**Sobre a conjectura finitística
para anéis artinianos**

Clezio Aparecido Braga

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da Fundação de
Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP*

-São Paulo, 29 de fevereiro de 2000-

aos meus pais e irmãos

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao professor Flávio Ulhoa Coelho pela colaboração e paciência durante o desenrolar deste trabalho. Pelas críticas e sugestões que deram o formato final a essa dissertação e também por ele ter sido, mais do que um orientador, um amigo.

Gostaria de destacar o apoio da professora Mary Lilian que sempre esteve presente desde antes do meu ingresso neste instituto, e os amigos Edson Ribeiro Álvares, Ângela Marta Savioli e Hernán Salazar que em nossos estudos sempre colaboraram para que fosse possível ultrapassar todas as dificuldades encontradas.

Aos meus pais, irmãos e a todos os demais familiares que sempre colaboraram para que eu pudesse chegar até aqui.

A todos os amigos que me acompanharam durante esse dois anos de trabalho.

A todos eles os meus sinceros agradecimentos.

Meus agradecimentos também ao CNPq pelo apoio financeiro no período de 01/04/98 a 30/06/98 e a FAPESP pelo apoio financeiro durante o restante desse trabalho e que tornou possível sua realização.

Clezio Aparecido Braga

Abstract

The main purpose of this work is explore some technics used to get some informations on the finitistic dimension conjecture. There are some particular cases where this conjecture was shown, for example, the monomial path algebras ([GKK]), artinian rings with vanishing cube radical ([GZ]) and serial rings ([FS]).

In this text we will explore a technic that will allow us to compare the finitistic dimension of a artinian ring R with the finitistic dimension of the endomorphism ring $End(Re)^{op}$, where e is an idempotent in R . This argument will allow us to solve the finitistic conjecture in some cases and in other cases to impose further conditions on the rings. For instance, we can consider only rings without simple modules with projective dimension smaller than or equal 1 to solve the conjecture. The second chapter is devoted to explore these facts.

In the third chapter we use results of chapter 2 to present one considerable simplification in the proof of the finitistic dimension conjecture on artinian rings with vanishing cube radical.

We study in the fourth chapter a class of artinian rings which generalize the class of serial rings and confirm the finitistic conjecture for this class ([W]). We will also use here the results developed in chapter 2.

The fifth chapter is developed to present a proof of the finitistic conjecture for monomial path algebras.

In the last chapter we study this conjecture for the so-called *generalized path algebras*. This class of algebras was introduced by Shao Xue Liu. The chapter also presents a characterization of artinian (or noetherian) generalized path algebra. Finally, we will give a characterization about the finitistic dimension of a artinian generalized path algebra in terms of the family of K -algebras used in their definition, here K denote a field.

Resumo

•

Este trabalho tem como propósito explorar as várias técnicas utilizadas na tentativa de resolver a conjectura da dimensão finitística.

Existem vários casos particulares onde essa conjectura foi demonstrada, por exemplo, para álgebras de caminhos monomiais ([GKK]), para anéis artinianos com radical ao cubo nulo ([GH]), para anéis seriais ([FS]).

Neste texto vamos explorar uma técnica que permite comparar a dimensão finitística de um anel R com a dimensão finitística do anel de endomorfismos $End(Re)^{op}$ para um idempotente $e \in R$. Esse tipo de argumento vai permitir em alguns casos concluir a validade da conjectura e em outros mostrar que podemos impor determinadas condições sobre os anéis em questão. Como por exemplo, podemos considerar apenas anéis artinianos sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1 para efeitos da validade da conjectura. O segundo capítulo é destinado a explorar esses fatos, bem como construir a fundamentação desses argumentos.

O terceiro capítulo utiliza os resultados do capítulo 2 para apresentar uma considerável simplificação da demonstração da conjectura finitística para anéis artinianos com radical ao cubo nulo.

O quarto capítulo explora uma classe de anéis artinianos que generalizam os anéis seriais e comprova a validade da conjectura para essa classe de anéis ([W]), utilizando para isso os resultados desenvolvidos no capítulo 2.

O quinto capítulo apresenta a demonstração da conjectura finitística para álgebras de caminhos monomiais.

O último capítulo introduz uma generalização das álgebras de caminhos. Essas novas álgebras são denominadas álgebras de caminhos generalizadas e foram introduzidas por Shao Xue Liu. O capítulo também apresenta uma caracterização quanto a dizer se tais álgebras são noetherianas ou artinianas à direita ou à esquerda. Por fim, caracteriza a dimensão finitística de uma álgebra generalizada artiniana em termos da família de K -álgebras envolvidas em sua definição, onde K denota um corpo qualquer.

Conteúdo

1	Preliminares	8
1.1	Anéis artinianos e noetherianos	9
1.2	Resoluções projetivas	11
1.3	Aljavas e Álgebras de Caminhos	15
2	Mudança de Anéis	18
2.1	Dimensões Homológicas e Idempotentes	19
2.2	Teoremas de Redução	25
3	Anéis artinianos com o cubo do radical nulo	40
3.1	O Caso Simples	40
3.2	O Caso Geral	49
4	Anéis seriais e quase seriais à esquerda	58
4.1	Definições e exemplos	59
4.2	Conjectura finitística para anéis quase seriais	61
5	Álgebras de caminhos monomiais	72
5.1	Limite direto	72
5.2	Conjuntos de Obstrução	77
5.3	Uma Cota superior para $\text{Fpd}(A)$	82

6	Álgebras de caminhos generalizadas	88
6.1	$\mathcal{A}$ -Álgebras de Caminhos	89
6.2	Radical de uma Álgebra de Caminhos Generalizada	92
6.3	Critérios para Noetherianidade e Artinianidade	94
6.4	Conjectura finística para álgebras de caminhos generalizadas . . .	100

Introdução

Em finais dos anos 50, Rosenberg e Zelinsky conjecturaram que dada uma álgebra de dimensão finita R , existe uma cota para a dimensão projetiva dos R -módulos que têm dimensão projetiva finita (veja [B]). Essa conjectura ficou conhecida como a conjectura da dimensão finitística.

Atualmente define-se a dimensão finitística (**grande**) de um anel R por

$$\text{Fpd}(R) = \sup\{pd_R(M) \mid M \in R\text{-Mod e } pd_R(M) < \infty\}.$$

Essa conjectura tem despertado o interesse de muitos pesquisadores, tanto por seu valor intrínseco como por suas conseqüências. Muitas vezes é conveniente restringir o estudo a módulos finitamente gerados e define-se então a dimensão finitística (**pequena**) de um anel R como sendo

$$\text{fpd}(R) = \sup\{pd_R(M) \mid M \in R\text{-mod e } pd_R(M) < \infty\}.$$

É claro que se $\text{Fpd}(R) < \infty$, então $\text{fpd}(R) < \infty$. As duas versões atuais da conjectura, isto é, saber se $\text{fpd}(R) < \infty$ ou $\text{Fpd}(R) < \infty$ são conhecidas como “Primeira conjectura finitística”.

A segunda conjectura da dimensão finitística afirmava que $\text{Fpd}(R) = \text{fpd}(R)$. Entretanto, sabe-se agora que a segunda conjectura é falsa. Em [H2], B. Huisgen - Zimmermann exhibe um exemplo para o qual a pequena e a grande dimensão finitística são diferentes. Recentemente Smalø mostrou que a diferença entre elas pode ser arbitrariamente grande, veja [S] para maiores detalhes.

Enquanto a segunda conjectura da dimensão finitística mostrou-se não ser verdadeira a primeira ainda é um problema em aberto e constitui um importante objeto de pesquisa.

A conjectura da dimensão finitística para anéis noetherianos comutativos foi completamente resolvida nas décadas de 60 e 70, citamos como referência os artigos [AB],[B2] e [GR]. Entretanto pouco se sabe sobre ela para anéis artinianos não comutativos. Um dos principais avanços nessa direção é a validade da conjectura para álgebras de caminhos monomiais de dimensão finita, que foi demonstrada por E. Green, E. Kirkman e J. Kuzmanovich em [GKK]. Um outro resultado de Green e Huisgen - Zimmermann mostra que a pequena dimensão finitística para anéis artinianos com radical ao cubo nulo é finita. Veja [GH].

O interesse na validade dessa conjectura é que a dimensão finitística de uma álgebra, ou de um anel, fornece informações mais precisas a respeito de sua categoria de módulos, do que, por exemplo, a dimensão global. Outro interesse está associado ao fato de que a conjectura finitística implica a conjectura de Nakayama. Vale lembrar que a conjectura de Nakayama afirma que se uma álgebra possui dimensão dominante infinita, então ela é auto injetiva.

Este trabalho é desenvolvido para apresentar alguns resultados obtidos na tentativa de resolver a conjectura, dentre os quais os mencionados acima. Entretanto a versão que apresentaremos da demonstração da conjectura finitística para anéis artinianos com radical ao cubo nulo é a de Fuller e Saorin em [FS]. Mas destacamos que existem vários casos onde é possível estabelecer a conjectura e que não será tratado aqui. Por exemplo a pequena dimensão finitística é finita para uma álgebra de artin R onde a subcategoria P^∞ de $R\text{-mod}$, consistindo dos R -módulos finitamente gerados e com dimensão projetiva finita, é contravariantemente finita (veja [AR]).

O primeiro capítulo apresenta os resultados básicos, bem como algumas definições que vamos utilizar no decorrer do texto. Boa parte dos resultados do capítulo são apresentados sem suas demonstrações, pois estas podem ser encontradas em qualquer bibliografia básica sobre representações de álgebras, teoria de módulos e álgebra homológica. No segundo capítulo desenvolveremos algumas ferramentas que nos permitirão uma certa facilidade no manuseio de limitan-

tes para a dimensão projetiva dos módulos, bem como a comparação entre a dimensão projetiva de módulos em diferentes categorias de módulos.

Os resultados apresentados ao longo do segundo capítulo foram desenvolvidos por K. Fuller e M. Saorin em [FS]. Tais resultados permitem simplificar consideravelmente a demonstração da conjectura finitística para anéis artinianos onde o radical ao cubo é nulo.

Com as técnicas de [FS] veremos que para resolver a conjectura para anéis artinianos com $J^3 = 0$, basta resolvê-la no caso em que $J^3 = 0$ e todos os somandos de J^2 possuam dimensão projetiva infinita (J denota o radical de Jacobson de R). Os demais casos considerados poderão ser reduzidos a esse. Obtém-se também simplificações da conjectura finitística, como por exemplo: resolver a conjectura finitística para anéis artinianos é equivalente a resolvê-la para anéis artinianos sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1. Podemos também relacionar a dimensão finitística de um anel R as de suas componentes irredutíveis e verificar que a validade da conjectura finitística para o anel R é equivalente à validade da conjectura para cada uma de suas componentes irredutíveis.

O terceiro capítulo concilia o resultado básico de Green e Huisgen - Zimmermann, que comentamos acima, com a técnica desenvolvida no Capítulo 2, para resolver a conjectura finitística para anéis artinianos básicos nos quais $J^3 = 0$.

A demonstração que apresentaremos aqui é, em essência, a demonstração de [FS], entretanto fizemos algumas alterações no formato do enunciado do teorema principal para evidenciar o fato de que o caso onde $J^3 = 0$ é simplesmente um corolário desse resultado, o qual não fica muito claro em [FS].

No quarto capítulo destacaremos uma classe de anéis artinianos um pouco mais geral do que os anéis seriais. Essa nova classe de anéis artinianos foi introduzida por Burguess e Fuller em [BF], quando eles estavam trabalhando em problemas de caracterização da dimensão global. Tais anéis são denominados de *anéis quase seriais* e para essa classe de anéis é válida a conjectura finitística.

O argumento central nesse caso é provar a conjectura quando a dimensão projetiva de todos os módulos simples do anel for infinita, e em seguida reduzir o caso geral a este caso através de uma decomposição adequada da identidade de modo a poder utilizar os resultados do Capítulo 2. Exemplificando, se R é um anel quase serial à esquerda e básico, é possível escrever $1 = e + f$ com e e f idempotentes em R de modo que a dimensão finitística de R seja menor ou igual à soma da dimensão finitística de eRe com a dimensão projetiva de Rf/Jf mais 1, e de modo que todos os simples de eRe tenham dimensão projetiva infinita. Então $\text{Fpd}(eRe) = 0$ e tem-se-a que $\text{Fpd}(R) \leq \text{pd}_R(Rf/Jf) + 1$.

No capítulo seguinte apresentaremos a demonstração da conjectura finitística para álgebras de caminhos monomiais de dimensão finita. Esse resultado é um dos mais bem sucedidos na tentativa de provar a conjectura finitística (veja [GKK]). A demonstração consiste em encontrar uma constante c tal que, se para algum $m \geq 0$, $\text{Tor}_m^R(-, X) = 0, \forall X \in \text{Mod} R$, então $\text{Tor}_c^R(-, X) = 0$, onde R denota uma álgebra monomial de dimensão finita sobre um corpo K . Em consequência disso, a dimensão projetiva de X será menor ou igual a c , para todo $X \in \text{Mod} R$, e portanto $\text{Fpd}(R) \leq c$.

A demonstração da existência da constante c é construtiva dependendo essencialmente do fato da álgebra ser monomial, e o capítulo é desenvolvido no intuito de explicitar essa construção.

Finalmente, no último capítulo analisaremos a conjectura para a classe das álgebras de caminhos generalizadas. Essa nova classe de álgebras é definida a partir de uma aljava e uma família de álgebras sobre um corpo K previamente dadas e em correspondência com os vértices da aljava. Essa classe de álgebras foi introduzida por Shao Xue Liu e ela pode ser encontrada em [CL].

Apresentaremos um critério para dizer quando um álgebra de caminhos generalizada é artiniana à direita ou à esquerda em termos de sua aljava e da família de K -álgebras. As idéias utilizadas para a demonstração são muito parecidas com as que Coelho e Liu utilizaram para apresentar a caracterização das álgebras

de caminhos generalizadas noetherianas em [CL].

O porquê de estarmos interessados em álgebras generalizadas que são artiniananas, é que para essa classe de álgebras se pode aplicar resultados sobre a dimensão finitística para anéis artinianos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

O importante é que as álgebras de caminhos generalizadas artiniananas à direita ou à esquerda possuem aljava acíclica e então é possível ordenar os vértices da aljava de modo a associar a dimensão finitística de uma álgebra generalizada com as dimensões finitísticas das álgebras associadas aos vértices da aljava.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar um resumo das noções básicas que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Todos os anéis considerados são anéis com identidade e sempre que falarmos em módulos estamos considerando módulos à esquerda.

Segue abaixo algumas notações que utilizaremos no decorrer do trabalho.

Seja R um anel

- $R\text{-Mod}$ é a categoria dos R -módulos à esquerda.
- $R\text{-mod}$ denota a categoria dos R -módulos à esquerda finitamente gerados.
- $\text{Add}M$ denota todos os R -módulos que são somas diretas de somandos de M e $\text{add}M$ aqueles que são somas diretas finitas de somandos de M .
- R^{op} é o anel oposto de R .
- $\text{Hom}_R(X, -)$ e $\text{Hom}_R(-, Y)$ são os funtores de homomorfismos sobre R .

Observação: usaremos também a notação ${}_R(X, -)$ para indicar o funtor $\text{Hom}_R(X, -)$.

1.1 Anéis artinianos e noetherianos

Um anel R é **artiniano à esquerda** (à direita) se toda cadeia descendente de ideais à esquerda (respectivamente à direita)

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m \dots$$

estaciona, isto é, existe um índice i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, $I_i = I_{i_0}$.

Analogamente, um anel R é **noetheriano à esquerda** (à direita) se toda cadeia ascendente de ideais à esquerda (à direita) estaciona.

Se M é um R -módulo dizemos que M é **artiniano** (**noetheriano**) se toda cadeia descendente (ascendente) de submódulos de M estaciona.

Definição 1.1 *Seja R um anel qualquer:*

- (a) *O radical de Jacobson J de R é o ideal bilateral obtido pela intersecção de todos os submódulos maximais de R .*
- (b) *Se M é um R -módulo definimos o radical de M ($\text{rad } M$) como sendo a intersecção de todos os submódulos maximais de M .*

Teorema 1.2 *Sejam R um anel artiniano à esquerda e J o seu radical, então R/J é um anel semisimples.*

■

Lembramos que o comprimento de um R -módulo M é o número de fatores de composição de M . Denotaremos esse número por $l_R(M)$.

Teorema 1.3 *Sejam R um anel artiniano à esquerda, J o seu radical e M um R -módulo. Então $\text{rad } M = JM$*

■

Definição 1.4 *Um anel é dito ser básico se na decomposição*

$$R = P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2} \oplus \dots \oplus P_k^{m_k}$$

em R -módulos indecomponíveis, todos os m_t são iguais a 1 para $t = 1, 2, \dots, k$ e $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$.

Para um anel artiniano qualquer R , sempre existe um projetivo P tal que $(\text{End}(P))^{\text{op}}$ é básico e Morita equivalente a R , isto é, as categorias de módulos $R\text{-Mod}$ e $(\text{End}(P))^{\text{op}}\text{-Mod}$ são equivalentes no sentido usual. Com essa observação podemos sempre supor que R é um anel artiniano básico. Então como é bem conhecido, R admite um conjunto de idempotentes ortogonais e primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $1 = \sum_{i=1}^n e_i$.

Teorema 1.5 *Sejam R um anel artiniano e M um R -módulo. As seguintes condições são equivalentes*

- (a) M é artiniano;
- (b) M é noetheriano;
- (c) M é finitamente gerado;
- (d) M é de comprimento finito.

■

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [A].

Proposição 1.6 *Sejam $e \in R$ um idempotente e M um R -módulo. Então existe um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos*

$$\text{Hom}_R(Re, M) \cong eM.$$

■

Corolário 1.7 *Seja $e \in R$ um idempotente. Então existe um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos entre $\text{End}(Re)$ e eRe que a cada $f \in \text{End}(Re)$ associa $f(e)e = ef(e)e$*

■

Como consequência do Corolário 1.7 existe um isomorfismo de anéis entre $(\text{End}Re)^{\text{op}}$ e eRe .

Proposição 1.8 *Seja R um anel artiniano à esquerda. Então $\text{rad}(eRe) = eJe$, onde $e \in R$ é um idempotente e J é o radical de Jacobson de R .*

■

1.2 Resoluções projetivas

Definição 1.9 *Sejam R um anel artiniano à esquerda e M um R -módulo. Uma cobertura projetiva de M é um par (P, f) , onde P é um R -módulo projetivo e $f : P \rightarrow M$ é um epimorfismo tal que o morfismo induzido*

$$\bar{f} : P/\text{rad}(P) \rightarrow M/\text{rad}M$$

é um isomorfismo de R -módulos.

Observação: Se P e M são R -módulos finitamente gerados com P projetivo e $f : P \rightarrow M$ é um epimorfismo, então as seguintes condições são equivalentes.

- (a) f é uma cobertura projetiva.
- (b) $\text{Ker } f \subset \text{rad}(P)$.
- (c) f é um epimorfismo essencial.

Lembramos que um epimorfismo h é **essencial** se: sempre que $h \circ g$ for um epimorfismo então g também será epimorfismo.

Para que possamos estabelecer os resultados que nos interessam sobre dimensão projetiva, utilizaremos os funtores $\text{Ext}_R^i(-, -)$ e $\text{Tor}_i^R(-, -)$. (Veja [A] e [R].)

Proposição 1.10 *Dada uma seqüência exata curta*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

para cada $X \in R\text{-Mod}$ existem seqüências exatas longas

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(X, A) \rightarrow \text{Hom}_R(X, B) \rightarrow \text{Hom}_R(X, C) \rightarrow \text{Ext}_R^1(X, A) \rightarrow \text{Ext}_R^1(X, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(X, C) \rightarrow \text{Ext}_R^2(X, A) \rightarrow \dots,$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, X) \rightarrow \text{Hom}_R(B, X) \rightarrow \text{Hom}_R(A, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X) \rightarrow \text{Ext}_R^2(C, X) \rightarrow \dots$$

e para cada R -módulo Y à direita existe uma seqüência exata longa.

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_i^R(Y, B) \rightarrow \text{Tor}_i^R(Y, C) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Tor}_1^R(Y, C) \rightarrow Y \otimes_R A \rightarrow Y \otimes_R B \rightarrow Y \otimes_R C \rightarrow 0.$$

■

Definição 1.11 *Seja M um R -módulo. A dimensão projetiva de M é o menor inteiro m tal que existe uma resolução projetiva*

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

se um tal m existir e é infinita caso contrário.

A dimensão projetiva de M é denotada por $pd_R(M)$. Dizemos que uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} \dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

é minimal se o par (P_i, f_i) for uma cobertura projetiva de $\text{Ker}(f_{i-1})$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e (P_0, f_0) for uma cobertura projetiva do módulo M .

Exemplos 1.12

(a) Para um R -módulo M , $pd_R(M) = 0$ se e somente se M for um projetivo não nulo.

(b) Seja $m > 0$ um inteiro arbitrário. O $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}_m$ possui dimensão projetiva

1. De fato, existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0,$$

onde $f(a) = am$ e $g = \text{coker}(f)$. Portanto $\text{pd}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m) \leq 1$. Como $\mathbb{Z}_m$ não é somando de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$ não é projetivo, portanto $\text{pd}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m) = 1$.

Teorema 1.13 *Sejam R um anel artiniano à esquerda, M um R -módulo e $m \geq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\text{pd}_R(M) \leq m$.
- (b) $\text{Ext}_R^i(M, -) = 0 \quad \forall i > m$.
- (c) $\text{Ext}_R^{m+1}(M, -) = 0$.
- (d) *Para toda seqüência exata*

$$0 \rightarrow L \rightarrow P_m \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

com P_i projetivo para $i = 1, \dots, m$, L é projetivo.

■

Corolário 1.14 *Seja $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma seqüência exata de R -módulos. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\text{pd}_R(N) \leq \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(L) + 1\}$ e vale a igualdade se e somente se $\text{pd}_R(M) \neq \text{pd}_R(L)$.
- (b) $\text{pd}_R(L) \leq \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(N) - 1\}$ e vale a igualdade se e somente se $\text{pd}_R(M) \neq \text{pd}_R(N)$.
- (c) $\text{pd}_R(M) \leq \max\{\text{pd}_R(N), \text{pd}_R(L)\}$ e vale a igualdade se e somente se $\text{pd}_R(N) \neq \text{pd}_R(L)$.

■

Definição 1.15

- (1) *Um R -módulo à esquerda M é dito plano se $- \otimes_R M$ for exato.*

(2) A dimensão plana de M é o menor inteiro n para o qual existe uma resolução plana

$$0 \rightarrow Q_n \rightarrow \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

se um tal n existir e ∞ caso contrário.

Denotaremos a dimensão plana de um módulo M por $fd_R(M)$. Este conceito será utilizado na prova do Teorema 5.16.

Teorema 1.16 *Sejam M um R módulo e $n \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes.*

- (a) $fd_R(M) \leq n$.
- (b) $Tor_i^R(M, -) = 0 \quad \forall i > n$.
- (c) $Tor_{n+1}^R(M, -) = 0$.
- (d) Para toda seqüência exata

$$0 \rightarrow L \rightarrow Q_n \rightarrow \dots \rightarrow Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

com Q_i plano, L é plano.

■

Na seqüência definiremos a dimensão finitística para um anel R .

Definição 1.17 *Sejam R um anel e $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $R\text{-Mod}$. Definimos a dimensão finitística de $\mathcal{C}$ por:*

$$\text{Fpd}(\mathcal{C}) = \sup\{pd_R(M) \mid M \in \mathcal{C} \text{ e } pd_R(M) < \infty\}$$

Se a categoria $\mathcal{C}$ for a categoria $R\text{-mod}$, denotaremos $\text{Fpd}(R\text{-mod})$ por

$$\text{fpd}(R) = \sup\{pd_R(M) \mid M \in R\text{-mod e } pd_R(M) < \infty\}.$$

e a chamaremos de **pequena dimensão finitística** de R .

Se $\mathcal{C}$ for toda categoria $R\text{-Mod}$, denotaremos $\text{Fpd}(R\text{-Mod})$ por $\text{Fpd}(R)$ e a chamaremos de **grande dimensão finitística** de R .

Também vamos utilizar a dimensão global de um anel R . Essa dimensão é definida por $gl.dim(R) = \sup\{pd_R(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}$.

Mostrar a primeira conjectura finitística para um anel R é mostrar que $\text{Fpd}(R)$ é finito. Algumas vezes vamos mostrar que $\text{fpd}(R)$ é finito e referir a esse fato também como conjectura finitística, mas isso deve ficar claro no contexto.

