**Sobre a estrutura e a classificação
dos espaços sub-simétricos de
codimensão maior que um.**

Dulce Mary de Almeida

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria diferencial**
Orientador: **Prof. Dr. Cláudio Gorodski**
Co-orientador: **Prof. Dr. José Antonio Verderesi**

-São Paulo, abril de 2000-

Sobre a estrutura e a classificação
dos espaços sub-simétricos de
codimensão maior que um

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida
defendida por Dulce Mary de Almeida
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 26 de abril de 2.000

Banca examinadora:

- Prof. Dr. José Antonio Verderesi (Presidente) - IME - USP
- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito - IME - USP
- Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii - UFMG
- Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso - UFPA

Resumo

O tema central desta tese é o estudo sobre a estrutura e a classificação dos espaços sub-simétricos de codimensão maior que um.

Este trabalho foi motivado pelo interesse em analisar, para codimensões mais altas, resultados de classificação existentes para espaços sub-simétricos munidos com distribuições de contato.

Entre os resultados originais obtidos, têm-se:

- Um teorema de existência e unicidade de uma conexão adaptada definida sobre uma variedade Riemanniana munida com distribuição. Neste contexto, apresenta-se também, uma lista de invariantes geométricos associados a esta conexão e um teorema de equivalência para variedades homogêneas adaptadas.
- A classificação completa dos espaços sub-simétricos simplesmente conexos equipados com distribuição de Engel. A metodologia utilizada para este fim consiste em linearizar a estrutura sub-Riemanniana através de uma classe especial de álgebras de Lie involutivas e investigar invariantes geométricos associados.
- A classificação dos espaços sub-simétricos simplesmente conexos, de dimensão sete, munidos de distribuição fortemente geradora por colchetes de codimensão três, que admitem um grupo de Lie de sub-isometrias, nilpotente, agindo transitivamente.
- Exemplos quaterniônicos de espaços sub-simétricos cuja distribuição associada é fortemente geradora por colchetes de codimensão três e alguns resultados pertinentes.

Abstract

The main subject of this thesis is a study of the structure and classification of the sub-symmetric spaces of codimension greather than one.

It was motivated by some previous results of classification for sub-symmetric spaces with contact distributions.

Some of the original results of this work are:

- An existence and uniqueness theorem for an adapted connection defined on a Riemannian manifold equipped with distributions. In this context, one also shows a list of geometrical invariants associated to this adapted connection. It is also proved one equivalence theorem for adapted homogeneous manifolds.
- The complete classification of the simply-connected sub-symmetric spaces equipped with the Engel distributions. The method used for this classification consists of linearizing the sub-Riemannian structure via a special class of involutive Lie algebras and investigating associated geometrical invariants.
- A classification of the simply-connected sub-symmetric spaces in dimension seven which admit a transitive nilpotent Lie group of sub-isometries and are equipped with fat distributions in codimension three.
- Some examples of quaternionic sub-symmetric spaces, whose associated distributions are fat, and some pertinent results.

À minha mãe, *Cleusa*,
e ao meu filho, *Heitor*.
Eu os amo imensamente
e para sempre.

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Dr. Cláudio Gorodski pela sugestão do problema de tese e pela orientação.

Ao prof. Dr. José Antonio Verderesi pela co-orientação. Seria muito difícil concluir este trabalho sem sua ajuda.

A Daniel Tausk pela ajuda em diversos pontos deste trabalho.

A Gladys pela correção tipográfica.

A Alice pela tradução do resumo e pelas palavras de estímulo.

A meus irmãos Lucia, Luciana, Ricardo e Jean Carlo pelo carinho e pela torcida.

A memória de meu pai, Valdivino, pelo seu jeito torto de fazer as coisas certas.

A meu esposo, Jeo, pela compreensão. Não tenho palavras para agradecê-lo pela função dupla de pai e mãe. Que Deus vos abençoe por isso.

Aos amigos circunstanciais e não circunstanciais, do IME e extra IME, com quem partilhei um pouco de mim mesma nestes últimos cinco anos.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A Deus pela minha vida e pelo muito que tem me dado.

Conteúdo

Introdução	1
1 Variedades Riemannianas com distribuição	3
1.1 Conexão adaptada a uma variedade Riemanniana com distribuição	3
1.2 Equivalência entre variedades homogêneas adaptadas	7
1.3 Invariantes geométricos	11
2 Espaços sub-simétricos com distribuição de Engel	14
2.1 Distribuição de Engel	14
2.2 Espaços simétricos sub-Riemannianos de tipo Engel e álgebras de Lie involutivas associadas	16
2.3 A classificação dos espaços sub-simétricos com distribuição de Engel	20
3 Estrutura dos espaços sub-simétricos com distribuição fortemente geradora por colchetes	29
3.1 Distribuição fortemente geradora por colchetes	29
3.2 Métrica associada a uma variedade sub-Riemanniana com distribuição fortemente geradora por colchetes	30
3.3 Espaços sub-simétricos e álgebras de Lie involutivas sub-ortogonais associadas	35
3.4 Métrica canônica no caso sub-simétrico	40
3.5 Sub-torções no caso sub-simétrico	43
4 Espaços sub-simétricos de codimensão três com distribuição fortemente geradora por colchetes	45
4.1 Classificação dos espaços sub-simétricos em dimensão sete com grupo de isometrias nilpotente	45
4.2 Exemplos quaterniônicos	49
Bibliografia	61

Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar a estrutura e a classificação dos espaços simétricos sub-Riemannianos equipados com distribuição geradora por colchetes de codimensão maior que um.

Este trabalho nasceu do interesse em analisar, para codimensões mais altas, o comportamento de resultados de classificação existentes para o caso de distribuição de contato, uma vez que neste caso a distribuição em questão tem necessariamente codimensão um. Mais especificamente, foi motivado pela seguinte seqüência de resultados:

(1.986, [10]) Strichartz classificou completamente os espaços simétricos sub-Riemannianos de contato de dimensão três.

(1.996, [3]) Falbel e Gorodski ampliaram a classificação dada por Strichartz aos espaços homogêneos sub-Riemannianos de contato de dimensão três e aos espaços sub-simétricos de contato ímpar de dimensão quatro.

(1.995-8, [1], [2], [4]) Bieliavsky, Falbel, Gorodski e Rumin classificaram completamente os espaços simétricos sub-Riemannianos de contato.

No primeiro capítulo, demonstramos a existência e unicidade de uma conexão definida sobre uma variedade Riemanniana com distribuição e adaptada à distribuição. Esta conexão pode ser considerada como uma generalização da conexão adaptada definida em ([1], [5]) para variedades sub-Riemannianas equipadas com distribuição de contato. Listamos também, alguns invariantes geométricos associados a esta conexão e provamos um teorema de equivalência para variedades homogêneas adaptadas. Convém enfatizar que este capítulo tem um caráter bastante abrangente, uma vez que se aplica a todas as variedades sub-Riemannianas cuja métrica sub-Riemanniana possui uma extensão Riemanniana intrínseca.

No capítulo 2, apresentamos a classificação completa dos espaços simétricos sub-Riemannianos $(M, \mathcal{D}, g)$, simplesmente conexos, 4-dimensionais, com distribuição $\mathcal{D}$ regular e geradora por colchetes de codimensão dois. Neste caso, necessariamente, $\mathcal{D}$ possui vetor de crescimento $(2, 3, 4)$, isto é, para todo ponto $p \in M$ tem-se $\dim(\mathcal{D}^2)_p = 3$ e $(\mathcal{D}^3)_p = T_p M$

onde $(\mathcal{D}^2)_p$ é o subespaço de $T_p M$ gerado por todos os colchetes de seções de $\mathcal{D}$ avaliados no ponto p e $(\mathcal{D}^3)_p$ é o subespaço de $T_p M$ gerado por todos os colchetes do tipo $[X, [Y, Z]]_p$ com X, Y e Z seções de $\mathcal{D}$. Uma distribuição $\mathcal{D}$ com estas propriedades é denominada distribuição de Engel. Sob estas hipóteses provamos que M é um grupo de Lie G com estrutura sub-Riemanniana invariante à esquerda $(\mathcal{D}, g)$ e cuja álgebra de Lie é involutiva, e elaboramos uma lista completa de possibilidades para $G, \mathcal{D}$ e g . Para distinguir dentre as possíveis distribuições $\mathcal{D}$ e métricas g aquelas que originavam estruturas sub-Riemannianas equivalentes, encontramos um paralelismo definido sobre uma variedade sub-Riemanniana arbitrária com estrutura de tipo Engel, isso nos permitiu associar invariantes geométricos. Finalmente, os resultados obtidos da investigação desses invariantes no caso de um espaço sub-simétrico tornou possível fechar completamente a referida classificação.

No terceiro capítulo, definimos distribuições fortemente geradoras por colchetes e observamos que esta é a generalização natural de distribuições de contato. Apresentamos para variedades sub-Riemannianas munidas com este tipo de distribuição a construção de uma métrica Riemanniana, que estende canonicamente a métrica sub-Riemanniana. É importante destacar que esta construção se encontra em ([13], seção 7), e os resultados aqui apresentados correspondem apenas a uma reinterpretação um pouco mais minuciosa. Provamos também um teorema de estrutura para espaços sub-simétricos cuja distribuição associada é deste tipo, via álgebras de Lie involutivas sub-ortogonais e utilizamos esta estrutura para caracterizar, no caso sub-simétrico, a métrica Riemanniana canônica e os invariantes definidos no primeiro capítulo.

Finalmente, no quarto e último capítulo, apresentamos alguns exemplos de espaços sub-simétricos $(M, \mathcal{D}, g)$ equipados com distribuições fortemente geradoras por colchetes de codimensão três. A primeira classe de exemplos é obtida em dimensão sete, com a hipótese adicional da existência de um grupo de Lie nilpotente de sub-isometrias agindo diferenciavelmente e transitivamente em M . Neste contexto, provamos que M é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie possui uma estrutura involutiva bastante particular, e esta particularidade tornou possível a classificação neste caso. Os demais exemplos correspondem a uma $Sp(1)$ -fibrção sobre espaços simétricos Riemannianos equipados com estrutura quaterniônica e foram motivados pela técnica de se construir espaços sub-simétricos de contato, simplesmente conexos, irredutíveis, como S^1 -fibrção sobre espaços simétricos Hermitianos irredutíveis.

Capítulo 1

Variedades Riemannianas com distribuição

Neste capítulo demonstraremos a existência e unicidade de uma conexão adaptada a uma variedade Riemanniana com distribuição e apresentaremos alguns invariantes geométricos associados. Provaremos também um teorema de equivalência para variedades homogêneas adaptadas.

1.1 Conexão adaptada a uma variedade Riemanniana com distribuição

No que segue, $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denota uma variedade Riemanniana munida de uma distribuição $\mathcal{D}$ (ie, $\mathcal{D}$ é um subfibrado do fibrado tangente TM) de dimensão n e codimensão d e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana definida em M .

Seja $\mathcal{D}^\perp$ a distribuição em M que a cada ponto $x \in M$ associa o complemento ortogonal à $\mathcal{D}_x$ em $T_x M$. A métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida sobre M , possibilita definir de modo natural e de maneira única uma conexão sobre M adaptada a $\mathcal{D}$. Esta conexão, em analogia com a conexão Levi-Civita da geometria Riemanniana, é uma conexão com torção (em geral não nula) que preserva as distribuições $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^\perp$ e é compatível com a métrica.

Mais precisamente, seja $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com distribuição e sejam $\underline{TM}$, $\underline{\mathcal{D}}$ e $\underline{\mathcal{D}^\perp}$ o conjunto das seções de TM , $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^\perp$ respectivamente, então

Teorema 1.1 *Existe uma única conexão $\nabla : \underline{TM} \rightarrow \underline{TM}^* \odot \underline{TM}$, denominada a conexão adaptada, e unicamente dois tensores $\tau : \underline{\mathcal{D}^\perp} \odot \underline{\mathcal{D}} \rightarrow \underline{\mathcal{D}}$ e $\sigma : \underline{\mathcal{D}} \odot \underline{\mathcal{D}^\perp} \rightarrow \underline{\mathcal{D}^\perp}$ simétricos na segunda variável, denominados as sub-torções, com as seguintes propriedades (T é o tensor torção da conexão):*

- a. $\nabla_U : \underline{\mathcal{D}} \rightarrow \underline{\mathcal{D}} \quad , \quad \nabla_U : \underline{\mathcal{D}}^\perp \rightarrow \underline{\mathcal{D}}^\perp ;$
b. $\nabla \langle \cdot, \cdot \rangle = 0 ;$
c. $T(\xi, X) = \tau_\xi(X) + \sigma_X(\xi),$
 $T(X, Y) = -[X, Y]^\perp,$
 $T(\xi, \eta) = -[\xi, \eta]^\top.$

para todo $X, Y \in \underline{\mathcal{D}}; \xi, \eta \in \underline{\mathcal{D}}^\perp$ e $U \in \underline{TM}$, onde $[X, Y]^\perp$ denota a projeção de $[X, Y]$ em $\underline{\mathcal{D}}^\perp$ e $[\xi, \eta]^\top$ denota a projeção de $[\xi, \eta]$ em $\underline{\mathcal{D}}$.

Prova:

Sejam $X, Y, Z \in \underline{\mathcal{D}}$ e $\xi, \eta, \zeta \in \underline{\mathcal{D}}^\perp$. Em analogia com a conexão Levi-Civita, $\nabla_X Y$ e $\nabla_\eta \xi$ são unicamente determinados usando a. b., c. e a permutação cíclica, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle &= \\ 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] + T(X, Z) \rangle & \\ + \langle X, [Y, Z] + T(Y, Z) \rangle + \langle Z, [Y, X] + T(Y, X) \rangle & \\ = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z]^\top \rangle + \langle X, [Y, Z]^\top \rangle + \langle Z, [Y, X]^\top \rangle & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \langle \xi, \zeta \rangle + \xi \langle \zeta, \eta \rangle - \zeta \langle \eta, \xi \rangle &= \\ 2 \langle \nabla_\eta \xi, \zeta \rangle + \langle \xi, [\eta, \zeta] + T(\eta, \zeta) \rangle & \\ + \langle \eta, [\xi, \zeta] + T(\zeta, \xi) \rangle + \langle \zeta, [\xi, \eta] + T(\xi, \eta) \rangle & \\ = 2 \langle \nabla_\eta \xi, \zeta \rangle + \langle \xi, [\eta, \zeta]^\perp \rangle + \langle \eta, [\xi, \zeta]^\perp \rangle + \langle \zeta, [\xi, \eta]^\perp \rangle & \end{aligned}$$

Para definir $\nabla_\xi X$ e $\nabla_X \xi$, lembramos que $\nabla_\xi X - \nabla_X \xi = [\xi, X] + T(\xi, X)$, portanto

$$\begin{aligned} \nabla_\xi X &= (\nabla_\xi X - \nabla_X \xi)^\top \\ &= ([\xi, X] + T(\xi, X))^\top = [\xi, X]^\top + \tau_\xi(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= -(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi)^\perp \\ &= -([\xi, X] + T(\xi, X))^\perp = -[\xi, X]^\perp - \sigma_X(\xi) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \xi \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_\xi X, Y \rangle + \langle X, \nabla_\xi Y \rangle \\ &= \langle [\xi, X]^\top + \tau_\xi(X), Y \rangle + \langle X, [\xi, Y]^\top + \tau_\xi(Y) \rangle \\ &= 2 \langle \tau_\xi(X), Y \rangle + \langle [\xi, X]^\top, Y \rangle + \langle [\xi, Y]^\top, X \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
X \langle \xi, \eta \rangle &= \langle \nabla_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle \\
&= \langle -[\xi, X]^\perp - \sigma_X(\xi), \eta \rangle + \langle \xi, -[\eta, X]^\perp - \sigma_X(\eta) \rangle \\
&= -2 \langle \sigma_X(\xi), \eta \rangle - \langle [\xi, X]^\perp, \eta \rangle - \langle [\eta, X]^\perp, \xi \rangle
\end{aligned}$$

determinam $\tau_\xi(X)$ e $\sigma_X(\xi)$ unicamente.

□

Observação 1.1 Se $\bar{\nabla}$ denota a conexão Levi-Civita relativa à métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$ e $\nabla_\xi \zeta = (\bar{\nabla}_\xi \zeta)^\perp \ \forall X, Y \in \mathcal{D}; \ \forall \xi, \zeta \in \mathcal{D}^\perp$ (onde $(\bar{\nabla}_X Y)^\top$ denota a projeção de $\bar{\nabla}_X Y$ em $\mathcal{D}$ e $(\bar{\nabla}_\xi \zeta)^\perp$ denota a projeção de $\bar{\nabla}_\xi \zeta$ em $\mathcal{D}^\perp$).

No teorema seguinte daremos uma versão local do teorema anterior no contexto de formas. Por simplicidade de notação, a partir deste momento fica implícito (salvo menção ao contrário) que os índices latinos i, j, s variam de 1 a n e os índices gregos α, β, γ variam de $n+1$ a $n+d$.

Teorema 1.2 *Seja $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com distribuição e sejam $\{E_i, E_\alpha\}$ referencial ortonormal local adaptado, definido em $U \subset M$ (ie $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal de $\mathcal{D}$ e $\{E_\alpha\}$ é um referencial ortonormal de $\mathcal{D}^\perp$) e $\{\theta^i, \theta^\alpha\}$ o co-referencial dual associado. Então existe um único conjunto de 1-formas $\{\omega_i^j, \omega_\alpha^\beta, \tau_\alpha^i, \sigma_i^\alpha\}$ definidas em U , satisfazendo as equações:*

$$\begin{aligned}
d\theta^i &= \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \omega_j^i + \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \theta^\alpha \wedge \tau_\alpha^i + \sum_{n+1 \leq \alpha < \beta \leq n+d} \theta^\alpha ([E_\beta, E_\alpha]) \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \\
d\theta^\alpha &= \sum_{\beta=n+1}^{n+d} \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \sum_{i=1}^n \sigma_i^\alpha \wedge \theta^i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta^\alpha ([E_j, E_i]) \theta^i \wedge \theta^j
\end{aligned}$$

com condições

$$i) \quad \omega_j^i = -\omega_i^j$$

$$ii) \quad \omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta$$

$$iii) \quad \sum_{i=1}^n \tau_\alpha^i \wedge \theta^i = 0$$

$$iv) \quad \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \sigma_i^\alpha \wedge \theta^\alpha = 0$$

Prova:

Existência - Tome $\omega_j^i = \sum_{l=1}^{n+d} a_{jl}^i \theta^l$, $\omega_\beta^\alpha = \sum_{l=1}^{n+d} b_{\beta l}^\alpha \theta^l$, $\tau_\alpha^i = \sum_{s=1}^n c_{\alpha s}^i \theta^s$ e $\sigma_i^\alpha = \sum_{\gamma=n+1}^{n+d} d_{i\gamma}^\alpha \theta^\gamma$, onde:

$$a_{js}^i = \frac{1}{2}(\theta^i[E_s, E_j] + \theta^j[E_i, E_s] + \theta^s[E_i, E_j])$$

$$a_{j\gamma}^i = \frac{1}{2}(\theta^i[E_\gamma, E_j] - \theta^j[E_\gamma, E_i])$$

$$b_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}(\theta^\alpha[E_\gamma, E_\beta] + \theta^\beta[E_\alpha, E_\gamma] + \theta^\gamma[E_\alpha, E_\beta])$$

$$b_{\beta s}^\alpha = \frac{1}{2}(\theta^\alpha[E_s, E_\beta] - \theta^\beta[E_s, E_\alpha])$$

$$c_{\alpha s}^i = -\frac{1}{2}(\theta^i[E_\alpha, E_s] + \theta^s[E_\alpha, E_i])$$

$$d_{i\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}(\theta^\alpha[E_i, E_\gamma] + \theta^\gamma[E_i, E_\alpha])$$

Unicidade - Seja $\{\omega_j^i, \omega_\beta^\alpha, \tau_\alpha^i, \sigma_i^\alpha\}$ qualquer conjunto de 1-formas definidas em U , satisfazendo as condições enunciadas. Se $\{\tilde{\omega}_j^i, \tilde{\omega}_\beta^\alpha, \tilde{\tau}_\alpha^i, \tilde{\sigma}_i^\alpha\}$ também satisfaz as mesmas condições, então:

$$\sum_{j=1}^n \theta^j \wedge (\omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i) + \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \theta^\alpha \wedge (\tau_\alpha^i - \tilde{\tau}_\alpha^i) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum_{\beta=n+1}^{n+d} \theta^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \tilde{\omega}_\beta^\alpha) + \sum_{i=1}^n (\sigma_i^\alpha - \tilde{\sigma}_i^\alpha) \wedge \theta^i = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n (\tau_\alpha^i - \tilde{\tau}_\alpha^i) \wedge \theta^i = 0 \quad (1.3)$$

$$\sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (\sigma_i^\alpha - \tilde{\sigma}_i^\alpha) \wedge \theta^\alpha = 0 \quad (1.4)$$

$$(\omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i) = -(\omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j) \quad (1.5)$$

$$(\omega_\beta^\alpha - \tilde{\omega}_\beta^\alpha) = -(\omega_\alpha^\beta - \tilde{\omega}_\alpha^\beta) \quad (1.6)$$

Aplicando o Lema de Cartan a equação (1.1) obtemos (para $i, j = 1, \dots, n; \alpha = n+1, \dots, n+d$):

$$\begin{aligned} \omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i &= \sum_{k=1}^{n+d} a_{jk}^i \theta^k \\ \tau_\alpha^i - \tilde{\tau}_\alpha^i &= \sum_{k=1}^{n+d} a_{\alpha k}^i \theta^k \end{aligned} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} a_{lk}^i &= a_{kl}^i \\ \text{para } l, k &= 1, 2, \dots, n+d. \end{aligned}$$

Da equação (1.5) segue que: $a_{jk}^i = -a_{ik}^j$ para $k = 1, 2, \dots, n + d$. Assim:

$$a_{jk}^i = -a_{ik}^j = -a_{ki}^j = a_{ji}^k = a_{ij}^k = -a_{kj}^i = -a_{jk}^i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, $a_{jk}^i = 0$ para $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Novamente, aplicando o Lema de Cartan a equação (1.3) temos ($\forall \alpha$ e $\forall i$):

$$\tau_\alpha^i - \tilde{\tau}_\alpha^i = \sum_{s=1}^n b_{\alpha s}^i \theta^s \quad \text{com} \quad b_{\alpha s}^i = b_{\alpha i}^s \quad \text{para} \quad i, s = 1, 2, \dots, n.$$

Então, $a_{\alpha k}^i = 0$ para $k = n + 1, n + 2, \dots, n + d$ e $a_{\alpha k}^i = b_{\alpha k}^i$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Assim,

$$a_{\alpha k}^i = b_{\alpha k}^i = b_{\alpha i}^k = a_{\alpha i}^k = a_{i\alpha}^k = -a_{k\alpha}^i = -a_{\alpha k}^i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, $a_{\alpha k}^i = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ e como $a_{\alpha k}^i = a_{k\alpha}^i$ temos também que $a_{jk}^i = 0$ para $k = n + 1, n + 2, \dots, n + d$.

