] \Leftrightarrow m \models \forall y \leq a \psi(y)$$

$$\Leftrightarrow \text{para todo } b \in m \text{ com } b \leq^m a : m \models \psi[b]$$

$$\stackrel{\eta \subseteq m}{\Rightarrow} \text{para todo } b \in \eta, \text{ com } b \leq^\eta a : m \models \psi[b]$$

$$\text{Hip. indução} \Leftrightarrow \text{para todo } b \in \eta, \text{ com } b \leq^\eta a : \eta \models \psi[b]$$

$$\Leftrightarrow \eta \models \forall y \leq a \psi(y) \Leftrightarrow \eta \models \varphi[a].$$

($\Leftarrow$) Primeiramente, uma observação: se $a \in \eta$ e $b \in m$, com $b \leq^m a$, então $b \in \eta$, pois como $a \in \eta$, então para algum termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$, $m \models a \leq t(c)$ e, portanto, $m \models b \leq t(c)$, ou seja, $b \in \eta$.

Suponhamos então que $\eta \models \forall y \leq a \psi(y)$. Devemos mostrar que $m \models \forall y \leq a \psi(y)$. Seja dado $b \in m$ tal que $b \leq^m a$. Como $a \in \eta$, pela observação acima,

temos que $b \in \eta$ e, então, $b \leq^\eta a$. Como $\eta \models \forall y \leq a \psi(y)$, temos então que $\eta \models \psi[b]$.

Como $b \in \eta$, por hipótese de indução temos que $m \models \psi[b]$. Portanto,

$$m \models \forall y \leq a \psi(y), \text{ isto é, } m \models \varphi[a].$$

- Se φ é $\exists y \leq x \psi(y)$, então para todo $a \in \eta$,

$(\Rightarrow)$ $m \models \varphi[a] \Leftrightarrow m \models \exists y \leq a \psi(y) \Leftrightarrow$ existe $b \in m$ com $b \leq^m a : m \models \psi[b]$. Como $b \in m$, $a \in \eta$ e $b \leq^m a$, pela observação no item anterior, segue que $b \in \eta$, com $b \leq^\eta a$. Portanto, existe $b \in \eta$, com $b \leq^\eta a$. Portanto, existe $b \in \eta$ com $b \leq^\eta a : m \models \psi[b]$. Por hipótese de indução, $\eta \models \psi[b]$. Então existe $b \in \eta$ com $b \leq^\eta a : \eta \models \psi[b]$, ou seja, $\eta \models \exists y \leq a \psi(y)$, ou ainda, $\eta \models \varphi[a]$.

$(\Leftarrow)$ $\eta \models \varphi[a] \Leftrightarrow \eta \models \exists y \leq a \psi(y) \Leftrightarrow$ existe $b \in \eta$ com $b \leq^\eta a : \eta \models \psi[b] \xrightarrow{\eta \subseteq m} \text{existe}$
 $b \in m$ com $b \leq^m a : \eta \models \psi[b] \xrightarrow{\text{Hip. indução}} \text{existe } b \in m$ com $b \leq^m a : m \models \psi[b]$
 $\Leftrightarrow m \models \exists y \leq a \psi(y) \Leftrightarrow m \models \varphi[a]$.

Isso prova a Afirmação 5.

Afirmação 6: $\eta \models P^-$.

De fato, os axiomas 1–13 de P^- pertencem à Σ_0 , portanto, pela Afirmação 5, são satisfeitas em η . Resta mostrar que o Axioma 14, a saber,

$$x < y \rightarrow \exists z (z + x + 1 = y)$$

também é satisfeito em η .

Sejam $a, b \in \eta$ tal que $\eta \models a < b$. Então, pela Afirmação 5, $m \models a < b$. Como $m \models P^-$ e, em particular, m satisfaz o Axioma 14, segue que $m \models \exists z(z + a + 1 = b)$. Seja $k \in m$ tal que $m \models k + a + 1 = b$. Decorre do Axioma 13 que $m \models k < k + a + 1$. Portanto, $m \models k < b$. Mas $b \in \eta$, logo, existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$ tal que $m \models b < t(c)$ e, portanto, temos que $m \models k < t(c)$, ou seja, $k \in \eta$. Portanto, $\eta \models \exists z(z + a + 1 = b)$ e o Axioma 14 é verdadeiro em η .

Isso prova a Afirmação 6.

Afirmação 7: $\eta \models \forall y \neg \varphi(c, y)$.

De fato, suponha que $\eta \not\models \forall y \neg \varphi(c, y)$, ou seja, $\eta \models \exists y \varphi(c, y)$. Então existe $a \in \eta$ tal que $\eta \models \varphi(c, a)$. Como $a \in \eta$, existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$ tal que $m \models a \leq t(c)$.