A segunda conjectura da dimensão finitística afirma que $\text{Fpd}(R)$ coincide com $\text{fpd}(R)$. Obviamente se $\text{Fpd}(R)$ for finito, então $\text{fpd}(R)$ também será. Mas existem exemplos onde $\text{fpd}(R)$ é estritamente menor do que $\text{Fpd}(R)$, isto é, a segunda conjectura da dimensão finitística é falsa. Veja por exemplo, [S] e [H2].

1.3 Aljavas e Álgebras de Caminhos

Vamos agora introduzir a noção de aljavas e álgebra de caminhos. Esses conceitos serão úteis para construir exemplos de álgebras com as propriedades que queremos e também para exibir a demonstração da conjectura finitística para álgebras de caminhos monomiais. A conjectura para álgebras monomiais de dimensão finita foi provado por E. Green, E. Kirkman e J. Kuzmanovich em [GKK].

Uma aljava Δ é dada por dois conjuntos Δ_0 e Δ_1 e um par de funções $s, t : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$. Os elementos de Δ_0 são chamados de **vértices** enquanto os de Δ_1 são chamados de **flechas**. Dada um flecha $\alpha \in \Delta_1$, $s(\alpha)$ é o **vértice inicial** de α enquanto que $t(\alpha)$ é o **vértice final** de α . Uma aljava é dita **finita** se os conjuntos Δ_0 e Δ_1 são finitos.

Um **caminho** na aljava Δ é definido da seguinte maneira: um **caminho de comprimento n** é uma seqüência de flechas $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < n$. Além disso, para cada $i \in \Delta_0$ associamos um caminho, chamado **caminho trivial** ou caminho de comprimento zero, ao qual denotaremos por e_i . Para qualquer caminho não trivial $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ definimos $s(\gamma) = s(\alpha_1)$ e $t(\gamma) = t(\alpha_n)$. Caso $s(\gamma) = t(\gamma)$ dizemos que γ é um **ciclo orientado**.

Uma aljava Δ é dita ser **conexa** se para qualquer par de vértices $i, j \in \Delta_0$ existe uma seqüência, eventualmente vazia, de flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que:

1. $s(\alpha_1) = i$ ou $t(\alpha_1) = i$
2. $s(\alpha_n) = j$ ou $t(\alpha_n) = j$
3. $\{s(\alpha_l), t(\alpha_l)\} \cap \{s(\alpha_{l+1}), t(\alpha_{l+1})\} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq l < n$.

Considere um corpo K e denote por $K\Delta$ o K -espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos em Δ , inclusive os triviais.

Vamos definir sobre $K\Delta$ uma estrutura de K -álgebra da forma abaixo descrita:

Se $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ e $\delta = \beta_1 \dots \beta_m$ são caminhos em Δ , então definimos

$$\delta\gamma = \begin{cases} \beta_1 \dots \beta_m \alpha_1 \dots \alpha_n & \text{se } s(\alpha_1) = t(\beta_m) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A álgebra definida acima é chamada de **álgebra de caminhos de Δ sobre K** .

Observação: Se Δ for uma aljava finita então $R = K\Delta$ satisfaz:

1. R é uma álgebra de dimensão finita sobre K se e somente se Δ não tem ciclos orientados.
2. R é uma álgebra indecomponível se e somente se Δ é uma aljava conexa.
3. R é uma álgebra básica.

4. O conjunto $\{e_i/i \in \Delta_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de $K\Delta$.

Sejam K um corpo e Δ uma aljava e denote por J o ideal de $K\Delta$ gerado por Δ_1 , que é o conjunto das flechas. Dizemos que um ideal I é **admissível** se existir um $m > 0$ tal que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$.

Uma **relação** ρ em Δ é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois com o mesmo início e mesmo final.

Proposição 1.18 *Se I é um ideal admissível da álgebra $K\Delta$, então existe um conjunto finito de relações $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ tal que $I = \langle \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k \rangle$*

■

Seja $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k\}$ um conjunto formado por relações em Δ . Dizemos que (Δ, ρ) é uma **aljava com relações** e a álgebra $K\Delta / \langle \rho \rangle$ é dita a **álgebra de caminhos** de (Δ, ρ) sobre o corpo K .

Lembramos que se K for algebricamente fechado, então toda álgebra básica de dimensão finita sobre K é isomorfa a uma álgebra de caminhos do tipo $K\Delta/I$ para alguma aljava Δ , e I um ideal admissível de $K\Delta$. Esse resultado é conhecido como Teorema de Gabriel (ver [CLS]).

Capítulo 2

Mudança de Anéis

Este capítulo é desenvolvido para podermos relacionar informações entre a dimensão projetiva dos módulos na categoria de módulos sobre um anel R e a dimensão projetiva dos módulos na categoria de módulos sobre o anel $eRe \cong (End(Re))^{op}$ quando e é um idempotente em R .

Os resultados aqui apresentados foram desenvolvidos por Fuller e Saorin em [FS]. Nesse trabalho eles utilizam essa técnica para apresentar uma simplificação da demonstração da conjectura finitística para anéis artinianos com radical ao cubo nulo, provado inicialmente por E. Green e B. Huisgen - Zimmermann em [GH].

Iniciaremos com alguns resultados gerais que relacionam a dimensão projetiva de um módulo M sobre o anel R , com a dimensão projetiva do módulo eM sobre o anel eRe . Em seguida aplicaremos tais resultados para obter informações sobre a conjectura finitística dos anéis mencionados. Finalizaremos o capítulo com uma importante redução da conjectura da dimensão finitística, mostrando que sobre anéis artinianos podemos considerar apenas aqueles sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1.

Para poder transportar informações entre a categoria de módulos sobre o anel R e a categoria de módulos sobre o anel eRe utilizaremos um par de funtores adjuntos (F, G) , os quais definiremos a seguir.

2.1 Dimensões Homológicas e Idempotentes

Ao longo dessa seção R denotará um anel e e um idempotente não nulo em R .

Estamos interessados em estabelecer relações entre as categorias $R\text{-mod}$ e $eRe\text{-Mod}$ e para isso vamos considerar o par de funtores abaixo.

- $F : R\text{-Mod} \rightarrow eRe\text{-Mod}$ que para cada M associa $eM \cong \text{Hom}_R(Re, M)$.
- $G = Re \otimes_{eRe} - : eRe\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$

Observações:

(i) $\text{Hom}_R(Re, M)$ é um eRe -módulo à esquerda.

De fato, sabemos que $\text{Hom}_R(Re, M)$ é um $\text{End}(Re)^{op}$ -módulo à esquerda. Mas como $\text{End}_R(Re)^{op} \cong eRe$ é um isomorfismo de anéis, temos que $\text{Hom}_R(Re, M)$ é também um eRe -módulo à esquerda.

(ii) G restrito à subcategoria $eRe\text{-mod}$ dos eRe -módulos à esquerda finitamente gerados, tem como imagem uma subcategoria plena da categoria $R\text{-mod}$ dos R -módulos à esquerda finitamente gerados.

(iii) F e G são adjuntos.

De fato,

$$\text{Hom}_{eRe}(N, F(M)) = \text{Hom}_{eRe}(N, eM) \cong \text{Hom}_{eRe}(N, \text{Hom}_R(Re, M)) \cong$$

$$\text{Hom}_R(Re \otimes_{eRe} N, M) = \text{Hom}_R(G(N), M).$$

(iv) $F(M) \cong eR \otimes_R M$ e $FG(N) \cong N$.

(v) $GF(Re) = Re \otimes_{eRe} eRe \cong Re$ e como F e G são funtores aditivos se $M \in \text{Add}Re$, então $GF(M) \cong M$.

(vi) F é exato, pois F é isomorfo a $\text{Hom}_R(Re, -)$ e Re é um R -módulo projetivo.

O próximo resultado fornece um critério para saber quando F preserva a finitude da dimensão projetiva dos módulos e quando preserva módulos finitamente gerados.

Lema 2.1 *Seja $f = 1 - e$. Então:*

- (i) *F preserva módulos finitamente gerados se e somente se ${}_eRe eRf$ for finitamente gerado.*
- (ii) *F preserva finitude da dimensão projetiva se e somente se $pd_{{}_eRe}(eRf) < \infty$*

Prova: (i) Suponha que F preserva módulos finitamente gerados e considere o R -módulo Rf , que obviamente é finitamente gerado, então $F(Rf) = eRf$ é finitamente gerado sobre eRe . Reciprocamente, se eRf é finitamente gerado sobre eRe e M é um R -módulo finitamente gerado, então existe um conjunto de geradores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de M , isto é, $\forall y \in M$, existem $a_i \in R$ com $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Como $F(M) = eM$, dado $x \in eM$, podemos escrever $x = ez$ para algum $z \in M$ e então existem $a_i \in R$ tais que $x = \sum_{i=1}^n ea_i x_i$. Como $a_i = a_i e + a_i f$, teremos $x = \sum_{i=1}^n ea_i ex_i + \sum_{i=1}^n ea_i f x_i$. Sendo ${}_eRe eRf$ finitamente gerado, existem $z_j \in eRf$ e $b_{ij} \in eRe$, tais que $ea_i f = \sum_{j=1}^m b_{ij} z_j$. Portanto $x = \sum_{i=1}^n ea_i ex_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} z_j x_i$. Logo eM é gerado como eRe -módulo por $\{x_i\} \cup \{z_j x_i\}$ para $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

(ii) Vamos supor $pd_{{}_eRe}(eRf) < \infty$. Seja $M \in R\text{-Mod}$ tal que $pd_R(M) < \infty$ e considere a resolução projetiva minimal de M .

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Aplicando F a $(*)$ obtém-se a seqüência exata

$$0 \longrightarrow eP_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow eP_0 \longrightarrow eM \longrightarrow 0.$$

Como $P_i \in \text{Add} R$, o eRe -módulo eP_i é um somando de $(eR)^n$ para algum n e portanto $pd_{eRe}(eP_i) \leq pd_{eRe}(eR)$. Mas

$$pd_{eRe}(eR) = pd_{eRe}(eRe \oplus eRf) = pd_{eRe}(eRf).$$

Logo $pd_{eRe}(eP_i) \leq pd_{eRe}(eRf) = k$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Conseqüentemente

$$pd_{eRe}(eM) \leq k + m.$$

■

Lema 2.2 *Suponha que $\sup\{pd_R(L)/eL = 0\} = d < \infty$ e seja $M \in R\text{-Mod}$. Se qualquer uma dentre $pd_R(M)$, $pd_R(ReM)$ ou $pd_R(GF(M))$ for finita, então todas serão finitas e $pd_R(M) \leq \max\{pd_R(GF(M)), d + 1\}$.*

Prova: Consideremos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow ReM \longrightarrow M \longrightarrow M/ReM \longrightarrow 0.$$

Aplicando F obtemos

$$0 \longrightarrow eReM \longrightarrow eM \longrightarrow e(M/ReM) \longrightarrow 0.$$

Como $eReM = eM$ e $e(M/ReM) \cong eM/eReM$, temos que $e(M/ReM) = 0$. Segue que $pd_R(M/ReM) \leq d$.

Se $pd_R(ReM) > d$ ou $pd_R(M) > d$, então $pd_R(ReM) = pd_R(M)$. Aplicando novamente o funtor F , agora na seqüência exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow GF(M) \longrightarrow ReM \longrightarrow 0$$

teremos

$$0 \longrightarrow F(K) \longrightarrow FGF(M) \longrightarrow F(ReM) \longrightarrow 0.$$

Mas como $FGF(M) \cong F(M)$ e $\forall X \in R\text{-Mod } F(X) = eX$, então

$$0 \longrightarrow eK \longrightarrow eM \longrightarrow eReM \longrightarrow 0$$

é exata.

Uma vez que $eM \cong eReM$, então $eK = F(K) = 0$. Segue pela nossa hipótese que $pd_R(K) \leq d$. Então se $pd_R(GF(M)) > d$, teremos $pd_R(GF(M)) = pd_R(ReM) = pd_R(M)$.

Se $pd_R(ReM) > d + 1$, como $pd_R(K) \leq d$ e $pd_R(GF(M)) = \max\{pd_R(K), pd_R(ReM) + 1\}$, temos $pd_R(GF(M)) > pd_R(K)$ e portanto $pd_R(GF(M)) = pd_R(M)$. Segue que todos os três módulos possuem dimensão projetiva menor ou igual a $d + 1$ ou todas são iguais. Em qualquer caso

$$pd_R(M) \leq \max\{pd_R(GF(M)), d + 1\}$$

■

Teorema 2.3 *Se $e \neq 0$ for um idempotente em R , então*

$$pd_R(M) \leq pd_{eRe}(eM) + \sup\{pd_R(L)/eL = 0\} + 1$$

para qualquer $M \in R\text{-Mod}$.

Prova: Se $\sup\{pd_R(L)/eL = 0\} = \infty$ a desigualdade é satisfeita trivialmente. Então podemos assumir que $\sup\{pd_R(L)/eL = 0\} = d < \infty$.

Consideremos $N = eM$. Isso significa que $G(N) = GF(M)$. Pelo Lema 2.2 basta mostrar que se $pd_{eRe}(N) = m < \infty$, então $pd_R(G(N)) \leq m + d + 1$.

Faremos esta prova por indução em $m \geq 0$.

Se $m = 0$, então $eReN$ é projetivo, e portanto, $G(N)$ é também projetivo. De fato, seja

$$0 \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

uma seqüência exata de R -módulos. Como Re é um módulo projetivo,

$$0 \rightarrow_R (Re, C) \rightarrow_R (Re, A) \rightarrow_R (Re, B) \rightarrow 0 \quad (**)$$

é uma seqüência exata em eRe -Mod. Aplicando ${}_{eRe}(N, -)$ a $(**)$ teremos que

$$0 \rightarrow_{eRe} (N, {}_R(Re, C)) \rightarrow_{eRe} (N, {}_R(Re, A)) \rightarrow_{eRe} (N, {}_R(Re, B)) \rightarrow 0$$

é também exata. Como G e F são funtores adjuntos o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_{eRe}(N, {}_R(Re, C)) & \longrightarrow & {}_{eRe}(N, {}_R(Re, A)) & \longrightarrow & {}_{eRe}(N, {}_R(Re, B)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & {}_R(Re \otimes_{eRe} N, C) & \longrightarrow & {}_R(Re \otimes_{eRe} N, A) & \longrightarrow & {}_R(Re \otimes_{eRe} N, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

e

$$0 \longrightarrow {}_R(Re \otimes_{eRe} N, C) \longrightarrow {}_R(Re \otimes_{eRe} N, A) \longrightarrow {}_R(Re \otimes_{eRe} N, B) \longrightarrow 0$$

é exata, isto é, $\text{Hom}_R(Re \otimes_{eRe} N, -)$ preserva seqüências exatas curtas. Portanto $Re \otimes_{eRe} N = G(N)$ é projetivo.

Suponha $pd_{eRe}(N) = m > 0$ e que a afirmação seja válida para qualquer eRe -módulo de dimensão projetiva menor que m . Considere uma resolução projetiva de N em eRe -Mod

$$0 \longrightarrow Q_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0.$$

Se $K = \ker h$, então $pd_R(K) \leq m - 1$. Segue pela hipótese de indução que $pd_R(G(K)) \leq m + d$. Aplicando o funtor exato F à seqüência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G(K) \xrightarrow{f} G(Q_0) \xrightarrow{G(h)} G(N) \longrightarrow 0,$$

onde $L = \text{Ker} f$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(L) & \xrightarrow{j} & FG(K) & \longrightarrow & FG(Q_0) & \xrightarrow{G(h)} & FG(N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi_K & & \downarrow \phi_{Q_0} & & \downarrow \phi_N & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

com $\phi_K, \phi_N, \phi_{Q_0}$ isomorfismos e j um monomorfismo. Então $eL = F(L) = 0$ e portanto, $pd_R(L) \leq d$.

Consideremos agora a seqüência exata

$$0 \rightarrow L \rightarrow G(K) \rightarrow \ker G(h) \rightarrow 0,$$

então $pd_R(\ker G(h)) \leq \max\{m + d, d + 1\} \leq m + d$. Sendo $G(Q_0)$ projetivo, da seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \ker G(h) \rightarrow G(Q_0) \rightarrow G(N) \rightarrow 0$$

concluimos que $pd_R(G(N)) \leq pd_R(\ker G(h)) + 1 \leq m + d + 1$ ■

Corolário 2.4 *Se e é um idempotente não nulo em R , $f = 1 - e$ e $d = \sup\{pd_R(M)/eM = 0\}$, então:*

1) $gl.dim(R) \leq gl.dim(eRe) + d + 1$

2) Se $pd_{eRe}(eRf) < \infty$, então $Fpd(R) \leq Fpd(eRe) + d + 1$. Se além disso, $eRe eRf$ for finitamente gerado, $fpd(R) \leq fpd(eRe) + d + 1$

Prova: (1) Pelo Teorema 2.3, $pd_R(M) \leq pd_{eRe}(eM) + d + 1$. Como para todo módulo $N \in eRe\text{-Mod}$, $FG(N) \cong N$, teremos $N = eG(N)$, e neste caso,

$$\sup\{pd_{eRe}(eM)\} = gl.dim(eRe).$$

Portanto

$$pd_R(M) \leq gl.dim(eRe) + d + 1.$$

Logo

$$gl.dim(R) \leq gl.dim(eRe) + d + 1.$$

Para a prova de (2), observemos que, pelo ítem (ii) do Lema 2.1 e do fato que $pd_{eRe}(eRf) < \infty$, o funtor F preserva a finitude da dimensão projetiva. Assim $pd_R(M) \leq pd_{eRe}(eM) + d + 1$ e $pd_{eRe}(eM)$ é finita e então

$$pd_R(M) \leq \sup\{pd_{eRe}(N)/pd_{eRe}(N) < \infty\} + d + 1$$

para todo M com $pd_R(M) < \infty$. De onde podemos inferir que

$$\sup\{pd_R(M)/pd_R(M) < \infty\} \leq \sup\{pd_{eRe}(N)/pd_{eRe}(N) < \infty\} + d + 1,$$

ou seja, $\text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(eRe) + d + 1$. Analogamente, se F preserva módulos finitamente gerados, então

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + d + 1$$

■

2.2 Teoremas de Redução

Desenvolveremos nesta seção alguns resultados que reduzem a verificação da validade da conjectura da dimensão finitística de um anel artinianiano R para anéis “mais simples”. Como havíamos comentado no início desse capítulo os resultados aqui apresentados foram desenvolvidos por Fuller e Saorin em [FS].

Novamente vamos considerar R um anel qualquer e e um idempotente em R .

Primeiramente mostraremos que a propriedade de um módulo ser artinianiano é preservada pelo funtor F , isto é, se M é finitamente gerado como R -módulo, então eM é finitamente gerado como eRe -módulo. Em particular se R é artinianiano à esquerda então eRe será também artinianiano à esquerda.

Esse resultado será fundamental para aplicarmos sucessivas vezes uma propriedade de redução sobre anéis artinianianos.

Sejam R um anel artinianiano à esquerda, básico com radical J e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos associados aos

projetivos indecomponíveis $Re_1, Re_2, \dots, Re_n$ e simples $S_i = Re_i/Je_i$ respectivamente. Considere $e \neq 1$ um idempotente não nulo de R , que podemos supor, reordenando se necessário, que $e = e_1 + e_2 + \dots + e_m$, com $m \leq n$. Nessas condições se $f = 1 - e$, então $pd_R(Rf/Jf) = \sup\{pd_R(L) \text{ tais que } eL = 0\}$.

No restante do capítulo vamos supor sempre que o anel R seja básico.

Proposição 2.5 *Sejam R um anel artiniano à esquerda, e um idempotente não nulo e $f = 1 - e$, então eRe é artiniano à esquerda.*

Prova: Considere $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m \dots$ uma cadeia decrescente de ideais à esquerda em eRe . Aplicando $G = Re \otimes_{eRe}$ - temos que

$$(*) \quad G(I_1) \supseteq G(I_2) \supseteq \dots \supseteq \dots$$

é uma cadeia decrescente de R -submódulos de $G(eRe)$. Observe que as inclusões são preservadas, pois se A e B são eRe -módulos à esquerda tais que $A \subseteq B$, então temos uma inclusão $i : A \rightarrow B$ de A em B . Aplicando G temos que $G(i) : G(A) \rightarrow G(B)$ é uma inclusão. Portanto $G(A) \subseteq G(B)$.

Como cada R -módulo $G(I_k)$ é um R -submódulo do R -módulo $G(eRe)$ que é artiniano, então a cadeia $(*)$ estaciona, isto é, existe $n \geq 1$ tal que $G(I_n) = G(I_{n+t})$ para todo $t \geq 0$. Aplicando o funtor F obtemos $FG(I_n) = FG(I_{n+t})$. Como $FG(N) \cong N$ para todo eRe -módulo N , teremos $I_n \cong I_{n+t}$ para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, sabemos que

$$0 \longrightarrow I_{n+t} \xrightarrow{i} I_n \xrightarrow{p} \frac{I_n}{I_{n+t}} \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata para cada $t \geq 0$ e então

$$0 \longrightarrow G(I_{n+t}) \xrightarrow{G(i)} G(I_n) \xrightarrow{G(p)} \frac{G(I_n)}{G(I_{n+t})} \longrightarrow 0$$

é também exata. Mas como $G(I_{n+t}) \subseteq G(I_n)$, temos que $G(\frac{I_n}{I_{n+t}}) \cong \frac{G(I_n)}{G(I_{n+t})} = 0$, e então $G(\frac{I_n}{I_{n+t}}) = 0$. Em conseqüência, $FG(\frac{I_n}{I_{n+t}}) = 0$. Como já sabíamos que $FG(\frac{I_n}{I_{n+t}}) \cong \frac{I_n}{I_{n+t}}$, temos $\frac{I_n}{I_{n+t}} = 0$, ou equivalentemente $I_n = I_{n+t}$ para todo $t \geq 0$.

Logo a cadeia $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m \dots$ estaciona. Concluindo assim que eRe é um anel artiniano à esquerda. ■

Proposição 2.6 *Seja R um anel artiniano à esquerda, então F preserva módulos finitamente gerados.*

Prova: Primeiro observemos que se $S = Re_i/Je_i$ for um R -módulo simples, então $F(S) = eS \cong eRe_i/eJe_i$. Note que eRe_i/eJe_i é um eRe -módulo simples se e_i for um somando de e e $eRe_i/eJe_i = 0$ caso contrário. Então F preserva ou anula R -módulos simples.

Seja $M \in R\text{-mod}$ e denote por $l_R(X)$ ao comprimento de um R -módulo X qualquer e $l_{eRe}(Y)$ ao comprimento de um eRe -módulo Y qualquer. Como R é artiniano, M tem comprimento finito. Considere

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n = 0$$

uma série de composição de M , então M_{n-1} e M_{n-2}/M_{n-1} são R -módulos simples e temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} \longrightarrow 0 .$$

Aplicando F teremos

$$0 \longrightarrow F(M_{n-1}) \longrightarrow F(M_{n-2}) \longrightarrow F\left(\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}\right) \longrightarrow 0 .$$

Como $F(S)$ é simples ou nulo, $l_{eRe}(F(M_{n-2})) \leq 2$.

Suponha por indução que $l_{eRe}(F(M_i)) \leq n - i$. Considere a seqüência

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \frac{M_{i-1}}{M_i} \longrightarrow 0 .$$

Aplicando novamente F , obtemos

$$0 \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M_{i-1}) \longrightarrow F\left(\frac{M_{i-1}}{M_i}\right) \longrightarrow 0 ,$$

então $l_{eRe}(F(M_{i-1})) \leq l_{eRe}(F(M_i)) + 1 \leq (n - i) + 1 = n - (i - 1)$.

Logo $l_{eRe}(F(M)) \leq n$ e como eRe é artiniano $F(M)$ é finitamente gerado. ■

O próximo resultado estabelece um critério de comparação entre as dimensões finitísticas de certos tipos de anéis. Mais precisamente sejam A e B anéis artinianos e ${}_B M_A$ é um A - B -bimódulo, finitamente gerado como B -módulo à esquerda e como A -módulo à direita, e considere o anel

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}_B M_A & B \end{pmatrix}.$$

Observe que R é um anel artiniano e como veremos abaixo a dimensão finitística de R é finita se e somente se as dimensões finitísticas de A e B forem finitas.

Denotando

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

teremos

$$eRe = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}_B M_A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong A$$

e

$$fRf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}_B M_A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cong B.$$

Analogamente $fRe \cong {}_B M_A$ e $eRf = 0$.