Provamos então a unicidade das 1-formas ω_j^i e τ_α^i . De forma análoga, usando as equações (1.2), (1.4) e (1.6) e o Lema de Cartan temos a unicidade das ω_α^β e σ_i^α .

□

Observação 1.2 Note que, se $\{E_i, E_\alpha\}$ é um referencial ortonormal local adaptado definido em $U \subset M$, então em U podemos escrever: $\nabla E_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j \otimes E_j$, $\nabla E_\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{n+d} \omega_\alpha^\beta \otimes E_\beta$,

$$\tau_{E_\alpha} = \sum_{j=1}^n \tau_\alpha^j \otimes E_j \quad \text{e} \quad \sigma_{E_i} = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \sigma_i^\alpha \otimes E_\alpha.$$

Definição 1.1 A curvatura desta conexão é dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad \forall X, Y, Z \in \underline{TM}$$

1.2 Equivalência entre variedades homogêneas adaptadas

Uma *isometria adaptada local* entre variedades com distribuição $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $(M', \mathcal{D}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ é um difeomorfismo entre conjuntos abertos $\psi : U \subset M \rightarrow U' \subset M'$ tal que $\psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle' = \langle \cdot, \cdot \rangle$ (ψ é isometria local Riemanniana) e $\psi_*(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ (ψ preserva a distribuição). Se ψ está globalmente definida diremos apenas que ψ é uma isometria adaptada.

Um *espaço homogêneo adaptado* é uma variedade Riemanniana com distribuição $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que admite um grupo de Lie de isometrias adaptadas agindo diferenciavelmente e transitivamente em M .

A seguir apresentaremos um teorema de equivalência entre variedades homogêneas adaptadas.

Teorema 1.3 *Sejam $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $(M', \mathcal{D}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ variedades homogêneas adaptadas, com M simplesmente conexa. Sejam T, R (respectivamente T', R') os tensores torção e curvatura de M (respectivamente M'). Se $x_0 \in M, x'_0 \in M'$ e se $l : T_{x_0}M \rightarrow T_{x'_0}M'$ é uma isometria linear que leva $\mathcal{D}_{x_0}$ em $\mathcal{D}'_{x'_0}$ e os tensores T_{x_0} e R_{x_0} nos tensores $T'_{x'_0}$ e $R'_{x'_0}$, respectivamente, então existe $f : M \rightarrow M'$ isometria adaptada tal que $f(x_0) = x'_0$ e $(df)_{x_0} = l$.*

Prova:

Sejam $R(M)$ e $R(M')$ os fibrados de referenciais adaptados relativos à M e M' , respectivamente. Denotemos por (θ, ω) e (θ', ω') as respectivas forma fundamental e forma de conexão associadas a $R(M)$ e $R(M')$. Consideremos a variedade produto $R(M) \times R(M')$, sejam $\pi : R(M) \times R(M') \rightarrow R(M)$ e $\pi' : R(M) \times R(M') \rightarrow R(M')$ as projeções. Consideremos agora as 1-formas α, β definidas sobre $R(M) \times R(M')$ por:

$$\alpha = \pi^*\theta - (\pi')^*\theta'$$

$$\beta = \pi^*\omega - (\pi')^*\omega'$$

Analisemos as condições de integrabilidade do sistema diferencial $\{\alpha, \beta\}$ em $R(M) \times R(M')$. Denotemos por $\mathcal{T}$ e Ω (resp. $\mathcal{T}'$ e Ω') os tensores torção e curvatura de ω em $R(M)$ (resp. ω' em $R(M')$). Das equações de estrutura temos:

$$\begin{cases} d\theta + \omega \wedge \theta = \mathcal{T} \\ d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} d\theta' + \omega' \wedge \theta' = \mathcal{T}' \\ d\omega' + \omega' \wedge \omega' = \Omega' \end{cases}$$

Assim, lembrando que a diferencial (das formas fundamental e de conexão) e o produto exterior comutam com o “pull back” (das projeções), temos:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \pi^*d\theta - (\pi')^*d\theta' \\ &= \pi^*(\mathcal{T} - \omega \wedge \theta) - (\pi')^*(\mathcal{T}' - \omega' \wedge \theta') \\ &= \pi^*\mathcal{T} - (\pi')^*\mathcal{T}' - \pi^*\omega \wedge \pi^*\theta + (\pi')^*\omega' \wedge (\pi')^*\theta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi^* \mathcal{T} - (\pi')^* \mathcal{T}' - \pi^* \omega \wedge \pi^* \theta + (\pi')^* \omega' \wedge (\pi')^* \theta' + \pi^* \omega \wedge (\pi')^* \theta' - \pi^* \omega \wedge (\pi')^* \theta' \\
&= \pi^* \mathcal{T} - (\pi')^* \mathcal{T}' - \pi^* \omega \wedge (\pi^* \theta - (\pi')^* \theta') - (\pi^* \omega - (\pi')^* \omega') \wedge (\pi')^* \theta' \\
&= \pi^* \mathcal{T} - (\pi')^* \mathcal{T}' - \pi^* \omega \wedge \alpha + (\pi')^* \theta' \wedge \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\beta &= \pi^* d\omega - (\pi')^* d\omega' \\
&= \pi^* (\Omega - \omega \wedge \omega) - (\pi')^* (\Omega' - \omega' \wedge \omega') \\
&= \pi^* \Omega - (\pi')^* \Omega' - \pi^* \omega \wedge \pi^* \omega + (\pi')^* \omega' \wedge (\pi')^* \omega' \\
&= \pi^* \Omega - (\pi')^* \Omega' - \pi^* \omega \wedge \pi^* \omega + (\pi')^* \omega' \wedge (\pi')^* \omega' + \pi^* \omega \wedge (\pi')^* \omega' - \pi^* \omega \wedge (\pi')^* \omega' \\
&= \pi^* \Omega - (\pi')^* \Omega' - \pi^* \omega \wedge (\pi^* \omega - (\pi')^* \omega') - (\pi^* \omega - (\pi')^* \omega') \wedge (\pi')^* \omega' \\
&= \pi^* \Omega - (\pi')^* \Omega' - \pi^* \omega \wedge \beta + (\pi')^* \omega' \wedge \beta
\end{aligned}$$

Portanto, para concluir que o sistema é involutivo precisamos mostrar que $(\pi^* \mathcal{T} - (\pi')^* \mathcal{T}')$ e $(\pi^* \Omega - (\pi')^* \Omega')$ estão no ideal gerado por α e β . Lembremos que:

$$\begin{aligned}
\theta : TR(M) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+d}, & \theta &= (\theta^i) \\
\omega : TR(M) &\rightarrow \mathfrak{o}(n) \times \mathfrak{o}(d) \subset \mathfrak{gl}(n+d, \mathbb{R}), & \omega &= (\omega_j^i) \\
\mathcal{T} : \wedge^2 TR(M) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+d}, & \mathcal{T} &= (T^i) \\
\Omega : \wedge^2 TR(M) &\rightarrow \mathfrak{o}(n) \times \mathfrak{o}(d) \subset \mathfrak{gl}(n+d, \mathbb{R}), & \Omega &= (\Omega_j^i)
\end{aligned}$$

As formas (θ^i, ω_j^i) definem um paralelismo em $R(M)$. Visto que a torção e a curvatura são horizontais, temos:

$$\begin{aligned}
T^i &= \sum_{j,k=1}^{n+d} A_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \\
\Omega_j^i &= \sum_{k,l=1}^{n+d} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l
\end{aligned}$$

onde A_{jk}^i e R_{jkl}^i são
funções em $R(M)$

Agora, $R_g^* \mathcal{T} = g^{-1} \mathcal{T}$ onde $R_g : R(M) \rightarrow R(M)$ é a translação a direita por um elemento $g \in O(n) \times O(d)$. implica que:

$$\mathcal{T}_{e.g}(dR_g(u), dR_g(v)) = g^{-1}(\mathcal{T}_e(u, v)) \quad \forall e \in R(M); \quad \forall u, v \in T_e R(M)$$

portanto,

$$\sum_{j,k=1}^{n+d} A_{jk}^i(e.g)(R_g^* \theta^j) \wedge (R_g^* \theta^k)(u, v) = \sum_{j,k,s=1}^{n+d} (g^{-1})_s^i A_{jk}^s(e)(\theta^j \wedge \theta^k)(u, v)$$

para $i = 1, \dots, n + d$.

Como $R_g^* \theta = g^{-1} \theta$, vem que:

$$\sum_{j,k=1}^{n+d} \sum_{l,r=1}^{n+d} A_{jk}^i(e.g)(g^{-1})_l^j (g^{-1})_r^k (\theta^l \wedge \theta^r)(u, v) = \sum_{l,r,s=1}^{n+d} (g^{-1})_s^i A_{lr}^s(e)(\theta^l \wedge \theta^r)(u, v)$$

Segue que:

$$\sum_{j,k=1}^{n+d} A_{jk}^i(e.g)(g^{-1})_l^j (g^{-1})_r^k = \sum_{s=1}^{n+d} (g^{-1})_s^i A_{lr}^s(e)$$

para $i, l, r = 1, \dots, n + d$.

De onde

$$A_{jk}^i(e.g) = \sum_{l,r=1}^{n+d} \left\{ \sum_{s=1}^{n+d} (g^{-1})_s^i A_{lr}^s(e) \right\} g_j^l g_k^r$$

para $i, j, k = 1, \dots, n + d$.

Assim,

$$T^i(e.g) = \sum_{j,k=1}^{n+d} \sum_{l,r=1}^{n+d} \left\{ \sum_{s=1}^{n+d} (g^{-1})_s^i A_{lr}^s(e) \right\} g_j^l g_k^r \theta_{e.g}^j \wedge \theta_{e.g}^k$$

para $i = 1, \dots, n + d$.

Abreviaremos por:

$$T_{e.g} = g^{-1} A(e)(g\theta)_{e.g} \wedge (g\theta)_{e.g}$$

Por hipótese M é uma variedade homogênea adaptada. Assim, para cada $x \in M$ existe uma isometria adaptada $f^x : M \rightarrow M$ tal que $f^x(x_0) = x$, onde $x_0 \in M$ está fixado. Fixemos em

x_0 um referencial adaptado $e_{x_0} = (e_1, \dots, e_{n+d})$ de $R(M)$ e consideremos a seção de $R(M)$ definida por:

$$\epsilon(x) = (x, df_{x_0}^x(e_1), \dots, df_{x_0}^x(e_{n+d}))$$

Como isometria preserva a torção, temos:

$$(e^*\mathcal{T})_x = (e^*T^i)_x = \sum_{j,k=1}^{n+d} A_{jk}^i(\epsilon(x)) e^*\theta^j \wedge e^*\theta^k \quad \text{com } A_{jk}^i(\epsilon(x)) = \text{constante} = A$$

$$\text{Então, } (\pi^*\mathcal{T})_{\epsilon(x).g} = g^{-1}A[g\pi^*\theta \wedge g\pi^*\theta].$$

Considerando que M' é outra variedade homogênea adaptada, pelo mesmo argumento, também temos: $[(\pi')^*\mathcal{T}']_{\epsilon'(x).g} = g^{-1}A'[g(\pi')^*\theta' \wedge g(\pi')^*\theta']$.

Agora, podemos escolher $e_{x_0} = (e_1, \dots, e_{n+d})$ e $e_{x_0}' = (e_1' = l(e_1), \dots, e_{n+d}' = l(e_{n+d}))$ de maneira que $A = A'$, pois a função linear $l : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}'M'$ transporta a torção de M na torção de M' . Então temos:

$$\begin{aligned} (\pi^*\mathcal{T})_{\epsilon(x).g} - ((\pi')^*\mathcal{T}')_{\epsilon'(x).g} &= g^{-1}A\{g\pi^*\theta \wedge g\pi^*\theta - g(\pi')^*\theta' \wedge g(\pi')^*\theta'\} \\ &= g^{-1}A\{[g\pi^*\theta - g(\pi')^*\theta'] \wedge [g\pi^*\theta + g(\pi')^*\theta']\} \\ &= g^{-1}Ag\{\alpha \wedge [g\pi^*\theta + g(\pi')^*\theta']\} \end{aligned}$$

Analogamente fazemos o mesmo raciocínio para a curvatura. Logo o sistema é integrável. Então, dados $(e, e') \in R(M) \times R(M')$ existe uma única variedade conexa maximal, que passa por (e, e') , integral a $\{\alpha, \beta\}$, dada pelo Teorema de Frobenius. Esta subvariedade integral é dada pelo gráfico de uma função $F : R(M) \rightarrow R(M')$, definida apenas localmente, a qual se projeta numa função $f : U \subset M \rightarrow U' \subset M'$, que é uma isometria local adaptada. Agora, M, M' são homogêneas, portanto completas, M é simplesmente conexa, então, por argumento de analiticidade f se prolonga a uma isometria global.

□

1.3 Invariantes geométricos

Associaremos alguns invariantes geométricos, como segue.

Para cada $x \in M$ consideremos o operador bilinear anti-simétrico $b : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp$, definido por

$$b(v, w) = ([V, W]_x)^\perp.$$

onde V, W são extensões de v, w à seções de $\mathcal{D}$. Assim, cada $\xi \in \mathcal{D}_x^\perp$ induz uma 1-forma bilinear anti-simétrica a valores reais $b_\xi : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$b_\xi(v, w) = \langle b(v, w), \xi \rangle_x.$$

Portanto, existe um único operador linear anti-simétrico $A_\xi : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x$ tal que

$$b_\xi(v, w) = \langle A_\xi(v), w \rangle_x.$$

Denotamos por $End(\mathcal{D}_x^\perp)$ o conjunto de todos os endomorfismos de $\mathcal{D}_x^\perp$ e definimos o operador bilinear $\bar{b} : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \rightarrow End(\mathcal{D}_x^\perp)$. $\bar{b}(v, w) = \bar{b}_{vw} : \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp$ dado por

$$\bar{b}_{vw}(\xi) = b(A_\xi(v), w).$$

Observamos que o operador linear

$$\hat{b} = \text{traço } \bar{b} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_{e_i e_i} : \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp$$

onde $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{D}_x$, independe da base β escolhida e é um operador linear simétrico. Este fato nos possibilita definir os invariantes $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+d}$ auto-valores associados ao operador $\hat{b}$.

Analogamente, cada $v \in \mathcal{D}_x$ induz uma 1-forma bilinear anti-simétrica a valores reais $t_v : \mathcal{D}_x^\perp \times \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t_v(\xi, \eta) = \langle t(\xi, \eta), v \rangle_x,$$

onde $t : \mathcal{D}_x^\perp \times \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x$ é dado por

$$t(\xi, \eta) = ([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_x)^\top;$$

onde $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ são extensões de ξ, η à seções de $\mathcal{D}^\perp$. Assim, denotando por $End(\mathcal{D}_x)$ o conjunto de todos os endomorfismos de $\mathcal{D}_x$, temos um operador bilinear $\bar{t} : \mathcal{D}_x^\perp \times \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow End(\mathcal{D}_x)$, $\bar{t}(\xi, \eta) = \bar{t}_{\xi\eta} : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x$ definido por

$$\bar{t}_{\xi\eta}(v) = t(S_v(\xi), \eta),$$

onde $S_v : \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp$ é o único operador linear anti-simétrico tal que

$$\langle S_v(\xi), \eta \rangle_x = t_v(\xi, \eta).$$

O operador linear

$$\hat{t} = \text{traço } \bar{t} = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \bar{t}_{e_\alpha e_\alpha} : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x$$

onde $\gamma = \{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+d}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{D}_x^\perp$, independe da base γ escolhida e é um operador linear simétrico. Assim, podemos definir os invariantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auto-valores associados ao operador $\hat{t}$.

Por outro lado, os operadores bilineares:

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}_x^\perp \times \mathcal{D}_x^\perp &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{D}_x) & S : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{D}_x^\perp) \\ (\xi, \eta) &\longmapsto A_\xi \circ A_\eta & (v, w) &\longmapsto S_v \circ S_w \end{aligned} \quad e$$

induzem, respectivamente, os operadores lineares simétricos:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \text{traço } A = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} A(e_\alpha, e_\alpha) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (A_{e_\alpha} \circ A_{e_\alpha}) : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x \\ \hat{S} &= \text{traço } S = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n (S_{e_i} \circ S_{e_i}) : \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n+d}\}$ é qualquer base ortonormal adaptada de $T_x M$, e nos fornece os invariantes $\rho_i (i = 1, \dots, n)$ e $\rho_\alpha (\alpha = n+1, \dots, n+d)$ auto-valores associados aos operadores $\hat{A}$ e $\hat{S}$.

Temos também os invariantes, definidos através dos tensores τ e σ , da seguinte maneira. Consideramos os operadores bilineares:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} : \mathcal{D}_x^\perp \times \mathcal{D}_x^\perp &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{D}_x) & \bar{\sigma} : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{D}_x^\perp) \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \tau_\xi \circ \tau_\eta & (v, w) &\longmapsto \sigma_v \circ \sigma_w \end{aligned} \quad e$$

Definimos os operadores lineares:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \text{traço } \bar{\tau} = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \bar{\tau}(e_\alpha, e_\alpha) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (\tau_{e_\alpha} \circ \tau_{e_\alpha}) : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_x \\ \hat{\sigma} &= \text{traço } \bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{e_i} \circ \sigma_{e_i}) : \mathcal{D}_x^\perp \rightarrow \mathcal{D}_x^\perp \end{aligned}$$

Temos que $\hat{\tau}$ e $\hat{\sigma}$ são operadores lineares simétricos, bem definidos e nos permitem definir os invariantes $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_n$ e $\hat{\sigma}_{n+1}, \dots, \hat{\sigma}_{n+d}$, auto-valores associados aos operadores $\hat{\tau}$ e $\hat{\sigma}$, respectivamente.

Evidentemente, os vetores

$$\begin{aligned} H_\tau &= \text{traço } \tau_x = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (\text{traço } \tau_{e_\alpha}) e_\alpha \in \mathcal{D}_x^\perp \\ H_\sigma &= \text{traço } \sigma_x = \sum_{i=1}^n (\text{traço } \sigma_{e_i}) e_i \in \mathcal{D}_x \end{aligned}$$

também são invariantes.

Capítulo 2

Espaços sub-simétricos com distribuição de Engel

Uma variedade sub-Riemanniana é uma terna $(M, \mathcal{D}, g)$ onde M é uma variedade diferenciável, $\mathcal{D}$ é uma distribuição sobre M (ie, $\mathcal{D}$ é um subfibrado vetorial próprio do fibrado tangente TM) e g é uma métrica diferenciável definida em $\mathcal{D}$.

Neste capítulo restringiremos nossa atenção às variedades sub-Riemannianas orientadas cuja distribuição associada é uma distribuição de Engel orientada. Obteremos um paralelismo sobre uma estrutura sub-Riemanniana de tipo Engel com a finalidade de definir invariantes geométricos. e então classificaremos todas as variedades sub-Riemannianas 4-dimensionais simplesmente conexas, as quais são sub-simétricas, usando uma linearização da estrutura via uma classe especial de álgebras de Lie involutivas.

2.1 Distribuição de Engel

Seja $T_x M$ o espaço tangente no ponto $x \in M$. Dizemos que a distribuição $\mathcal{D}$ é *geradora por colchetes* se para qualquer $x \in M$ as seções locais de $\mathcal{D}$ juntamente com todos os seus colchetes iterados avaliados no ponto x geram o espaço vetorial $T_x M$.

Seja $(\mathcal{D}^2)_x$ o subespaço de $T_x M$ gerado por todos os colchetes de seções de $\mathcal{D}$ avaliados no ponto x . Denote-se por $(\mathcal{D}^3)_x$ o subespaço de $T_x M$ gerado por todos os campos vetoriais do tipo $[[X, Y], Z]_x$, onde X, Y, Z variam sobre todas as seções de $\mathcal{D}$.

Neste capítulo consideraremos somente o caso em que $\mathcal{D}$ é uma *distribuição de Engel*. Isto significa que $\mathcal{D}$ é uma distribuição de codimensão dois em uma variedade 4-dimensional M , *regular* e *geradora por colchetes*, ou equivalentemente $\mathcal{D}$ é uma distribuição de codimensão dois em uma variedade M de dimensão 4 e para cada $x \in M$ tem-se $\dim(\mathcal{D}^2)_x = 3$ e $(\mathcal{D}^3)_x = T_x M$.

Denotemos por $\mathcal{D}^2$ a distribuição definida sobre M , que associa a cada $x \in M$ o subespaço $(\mathcal{D}^2)_x$ de $T_x M$. Consideremos a forma de Levi de $\mathcal{D}^2$

$$\mathcal{L} : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2 \rightarrow TM/\mathcal{D}^2, \quad \mathcal{L}_x(v, w) = [V, W]_x \mod \mathcal{D}_x^2$$

onde V, W são extensões de v, w a seções de $\mathcal{D}^2$. Temos o seguinte lema.