Segue da Afirmação 5 que $\eta \models a \leq t(c)$. Portanto, existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\eta \models \exists y \leq t(c) \varphi(c, y)$.

Como $\varphi \in \Sigma_0$, então $\exists y \leq t(c) \varphi(c, y) \in \Sigma_0$, então pela Afirmação 5, temos que

$$m \models \exists y \leq t(c) \varphi(c, y).$$

Por outro lado, da Afirmação 2, temos que

$$m \models \forall y \leq t(c) \neg \varphi(c, y),$$

ou seja, $m \not\models \exists y \leq t(c) \varphi(c, y)$, uma contradição.

Isso prova a Afirmação 7.

Afirmação 8: $\eta \models I\Sigma_0$.

De fato, consideremos o conjunto

$$\Gamma = \{\forall x [\varphi(0) \wedge \forall y < x (\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1)) \rightarrow \varphi(x)] : \varphi \in \Sigma_0\}.$$

Mostremos primeiramente que $\eta \models \Gamma$.

Seja $\psi(x)$ a seguinte fórmula:

$$\varphi(0) \wedge \forall y < x (\varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1)) \rightarrow \varphi(x),$$

onde $\varphi \in \Sigma_0$. Devemos mostrar que $\eta \models \forall x \psi(x)$.

Seja $a \in \eta$. Como $m \models (P^- + I\Sigma_0)'$. Então, $m \models P^- + I\Delta_0$ e, pelo Lema 9.19, $m \models \Gamma$. Logo, $m \models \forall x \psi(x)$ e como $\eta \subseteq m$, então $a \in m$ e, portanto, $m \models \psi[a]$. Observando que $\psi \in \Sigma_0$ e $a \in \eta$, pela Afirmação 5, segue que $\eta \models \psi[a]$. Então, $\eta \models \forall x \psi(x)$ e isso mostra que $\eta \models \Gamma$. Também, pela Afirmação 6, $\eta \models P^-$. Portanto, pelo Lema 9.19, segue que $\eta \models I\Sigma_0$.

Isso prova a Afirmação 8.

Podemos agora finalizar a demonstração do Teorema 9.20. A hipótese do Teorema de Parikh é

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall x \exists y \varphi(x, y),$$

donde $(P^- + I\Sigma_0)' \vdash \exists y \varphi(c, y)$.

Pelas Afirmações 6 e 8, temos que $\eta \models P^- + I\Sigma_0$. Logo, $\eta \models (P^- + I\Delta_0)'$ e, portanto, $\eta \models \exists y \varphi(c, y)$.

Por outro lado, pela Afirmação 7, temos que

$$\eta \models \forall y \neg \varphi(c, y),$$

ou seja,

$$\eta \not\models \exists y \varphi(c, y),$$

uma contradição. Portanto, existe um termo $t(x)$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall x \exists y \leq t(x) \varphi(x, y).$$

9.3 O teorema de Wilkie

Lema 9.21 *Seja $L \subseteq \Sigma^*$ e $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ uma função computável em tempo polinomial, e seja*

$$Q = \{x \in \Sigma^* : f(x) \in L\}.$$

Então,

$$a) \ L \in \mathbf{P} \Rightarrow Q \in \mathbf{P};$$

$$b) \ L \in \mathbf{NP} \Rightarrow Q \in \mathbf{NP}.$$

Demonstração: Seja T_f uma DTM que calcula f e $p(x)$ um polinômio tal que $\forall x \in \Sigma^* :$
 $\theta_{T_f}(x) \leq p(|x|).$

a) Seja T uma DTM que aceita L e $q(x)$ um polinômio tal que se $x \in L$, então

$$\theta_T(x) \leq q(|x|).$$

Observando que uma DTM não pode imprimir mais símbolos que o número total de passos na computação, temos que

$$|f(x)| \leq |x| + p(|x|)$$

(a presença do termo $|x|$ é devida à entrada x já impressa na fita).

Se $s(n) = n$, podemos ainda escrever

$$|f(x)| \leq s(|x|) + p(|x|).$$

E lembrando que os polinômios considerados têm coeficientes positivos, temos então que

$$\theta_T(f(x)) \leq q(|f(x)|) \leq q(r(|x|) + p(|x|)). \quad (*)$$

Agora uma DTM R que aceita $Q = \{x \in \Sigma^* : f(x) \in L\}$ pode ser facilmente construída: para $x \in \Sigma^*$, por meio da DTM T_f calculamos $f(x)$ com $\theta_{T_f}(x) \leq p(|x|)$.

Depois utilizamos a DTM T para determinar se $f(x) \in L$ com

$$\theta_T(f(x)) \stackrel{(*)}{\leq} q(r(|x|) + p(|x|)).$$

Então, a DTM R aceita Q , com

$$\theta_R(x) \leq p(|x|) + q(r(|x|) + p(|x|)).$$

Portanto, $Q \in \mathbf{P}$.