Vamos utilizar esse tipo de identificação no próximo teorema para caracterizar a dimensão finitística de R em termos das dimensões finitísticas dos anéis eRe e fRf , onde e e f são idempotentes não nulos tais que $e + f = 1$ e $eRf = 0$.

A idéia inicial desse resultado surgiu num contexto categórico em um trabalho de Fossun, Griffith e Reiten e pode ser encontrado em [FGR]. Um dos resultados apresentados por eles pode ser resumido da seguinte forma.

Sejam A e S anéis e $M \neq 0$ um S - A -bimódulo e seja

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & S \end{pmatrix}.$$

Então

$$\text{a) } \text{Fpd}(S) \leq \text{Fpd}(\Lambda) \leq \text{Fpd}(A) + \text{Fpd}(S) + 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \max\{\text{gl.dim}(S), \text{gl.dim}(A)\} &\leq \text{gl.dim}(\Lambda) \leq \\ &\leq \text{gl.dim}(S) + \text{gl.dim}(A) + 1. \end{aligned}$$

Em 1991, K. Fuller apresentou uma versão para categoria de módulos sobre um anel artiniano da desigualdade (b) acima (veja proposição 2.5 de [F]).

O resultado tal qual anunciamos aqui aparece em [FS] (prop. 1.6). Entretanto a demonstração que apresentamos é uma adaptação da demonstração de [F]) com algumas idéias desenvolvidas neste capítulo.

Teorema 2.7 [Fossun, Griffith e Reiten] *Sejam R um anel artiniano e e e f idempotentes ortogonais de R tais que $1 = e + f$ e $eRf = 0$. Então*

$$\begin{aligned} \max\{\text{gl.dim}(eRe), \text{gl.dim}(fRf)\} &\leq \text{gl.dim}(R) \leq \\ &\leq \text{gl.dim}(eRe) + \text{gl.dim}(fRf) + 1 \end{aligned}$$

$$\max\{\text{Fpd}(eRe), \text{Fpd}(fRf)\} \leq \text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(eRe) + \text{Fpd}(fRf) + 1$$

$$\max\{\text{fpd}(eRe), \text{fpd}(fRf)\} \leq \text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + \text{fpd}(fRf) + 1$$

Prova: 1) Como $eRf = 0$, temos que $(e+f)Rf = eRf + fRf = fRf$. Então todo R -módulo M tal que $M = fM$ é também um fRf -módulo. E para todo fRf -módulo N , $N = (fRf)N = (eRf + fRf)N = RN$, isto é, N é R -módulo.

Se $g : M \rightarrow N$ é um fRf -morfismo, então M e N são R -módulos que satisfazem:

$$(i) \ M = fM \text{ e } N = fN$$

$$(ii) g(ax) = g(afx) = g((e+f)afx) = g(fafx) = fafg(x) = (e+f)afg(x) = afg(x) = ag(fx) = ag(x) \quad \forall a \in R, \forall x \in M.$$

Então g é um R -morfismo. Por outro lado se $g : A \rightarrow B$ for um morfismo de R -módulos, obviamente será um fRf -morfismo. Assim podemos identificar fRf -Mod com uma subcategoria plena de R -Mod cujos objetos são os módulos da forma fM . Logo M é projetivo como R -módulo $\iff$ é projetivo como fRf -módulo.

Se $L \in fRf$ -Mod, então $eL = 0$, ou equivalentemente $L = fL$. Desse modo $L \in R$ -Mod e portanto se $pd_R(L) = n < \infty$ existe uma resolução projetiva de L da forma

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{h_n} \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{h_2} P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} L \longrightarrow 0,$$

com $P_i \in \text{Add}(Rf) = \text{Add}(fRf)$. Mas neste caso $\ker h_{n-1}$ é projetivo sobre R , logo projetivo sobre fRf . Portanto $pd_{fRf}(L) \leq pd_R(L)$. Deste modo

$$\begin{aligned} gl.dim(fRf) &\leq gl.dim(R) \\ \text{Fpd}(fRf) &\leq \text{Fpd}(R) \\ \text{fpd}(fRf) &\leq \text{fpd}(R) \end{aligned}$$

2) Considere agora M um R -módulo com resolução projetiva minimal

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Aplicando F obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow eP_m \longrightarrow \dots \longrightarrow eP_2 \longrightarrow eP_1 \longrightarrow eP_0 \longrightarrow eM \longrightarrow 0.$$

Como $pd_{eRe}(eP_i) \leq pd_{eRe}(eR) = pd_{eRe}(eRe \oplus eRf) = pd_{eRe}(eRe) = 0$, isto prova que todos os eP_i são projetivos e portanto $pd_{eRe}(eM) \leq pd_R(M)$. Como F é denso, todo eRe -módulo é da forma eM para algum $M \in R$ -Mod. Portanto $gl.dim(eRe) \leq gl.dim(R)$. Mas F preserva finitude da dimensão projetiva e preserva módulos finitamente gerados, então as desigualdades:

$$\begin{aligned} gl.dim(eRe) &\leq gl.dim(R), \\ Fpd(eRe) &\leq Fpd(R), \\ fpd(eRe) &\leq fpd(R). \end{aligned}$$

também são válidas.

Juntado as informações em 1) e 2) temos

$$\begin{aligned} \max\{gl.dim(eRe), gl.dim(fRf)\} &\leq gl.dim(R), \\ \max\{Fpd(eRe), Fpd(fRf)\} &\leq Fpd(R), \\ \max\{fpd(eRe), fpd(fRf)\} &\leq fpd(R). \end{aligned}$$

Consideremos agora $c = gl.dim(eRe)$ e $d = gl.dim(fRf)$, e seja M um R -módulo. Se c ou d não for finita a desigualdade

$$gl.dim(R) \leq gl.dim(eRe) + gl.dim(fRf) + 1$$

é satisfeita trivialmente, então podemos supor que $c < \infty$ e $d < \infty$.

Considere uma resolução projetiva minimal de M

$$(**) \quad \cdots \longrightarrow Q_2 \oplus P_2 \xrightarrow{\phi_2} Q_1 \oplus P_1 \xrightarrow{\phi_1} Q_0 \oplus P_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

com $Q_i \in \text{Add}(Rf)$ e $P_i \in \text{Add}(Re)$. Então $Q_i = fQ_i$ e $eQ_i = 0$. Aplicando F temos que

$$\cdots \longrightarrow eP_2 \xrightarrow{\phi'_2} eP_1 \xrightarrow{\phi'_1} eP_0 \xrightarrow{\phi'_0} eM \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva minimal de eM . Como $gl.dim(eRe) = c$, então $eP_{c+k} = 0$, $\forall k > 0$. Uma vez que $eP_{c+1} = 0$, e existe um epimorfismo de eP_{c+1} para $e(Im\phi_{c+1})$, então $e(Im\phi_{c+1}) = 0$. Logo $Im\phi_{c+1}$ é um fRf -módulo e então $pd_{fRf}(Im\phi_{c+1}) \leq d$. Observe que $eP_i = 0$ se e somente se $P_i = 0$. Então $P_{c+k} = 0$ para todo $k \geq 0$. Portanto

$$0 \longrightarrow Q_{c+d+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{c+1} \xrightarrow{\phi_{c+1}} Im\phi_{c+1} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva minimal de $Im\phi_{c+1}$ tanto como R -módulo, quanto como fRf -módulo. Assim $pd_R(M) \leq c + d + 1$. Consequentemente

$$gl.dim(R) \leq gl.dim(eRe) + gl.dim(fRf) + 1.$$

Sejam $Fpd(eRe) = c_1$, $Fpd(fRf) = d_1$, $fpd(eRe) = c_2$ e $fpd(fRf) = d_2$; como anteriormente, podemos supor c_1, c_2, d_1 e d_2 finitos. Considere um R -módulo M tal que $pd_R(M) < \infty$, então $pd_R(Im\phi_{c_1+1}) < \infty$. Desse modo uma construção idêntica à que fizemos acima, mostra que $pd_R(M) \leq c_1 + d_1 + 1$, ou seja, $Fpd(R) \leq Fpd(eRe) + Fpd(fRf) + 1$. Analogamente, se M é um R -módulo finitamente gerado com dimensão projetiva finita, então em (***) $P_i \in addRe$ e $Q_i \in addRf$. Portanto $eM \in R\text{-mod}$ e neste caso $pd_{eRe}(eM) \leq c_2$. De modo que $e(\ker \phi_{c_2}) = 0$. Como $Im\phi_{c_2+1} = \ker \phi_{c_2}$, então $eIm\phi_{c_2+1} = 0$. Logo $Im\phi_{c_2+1} = fIm\phi_{c_2+1}$. Mas se isso ocorre, então $Im\phi_{c_2+1}$ é um fRf -módulo finitamente gerado e $pd_R(Im\phi_{c_2+1}) < \infty$, logo $pd_{fRf}(Im\phi_{c_2+1}) \leq d_2$. Portanto $pd_R(M) \leq c_2 + d_2 + 1 = fpd(eRe) + fpd(fRf) + 1$, implicando

$$fpd(R) \leq fpd(eRe) + fpd(fRf) + 1.$$

■

Exemplo 2.8

Seja Δ a seguinte aljava

$$\Delta = .1 \xleftarrow{\alpha} .2 \xleftarrow{\beta} .3 \xleftarrow{\gamma} .4$$

com relação $\rho = \beta\alpha$. Sejam $R = k\Delta / \langle \rho \rangle$ álgebra de caminhos de Δ , $e = e_3 + e_4$ e $f = e_1 + e_2$, então teremos

$$eRe \cong K(.3 \longleftarrow .4) \cong K(.1 \longleftarrow .2)$$

e

$$fRf \cong K(.1 \longleftarrow .2).$$

Então $\text{fpd}(eRe) = \text{fpd}(fRf) = 1$.

Calculando a dimensão projetiva dos R -módulos simples obtemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & 0 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & 0 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & 0 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & S_4 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

onde P_i é o projetivo Re_i . Então $\text{gl.dim}(R) = \text{fpd}(R) = 2$ e portanto

$$\max\{\text{fpd}(eRe), \text{fpd}(fRf)\} < \text{fpd}(R) < \text{fpd}(eRe) + \text{fpd}(fRf) + 1.$$

Definiremos a seguir a aljava de um anel artiniano básico, e com ela construiremos uma estrutura de ordenação sobre os vértices. Esse processo permitirá obter algumas reduções muito úteis da conjectura da dimensão finitística.

Seja R um anel artiniano à esquerda e suponha $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto básico de idempotentes ortogonais e primitivos de R . Existem dois tipos de aljavas associadas a um anel R .

A primeira $Q(R)$ tem vértices $Q(R)_0 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ que estão em correspondência biunívoca com o conjunto de idempotentes $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Existem $c_i(\frac{J^j e_j}{J^2 e_j}) = d_{ij}$ flechas de i para j , onde $c_i(M)$ denota o número de fatores de composição de M que são isomorfos a $S_i = \frac{Re_i}{Je_i}$. Isso quer dizer que temos d_{ij} elementos $\alpha_{ij}^k \in Q(R)_1$ tais que $s(\alpha_{ij}^k) = i$ e $t(\alpha_{ij}^k) = j$.

Este tipo de aljava coincide com a aljava normalmente utilizadas em teoria de representações de álgebras, veja seção 1.3 do capítulo anterior sobre definição de aljava de uma álgebra de dimensão finita.

A segunda aljava associada a um anel R , que vamos denotar por $\Gamma(R)$, possui também como conjunto de vértices o conjunto $\Gamma(R)_0 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ em correspondência biunívoca com o conjunto de idempotentes $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Em $\Gamma(R)$

existe uma única flecha $\beta \in \Gamma(R)_1$ de i para j se $\text{Hom}_R(Re_i, Je_j) \cong e_i Je_j \neq 0$. Esse tipo de aljava é interessante no sentido de que podemos olhar diretamente para a aljava e saber quando $\text{Hom}_R(Re_i, Re_j)$ é não nulo (veja [F]).

Ambas as aljavas definidas aqui são chamadas de aljavas à esquerda de R , pois elas foram definidas utilizando módulos à esquerda. Essas aljavas nos permitem estudar a categoria de módulos à esquerda sobre R . De forma análoga podemos definir as aljavas à direita de R para estudarmos a categoria de módulos à direita.

Exemplo 2.9

Considere R um anel serial à esquerda só com dois projetivos indecomponíveis Re_1 e Re_2 , tais que $Je_2 \cong S_1$, $J^2 e_1 \cong S_1$ e $Je_1/J^2 e_1 \cong S_2$.

As aljavas associadas a R são:

$$Q(R) = .1 \begin{matrix} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} .2 \quad \text{e} \quad \Gamma(R) = \bigcirc .1 \begin{matrix} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} .2$$

Como podemos observar no exemplo acima sempre que existe um caminho de i para j na aljava $Q(R)$ de um anel R existirá também um caminho na aljava $\Gamma(R)$ e vice versa. Veremos que isso sempre acontece e então temos uma estreita relação entre as duas aljavas de um anel artiniano à esquerda R .

Proposição 2.10 *As aljavas $Q(R)$ e $\Gamma(R)$ de um anel R estão relacionados da seguinte maneira: existe um caminho de i para j em $Q(R) \iff$ existe um caminho de i para j em $\Gamma(R)$.*

Prova: Supomos que existe uma flecha de i para j em $Q(R)$, então $c_i(\frac{Je_j}{J^2 e_j}) \neq 0$, isto é, existe um morfismo de Re_i para $(\frac{Je_j}{J^2 e_j})$. Sendo Re_i projetivo esse morfismo se levanta a Je_j e portanto pelo isomorfismo entre $\text{Hom}(Re_i, Je_j)$ e $e_i Je_j$ temos

que $e_i J e_j \neq 0$. Reciprocamente suponha que exista um flecha de i para j em $\Gamma(R)$, isto é, $e_i J e_j \neq 0$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ tal que

$$e_i \left(\frac{J^k e_j}{J^{k+1} e_j} \right) \neq 0.$$

Se $k = 1$, então existe pelo menos uma flecha de i para j em $Q(R)$. Se $k > 1$, suponha por indução que o resultado seja válido para $(k - 1)$, isto é, se $e_i \left(\frac{J^{k-1} e_j}{J^k e_j} \right) \neq 0$. Então existe um caminho de i para j em $Q(R)$.

Considere $h : \oplus_l R e_{i_l} \rightarrow J^{k-1} e_j$ a cobertura projetiva de $J^{k-1} e_j$. Então $0 \neq e_i J^k e_j = h(\sum_l e_i J e_{i_l})$ e $J^{k+1} e_j = h(\sum_l e_i J^2 e_{i_l})$, logo existe $e_{i_b} \in \{e_{i_l} / R e_{i_l}\}$ é um somando da cobertura projetiva de $J^{k-1} e_j$ tal que

$$\frac{e_i J e_{i_b}}{e_i J^2 e_{i_b}} \neq 0,$$

isto é, $c_i(J e_{i_b} / J^2 e_{i_b}) \neq 0$. Portanto existe uma flecha de i para i_b em $Q(R)$. Como $e_{i_l} J^{k-1} e_j \neq 0$ para todos os i_l , em particular para i_b . Segue pela hipótese de indução que existe um caminho de i_b para j em $Q(R)$. Logo existirá um caminho de i para j em $Q(R)$ ■

Definição 2.11 *Sejam R um anel artiniano indecomponível e $V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos, dizemos que $e_i \preceq e_j$ se existe um caminho de e_i para e_j na aljava $Q(R)$ de R .*

A relação acima define uma relação de equivalência $\sim$ em V da seguinte forma: $e_i \sim e_j \iff e_i \preceq e_j$ e $e_j \preceq e_i$. Seja $\mathfrak{S} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ a partição de V determinada pela relação de equivalência. A relação $\preceq$ induz uma ordem parcial $\leq$ no conjunto $\mathfrak{S}$ da seguinte forma: $V_l \leq V_k$ se e somente se existem $e_i \in V_l$, $e_j \in V_k$ tais que $e_i \preceq e_j$.

Considere agora o conjunto de idempotentes básico $E_1, E_2, \dots, E_m$, onde $E_l = \sum_{e_i \in V_l} e_i$ com $l = 1, 2, \dots, m$. A ordem parcial $\leq$ sobre o conjunto $\mathfrak{S}$ define uma ordem parcial no conjunto $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ por $E_i \leq E_j \iff V_i \leq V_j$. Como $\mathfrak{S}$ é finito, é possível reordenar os idempotentes E_i 's de forma que, se $i < j$, então $E_i \leq E_j$ e $E_i \neq E_j$.

Observação: Com a ordenação acima, observe que se $i < j$, então $E_j R E_i = 0$. De fato, se $i < j$, então $E_i \leq E_j$ e $E_i \neq E_j$. Portanto existem $e_k \in V_i$ e $e_l \in V_j$ e um caminho de e_k para e_l em $Q(R)$. Se $E_j R E_i \neq 0$, então $\text{Hom}_R(R E_j, R E_i) \neq 0$. Mas neste caso existe um $e_k \in V_i$ tal que $\text{Hom}_R(R E_j, J e_k) \neq 0$. Como $R e_k$ é indecomponível temos $\text{Hom}_R(R E_j, R e_k) = \text{Hom}_R(R E_j, J e_k)$. Logo existe $e_l \in V_j$ tal que $\text{Hom}_R(R e_l, J e_k) \neq 0$, mas nesse caso existe uma flecha de e_l para e_k em $\Gamma(R)$, portanto um caminho de e_l para e_k em $Q(R)$, implicando que $E_j \leq E_i$. Pela anti simetria da relação ($\leq$) segue que $E_i = E_j$, o que é uma contradição. Logo $E_j R E_i = 0$.

Definição 2.12 Os anéis $E_i R E_i$, para E_i como definidos acima, $i = 1, 2, \dots, m$, são chamados as **componentes irredutíveis** de R .

Exemplo 2.13

Considere R um anel com aljava

As componentes irredutíveis de R são as seguintes:

$E R E, e_4 R e_4, e_5 R e_5, e_6 R e_6, e_7 R e_7$, onde $E = e_1 + e_2 + e_3$.

Proposição 2.14 *A dimensão finitística de R é finita se e somente se a dimensão finitística de cada componente irredutível de R for finita.*

Prova: Considere o conjunto básico de idempotentes ortogonais

$$\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$$

com E_i como definidos acima, com $m \leq n$ e tais que $E_k R E_i = 0$ sempre que $i < k$. Com esta escolha, $E_m R E_j = 0$ para todo $j < m$. Então se $E = \sum_{i=1}^{m-1} E_i$ teremos $E_m R E = 0$ e pela Proposição 2.7

$$1) \quad \max\{\text{Fpd}(E_m R E_m), \text{Fpd}(E R E)\} \leq \text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(E_m R E_m) + \text{Fpd}(E R E) + 1$$

e

$$2) \quad \max\{\text{fpd}(E_m R E_m), \text{fpd}(E R E)\} \leq \text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(E_m R E_m) + \text{fpd}(E R E) + 1$$

Podemos repetir o mesmo argumento para o anel $E R E$ da seguinte maneira: sendo $E = \sum_{i=1}^{m-1} E_i$, $E_{m-1} E R E E_j = 0$ para todo $j < m-1$, então $E' = \sum_{i=1}^{m-2} E_i$ satisfaz $E_{m-1} E R E E' = E_{m-1} R E' = 0$, novamente a Proposição 2.7 se aplica e vale as desigualdades 1) e 2) para o anel $E R E$. Prosseguindo com esse argumento, teremos

$$\max_{\{i\}}\{\text{Fpd}(E_i R E_i)\} \leq \text{Fpd}(R) \leq \sum_{i=1}^m \text{Fpd}(E_i R E_i) + m - 1$$

e

$$\max_{\{i\}}\{\text{fpd}(E_i R E_i)\} \leq \text{fpd}(R) \leq \sum_{i=1}^m \text{fpd}(E_i R E_i) + m - 1.$$

Portanto a conjectura da dimensão finitística é válida para $R \iff$ é válida para cada componente irredutível. ■

Proposição 2.15 *Se $f = 1 - e$ e $pd_R(Rf/Jf) \leq 1$, então o funtor F preserva a finitude da dimensão projetiva e*

$$\text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(eRe) + pd_R(Rf/Jf) + 1 \leq \text{Fpd}(eRe) + 2$$

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + pd_R(Rf/Jf) + 1 \leq \text{fpd}(eRe) + 2$$

Prova: Pelo Corolário 2.4 basta provar que $pd_{eRe}(eRf) < \infty$.

Sendo $eRf = eReRf$, $e(Rf/ReRf) = (eRf/eReRf) = 0$, então

$$pd_R(Rf/ReRf) \leq \sup\{pd_R(L)/eL = 0\} = pd_R(Rf/Jf) \leq 1$$

e a sequência exata

$$0 \rightarrow ReRf \rightarrow Rf \rightarrow Rf/ReRf \rightarrow 0$$

implica que $pd_R(ReRf) = 0$, ou seja, $ReRf$ é projetivo. Portanto $ReRf \in \text{add}(Re)$ já que eRf é finitamente gerado como eRe -módulo. Então

$$eReRf \in$$

$\text{add}(eRe)$ e como $eReRf = eRf$, então $pd_{eRe}(eRf) = 0$. ■

O próximo resultado é talvez uma das mais importantes reduções da conjectura finitística até agora obtida.

Teorema 2.16 *A conjectura da dimensão finitística é verdadeira para anéis artinianos se e somente se for verdadeira para anéis artinianos sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1.*

Prova: Suponhamos que seja verdadeira para todos os anéis artinianos, então obviamente será verdadeira para os anéis artinianos sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1. Reciprocamente supomos que a conjectura seja verdadeira para todo anel artiniano sem módulos simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1. Seja R um anel artiniano, consideremos

$1 = e + f$ uma decomposição da identidade em idempotentes ortogonais tais que $pd_R(Rf/Jf) \leq 1$. Pela proposição anterior

$$\text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(eRe) + pd_R(Rf/Jf) + 1.$$

e

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + pd_R(Rf/Jf) + 1.$$

Observando que o número de simples de eRe é menor que o número de simples de R , podemos aplicar novamente este argumento para o anel eRe e como o número de simples de R é finito em algum momento o processo deve parar, concluindo o resultado. ■

Capítulo 3

Anéis artinianos com o cubo do radical nulo

Esse capítulo será desenvolvido para apresentar uma significativa simplificação da demonstração da conjectura finitística para anéis artinianos com radical ao cubo nulo (pequena dimensão finitística), bem como o caso onde todos os fatores de composição de J^3 possuem dimensão projetiva finita. A conjectura finitística nas hipóteses mencionadas acima foi resolvida por E. Green e B. Huisguen - Zimmermann em [GH]. Entretanto a técnica utilizada é construtiva e bastante complexa.

A demonstração que aqui exibimos foi apresentada por Fuller e Saorin em [FS] e utiliza as técnicas desenvolvidas no Capítulo 2 e o Teorema 3.3 ([GH] teorema 2) para exibir um limitante superior para a dimensão projetiva dos módulos finitamente gerados de dimensão projetiva finita.

3.1 O Caso Simples

Considere R um anel artiniano básico com $J^3 = 0$. Suponha que todos os R -módulos simples à esquerda contidos em J^2 têm dimensão projetiva infinita e

sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ os representantes das classes de isomorfismos dos simples à esquerda correspondentes aos idempotentes ortogonais e primitivos $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Seja $L_2(R) = \{M \in R\text{-mod}, \text{ tais que } J^2 M = 0\}$.

Definamos

$$\varphi : L_2(R) \longrightarrow \mathbb{Z}^{n \times 2}$$

que para cada $M \in L_2(R)$ associa

$$[M] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix},$$

onde a_i é a multiplicidade de S_i em M/JM e b_i é a multiplicidade de S_i em JM .

Assim

$$[Je_i] = (u_i, v_i) = \begin{pmatrix} u_{i1} & v_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ u_{in} & v_{in} \end{pmatrix}.$$

Consideremos a aplicação linear

$$L^* : \mathbb{Z}^{n \times 2} \longrightarrow \mathbb{Z}^{n \times 2}$$

com a seguinte definição:

$$L^*[(a, b)] = L^* \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \right] = \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i - b, \sum_{i=1}^n a_i v_i \right).$$

Observe que se identificarmos a matriz $[M] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ com o vetor

coluna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e calcularmos a matriz de L^* com relação a base canônica de $\mathbb{Z}^{n \times 2}$, obtemos a matriz $2n \times 2n$

$$[L^*] = \begin{pmatrix} u_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ v_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix},$$

onde $u_{n \times n} = [u_{ij}]$, $v_{n \times n} = [v_{ij}]$ e $I_{n \times n}$ é a matriz identidade.