Lema 2.1 *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de Engel e $\mathcal{L}$ a forma de Levi de $\mathcal{D}^2$, então $\mathcal{L}$ é uma forma bilinear anti-simétrica sobre $\mathcal{D}^2$, seu núcleo é 1-dimensional e está contido em $\mathcal{D}$.*

Prova:

É claro que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^2$, pois dado X, Y seções de $\mathcal{D}$ passando por $x \in M$, podemos localmente encontrar uma função f , definida numa vizinhança aberta de x a valores reais, tal que, $df_x(Y_x) = 1$. Desta forma, $[Y, fX]_x = X_x + f(x)[Y, X]_x$, portanto $X_x \in \mathcal{D}_x^2$. Como $\dim T_x M = 4$ e $\dim \mathcal{D}_x^2 = 3$ temos que $T_x M / \mathcal{D}_x^2 \cong \mathbb{R}$, e esta identificação junto com a anti-simetria do colchete de Lie nos dizem que $\mathcal{L}$ é uma forma bilinear anti-simétrica sobre $\mathcal{D}^2$. Assim, posto de $\mathcal{L}$ é par, logo as únicas possibilidades são posto de $\mathcal{L}$ igual a zero ou posto de $\mathcal{L}$ igual a dois. Mas, posto de $\mathcal{L} = 0$ não pode ocorrer, pois neste caso o núcleo de $\mathcal{L}$ coincide com $\mathcal{D}^2$, e isto contraria a hipótese $[\mathcal{D}^2, \mathcal{D}] = TM$, imposta na definição de distribuição de Engel. Portanto, posto de $\mathcal{L}$ é igual a dois e consequentemente o núcleo de $\mathcal{L}$ é 1-dimensional. Vamos mostrar agora que o núcleo de $\mathcal{L}$ está contido em $\mathcal{D}$. Seja ξ no núcleo de $\mathcal{L}$, então em particular $\xi \in \mathcal{D}^2$ e assim podemos expressar ξ localmente por $\xi = aX + bY + c[X, Y]$ onde X, Y são seções locais de $\mathcal{D}$ num aberto U , tais que $\mathcal{D}_x$ é gerado por $\{X_x, Y_x\} \forall x \in U$, e a, b, c são funções $\mathcal{C}^\infty$ definidas em U a valores reais. Agora.

$$[\xi, X]_x = -da_x(X_x)X_x - db_x(X_x)Y_x + (b(x) + dc_x(X_x))[Y, X]_x + c(x)[[X, Y], X]_x,$$

$$[\xi, Y]_x = -da_x(Y_x)X_x - db_x(Y_x)Y_x + (a(x) - dc_x(Y_x))[X, Y]_x + c(x)[[X, Y], Y]_x.$$

Como $\{X, Y, [X, Y]\}$ é um referencial local de $\mathcal{D}^2$, segue que ξ pertence ao núcleo de $\mathcal{L}$ se, e somente se, $\forall x \in U$ tem-se: *i)* $c(x) = 0$, ou *ii)* $[[X, Y], X]_x$ e $[X, Y], Y]_x \in \mathcal{D}_x^2$. Porém, novamente da hipótese $[\mathcal{D}^2, \mathcal{D}] = TM$, temos que *ii)* não pode ocorrer. Portanto, em U temos $\xi = aX + bY$, ou seja $\xi \in \mathcal{D}$.

□

A partir de agora admitiremos (salvo menção explícita em contrário) M e $\mathcal{D}$ orientadas, nestas condições segue do Lema [2.1] a existência de uma estrutura Riemanniana canônica

sobre $(M, \mathcal{D}, g)$, determinada como segue: escolhemos um campo vetorial unitário $Y_2 \in \mathcal{D}$, tal que Y_2 gera o núcleo de $\mathcal{L}$ (observe que nestas condições existem somente duas escolhas possíveis para Y_2); escolhido Y_2 consideremos Y_1 como o único campo vetorial unitário sobre $\mathcal{D}$ tal que $\{Y_1, Y_2\}$ é um referencial ortonormal positivo sobre $\mathcal{D}$. Definimos $\xi_3 = [Y_1, Y_2]$, $\xi_4 = [Y_1, \xi_3]$ e estendemos g a uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre M , impondo ξ_3, ξ_4 ortonormais à $\mathcal{D}$. Eliminamos a ambiguidade na escolha de Y_2 exigindo que $\{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$, construído sob as condições acima, seja um referencial ortonormal positivo sobre M .

O referencial ortonormal positivo $\{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$ definido acima é denominado referencial canônico associado a variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$.

2.2 Espaços simétricos sub-Riemannianos de tipo Engel e álgebras de Lie involutivas associadas

Uma *isometria local sub-Riemanniana* entre duas variedades sub-Riemannianas $(M, \mathcal{D}, g)$ e $(M', \mathcal{D}', g')$ é um difeomorfismo entre conjuntos abertos $\psi : U \subset M \rightarrow U' \subset M'$ tal que $\psi_*(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ e $\psi^*g' = g$. No caso em que $\mathcal{D}$ é uma distribuição de Engel, ψ é uma isometria Riemanniana local relativa à métrica Riemanniana estendida sobre M e M' (uma vez que $\psi_*Y_1 = \pm Y'_1$, $\psi_*Y_2 = \pm Y'_2$ e $\psi_*[\cdot, \cdot] = [\psi_*\cdot, \psi_*\cdot]$). Se ψ está globalmente definida de M em M' , diremos simplesmente que ψ é uma *isometria sub-Riemanniana*.

Um *espaço homogêneo sub-Riemanniano* é uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ que admite um grupo de Lie transitivo de isometrias sub-Riemannianas agindo diferenciavelmente em M .

Um *espaço simétrico sub-Riemanniano* (ou *espaço sub-simétrico*) é uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ tal que, para cada ponto $x_0 \in M$ existe uma isometria sub-Riemanniana ψ , chamada *sub-simetria* em x_0 , satisfazendo $\psi(x_0) = x_0$ e $\psi_*|_{\mathcal{D}_{x_0}} = -Id$. Ressaltamos que esta é uma definição simplificada, que se aplica ao caso das distribuições particulares consideradas neste trabalho: distribuições de Engel e distribuições fortemente geradoras por colchetes (estudadas nos capítulos 3 e 4). A título de informação, mencionamos agora, a definição de espaços sub-simétricos, dada em geral.

Definição 2.1 (Strichartz [10]) *Um espaço simétrico sub-Riemanniano é uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ que admite um grupo de Lie de isometrias sub-Riemannianas, agindo diferenciavelmente e transitivamente em M , com as seguintes propriedades:*

- i) *O subgrupo de isotopia K de um ponto x_0 é compacto.*

ii) K contém um elemento ψ tal que $d\psi|_{\mathcal{D}_{x_0}} = -Id$ e $\psi^2 = Id$.

Observamos que se as propriedades i) e ii) valem em um ponto, então da homogeneidade, elas se verificam em todos os pontos. No caso das distribuições de Engel, o subgrupo de isotropia K de um ponto x_0 é finito, portanto compacto, e o quadrado da sub-simetria em x_0 , ψ^2 , é igual a identidade, uma vez que, neste caso, uma isometria sub-Riemanniana de M , fixa (a menos de sinais) o referencial canônico.

O lema seguinte e seu corolário justificam a omissão da hipótese de homogeneidade na definição simplificada de espaços sub-simétricos. Nos casos particulares das distribuições estudadas neste trabalho, a homogeneidade decorre da existência da sub-simetria em cada ponto.

Lema 2.2 *Seja $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana com $\mathcal{D}$ distribuição geradora por colchetes e ∇ sua conexão adaptada, então quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por uma ∇ -geodésica horizontal quebrada.*

Prova:

Análoga a demonstração do Lema (1.1) de [1]

□

Corolário 2.1 *Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ uma variedade sub-Riemanniana, com $\mathcal{D}$ distribuição de Engel, tal que para cada ponto $x_0 \in M$ existe uma isometria sub-Riemanniana $\psi : M \rightarrow M$ satisfazendo $\psi(x_0) = x_0$ e $\psi_*|_{\mathcal{D}_{x_0}} = -Id$. Então $(M, \mathcal{D}, g)$ é um espaço homogêneo sub-Riemanniano.*

Prova:

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma ∇ -geodésica horizontal, então a sub-simetria em $\gamma(t/2)$ leva $\gamma(0)$ em $\gamma(t)$. Como do Lema [2.2] quaisquer dois pontos podem ser ligados por uma ∇ -geodésica quebrada, o resultado segue.

□

Uma *álgebra de Lie involutiva* é uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ equipada com um automorfismo $s : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ satisfazendo $s^2 = 1$ (s é chamada uma *involução da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$). É claro que se s é uma involução da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$ onde $\mathfrak{g}^+ = \{X \in \mathfrak{g} | s(X) = X\}$, $\mathfrak{g}^- = \{X \in \mathfrak{g} | s(X) = -X\}$.

O próximo teorema e seu corolário mostram que um espaço homogêneo sub-Riemanniano de tipo Engel pode ser identificado com um grupo de Lie G , o qual possui uma estrutura sub-Riemanniana invariante à esquerda $(\mathcal{D}, g)$ e cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ possui uma decomposição especial; em particular, se o espaço é sub-simétrico então $\mathfrak{g}$ é involutiva.

Teorema 2.1 *Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ um espaço homogêneo sub-Riemanniano simplesmente conexo 4-dimensional, onde $\mathcal{D}$ é uma distribuição de Engel. Então:*

1. *a componente conexa contendo a identidade do grupo de todas as isometrias sub-Riemannianas de M , denotado por G , é um grupo de Lie, simplesmente conexo, que age transitivamente e simplesmente sobre M ;*
2. *a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G possui uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, onde $\mathfrak{p}$ corresponde à $\mathcal{D}_{x_0}$ através da identificação de $\mathfrak{g}$ com $T_{x_0}M$, para um ponto base escolhido x_0 e $\mathfrak{p}$ não depende do ponto x_0 escolhido;*
3. *o produto interno B induzido sobre $\mathfrak{p}$ pela identificação de $\mathfrak{p}$ com $\mathcal{D}_{x_0}$ não depende do ponto base $x_0 \in M$ escolhido.*

Prova:

G é um subgrupo fechado do grupo de Lie todas as isometrias Riemannianas de M , portanto é um grupo de Lie. Consideremos $x_0 \in M$ e seja K o subgrupo de isotropia em x_0 . Então M é representado como o espaço das classes G/K . Agora, uma isometria sub-Riemanniana de M fixa (a menos de sinais) o referencial canônico e isso implica que K é finito. Como assumimos M simplesmente conexa, segue que a isotropia é trivial. Portanto, a projeção $\pi : G \rightarrow M$, $\pi(g) = g(x_0)$ é um difeomorfismo, isto é, a ação de G sobre M é transitiva simples (em particular, G é simplesmente conexo). Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G . Temos que a aplicação induzida π_* identifica $\mathfrak{g}$ com o espaço tangente $T_{x_0}M$. Definimos $\mathfrak{p}$ como a imagem inversa de $\mathcal{D}_{x_0}$ em $\mathfrak{g}$ através de π_* . Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, uma vez que $\mathcal{D}$ é uma distribuição de Engel. Finalmente, o subespaço $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ e o produto interno g_{x_0} levantado para $\mathfrak{p}$ através de π_* , denotado por B , não dependem do x_0 escolhido, visto que G age sobre M preservando $\mathcal{D}$ e g .

□

Para um espaço homogêneo sub-Riemanniano $(M, \mathcal{D}, g)$ de tipo Engel temos agora uma terna $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$ associada, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie 4-dimensional, $\mathfrak{p}$ é um subespaço 2-dimensional de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$ e B é um produto interno sobre $\mathfrak{p}$. Uma terna $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$ com estas propriedades é denominada *álgebra de Engel*.

Corolário 2.2 *Se $(M, \mathcal{D}, g)$ é um espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, 4-dimensional, onde $\mathcal{D}$ é uma distribuição de Engel, então sua álgebra de Engel associada $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$ possui as propriedades adicionais: $[[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ e $\dim(\mathfrak{p} + [[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]) = 3$; em particular $\mathfrak{g}$ é involutiva.*

Prova:

Neste caso, $\mathfrak{g}$ possui uma involução s dada por $Ad_\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, onde ψ é a sub-simetria em x_0 . Observando então, que a Ad_K -ação sobre $\mathfrak{g}$ e a K -ação sobre $T_{x_0}M$ são π_* -equivalentes, temos a inclusão $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^-$ (onde $\mathfrak{g}^-$ denota o auto-espaço -1 de s). Assim, a decomposição de $\mathfrak{g}$ nos ± 1 auto-espaços de s , $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$, satisfaz $\mathfrak{g}^+ = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, $\mathfrak{g}^- = \mathfrak{p} + [[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$ e isto conclui a demonstração. $\square$

Reciprocamente, dada uma álgebra de Engel $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$ podemos construir um espaço homogêneo sub-Riemanniano de tipo Engel como segue. Seja $M = G$ o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$; $\mathcal{D}$ a distribuição G -invariante sobre G tal que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ e portanto $\mathcal{D}_m = (dL_m)_e(\mathcal{D}_e)$, $\forall m \in G$, onde L_m denota o automorfismo translação à esquerda por m sobre G . Devido às hipóteses sobre $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{g}$ temos que $\mathcal{D}$ assim construída é uma distribuição de Engel. Seja g a métrica G -invariante sobre $\mathcal{D}$ determinada por B tal que $g_e = B$, isto é, $g_m(X_m, Y_m) = g_e((dL_m^{-1})_m(X_m), (dL_m^{-1})_m(Y_m))$, $\forall m \in G$. Se a terna possui as propriedades adicionais $[[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ e $\dim(\mathfrak{p} + [[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]) = 3$ então o automorfismo involutivo s de $\mathfrak{g}$, que é $+1$ sobre $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ e é -1 sobre $\mathfrak{p} + [[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, induz um automorfismo ψ em G que é uma isometria sub-Riemanniana de G e $\psi_* = s$. Portanto ψ é a sub-simetria na identidade e $L_m \circ \psi \circ L_{m^{-1}} : G \rightarrow G$ é a sub-simetria em m , assim G é sub-simétrico.

Observação 2.1 Pode-se provar que todo espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, de tipo Engel, é também um espaço sub-simétrico de contato ímpar, da seguinte maneira: Dado $(M, \mathcal{D}, g)$ espaço sub-simétrico de tipo Engel, simplesmente conexo, tome seus associados $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$. Uma vez que $\mathfrak{g}$ possui uma estrutura involutiva, $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{p} + [[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, $\mathfrak{g}^- = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ e $\dim \mathfrak{g}^+ = 3$, considere a sub-ALIO (de contato ímpar) abstrata $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}', B')$ (ie, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real 4-dimensional, $\mathfrak{p}'$ é um subespaço 3-dimensional de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}' + [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}']$, $[[[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'], \mathfrak{p}'], \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$ e B' é um produto interno sobre $\mathfrak{p}$), onde $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g}^+$ e B' é a restrição à $\mathfrak{p}'$ da métrica canônica definida em $\mathfrak{g}$ via a aplicação induzida π_* . À terna $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}', B')$ corresponde um espaço sub-simétrico de contato ímpar $(G \equiv M, \mathcal{D}', g')$, onde G é o grupo simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$; $\mathcal{D}'$ é a distribuição G -invariante definida em G , tal que $\mathcal{D}'_e = \mathfrak{p}'$ e g' é a métrica G -invariante definida em $\mathcal{D}'$, tal que $g'_e = B'$. Maiores detalhes sobre esta última afirmação podem ser encontrados em [3].

2.3 A classificação dos espaços sub-simétricos com distribuição de Engel

Nesta seção apresentaremos a classificação dos espaços sub-simétricos com distribuição de Engel. Mais precisamente, mostraremos que existem exatamente 10 classes de exemplos destes espaços, são elas o recobrimento universal (denotados com um til) do: produto direto do grupo de movimentos próprios do plano Euclidiano $Euc_2^+ = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}$; produto direto do grupo próprio ortocronológico de Poincaré $Poinc_2^+ = SO_e(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}$; grupo unitário indefinido $U(1,1)$ (este espaço admite quatro classes distintas de estruturas sub-Riemannianas $(\mathcal{D}, g)$ não equivalentes - isto segue olhando-se os invariantes na tabela 2.1 - distinguimos estes espaços um do outro por “linhas”); grupo de Engel E^4 cuja álgebra de Lie e_4 possui uma base $\beta = \{x_1, x_2, y = [x_1, x_2], z = [x_2, y]\}$ satisfazendo $[y, x_1] = [z, x_1] = [y, z] = [z, x_2] = 0$; grupo unitário $U(2)$; produto semi-direto do grupo ortogonal especial $SO(2)$ com o grupo de Heisenberg H^3 ; produto semi-direto do grupo ortogonal indefinido $SO_e(1,1)$ com o grupo de Heisenberg H^3 .

Observação 2.2 A lista detalhada destes espaços com suas respectivas distribuições, métricas e invariantes se encontra no final deste capítulo na tabela 2.1.

Observação 2.3 Embora o teorema (2.1) e sua recíproca permitam lidar com o problema de classificação dos espaços homogêneos sub-Riemannianos em geral, uma análise preliminar mostra que os exemplos geometricamente mais significativos pertencem a classe dos espaços sub-simétricos.

Retomamos agora o problema de classificação. Seja $(G, \mathcal{D}, g)$ um espaço sub-simétrico simplesmente conexo de dimensão 4 com uma distribuição de Engel. Considerem-se seus associados $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, B)$. Então, $\dim \mathfrak{g} = 4$, $\dim \mathfrak{p} = 2$, $\dim[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 1$, $\dim(\mathfrak{p} + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]) = 3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]$, $[[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ e B é um produto interno sobre $\mathfrak{p}$. Sob estas hipóteses, utilizando as identidades de Jacobi, temos que a base ortonormal de $\mathfrak{g}$, $\beta = \{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$, dada pelo referencial canônico, satisfaz:

$$[Y_1, Y_2] = \xi_3$$

$$[Y_1, \xi_3] = \xi_4$$

$$[Y_1, \xi_4] = -a\xi_3$$

$$(a, b \in \mathbb{R}, c \geq 0)$$

$$[Y_2, \xi_3] = -bY_1 - cY_2$$

$$[Y_2, \xi_4] = -c\xi_3$$

$$[\xi_3, \xi_4] = -a(bY_1 + cY_2) - c\xi_4$$

Portanto, neste caso, as equações de estrutura associadas a conexão adaptada (definida no capítulo 1), expressam-se no co-referencial $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ dual do referencial canônico $\{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$, como:

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \frac{1}{2}b\theta^3 + \theta^3 \wedge (-\frac{1}{2}b\theta^2) + ab\theta^3 \wedge \theta^4$$

$$d\theta^2 = \theta^1 \wedge (-\frac{1}{2}b\theta^3) + \theta^3 \wedge (-\frac{1}{2}b\theta^1 - c\theta^2) + ac\theta^3 \wedge \theta^4$$

$$d\theta^3 = \theta^4 \wedge (-\frac{1}{2}(1+a)\theta^1 - \frac{1}{2}c\theta^2 - c\theta^4) + \frac{1}{2}(1-a)\theta^4 \wedge \theta^1 - \frac{1}{2}c\theta^4 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\theta^4 = \theta^3 \wedge (\frac{1}{2}(1+a)\theta^1 + \frac{1}{2}c\theta^2 + c\theta^4) + \frac{1}{2}(1-a)\theta^3 \wedge \theta^1 - (\frac{1}{2}c\theta^3) \wedge \theta^2$$

de onde:

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2}b \theta^3$$

$$\omega_3^4 = \frac{1}{2}(1+a) \theta^1 + \frac{1}{2}c \theta^2 + c \theta^4$$

$$\tau_3^1 = -\frac{1}{2}b \theta^2$$

$$\tau_3^2 = -\frac{1}{2}b \theta^1 - c \theta^2$$

$$\tau_4^1 = 0$$

$$\tau_4^2 = 0$$

$$\sigma_1^3 = \frac{1}{2}(1-a) \theta^4$$

$$\sigma_2^3 = -\frac{1}{2}c \theta^4$$

$$\sigma_1^4 = \frac{1}{2}(1-a) \theta^3$$

$$\sigma_2^4 = -\frac{1}{2}c \theta^3$$

As curvaturas tangenciais e normais são dadas por:

$$\Omega = d\omega_1^2(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \langle [\xi_3, Y_2], Y_1 \rangle = \frac{1}{2}b$$

$$\mu = d\omega_3^4(\xi_3, \xi_4) = \frac{1}{2}\{(1+a)(ab+c^2) + c^2\}$$

Além das curvaturas calculamos os invariantes relacionados com as sub-torções, τ e σ , definidos no capítulo 1, na seção 1.3, e obtivemos:

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = \frac{1}{4}\{(1-a)^2 + c^2\}$$

$$\text{traço de } \hat{\tau} = \frac{1}{2}b^2 + c^2$$

$$\text{determinante de } \hat{\tau} = \frac{1}{16}b^4$$

A existência do referencial canônico definido sobre a variedade nos permite definir, além dos invariantes citados acima, outros invariantes geométricos. Tendo em vista o objetivo de classificação definimos os invariantes que seguem:

$$\mu_1 = \langle [\xi_4, Y_1], \xi_3 \rangle = a$$

$$\mu_2 = \langle [\xi_4, Y_1], \xi_3 \rangle \cdot \langle [\xi_3, Y_2], Y_1 \rangle + (\langle [\xi_4, Y_2], \xi_3 \rangle)^2 = ab + c^2$$

Salientamos que 2Ω , μ_1 e μ_2 independem das orientações escolhidas sobre $\mathcal{D}$ e M .

Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: $\dim [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] = 1$

Neste caso, $b = c = 0$, e então $\beta = \{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, satisfazendo:

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2] &= \xi_3 \\ [Y_1, \xi_3] &= \xi_4 \\ [Y_1, \xi_4] &= -a\xi_3 \\ [Y_2, \xi_3] &= 0 \\ [Y_2, \xi_4] &= 0 \\ [\xi_3, \xi_4] &= 0 \end{aligned} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Se $a = 0$, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo de Engel E^4 .

Se $a \neq 0$, a transformação

$$\begin{aligned} Y'_1 &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} Y_1 \\ Y'_2 &= \xi_3 \\ \xi'_3 &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \xi_4 \\ \xi'_4 &= aY_2 + \xi_4 \end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned} [Y'_1, Y'_2] &= \xi'_3 \\ [Y'_1, \xi'_3] &= -\operatorname{sgn}(a)Y'_2 \end{aligned}$$

$$[Y'_1, \xi'_4] = 0$$

$$[Y'_2, \xi'_3] = 0$$

$$[Y'_2, \xi'_4] = 0$$

$$[\xi'_3, \xi'_4] = 0$$

portanto, é um isomorfismo sobre a álgebra de Lie de

$$\begin{cases} \widetilde{Euc_2^+} \times \mathbb{R} & \text{se } a > 0; \\ Poinc_2^+ \times \mathbb{R} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Segundo caso: $\dim [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] = 2$

Temos duas possibilidades a considerar:

Possibilidade A): $[Y_2, \xi_3]$ pertence ao núcleo da $\mathcal{L}$

Neste caso, $b = 0$ e $c \neq 0$, e então $\beta = \{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, satisfazendo:

$$[Y_1, Y_2] = \xi_3$$

$$[Y_1, \xi_3] = \xi_4$$

$$[Y_1, \xi_4] = -a\xi_3$$

$$(a \in \mathbb{R}, c > 0)$$

$$[Y_2, \xi_3] = -cY_2$$

$$[Y_2, \xi_4] = -c\xi_3$$

$$[\xi_3, \xi_4] = -acY_2 - c\xi_4$$

A transformação

$$Y'_1 = \frac{1}{c}\xi_3$$

$$Y_2' = \frac{1}{c\sqrt{2}}((1 - \frac{a}{2})Y_2 - \xi_4)$$

$$\xi_3' = \frac{1}{c\sqrt{2}}((1 + \frac{a}{2})Y_2 + \xi_4)$$

$$\xi_4' = Y_1 - \frac{a}{c}Y_2 - \frac{1}{c}\xi_4$$

é tal que

$$[Y_1', Y_2'] = \xi_3'$$

$$[Y_1', \xi_3'] = Y_2'$$

$$[Y_1', \xi_4'] = 0$$

$$[Y_2', \xi_3'] = -Y_1'$$

$$[Y_2', \xi_4'] = 0$$

$$[\xi_3', \xi_4'] = 0$$

portanto, é um isomorfismo sobre a álgebra de Lie de $\widetilde{U(1,1)}$.

Possibilidade B): $[Y_2, \xi_3]$ não pertence ao núcleo de $\mathcal{L}$

Neste caso, $b \neq 0$, e então $\beta = \{Y_1, Y_2, \xi_3, \xi_4\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, satisfazendo:

$$[Y_1, Y_2] = \xi_3$$

$$[Y_1, \xi_3] = \xi_4$$

$$[Y_1, \xi_4] = -a\xi_3$$

$$(a \in \mathbb{R}, b \neq 0, c \geq 0)$$

$$[Y_2, \xi_3] = -bY_1 - cY_2$$

$$[Y_2, \xi_4] = -c\xi_3$$

$$[\xi_3, \xi_4] = -a(bY_1 + cY_2) - c\xi_4$$

Se $(ab + c^2) = 0$, a transformação

$$\begin{aligned} Y'_1 &= -\frac{1}{\sqrt{|b|}}Y_2 \\ Y'_2 &= bY_1 + cY_2 \\ \xi'_3 &= \frac{1}{\sqrt{|b|}}b\xi_3 \\ \xi'_4 &= -\frac{1}{\sqrt{|b|}}b^2\xi_4 + \frac{1}{\sqrt{|b|}}bc(bY_1 + cY_2) \end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned} [Y'_1, Y'_2] &= \xi'_3 \\ [Y'_1, \xi'_3] &= \operatorname{sgn}(b)Y'_2 \\ [Y'_1, \xi'_4] &= 0 \\ [Y'_2, \xi'_3] &= -\xi'_4 \\ [Y'_2, \xi'_4] &= 0 \\ [\xi'_3, \xi'_4] &= 0 \end{aligned}$$

portanto, é um isomorfismo sobre a álgebra de Lie de

$$\begin{cases} \widetilde{SO(2)} \ltimes H^3 & \text{se } b < 0; \\ SO_e(1, 1) \ltimes H^3 & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

Se $(ab + c^2) \neq 0$, a transformação

$$Y'_1 = -\frac{1}{b(ab + c^2)\sqrt{|b|}}\{b^2\xi_4 - bc(bY_1 + cY_2)\}$$

$$\begin{aligned}
Y_2' &= \frac{1}{\sqrt{|b(ab+c^2)|}}(bY_1 + cY_2) \\
\xi_3' &= -\frac{1}{|b|\sqrt{|ab+c^2|}}(b\xi_3) \\
\xi_4' &= ab^2Y_2 + b^2\xi_4 - b^2cY_1
\end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned}
[Y_1', Y_2'] &= \xi_3' \\
[Y_1', \xi_3'] &= \operatorname{sgn}(b)Y_2' \\
[Y_1', \xi_4'] &= 0 \\
[Y_2', \xi_3'] &= \operatorname{sgn}[b.(ab+c^2)]Y_1' \\
[Y_2', \xi_4'] &= 0 \\
[\xi_3', \xi_4'] &= 0
\end{aligned}$$

portanto, é um isomorfismo sobre a álgebra de Lie de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{U(1,1)'} & \text{se } b > 0, \quad (ab+c^2) < 0; \\ \widetilde{U(1,1)''} & \text{se } b < 0, \quad (ab+c^2) > 0; \\ \widetilde{U(1,1)'''} & \text{se } b > 0, \quad (ab+c^2) > 0; \\ \widetilde{U(2)} & \text{se } b < 0, \quad (ab+c^2) < 0. \end{array} \right.$$

A classificação completa está sumarizada na tabela 2.1. Na primeira coluna, listamos representativos G para os grupos de Lie 4-dimensionais simplesmente conexos, os quais são sub-simétricos de tipo Engel. Na segunda coluna, descrevemos a estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$: existe uma base $\{Y_1', Y_2', \xi_3', \xi_4'\}$ da álgebra de Lie de G tal que ξ_4' é central, $\xi_3' = [Y_1', Y_2']$ e A' é a matriz transposta de $\operatorname{ad}_{\xi_3'}$, restrita à base $\{Y_1', Y_2', \xi_4'\}$. Na terceira coluna, damos uma base ortonormal $\{Y_1, Y_2\}$ de $\mathfrak{p}$. As colunas seguintes listam os invariantes: 2Ω , μ_1 e μ_2 .

G	A'	$\{Y_1, Y_2\}$ é uma base o.n. de $\mathfrak{p}$	2Ω	μ_1	μ_2
E^4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = Y'_1$ $Y_2 = Y'_2$	0	0	0
$\widetilde{Euc}_2^+ \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \sqrt{b}Y'_1$ $Y_2 = \frac{1}{b}\xi'_4 - \frac{1}{\sqrt{b}}\xi'_3$	0	b	0
$Poinc_2^+ \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \sqrt{b}Y'_1$ $Y_2 = -\frac{1}{b}\xi'_4 + \frac{1}{\sqrt{b}}\xi'_3$	0	$-b$	0
$\widetilde{U(1,1)}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \frac{a}{2})Y'_2 + \xi'_4$ $\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{a}{2})\xi'_3$ $Y_2 = \frac{c}{\sqrt{2}}(Y'_2 + \xi'_3)$	0	a	c^2
$\widetilde{SO(2)} \ltimes H^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -\frac{1}{b}(Y'_2 + c\sqrt{b}Y'_1)$ $Y_2 = -\sqrt{b}Y'_1$	$-b$	a	0
$\widetilde{SO_e(1,1)} \ltimes H^3$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = \frac{1}{b}(Y'_2 + c\sqrt{b}Y'_1)$ $Y_2 = -\sqrt{b}Y'_1$	b	a	0
$\widetilde{U(2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b}Y'_1 - \{\sqrt{b(ab+c^2)}/b\}Y'_2$ $\quad - \{c/b(ab+c^2)\}\xi'_4$ $Y_2 = \sqrt{b}Y'_1 + \{1/b(ab+c^2)\}\xi'_4$	$-b$	a	$-(ab+c^2)$
$\widetilde{U(1,1)'}^{\prime}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b}Y'_1 + \{\sqrt{b(ab+c^2)}/b\}Y'_2$ $\quad + \{c/b(ab+c^2)\}\xi'_4$ $Y_2 = \sqrt{b}Y'_1 - \{1/b(ab+c^2)\}\xi'_4$	b	a	$-(ab+c^2)$
$\widetilde{U(1,1)''}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b}\xi'_3 - \{\sqrt{b(ab+c^2)}/b\}Y'_2$ $\quad + \{c/b(ab+c^2)\}\xi'_4$ $Y_2 = \sqrt{b}\xi'_3 - \{1/b(ab+c^2)\}\xi'_4$	$-b$	a	$ab+c^2$
$\widetilde{U(1,1)'''}^{\prime\prime\prime}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$Y_1 = -c\sqrt{b}Y'_1 + \{\sqrt{b(ab+c^2)}/b\}\xi'_3$ $\quad - \{c/b(ab+c^2)\}\xi'_4$ $Y_2 = \sqrt{b}Y'_1 + \{1/b(ab+c^2)\}\xi'_4$	b	a	$ab+c^2$

Tabela 2.1: Espaços sub-simétricos de tipo Engel: $\{Y'_1, Y'_2, \xi'_3 = [Y'_1, Y'_2], \xi'_4\}$ é uma base da álgebra de Lie de G , tal que ξ'_4 é central; A' é a matriz transposta de $\text{ad}_{\xi'_3}$ restrita à base $\{Y'_1, Y'_2, \xi'_4\}$; 2Ω , μ_1 e μ_2 são invariantes; a , b , c são parâmetros com $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, e $c > 0$ é tal que $(ab + c^2) > 0$.

Capítulo 3

Estrutura dos espaços sub-simétricos com distribuição fortemente geradora por colchetes

Neste capítulo definiremos distribuição fortemente geradora por colchetes. Construiremos uma métrica Riemanniana canônica para uma variedade sub-Riemanniana cuja distribuição associada é deste tipo. Apresentaremos um teorema de estrutura para espaços sub-simétricos munidos com este tipo de distribuição, via álgebras de Lie involutivas sub-ortogonais e utilizaremos esta estrutura para caracterizar as sub-torções.

3.1 Distribuição fortemente geradora por colchetes

Fixada uma distribuição $\mathcal{D}$ em uma variedade diferenciável M , dizemos que a distribuição $\mathcal{D}$ é *fortemente geradora por colchetes* quando dado $x \in M$ e qualquer seção local Z de $\mathcal{D}$ com $Z(x) \neq 0$, obtemos:

$$T_x M = \mathcal{D}_x + \{[Z, X]_x : X \text{ seção de } \mathcal{D}\}$$

No que segue, $\mathcal{L}$ denota a forma de Levi de $\mathcal{D}$ definida por:

$$\mathcal{L}_x : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \rightarrow T_x M / \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{L}_x(v, w) = [V, W]_x \mod \mathcal{D}_x$$

onde V, W são extensões de v, w às seções de $\mathcal{D}$.

Observamos que, em termos da forma de Levi de $\mathcal{D}$, a condição $\mathcal{D}$ fortemente geradora por colchetes é equivalente a: dado $x \in M$ e $v \in \mathcal{D}_x$, $v \neq 0$, o operador linear $\mathcal{L}_x(v, \cdot)$ é sobrejetor. É claro que quando $\mathcal{D}$ tem codimensão um essa condição é equivalente à condição de contato.

Dada, uma variedade diferenciável M , seja $T^*M = \{(x, \lambda) : x \in M, \lambda \in T_x^*M\}$ o fibrado cotangente de M . Denotemos por $\mathcal{D}^0$ o subfibrado vetorial de T^*M cuja fibra sobre o ponto $x \in M$ é o anulador de $\mathcal{D}_x$ em T_xM ie, $\mathcal{D}^0 = \{(x, \lambda) \in T^*M / \lambda(\mathcal{D}_x) = 0\}$, por simplicidade diremos apenas que $\mathcal{D}^0 \subset T^*M$ é o anulador de $\mathcal{D}$ em TM .

3.2 Métrica associada a uma variedade sub-Riemanniana com distribuição fortemente geradora por colchetes

Os resultados desta seção correspondem a uma interpretação minuciosa de ([13], seção 7). Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ uma variedade sub-Riemanniana, $\mathcal{D}$ distribuição fortemente geradora por colchetes de posto n e codimensão d . Sejam $x \in M$, $\omega_x \in \mathcal{D}_x^0$ e ω uma seção local de $\mathcal{D}^0$ passando por ω_x . Se X, Y são seções locais de $\mathcal{D}$ próximas de x , então:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]),$$

em particular, $d\omega(X_x, Y_x) = -\omega_x([X, Y]_x)$, portanto $d\omega|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$ depende somente de ω_x e temos então bem definida a aplicação linear:

$$\begin{aligned} J_x : \mathcal{D}_x^0 &\longrightarrow \mathcal{D}_x^* \wedge \mathcal{D}_x^* \\ \omega_x &\longmapsto d\omega|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x} : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_x, Y_x) &\longmapsto d\omega(X_x, Y_x) = -\omega_x([X, Y]_x) \end{aligned}$$

onde X, Y são extensões horizontais de X_x, Y_x .

Observe que a aplicação J_x é injetora, pois se $\omega_x \in \mathcal{D}_x^0$ (ie $\omega_x(\mathcal{D}_x) = 0$) e $\omega_x([X, Y]_x) = 0$ $\forall X, Y$ seções locais de $\mathcal{D}$ próximas de x , então $\omega_x(T_xM) = 0$, ou seja ω_x é identicamente nula, uma vez que $\mathcal{D}$ é fortemente geradora por colchetes.

Assim sendo, como a métrica g definida em $\mathcal{D}$ induz naturalmente uma métrica Riemanniana em $\mathcal{D}^* \wedge \mathcal{D}^*$, temos uma métrica Riemanniana natural, denotada por g^0 , definida em $\mathcal{D}^0$ induzida de $\mathcal{D}^* \wedge \mathcal{D}^*$, via J ($J : \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^* \wedge \mathcal{D}^*$).

Para cada seção local $\omega \in \mathcal{D}^0$ passando pelo ponto $x \in M$, definimos a aplicação linear:

$$\begin{aligned} (J\omega)_x : \mathcal{D}_x &\longrightarrow T_xM^* \\ v &\longmapsto i_v \circ d\omega : T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto d\omega(v, u) \end{aligned}$$

Se $\omega_x \neq 0$ então $(J\omega)_x$ é injetora. De fato, $(J\omega)_x(v) = 0$ é equivalente a $d\omega(v, T_xM) = 0$, em particular $d\omega(v, \mathcal{D}_x) = 0$, ou seja $\omega_x([V, \mathcal{D}]_x) = 0$, $\forall V$ extensão horizontal de v e isto implica que $v = 0$ ou $\omega_x(T_xM) = 0$ (visto que, da condição fortemente geradora por colchetes,

se $v \neq 0$, tem-se $T_x M = \mathcal{D}_x + [V, \mathcal{D}]_x$, e também por hipótese $\omega_x(\mathcal{D}_x) = 0$). Agora, por hipótese $\omega_x \neq 0$, assim a única possibilidade é $v = 0$, ou seja $(J\omega)_x$ é injetora.

Da injetividade de $(J\omega)_x$ segue que $\dim(J\omega)_x(\mathcal{D}_x) = \dim \mathcal{D}_x$. Também se $\omega_x \neq 0$ temos que $\mathcal{D}_x^0 \cap (J\omega)_x(\mathcal{D}_x) = 0$, pois se $i_v \circ d\omega \in \mathcal{D}_x^0$ para algum $v \in \mathcal{D}_x$ então $(i_v \circ d\omega)(\mathcal{D}_x) = d\omega(v, \mathcal{D}_x) = 0$, portanto $v = 0$ (pelo mesmo argumento acima, já que $\omega_x \neq 0$) e assim $i_v \circ d\omega = 0$. Observando-se então que $\mathcal{D}_x^0 + (J\omega)_x(\mathcal{D}_x) \subset T_x M^*$, segue que:

$$T_x M^* = \mathcal{D}_x^0 \oplus (J\omega)_x(\mathcal{D}_x) \quad \forall \text{ seção local } \omega \in \mathcal{D}^0 \text{ com } \omega_x \neq 0.$$

→ **Proposição 3.1** Para cada $x \in M$ e para cada seção local $\omega \in \mathcal{D}^0$, passando pelo ponto x com $\omega_x \neq 0$, existe um único vetor $(\xi_\omega)_x \in (T_x M - \mathcal{D}_x)$ tal que :

- i) $\omega_x(\xi_\omega)_x = 1$;
- ii) $\eta_x(\xi_\omega)_x = 0 \quad \forall \eta_x \perp \omega_x \quad (\eta_x \in \mathcal{D}_x^0)$;
- iii) $(i_{(\xi_\omega)_x} \circ d\omega)|_{\mathcal{D}_x} = 0$.

Prova:

Consideremos o $(n + d - 1)$ subespaço de $T_x M^*$, dado por $(S_\omega)_x = \{\eta_x \in \mathcal{D}_x^0 : \eta_x \perp \omega_x\} \oplus (J\omega)_x(\mathcal{D}_x)$. Notemos que $(S_\omega)_x$ é transversal ao subespaço $\mathbb{R}\omega_x$. Seja agora, $(L_\omega)_x$ o subespaço 1-dimensional de $T_x M$ anulado por $(S_\omega)_x$. Então, temos que $(L_\omega)_x$ é transversal ao núcleo de ω_x . Definimos $(\xi_\omega)_x$ como o único vetor em $(L_\omega)_x$ satisfazendo $\omega_x(\xi_\omega)_x = 1$. □

Proposição 3.2 Se norma de ω é constante, então $(\xi_\omega)_x$ só depende de ω no ponto x .

Prova:

Suponhamos que $\tilde{\omega}$ é outra seção de $\mathcal{D}^0$ passando pelo ponto x , com $\omega_x = \tilde{\omega}_x$ e $\|\omega\| = \|\tilde{\omega}\| = c$ (onde c denota uma constante). Afirmamos que, $\forall v \in \mathcal{D}_x$ tem-se $(i_v \circ d(\omega - \tilde{\omega}))_x \in \mathcal{D}_x^0$ e ortogonal a $\tilde{\omega}_x$. De fato, seja $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d\}$ referencial ortonormal local de $\mathcal{D}^0$ em torno de x . Então:

$$\omega = \sum_{i=1}^d f_i \theta^i \quad \tilde{\omega} = \sum_{i=1}^d g_i \theta^i \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^d f_i^2 = \sum_{i=1}^d g_i^2 = c \quad f_i(x) = g_i(x) \text{ para } i = 1, 2, \dots, d. \quad (3.2)$$

Portanto:

$$d\omega - d\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^d (df_i - dg_i) \wedge \theta^i + (f_i - g_i) d\theta^i$$

Calculando em x e aplicando i_v temos:

$$(i_v \circ d(\omega - \tilde{\omega})) = \sum_{i=1}^d [df_i(v) - dg_i(v)] \theta^i \quad (3.3)$$

Por outro lado, das equações (3.2) segue:

$$\sum_{i=1}^d g_i(x) [df_i(v) - dg_i(v)] = 0$$

que comparando com (3.1) e (3.3) é equivalente a:

$$g_x^0 (i_v \circ d(\omega - \tilde{\omega}), \tilde{\omega}) = 0.$$

Assim, da proposição [3.1], usando a condição *ii*) temos que $d(\omega - \tilde{\omega})(\mathcal{D}_x, (\xi_{\tilde{\omega}})_x) = 0$, e então da condição *iii*) $(i_{(\xi_{\tilde{\omega}})_x} \circ d\omega)|_{\mathcal{D}_x} = (i_{(\xi_{\tilde{\omega}})_x} \circ d\tilde{\omega})|_{\mathcal{D}_x} = 0$, e o resultado segue da unicidade de $(\xi_{\omega})_x$.

□

Portanto, se $U \subset M$ é tal que $\omega_x \neq 0 \ \forall \ x \in U$, então fica definido um campo ξ_{ω} em U , dado por $\xi_{\omega} : x \in U \mapsto (\xi_{\omega})_x$.