- b) A demonstração é análoga à parte a), substituindo a DTM que aceita L por uma NDTM que aceita L .

Lema 9.22 *Se existe uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ tal que L é coNP-completo e $L \in \mathbf{NP}$, então $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.*

Demonstração: Notação: se $S \in \Sigma^*$, $S^c = \Sigma^* \setminus S$.

- Mostremos que $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{coNP}$.

Seja $S \in \mathbf{NP}$. Então, $S^c \in \mathbf{coNP}$ e como L é coNP-completo, temos que $S^c \leq_p L$, ou seja, existe uma função $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ computável em tempo polinomial tal que

$$x \in S^c \leftrightarrow f(x) \in L.$$

Seja $Q = \{x \in \Sigma^* : f(x) \in L\}$. Como por hipótese $L \in \mathbf{NP}$, pelo Lema 9.21, temos que $Q \in \mathbf{NP}$. Então,

$$x \in Q \leftrightarrow f(x) \in L \leftrightarrow x \in S^c.$$

Portanto, $Q = S^c$, e como $Q \in \mathbf{NP}$, então $S^c \in \mathbf{NP}$, logo, $S \in \mathbf{coNP}$. Isso mostra que $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{coNP}$.

- Mostremos agora que $\mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{NP}$.

Seja $S \in \mathbf{coNP}$. Como L é coNP-completo, então $S \leq_p L$, ou seja, existe uma função $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ computável em tempo polinomial tal que

$$x \in S \leftrightarrow f(x) \in L.$$

Seja $Q = \{x \in \Sigma^* : f(x) \in L\}$. Como por hipótese $L \in \mathbf{NP}$, pelo Lema 9.21, temos que $Q \in \mathbf{NP}$. Então,

$$x \in Q \leftrightarrow f(x) \in L \leftrightarrow x \in S.$$

Portanto, $Q = S$ e como $Q \in \mathbf{NP}$, então $S \in \mathbf{NP}$.

Isso mostra que $\mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{NP}$. Portanto, $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$.

Lema 9.23 *Uma linguagem L é $\mathbf{NP}$ -completa se e somente se L^c é $\mathbf{coNP}$ -completa.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que L é $\mathbf{NP}$ -completa. Seja $Q \in \mathbf{coNP}$. Então $Q^c \in \mathbf{NP}$ e $Q^c \leq_p L$, ou seja, existe uma função f computável em tempo polinomial tal que $x \in Q^c \leftrightarrow f(x) \in L$, ou seja, $x \in Q \leftrightarrow f(x) \in L^c$. Portanto, $L^c \in \mathbf{coNP}$ e para toda linguagem $Q \in \mathbf{coNP}$, $Q \leq_p L^c$, isto é, L^c é $\mathbf{coNP}$ -completa.

A recíproca é mostrada de forma análoga.

Lema 9.24 *Seja $t(x, y, z)$ um termo de $\mathcal{L}$ e $P(x, y, z, \vec{z})$ e $Q(x, y, z, \vec{z})$ polinômios com coeficientes positivos. Então o problema*

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \exists \vec{z} \leq t(a, b, c) P(a, b, c, \vec{z}) = Q(a, b, c, \vec{z})\}$$

é $\mathbf{NP}$.

Demonstração: (Esboço)

Codificando convenientemente n -uplas de números naturais, por exemplo em linguagem binária, e lembrando que uma linguagem $L \in \mathbf{NP}$ se e somente se existem um polinômio $p(x)$ e uma linguagem $L' \in \mathbf{P}$ tal que

$$x \in L \leftrightarrow \exists y(|y| \leq p(|x|) \wedge (x, y) \in L'),$$

podemos ver que o problema $S \in \mathbf{NP}$, já que o limitante $t(x, y, z)$ é um termo de $\mathcal{L}$ e, portanto, um polinômio. Além disso, o cálculo de um polinômio, bem como a verificação de uma igualdade podem ser feitas em tempo polinomial

Portanto, $S \in \mathbf{NP}$.

Temos agora os pré-requisitos para enunciar e esboçar uma prova do principal resultado deste capítulo.

O cerne do MRDP consiste em mostrar que toda fórmula $\varphi \in \Sigma_1$ é equivalente a uma fórmula diofantina. Aqui, provar o MRDP em $I\Sigma_0$ significa que para toda fórmula $\varphi \in \Sigma_1$ existe uma fórmula diofantina ψ , tal que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Para provar o teorema de Wilkie, vamos usar um resultado obtido por Manders e Adleman que apresentamos a seguir, omitindo a demonstração, que pode ser encontrada em [7].

Teorema 9.25 (Manders–Adleman) *O problema*

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \exists x \leq c \exists y \leq c (ax^2 + by = c)\}$$

é $\mathbf{NP}$ -completo.