Exemplo 3.1

Considere a aljava Γ abaixo

com relações $\rho = \{\beta\gamma\alpha, \alpha\beta\}$. Então $R = K\Gamma / \langle \rho \rangle$ possui radical cubo nulo. Portanto para cada e_i , $Je_i \in L_2(R)$. Logo podemos escreve-los na forma de matriz. Temos

$$[Je_1] = (u_1, v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [Je_2] = (u_2, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[Je_3] = (u_3, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então os vetores colunas

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com a identificação que fizemos acima a matriz de L^* fica

$$[L^*] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Seja M um R -módulo de dimensão projetiva finita e

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{\phi_m} \cdots \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de M .

Denote por $\Omega^k(M)$ o núcleo do morfismo ϕ_{k-1} da sequência acima. Usualmente usaremos Ω para denotar Ω^1 .

Lema 3.2 *Assuma que todos os simples somandos de J^2 tenham dimensão projetiva infinita, e seja $M \in L_2(R)$ um módulo de dimensão projetiva finita. Então $[\Omega^k(M)] = (L^*)^k([M])$. Em particular, $pd_R(M) = a \iff a+1$ é o menor inteiro positivo tal que $(L^*)^{a+1}([M]) = 0$*

Prova: Seja

$$[M] = (a, b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Considere uma cobertura projetiva de M

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) = \ker \phi_0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n (Re_i)^{a_i} \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0.$$

Se S for um somando simples de $\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$ então, por hipótese, $pd_R S = \infty$. Se $pd_R(\ker \phi_0) < \infty$, então $S \subseteq J \ker(\phi_0)$, pois caso contrário S seria um somando de $\ker \phi_0$ e portanto $pd_R S < \infty$, contradição. Logo $S \subseteq \ker \phi_0$. Sendo $\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$ semisimples, então $\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$ é um submódulo semisimples de $\ker \phi_0$.

Por outro lado, $\ker \phi_0 \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{a_i}$, então $J \ker \phi_0 \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$. Portanto $J \ker \phi_0 = \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$.

Sabemos por definição que

$$L^*([M]) = \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i - b, \sum_{i=1}^n a_i v_i \right).$$

Se escrevermos $[\Omega^1(M)] = (c, d)$, teremos $d = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, pois como vimos $J \ker \phi_0 = \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}$. Agora calculemos c . Pelas observações feitas acima vemos que $c = \sum_{i=1}^n a_i u_i - x$. Precisamos saber quem é o vetor x .

Como

$$\frac{\ker \phi}{J \ker \phi} = \frac{\ker \phi}{\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i}},$$

temos a seqüência exata

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \frac{\ker \phi}{J \ker \phi} \longrightarrow \frac{\bigoplus_{i=1}^n (J e_i)^{a_i}}{(\bigoplus_{i=1}^n J^2 e_i)^{a_i}} \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

onde

$$Z = \frac{(\bigoplus_{i=1}^n (J e_i)^{a_i} / \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i})}{(\ker \phi / \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{a_i})} \cong \frac{\bigoplus_{i=1}^n (J e_i)^{a_i}}{\ker \phi} \cong JM.$$

Observe que Z é semisimples e pela seqüência exata (1) temos $[Z] = (x, 0)$. Como JM é também semisimples com $[JM] = (b, 0)$ e $JM \cong Z$, segue que $[Z] = [JM]$, isto é, $(x, 0) = (b, 0)$ e então $x = b$ e $c = \sum_{i=1}^n a_i u_i - b$. Logo

$$[\Omega^1(M)] = \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i - b, \sum_{i=1}^n a_i v_i \right)$$

e portanto $L^*[M] = [\Omega^1(M)]$.

Suponha indutivamente que $[\Omega^{k-1}(M)] = (L^*)^{k-1}([M])$ e consideremos a resolução projetiva minimal de M

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \Omega^k(M) & & \Omega(M) & & & \\
& \downarrow & & \downarrow \iota & & & \\
\cdots \longrightarrow & \oplus_{i=1}^m (Re_i)^{q_i} & \xrightarrow{\phi_{k-1}} & \cdots \longrightarrow & \oplus_{i=1}^n (Re_i)^{a_i} & \xrightarrow{\phi_0} & M \longrightarrow 0. \\
& \downarrow & & & & & \\
& \Omega^{k-1}(M) & & & & & \\
& \downarrow & & & & & \\
& 0 & & & & &
\end{array}$$

Observe que

$$[\Omega^{k-1}(M)] = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ q_n & p_n \end{pmatrix}.$$

Como no passo inicial, $\Omega^k(M) = \Omega(\Omega^{k-1}(M))$ e desse modo

$$[\Omega^k(M)] = L^*([\Omega^{k-1}(M)]) = L^*((L^*)^{k-1}([M])),$$

onde a última igualdade segue pela hipótese indutiva. Portanto $(L^*)^k([M]) = [\Omega^k(M)]$. Em particular $pd_R(M) = a \iff \Omega^{a+1} = 0$ e $\Omega^k(M) \neq 0$ para todo $k < a + 1 \iff (L^*)^{a+1}([M]) = 0$ e $(L^*)^k([M]) \neq 0$ para todo $k < a + 1$. ■

Dado $A \in \mathbb{Z}^{n \times 2}$, seja $\tau(A)$ o menor inteiro não negativo a tal que $(L^*)^a(A) = 0$, se um tal a existir e $\tau(A) = \infty$ caso contrário.

Consideremos $(G_0^*, +)$ o subgrupo de $\mathbb{Z}^{n \times 2}$ consistindo de todas as matrizes $A \in \mathbb{Z}^{n \times 2}$ tais que $\tau(A) < \infty$. Como L^* é $\mathbb{Z}$ -linear, $(G_0^*, +)$ é um subgrupo do grupo abeliano livre $(\mathbb{Z}^{n \times 2}, +)$.

Sejam $S_1, S_2, \dots, S_p$ representantes de todas as classes de isomorfismos de módulos simples distintos que aparecem como submódulos de J/J^2 , vistos como R -módulos à esquerda e $S_1, S_2, \dots, S_q$ aqueles que aparecem em J/J^2 e J^2 simultaneamente, renomeando-os se necessário. Claramente $q \leq p$.

Definimos $G^*(R)$ como segue:

$$G^*(R) = G_0^* \cap \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \vdots \\ \vdots & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a primeira coluna da matriz tem p e a segunda q entradas em $\mathbb{Z}$. Como $G_0^*(R)$ e $G^*(R)$ são subgrupos de $\mathbb{Z}^{n \times 2}$ eles são grupos abelianos livres.

O resultado que apresentaremos a seguir estabelece a conjectura finitística para anéis artinianos onde $J^3 = 0$ e todos os simples somandos de J^2 possuem dimensão projetiva infinita. Esse resultado foi demonstrado por Green euisgen - Zimmermann em [GH] ao qual eles chamaram de “The simplest case”.

Teorema 3.3 *Suponha que $J^3 = 0$. Se todos os módulos simples somandos de J^2 têm dimensão projetiva infinita, então*

$$\text{fpd}(R) \leq \text{posto}(G^*(R)) \leq p + q \leq 2n$$

Prova: Seja M um R -módulo de dimensão projetiva finita. Consideremos a cobertura projetiva de M , com núcleo $\Omega(M)$

$$0 \longrightarrow \Omega(M) \longrightarrow \bigoplus (Re_i)^{c_i} \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0.$$

Como $\Omega(M) \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{c_i}$, nenhum somando de $\Omega(M) \cap (J^2 e_1)^{c_1} \oplus \dots \oplus (J^2 e_n)^{c_n}$ pode ser somando de $\Omega(M)$, pois $p_R(\Omega(M)) < \infty$. Portanto todos os $J^2 e_i$ que são submódulos de $\Omega(M)$ estão necessariamente em $J\Omega(M)$ e então $\Omega(M) \cap \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{c_i} \subseteq J\Omega(M)$. Observe que temos um morfismo

$$\Omega(M) \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{c_i} \xrightarrow{p} \frac{\bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{c_i}}{\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{c_i}}$$

com $B = \ker(p \circ i) = \Omega(M) \cap \bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{c_i}$. Como $\frac{\bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{c_i}}{\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{c_i}}$ é semisimples e $\text{Im}(p \circ i)$ é semisimples, temos assim que

$$\text{Im } p \circ i \cong \frac{\bigoplus_{i=1}^n (Je_i)^{d_i}}{\bigoplus_{i=1}^n (J^2 e_i)^{d_i}} \cong \left(\frac{Je_i}{J^2 e_i} \right)^{d_i},$$

para algum $d_i \leq c_i$. Então

$$\Omega(M) \xrightarrow{p \circ i} \left(\frac{Je_i}{J^2 e_i} \right)^{d_i}$$

é um epimorfismo com núcleo B . Segue que

$$\frac{\Omega(M)}{B} \cong \left(\frac{Je_i}{J^2 e_i} \right)^{d_i}.$$

Como foi observado acima $B \subseteq J\Omega(M)$, então $\frac{J\Omega(M)}{B}$ é um submódulo semisimples de $\frac{\Omega(M)}{B}$, portanto $\left(\frac{\Omega(M)}{B} \middle/ \frac{J\Omega(M)}{B} \right)$ é um R -módulo semisimples da forma

$$\bigoplus_{i=1}^n \left(\frac{Je_i}{J^2 e_i} \right)^{b_i},$$

com $b_i \leq d_i$.

Por outro lado, é claro que

$$\frac{\Omega(M)}{J\Omega(M)} \cong \left(\frac{\Omega(M)}{B} \middle/ \frac{J\Omega(M)}{B} \right).$$

Concluimos assim que

$$\frac{\Omega(M)}{J\Omega(M)} \cong \left(\frac{Je_i}{J^2 e_i} \right)^{b_i}.$$

Portanto a matriz $[\Omega(M)]$ possui zeros nas posições $\{(p+1, 1), \dots, (n, 1)\}$.

Como $J\Omega(M) \subseteq \oplus (J^2 e_i)^{c_i}$, então $J\Omega(M)$ é submódulo de uma soma de somandos de J^2 . Por outro lado tomando uma cobertura projetiva de $\Omega(M)$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \oplus_{i=1}^n (Re_i)^{p_i} \xrightarrow{h} \Omega(M) \longrightarrow 0$$

temos o epimorfismo

$$\oplus_{i=1}^n (Je_i)^{p_i} \xrightarrow{h|_{\oplus_{i=1}^n (Je_i)^{p_i}}} J\Omega(M) \longrightarrow 0.$$

Como $\Omega(M) \in L_2(R)$, $(J^2 e_i)^{p_i} \subseteq \ker h|_{\oplus (Je_i)^{p_i}}$. Dessa forma $h|_{\oplus (Re_i)^{p_i}}$ induz um epimorfismo $g : \oplus_{i=1}^n (Je_i/J^2 e_i)^{p_i} \rightarrow J\Omega(M)$. Mas sendo $J\Omega(M)$ semisimples, $J\Omega(M)$ é somando de $\oplus_{i=1}^n (Je_i/J^2 e_i)^{p_i}$. Logo uma soma de somandos de J/J^2 , e então $[\Omega(M)]$ também possui zeros nas posições $\{(q+1, 2), \dots, (n, 2)\}$. Pelo Lema 3.2, $[\Omega(M)] = L^*([M])$ e $(L^*)^{pd_R(M)+1}([M]) = 0$. Portanto $[\Omega(M)] \in G^*$.

Consideremos o subgrupo $G^{**}(R)$ de $G^*(R)$ gerado por todas as matrizes $[\Omega(M)]$ tais que $M \in R\text{-mod}$ e $pd_R(M) < \infty$.

Naturalmente $G^{**}(R)$ é um grupo abeliano livre de posto $C \leq \text{posto}(G^*(R))$. Sendo $pd_R(\Omega(M)) < \infty$, $L^*([\Omega(M)]) = [\Omega^2(M)] \in G^{**}(R)$, dessa forma, L^* pode ser restrita a um endomorfismo L^{**} de $G^{**}(R)$.

Seja $T \in \mathbb{Z}^{C \times C}$ a matriz de L^{**} com relação a uma base qualquer, então L^{**} e a sua matriz T são nilpotentes, o que implica que $T^C = 0$, pois $C = \text{posto}(G^{**})$. Então $pd_R(\Omega(M)) \leq C - 1 < \text{posto}(G^*(R)) \leq p + q \leq 2n$, logo $pd_R(M) \leq C \leq \text{posto}(G^*(R)) \leq p + q \leq 2n$, de onde podemos concluir que

$$\text{fpd}(R) \leq C \leq \text{posto}(G^*(R)) \leq p + q \leq 2n$$

■

3.2 O Caso Geral

Apresentaremos nessa seção uma demonstração da conjectura da dimensão finitística para uma classe mais geral de anéis artinianos do que a apresentada na

seção anterior, que são aqueles anéis com a propriedade de que todos os fatores do composição de J^3 possuem dimensão projetiva finita. Esse resultado aparece em [GH], entretanto a prova que apresentaremos aqui é bem mais simples e foi apresentada por Fuller e Saorin em [FS].

Também não apresentaremos a demonstração da conjectura finitística diretamente quando $J^3 = 0$, mas sim quando $eJ^3 = 0$, onde e é um idempotente não nulo tal que todos os simples que aparecem em Re/Je possuem dimensão projetiva infinita e todos os que aparecem em $R(1-e)/J(1-e)$ possuem dimensão projetiva finita. A idéia da demonstração, bem como o contexto em que ela esta inserida é apresentada por Fuller e Saorin em [FS], entretanto fizemos ligeiras variações na hipótese para tornar mais evidente que o caso onde $J^3 = 0$ é um corolário do teorema principal.

Ao longo desta seção R denotará um anel artiniano à esquerda e e denotará um idempotente em R . Vamos supor sem perda de generalidades que R é um anel básico.

Proposição 3.4 *Sejam R um anel artiniano básico e e, f dois idempotentes não nulos de R , tais que $1 = e + f$. Se $pd_R(Rf/Jf) < \infty$ e todos os R -módulo simples que aparecem em Re/Je têm dimensão projetiva infinita, então todo eRe -módulo simples tem dimensão projetiva infinita.*

Prova.: Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto de idempotentes ortogonais e primitivos e suponha sem perda de generalidade que $e = e_1 + e_2 + \dots + e_m$ com $m \leq n$, onde n denota o número de R -módulos simples. Um eRe -módulo simples, S_i é da forma: $eRe_i/eJe_i \cong e(Re_i/Je_i)$ com $1 \leq i \leq m$. Como

$$\begin{aligned} pd_R(Re_i/Je_i) &\leq pd_{eRe}(e(Re_i/Je_i)) + \sup\{pd_R(L)/eL = 0\} + 1 = \\ &= pd_{eRe}(eRe_i/eJe_i) + \sup\{pd_R(L)/eL = 0\} + 1 = \\ &= pd_{eRe}(S_i) + pd_R(Rf/Jf) + 1, \end{aligned}$$

então $pd_{eRe}(S_i) = \infty$, pois $pd_R(Re_i/J e_i) = \infty$. ■

No restante do capítulo vamos assumir, além do fato de R ser um anel artiniano à esquerda básico, também que e e f idempotentes tais que $1 = e + f$ é uma decomposição da identidade em idempotentes ortogonais com $e \neq 0$, $pd_R(Rf/Jf) < \infty$ e todos os R -módulos simples que aparecem em $Re/J e$ (consequentemente todos os eRe -módulos simples) possuem dimensão projetiva infinita.

Proposição 3.5 *Se $pd_R((Rf/Jf)) \leq 2$ e $eJ^3e = 0$, então*

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1 < \infty$$

Prova: Sendo $(eJe)^3 \subseteq eJ^3e = 0$, temos que $(eJe)^3 = 0$. Como todo eRe -módulo simples possui dimensão projetiva infinita, segue pelo Teorema 3.3 que

$$\text{fpd}(eRe) \leq 2m,$$

(onde m é o número de eRe -módulos simples).

Mas $\sup\{pd_R(L)/eL = 0\} = pd_R(Rf/Jf) \leq 2$ e $e(Rf/ReRf) = 0$. Temos assim que $pd_R(Rf/ReRf) \leq 2$ e então $pd_R(ReRf) \leq 1$. Logo existe uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow P \oplus Q \longrightarrow P_1 \longrightarrow ReRf \longrightarrow 0$$

com P e P_1 em $\text{add} Re$, Q em $\text{add} Rf$ e $P \oplus Q \subseteq JP_1$. Mas neste caso, $eJ^2Q \subseteq eJ^2(P \oplus Q) \subseteq eJ^2JP_1 = eJ^3P_1 = 0$. Logo $pd_R(J^2Q) \leq 2$. Como $e(Q/JQ) = 0$, $pd_R(Q/JQ) \leq 2$ e das seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow JQ \longrightarrow Q \longrightarrow (Q/JQ) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow J^2Q \longrightarrow JQ \longrightarrow (JQ/J^2Q) \longrightarrow 0$$

obtemos que $pd_R(JQ) < \infty$ e $pd_R(JQ/J^2Q) < \infty$. Considere

$$Q = Q_m \supset Q_{m-1} \supset \dots \supset Q_1 \supset 0$$

uma série de composição de Q . Obviamente Q_1 é simples e então uma das seguintes afirmações ocorre:

1. Q_1 é um somando de Q .
2. $Q_1 \subseteq JQ$ e é um somando de JQ .
3. $Q_1 \subseteq J^2Q$, então $eQ_1 \subseteq eJ_2Q = 0$

Em qualquer caso $pd_R(Q_1) < \infty$ e portanto Q_1 é um somando direto de Rf/Jf . Como tanto $pd_R(Q)$ quanto $pd_R(Q_1)$ são finitas, segue que $pd_R(Q/Q_1) < \infty$.

Considere agora o R -módulo Q/Q_1 e observe que $A = Q_2/Q_1$ é um submódulo simples de Q/Q_1 . Novamente uma das afirmações ocorre:

1. A é um somando de Q/Q_1 .
2. $A \subseteq JQ/Q_1$ e é um somando de JQ/Q_1 .
3. $A \subseteq J^2Q/Q_1$ e então $eA \subseteq (eJ_2Q/Q_1) = 0$.

Em qualquer caso $pd_R(A) < \infty$ e portanto A é um somando de Rf/Jf e $pd_R(Q_2) < \infty$.

Indutivamente supomos que $pd_R(Q_i) < \infty$ e consideremos o R -módulo Q/Q_i , então $A_i = Q_{i+1}/Q_i$ é simples. Novamente uma das afirmações ocorre:

1. A_i é um somando de Q/Q_i .
2. $A_i \subseteq JQ/Q_i$ e é um somando de JQ/Q_i .

3. $A_i \subseteq J^2Q/Q_i$ e então $eA_i \subseteq (eJ^2Q/Q_i) = 0$.

Em qualquer caso $pd_R(A_i) < \infty$ e portanto A_i é um somando de Rf/Jf . Logo todos os fatores de composição de Q aparecem em Rf/Jf , segue que $eQ = 0$ e temos então a sequência exata

$$0 \longrightarrow eP \longrightarrow eP_1 \longrightarrow eRf \longrightarrow 0$$

com eP e eP_i em $addeRe$. Logo $pd_{eRe}(eRf) \leq 1$, pelo Lema 2.1

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1 < \infty.$$

■

Lema 3.6 Se ${}_RL = ReL \subseteq_R K$, $pd_R(L) < \infty$, $pd_R(K) < \infty$ e $eJ^2K = 0$, então $JL = L \cap JK$ e $L/JL \cong (L + JK)/JK$

Prova: Considere

$$\overline{L} = \frac{L + J^2K}{J^2K} \text{ e } \overline{K} = \frac{K}{J^2K}.$$

Como $eJ^2K = 0$, $pd_R(J^2K) < d$, então $pd_R(\overline{K}) < \infty$ e $pd_R(\overline{L}) < \infty$. Observe que um submódulo simples de $\overline{K}$ que não é um somando de $\overline{K}$ necessariamente é um submódulo do radical de $\overline{K}$. Desse modo é possível escrever

$$\overline{K} = \overline{X} \oplus \overline{Y},$$

com $\overline{X}$ um somando direto com comprimento de Loewy 2 e $\overline{Y}$ semisimples com dimensão projetiva finita. Observe que todo somando direto de $\overline{X}$ possui comprimento de Loewy 2, pois já separamos todos os somandos simples em $\overline{Y}$.

Afirmamos que $\text{Hom}_R(\overline{L}, \overline{Y}) = 0$. De fato se existir $h : \overline{L} \rightarrow \overline{Y}$, então como $\overline{Y}$ é semisimples existe um S_j e $h' : \overline{L} \rightarrow S_j$ não nulo. Como $pd_R(S_j) < \infty$, S_j é gerado por Rf , mas sendo h' epimorfismo S_j é também gerado por Re , pois $\overline{L}$ é

gerado por Re . Neste caso $S_j = 0$, o que é uma contradição, provando assim a afirmação. Logo $\bar{L} \subseteq \bar{X}$ e portanto

$$J\bar{L} = \text{soc}\bar{L} = \bar{L} \cap \text{soc}\bar{X} = \bar{L} \cap J\bar{X} = \bar{L} \cap J\bar{K},$$

então

$$JL + J^2K = (L + J^2K) \cap JK = L + J^2K \cap JK + J^2K = (L \cap JK) + J^2K$$

e dessa forma,

$$JL + J^2K = L \cap JK + J^2K.$$

Por outro lado

$$\frac{L \cap JK}{JL} \subseteq \frac{JL + J^2K}{JL} \cong \frac{J^2K}{JL \cap J^2K}.$$

Sendo L gerado por Re , $\frac{L \cap JK}{JK}$ é gerado por Re . O R -módulo $\frac{J^2K}{JL \cap J^2K}$ é gerado por Rf , pois $ReJ^2K = 0$, então $\frac{L \cap JK}{JK}$ é gerado tanto por Re como por Rf , sendo desta forma nulo. Conseqüentemente

$$JL = L \cap JK \text{ e } \frac{L}{JL} = \frac{L}{L \cap JK} \cong \frac{L + JK}{JK}.$$

■

Teorema 3.7 *Se $eJ^3 = 0$, então a dimensão finitística de R é finita e*

$$\text{fpd}(R) \leq \text{fpd}(eRe) + \text{pd}_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1 < \infty,$$

onde $f = 1 - e$.

Prova: Pelo item 2 do Corolário 2.4, basta mostrar que $F : M \mapsto eM$ preserva a finitude da dimensão projetiva, pois ${}_eReeRf$ é sempre finitamente gerado quando estamos em um anel artiniano, e nesse caso valem as desigualdades em 2.4. Observe ainda, que o fato de F preservar a dimensão projetiva é equivalente a $\text{pd}_e(eRf)$ ser finita, ver Lema 2.1.

Segue do Lema 2.2, $pd_R(M) = pd_R(ReM)$ ou ambas são finitas e menores que uma constante c . Como $eM = eReM$, tanto M quanto ReM são levados por F em eM . Então podemos supor sem perda de generalidade que $M = ReM$.

Seja $M = ReM \in R\text{-mod}$ tal que $pd_R(M) = k$.

Vamos exibir uma resolução projetiva minimal para M em $R\text{-mod}$ de sorte que consigamos a partir dela encontrar uma resolução projetiva para eM em $eRe\text{-mod}$.

Seja $h_0 : P_0 \rightarrow M$ uma cobertura projetiva de M , então $P_0 \in \text{add } Re$, pois sendo $M = ReM$, M é gerado por Re . Considere $K_1 = \ker h_0 \subseteq JP_0$, e $L_1 = ReK_1$, então $pd_R(K_1) < \infty$ e pelo Lema 2.2 $pd_R(L_1) < \infty$. Como $eJ^3 = 0$, $eJ^2K_1 = 0$ e pelo Lema 3.6

$$\frac{L_1}{JL_1} \cong \frac{L_1 + JK_1}{JK_1} \subseteq \frac{K_1}{JK_1}.$$

Como $\frac{K_1}{JK_1}$ é semisimples,

$$\frac{K_1}{JK_1} = \frac{L_1 + JK_1}{JK_1} \oplus B,$$

onde B é um R -módulo semisimples.

Considere $h : P_1 \rightarrow L_1$ uma cobertura projetiva de L_1 . Como $L_1 = ReK_1$, temos que $P_1 \in \text{add } Re$, além disso

$$\frac{P_1}{JP_1} \cong \frac{L_1}{JL_1} \cong \frac{L_1 + JK_1}{JK_1}.$$

Seja $Q_1 \rightarrow B$ uma cobertura projetiva de B , então $\frac{Q_1}{JQ_1} \cong B$. Logo existe $h_1 : P_1 \oplus Q_1 \rightarrow K_1$ cobertura projetiva de K_1 , com $\ker h_1 = K_2$ e tal que $h_1|_{P_1}$ é uma cobertura projetiva de L_1 .