Cálculo de ξ_{ω} em coordenadas

Sejam $\{E_i, \tilde{E}_{\alpha}\}$ referencial local definido em $U \subset M$ (restringindo U se necessário) com $\{E_i\}$ base ortonormal local de $\mathcal{D}$, e $\{\theta^i, \tilde{\theta}^{\alpha}\}$ o referencial dual associado. Então $\{\bar{\theta}^i = \theta^i|_{\mathcal{D}}\}$ é base ortonormal de $\mathcal{D}^*$ e $\{\tilde{\theta}^{\alpha}\}$ é base de $\mathcal{D}^0$. Ortonormalizamos $\{\tilde{\theta}^{\alpha}\}$ e obtemos uma base ortonormal $\{\theta^{\alpha}\}$ de $\mathcal{D}^0$. Considere-se então $\{E_i, E_{\alpha} = \xi_{\theta^{\alpha}}\}$ novo referencial definido em U .

$$\text{Temos: } \omega = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} a_{\alpha} \theta^{\alpha} \text{ (pois } \omega \in \mathcal{D}^0) \quad , \quad \xi_{\omega} = \sum_{j=1}^n X^j E_j + \sum_{\beta=n+1}^{n+d} X^{\beta} E_{\beta}$$

$$\eta \in \mathcal{D}^0 \quad e \quad \eta \perp \omega \implies \eta = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} b_{\alpha} \theta^{\alpha} \quad e \quad \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} a_{\alpha} b_{\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \eta(\xi_{\omega}) = 0 \quad \forall \quad \eta \perp \omega &\implies \sum_{\beta=n+1}^{n+d} b_{\beta} X^{\beta} = 0 \quad \forall \quad b_{\beta} \quad \text{tal que} \quad \sum_{\beta=n+1}^{n+d} a_{\beta} b_{\beta} = 0 \\ &\implies \underline{X^{\beta} = \lambda \ a_{\beta} \quad \text{para} \quad \beta = n+1, \dots, n+d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(\xi_\omega) = 1 &\implies \sum_{\beta=n+1}^{n+d} a_\beta X^\beta = 1 \implies \sum_{\beta=n+1}^{n+d} a_\beta (\lambda a_\beta) = 1 \implies \lambda \sum_{\beta=n+1}^{n+d} (a_\beta)^2 = 1 \\
&\implies \lambda \|\omega\|^2 = 1 \implies \lambda = \frac{1}{\|\omega\|^2}
\end{aligned}$$

Logo:

$$X^\beta = \frac{a_\beta}{\|\omega\|^2} \quad \text{para } \beta = n+1, \dots, n+d. \quad (3.4)$$

Falta determinar X^j para $j = 1, \dots, n$; para tal usaremos a condição $(i_{\xi_\omega} \circ d\omega)|_{\mathcal{D}} = 0$.
Temos:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (da_\alpha \wedge \theta^\alpha + a_\alpha d\theta^\alpha) \\
i_{\xi_\omega} \circ d\omega &= \sum_{j=1}^n X^j (i_{E_j} \circ d\omega) + \sum_{\beta=n+1}^{n+d} X^\beta (i_{E_\beta} \circ d\omega) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} (X^j \frac{\partial a_\alpha}{\partial E_j} \theta^\alpha + X^j a_\alpha (i_{E_j} \circ d\theta^\alpha)) + \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta=n+1}^{n+d} (X^\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial E_\beta} \theta^\alpha - X^\beta \delta_\alpha^\beta da_\alpha + X^\beta a_\alpha (i_{E_\beta} \circ d\theta^\alpha))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i_{\xi_\omega} \circ d\omega)|_{\mathcal{D}} = 0 &\implies \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} X^j a_\alpha (i_{E_j} \circ d\theta^\alpha)|_{\mathcal{D}} - \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} X^\alpha da_\alpha|_{\mathcal{D}} \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta=n+1}^{n+d} X^\beta a_\alpha (i_{E_\beta} \circ d\theta^\alpha)|_{\mathcal{D}} = 0 \\
&\implies \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\alpha=n+1}^{n+d} a_\alpha d\theta^\alpha(E_j, E_k) \right) X^j = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \frac{a_\alpha}{\|\omega\|^2} da_\alpha(E_k) \\
&\quad + \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \frac{a_\alpha}{\|\omega\|^2} d\theta^\alpha(E_k, \sum_{\beta=n+1}^{n+d} a_\beta E_\beta)
\end{aligned}$$

$$\forall \quad k = 1, \dots, n.$$

Supondo $\|\omega\|$ constante, temos $\sum_{\alpha=n+1}^{n+d} a_\alpha^2 = c$ (constante) e segue que $a_\alpha da_\alpha(E_k) = 0 \quad \forall k$.

Assim, se $\|\omega\|$ é constante a condição $(i_{\xi_\omega} \circ d\omega)|_{\mathcal{D}} = 0$ é equivalente à:

$$\sum_{j=1}^n \omega([E_j, E_k])X^j = \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \frac{a_\alpha}{\|\omega\|^2} d\theta^\alpha(E_k, \sum_{\beta=n+1}^{n+d} a_\beta E_\beta) \quad \forall \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Da condição fortemente geradora por colchetes, temos que a matriz $\omega([E_j, E_k])$ é inversível, e portanto quando $\|\omega\|$ é constante os X^j 's são unicamente determinados como solução do sistema linear (3.5) dado acima.

□

Vamos agora apresentar a construção da métrica canônica associada a M , objetivo principal desta seção.

$$\begin{aligned} \text{Consideremos a aplicação: } F : \mathcal{D}_x^0 - \{0\} &\longrightarrow (T_x M - \mathcal{D}_x) \\ \omega_x &\longmapsto (\xi_\omega)_x \end{aligned}$$

Observamos que F é não linear e que, fixada uma base ortonormal $(\theta^\alpha)_x$ de $\mathcal{D}_x^0$, temos d vetores $(\xi_{\theta^\alpha})_x$ linearmente independentes em $(T_x M - \mathcal{D}_x)$. Podemos portanto definir um produto interno $g_x^{\theta^\alpha}$ em $T_x M$: estabelecendo $(\xi_{\theta^\alpha})_x$ ortonormais e perpendiculares à $\mathcal{D}_x$.

Agora, o espaço S das bases ortonormais de $\mathcal{D}_x^0$ pode ser identificado com o grupo ortogonal compacto $O(d)$, através da aplicação: $A \in O(d) \mapsto A.(\theta^\alpha)_x \in S$.

Interessante seria se os d vetores $(\xi_{\theta^\alpha})_x$ e $(\xi_{A.(\theta^\alpha)})_x$ também mudassem por uma matriz ortogonal. Porém, em geral isso não é verdade. Para se certificar dessa afirmação basta observar que a restrição de $(\xi_{A.(\theta^\alpha)})_x$ à $\mathcal{D}_x$ está relacionada com a equação (3.5).

Assim, para se definir uma métrica intrínseca em M , consideremos a medida de Haar normalizada em $O(d)$ (a qual satisfaz $\mu(O(d)) = 1$) e definimos:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_x = \int_{O(d)} g_x^{A.(\theta^\alpha)_x}(\cdot, \cdot) d\mu(A) \quad (3.6)$$

A métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida como acima é tal que sua restrição à distribuição $\mathcal{D}$ coincide com a métrica g e é denominada extensão canônica de g .

Sob a hipótese fortemente geradora por colchetes, temos que toda isometria sub-Riemanniana de M é uma isometria Riemanniana na métrica Riemanniana canônica estendida sobre M . Assim, o grupo G de todas as isometrias sub-Riemannianas de M é um subgrupo (fechado) do grupo de todas as isometrias Riemannianas de M , portanto um grupo de Lie. Também o subgrupo de isotropia $K \subset G$ de um ponto $x_0 \in M$ é um subgrupo de isotropia cujos elementos são isometrias Riemannianas, portanto compacto.

3.3 Espaços sub-simétricos e álgebras de Lie involutivas sub-ortogonais associadas

Relembramos que um espaço sub-simétrico é uma variedade sub-Riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ tal que para cada ponto $x_0 \in M$ existe uma isometria sub-Riemanniana ψ , satisfazendo $\psi(x_0) = x_0$ e $\psi_*|_{\mathcal{D}_{x_0}} = -Id$.

Novamente, com argumento similar ao utilizado para as distribuições de Engel (Lema [2.2] e Corolário [2.1]) temos que a homogeneidade dos espaços sub-simétricos, no caso das distribuições fortemente geradora por colchetes, decorre da existência da sub-simetria em cada ponto. A compacidade do subgrupo de isotropia é, como observado anteriormente, consequência da extensão canônica da métrica sub-Riemanniana g . Finalmente, a condição $\psi^2 = Id$ (onde ψ é a sub-simetria) é demonstrada no lema abaixo.

Lema 3.1 *Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ variedade sub-Riemanniana, com $\mathcal{D}$ fortemente geradora por colchetes. Seja $x \in M$ e $\sigma : M \rightarrow M$ uma sub-isometria satisfazendo $\sigma(x) = x$ e $\sigma_*|_{\mathcal{D}_x} = Id$, então $\sigma = Id_M$.*

Prova:

Sejam X, Y seções locais de $\mathcal{D}$ passando por x , então:

$$\sigma_*([X, Y]) = [\sigma_*X, \sigma_*Y] \Rightarrow \sigma_*([X, Y]_x) - [X, Y]_x \in \mathcal{D}_x.$$

Como, $T_x M = \mathcal{D}_x + \{[Z, X]_x : X \text{ seção de } \mathcal{D}\}$ para qualquer seção local Z de $\mathcal{D}$ com $Z(x) \neq 0$, segue que $\sigma_*(v) - v \in \mathcal{D}_x$, $\forall v \in T_x M$. Por outro lado, usando a extensão canônica da métrica g , temos $T_x M = \mathcal{D}_x \oplus \mathcal{D}_x^\perp$ e $\sigma_*(\mathcal{D}_x^\perp) = \mathcal{D}_x^\perp$. Portanto, em particular, se $v \in \mathcal{D}_x^\perp$ então $\sigma_*(v) - v \in \mathcal{D}_x$ e $\sigma_*(v) - v \in \mathcal{D}_x^\perp$, ou seja $\sigma_*(v) = v$. Como σ é uma isometria Riemanniana na métrica estendida, temos o resultado desejado. $\square$

Associaremos agora um objeto linear a um espaço sub-simétrico com distribuição fortemente geradora por colchetes. Para o caso particular de distribuições de contato os resultados desta seção encontram-se em [2].

No que segue $\mathcal{D}$ é uma distribuição de posto n e codimensão d .

Teorema 3.1 *Seja $(M, \mathcal{D}, g)$ um espaço sub-simétrico com distribuição fortemente geradora por colchetes e G o grupo de Lie de todas as isometrias sub-Riemannianas de M . Consideremos $x_0 \in M$, seja K o subgrupo de isotropia em x_0 e $\psi \in K$ a sub-simetria em x_0 . Sejam*

$\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as respectivas álgebras de Lie de G e K , e finalmente seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ a decomposição de $\mathfrak{g}$ nos ± 1 -auto espaços da involução $s = Ad_\psi$ de $\mathfrak{g}$. Então:

- a. M é representado como o espaço das classes G/K ;
- b. a projeção $\pi : G \rightarrow M$, dada por $\pi(g) = g(x_0)$, tem diferencial $(\pi_*)|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \cong \mathcal{D}_{x_0}$;
- c. $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$, compacta, de codimensão d que não contém ideais não nulos de $\mathfrak{g}$;
- d. se $k \in K$ e $X \in \mathfrak{p}$, então $\pi_*(Ad_k X) = k_*(\pi_* X)$;
- e. o produto interno B induzido sobre $\mathfrak{p}$ pela identificação de $\mathfrak{p}$ com $\mathcal{D}_{x_0}$ é Ad_K -invariante,
- f. $\forall X \in \mathfrak{p}$ o operador linear $\Theta_X : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ definido por $\Theta_X(Y) = [X, Y] \bmod \mathfrak{k}$ é sobrejetor.

Prova:

a. é imediata se observarmos que a ação de G em M é transitiva e preserva a estrutura sub-Riemanniana. Visto que a métrica sub-Riemanniana g se estende canonicamente a uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre M (vide seção [3.2]), G é um grupo de isometrias Riemannianas relativas a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e então K é compacto. Assim, existe uma decomposição Ad_K -invariante $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Consideremos a projeção $\pi : G \rightarrow M$, $\pi(g) = g(x_0)$. Temos que π_* identifica $\mathfrak{m}$ com $T_{x_0}M$ e que a Ad_K -ação sobre $\mathfrak{m}$ e a K -ação sobre $T_{x_0}M$ são π_* -equivalentes, isto é, $\pi_*(Ad_k X) = k_*(\pi_* X) \quad \forall k \in K, \forall X \in \mathfrak{m}$. Definimos $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{m}$ como a imagem inversa de $\mathcal{D}_{x_0}$ através de π_* . Então, $Ad_K(\mathfrak{p}_0) \subset \mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$, uma vez que $\psi_*|_{\mathcal{D}_{x_0}} = -Id$. Segue-se que, o produto interno g_{x_0} levantado para $\mathfrak{p}_0$ através de π_* , denotado por B , é Ad_K -invariante. Também, segue-se que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_0 + [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0]$ é uma decomposição Ad_K -invariante, visto que $\mathcal{D}$ é uma distribuição fortemente geradora por colchetes. Agora, Ad_K é efetivo sobre $\mathfrak{m}$ (porque K é efetivo sobre $T_{x_0}M$), e isto implica que Ad_K é efetivo sobre $\mathfrak{p}_0$ (uma vez que $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ é gerado por $\mathfrak{p}_0$ módulo $\mathfrak{k}$, devido à condição fortemente geradora por colchetes), ou equivalentemente que o centralizador de $\mathfrak{p}_0$ em $\mathfrak{k}$ é zero. Portanto, $\mathfrak{k}$ não contém ideais não nulos de $\mathfrak{g}$, pois se $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{k}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ então $\mathfrak{A}$ está no centralizador de $\mathfrak{p}_0$ em $\mathfrak{k}$. Seja $X \in \mathfrak{k}$ and $Y \in \mathfrak{p}_0$, temos

$$[X - s(X), Y] = [X, Y] - [s(X), Y] = [X, Y] + s([X, Y]) = [X, Y] - [X, Y] = 0$$

e assim $ad_{X-s(X)}[\mathfrak{p}_0] = 0$, logo $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$. Portanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0]$ e $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. Isso conclui a demonstração de b., c., d., e. Finalmente, Θ sobre $\mathfrak{p}$ é equivalente à $\mathcal{L}_{x_0}$ sobre $\mathcal{D}_{x_0}$; assim, f. segue da condição fortemente geradora por colchetes.

□

Para um ponto x_0 de um espaço sub-simétrico com distribuição fortemente geradora por colchetes associamos uma quádrupla $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real; s é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$ (auto espaço $+1$ de s), compacta, de codimensão d e que não contém ideais não nulos de $\mathfrak{g}$ e B é um produto interno $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -invariante sobre $\mathfrak{p}$ (auto espaço -1 de s). Além disso, $\forall X \in \mathfrak{p}$ o operador Θ_X é sobrejetor. A quádrupla $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é denominada *álgebra de Lie involutiva sub-ortogonal (LISO-álgebra)* de M em x_0 . Como M é homogêneo, suas LISO-álgebras são as mesmas em todos os pontos

Uma LISO-álgebra abstrata é uma quádrupla $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ com as propriedades do parágrafo anterior. Uma *subálgebra de Lie involutiva sub-ortogonal (LISO-subálgebra)* de $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é uma LISO-álgebra $(\mathfrak{g}', s', \mathfrak{k}', B')$ tal que $\mathfrak{g}'$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, s' é a restrição de s à $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}'$ é uma subálgebra de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ e $B' = B$.

Dado uma LISO-álgebra abstrata $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ podemos construir um espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, com distribuição fortemente geradora por colchetes, como segue. Sejam $\tilde{G}$ o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ a decomposição de $\mathfrak{g}$ nos ± 1 -auto-espacos de s e $\tilde{K} \subset \tilde{G}$ o subgrupo conexo associado à subálgebra $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Consideremos a variedade simplesmente conexa $M = \tilde{G}/\tilde{K}$ e a projeção $\pi : \tilde{G} \rightarrow M$ dada por $\pi(g) = g\tilde{K} = g(x_0)$, onde x_0 é a classe $\tilde{K}$. Então o subespaço $\mathcal{D}_{x_0} = \pi_*(\mathfrak{p}) \subset T_{x_0}M$ e o produto interno B -projetado para $\mathcal{D}_{x_0}$ através de π_* , denotado por g_{x_0} , são $\tilde{K}$ -invariantes, visto que $\pi_*(\text{Ad}_k X) = (dL_k)_{x_0}(\pi_* X) \quad \forall k \in \tilde{K}, \forall X \in \mathfrak{p}$, onde $L_k : M \rightarrow M$, $L_k(g\tilde{K}) = kg\tilde{K}$. Seja $\mathcal{D}$ a distribuição $\tilde{G}$ -invariante sobre M determinada por $\mathcal{D}_{x_0}$. A distribuição $\mathcal{D}$ assim definida é fortemente geradora por colchetes, pois o operador linear Θ_X é sobrejetor $\forall X \in \mathfrak{p}$. Seja g a métrica $\tilde{G}$ -invariante sobre $\mathcal{D}$ determinada por g_{x_0} . O automorfismo s de $\mathfrak{g}$ induz um automorfismo φ de $\tilde{G}$ tal que $\varphi_* = s$, o qual se estende a uma transformação $\psi : M \rightarrow M$ definida por $\psi(g\tilde{K}) = \varphi(g)\tilde{K}$. Então ψ é uma isometria sub-Riemanniana de M relativa à métrica sub-Riemanniana g e também $\psi_*(\pi_* X) = \pi_*(sX) = -\pi_* X \quad \forall X \in \mathfrak{p}$, assim ψ fixa x_0 e ψ_* é -1 sobre $\mathcal{D}_{x_0}$. Portanto ψ é a sub-simetria em x_0 e $\phi_{g(x_0)} : M \rightarrow M$ definida por $\phi_{g(x_0)}(x) = g\psi g^{-1}(x)$ é a sub-simetria em $g(x_0)$. Provamos então que M é sub-simétrico com distribuição fortemente geradora por colchetes.

Proposição 3.3 *Seja $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ uma LISO-álgebra abstrata. Seja M o espaço sub-simétrico com distribuição fortemente geradora por colchetes, simplesmente conexo, construído a partir de $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$. Então $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é uma LISO-subálgebra da LISO-álgebra associada à M .*

Prova:

De fato, sejam $\tilde{G}$ e $\tilde{K}$ os grupos de Lie construídos a partir da LISO-álgebra abstrata $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$, como no parágrafo anterior. Seja G' o grupo de Lie de todas as isometrias

sub-Riemannianas de $M = \tilde{G}/\tilde{K}$, $K' \subset G'$ o subgrupo de isotropia em $x_0 \in M$ (onde x_0 é a classe $\tilde{K}$) e construímos a LISO-álgebra associada $(\mathfrak{g}', s', \mathfrak{k}', B')$. Consideremos o homomorfismo de grupos $f : \tilde{G} \rightarrow G'$ dado por $f(g) = \bar{L}_g : M \rightarrow M$, $\bar{L}_g(x) = g.x \quad \forall x \in M$. Como G' possui a topologia compacto-aberta, temos que f é contínuo ($\mathcal{C}^\infty$), pois um aberto em G' é da forma $\mathcal{A}(C, U) = \{g' \in G' / g'(C) \subset U\}$ onde $C \subset M = \tilde{G}/\tilde{K}$ é compacto e $U \subset M$ é aberto e assim $f^{-1}(\mathcal{A}(C, U)) = \{\tilde{g} \in \tilde{G} / \bar{L}_{\tilde{g}}(C) \subset U\}$ é aberto, uma vez que a ação de $\tilde{G}$ em M é contínua. Denotamos por $\tilde{Z}$ o núcleo da aplicação f e observamos que $\tilde{Z}$ está contido em $\tilde{K}$. Temos que $G_0 = \tilde{G}/\tilde{Z}$ é isomorfo ao subgrupo $f(\tilde{G}) \subset G'$ e $K_0 = \tilde{K}/\tilde{Z}$ é isomorfo ao subgrupo $f(\tilde{K}) \subset K'$. Visto que $\mathfrak{k}$ não contém ideais não nulos de $\mathfrak{g}$, $\tilde{Z}$ é discreto, assim $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ são as álgebras de Lie de G_0 e K_0 , e temos as inclusões de subálgebras de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}'$. Também o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0 & \subset & G' & & \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' & & \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}' \\
 \tilde{G}/\tilde{K} \cong G_0/K_0 & & G'/K' & \xrightarrow{\text{induz}} & \pi_* \downarrow \cong \cong \downarrow \pi'_* \\
 \parallel & & \parallel & & \mathcal{D}_{x_0} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{D}_{x_0} \\
 M & \xrightarrow{\text{Id}} & M & &
 \end{array}$$

Portanto $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, $s' = s|_{\mathfrak{g}'}$ e $B = B'$.