Teorema 9.26 (Wilkie) *Se o MRDP puder ser provado em $I\Sigma_0$, então $\text{NP} = \text{coNP}$.*

Demonstração: A fórmula $\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \in \Sigma_1$. Se o MRDP puder ser provado em $I\Sigma_0$, então existem polinômios $P(x, y, z, \vec{w})$ e $Q(x, y, z, \vec{w})$ tais que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \leftrightarrow \exists \vec{w} (P(a, b, c, \vec{w}) = Q(a, b, c, \vec{w})) \right],$$

de onde obtemos (daqui para frente, vamos omitir as variáveis $a, b, c, \vec{w}$ dos polinômios $P(a, b, c, \vec{w})$ e $Q(a, b, c, \vec{w})$):

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow \exists \vec{w} (P = Q) \right]$$

e

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \left[\exists \vec{w} (P = Q) \rightarrow \forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \right]$$

Vamos analisar cada uma das implicações:

- Se $P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow \exists \vec{w} (P = Q) \right]$.

Tomando $\vec{w}$ distintas de a, b, c , obtemos

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \exists \vec{w} \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow P = Q \right].$$

Como $\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow P = Q$ é uma Σ_0 -fórmula, pelo Teorema de Parikh existe um termo $t(a, b, c)$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \exists \vec{w} \leq t(a, b, c) \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow P = Q \right]$$

isso implica

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c \left[\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \rightarrow \exists \vec{w} \leq t(a, b, c) (P = Q) \right].$$

Por outro lado,

- se $P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c [\exists \vec{w}(P = Q) \rightarrow \forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c)]$. Como

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \exists \vec{w} \leq t(a, b, c)(P = Q) \rightarrow \exists \vec{w}(P = Q),$$

teremos que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c [\exists \vec{w} \leq t(a, b, c)(P = Q) \rightarrow \forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c)].$$

Mostramos portanto que

$$P^- + I\Sigma_0 \vdash \forall a, b, c [\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \leftrightarrow \exists \vec{w} \leq t(a, b, c)(P = Q)].$$

Consideremos agora os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} R &= \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c)\} \quad \text{e} \\ S &= \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \exists \vec{w} \leq t(a, b, c)(P = Q)\}. \end{aligned}$$

Notemos então que pelo Teorema de Manders-Adleman o conjunto R^c é **NP**-completo e, portanto, pelo Lema 9.23, R é **coNP**-completo, e pelo Lema 9.24, $S \in \mathbf{NP}$.

Por outro lado, como $\mathbb{N} \models P^- + I\Sigma_0$, então

$$\mathbb{N} \models \forall a, b, c [\forall x \leq c \forall y \leq c(ax^2 + by \neq c) \leftrightarrow \exists \vec{w} \leq t(a, b, c)(P = Q)],$$

e isso mostra que $R = S$.

Portanto, $R \in \mathbf{NP}$ e é **coNP**-completo. Pelo Lema 9.22, temos então que

$$\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}.$$

Referências bibliográficas

- [1] M. DAVIS. Hilbert's tenth problem is insolvable. *Am. Math. Monthly.* (March 1973), 233–269.
- [2] M. DAVIS, H. PUTNAM, J. ROBINSON. The decision problem for exponential diophantine equations. *Ann. Math.*, **74** (1961), 425–436.
- [3] H. GAIFMAN, C. DIMITRACOPOULOS. Fragments of Peano's arithmetic and the MRDP theorem. Collection: *Logic and Algorithmic*, Zurich (1980), 187–206.
- [4] G.H. HARDY and E. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 4.ed. Oxford University Press (1960).
- [5] J.P. JONES, Y. MATYASEVIC. Proof of recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem. *Am. Math. Monthly*, **98**(8) (1991), 689–709.
- [6] S.C. KLEENE. *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, New York (1952).
- [7] K.L. MANDERS, L. ADLEMAN. NP-complete decision problems for binary quadratics. *J. Comp. Syst. Sci.*, **16** (1978), 168–184.
- [8] Y.V. MATYASEVIC. Enumerable sets are diophantine. *Doklady Akademii Nauk, SSSR*, **191** (1970), 279–282.
- [9] YURI MATYASEVIC. Diophantine representation of enumerable predicates (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **35** (1971), 3–30.
- [10] R. PARIKH. Existence of feasibility in arithmetic. *J. Symb. Logic*, **36** (1971), 494–508.
- [11] JÚLIA ROBINSON. Existential definability in arithmetic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 437–449.

- [12] H. ROGERS. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York (1967).
- [13] A.J. WILKIE. Applications of complexity theory to Σ_0 -definability problems in arithmetic. In: Pacholski et al., eds., *Model Theory, Algebra and Arithmetic*, Proc. Karpacz, Poland (1979). *Lect. Notes in Math.*, **834**, Springer, Berlin (1980), 363–369.