Agora considere $L_2 = Re(P_1 \cap K_2) = Re \cdot \ker h|_{P_1}$. Novamente $eJ^2K_2 = 0$ e como $pd_R(L_1) < \infty$ temos $pd_R(\ker h_1|_{P_1}) < \infty$, então pelo Lema 2.2, $pd_R(L_2) = pd_R(Re \ker(h_1|_{P_1})) < \infty$. Como $ReL_2 = L_2$ o Lema 3.6 pode ser aplicado e então existirá uma cobertura projetiva $h_2 : P_2 \oplus Q_2 \rightarrow K_2$, tal que $h_2|_{P_2} : P_2 \rightarrow L_2$ é uma cobertura projetiva de L_2 .

Continuando o argumento conseguimos uma resolução projetiva minimal de M da forma

$$0 \longrightarrow P_k \oplus Q_k \xrightarrow{h_k} \cdots \longrightarrow P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \oplus \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

tal que $h_i|_{P_i} : P_i \rightarrow L_i$ é cobertura projetiva, para $i = 1, 2, \dots, k$.

Considere o complexo

$$0 \longrightarrow P_k \xrightarrow{h_k|_{P_k}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1|_{P_1}} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0.$$

Aplicando F obtemos

$$0 \longrightarrow eP_k \xrightarrow{F(h_k|_{P_k})} \cdots \longrightarrow eP_1 \xrightarrow{F(h_1|_{P_1})} eP_0 \xrightarrow{F(h_0)} eM \longrightarrow 0 \quad (*)$$

$Im F(h_i|_{P_i}) = eL_i = e(Re^2 \ker h_{i-1}|_{P_{i-1}}) = e \ker h_{i-1}|_{P_{i-1}} = \ker F(h_{i-1}|_{P_{i-1}})$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Portanto $(*)$ é exata e $pd_{eRe}(eM) \leq k$. Dessa forma F preserva a finitude da dimensão projetiva e então

$$fpd(R) \leq fpd(eRe) + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1.$$

Mas todos os eRe -módulos simples possuem dimensão projetiva infinita e $(eJe)^3 \subseteq eJ^3 = 0$. Segue do Teorema 3.3 que $fpd(eRe) \leq 2m$, onde m é o número de simples do anel eRe , que também é o número de somandos simples de Re/Je . Então

$$fpd(R) \leq 2m + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1.$$

■

Corolário 3.8 *Se $J^3 = 0$, então a dimensão finitística de R é finita.*

■

Corolário 3.9 *Se todo fator de composição de J^3 tem dimensão projetiva finita, então a dimensão finitística de R é finita e*

$$fpd(R) \leq fpd(eRe) + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1 < \infty$$

Prova: Como todos os somandos de $pd_R(Re/Je)$ possuem dimensão projetiva infinita, se todos os fatores de composição de J^3 possuem dimensão projetiva finita, então $eJ^3 = 0$. ■

Exemplo 3.10

Sejam K um corpo e Δ a seguinte aljava

com relações $\rho = \{\delta\alpha, \alpha^2\}$

Então em $R = K\Delta / \langle \rho \rangle$

$$pd(S_1) = pd(S_3) = 1$$

$$pd(S_2) = 0$$

e

$$pd(S_4) = \infty$$

Além disso $J^3 \cong S_2$. Portanto se $e = e_4$ e $f = e_1 + e_2 + e_3$ temos que $eJ^3 = eS_2 = e_4S_2 = 0$. então pelo Teorema 3.7 $\text{fpd}(R) \leq 4$.

Se observarmos que eRe é local, e nesse caso $\text{fpd}(eRe) = 0$, então $\text{fpd}(R) \leq 2$.

Capítulo 4

Anéis seriais e quase seriais à esquerda

Exibiremos aqui uma demonstração da conjectura da dimensão finitística para anéis quase seriais à esquerda. Em [FS], Fuller e Saorin apresentam uma demonstração da conjectura finitística para anéis seriais à esquerda (ou à direita). Entretanto a demonstração que apresentaremos aqui apareceu pouco depois em um trabalho de Yong Wang, (veja [W]). Nesse trabalho, entre outras coisas, Wang demonstra a conjectura para anéis artinianos básicos no quais existem um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos $I = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, tal que para cada $e_j \in I$, existem $u_j \geq 0, d_j > 0$ e um idempotente e_i com

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^{u_j}e_i} \right)^{d_j}.$$

Naturalmente anéis seriais à esquerda satisfazem essa condição, e portanto a conjectura da dimensão finitística será válida para anéis seriais à esquerda. Pela simetria entre $R\text{-Mod}$ e $\text{Mod-}R$ também para anéis seriais à direita.

4.1 Definições e exemplos

Sejam R um anel artíniano à esquerda e básico, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto de idempotentes ortogonais primitivos e J o radical de R .

Definição 4.1 *Um R -módulo M é dito uniserial à esquerda se dados dois submódulos M_1 e M_2 , $M_1 \subseteq M_2$ ou $M_2 \subseteq M_1$.*

Obsrvações:

1. De forma análoga se define uniserialidade à direita.
2. A definição acima é equivalente a dizer que M admite uma única série de composição, a qual será da forma:

$$M \supseteq JM \supseteq JM^2 \supseteq \dots \supseteq J^l M = 0,$$

onde l é o comprimento de M .

Definição 4.2 *Um anel R é dito serial à esquerda (à direita) se R olhado como R -módulo à esquerda (à direita) for uma soma de R -módulos indecomponíveis e uniserials à esquerda (à direita). Um anel R é um anel serial se for serial à direita e à esquerda.*

Exemplo 4.3

Considere a K -álgebra $R = K\Delta / \langle \rho \rangle$, onde Δ é a aljava

e

$$\rho = \{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_1, \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_1\alpha_2, \alpha_4\alpha_5\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}.$$

Temos que Re_i é uniserial para cada e_i .

Como é sabido, em um anel serial, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe i tal que o par (Re_i, f_i) na seqüência exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Re_i \xrightarrow{f_i} Je_j \longrightarrow 0$$

é uma cobertura projetiva de Je_j . Mas sendo Re_i um somando indecomponível de ${}_R R$, $K = J^u e_i$ para algum $u \geq 0$. Então

$$Je_j \cong \frac{Re_i}{J^u e_i}.$$

Burgess e Fuller generalizaram esse conceito definindo os chamados anéis quase seriais (veja [BF]).

Definição 4.4 *Um anel artiniano à esquerda e básico R é dito quase serial à esquerda se, para cada $j = 1, 2, \dots, n$ existirem inteiros $1 \leq i(j) \leq n$, $u(j) \geq 0$ e $d(j) \geq 1$ tais que*

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)} e_{i(j)}} \right)^{d(j)}.$$

Exemplo 4.5

Seja Δ a seguinte aljava

com relações $\rho = \{\beta_j \alpha_i, \gamma \beta_j, \alpha_i \gamma, \text{ para } i, j \in \{1, 2\}\}$. Então a álgebra de caminhos $K\Delta / \langle \rho \rangle$ é tal que

$$Je_1 \cong \left(\frac{Re_2}{Je_2} \right)^2, \quad Je_2 \cong \left(\frac{Re_3}{Je_3} \right)^2 \quad \text{e} \quad Je_3 \cong \left(\frac{Re_1}{Je_1} \right).$$

Portanto $K\Delta / \langle \rho \rangle$ é quase serial à esquerda.

4.2 Conjectura finitística para anéis quase seriais

Ao longo dessa seção R denotará um anel quase serial à esquerda.

Vamos iniciar nosso estudo fixando um conjunto de idempotentes ortogonais e primitivos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para o anel R que satisfaça a Definição 4.4.

Denotaremos por lr_k o comprimento de Loewy do R -módulo projetivo Re_k , para $k = 1, 2, \dots, n$.

Proposição 4.6 *Seja R um anel quase serial à esquerda tal que todos os módulos simples à esquerda tenham dimensão projetiva infinita. Então $\text{Fpd}(R) = 0$.*

Prova: Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos em R fixados que satisfaça 4.4.

A demonstração se divide em dois passos. O primeiro passo é mostrar que se temos uma flecha de e_i para e_j na aljava $Q(R)$ do anel R , então o comprimento de Loewy lr_j de Re_j é menor ou igual ao comprimento de Loewy lr_i de Re_i . Em seguida mostraremos que não é possível ter $\text{Fpd}R \neq 0$.

Observemos primeiro que se existe uma flecha de $e_i \rightarrow e_j$ em $Q(R)$, então $c_i(Je_j/J^2e_j) \neq 0$. Portanto existe um morfismo não nulo h pertencendo a

$$\text{Hom}_R(Re_i, Je_j/J^2e_j).$$

Sendo $h \neq 0$, h não pertence a $\text{Hom}_R(Re_i, J^2e_j)$. Como R é quase serial à esquerda, existem $d(j) > 0$, $u \geq 0$ e um idempotente $e_{i(j)}$ para algum $1 \leq i(j) \leq n$ tais que

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}} \right)^{d(j)}.$$

Seja g esse isomorfismo, então $gh : Re_{i(j)} \rightarrow \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}} \right)^{d(j)}$ é um morfismo não

nulo tal que $Imgh \notin \left(\frac{Je_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}} \right)^{d(i)}$. Considere

$$\pi : Je_j \cong \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}} \right)^{d(j)} \rightarrow \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}} \right)$$

uma projeção, então $\varphi = \pi gh$ pertence a $Hom_R(Re_i, Re_{i(j)}/J^{u(j)}e_{i(j)})$, mas não a $Hom_R(Re_i, Je_{i(j)}/J^{u(j)}e_{i(j)})$. Como $Je_{i(j)}/J^{u(j)}e_{i(j)}$ é um submódulo maximal de $Re_{i(j)}/J^{u(j)}e_{i(j)}$, φ é um epimorfismo. Sendo

$$p : Re_{i(j)} \rightarrow Re_{i(j)}/J^{u(j)}e_{i(j)}$$

a projeção natural, p é um epimorfismo essencial e sendo Re_j projetivo existe $h' : Re_i \rightarrow Re_{i(j)}$ tal que $ph' = \varphi$. Pela essencialidade de p , h' é um epimorfismo, logo cinde. Portanto $Re_i \cong Re_{i(j)}$. Concluimos então que

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^ue_i} \right)^d$$

para $d = d(j), u = u(j)$.

Segue que $lr_j \leq lr_i + 1$. Agora se $lr_j = lr_i + 1$, como existe um epimorfismo

$$(Re_i)^d \longrightarrow Je_j \longrightarrow 0$$

com núcleo $(J^ue_i)^d$, então $0 \neq J^{lr_i-1}(Re_i)^d \rightarrow J^{lr_i-1}Je_j = J^{lr_j-1}e_j \neq 0$ é um epimorfismo não nulo. Portanto $(J^ue_i)^d \subsetneq (J^{lr_i-1}e_i)^d$ e conseqüentemente $u \geq lr_i - 1 \Rightarrow u \geq lr_i$. Logo $(J^ue_i)^d = 0$ e assim $Je_j \cong (Re_i)^d$ é projetivo, então $pd_R(S_j) \leq 1$, contradizendo nossa hipótese. Logo $lr_j < lr_i + 1 \Rightarrow lr_j \leq lr_i$. Portanto $lr_i \geq lr_j$ sempre que existir uma flecha de e_i para e_j em $Q(R)$.

Suponha que $Fpd(R) \neq 0$, então existe um R -módulo não projetivo M tal que $pd_R(M) = b < \infty$.

Considere a resolução projetiva minimal de M

$$0 \longrightarrow P_b \xrightarrow{\phi} P_{b-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Como ϕ é um monomorfismo, então para algum idempotente e_l , $Re_l|P_b$ e então ϕ induz um monomorfismo: $\psi : Re_l \rightarrow P_{b-1}$ com imagem contida em JP_{b-1} . Como Re_l é finitamente gerado, então $Im\psi$ é um submódulo de P_{b-1} que é finitamente gerado. Em conseqüência, $Im\psi \subseteq (Je_{l_1})^{a_1} \oplus \dots \oplus (Je_{l_m})^{a_m}$, onde $a_i > 0$ e Je_{l_i} são os somandos de JP_{b-1} . Portanto podemos escrever ψ como

$$0 \longrightarrow Re_l \xrightarrow{\psi} (Je_{l_1})^{a_1} \oplus \dots \oplus (Je_{l_m})^{a_m}.$$

Seja $\psi(e_l) = r_1 e_{l_1} + \dots + r_m e_{l_m}$, onde r_i pertence a alguma cópia de J . Em conseqüência, $\psi(e_l) = \psi(e_l)^2 = e_l r_1 e_{l_1} + \dots + e_l r_m e_{l_m}$. Observando que $e_l J e_j \neq 0 \iff$ existe um caminho dirigido de e_l para e_j em $Q(R)$. Então

$$0 \longrightarrow Re_l \xrightarrow{\psi} (Je_{j_1})^{a_{j_1}} \oplus \dots \oplus (Je_{j_t})^{a_{j_t}},$$

onde os j_k 's são tais que $e_i J e_{j_k} \neq 0$ e assim $l_i \geq l_{j_k}$ para $k = 1, 2, \dots, t$. Como ψ é um monomorfismo, $lr_i \leq \max\{lr_{j_1} - 1, \dots, lr_{j_t} - 1\}$.

Seja $lr_{j_*} = \max_{\{j_k\}} \{lr_{j_k}\}$, então $lr_{j_*} \leq lr_i < lr_{j_*}$, uma contradição. Portanto $\text{Fpd}(R) = 0$. ■

Lema 4.7 *Seja R um anel quase serial à esquerda. Suponhamos que para j e k $l(\frac{J^k e_j}{J^{k+1} e_j}) = c$ e lr_j o comprimento de Loewy de Re_j , então existe i tal que*

$$J^k e_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^{lr_j - k} e_i} \right)^c.$$

Prova: Se $k = 1$, sabemos pela definição que existem i , $u \geq 0$ e $d > 0$ tais que

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^u e_i} \right)^d$$

Como $c = l\left(\frac{Je_j}{J^2 e_j}\right) = l\left[\left(\frac{Re_i}{Je_i}\right)^d\right] = d \cdot l(S_i) = d \Rightarrow c = d$ e $L(Je_j) = l_j - 1 \Rightarrow u = l_j - 1$. Então

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^{l_j - 1} e_i} \right)^c$$

Suponha que para $(k-1)$ a afirmação seja válida, ou seja

$$J^{k-1}e_j \cong \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{l_j-(k-1)}e_{i(j)}} \right)^{c_j}$$

onde $c_j = c(\frac{J^{k-1}e_j}{J^ke_j})$, então teremos

$$J^ke_j \cong \left(\frac{Je_{i(j)}}{J^{l_j-(k-1)}e_{i(j)}} \right)^{c_j}$$

Como $Je_{i(j)} \cong (\frac{Re_s}{J^{u_{e_s}}})^{c_i}$, para algum s e $c_i > 0$, então

$$J^ke_j \cong \left(\frac{Je_{i(j)}}{J^{l_j-k+1}e_{i(j)}} \right)^{c_j} \cong \frac{(Je_{i(j)})^{c_i}}{(J^{l_j-k+1}e_{i(j)})^{c_i}} \cong \left(\frac{Re_s}{J^{l_j-k}e_s} \right)^{c_i c_j}.$$

Nesse caso $c_i c_j = l(\frac{J^ke_j}{J^{k+1}e_j})$ e a prova disso é análoga à que fizemos para mostrar que $c = d$ no início da demonstração. ■

Lema 4.8 *Seja R um anel quase serial à esquerda. Se R possui um módulo simples de dimensão projetiva finita, então R possui um módulo simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1.*

Prova: Suponha que $\frac{Re_i}{Je_i}$ seja um R -módulo simples com dimensão projetiva finita e maior ou igual a 1. Observe que pelo lema anterior para todo $j = 1, 2, \dots, n$ e $1 \leq k \leq l_{r_j}$, existem e_s e $c_j > 0$ tais que

$$J^ke_j \cong \left(\frac{Re_s}{J^{l_{r_j}-k}e_s} \right)^{c_j}.$$

Logo existe um epimorfismo

$$(*) \quad (Re_s)^{c_j} \longrightarrow J^ke_j \longrightarrow 0$$

com núcleo $(J^{l_j-k}e_s)^{c_j} \subset (Je_s)^{c_j}$. Então $(Re_s)^{c_j}$ é uma cobertura projetiva de J^ke_j e com isso é possível construir a resolução projetiva minimal

$$(Re_k)^a \longrightarrow (Re_j)^b \longrightarrow \dots \longrightarrow Re_i \longrightarrow Re_i/Je_i \longrightarrow 0,$$

com $(Re_k)^a \cong (J^u e_j)^b$ para algum $u \geq 1$ e $a, b \geq 0$.

Considere o R -módulo $(J^{u-1} e_j)^b$. Como $J^{u-1} e_j$ possui uma cobertura projetiva da forma $(*)$, então para $d = cb$ temos que

$$0 \longrightarrow (Re_t)^d \xrightarrow{h} (J^{u-1} e_j)^b \longrightarrow 0$$

é uma cobertura projetiva. Observe que a restrição h' de h a $(Je_t)^d$ tem como imagem $(J^u e_j)^b$. Como $(J^u e_j)^b \cong (Re_k)^a$, compondo h' com este isomorfismo temos um epimorfismo $g : (Je_t)^d \rightarrow (Re_k)^a$. Mas sendo $(Re_k)^a$ projetivo, g cinde. Portanto Re_k é um somando indecomponível de $(Je_t)^d$. Como os somandos indecomponíveis de $(Je_t)^d$ são exatamente os mesmos de Je_t , temos $lr_k < lr_t$. Observando que existem inteiros $d > 0$ e $u \geq 0$ e um idempotente e_p tais que $Je_t \cong \left(\frac{Re_p}{J^u e_p}\right)^d$, conseguimos um epimorfismo de $(Re_p)^d$ em Je_t . Sendo Re_k um somando de Je_k , existe um epimorfismo de $(Re_p)^d$ para Re_k e então $Re_k = Re_p$. Logo existirá um epimorfismo

$$(Re_k)^d \longrightarrow Je_t$$

com núcleo $J^u e_k$. Portanto a restrição

$$J^{l_k-1} e_k \longrightarrow J^{l_t-1} e_t$$

é um epimorfismo entre módulos não nulos, então $(J^u e_k)^d \subsetneq (J^{l_k-1} e_k)^d$ ou seja $u > l_k - 1$. Portanto $u \geq l_k$, implicando que $(J^u e_k)^d = 0$ e dessa forma $Je_t \cong (Re_k)^d$. Logo Je_t é projetivo. Segue que $pd_R(S_t) \leq 1$. ■

Lema 4.9 *Se R é um anel quase serial à esquerda, $e = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}$, onde os e_i são os de 4.4, então para $1 \leq i \leq n-1$ e para cada $k \geq 1$, $eJ^k e_i = (eJe)^k e_i$.*

Prova: Se $k = 1$, então $eJe_i = (eJe)^1 e_i$.

Seja $k > 1$ e supomos por hipótese indutiva que $eJ^k e_i = (eJe)^k e_i$. Observe que $J^k e_i = R(e + e_n)J^k e_i = R(e + e_n)(eJe)^k e_i = Re(eJe)^k e_i + Re_n(eJe)^k e_i =$

$Re(eJe)^ke_i = ReJ^ke_i$. Disso segue que $JJ^ke_i = JReJ^ke_i = JeJ^ke_i$. Portanto $eJ^{k+1}e_i = ((eJe)J^ke_i) = (eJe)(eJe)^ke_i = (eJe)^{k+1}e_i$

■

Lema 4.10 *Sejam R um anel quase serial à esquerda e $e = e_1 + e_2 + \dots + e_i$, onde os e_i 's são os de 4.4. Então eRe é também um anel quase serial à esquerda.*

Prova: Basta mostrar o caso $i = n - 1$, e depois repetir o argumento.

Para qualquer $1 \leq j \leq n - 1$, $Je_j \cong \left(\frac{Re_i}{J^ue_i}\right)^d$, para certos $i, d > 0$ e $u \geq 0$. Observe que nesse caso $u = L(Re_j)$, de onde podemos supor que $u > 0$.

Se $1 \leq i \leq n - 1$, pelo Lema 4.9 $eJ^ue_i = (eJe)^ke_i$, então $eJe_j \cong \left(\frac{eRe_i}{eJ^ue_i}\right)^d = \left(\frac{eRe_i}{(eJe)^ke_i}\right)$ e se $i = n$, temos $Je_j \cong \left(\frac{Re_n}{J^ue_n}\right)^d$.

Portanto temos dois casos a considerar:

1) Assumimos $Je_n \cong \left(\frac{Re_n}{J^ve_n}\right)^c$, com $c, v \geq 0$. Neste caso, para $l > 0$ $\frac{J^le_n}{J^{l+1}e_n}$ ou é zero ou soma de cópias do simples $\frac{Re_n}{Je_n}$. De fato,

$$\frac{Je_n}{J^2e_n} \cong \left(\frac{Re_k}{J^ve_k}\right)^c \cong \left(\frac{Re_n}{J^ve_n}\right)^c \Big/ \left(\frac{Je_n}{J^ve_n}\right)^c \cong \left(\frac{Re_n}{Je_n}\right)^c.$$

Supomos por indução que $\frac{J^{l-1}e_n}{J^le_n} \cong \left(\frac{Re_n}{Je_n}\right)^p$, então como $Je_n \cong \left(\frac{Re_n}{J^ve_n}\right)^c$ teremos

$$J^le_n \cong \left(\frac{J^{l-1}e_n}{J^ve_n}\right) \cong \frac{(J^{l-1}e_n)^c}{(J^ve_n)^c} \cong \left(\frac{Re_n}{Je_n}\right)^{pc}.$$

Portanto $eJe_n \cong \text{Hom}_R(Re, Je_n) = 0$, implicando que $eJe_i = eRe_n$, isto é, $eJe_i \cong \text{Hom}_R(Re, Je_n)$, mas se $\text{Hom}_R(Re, Re_n) \neq 0$, existe $h \in \text{Hom}_R(Re, Re_n)$. Como $e \neq e_n$, h não é epimorfismo e como Re_n é indecomponível temos que

$$h \in \text{Hom}_R(Re, Je_n).$$

Logo $\text{Hom}_R(Re, Je_n) \neq 0$, levando a uma contradição.

Portanto $0 = \text{Hom}_R(Re, Re_n) \cong eRe_n = eJe_j$.

2) Suponhamos agora que $Je_n \cong \left(\frac{Re_k}{J^v e_k}\right)^c$ com $c, v \geq 0$ e $1 \leq k \leq n-1$, então existe um monomorfismo $g : \left(\frac{Re_k}{J^v e_k}\right)^{cd} \rightarrow (Re_n)^d$, pois $\left(\frac{Re_k}{J^v e_k}\right)^c \cong Je_n$. Dessa forma obtemos uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \left(\frac{Re_k}{J^v e_k}\right)^{cd} \longrightarrow (Re_n)^d \longrightarrow S_n^d \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor F teremos a seqüência

$$0 \longrightarrow \left(\frac{eRe_k}{eJe_k}\right)^{cd} \longrightarrow (eRe_n)^d \longrightarrow (eS_n)^d \longrightarrow 0.$$

Como $eS_n = 0$, $\left(\frac{eRe_k}{eJe_k}\right)^{cd} \cong (eRe_n)^d$, sendo $\left(\frac{Re_k}{J^v e_k}\right)^c \cong Je_n$ temos

$$J^u e_n \cong \left(\frac{J^{u-1} e_k}{J^v e_k}\right)^c.$$

Portanto

$$\left(\frac{eRe_n}{eJ^u e_n}\right)^d \cong \left(\frac{eRe_k}{eJ^{u-1} e_k}\right)^{cd} \quad (*).$$

Se $u \leq 1$ segue por (*) que $eJe_j \neq 0$ e $eJe_j = 0$. Se $u > 1$, $eJ^{u-1} e_k = (eJe)^{u-1} e_k$, pelo Lema 4.9. Então $eJe_j \cong \left(\frac{eRe_k}{(eJe)^{u-1} e_k}\right)^{cd}$, concluindo que eRe é um anel quase serial à esquerda. ■

Lema 4.11 *Sejam R um anel quase serial à esquerda e e e f idempotentes tais que $e + f = 1$. Se os simples que aparecem em $\frac{Re}{Je}$ são exatamente aqueles que possuem dimensão projetiva infinita, então eRe é quase serial à esquerda e $\text{Fpd}(eRe) = 0$*

Prova: Pelo Lema 4.10, eRe é quase serial à esquerda. Escreva $e = \sum_{i=1}^m e_i$ para algum $1 \leq m \leq n$. Como por (3.4) $pd_R\left(\frac{Re_i}{Je_i}\right) = \infty$, então $pd_{eRe}\left(\frac{eRe_i}{eJe_i}\right) = \infty$. Mas $\left(\frac{eRe_i}{eJe_i}\right) =_{eRe} T_i$ são exatamente os módulos simples do anel eRe . Segue da Proposição 4.6 que $\text{Fpd}(eRe) = 0$. ■

Teorema 4.12 *Sejam R um anel quase serial à esquerda e e e f idempotentes com $e + f = 1$. Se todos os módulos simples que aparecem em $\frac{Re}{Je}$ forem precisamente aqueles com dimensão projetiva infinita, então*

$$\text{Fpd}(R) \leq \text{pd}_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1$$

Prova: Basta mostrar que se $\text{pd}_R(M) < \infty$, então $\text{pd}_{eRe}(eM) < \infty$ para qualquer R -módulo M . Faremos essa demonstração por indução no número de simples de R . Se $n = 1$, então $R = eRe$. Nesse caso não há o que fazer.