□

A importância deste resultado decorre da

Proposição 3.4 *Sejam $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B) \subset (\mathfrak{g}', s', \mathfrak{k}', B')$ LISO-álgebras, sejam M e M' os espaços sub-simétricos, simplesmente conexos, com distribuições fortemente geradoras por colchetes correspondentes. Então M e M' são isométricos.*

Prova:

Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' + \mathfrak{p}'$ sob s e s' , respectivamente. Denotemos $M = \tilde{G}/\tilde{K}$ e $M' = \tilde{G}'/\tilde{K}'$, onde $\tilde{G}$ e $\tilde{G}'$ são os grupos simplesmente conexos determinados por $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$. Integrando a inclusão $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$ obtemos $f : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ homomorfismo com núcleo discreto. Como $\text{Lie}(\tilde{K}) = \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}' = \text{Lie}(\tilde{K}')$ temos $f(\tilde{K}) \subset \tilde{K}'$. Assim, fica induzida uma aplicação $\bar{f} : M = \tilde{G}/\tilde{K} \rightarrow M' = \tilde{G}'/\tilde{K}'$ dada por $\bar{f}(\tilde{g}\tilde{K}) = f(\tilde{g})\tilde{K}'$. A aplicação $\bar{f}$ é sobrejetora, pois $M = (\exp \mathfrak{m})(x_0)$, $M' = (\exp \mathfrak{m}')(x_0')$ e $f(\exp \mathfrak{m}) = \exp \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$,

x_0 e x'_0 são as classes $\tilde{K}$ e $\tilde{K}'$. Agora $M' = \tilde{G}''/\tilde{K}''$ onde $\tilde{G}'' = f(\tilde{G})$, $\tilde{K}'' = f(\tilde{G}') \cap \tilde{K}'$ e então $f(\tilde{K}) \subset \tilde{K}''$ e $\bar{f}: \tilde{G}/\tilde{K} \rightarrow \tilde{G}''/\tilde{K}''$. Visto que o núcleo do homomorfismo f é discreto, $Lie(\tilde{G}'') = Lie(\tilde{G}) = \mathfrak{g}$ e $Lie(f(\tilde{K})) = Lie(\tilde{K}) = \mathfrak{k} \subset Lie(\tilde{K}'')$. Mas,

$$\dim \tilde{K}'' = \dim \tilde{G}'' - \dim M' = \dim f(\tilde{G}) - [\dim(\mathfrak{p}') + d] = \dim \tilde{G} - \dim M = \dim \tilde{K}$$

portanto $Lie(\tilde{K}'') = \mathfrak{k}$. Logo, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{f} & \tilde{G}'' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M = \tilde{G}/\tilde{K} & \xrightarrow[\bar{f}]{} & \tilde{G}''/\tilde{K}'' = M' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & Id \\ & \mathfrak{g} & \longrightarrow \mathfrak{g} \\ & \pi_* \downarrow & \downarrow \pi'_* \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{k} & \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \\ & & (d\bar{f})_{x_0} \end{array}$$

e então $(d\bar{f})_{x_0} = Id$. Portanto $\bar{f}$ é difeomorfismo local em x_0 , como $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ e $B = B'$ segue que $\bar{f}$ é isometria sub-Riemanniana local em x_0 . Agora $\bar{f}$ é equivariante (isto é, $\bar{f} \circ L_{\tilde{g}} = L'_{f(\tilde{g})} \circ \bar{f}$, $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}$, onde $L_{\tilde{g}}: M \rightarrow M$ e $L'_{f(\tilde{g})}: M' \rightarrow M'$ são as translações à esquerda), B e $\mathfrak{p}$ são $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariantes e as estruturas sub-Riemannianas de M e M' são as transladas de B e $\mathfrak{p}$, assim $\bar{f}$ é isometria sub-Riemanniana local em todos os pontos. Sendo M e M' completas temos que $\bar{f}$ é um recobrimento. Como M' é simplesmente conexa, $\bar{f}$ é difeomorfismo global, portanto isometria global.

□

No sentido oposto, podemos enunciar a

Proposição 3.5 *Sejam M um espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, com distribuição fortemente geradora por colchetes, $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ a LISO-álgebra associada e $\tilde{M}$ o espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, construído a partir de $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$. Então M e $\tilde{M}$ são isométricos.*

Prova:

De fato, denotemos $M = G/K$ e $\tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{K}$ onde G é o grupo de Lie de todas as isometrias sub-Riemannianas de M , K é o subgrupo de isotropia em $x_0 \in M$, $\tilde{G}$ é o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\tilde{K} \subset \tilde{G}$ é o grupo conexo definido por $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Como $\tilde{G}$ é simplesmente conexo e $Lie(\tilde{G}) = \mathfrak{g} = Lie(G)$, existe um recobrimento $r: \tilde{G} \rightarrow G$ tal que $r_* = Id$. Também $Lie(\tilde{K}) = \mathfrak{k} = Lie(K)$ implica que $r(\tilde{K}) \subset K$, assim r induz uma

aplicação sobrejetora $\bar{r} : \widetilde{M} \rightarrow M$, dada por $\bar{r}(\tilde{g}\tilde{K}) = r(\tilde{g})K$. Temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ sob s e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G} & \xrightarrow{r} & G \\
 \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \widetilde{M} = \tilde{G}/\tilde{K} & \xrightarrow{\bar{r}} & G/K = M
 \end{array}
 \quad \text{induz} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{Id} & \mathfrak{g} \\
 \tilde{\pi}_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\
 \mathfrak{g}/\mathfrak{k} & \xrightarrow{(d\bar{r})_{\tilde{x}_0}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{k}
 \end{array}$$

portanto $(d\bar{r})_{\tilde{x}_0} = Id$, onde $\tilde{x}_0 = 1\tilde{K}$. Como o produto interno em $\tilde{\pi}_*(\mathfrak{p})$ e em $\pi_*(\mathfrak{p})$ são os mesmos temos que $\bar{r}$ é isometria sub-Riemanniana local em $\tilde{x}_0$. Agora $\bar{r}$ é equivariante, e as estruturas sub-Riemannianas de M e $\widetilde{M}$ são preservadas pelas respectivas ações de G e $\tilde{G}$, então segue que $\bar{r}$ é isometria sub-Riemanniana local em todos os pontos. Mas M e $\widetilde{M}$ são homogêneas, portanto completas, assim $\bar{r}$ é um recobrimento sub-Riemanniano. Finalmente, M é simplesmente conexo, $\bar{r}$ é isometria global.

□

Para facilitar os cálculos temos a

Proposição 3.6 *Se $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é uma LISO-álgebra então ela admite uma LISO-subálgebra $(\mathfrak{g}', s', \mathfrak{k}', B')$ tal que $[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = \mathfrak{h}'$.*

Prova:

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ sob s . Consideremos $\mathfrak{g}' = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ (é claro que $\mathfrak{g}'$ assim definida é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, na verdade, um ideal) e definimos $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \mathfrak{k} \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, $s' = s|_{\mathfrak{g}'}$ e $B' = B$.

□

3.4 Métrica canônica no caso sub-simétrico

Para os espaços sub-simétricos podemos caracterizar a métrica canônica, definida pela relação (3.6), em termos da sua estrutura de LISO-álgebra. Com esta finalidade apresentamos na sequência duas proposições e um lema preliminares.

Proposição 3.7 *Seja $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ LISO-álgebra abstrata com $\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$, então o produto interno $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariante B , definido sobre $\mathfrak{p}$, se estende intrinsecamente a um produto interno $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariante $\overline{B}$ sobre $\mathfrak{g}$.*

Prova:

Sejam $\mathfrak{p}^*$ e $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^*$ os espaços vetoriais duais de $\mathfrak{p}$ e $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{Consideremos a aplicação } j : [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^* &\longrightarrow \mathfrak{p}^* \wedge \mathfrak{p}^* \\ \rho &\longmapsto \rho([\cdot, \cdot]) \end{aligned}$$

Temos que j é injetora e $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariante (ie, $j \circ ad_{\mathfrak{k}} = ad_{\mathfrak{k}} \circ j$). Como um produto interno $ad_{\mathfrak{k}}$ invariante sobre $\mathfrak{p}$ induz naturalmente um produto interno $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariante sobre $\mathfrak{p}^* \wedge \mathfrak{p}^*$, este produto interno pode ser j -levantado para $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^*$. Assim, temos um produto interno $ad_{\mathfrak{k}}$ -invariante definido em $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^*$. Como $\mathfrak{g}^* = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^* \oplus \mathfrak{p}^*$ o resultado segue. $\square$

Proposição 3.8 *Sejam $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ LISO-álgebra abstrata com $\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}^\perp$ o complemento $\overline{B}$ -ortogonal de $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p})$ em $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^\perp \oplus \mathfrak{p}$ e $\pi_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ a projeção. Então, dado $\omega \neq 0 \in \mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{m}^*$, existe um único vetor $(\xi^\omega) \in \mathfrak{m} = \mathfrak{k}^\perp \oplus \mathfrak{p}$ tal que :*

- i) $\omega(\xi^\omega) = 1$;
- ii) $\eta(\xi^\omega) = 0 \quad \forall \eta \perp \omega \quad (\eta \in \mathfrak{p}^0)$;
- iii) $\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[\xi^\omega, v]) = 0, \quad \forall v \in \mathfrak{p}$.

Além disso, a condição iii) $\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[\xi^\omega, v]) = 0, \quad \forall v \in \mathfrak{p}$ é equivalente a $\xi^\omega \in \mathfrak{k}^\perp$.

Prova:

A existência e unicidade de (ξ^ω) pode ser demonstrada da mesma maneira que na prova da proposição 3.1, substituindo naquela demonstração $T_x M$ por $\mathfrak{m}$, $\mathcal{D}_x^0$ por $\mathfrak{p}^0$, $(J\omega)_x(\mathcal{D}_x)$ por $\{\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[v, \cdot]) : \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R} / v \in \mathfrak{p}\}$. A equivalência entre iii) e a condição $\xi^\omega \in \mathfrak{k}^\perp$, prova-se como segue: seja $\xi^\omega \in \mathfrak{m}$, $\xi^\omega = \xi_1 + \xi_2$ com $\xi_1 \in \mathfrak{k}^\perp$ e $\xi_2 \in \mathfrak{p}$. Temos, $\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[\xi^\omega, v]) = 0, \forall v \in \mathfrak{p}$ se, e somente se $\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[\xi_2, v]) = 0, \forall v \in \mathfrak{p}$, uma vez que $\omega \in \mathfrak{p}^0$ e $[\xi_1, v] \in \mathfrak{p} \forall v \in \mathfrak{p}$. Agora, da hipótese fortemente geradora por colchetes temos: se $\xi_2 \neq 0$ então $\{\pi_{\mathfrak{m}}[\xi_2, v] : v \in \mathfrak{p}\} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Portanto, $\omega \neq 0 \in \mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{m}^*$ e $\omega(\pi_{\mathfrak{m}}[\xi_2, v]) = 0 \forall v \in \mathfrak{p}$ implica que $\xi_2 = 0$. $\square$

O próximo lema juntamente com sua demonstração encontra-se em [12].

Lema 3.2 *Sejam G um grupo de Lie e $K \subset G$ um subgrupo fechado, com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ respectivamente. Seja $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço complementar de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$ e seja $s : U \subset G/K \rightarrow G$ uma seção local tal que $1K \in U$, $s(1K) = 1$ e tal que a imagem de $(ds)_{1K}$ seja $\mathfrak{m}$. Para $v \in \mathfrak{g}$ definimos um campo $\vec{V}$ em U fazendo $\vec{V}_{gK} = (d\overline{L}_{s(gK)})_{1K}(\pi_*(v))$, onde $\pi : G \rightarrow G/K$ é a projeção e $\overline{L}_{s(gK)} : G/K \rightarrow G/K$ é a translação à esquerda por $s(gK)$. Então para $v, w \in \mathfrak{m}$ temos $[\vec{V}, \vec{W}]_{1K} = \overline{[V, W]}_{1K} = \pi_*([v, w])$.*

Prova:

Seja $gK \in U$ e suponha $g = s(gK)$. Diferenciando a identidade $\pi \circ L_g = \bar{L}_g \circ \pi$ no ponto 1 e aplicando sobre um vetor $v \in \mathfrak{g}$ concluímos que:

$$\vec{V}_{gK} = d\pi_g(V_g^L), \quad (3.7)$$

onde V^L é o campo invariante à esquerda tal que $V_1^L = v$.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Basta mostrar que $[\vec{V}, \vec{W}]_{1K}$ e $[\overline{V}, \overline{W}]_{1K} = \pi_*([v, w])$ coincidem quando aplicados sobre f (como derivadas direcionais). Segue de (3.7) que:

$$\vec{V}(f) = V^L(f \circ \pi) \circ s. \quad (3.8)$$

Como $\pi_* \circ ds_{1K} = Id$ e $w \in \mathfrak{m}$ temos $ds_{1K} \circ \pi_*(w) = w$. Aplicando o vetor $\vec{W}_{1K} = \pi_*(w)$ nos dois lados de (3.8) vem:

$$\vec{W}\vec{V}(f)_{1K} = W^L V^L(f \circ \pi)_1. \quad (3.9)$$

Trocando os papéis de v e w em (3.9) e subtraindo as duas equações obtidas segue o resultado desejado. □

Observação 3.1 *Sempre existem seções locais como as enunciadas no lema (3.2). Podemos, por exemplo, considerar a inversa da restrição de π à imagem pela exponencial de um aberto suficientemente pequeno contendo a origem em $\mathfrak{m}$.*

Enunciamos agora o resultado principal desta seção

Teorema 3.2 *Seja $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ uma LISO-álgebra abstrata com $\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$ e $M = G/K$ o espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, associado. Então, a métrica canônica definida em $M = G/K$ é a métrica G -invariante determinada no ponto base pelo produto interno $\bar{B}$ projetado através de π_* .*

Prova:

Como G/K é homogêneo basta verificar que estas métricas coincidem no ponto base. Consideramos a projeção $\pi : G \rightarrow G/K$ e temos que π_* identifica $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^\perp \oplus \mathfrak{p}$ com $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) = T_{x_0}M$ (onde x_0 é classe $1K$) e $\mathfrak{p}$ com D_{x_0} . Com esta identificação π_* corresponde à $\pi\mathfrak{m}$ e o produto interno canônico definido em $\mathcal{D}_{x_0}^0 \equiv \mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{m}^*$, denotado por $g_{x_0}^0$, corresponde ao produto interno induzido de $\mathfrak{p}^* \wedge \mathfrak{p}^*$ através da aplicação injetora $J : \mathfrak{p}^0 \rightarrow \mathfrak{p}^* \wedge \mathfrak{p}^*$, $J(\rho) = \rho(\pi\mathfrak{m}[\cdot, \cdot])$.

Agora, dado $\omega_{x_0} \in (T_{x_0}M)^* \equiv (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ com $\omega_{x_0}(\mathcal{D}_{x_0}) = 0$, podemos estendê-lo localmente em $\mathcal{D}^0$ com norma constante de uma maneira conveniente: Escolhemos $s : U \subset G/K \rightarrow G$ seção local com $1K \in U$, $s(1K) = 1$ e tal que a imagem de $(ds)_{1K}$ seja $\mathfrak{m}$. Definimos $\vec{\omega}$ em U por $\vec{\omega}(gK) = (\bar{L}_{s(gK)})^* \omega$, onde $\bar{L}_{s(gK)} : M \rightarrow M$ é a translação à esquerda, temos que $\vec{\omega}$ está em $\mathcal{D}^0$ e $\|\vec{\omega}\|$ é constante em U , pois a ação de G é por isometrias sub-Riemannianas. Dados, $v, w \in \mathfrak{m}$ temos: $d\vec{\omega}(\vec{V}, \vec{W}) = -\vec{\omega}([\vec{V}, \vec{W}])$, onde $\vec{V}, \vec{W}$ são construídos como no lema (3.2). Logo, no ponto base, tem-se :

$$d\vec{\omega}_{x_0}(v, w) = -\omega_{x_0}([\vec{V}, \vec{W}]_{x_0}) = -\omega_{x_0}(\pi_*[v, w]) \equiv -\omega_{x_0}(\pi \mathfrak{m}[v, w]).$$

Assim, através da identificação de $\mathfrak{m}$ com $T_{x_0}M$, o vetor $\xi^\omega \in \mathfrak{m}$ definido na proposição (3.8) corresponde ao vetor $\xi_\omega \in T_{x_0}M$ definido na proposição (3.1), isto é $\xi_\omega = \pi_*(\xi^\omega)$. Portanto, da proposição (3.8), segue que o produto interno $g_{x_0}^{\theta^\alpha}$ definido em $\mathcal{D}_{x_0}$ que corresponde a declarar ξ_{θ^α} ortonormais e perpendiculares a $\mathfrak{p}$ pode ser intrinsicamente definido por $\bar{B}$:

$$g_{x_0}^{\theta^\alpha}(\cdot, \cdot) = \bar{B}(\pi_*^{-1}\cdot, \pi_*^{-1}\cdot)$$

qualquer que seja a base ortonormal $(\theta^\alpha)_{x_0}$ fixada em $T_{x_0}M$.

Logo, no ponto base o produto interno definido pela relação (3.6), no caso sub-simétrico é dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_0} = \int_{O(d)} g_{x_0}^{A, (\theta^\alpha)_{x_0}}(\cdot, \cdot) d\mu(A) = \int_{O(d)} \bar{B}(\pi_*^{-1}\cdot, \pi_*^{-1}\cdot) d\mu(A) = \bar{B}(\pi_*^{-1}\cdot, \pi_*^{-1}\cdot)$$

□

3.5 Sub-torções no caso sub-simétrico

A sub-ALIO $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$, em um ponto x_0 de um espaço sub-simétrico $M = G/K$ com distribuição fortemente geradora por colchetes determina as sub-torções τ_{x_0} e σ_{x_0} :

Proposição 3.9 *Sejam τ e σ as sub-torções de M ; $v', w' \in \mathcal{D}_{x_0}$; $\xi', \eta' \in \mathcal{D}_{x_0}^\perp$. Sejam $v, w \in \mathfrak{p}$; $\xi, \eta \in \mathfrak{k}^\perp$ tais que $\pi_*(v) = v'$, $\pi_*(w) = w'$, $\pi_*(\xi) = \xi'$ e $\pi_*(\eta) = \eta'$. Então:*

$$\begin{aligned} -2 \langle \tau_{\xi'}(v'), w' \rangle_{x_0} &= B([\xi, v], w) + B([\xi, w], v) \\ \langle \sigma_{v'}(\xi'), \eta' \rangle_{x_0} &= 0 \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica canônica associada à M .

Prova:

Seja $s : U \subset M \equiv G/K \rightarrow G$ uma seção local tal que $x_0 \in U$, $s(x_0) = 1$ e tal que a imagem $(ds)_{x_0}$ seja $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^\perp \oplus \mathfrak{p}$. Consideremos os campos vetoriais $\vec{V}, \vec{W}, \vec{\xi}, \vec{\eta}$ em U , associados respectivamente aos vetores v, w, ξ, η , como no lema (3.2). Observando que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}, \vec{W} \rangle_x &= \langle (d\bar{L}_{s(x)})_{x_0}(\pi_*(v)), (d\bar{L}_{s(x)})_{x_0}(\pi_*(w)) \rangle_x \\ &= \langle \pi_*(v), \pi_*(w) \rangle_{x_0} = \langle v', w' \rangle_{x_0} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_x = \langle \xi', \eta' \rangle_{x_0}$$

$\forall x \in U$, pois $\bar{L}_{s(x)}$ é isometria; do Teorema (1.1) segue que

$$\begin{aligned} -2 \langle \tau_{\vec{\xi}}(\vec{V}), \vec{W} \rangle &= \langle [\vec{\xi}, \vec{V}]^\top, \vec{W} \rangle + \langle [\vec{\xi}, \vec{W}]^\top, \vec{V} \rangle \\ 2 \langle \sigma_{\vec{V}}(\vec{\xi}), \vec{\eta} \rangle &= \langle [\vec{V}, \vec{\xi}]^\perp, \vec{\eta} \rangle + \langle [\vec{V}, \vec{\eta}]^\perp, \vec{\xi} \rangle \end{aligned}$$

Assim, usando o lema (3.2), no ponto x_0 temos que:

$$\begin{aligned} -2 \langle \tau_{\xi}(v'), w' \rangle_{x_0} &= \langle \pi_*([\xi, v]), \pi_*(w) \rangle_{x_0} + \langle \pi_*([\xi, w]), \pi_*(v) \rangle_{x_0} \\ &= B([\xi, v], w) + B([\xi, w], v) \end{aligned}$$

$$\langle \sigma_{v'}(\xi'), \eta' \rangle_{x_0} = 0$$

uma vez que $[\mathfrak{k}^\perp, \mathfrak{p}] \subset [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ e $\pi_*(\mathfrak{p}) = \mathcal{D}_{x_0}$.

□

Capítulo 4

Espaços sub-simétricos de codimensão três com distribuição fortemente geradora por colchetes

Se $(M, \mathcal{D}, g)$ é uma variedade sub-Riemanniana com distribuição fortemente geradora por colchetes de posto n e codimensão $d \geq 2$, então n é um múltiplo de 4 e $n \geq d + 1$. Veja demonstração em [8].

Quando a codimensão é um, a condição fortemente geradora por colchetes é equivalente a condição de contato, neste caso os espaços sub-simétricos simplesmente conexos já estão completamente classificados segundo a sequência de artigos [1], [2], [3].

É natural então estudar esses espaços, sub-simétricos com distribuição fortemente geradora por colchetes, em codimensões mais altas. Neste capítulo apresentaremos a nossa contribuição nesta direção. No que segue, salvo menção explícita em contrário, sempre que nos referirmos a um espaço sub-simétrico subentende-se que este espaço é simplesmente conexo, com distribuição fortemente geradora por colchetes de codimensão três.

4.1 Classificação dos espaços sub-simétricos em dimensão sete com grupo de isometrias nilpotente

Nesta seção, descrevemos a estrutura especial das LISO-álgebras associadas aos espaços sub-simétricos, de dimensão sete, que possuem um grupo de Lie de isometrias sub-Riemannianas, nilpotente, agindo transitivamente. Mostramos que em particular, estes espaços são grupos de Lie. Os dois lemas seguintes nos serão úteis posteriormente.

Lema 4.1 *Seja $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ uma LISO-álgebra e seja K_{ill} a forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Se a e b são subespaços K_{ill} -ortogonais de $\mathfrak{p}$ tal que b é $\text{ad}_{\mathfrak{p}}$ -invariante, então $[a, b] \cap \mathfrak{k} = 0$.*

Prova: Semelhante à prova do Lema 8.2.1 de [17].

□

Lema 4.2 *Se $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é uma LISO-álgebra tal que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente então ela admite uma LISO-subálgebra $(\mathfrak{g}', s', \mathfrak{k}', B')$ com $[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{k}' = 0$ e $\mathfrak{g}'$ nilpotente.*

Prova:

Visto que $\mathfrak{g}$ é nilpotente, sua forma de Killing K_{ill} é nula. Em particular $K_{ill}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$. Pelo lema (4.1) aplicado à $a = b = \mathfrak{p}$, tem-se $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \cap \mathfrak{k} = 0$. Assim, da proposição (3.6), segue que $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ admite uma LISO-subálgebra com as propriedades requeridas.

□

A proposição abaixo é o resultado principal desta seção.

Proposição 4.1 *Seja $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ uma LISO-álgebra com $\mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, $\mathfrak{g}$ nilpotente, $\dim \mathfrak{p} = 4$ e $\dim \mathfrak{g} = 7$ então $\mathfrak{h}$ é abeliana e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] = 0$.*

Prova:

Visto que $\mathfrak{g}$ é nilpotente, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, temos que $ad_h|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ é nilpotente $\forall h \in \mathfrak{h}$. Portanto, pelo Teorema de Engel ([6], Teorema 2.4), existe $x_1 \neq 0$, $x_1 \in \mathfrak{p}$ tal que $ad_h(x_1) = 0 \forall h \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie nilpotente, de dimensão três, temos apenas duas possibilidades para $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{h} = Lie(H^3)$ (álgebra de Lie do grupo de Heisenberg) ou $\mathfrak{h}$ abeliana. Mas, $\mathfrak{h} = Lie(H^3)$ não pode ocorrer. De fato, suponhamos $\mathfrak{h} = Lie(H^3)$ e tomemos $x_1 \neq 0$, $x_1 \in \mathfrak{p}$ dado pelo Teorema de Engel, como acima, então da hipótese fortemente geradora por colchetes, existe $x_2 \in \mathfrak{p}$ tal que $[x_1, x_2] = y$, onde y é tal que $\mathfrak{z}(Lie(H^3)) = \mathbb{R}y$ (a notação $\mathfrak{z}(Lie(H^3))$ indica o centro da álgebra de Lie do grupo de Heisenberg, que como sabemos, é 1-dimensional). Completamos para uma base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de $\mathfrak{p}$, e novamente da hipótese fortemente geradora por colchetes, temos que $\{[x_1, x_2] = y, [x_1, x_3] = z, [x_1, x_4] = w\}$ é base de $Lie(H^3)$, podemos ainda supor que $[z, w] = y$ (caso contrário renomeamos x_2 , de tal maneira que esta suposição seja verificada). Agora, usando as identidades de Jacobi, temos: $[z, x_4] = [[x_1, x_3], x_4] = [[x_1, x_4], x_3] = [w, x_3]$; e segue a contradição: $y = [z, w] = [[x_1, x_3], w] = [[w, x_3], x_1] = [[z, x_4], x_1] = [[x_1, x_4], z] = [w, z] = -y$. Assim, a única possibilidade é $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ abeliana. Vamos provar agora, que no caso $\mathfrak{h}$ abeliana tem-se necessariamente $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] = 0$. Suponha que $\mathfrak{h}$ é abeliana e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \neq 0$, então existe $z \neq 0 \in \mathfrak{h}$ e $u \neq 0 \in \mathfrak{p}$ tal que $[z, u] \neq 0$. Agora, $ad_z|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ é nilpotente, portanto a dimensão do $\ker ad_z|_{\mathfrak{p}}$ é maior ou igual a um, assim é sempre possível escolher dois elementos, u_1 e $[z, u_2]$ linearmente independentes em $\mathfrak{p}$, $u_1 \in (\ker ad_z|_{\mathfrak{p}})$ e $[z, u_2] \in ad_z(\mathfrak{p})$ que tomados desta maneira satisfazem $[u_1, [z, u_2]] = 0$, uma vez que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. Mas, este

fato é uma contradição. pois o comutador de dois elementos linearmente independentes de $\mathfrak{p}$ tem que ser diferente de zero, já que $\theta_u : \mathfrak{p} \rightarrow [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ é sobrejetora $\forall u \in \mathfrak{p}$, $\dim \mathfrak{p} = 4$ e $\dim[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 3$. Portanto. $\mathfrak{h}$ é abeliana e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] = 0$.

□

Podemos reenunciar a proposição (4.1) da seguinte maneira.

Teorema 4.1 *Seja $(\mathfrak{p}, B)$ um espaço vetorial real 4-dimensional com produto interno. $\mathfrak{h}$ um espaço vetorial real de dimensão três e $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h}$ uma aplicação bilinear anti-simétrica tal que $i_X \circ [\cdot, \cdot] : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h}$ é sobrejetora $\forall X \neq 0 \in \mathfrak{p}$. Então, $(\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}, s, \mathfrak{k} = 0, B)$ é uma LISO-álgebra nilpotente, onde o colchete de Lie em $\mathfrak{g}$ é a extensão da aplicação bilinear $[\cdot, \cdot]$ dada por $[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}] = 0$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ e a involução $s : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é definida por $s(X) = -X$, $\forall X \in \mathfrak{p}$ e $s(X) = X$, $\forall X \in \mathfrak{h}$. Além disso, toda LISO-álgebra $(\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}, s, \mathfrak{k} = 0, B)$ nilpotente com $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, $\dim \mathfrak{g} = 7$ e $\dim \mathfrak{p} = 4$ é desse tipo.*

□

Concluimos que se $(M, \mathcal{D}, g)$ é um espaço sub-simétrico de dimensão 7, simplesmente conexo, munido de distribuição fortemente geradora por colchetes de posto 4, com um grupo de Lie nilpotente transitivo de isometrias sub-Riemannianas de M , então M admite uma LISO-álgebra $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ com $\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$ nilpotente, $\dim \mathfrak{g} = 7$, $\dim \mathfrak{p} = 4$, $\mathfrak{k} = 0$. $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ abeliana e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] = 0$; em particular M é um grupo de Lie. Neste caso, existe $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y, z, w\}$ base de $\mathfrak{g}$, onde $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é base ortonormal de $\mathfrak{p}$, satisfazendo:

$$\begin{aligned}
 [x_1, x_2] &= y & a_{ij}, b_{ij} &\in \mathbb{R} \\
 [x_1, x_3] &= z & (i, j &= 2, 3, 4; \quad i < j) \\
 [x_1, x_4] &= w & \text{com} & \left\{ \begin{array}{l} b_{23}c_{24} - c_{23}b_{24} \neq 0 \\ c_{23}a_{34} - a_{23}c_{34} \neq 0 \\ a_{24}b_{34} - b_{24}a_{34} \neq 0 \end{array} \right. \\
 [x_2, x_3] &= a_{23}y + b_{23}z + c_{23}w \\
 [x_2, x_4] &= a_{24}y + b_{24}z + c_{24}w \\
 [x_3, x_4] &= a_{34}y + b_{34}z + c_{34}w & \text{e os demais colchetes são nulos}
 \end{aligned}$$

Uma classe especial desses exemplos nilpotentes, que denominaremos de exemplos de tipo diagonal, é dada quando: $a_{23} = b_{23} = a_{24} = c_{24} = b_{34} = c_{34} = 0$. Neste caso,

renomeando as constantes de estrutura (para simplificar a notação). temos que existe $\beta = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y, z, w\}$ base *ortonormal* de $\mathfrak{g}$, onde $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é base ortonormal de $\mathfrak{p}$, satisfazendo:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} y \\ [x_1, x_3] &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} z \\ [x_1, x_4] &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} w \\ [x_2, x_3] &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} w \\ [x_2, x_4] &= \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} z \\ [x_3, x_4] &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} y \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a.b.c \neq 0 \end{array} \right.$$

e os demais colchetes são nulos

Então denotando por $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^y, \theta^z, \theta^w\}$ a base dual de $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y, z, w\}$ e dualizando as equações acima, temos as equações de estrutura:

$$\begin{aligned} d\theta^i &= 0 \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ d\theta^y &= -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \theta^3 \wedge \theta^4 \\ d\theta^z &= -\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \theta^2 \wedge \theta^4 \\ d\theta^w &= -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \theta^1 \wedge \theta^4 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

De onde obtemos que, nos exemplos de tipo diagonal, as formas de conexão ω_j^i e ω_β^α são todas nulas, as sub-torções τ e σ também são ambas nulas, restando apenas os invariantes ρ_i ($i = 1, \dots, 4$) relativos ao operador bilinear $A : \mathcal{D}^\perp \times \mathcal{D}^\perp \rightarrow \text{End}(\mathcal{D})$, definidos no capítulo 1, seção 1.3, dados por:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+c^2}, \\
\rho_2 &= -\frac{1}{1+a^2} - \frac{b^2}{1+b^2} - \frac{c^2}{1+c^2}, \\
\rho_3 &= -\frac{a^2}{1+a^2} - \frac{1}{1+b^2} - \frac{c^2}{1+c^2}, \\
\rho_4 &= -\frac{a^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{1+b^2} - \frac{1}{1+c^2};
\end{aligned}$$

os demais invariantes, definidos na seção 1.3, nos exemplos de tipo diagonal são nulos, exceto $\lambda_\alpha = -2$ ($\alpha = 5, 6, 7$).

4.2 Exemplos quaterniônicos

De acordo com o Teorema (5.1) de [2], todo espaço sub-simétrico de contato, simplesmente conexo, irreduzível é um espaço homogêneo canonicamente fibrado sobre um espaço simétrico Hermitiano irreduzível, com fibras difeomorfas ao círculo S^1 . Inspirados nesta idéia, construímos exemplos de espaços sub-simétricos munidos de distribuição fortemente geradora por colchetes, os quais correspondem a uma $Sp(1)$ -fibracão sobre espaços simétricos Riemannianos, compactos, simplesmente conexos, equipados com estrutura quaterniônica. O objetivo desta seção é expor a construção destes exemplos. Iniciamos introduzindo alguns resultados preliminares acerca de espaços simétricos Riemannianos com estrutura quaterniônica. Uma referência sobre este assunto pode ser encontrada em [16].

Seja V um espaço vetorial real. Uma *álgebra quaterniônica* sobre V é uma álgebra $\mathcal{A}$ de transformações lineares de V isomorfa a álgebra real dos quatérnios, e cujo elemento unidade é a transformação identidade de V . Se V é espaço com produto interno e os elementos unimodulares de $\mathcal{A}$ são transformações lineares ortogonais de V , diremos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra quaterniônica ortogonal* sobre V .

É interessante notar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra quaterniônica sobre V , então podemos visualizar V como um espaço vetorial quaterniônico, basta considerar V como espaço vetorial sobre $\mathcal{A}$. Sob esta ótica, as transformações lineares-quaterniônicas são justamente as transformações lineares que comutam com todo elemento de $\mathcal{A}$.

Seja S uma variedade Riemanniana. Dado $x \in S$, denotamos por Ψ_x o grupo de holonomia linear da conexão Riemanniana com referência no ponto x (ie, Ψ_x é o grupo consistindo

de todas as transformações lineares do espaço tangente $T_x S$ obtidas de transporte paralelo sobre curvas ligando x a x). Um conjunto A_x de transformações lineares de $T_x S$ é denominado Ψ_x -invariante se $gA_xg^{-1} = A_x$, $\forall g \in \Psi_x$. Um conjunto A de campos de transformações lineares de todos os espaços tangentes de S é denominado *paralelo* se, dado $x, y \in S$ e uma curva σ ligando x a y , o transporte paralelo τ_σ ao longo de σ satisfaz $\tau_\sigma A_x \tau_\sigma^{-1} = A_y$. A_x se estende a um conjunto paralelo de campos de transformações lineares de espaços tangentes se, e somente se, A_x é Ψ_x -invariante; neste caso a extensão é única e bem definida na notação acima por $A_y = \tau_\sigma A_x \tau_\sigma^{-1}$.

Uma *estrutura quaterniônica* sobre uma variedade Riemanniana S é um campo paralelo A de álgebras quaterniônicas ortogonais $\mathcal{A}_x$ sobre cada espaço tangente $T_x S$.

Seja S uma variedade Riemanniana com estrutura quaterniônica A , então dado $x \in S$, $\mathcal{A}_x$ é uma Ψ_x -estável álgebra quaterniônica ortogonal sobre $T_x S$. Em outras palavras, $\Psi_x = \Phi_x \cdot \mathcal{A}'_x$ onde Φ_x é o centralizador de $\mathcal{A}_x$ em Ψ_x e $\mathcal{A}'_x = \Psi_x \cap \mathcal{A}_x$. Φ_x e $\mathcal{A}'_x$ são, respectivamente as partes *A-linear* e *A-escalar* de Ψ_x . Dizemos que o grupo de holonomia possui *parte escalar real* se os elementos de $\mathcal{A}'_x$ são escalares reais (1 ou -1), possui *parte escalar complexa* se $\mathcal{A}'_x$ está contida em um subcorpo complexo de $\mathcal{A}_x$ que não é um subcorpo real, possui *parte escalar quaterniônica* caso contrário (neste caso $\mathcal{A}'_x$ gera $\mathcal{A}_x$).

Estamos particularmente interessados nos espaços simétricos Riemannianos com estrutura quaterniônica na qual a holonomia tem parte escalar quaterniônica, por simplicidade denominaremos estes espaços de *espaços de Wolf quaterniônicos*. Tal interesse reside no fato que nossos exemplos são construídos através desta classe de espaços.

Antes, é conveniente lembrar que, uma *álgebra de lie involutiva ortogonal* (ALIO) é uma trinca $(\mathfrak{g}, s, B)$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real, s é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$, o auto-espaço $+1$ de s (denotado por $\mathfrak{h}$) não contém ideais não nulos de $\mathfrak{g}$ e B é um produto interno em $\mathfrak{p}$ (auto-espaço -1 de s) invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{h}$.

Uma ALIO $(\mathfrak{g}, s, B)$ é irredutível se $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \neq 0$ e $ad_{\mathfrak{h}}$ é irredutível sobre $\mathfrak{p}$.

Expomos agora alguns resultados referentes aos espaços de Wolf quaterniônicos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [16].

Da caracterização dos espaços simétricos quaterniônicos temos, segundo ([16], Teorema 5.4) e sua demonstração, que existe uma correspondência biunívoca entre os espaços simétricos Riemannianos, compactos, simplesmente conexos, com estrutura quaterniônica na qual a holonomia tem parte escalar quaterniônica e as ALIO's $(\mathfrak{g}_u, s, B)$ com as propriedades adicionais:

- i.) $\mathfrak{g}_u$ é compacta e simples, em particular $(\mathfrak{g}_u, s, B)$ é irredutível e consequentemente

existe um único $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ tal que $B = aK_{ill}|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$, onde K_{ill} denota a forma de Killing de $\mathfrak{g}_u$ e $\mathfrak{p}$ denota o auto-espaço -1 de s ;

ii.) a involução s e os auto-espaços ± 1 de s , são caracterizados da seguinte maneira: escolhe-se $\mathfrak{T} \subset (\mathfrak{g}_u)$ a álgebra de Lie de um toro máximo. Denota-se por $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{H}$ as respectivas complexificações de $\mathfrak{g}_u$ e $\mathfrak{T}$. Tem-se que $\mathfrak{H}$ é uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie simples complexa $\mathfrak{G}$ e toma-se a decomposição de Cartan

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \sum_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{G}_\lambda$$

onde Δ é o conjunto de todas as raízes de $\mathfrak{G}$ relativas à $\mathfrak{H}$, e $\mathfrak{G}_\lambda$ é o subespaço 1-dimensional complexo definido por:

$$\mathfrak{G}_\lambda = \{X \in \mathfrak{G} : ad_H(X) = \lambda(H)X \ \forall H \in \mathfrak{H}\}$$

Dados $\lambda, \rho \in \Delta$, indica-se por H_λ o elemento de $\mathfrak{H}$ caracterizado por: $K_{ill}(H_\lambda, H) = \lambda(H) \ \forall H \in \mathfrak{H}$, e abrevia-se $K_{ill}(H_\lambda, H_\rho)$ por $K_{ill}(\lambda, \rho)$. Escolhe-se uma ordem lexicográfica sobre as raízes e denota-se por ρ a raiz máxima relativa a esta ordem. Então $s = Ad_\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ onde $\psi = exp(\pi \frac{i}{c} H_\rho)$, $c = K_{ill}(\rho, \rho)/2$. O auto-espaço $+1$ de s , denotado por $\mathfrak{h}$, é tal que: $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$, é uma soma direta de ideais onde

$$\mathfrak{l}_1 = \{H \in \mathfrak{T} : \rho(H) = 0\} + \sum_{\substack{\lambda > 0 \\ K_{ill}(\lambda, \rho) = 0}} \mathfrak{g}_u \cap (\mathfrak{G}_\lambda + \mathfrak{G}_{-\lambda}) \quad (4.1)$$

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}_u \cap (\mathbb{C}H_\rho + \mathfrak{G}_\rho + \mathfrak{G}_{-\rho}) \cong \mathfrak{sp}(1) \quad (4.2)$$

O auto espaço -1 de s , denotado por $\mathfrak{p}$, é dado por:

$$\mathfrak{p} = \sum_{\substack{\rho \neq \lambda > 0 \\ K_{ill}(\lambda, \rho) \neq 0}} \mathfrak{g}_u \cap (\mathfrak{G}_\lambda + \mathfrak{G}_{-\lambda}). \quad (4.3)$$

Esta particularidade da ALIO associada a um espaço de Wolf quaterniônico, simplesmente conexo, compacto, por consequência irreduzível, (denominada *ALIO quaterniônica compacta irreduzível*) nos permite construir a partir deste, de maneira bastante natural, um espaço

sub-simétrico, compacto, simplesmente conexo, com distribuição fortemente geradora por colchetes de codimensão três. O corolário da proposição [4.1] nos conta como é feita tal construção, antes porém faz se necessário os seguintes resultados preliminares:

Definição 4.1 *Uma base quaterniônica de uma álgebra quaterniônica $\mathcal{A}$ é uma base $\beta = \{Id, J_1, J_2, J_3\}$ de $\mathcal{A}$ tal que: $J_i \circ J_i = -Id$ ($i = 1, 2, 3$); $J_i \circ J_k = -J_k \circ J_i$ (para $i \neq k$); $J_1 \circ J_2 = J_3$, $J_2 \circ J_3 = J_1$, $J_3 \circ J_1 = J_2$.*

Lema 4.3 *Seja $(\mathfrak{g}_u, s, B)$ uma ALIO quaterniônica compacta irredutível, consideremos a decomposição $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ sob s , $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ com $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{p}$ dados por (4.1), (4.2) e (4.3), respectivamente. Nesta notação, sejam $E_\rho \in \mathfrak{G}_\rho$ e $E_{-\rho} \in \mathfrak{G}_{-\rho}$ tais que $K_{ill}(E_\rho, E_{-\rho}) = 1$. Então :*

$$a. \gamma = \{\xi_1 = \frac{1}{c}iH_\rho, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{c}}(E_\rho - E_{-\rho}), \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}i(E_\rho + E_{-\rho})\} \text{ é base } \mathfrak{a}_1, \text{ satisfazendo} \\ [\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3, [\xi_1, \xi_3] = -2\xi_2, [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1;$$

$$b. \beta = \{Id, J_1, J_2, J_3\}, \text{ onde } J_i = Ad(\exp \frac{\pi}{2} \xi_i)|_{\mathfrak{p}} = ad_{\xi_i}|_{\mathfrak{p}} \text{ (} i = 1, 2, 3 \text{) gera uma álgebra} \\ \text{quaterniônica ortogonal sobre } \mathfrak{p} \text{ com } \beta \text{ base quaterniônica.}$$

Prova:

a. É consequência das seguintes identidades:

$$\begin{aligned} [H_\rho, E_\rho] &= K_{ill}(\rho, \rho)E_\rho = 2cE_\rho & [H_\rho, E_{-\rho}] &= -K_{ill}(\rho, \rho)E_{-\rho} = -2cE_{-\rho} \\ [E_\rho, E_{-\rho}] &= K_{ill}(E_\rho, E_{-\rho})H_\rho = H_\rho & [E_\rho, E_\rho] &= [E_{-\rho}, E_{-\rho}] = 0 \end{aligned}$$

pois 2ρ não é uma raiz.

b. Temos as seguintes identidades:

$$[H_\rho, E_\lambda] = K_{ill}(\rho, \lambda)E_\lambda \quad [H_\rho, E_{-\lambda}] = -K_{ill}(\rho, \lambda)E_{-\lambda}$$

Se λ é raiz positiva, também temos:

$$[E_\rho, E_\lambda] = [E_{-\rho}, E_{-\lambda}] = 0 \quad [E_\rho, [E_\rho, E_{-\lambda}]] = [E_{-\rho}, [E_{-\rho}, E_\lambda]] = 0$$

pois. $\rho + \lambda$ e $2\rho - \lambda$ não são raízes.

Como ρ é raiz máxima, vale que $2K_{ill}(\rho, \lambda)/K_{ill}(\rho, \rho) = 0$ ou 1 para toda raiz positiva λ , veja demonstração em ([16], seção 4). Portanto, se λ é raiz positiva tal que $K_{ill}(\rho, \lambda) \neq 0$ então,

$K_{ill}(\rho, \lambda) = K_{ill}(\rho, \rho)/2 = c$. Segundo a relação (4.3), um sistema de geradores de $\mathfrak{p}$ é dado por $S = \{E_\lambda - E_{-\lambda}, i(E_\lambda + E_{-\lambda}) : \lambda \neq \rho \text{ raiz positiva e } K_{ill}(\rho, \lambda) \neq 0\}$. Assim, respeitando as considerações acima e utilizando as identidades de Jacobi, um cálculo direto nos elementos de S , mostra que $(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_i})|_{\mathfrak{p}} = -Id|_{\mathfrak{p}}$ e portanto $J_i = Ad(\exp \frac{\pi}{2} \xi_i)|_{\mathfrak{p}} = \exp(ad \frac{\pi}{2} \xi_i)|_{\mathfrak{p}} = \exp(\frac{\pi}{2} ad \xi_i)|_{\mathfrak{p}} = ad_{\xi_i}|_{\mathfrak{p}}, i = 1, 2, 3$; mostra também que os elementos de β satisfazem, de fato, as relações quaterniônicas dadas na definição (4.2). Finalmente, a B -ortogonalidade das transformações J_i ($i=1,2,3$), decorre da $Ad_{\mathfrak{h}}$ -invariância do produto interno B .

□

Lema 4.4 *Se V é um espaço vetorial real com produto interno de dimensão $4n$ e $\beta = \{Id, J_1, J_2, J_3\}$ gera uma álgebra quaterniônica ortogonal sobre V , com β base quaterniônica, então existe $\{X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1), \dots, X_n, J_1(X_n), J_2(X_n), J_3(X_n)\}$ base ortonormal de V .*

Prova: Faremos a demonstração usando indução em n .