Suponha por hipótese indutiva que a proposição seja válida para qualquer anel quase serial à esquerda com $(n - 1)$ R -módulos simples. Seja R um anel com n R -módulos simples, $n \geq 1$. Se todos os simples ${}_R S$ possuem dimensão projetiva infinita, então $e = 1$ e $f = 0$. Segue pela Proposição 4.6 que

$$\text{Fpd}(R) = \text{Fpd}(eRe) = 0,$$

satisfazendo a afirmação. Por outro lado se existem simples com dimensão projetiva finita, pelo Lema 4.8 existe um simples de dimensão projetiva menor ou igual a 1. Digamos (a menos de reordenação nos índices) que este simples seja $\frac{Re_n}{Je_n}$, onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é o conjunto básico de idempotentes primitivos de R fixados inicialmente. Considere agora $e' = 1 - e_n$. Como $\text{pd}_R(\frac{Re_n}{Je_n}) \leq 1$ e ${}_{e'Re}e'Re_n$ é finitamente gerado, o funtor $F : M \rightarrow e'M$ preserva a finitude da dimensão projetiva (Corolário 2.4), então se $\text{pd}_R(M)$ é finita, $\text{pd}_{e'Re}e'(e'M)$ também será e $\text{pd}_R(M) \leq \text{pd}_{e'Re}(e'M) + \text{pd}_R(\frac{Re_n}{Je_n}) + 1$. Portanto

$$\text{pd}_R(S_i) < \infty \iff \text{pd}_{e'Re}(e'S_i) < \infty.$$

Agora aqueles simples em $e'Re'$ que possuem dimensão projetiva finita são da forma $\frac{{}_e'Re_i}{e'Je_i}$.

Escreva $e = e_1 + \dots + e_k$ e $f = e_{k+1} + \dots + e_n$ e seja ${}_R N$ tal que

$$\text{pd}_R(N) < \infty.$$

Pelo Lema 4.10 $e'Re'$ é quase serial à esquerda e $pd_{e'Re'}(e'N) < \infty$. Como $e'Re'$ possui apenas $(n-1)$ idempotentes, vale a afirmação para $e'Re'$, isto é, $eReeN = eRe ee'N$ tem dimensão projetiva finita. Em particular $eReeRf$ possui dimensão projetiva finita e pelo Corolário 2.4

$$\text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(eRe) + pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1.$$

Mas todos os simples de eRe são da forma $\frac{eRe_i}{eJe_i} = e\left(\frac{Re_i}{Je_i}\right) = eS_i = T_i \neq 0$. Como $pd_R\left(\frac{Re_i}{Je_i}\right) = \infty$, então $pd_{eRe}\left(\frac{eRe_i}{eJe_i}\right) = \infty$. Segue pela Proposição 4.6 que

$$\text{Fpd}(R) \leq pd_R\left(\frac{Rf}{Jf}\right) + 1$$

■

Corolário 4.13 *Se R é um anel serial à esquerda, então $\text{Fpd}(R) < \infty$.*

Prova: Supondo R serial à esquerda, então $\frac{Je_i}{J^2e_i} \cong S_k$ para algum $0 < k \leq n$. Logo $f : Re_k \rightarrow \frac{Je_i}{J^2e_i}$ é uma cobertura projetiva. Por outro lado, $p : Je_i \rightarrow \frac{Je_i}{J^2e_i}$ é um epimorfismo essencial. Sendo Re_k projetivo, existe $f' : Re_k \rightarrow Je_i$ tal que $pf' = f$. Mas como p é essencial, então f' é um epimorfismo e portanto $Je_i \cong \frac{Re_k}{\ker f'}$. Como Re_k é uniserial, $\ker f' = J^ue_k$ para algum $u \geq 0$. Portanto $Je_i \cong \frac{Re_k}{J^ue_k}$, o que mostra que R é quase serial à esquerda. Logo $\text{Fpd}(R) < \infty$.

Além disso $\text{fpd}(R) \leq \text{Fpd}(R) < \infty$ ■

Observação: Se R é artiniano à esquerda, então as seguintes condições são equivalentes.

- (a) R é serial à esquerda.
- (b) Todo R -módulo à esquerda é uma soma de módulos uniserials.
- (c) Todo R -módulo indecomponível é uniserial.

■

A demonstração das equivalências acima podem ser encontradas em [AF] no capítulo sobre anéis seriais.

Sejam R um anel serial e ${}_R M$ indecomponível e considere $\oplus_{i \in I} P_i \rightarrow M$ uma cobertura projetiva de M . Então

$$\frac{\oplus_{i \in I} P_i}{J(\oplus_{i \in I} P_i)} \cong \frac{M}{JM} \quad (1).$$

Como M é indecomponível e R é serial segue da observação acima que M é uniserial, de onde JM é maximal. Portanto $\frac{M}{JM}$ é simples, e pela expressão (1) $\oplus_{i \in I} P_i$ é indecomponível, implicando que $I = \{i\}$. Deste modo M é finitamente gerado. Logo

$$\text{Fpd}(R) = \sup\{pd_R(M)/pd_R(M) < \infty\} =$$

$$= \sup\{pd_R(M)/pd_R(M) < \infty \text{ e } M \text{ é finitamente gerado}\} = \text{fpd}(R).$$

O próximo resultado é bastante útil, porque com ele conseguimos obter um limitante para a dimensão finitística de anéis quase seriais à esquerda.

Proposição 4.14 *Seja R um anel quase serial à esquerda e básico. Então*

$$\text{Fpd}(R) \leq 2n - 2,$$

onde n denota o número de simples de R .

Prova: Faremos esta prova por indução no número de simples.

Se $n = 1$, então $\text{Fpd}(R) = 0$, pois neste caso R é local.

Supomos que a afirmação seja verdadeira para todos os anéis com número de simples inferior a n . Considere R com n R -módulos simples. Se todos os simples em R possuem dimensão projetiva infinita, então pela Proposição 4.6 $\text{Fpd}(R) = 0 \leq 2n - 2$. Podemos então supor que existe um módulo simples com dimensão projetiva finita, pelo Lema 4.8, existe um simples com dimensão projetiva menor ou igual a 1. Podemos supor sem perda de generalidade que $S_n = \frac{Re_n}{Je_n}$ seja esse simples. Temos então

$$\text{Fpd}(R) \leq \text{Fpd}(e' R e') + \text{pd}_R\left(\frac{R e_n}{J e_n}\right) + 1 = \text{Fpd}(e' R e') + 2,$$

onde $e' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} e_i$.

Pelo Lema 4.10, $e' R e'$ é um anel quase serial à esquerda, então

$$\text{Fpd}(e' R e') \leq 2(n-1) - 2,$$

logo

$$\text{Fpd}(R) \leq 2(n-1) - 2 + 2 = 2n - 2$$

■

Observe que no Exemplo 4.5 $\text{fpd}(K\Delta / \langle \rho \rangle) \leq 2 \cdot 3 - 2 = 4$

Em geral não é possível melhorar essa cota. Veremos no próximo exemplo que a igualdade pode de fato acontecer.

Exemplo 4.15

Seja R um anel serial à esquerda com 3 módulos simples e com série de Kupisch $(3, 4, 4)$.

As resoluções projetivas dos R -módulos simples são:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 0.$$

Portanto $\text{fpd}(R) = \text{gl.dim}(R) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Uma apresentação completa sobre anéis seriais e séries de Kupish pode ser encontrada em [AF] e também em [ARS] no capítulo sobre álgebras de Nakayama.

Uma exposição de como obter exemplos de anéis seriais com dimensão global igual a $2n - 2$ pode ser encontrada em [G].

Capítulo 5

Álgebras de caminhos monomiais

Iniciaremos este capítulo lembrando a noção de limite direto. Esse conceito é muito importante para demonstrar a conjectura finitística para álgebras de caminhos monomiais (veja definição na seção 5.2). Em seguida construiremos os chamados conjuntos de obstrução. Utilizando esses conjuntos, Green e Anick exibiram uma resolução projetiva para os módulos simples à direita sobre uma álgebra monomial A , maiores detalhes podem ser encontrados em [AG].

A demonstração da conjectura finitística apresentada aqui é devida a Green, Kirkman e Kuzmanovich e pode ser encontrada em [GKK]. A demonstração utiliza as resoluções projetivas dos A -módulos simples à direita apresentadas em [AG] para exibir um limitante superior para $\{pd_A(M) \mid M \in A\text{-Mod}\}$.

5.1 Limite direto

Nessa seção apresentaremos algumas definições e alguns resultados que utilizaremos na demonstração da conjectura finitística para álgebras monomiais.

Um conjunto I é dito **quase ordenado** se I é dotado de uma relação binária $\preceq$ que seja reflexiva e transitiva. Denotaremos um conjunto quase ordenado I por $(I, \preceq)$.

Um conjunto quase ordenado $(I, \preceq)$ é **dirigido** se para cada $i, j \in I$, existir um $k \in I$ tal que $i \preceq k$ e $j \preceq k$.

Seja $(I, \preceq)$ um conjunto quase ordenado. Podemos construir uma categoria $\mathcal{A}$, na qual os objetos são os elementos de I , isto é, $\text{Obj}(\mathcal{A}) = I$. E se x e y são objetos em $\text{Obj}(\mathcal{A})$, definimos $\text{Hom}(x, y) = \{i_y^x\}$, o conjunto unitário contendo o elemento i_y^x se $x \preceq y$, e $\text{Hom}(x, y) = \emptyset$ caso contrário. A composição em $\mathcal{A}$ é dada por $i_z^y i_y^x = i_z^x$, sempre que $x \preceq y \preceq z$.

Observe que em $\mathcal{A}$ pode acontecer que o conjunto Hom seja vazio.

Definição 5.1 *Sejam $(I, \preceq)$ um conjunto quase ordenado, $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{A}$ a categoria definida acima. Um **sistema direto** em $\mathcal{C}$ com índices em I é um funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, que para cada objeto $x \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ associa $F(x) = F_x$, o qual é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, e para cada morfismo $i_y^x \in \mathcal{A}$, $F(i_y^x) = \varphi_y^x : F_x \rightarrow F_y$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ satisfazendo:*

- (a) $\varphi_x^x : F_x \rightarrow F_x$ é a identidade para todo $x \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
- (b) Se $x \preceq y \preceq z$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{\varphi_y^x} & F_y \\ & \searrow \varphi_z^x & \swarrow \varphi_z^y \\ & F_z & \end{array}$$

Exemplo 5.2

Considere um R -módulo M qualquer e seja $I = \{X \subseteq M \mid X \text{ é um submódulo finitamente gerado de } M\}$. Naturalmente I é parcialmente ordenado por inclusão. Logo podemos considerá-lo uma categoria do tipo $\mathcal{A}$ como acima, ou seja, se X e $X' \in I$, então X e X' são submódulos de M e se $X \preceq X'$ o morfismo $i_{X'}^X$, é a inclusão de X em X' .

Observe que nesse caso I é um conjunto dirigido, pois dados $X, X' \in I$ existe $B = X + X'$ tal que $X \preceq B$ e $X' \preceq B$.

Definição 5.3 Seja $F = \{F_i, \varphi_j^i\}$ um sistema direto em uma categoria $\mathcal{C}$. O limite direto deste sistema, denotado por $\lim F_i$, é um objeto em $\mathcal{C}$ e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \rightarrow \lim F_i$ tais que:

- (a) $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$ sempre que $i \preccurlyeq j$.
- (b) Para cada objeto X e toda família de morfismos $f_i : F_i \rightarrow X$, tal que $f_i = f_j \varphi_j^i$ sempre que $i \preccurlyeq j$, existe um único morfismo $\beta : \lim F_i \rightarrow X$ de modo que o diagrama abaixo comuta.

Observação: Se existir, o limite direto é único a menos de isomorfismos.

Os próximos dois resultados vamos apenas enunciar, uma prova detalhada desses resultados pode ser encontrada em [R].

Teorema 5.4 ([R] teoremas 2.16) O limite direto de um sistema de módulos (F_i, φ_j^i) sempre existe e $\lim F_i = (\coprod_i F_i)/S$, onde $S = \langle \alpha_j \varphi_j^i a_i - \alpha_i a_i \rangle$ com $a_i \in F_i$, $i \preccurlyeq j$ e α_i as inclusões de F_i em $\coprod_i F_i$.

■

Exemplo 5.5

Seja $I = \{A, B, C\}$, tal que $A, B, C \in R\text{-Mod}$, um conjunto quase ordenado por $B \preccurlyeq C$ e $B \preccurlyeq A$

Considere o seguinte diagrama de pushout:

Se considerarmos o sistema (F_X, ϕ_Y^X) , com $X, Y \in I$ e a família de morfismos $(\alpha_C = \alpha_1, \alpha_A = \alpha_2, \alpha_B = \alpha_1 \phi_C^B = \alpha_2 \phi_A^B)$, teremos que $E = \lim F_X$.

Proposição 5.6 ([R] teorema 8.11) *Se I é um conjunto dirigido e $F = (F_i, \varphi_j^i)$ é um sistema direto de A -módulos à direita e B é um A -módulo à esquerda qualquer, então*

$$\text{Tor}_n(\lim F_i, B) \cong \lim \text{Tor}_n(F_i, B), \forall n > 0$$

■

Proposição 5.7 *Sejam ${}_R M$ um módulo qualquer sobre um anel R e I o reticulado de submódulos finitamente gerados de R , parcialmente ordenado por inclusão, como definido no Exemplo 5.2. Considere (F_X, φ_Y^X) o sistema direto de módulos em $R\text{-Mod}$ com índices em I , isto é, $F_X = X$ e se $X \preccurlyeq X'$, então*

$$F(i_{X'}^X) = \varphi_Y^X : X \rightarrow X'$$

é a inclusão. Então $\lim F_X = M$

Prova: Para mostrar que $M \cong \lim F_X$ basta mostrar que para todo $Y \in R\text{-Mod}$, para o qual existe um conjunto de funções $\{h_X : X \rightarrow Y \text{ com } X \in I\}$, existe

uma única função $\beta : M \rightarrow Y$ tal que o diagrama comuta

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad \beta \quad} & Y \\ \varphi_X \swarrow & & \searrow h_X \\ & X & \\ \varphi_{X'} \swarrow & \downarrow \varphi_X & \searrow h_{X'} \\ & X' & \end{array}$$

com $X, X' \in I$ tais que X é um submódulo de X' .

Definimos $\beta : M \rightarrow Y$ que para cada $m \in M$ associa $h_{\langle m \rangle}(m)$.

Afirmção 1: A função h está bem definida.

De fato, se $m \in X$ para qualquer $X \in I$, então $\langle m \rangle \subseteq X$. Portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \langle m \rangle & \xrightarrow{h_{\langle m \rangle}} & Y \\ \downarrow \varphi_X^{\langle m \rangle} & & \searrow h_X \\ & X & \end{array}$$

comuta. Como φ_X^X é sempre uma inclusão para qualquer X e X' tal que $X \subset X'$, temos $h_{\langle m \rangle}(m) = h_X(m)$. Assim β está bem definida como função.

Afirmção 2: β é um R -morfismo de módulos.

Sejam $m, m' \in M$, então $\beta(m + m') = \beta(m) + \beta(m')$. De fato, considere os seguintes R -módulos, $A = \langle m \rangle$, $B = \langle m' \rangle$, $C = \langle m + m' \rangle$ e $D = \langle m \rangle + \langle m' \rangle$. Por definição $\beta(m + m') = h_C(m + m')$, $\beta(m) = h_A(m)$ e $\beta(m') = h_B(m')$. Pela comutatividade do diagrama $(*)$ $h_C(m + m') = h_D[\varphi_D^C(m + m')]$.

Como

$$h_D(m + m') = h_D(m) + h_D(m') = h_D[\varphi_D^A(m)] + h_D[\varphi_D^B(m')] = h_A(m) + h_B(m'),$$

$$\text{então } \beta(m + m') = \beta(m) + \beta(m').$$

Afirmção 3: se $r \in R$ e $m \in M$, então $\beta(rm) = r\beta(m)$.

Como anteriormente seja $E = \langle rm \rangle$. Por definição $\beta(rm) = h_E(rm)$ e $r\beta(m) = rh_A(m)$. Sendo E um submódulo de A , pela comutatividade do diagrama (*) $rh_A(m) = h_A(rm) = h_A[\varphi_A^E(rm)] = [h_E(rm)]$, provando nossa afirmação. Observe que qualquer outro R -morfismo α que faz o diagrama (*) comutar, satisfaz $\alpha(m) = \alpha\varphi_A(m) = h_A(m) = \beta(m)$, e temos a unicidade do morfismo β . Logo pela unicidade do limite direto $M \cong \lim F_X$ ■

5.2 Conjuntos de Obstrução

Sejam K um corpo e Γ uma aljava finita com vértices $\Gamma_0 = \{v_i\}$ e flechas Γ_1 , $s(\alpha) =$ origem da flecha α e $t(\alpha) =$ término da flecha α , e consideremos a álgebra de caminhos $K\Gamma$ relacionada a aljava Γ . Seja ρ um conjunto de relações em $K\Gamma$. Como vimos no Capítulo 1, $K\Gamma / \langle \rho \rangle$ define uma K -álgebra e é com esse tipo de álgebra que vamos trabalhar ao longo dessa seção.

Observamos que se A é uma álgebra básica de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, temos pelo Teorema de Gabriel que $A \cong \frac{K\Gamma}{I}$, para alguma aljava Γ e I é um ideal bilateral de $K\Gamma$ gerado por algum conjunto de relações, ou seja, A pode ser olhada como uma álgebra de caminhos.

Estamos interessados em álgebra de caminhos de um tipo muito específico, as chamadas álgebras de caminhos monomiais, que definiremos a seguir.

- Definição 5.8** 1. Uma relação ρ_1 é **monomial** se $\rho_1 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ onde $\alpha_i \in \Gamma_1$ e $n \geq 2$, isto é, ρ_1 é um produto de flechas em Γ_1 , com no mínimo duas flechas.
2. Uma álgebra de caminhos monomial é um álgebra da forma $\frac{K\Gamma}{I}$, onde I é gerado por relações monomiais.

Exemplo 5.9

Considere a aljava

com conjunto de relações $\rho = \Gamma_2 = \{\delta_1\delta_2, \delta_2\delta_3, \delta_3\delta_4, \delta_4\delta_1, \delta_2\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3\}$. Observe que todas as relações em ρ são monomiais, então a álgebra de caminhos $K\Gamma / \langle \rho \rangle$ é uma álgebra monomial. ■

Definição 5.10 *Seja I um ideal gerado por relações monomiais. Uma relação $\rho_1 = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m \in I$ é **minimal** se $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \notin I$ e $\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_m \notin I$.*

Para o restante do capítulo estaremos supondo que as relações consideradas são minimais.

Seja B o conjunto formado por todos os caminhos em Γ . No intuito de calcularmos uma cota superior para $\text{Fpd}(A)$, usaremos uma resolução projetiva para cada A -módulo simples à direita, e utilizaremos para isso os **conjuntos de obstrução** Γ_m , que serão definidos abaixo.

Seja $\Lambda = K\Gamma / \langle \rho \rangle$, onde ρ é um conjunto de relações monomiais em Γ . Considere os conjuntos Γ_0 formado pelos vértices de Γ , Γ_1 formado pelas flechas de Γ , $\Gamma_2 = \rho$ o conjunto de todas as relações e $H = \{\beta \in B \mid \text{nenhum subcaminho de } \beta \text{ está em } \rho\}$. Definimos o conjunto Γ_{m+1} das m -cadeias recursivamente para $2 \leq m$ da seguinte forma:

$\alpha \in B$ é chamado de **m -pré-cadeia** se satisfizer as propriedades:

- (1) É possível escrever $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ para algum $\alpha_1 \in \Gamma_m$ e $\alpha_2 \in H \setminus \Gamma_0$

- (2) Se $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ com $\alpha_1 \in \Gamma_m$ e fatoramos α_1 como $\beta_1\beta_2$ com $\beta_1 \in \Gamma_{m-1}$, então $\beta_2\alpha_2 \in B \setminus H$.

Um caminho α é dito ser uma m -cadeia se satisfizer, além de (1) e (2), a seguinte propriedade.

- (3) Se $\alpha = \gamma_1\gamma_2$, onde $\gamma_2 \in B \setminus \Gamma_0$, então γ_1 não satisfaz as afirmações (1) e (2).

As m -cadeias também são conhecidas por cadeias de Zacharia.

No Exemplo 5.9, Γ_2 é igual ao conjunto $\{\delta_1\delta_2, \delta_2\delta_3, \delta_3\delta_4, \delta_4\delta_1, \delta_2\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3\}$.

Vamos calcular Γ_3 para ilustrar a definição acima.

Afirmamos que $\delta_1\delta_2\delta_3$ é uma 2-cadeia.

De fato $\delta_1\delta_2\delta_3 = \alpha_1\alpha_2$, onde $\alpha_1 = \delta_1\delta_2$ e $\alpha_2 = \delta_3$, então $\alpha_1 \in \Gamma_2$ e $\alpha_2 \in H \setminus \Gamma_0$, Satisfazendo a condição 1.

Escrevendo $\delta_1\delta_2\delta_3 = \alpha_1\alpha_2$ como acima, então $\alpha_1 = \delta_1\delta_2$ com $\delta_1 \in \Gamma_1$ e $\delta_2\alpha_2 = \delta_1\delta_2 \in B \setminus H$, pois $\delta_2\delta_3 \in \Gamma_2$. Satisfazendo a condição 2.

Para a prova de 3), observe que podemos escrever $\delta_1\delta_2\delta_3$ como $(\delta_1)(\delta_2\delta_3)$ ou $(\delta_1\delta_2)\delta_3$, mas nem δ_1 nem $\delta_1\delta_2$ pertencem a Γ_3 . Provando a veracidade da afirmação 3.

Concluimos assim que $\delta_1\delta_2\delta_3 \in \Gamma_3$, ou seja, é uma 2-cadeia. Analogamente se mostra que $\delta_2\delta_3\delta_4, \delta_3\delta_4\delta_1$ e $\delta_4\delta_1\delta_2$ estão em Γ_3 . Observe que essas são todas as 2-cadeias.

Definição 5.11 *Um subcaminho terminal de um caminho α é um subcaminho γ de α tal que $t(\gamma) = t(\alpha)$.*

Podemos ver no Exemplo 5.9 que a 2-cadeia $\delta_1\delta_2\delta_3$ tem um subcaminho terminal $\delta_2\delta_3$.

Lema 5.12 *Se α é uma m -cadeia e escrevemos $\alpha = \beta_1\beta_2\alpha_2$, então todo subcaminho de $\beta_2\alpha_2$ que pertence a $B \setminus H$ é terminal à direita.*

Prova: Seja $\alpha = \beta_1\beta_2\alpha_2$, com $\beta_1 \in \Gamma_{m-1}$, $\alpha_2 \in B \setminus \Gamma_0$ e tal que $\beta_2\alpha_2$ contém um subcaminho em Γ_2 que não é terminal à direita. Chamaremos este caminho de s_1s_2 com $s_1 \in \Gamma_1$ e $s_2 \in H \setminus \Gamma_0$, então existem z, l tais que $\beta_2\alpha_2 = zs_1s_2l$, onde $zs_1 = \beta$ e $s_2l = \alpha_2$. Assim $\beta_1\beta_2\alpha_2 = (\beta_1zs_1s_2)l$, com $\beta_1zs_1s_2$ satisfazendo (1) e (2), e isso é uma contradição com (3), pois α é uma m -cadeia. ■

O subcaminho α_2 é denominado **tail** da m -cadeia α .

Lema 5.13 *Suponha que $\Gamma_2 \subset B$ é tal que nenhum subcaminho de qualquer $\beta \in \Gamma_2$ pertence a Γ_2 . Então toda m -cadeia β ($m \geq 0$) pode ser fatorada unicamente como $\beta = \beta_1\beta_2$, onde $\beta_1 \in \Gamma_m$ e $\beta_2 \in H \setminus \Gamma_0$.*

Prova: Seja $\alpha \in \Gamma_{m+1}$ uma m -cadeia, por (1) $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ para algum $\alpha_1 \in \Gamma_m$ e $\alpha_2 \in H \setminus \Gamma_0$.

Supomos que $\alpha = \beta_1\beta_2$, com $\beta_1 \in \Gamma_m$ e $\beta_2 \in H \setminus \Gamma_0$, então $s(\alpha_1) = s(\alpha) = s(\beta_1)$ e $t(\alpha_2) = t(\alpha) = t(\beta_2)$. Como α_1 e β_1 são subcaminhos de α , se $t(\alpha_1) = t(\beta_1)$, então $\alpha_1 = \beta_1$, pois terão as mesmas flechas.

Se $t(\alpha_1) \neq t(\beta_1)$, temos $l(\alpha_1) > l(\beta_1)$ ou $l(\beta_1) > l(\alpha_1)$. Se $l(\alpha_1) > l(\beta_1) \Rightarrow \alpha_1$ é subcaminho próprio de β_1 , mas $\beta_1 \in \Gamma_m$ e por (3) nenhum subcaminho próprio de β_1 pode estar em Γ_m , contradição. Portanto $t(\alpha_1) = t(\beta_1) \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$. A outra desigualdade é análoga.

Como $s(\alpha_2) = t(\alpha_1) = t(\beta_1) = s(\beta_2) \Rightarrow \alpha_2 = \beta_2$. ■

Para um vértice v_i da aljava Γ , definimos $\Gamma_m^i = \{\beta \in \Gamma_m / s(\beta) = v_i\}$. Denotemos por $K\Gamma_m$ o subespaço vetorial de $K\Gamma$ gerado pelos caminhos em $K\Gamma_m$.

Observe que $R = \frac{A}{\text{rad}A} \cong \sum_{i=1}^n Ke_i$ é uma álgebra semisimples e $K\Gamma_m$ é um R -bimódulo. Aqui e_i denota o idempotente associado ao vértice v_i .

Observamos agora que $K\Gamma_m^i = \langle \alpha / \alpha \in \Gamma_m \text{ e } s(\alpha) = v_i \rangle$, então $K\Gamma_m^i = e_i(K\Gamma_m)$.

Lema 5.14 *Nas condições acima $K\Gamma_m^i \otimes_R A = e_i K\Gamma_m \otimes_R A \cong \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_m^i} e_{t(\alpha)} A$*

Prova.: Sejam

$$\begin{aligned}\varphi : e_i K\Gamma_m \otimes_R A &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_m^i} e_{t(\alpha)} A \\ e_i \alpha \otimes \beta &\longmapsto (0, \dots, e_{t(\alpha)} \beta, 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

onde o termo não nulo aparece na α -ésima posição e

$$\begin{aligned}\psi : \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_m^i} e_{t(\alpha)} A &\longrightarrow e_i K\Gamma_m \otimes_R A \\ (0, \dots, e_{t(\alpha)} \beta, 0, \dots, 0) &\longmapsto e_i \alpha \otimes \beta\end{aligned}$$

Tanto φ quanto ψ são A -homomorfismos à direita e satisfazem:

$$1) \psi(\varphi(e_i \alpha \otimes \beta)) = \psi(0, \dots, e_{t(\alpha)} \beta, 0, \dots, 0) = e_i \alpha \otimes \beta \Rightarrow \psi\varphi = Id$$

$$2) \varphi\psi(\sum_{\alpha \in \Gamma_m^i} (0, \dots, e_{t(\alpha)} \beta_\alpha, 0, \dots, 0)) = \varphi(\sum_{\alpha \in \Gamma_m^i} e_i \alpha \otimes \beta_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Gamma_m^i} \varphi(e_i \alpha \otimes \beta_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Gamma_m^i} (0, \dots, e_{t(\alpha)} \beta_\alpha, 0, \dots, 0) \Rightarrow \varphi\psi = Id$$

$$\text{Portanto } K\Gamma_m^i \otimes_R A \cong \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_m^i} e_{t(\alpha)} A \quad \blacksquare$$

Como consequência temos que $K\Gamma_m^i \otimes_R A$ é um A -módulo à direita projetivo.

Definimos $\delta_m : K\Gamma_m^i \otimes_R A \longrightarrow K\Gamma_{m-1}^i \otimes_R A$ com $\beta_1 \in K\Gamma_{m-1}^i$ e

$$\beta \otimes v_{t(\beta)} \longmapsto \beta_1 \otimes \beta_2$$

$\beta_2 \in H \setminus \Gamma_0$ os únicos elementos tais que $\beta = \beta_1 \beta_2$ e estendemos para um elemento da forma $\beta \otimes \alpha = \beta \otimes v_0 \alpha$. Dessa forma δ é um A -homomorfismo de A -módulos à direita.

Então existe uma seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow K\Gamma_m^i \otimes_R A \xrightarrow{\delta_m} K\Gamma_{m-1}^i \otimes_R A \cdots K\Gamma_1^i \otimes_R A \xrightarrow{\delta_1} S_i \longrightarrow 0$$

a qual é uma resolução projetiva minimal de S_i .

Não vamos apresentar a demonstração da existência dessas resoluções. A prova da existência de tais resoluções pode ser encontrada em [AG].

5.3 Uma Cota superior para $\text{Fpd}(A)$

Ao longo dessa seção Γ é uma aljava finita, ρ um conjunto de relações monomiais, $I = \langle \rho \rangle$, onde cada relação $\rho_i \in \rho$ é minimal em I e $A = K\Gamma/I$.

Fixe um vértice v_l em Γ e escreva $\Gamma_{n+1}^l = \langle \beta_i \alpha_{ij} : i \in I, j \in J_i \rangle$, onde β_i são elementos distintos de Γ_n^l e J_i é um conjunto de índices que usaremos para descrever os elementos α_{ij} que iniciam no final da cadeia β_i . Seja $U_i = K \langle \beta_i \alpha_{ij} : j \in J_i \rangle \otimes_R A$ para cada i , e observe que $K\Gamma_{n+1}^l \otimes_R A = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Seja M um A -módulo à esquerda, então

$$K\Gamma_{n+1}^l \otimes_R A \otimes_A M = (\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} K \langle \beta_i \alpha_{ij} : j \in J_i \rangle \otimes_R A \otimes_A M$$

e

$$\delta_{n+1} \otimes 1 : K\Gamma_{n+1}^l \otimes_R A \otimes_A M \rightarrow K\Gamma_n^l \otimes_R A \otimes_A M$$

Lema 5.15 $\ker(\delta_{n+1} \otimes 1) = \bigoplus_{i \in I} \ker(\delta_{n+1} \otimes 1|_{U_i \otimes M})$

Prova: Se $x = \sum_{i,j} \beta_i \alpha_{ij} \otimes v_{t(\alpha_{ij})} \otimes m_{ij}$ para que $x \in \ker(\delta_{n+1} \otimes 1)$ devemos ter $(\delta_{n+1} \otimes 1)(x) = 0 \iff \sum_{i,j} \beta_i \otimes a_{ij} \otimes m_{ij} = 0 \iff \sum_j \beta_i \otimes \alpha_{ij} \otimes m_{ij} = 0$ para cada $i \iff \sum_j \beta_i \otimes \alpha_{ij} \otimes m_{ij} \in \ker(\delta_{n+1} \otimes 1|_{U_i \otimes A M})$. ■

Observação: $(\delta_{i+1} \otimes 1)(U_i \otimes_A M) \subseteq K \langle \beta_i \rangle \otimes_R A \otimes_A M$.

Teorema 5.16 *Suponha que A é uma álgebra de caminhos monomial, com aljava Γ e c tal que para cada $w \in \Gamma_c$, dado qualquer N existem $n \geq N$ e $w' \in \Gamma_n$ tais que $w\alpha \in \Gamma_{c+1} \iff w'\alpha \in \Gamma_{n+1}$ para qualquer caminho α . Assim sendo, se M é um A -módulo à esquerda com $\text{pd}_A(M) < \infty$, então $\text{pd}_A(M) \leq c$.*

Prova: Seja $\text{pd}_A(M) < \infty$ e fixemos um vértice v_l . Consideremos a resolução projetiva

$$\cdots \longrightarrow K\Gamma_2^l \otimes_R A \longrightarrow K\Gamma_1^l \otimes_R A \longrightarrow K\Gamma_0^l \otimes_R A \longrightarrow S_l \longrightarrow 0 (*)$$

do A -módulo simples à direita S_l associado ao vértice v_l . Aplicando $-\otimes_A M$ à seqüência (*) obtemos o complexo

$$K\Gamma_{c+2}^l \otimes_R A \otimes_A M \xrightarrow{\delta_{c+2} \otimes 1} K\Gamma_{c+1}^l \otimes_R A \otimes_A M \xrightarrow{\delta_{c+1} \otimes 1} K\Gamma_c^l \otimes_R A \otimes_A M \longrightarrow \dots$$

O $(c+1)$ -ésimo módulo de homologia do complexo acima é

$$\text{Tor}_{c+1}^A(S_l, M) = \frac{\ker(\delta_{c+1} \otimes 1)}{\text{Im}(\delta_{c+2} \otimes 1)}.$$

Para ver que $\text{Tor}_{c+1}^A(S_l, M) = 0$ é suficiente mostrar que se $x \in \ker(\delta_{c+1} \otimes 1)$, então $x \in \text{Im}(\delta_{c+2} \otimes 1)$. Pelo Lema 5.15 podemos supor que

$$x = \sum_j \beta \alpha_j \otimes_R v_{t(\alpha_j)} \otimes_A m_j,$$

onde $\beta \in \Gamma_c^l$ e $\beta \alpha_j \in \Gamma_{c+1}^l$, então

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_{c+1} \otimes 1)(x) = \\ &= \sum_j \beta \otimes_R \alpha_j \otimes_A m_j = \\ &= \sum_j \beta \otimes_R v_{t(\beta)} \otimes_A \alpha_j m_j = \\ &= \beta \otimes_R \left(\sum_j v_{t(\beta)} \otimes_A \alpha_j m_j \right). \end{aligned}$$

Como $0 = \phi(\beta \sum_j v_{t(\beta)} \otimes_A \alpha_j m_j) \cong e_{t(\beta)} \sum_j v_{t(\beta)} \otimes_A \alpha_j m_j = \sum_j v_{t(\beta)} \otimes_A \alpha_j m_j = \sum_j \alpha_j \otimes_A m_j = 0$.

Por hipótese, existem $n > p$ e um vértice v_r tais que dado qualquer $w \in \Gamma_c^l$ existe $w' \in \Gamma_n^r$ tal que $w\alpha \in \Gamma_{c+1}^l$ se e somente se $w' \in \Gamma_{n+1}^r$.

Seja $\beta' \in \Gamma_n^r$ uma $(n-1)$ -cadeia associada a β e seja $x' = \sum_i \beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A m_i \in K\Gamma_{n+1}^r \otimes_R A \otimes_A M$. Como $\beta \alpha_i \in \Gamma_{c+1}^l$ para todo α_i , então $\beta' \alpha_i \in \Gamma_{n+1}^r$.

Mas

$$\begin{aligned}
 (\delta_{n+1} \otimes_A 1)(x') &= \\
 \sum_i \delta_{n+1} \otimes_A 1 \left(\sum_i \beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A m_i \right) &= \\
 \sum_i \beta' \otimes_R v_{t(\beta')} \otimes_A \alpha_i m_i &= \\
 \beta' \otimes_R v_{t(\beta')} \otimes_A \sum_i \alpha_i m_i &= 0.
 \end{aligned}$$

Como $pd_A M = p$ e $fd_A M \leq pd_A M = p$, temos que $\text{Tor}_{n+1}^A(S_r, M) = 0$, ou seja

$$\frac{\ker \delta_{n+1} \otimes_A 1}{\text{Im} \delta_{n+2} \otimes_A 1} = 0.$$

Então $\ker \delta_{n+1} \otimes_A 1 = \text{Im} \delta_{n+2} \otimes_A 1$. Logo existe $y' \in K\Gamma_{n+2}^r \otimes_R A \otimes_A M$ com $(\delta_{n+2} \otimes_A 1)(y') = x'$, mas vimos que $(\delta_{n+2} \otimes_A 1)(U_k \otimes_A M) \subseteq K < \beta_k > \otimes_R A \otimes_A M$ e $(\delta_{n+2} \otimes_A 1)(y') \in (\oplus_i K < \beta' \alpha_i >) \otimes_R A \otimes_A M$. Dessa forma y' pode ser escrito como

$$y' = \sum_{i,j} \beta' \alpha_i \gamma_{ij} \otimes_R v_{t(\gamma_{ij})} \otimes_A m_{ij}.$$

Sendo que

$$\begin{aligned}
 (\delta_{n+2} \otimes_A 1)(y') &= \\
 (\delta_{n+2} \otimes_A 1) \left(\sum_{i,j} \beta' \alpha_i \gamma_{ij} \otimes_R v_{t(\gamma_{ij})} \otimes_A m_{ij} \right) &= \\
 \sum_{i,j} \beta' \alpha_i \otimes_R \gamma_{ij} \otimes_A m_{ij} &= \\
 \sum_i \beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A \left(\sum_j \gamma_{ij} \otimes_A m_{ij} \right) &= x' = \\
 \sum_i \beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} m_i, &
 \end{aligned}$$

temos que $\sum_i \beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A ((\sum_j \gamma_{ij} m_{ij}) - m_i) = 0$, implicando que $\beta' \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A [(\sum_j \gamma_{ij} m_{ij}) - m_i] = 0$, então $v_{t(\alpha_i)} \otimes_A (\sum_j \gamma_{ij} m_{ij}) = v_{t(\alpha_i)} \otimes_A m_i$, para

cada i . Considere agora $y = \sum_{i,j} \beta \alpha_i \gamma_{ij} \otimes_R v_{t(\gamma_{ij})} \otimes_A m_{ij}$, como cada $\beta' \alpha_i \gamma_{ij} \in \Gamma_{n+2}^r \iff \beta \alpha_i \gamma_{ij} \in \Gamma_{c+2}^l$, então $y \in K\Gamma_{c+2}^l \otimes_R A \otimes_A M$, agora $(\delta_{c+2} \otimes 1)(y) = \sum_{i,j} \beta \alpha_i \otimes_R \gamma_{ij} \otimes_A m_{ij} = \sum_i \beta \alpha_i \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A (\sum_j \gamma_{ij} m_{ij}) = \sum_i \beta \otimes_R v_{t(\alpha_i)} \otimes_A m_i = x$, implicando que $\text{Tor}_{c+2}^A(S_l, M) = 0$ para todo vértice l .

Como A é álgebra de Artin, $\text{pd}_A(M) = \text{fd}_A(M)$. Assim para mostrar que $\text{pd}_A(M) \leq c$, basta mostrar que $\text{fd}_A(M) \leq c$, o que é equivalente a mostrar que $\text{Tor}_{c+1}^A(U, M) = 0$ para todo M .

Se U é um A -módulo finitamente gerado, temos $U = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n = 0$. Então M_{n-1} e M_{n-2}/M_{n-1} são módulos simples. Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_{n-2} \rightarrow \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} \rightarrow 0$$

Aplicando $\text{Tor}_{c+1}^A(-, M)$ temos

$$\text{Tor}_{c+1}^A(M_{n-1}, M) \rightarrow \text{Tor}_{c+1}^A(M_{n-2}, M) \rightarrow \text{Tor}_{c+1}^A\left(\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, M\right) \rightarrow 0$$

e portanto $\text{Tor}_{c+1}^A(M_{n-2}, M) = 0$. Por indução no comprimento de U temos que $\text{Tor}_{c+2}^A(U, M) = 0$. Como, pela Proposição 5.6, Tor_{c+1}^A comuta com limites diretos e pela Proposição 5.7, U é o limite direto de seus submódulos finitamente gerados, temos $\text{Tor}_{c+1}^A(U, M) = 0$ para todos $U \in A\text{-Mod}$. Logo $\text{fd}(M) \leq c$ e então $\text{pd}_A(M) \leq c$. ■

O próximo resultado mostra que a conjectura finitística é verdadeira para álgebras de caminhos monomiais.

Teorema 5.17 *Seja A uma álgebra monomial de dimensão finita com vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e relações $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$. Seja d o número de tails das 2-pré-cadeias que possuem um subcaminho terminal que é um subcaminho inicial de uma relação. Então $\text{Fpd}(A) \leq d + 3$.*

Prova: Vamos verificar que para essas álgebras $c = d + 3$ satisfaz o teorema anterior.

Fixemos um vértice v_l e sejam $N \in \mathbb{N}$ arbitrário e $w \in \Gamma_s^l$ para $s > d + 3$. Sejam $w = t_0 t_1 t_2 \dots t_{s-1}$, e $\beta_i = t_0 t_1 t_3 \dots t_{i-1} \in \Gamma_i^l$ para $i = 2, 3, \dots, s$. Observe que $\beta_i = \beta_{i-1} t_{i-1}$ para $i = 3, 4, \dots, s$. Então os β_i 's são cadeias e os t_i 's são os tails que ocorrem na construção recursiva de w . Isto pode ser visto na construção por indução recursiva de w da seguinte forma:

$w \in \Gamma_s^l \Rightarrow w = \beta_{s-1} t_{s-1}$, com t_{s-1} o tail de w , então $\beta_{s-1} \in \Gamma_{s-1}^l \Rightarrow \beta_{s-1} = \beta_{s-2} t_{s-2} \Rightarrow w = \beta_{s-1} t_{s-2} t_{s-1}$. Seguindo este processo $w = t_0 t_1 t_2 \dots t_{s-1}$.

Considere agora $\beta_{i+1} = \beta_i t_i = \beta_i t_{i-1} t_i = \beta_{i-2} t_{i-2} t_{i-1} t_i$, como $\beta_i \in \Gamma_i^l$, temos $\beta_i = \beta_{i-2} t_{i-1} t_i$ e $t_{i-2} = uz$, onde $zt_{i-1} \in \Gamma_2$. Isso ocorre porque sendo t_{i-1} o tail de β_i , existe um subcaminho terminal de $t_{i-2} t_{i-1}$, digamos zt_{i-1} em Γ_2 . Portanto $t_{i-2} = uz$ com $zt_{i-1} \in \Gamma_2$. Similarmente $\beta_{i+1} \in \Gamma_{i+1}^l$, então $t_{i-1} = xy$, com $yt_i \in \Gamma_2$. Deste modo $zt_{i-1} t_i = \alpha(z' t_{i-1}) t_i$, onde $\alpha \in \Gamma_1^l$ e $\alpha z' = z$ implicando que α é um elemento de Γ_1 , $(\alpha z' t_{i-1})$ é um elemento de Γ_2 e $z' t_{i-1} t_i$ possui um subcaminho em Γ_2 , ou seja, $zt_{i-1} t_i$ é uma 2-pré-cadeia com tail t_i . Sendo $s \geq d + 3$, $t_i = t_j$ para algum par (i, j) com $j \geq i \geq 2$. Seja $\sigma(t_i) = (t_{i+1} \dots t_j)$ e $w' = t_0 t_1 \dots t_i (\sigma(t_i))^k t_{j+1} \dots t_{s-1}$.

Afirmção: w' é uma p -cadeia, onde $p = s + (k - 1)(j - i)$ e $w' \in \Gamma_p^l$.

Como w é uma $(s - 1)$ -cadeia com tail t_{s-1} , vamos considerar o par (i, j) tal que $2 \leq i \leq j \leq s - 1$ e $t_i = t_j$ e mostrar que $w' = t_0 \dots t_{i-1} (\sigma(t_i))^2 t_{j+1} \dots t_{s-1}$ é uma cadeia.

Sabemos que $t_0 \dots t_{j-1} \sigma(t_i) = t_0 \dots t_{j-1} t_i \dots t_j$ é uma $(j - 1)$ -cadeia, então $\gamma = t_0 t_1 \dots t_j t_{j+1}$ é uma j -cadeia. De fato, escrevamos $\gamma = \alpha_1 t_j t_{j+1}$ com $\alpha_1 = t_0 t_1 \dots t_{j-1}$, desta forma temos $\alpha_1 \in \Gamma_{j-1}$, $\alpha_1 t_j \in \Gamma_j$ e $t_j t_{j+1}$ possui um subcaminho em Γ_2 .

Se γ não for uma j -cadeia, como $\alpha_1 t_j$ é uma $(j - 1)$ -cadeia existem caminhos $x \in B, z \in H \setminus \Gamma_0$ tais que $t_{j+1} = zx$ e $\alpha_1 t_j z$ satisfazem as condições (1) e (2). Como $t_j = t_i$ temos que $t_0 \dots t_{i-1} t_i z$ é tal que $t_0 \dots t_{i-1} \in \Gamma_i$, $(t_0 \dots t_{i-1}) t_i \in \Gamma_{i+1}$ e $z \in H \setminus \Gamma_0$, e neste caso $t_0 \dots t_{i-1} t_i z$ é um subcaminho de $t_0 \dots t_{i-1} t_i t_{i+1}$ que é uma i -cadeia e isso é uma contradição. A afirmação agora segue por indução.

Escolha k tal que $p > N$. Note que w' tem os mesmos tail de w , então pode ser estendido a um elemento de Γ_{p+1}^l exatamente da mesma forma que w se estende a um elemento de Γ_{s+1}^l . Dessa forma, tomando $c = d + 3$ teremos a condição do teorema anterior. E portanto $\text{Fpd}(A) \leq d + 3$ ■

Observação: Cada subcaminho terminal de um tail de um 2-pré-cadeia é um elemento de $H \setminus \Gamma_0$ que é um elemento da base de A , então o número de tail de 2-pré-cadeia é menor ou igual $\dim_K A - 1$, pois a aljava de A possui pelo menos um vértice. De onde, $\text{Fpd}(A) \leq d + 3 \leq \text{número de 2-pré-cadeias} + 3 \leq \dim_K A - 1 + 3 \leq \dim_K A + 2$.

Corolário 5.18 *Seja A uma álgebra monomial de dimensão finita com m relações em $\rho = \Gamma_2$ e seja lr o comprimento de Loewy de A , então $\text{Fpd}(A) \leq m(lr - 1) + 3$*

Prova: Se $\gamma \in \Gamma_2$, então o comprimento do caminho γ é menor ou igual a lr . Portanto γ possui no máximo $lr - 1$ subcaminhos terminais próprios à direita, então o número total de tails de 2-pré-cadeias será no máximo $m(lr - 1)$. Logo $\text{Fpd}(A) \leq d + 3 \leq m(lr - 1) + 3$ ■

Exemplo 5.19

Seja a álgebra dada pela aljava

$$\bullet 1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet 2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet 3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bullet n$$

Com relações $\rho = \{\alpha_i \alpha_{i+1}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n - 2\}$. As 2-pré-cadeias desta álgebra são: $\{\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2}, i = 1, 2, \dots, n - 3\}$. Para cada 2-pré-cadeia $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2}$ seu tail é α_{i+2} . Então temos $d = n - 4$. Segue que $\text{Fpd}(A) \leq n - 4 + 3 = n - 1$ ■

Capítulo 6

Álgebras de caminhos generalizadas

Este capítulo tem basicamente dois objetivos, primeiro explorar uma nova classe de álgebras, as chamadas álgebras de caminhos generalizadas e segundo obter algumas informações sobre a dimensão finitística dessa classe de álgebras.

As álgebras de caminhos generalizadas foram introduzidas por Shao-Xue-Liu e é uma generalização natural das álgebras de caminhos (veja, por exemplo [CL]).

Aqui apresentamos um critério para saber quando uma álgebra de caminhos generalizada é artiniana à direita ou à esquerda. Vale lembrar que F. Coelho e S.X. Liu apresentaram um critério para caracterizar álgebras de caminhos generalizadas noetherianas à direita e à esquerda. A técnica que utilizamos é muito semelhante a que foi utilizada por eles para caracterizar as álgebras de caminhos generalizadas noetherianas.

Seguem abaixo as definições que utilizaremos no decorrer desse capítulo.