Se $n = 1$, seja X_1 unitário em V e tem-se $\{X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1)\}$ linearmente independente contido em V . De fato, suponhamos que existam escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 X_1 + a_2 J_1(X_1) + a_3 J_2(X_1) + a_4 J_3(X_1) = 0$ então, usando que J_1, J_2, J_3 são endomorfismos de V cujo quadrado é igual a -1 , que anti-comutam, e tais que $J_1 \circ J_2 = J_3, J_2 \circ J_3 = J_1, J_3 \circ J_1 = J_2$, segue que:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + a_2 J_1(X_1) + a_3 J_2(X_1) + a_4 J_3(X_1) &= 0 \\ a_1 J_1(X_1) - a_2 X_1 + a_3 J_3(X_1) - a_4 J_2(X_1) &= 0 \\ a_1 J_2(X_1) - a_2 J_3(X_1) - a_3 X_1 + a_4 J_1(X_1) &= 0 \\ a_1 J_3(X_1) + a_2 J_2(X_1) - a_3 J_1(X_1) - a_4 X_1 &= 0 \end{cases}$$

Ou, equivalentemente, em notação matricial:

$$A \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ J_1(X_1) \\ J_2(X_1) \\ J_3(X_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Como $X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1)$ são todos não nulos, segue que $\det(A) = 0$. Agora, $\det(A) = 0$ se, e somente se, $a_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Além disso, como J_1, J_2, J_3 são transformações lineares ortogonais temos:

$$\begin{aligned} \langle J_1(X_1), J_1(X_1) \rangle &= \langle J_2(X_1), J_2(X_1) \rangle = \langle J_3(X_1), J_3(X_1) \rangle \\ &= \langle X_1, X_1 \rangle = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X_1, J_2(X_1) \rangle &= \langle J_2(X_1), (J_2 \circ J_2)(X_1) \rangle = - \langle X_1, J_2(X_1) \rangle \\ \implies \langle X_1, J_2(X_1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente, } \langle X_1, J_3(X_1) \rangle = \langle X_1, J_1(X_1) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle J_1(X_1), J_2(X_1) \rangle &= \langle (J_3 \circ J_1)(X_1), (J_3 \circ J_2)(X_1) \rangle = - \langle J_2(X_1), J_1(X_1) \rangle \\ \implies \langle J_1(X_1), J_2(X_1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J_1(X_1), J_3(X_1) \rangle &= \langle (J_2 \circ J_1)(X_1), (J_2 \circ J_3)(X_1) \rangle = - \langle J_3(X_1), J_1(X_1) \rangle \\ \implies \langle J_1(X_1), J_3(X_1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J_2(X_1), J_3(X_1) \rangle &= \langle (J_1 \circ J_2)(X_1), (J_1 \circ J_3)(X_1) \rangle = - \langle J_3(X_1), J_2(X_1) \rangle \\ \implies \langle J_2(X_1), J_3(X_1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $\{X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1)\}$ é base ortonormal de V .

- Hipótese de indução: suponha a tese válida para qualquer espaço vetorial de dimensão $4(n-1)$.

Vamos agora provar que o resultado também é verdade para os espaços vetoriais de dimensão $4n$ ($n > 1$). De fato, se $\dim V = 4n$, considere $X_1 \in V$ unitário e do caso $n = 1$ temos que $\gamma_1 = \{X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1)\}$ é um conjunto ortonormal contido em V . Consideremos o subespaço 4-dimensional W de V gerado por γ_1 e seja $W^\perp$ o complemento ortogonal de W em V . Observe que $W^\perp$ é J_1, J_2, J_3 -invariante e portanto $\alpha = \{Id|_{W^\perp}, J_1|_{W^\perp}, J_2|_{W^\perp}, J_3|_{W^\perp}\}$ gera uma álgebra quaterniônica ortogonal sobre $W^\perp$, com α uma base quaterniônica. Usando então a hipótese de indução a $W^\perp$ temos que existe $\gamma_2 = \{X_2, J_1(X_2), J_2(X_2), J_3(X_2), \dots, X_n, J_1(X_n), J_2(X_n), J_3(X_n)\}$ uma base ortonormal de $W^\perp$. Portanto $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ é uma base ortonormal de V satisfazendo as condições exigidas. $\square$

Definição 4.2 Uma LISO-álgebra $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é irredutível se $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \cap \mathfrak{k} \neq 0$ e $\text{ad}_{\mathfrak{p}}$ é irredutível sobre $\mathfrak{p}$. Um espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, $M = G/K$ é irredutível se sua LISO-álgebra $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é irredutível.

Proposição 4.2 *Seja $(\mathfrak{g}_u, s, B)$ uma ALIO quaterniônica compacta irredutível e escreva $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ sob s , $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ com $\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{sp}(1)$. Então $(\mathfrak{g}_u, s, \mathfrak{l}_1, B)$ é uma LISO-álgebra irredutível.*

Prova:

Seja $\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ uma base de $\mathfrak{a}_1$ tal que $[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3$, $[\xi_1, \xi_3] = -2\xi_2$ e $[\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1$, dada pelo Lema[4.3]. Seja K_{ill} a forma de Cartan Killing de $\mathfrak{g}_u$, então $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{l}_1 \oplus \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle \oplus \mathfrak{p}$ é uma decomposição K_{ill} -ortogonal e além disso, pela irredutibilidade de $ad_{\mathfrak{h}}|_{\mathfrak{p}}$, $K_{ill} = aB$ para algum escalar $a \neq 0$. Consideremos a álgebra quaterniônica ortogonal sobre $\mathfrak{p}$ gerada pela base quaterniônica $\{Id, J_1, J_2, J_3\}$ onde $J_i = Ad(exp \frac{\pi}{2} \xi_i)|_{\mathfrak{p}} = ad_{\xi_i}|_{\mathfrak{p}}$ ($i = 1, 2, 3$), conforme Lema [4.3]. Seja $\{X_1, J_1(X_1), J_2(X_1), J_3(X_1), \dots, X_n, J_1(X_n), J_2(X_n), J_3(X_n)\}$ base B -ortonormal de $\mathfrak{p}$ dada pelo Lema [4.4]. Temos:

$$\begin{aligned} K_{ill}(\xi_i, \xi_i) &= \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_i})|_{\mathfrak{p}} + \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_i})|_{\mathfrak{a}_1} \\ &= \text{traço}(J_i \circ J_i) - 8 = -\text{traço}(Id_{\mathfrak{p}}) - 8 = -4n - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ill}(\xi_i, \xi_j) &= \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_j}) = \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_j})|_{\mathfrak{p}} + \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_j})|_{\mathfrak{a}_1} \\ &= \text{traço}(ad_{\xi_i} \circ ad_{\xi_j})|_{\mathfrak{p}} = \text{traço}(J_i \circ J_j) = -\text{traço}(J_j \circ J_i) \\ &\implies K_{ill}(\xi_i, \xi_j) = 0 \text{ para } i \neq j \end{aligned}$$

$$K_{ill}(\xi_i, [x_k, x_j]) = K_{ill}([\xi_i, x_k], x_j) = K_{ill}(J_i(x_k), x_j) = aB(J_i(x_k), x_j) = 0$$

$$K_{ill}(\xi_i, [x_k, J_i(x_k)]) = K_{ill}([\xi_i, x_k], J_i(x_k)) = K_{ill}(J_i(x_k), J_i(x_k)) = aB(J_i(x_k), J_i(x_k)) = a$$

$$\begin{aligned} K_{ill}(\xi_l, [x_k, J_i(x_k)]) &= K_{ill}([\xi_l, x_k], J_i(x_k)) = K_{ill}(J_l(x_k), J_i(x_k)) = aB(J_l(x_k), J_i(x_k)) = 0 \\ &\text{para } l \neq i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ill}(\xi_i, [x_k, J_i(x_j)]) &= K_{ill}([\xi_i, x_k], J_i(x_j)) = K_{ill}(J_i(x_k), J_i(x_j)) = aB(J_i(x_k), J_i(x_j)) = 0 \\ &\text{para } k \neq j \end{aligned}$$

$$K_{ill}(\xi_l, [x_k, J_i(x_j)]) = aB(J_l(x_k), J_i(x_j)) = 0 \text{ para } k \neq j \text{ e } l \neq i$$

$$K_{ill}(\xi_l, [J_i(x_k), J_s(x_k)]) = K_{ill}([\xi_l, J_i(x_k)], J_s(x_k)) = K_{ill}((J_l \circ J_i)(x_k), J_s(x_k))$$

$$= \begin{cases} \pm K_{ill}(J_s(x_k), J_s(x_k)) = \pm aB(J_s(x_k), J_s(x_k)) = \pm a & \text{para } l \neq s \neq i \\ K_{ill}((J_i \circ J_i)(x_k), J_s(x_k)) = -aB(x_k, J_s(x_k)) = 0 & \text{para } l = i \\ zero & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim

$$[x_k, J_i(x_k)] \equiv \frac{a}{-4n-8} \xi_i \pmod{\mathfrak{l}_1} \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

$$[J_i(x_k), J_s(x_k)] \equiv \pm \frac{a}{-4n-8} \xi_l \pmod{\mathfrak{l}_1} \quad \text{para } i \neq s \neq l$$

Portanto, $\Theta_X : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{l}_1$ é sobrejetora $\forall X \in \mathfrak{p}$, e isto conclui a demonstração que $(\mathfrak{g}_u, s, \mathfrak{l}_1, B)$ é, de fato, uma LISO-álgebra. Finalmente, a irreduzibilidade de $(\mathfrak{g}_u, s, \mathfrak{l}_1, B)$ é consequência direta da simplicidade de $\mathfrak{g}_u$. □

Corolário 4.1 *Seja G_u/H um espaço de Wolf quaterniônico, simplesmente conexo, compacto (portanto irreduzível). Então existe um fibrado canônico G_u/L_1 sobre G_u/H com fibras H/L_1 difeomorfas à esfera $Sp(1)$, e que possui uma estrutura de espaço sub-simétrico, simplesmente conexo, compacto, irreduzível.*

Prova:

Considera-se a ALIO quaterniônica compacta irreduzível $(\mathfrak{g}_u, s, B)$ correspondente a G_u/H , decompõe-se $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ sob s , com $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{sp}(1)$ e obtém-se a LISO-álgebra irreduzível associada $(\mathfrak{g}_u, s, \mathfrak{l}_1, B)$, como na Proposição [4.2]. O espaço sub-simétrico compacto construído a partir de $(\mathfrak{g}_u, s, \mathfrak{l}_1, B)$ é G_u/L_1 , onde $L_1 = \exp \mathfrak{l}_1$, a distribuição sobre G_u/L_1 é a G_u -distribuição determinada no ponto base por $\mathfrak{p}$ e a métrica sobre a distribuição é a métrica G_u -invariante determinada no ponto base por B (neste caso B é um múltiplo negativo da forma de Killing de $\mathfrak{g}_u$). Agora $H/L_1 \rightarrow G_u/L_1 \rightarrow G_u/H$ é um fibrado, cuja fibra típica H/L_1 é difeomorfa à $Sp(1)$, pois $\mathfrak{h}/\mathfrak{l}_1 \cong \mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{sp}(1)$. □

Observamos que em analogia com a teoria de álgebras de Lie involutivas ortogonais, a cada LISO-álgebra $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ sob s , corresponde uma LISO-álgebra dual $(\mathfrak{g}^*, s^*, \mathfrak{k}, B^*)$ onde $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}^*$ sob s^* . $\mathfrak{p}^* = i\mathfrak{p}$; $s^*(h + ip) = s(h) + is(p) \forall h + ip \in \mathfrak{g}^*$; $B^*(X, Y) = B(iX, iY) \forall X, Y \in \mathfrak{p}^*$. Além disso, $(\mathfrak{g}, s, \mathfrak{k}, B)$ é irredutível se, e somente se $(\mathfrak{g}^*, s^*, \mathfrak{k}, B^*)$ é irredutível. Também, se $(\mathfrak{g}^*, s^*, \mathfrak{k}, B^*)$ é irredutível então exatamente uma entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ é compacta. Uma demonstração destas afirmações, no contexto de ALIO's, se encontra em ([17], Lema 8.2.6), e pode ser transcrita igualmente aqui, no contexto de LISO-álgebras.

Feitas estas ponderações, a cada espaço de Wolf quaterniônico, compacto, simplesmente conexo, corresponde precisamente um par dual de espaços sub-simétricos, simplesmente conexos, irredutíveis (um compacto e outro não compacto).

EXEMPLOS:

Da classificação dos espaços de Wolf quaterniônicos, simplesmente conexos, compactos, irredutíveis ([9], tabela 5.7), organizamos abaixo a lista dos espaços sub-simétricos irredutíveis compactos, construídos como no corolário acima, e de seus duais não compactos:

$SU(n+2)/S(U(1) \times U(n))$	$SU(n, 2)/S(U(1) \times U(n))$
$SO(n+4)/SO(n) \times (Sp(1)/Z_2)$	$SO_e(n, 4)/SO(n) \times (Sp(1)/Z_2)$
$Sp(n+1)/Sp(n)$	$Sp(n+1, \mathbb{R})/Sp(n)$
$E_6/(SU(6)/Z_2)$	$E_6^*/(SU(6)/Z_2)$
$E_8/(E_7/Z_2)$	$E_8^*/(E_7/Z_2)$
$F_4/(Sp(3)/Z_2)$	$F_4^*/(Sp(3)/Z_2)$
$G_2/(Sp(1)/Z_2)$	$G_2^*/(Sp(1)/Z_2)$

Para ilustrar a tabela acima, descreveremos agora, em detalhes, a estrutura sub-simétrica de algumas variedades sub-Riemannianas referidas nesta lista. Denotemos por $E^{i,j}$ a matriz quadrada com um na (i, j) -ésima posição e zero nas demais.

O espaço sub-simétrico $Sp(2)/Sp(1)$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{sp}(2)$ possui uma estrutura de LISO-álgebra dada por:

$$\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \text{ sob } s, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$$

onde

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{sp}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ia_1 & 0 & b_1 + ic_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 + ic_1 & 0 & -ia_1 \end{pmatrix} \in gl(4, \mathbb{C}) : a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{sp}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} ia_2 & 0 & b_2 + ic_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 + ic_2 & 0 & -ia_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl(4, \mathbb{C}) : a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_3 + ib_3 & 0 & a_4 + ib_4 \\ -a_3 + ib_3 & 0 & a_4 + ib_4 & 0 \\ 0 & -a_4 + ib_4 & 0 & a_3 - ib_3 \\ -a_4 + ib_4 & 0 & -a_3 - ib_3 & 0 \end{pmatrix} \in gl(4, \mathbb{C}) : a_3, b_3, a_4, b_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

A involução s sobre $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{sp}(2)$ é dada por:

$$\begin{aligned} s = Ad_\psi : \mathfrak{sp}(2) &\rightarrow \mathfrak{sp}(2) \\ A &\mapsto \psi \cdot A \cdot \psi \end{aligned} \quad \text{onde} \quad \psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma base de $\mathfrak{p}$ é: $\gamma = \{X_1 = -E^{1,2} + E^{2,1} - E^{3,4} + E^{4,3}, X_2 = i(E^{1,2} + E^{2,1} - E^{3,4} - E^{4,3}), X_3 = E^{1,4} + E^{2,3} - E^{3,2} - E^{4,1}, X_4 = i(E^{1,4} + E^{2,3} + E^{3,2} + E^{4,1})\}$

As possíveis métricas B definidas sobre $\mathfrak{p}$, $ad_{\mathfrak{l}_1}$ -invariantes, são tais que:

$$B(X_i, X_i) = a \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4 \quad \quad B(X_i, X_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

A álgebra quaterniônica ortogonal sobre $\mathfrak{p}$ é gerada pela base quaterniônica: $\{Id, J_1, J_2, J_3\}$ onde $J_k = ad_{\xi_k}|_{\mathfrak{p}}$ ($k = 1, 2, 3$), $\xi_1 = i(E^{1,1} - E^{3,3})$, $\xi_2 = E^{1,3} - E^{3,1}$, $\xi_3 = i(E^{1,3} + E^{3,1})$.

Um cálculo simples, mostra que γ é base quaterniônica de $\mathfrak{p}$, pois: $X_2 = J_1(X_1)$, $X_3 = J_2(X_1)$, $X_4 = J_3(X_1)$. $\square$

O espaço sub-simétrico $SU(n+2)/S(U(1) \times U(n))$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{su}(n+2)$ possui uma estrutura de LISO-álgebra dada por:

$$\mathfrak{su}(n+2) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \text{ sob } s, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$$

onde

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2) + \mathfrak{u}(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} \in gl(n+2, \mathbb{C}) : \begin{array}{l} A \in \mathfrak{u}(2), B \in \mathfrak{u}(n). \\ \text{traço} A + \text{traço} B = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) + \mathfrak{u}(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & 0 & & \\ 0 & ia & & \\ & & B & \\ & & & \end{pmatrix} \in gl(2+n, \mathbb{C}) : \begin{array}{l} B \in \mathfrak{u}(n), a \in \mathbb{R}, \\ \text{traço} B + 2ia = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{sp}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} ia_1 & b_1 + ic_1 & & & \\ -b_1 + ic_1 & -ia_1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in gl(n+2, \mathbb{C}) : a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \mathbb{R}^{4n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_n \\ -\bar{z}_1 & -\bar{w}_1 & & & & & \\ -\bar{z}_2 & -\bar{w}_2 & & & & & \\ -\bar{z}_3 & -\bar{w}_3 & & & & & \\ & & & 0 & & & \\ -\bar{z}_n & -\bar{w}_n & & & & & \end{pmatrix} \in gl(2+n, \mathbb{C}) : \begin{array}{l} z_i, w_i \in \mathbb{C} \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\}$$

A involução s sobre $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{su}(n+2)$ é dada por:

$$s = Ad_\psi : \mathfrak{su}(n+2) \rightarrow \mathfrak{su}(n+2) \quad \text{onde} \quad \psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ & & Id_{n \times n} \end{pmatrix}$$

$$A \mapsto \psi.A.\psi$$

Uma base de $\mathfrak{p}$ é: $\gamma = \{X_k = E^{1,k+2} - E^{k+2,1}, Y_k = i(E^{1,k+2} + E^{k+2,1}), Z_k = E^{k+2,2} - E^{2,k+2}, D_k = i(E^{2,k+2} + E^{k+2,2}), k = 1, 2, \dots, n\}$

Um produto interno B definido sobre $\mathfrak{p}$, $ad_{\mathfrak{l}_1}$ -invariante, pode ser dado por:
 $B(\cdot, \cdot) = aK_{ill}|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}(\cdot, \cdot)$ ($a < 0 \in \mathbb{R}$), onde $K_{ill}(X, Y) = 2(n+2) \text{ traço}(XY)$ é a forma de Killing de $\mathfrak{su}(n+2)$.

A álgebra quaterniônica ortogonal sobre $\mathfrak{p}$ é gerada pela base quaterniônica: $\{Id, J_1, J_2, J_3\}$ onde $J_k = ad_{\xi_k}|_{\mathfrak{p}}$ ($k = 1, 2, 3$), $\xi_1 = i(E^{1,1} - E^{2,2})$, $\xi_2 = E^{1,2} - E^{2,1}$, $\xi_3 = i(E^{1,2} + E^{2,1})$.

Um cálculo simples, mostra que γ é base quaterniônica de $\mathfrak{p}$, pois: $Y_k = J_1(X_k)$, $Z_k = J_2(X_k)$, $D_k = J_3(X_k)$.

□

Bibliografia

- [1] Bieliavsky, P., Falbel, E. and Gorodski, C. : *The classification of simply-connected contact sub-Riemannian symmetric spaces*, Pacific J. Math. 188 (1) (1999), 65-81.
- [2] Falbel E. and Gorodski C. : *On contact sub-Riemannian symmetric spaces*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. 28 (4) (1995), 571-589.
- [3] Falbel E. and Gorodski C. : *Sub-Riemannian homogeneous spaces in dimensions 3 and 4*, Geometriae Dedicata 62 (3) (1996), 227-252.
- [4] Falbel E., Gorodski C. and Rumin M. : *Holonomy of sub-Riemannian manifolds*, International Journal of Mathematics 8 (3) (1997), 317-344.
- [5] Falbel E., Verderesi J.A. and Veloso J.M. : *The equivalence problem in sub-Riemannian geometry*, Preprint IME-USP, 1993.
- [6] Helgason, S. : *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [7] Kobayashi, S. and Nomizu, K. : *Foundations of differential geometry*, Wiley Interscience Publishers, 1963-1969.
- [8] Montgomery, R. : *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry*, J. Dyn. and Control Syst. 1 (1) (1995), 49-90.
- [9] Salamon, S. : *Riemannian geometry and holonomy groups*, Longman Scientific and Technical, 1989.
- [10] Strichartz, R.S. : *Sub-Riemannian geometry*, J. Differential Geom. 24 (1986), 221-263.
- [11] Strichartz, R.S. : *Corrections to "Sub-Riemannian geometry"*, J. Differential Geom. 30 (1989), 595-596. 8 (3) (1997) 317-344.
- [12] Tausk, D. : *Regularidade de curvas minimizantes em espaços sub-Riemannianos homogêneos*, dissertação de mestrado IME-USP, 1998.

- [13] Hamenstädt, U. : *Some regularity theorems for Carnot-Caratheodory metrics*. J. Differential Geom. 32 (1990) 819-850.
- [14] Varadarajan, V. S. : *Lie groups, Lie algebras and their representations*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [15] Warner, F. W. : *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Glenview, Scott, 1971.
- [16] Wolf, J. A. : *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. Math. Mech. 14 (6) (1965), 1033-1047.
- [17] Wolf, J. A. : *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Inc., 1984.