6.1 $\mathcal{A}$ -Álgebras de Caminhos

Sejam K um corpo, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ uma aljava e $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \Delta_0\}$ uma família de K -álgebras A_i com identidade, indexadas pelos vértices em Δ_0 . Chamaremos a unidade de A_i por e_i .

Os elementos de $\cup_{i \in \Delta_0} A_i$ serão chamados de **$\mathcal{A}$ -caminhos de comprimento zero**. Para cada $n \geq 1$, um **$\mathcal{A}$ -caminho de comprimento n** é dado por $a_1\beta_1a_2\beta_2 \dots a_n\beta_na_{n+1}$, onde $(s(\beta_1)|\beta_1 \dots \beta_n|t(\beta_n))$ é um caminho em Δ de comprimento n tal que para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $a_i \in A_{s(\beta_i)}$, e $a_{n+1} \in A_{t(\beta_n)}$.

Consideremos o K -espaço vetorial $K\Delta$ com base o conjunto de todos os $\mathcal{A}$ -caminhos e o K -subespaço I gerado por todos os caminhos da forma

$$(a_1\beta_1 \dots \beta_{j-1}(a_j^1 + a_j^2 + \dots + a_j^m)\beta_j a_{j+1} \dots \beta_n a_{n+1}) - \left(\sum_{l=1}^m a_1\beta_1 \dots \beta_{j-1}a_j^l\beta_j \dots \beta_n a_{n+1} \right),$$

onde $(s(\beta_1)|\beta_1 \dots \beta_n|t(\beta_n))$ é um caminho em Δ , $a_i \in A_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1} \in A_{t(\beta_n)}$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $a_j^l \in A_{s(\beta_j)}$ para $l = 1, 2, \dots, m$.

Considere $R = K\Delta/I$ e definamos sobre R a seguinte multiplicação: Dados dois elementos $[a_1\beta_1 \dots \beta_n a_{n+1}]$ e $[b_1\gamma_1 \dots \gamma_m b_{m+1}]$, onde $[x]$ denota a classe de equivalência de x módulo o ideal I , definimos

$$[a_1\beta_1 \dots \beta_n a_{n+1}][b_1\gamma_1 \dots \gamma_m b_{m+1}]$$

por $[a_1\beta_1 \dots \beta_n a_{n+1}b_1\gamma_1 \dots \gamma_m b_{m+1}]$, se b_1 e a_{n+1} pertencem ao mesmo A_i e 0 caso contrário.

Com isso, definimos um produto em R , o que torna R uma K -álgebra.

Obviamente, $E_n = \sum_{i=1, i \in \Delta_0}^n e_i$ é um idempotente em R . Mas $K(\Delta, \mathcal{A})$ possui unidade $\iff \Delta_0$ é finito.

A K -álgebra R definida acima é chamada de **$\mathcal{A}$ -álgebra de caminhos de Δ** e a denotaremos por $R = K(\Delta, \mathcal{A})$.

Observe que se $A_i = K$ para todo $i \in \Delta_0$, então $K(\Delta, \mathcal{A})$ coincide com a álgebra de caminhos usual.

Exemplos 6.1

1) Considere as aljavas

$$\Gamma \begin{array}{ccccccc} & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \\ .4 & \xleftarrow{\alpha_3} & .3 & \xleftarrow{\alpha_2} & .2 & \xleftarrow{\alpha_1} & .1 \end{array}$$

e

$$\Delta : \begin{array}{ccccccc} & & \alpha_3 & & \alpha_2 & & \alpha_1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \\ .4 & \xleftarrow{\alpha_3} & .3 & \xleftarrow{\alpha_2} & .2 & \xleftarrow{\alpha_1} & .1 \end{array}$$

com família de K -álgebras $\mathcal{A} = \{A_1 = K, A_2 = K[X], A_3 = K[X], A_4 = K\}$, então $K(\Delta, \mathcal{A}) \cong K\Gamma$

2) Seja Γ a seguinte aljava:

com $\mathcal{A} = \{A_1 = K \langle x, y \rangle, A_2 = K[x], A_3 = A_5 = A_6 = K \text{ e } A_4 =$

$K[x]/(x^2)\}$. Então temos uma álgebra de caminhos generalizada $K(\Gamma, \mathcal{A})$.

Observação: $K(\Delta, \mathcal{A})$ é uma álgebra de dimensão finita sobre K se e somente se Δ for uma aljava finita sem ciclos orientados e $\dim_K A_i < \infty$, para todo $A_i \in \mathcal{A}$.

Prova: Se Δ não for finita, então existem infinitas flechas α_i em Δ_1 ou existem infinitos vértices em Δ_0 . Se $|\Delta_1| = \infty$, então temos infinitos elementos da forma $[\alpha_i]$ em $K(\Delta, \mathcal{A})$. Mas todos esses elementos são linearmente independente, portanto $\dim K(\Delta, \mathcal{A}) = \infty$.

Se $|\Delta_0| = \infty$, considere $a_i \in A_i$ para cada $i \in \Delta_0$, então o conjunto $\{[a_i]\}_{i \in \Delta_0}$ é linearmente independente em $K(\Delta, \mathcal{A})$. Logo $\dim K(\Delta, \mathcal{A}) = \infty$.

Suponha agora que existe um ciclo orientado

$$(i|\alpha_1 \dots \alpha_m|i)$$

com $s(\alpha_i) = t(\alpha_m) = i$ e $m \geq 1$, então $\gamma = [e_i \alpha_1 e_{s(\alpha_2)} \alpha_2 \dots e_{s(\alpha_m)} \alpha_m e_i]$ é tal que o conjunto $\{\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^k, \dots\}$ é linearmente independente e portanto $\dim K(\Delta, \mathcal{A}) = \infty$.

Se para algum $i \in \Delta_0$ tivermos $\dim A_i = \infty$, escolha $\{a_1, a_2, \dots\}$ um conjunto linearmente independente em A_i . Neste caso, o conjunto $\{[a_1], [a_2], \dots\}$ será linearmente independente em $K(\Delta, \mathcal{A})$ e então $\dim K(\Delta, \mathcal{A}) = \infty$.

Reciprocamente suponha que Δ é finita e sem ciclos orientados e $\dim A_i < \infty$ para todo $i \in \Delta_0$ e seja $B_i = \{a_j^i\}$ uma base de A_i para $1 \leq j \leq \dim A_i$ e $i \in \Delta_0$. Considere $G = \{\mathcal{A}\text{-caminhos da forma } [a_{j_1}^{s(\beta_1)} \beta_1 a_{j_2}^{s(\beta_2)} \dots a_{j_m}^{s(\beta_m)} \beta_m a_k^{t(\beta_m)}]\}$ com $j_l \in B_{s(\beta_l)}$ para $l = 1, 2, \dots, m$ e $k \in B_{t(\beta_m)}$. Então um $\mathcal{A}$ -caminho γ qualquer pode ser escrito como combinação linear de elementos de G com escalares em K . Mas sendo Δ uma aljava finita e $\dim A_i < \infty$ para cada $i \in \Delta_0$, temos $|G|$ é finito. Logo $K(\Delta, \mathcal{A})$ possui um conjunto finito de K -geradores. Portanto $\dim K(\Delta, \mathcal{A})$

é finita. ■

Veremos na seqüência como saber se uma álgebra de caminhos generalizada é artiniana à direita ou à esquerda (respectivamente noetheriana) através da aljava e das K -álgebras A_i .

6.2 Radical de uma Álgebra de Caminhos Generalizada

Sejam Δ uma aljava, $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \Delta_0\}$ uma família de K -álgebras indexadas pelos vértices de Δ e com identidades e_i e $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a $\mathcal{A}$ -álgebra de caminhos de Δ .

Definição 6.2

(i) Dizemos que um caminho $(i|\beta_1 \dots \beta_n|j)$, $n \geq 1$ em Δ é **regular** se não for subcaminho de um ciclo orientado em Δ .

(ii) Seja $(i|\beta_1 \dots \beta_n|j)$, $n \geq 1$ um caminho regular em Δ . Então para qualquer $\mathcal{A}$ -Álgebra de caminhos, o caminho $a\beta_1 \dots \beta_nb$ com $a \in A_i$ e $b \in A_j$ é dito **regular**. Também se não existirem ciclos orientados passando através de um vértice i , os elementos de $J(A_i)$ serão chamados $\mathcal{A}$ -caminhos regulares de comprimento zero.

Proposição 6.3 *Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ uma $\mathcal{A}$ -álgebra de caminhos de Δ . Então o radical de Jacobson $J(R)$ de R é o subespaço de R gerado por todos os caminhos regulares de R .*

Prova: Denote por M o K -subespaço de R gerado por todos os caminhos regulares de R e por (X) o ideal bilateral gerado por X . Considere $u \in R$

um caminho regular de comprimento não nulo. Então $(u)^2 = 0$, isto é, (u) é nilpotente, logo $(u) \subseteq J(R)$.

Seja i um vértice que não pertence a nenhum ciclo orientado, e considere $U_i = \sum_u (u)$ onde u percorre todos os caminhos regulares de comprimentos maiores que zero que possuem início ou final em i . Observe que $(J(A_i)) = J(A_i) + U_i$. Por outro lado, U_i é um ideal bilateral quase regular de R . Como

$$\frac{(J(A_i))}{U_i} = \frac{J(A_i) + U_i}{U_i} \cong \frac{J(A_i)}{U_i \cap J(A_i)} = J(A_i),$$

pois $U_i \cap J(A_i) = 0$ e $J(A_i)$ é também quase regular temos que $U_i + J(A_i) = (J(A_i))$ é quase regular. Dessa forma $(J(A_i)) \subseteq J(R)$ e portanto $M \subseteq R$.

Supomos agora que $M \neq J(R)$, então existe um elemento não nulo $x = \sum p_i \in J(R)$, onde cada p_i é não regular. Então existem l, m tais que $0 \neq e_l x e_m = \sum_i e_l p_i e_m \in J(R)$ e portanto existe pelo menos um p_i satisfazendo $e_l p_i e_m \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $p_i = e_l p_i e_m$. Como p_i pertence a um ciclo orientado, existe um caminho q de m para l tal que $q = e_m q e_l$. Multiplicando x por q , ainda temos uma soma de caminhos em $J(R)$ que são ciclos orientados, naturalmente xq não pertence a M . Então trocando x por xq , temos que $xq = \sum_i p_i q$ e cada $p_i q$ é um ciclo orientado no vértice l . Multiplicando xq à direita e à esquerda por $(e_l \gamma \dots \delta e_l)$ obtém-se $w = (e_l \gamma \dots \delta e_l) x q (e_l \gamma \dots \delta e_l) \in J(R) \setminus M$. Chamando $c_i = (e_l \gamma \dots \delta e_l) p_i q (e_l \gamma \dots \delta e_l)$, podemos escrever $w = \sum_i c_i$. Observe que se $z \in R$ é tal que $e_l z \neq 0$, então $c_i z = 0$ para cada i , portanto $wz \neq 0$. Como $w \in J(R)$, w é quase regular, então existe $y \in R$ tal que $w + y + wy = 0$ (*). Multiplicando y à direita e à esquerda por e_l podemos supor que $y = e_l y e_l$. Pela observação anterior $wy \neq 0$, mas o comprimento de wy é estritamente maior que o comprimento de $w + y$, o que é uma contradição com a igualdade (*). Logo $M = J(R)$. ■

6.3 Critérios para Noetherianidade e Artinianidade

Descreveremos um critério para saber quando uma álgebra de caminhos generalizada $K(\Delta, \mathcal{A})$ é noetheriana ou artiniana à direita e noetheriana ou artiniana à esquerda em termos da aljava Δ e a família de K -álgebras $\mathcal{A}$.

O seguinte resultado é bem conhecido, por isso omitiremos sua demonstração.

Lema 6.4 (a) Se Λ é uma K -álgebra artiniana à direita (esquerda) e M_Λ (${}_\Lambda M$) é um módulo finitamente gerado, então M_Λ (${}_\Lambda M$) é artiniano.

(b) Se Λ é uma K -álgebra noetheriana à direita (esquerda) e M_Λ (${}_\Lambda M$) é um módulo finitamente gerado, então M_Λ (${}_\Lambda M$) é noetheriano.

■

Uma vértice v em uma aljava Δ é dito **fonte** se $t(\alpha) \neq v$ para toda flecha $\alpha \in \Delta_1$. Analogamente v é dito **poço** se $s(\alpha) \neq v$ para toda flecha $\alpha \in \Delta_1$.

Teorema 6.5 A K -álgebra $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ é noetheriana à esquerda se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Δ é finita
- (ii) Existe somente uma flecha finalizando em cada vértice que pertence a um ciclo orientado de Δ .
- (iii) A álgebra A_i é unidimensional para cada vértice i que está em um ciclo orientado.
- (iv) Se j não é um vértice fonte, então A_j é uma K -álgebra de dimensão finita, e se j for um vértice fonte a álgebra A_j é noetheriana à esquerda.

Prova: Assumiremos primeiro que R é noetheriana à esquerda.

É fácil ver que Δ é finita, e temos a validade de (i). Suponha agora que Δ possui um ciclo γ com início e final em um vértice i e que existe uma flecha

$\alpha : j \rightarrow i$, com j um vértice que não pertence ao ciclo γ . Considere a seguinte cadeia ascendente de ideais à esquerda distintos

$$< [\alpha][\gamma] > \subsetneq < [\alpha][\gamma], [\alpha][\gamma]^2 > \subsetneq < [\alpha][\gamma], [\alpha][\gamma]^2, [\alpha][\gamma]^3 > \dots$$

Então R não pode ser noetheriana à esquerda. O que é uma contradição com a hipótese. Isso prova (ii).

Seja γ um ciclo orientado em Δ passando pelo vértice i e considere as flechas α e β tais que $t(\alpha) = i$ e $s(\beta) = i$. Se A_i não for de dimensão 1 existem dois elementos linearmente independente a e b em A_i . Considere $x = a[\beta] \dots [\alpha]e_i$ e $y = b[\beta] \dots [\alpha]e_i$. Então,

$$< yx > \subsetneq < yx, yx^2 > \subsetneq < yx, yx^2, yx^3 > \subsetneq \dots$$

é uma cadeia ascendente de ideais à esquerda que não estaciona. O que prova (iii).

Se j é um vértice fonte, então todo ideal à esquerda de A_j é também um ideal à esquerda de R , dessa forma A_j é noetheriana à esquerda. Se j não é um vértice fonte, existe uma flecha $\alpha : l \rightarrow j$. Se A_j tem dimensão infinita, seja $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto linearmente independente infinito de elementos em A_j . Então,

$$< [\alpha]a_1 > \subsetneq < [\alpha]a_1, [\alpha]a_2 > \subsetneq < [\alpha]a_1, [\alpha]a_2, [\alpha]a_3 > \subsetneq \dots$$

é uma cadeia ascendente de ideais à esquerda em R , contradizendo o fato de que R é noetheriana à esquerda. O que prova (iv).

Reciprocamente assumimos que (i) – (iv) sejam verdadeiras, e provaremos que R é noetheriana à esquerda.

Seja

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

uma cadeia ascendente de ideais à esquerda de R . Para cada i , seja e_i a identidade de A_i . Sendo Δ_0 finita, $|\Delta_0| = m$, então $1 = \sum_{i=1}^m e_i$ é a identidade em R .

Assim é suficiente mostrar que

$$e_i I_1 e_j \subset e_i I_2 e_j \subset e_i I_3 e_j \subset \dots \subset e_i I_n e_j \subset \dots \quad (*)$$

estaciona após um número finito de passos para cada par (i, j) . Obviamente para cada n , $e_i I_n e_j \subseteq e_i R e_j$. Seja γ um caminho em $e_i R e_j$. Primeiramente assumimos que γ não pertence a um ciclo orientado. Portanto, usando (ii), γ não possui subcaminhos que estão em ciclos orientados. Se além disso i não for um vértice fonte, então por hipótese $e_i R e_j$ é um K -espaço vetorial de dimensão finita, logo (*) estaciona após um número finito de passos. Se i for um vértice fonte, então $e_i R e_j$ é finitamente gerado como A_i -módulo à esquerda. Por (iv) A_i é noetheriana à esquerda e então $e_i R e_j$ é um A_i -módulo à esquerda noetheriano. Logo (*) estaciona.

Suponha agora que i pertence a um ciclo orientado. Por (ii) existe um único ciclo básico θ em i e todo vértice inicial de qualquer caminho terminando em i pertence a θ . Neste caso $e_i R e_j$ é finitamente gerado como $K[\theta]$ -módulo à esquerda, usando o teorema da base de Hilbert (ver [CF]) temos que a cadeia (*) estaciona. ■

Teorema 6.6 *A K -álgebra $R = K(\mathcal{A})$ é noetheriana à direita se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) Δ é finita
- (ii) Existe somente uma flecha iniciando em cada vértice que pertence a um ciclo orientado de Δ .
- (iii) A álgebra A_i é unidimensional para cada vértice i que está em um circuito orientado.
- (iv) Se j não é um vértice poço, então A_j é uma K -álgebra de dimensão finita, e para cada j que for um vértice poço a álgebra A_j é noetheriana à direita.

Prova: A demonstração é dual à anterior e será omitida.

Corolário 6.7 *Se $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ é uma álgebra de caminhos generalizada, então:*

- (a) *Se Δ possui ciclos orientados, então R é noetheriana se e somente se R é uma soma de álgebras do tipo $K\tilde{A}_n$ com $\tilde{A}_n$ linearmente orientada.*
- (b) *Se Δ não possui ciclos orientados, então R é noetheriana se e somente se Δ é finita e para cada vértice $j \in \Delta_0$, A_j é de dimensão finita.*

■

Iremos agora, como nossa contribuição, caracterizar as álgebras de caminhos generalizadas que são artinianas à esquerda ou à direita.

Proposição 6.8 *Sejam Δ uma aljava e $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Delta_0}$ uma família de álgebras com identidade. Se $K(\Delta, \mathcal{A})$ é artiniana à direita ou à esquerda, então Δ não possui circuitos orientados.*

Prova: Supomos que exista um circuito orientado $\alpha = (i|\beta_1 \dots \beta_n|i)$. Podemos supor que n é o menor dos índices j tais que $t(\beta_j) = i$. Considere $\gamma = [e_i\beta_1 e_{t(\beta_1)} \dots e_{s(\beta_n)}\beta_n e_i]$, onde e_j é a identidade de A_j , $\gamma \in K(\Delta, \mathcal{A})$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, $\gamma^m \neq \gamma^{m+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere os ideais bilaterais $(\gamma) \supsetneq (\gamma^2) \supsetneq (\gamma^3) \supsetneq \dots$. Temos assim uma cadeia decrescente de ideais bilaterais que não estaciona, portanto $K(\Delta, \mathcal{A})$ não pode ser nem artiniana à direita, nem à esquerda. ■

Teorema 6.9 *Sejam Δ uma aljava finita e $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Delta_0}$ uma família de álgebras com identidade, então $K(\Delta, \mathcal{A})$ é artiniana à esquerda se e somente se satisfaz:*

- (i) Δ é acíclico.
- (ii) Para todo $i \in \Delta_0$ que não for uma fonte, A_i é de dimensão finita.
- (iii) Se $j \in \Delta_0$ for uma fonte, então A_j é artiniana à esquerda.

Prova: Supomos $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ artiniana à esquerda, pela Proposição 6.8 Δ é acíclico.

Se j é uma fonte, então $fRe_j = 0$, onde $f = \sum_{j \neq i \in \Delta_0} e_i$, $e_j + f = 1$ e e_i e f são não nulos. Como o anel e_jRe_j é artiniano à esquerda e $e_jRe_j = A_j$, pois Δ é acíclico, então A_j é artiniana à esquerda. E temos (iii).

Sendo R artiniana à esquerda com identidade, então R é noetheriana à esquerda. Logo A_j é de dimensão finita para cada j que não é vértice fonte (6.5 (iv)).

Reciprocamente seja

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots (*)$$

uma cadeia decrescente de ideais à esquerda em R , e $m = |\Delta_0|$. Para cada par de índices $(i, j) \in \Delta_0 \times \Delta_0$ considere a cadeia decrescente

$$e_i I_1 e_j \supset e_i I_2 e_j \supset e_i I_3 e_j \dots (**)$$

de ideais à esquerda em e_iRe_j . Sendo $1 = \sum_{i=1}^m e_i$, como no teorema anterior é suficiente mostrar que para cada par (i, j) a cadeia $(**)$ estaciona.

Sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $e_i I_k e_j \subseteq e_iRe_j$. Seja γ um caminho em e_iRe_j . Como Δ é acíclico existe apenas um número finito de caminhos de i para j em Δ , portanto se i não é um vértice fonte, por (ii) A_i é de dimensão finita. Como A_j também é de dimensão finita e_iRe_j é um K -espaço vetorial de dimensão finita portanto $(**)$ estaciona.

Se i for um vértice fonte e $i = j$, então $e_iRe_j = e_iRe_i = A_i$. Logo $(**)$ estaciona, pois nesta caso $e_i I_k e_j$ são ideais à esquerda em A_i que é artiniana à esquerda.

Se i for um vértice fonte e $i \neq j$. Seja $L = \{v \in \Delta_0 / \text{existe uma flecha } i \rightarrow v\}$, Obviamente $|L| \leq m$. Como para todo $v \in L$, v não é fonte em Δ , então A_v é de dimensão finita. Portanto e_vRe_j é um K -espaço vetorial de dimensão finita. Seja $B_{vj} \subset e_vRe_j$ uma base de e_vRe_j e $B = \cup_{v \in L} B_{vj}$. Então $|B| < \infty$. Novamente como Δ é uma aljava finita, existe apenas um número finito de flechas $\beta_v : i \rightarrow v$. Considere $C' = \{[\beta_v] / \beta_v : i \rightarrow v\}$ e $C = BC' = \{\text{todos os produtos de elementos de } B \text{ por elementos de } C'\}$, $|C| = |B||C'| < \infty$.

Afirmção: $e_i Re_j$ é um A_i -módulo à esquerda finitamente gerado.

De fato consideremos $\alpha \in e_i Re_j$, $\alpha = \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l$, onde os α_l 's são $\mathcal{A}$ -caminhos da forma $a\beta_v a_1 \beta_1 \dots a_q \beta_q a_{q+1}$ com $a_1 \in A_{s(\beta_1)}$, $a_{q+1} \in A_j$ e $\lambda_l \in K$. Escrevamos

$$[a_1 \beta_1 \dots a_q \beta_q a_{q+1}] = \sum_{s=1}^k t_s \gamma_s,$$

onde cada $t_s \in K$ e $\gamma_s \in B$. Portanto

$$[a\beta_v a_1 \beta_1 \dots a_q \beta_q a_{q+1}] = \sum_{s=1}^k [a\beta_v] t_s \gamma_s = \sum_{s=1}^k t_s a[\beta_v] \gamma_s.$$

Como $t_s \in K$, $t_s a \in A_i$. Dessa forma

$$\alpha = \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{s=1}^k (t_s a)[\beta_v] \gamma_s = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^k (\lambda_l t_s a)[\beta_v] \gamma_s.$$

De modo que $e_i Re_j = \langle C \rangle$ como A_i -módulo à esquerda, provando a afirmação. Segue pelo Lema 6.4 que $e_i Re_j$ é um A_j -módulo artiniano à esquerda. Como $e_i I_k e_j$ são ideais à esquerda de $e_i Re_j$ serão também A_i -submódulos à esquerda de $A_i(e_i Re_j)$. Logo a cadeia

$$e_i I_1 e_j \supset e_i I_2 e_j \supset e_i I_3 e_j \dots$$

estaciona.

Portanto (*) estaciona e $K(\Delta, \mathcal{A})$ é artiniana à esquerda. ■

Teorema 6.10 *Sejam Δ uma aljava finita e $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Delta_0}$ uma família de álgebras com identidade, então $K(\Delta, \mathcal{A})$ é artiniana à direita se e somente se satisfaz:*

- (i) Δ é acíclico.
- (ii) Para todo $i \in \Delta_0$ que não for um poço, A_i é de dimensão finita.
- (iii) Se $j \in \Delta_0$ for um poço, então A_j é artiniana à direita.

Prova: É dual à anterior. ■

Corolário 6.11 *Sejam Δ uma aljava finita e conexa e $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Delta_0}$ uma família de álgebras com identidade, então $K(\Delta, \mathcal{A})$ é artiniana se e somente se satisfaz:*

- (i) Δ é acíclico.
- (ii) Para todo $i \in \Delta_0$, A_i é de dimensão finita.

Prova: Segue imediatamente dos Teoremas 6.9 e 6.10. ■

6.4 Conjectura finística para álgebras de caminhos generalizadas

Vamos agora relacionar a dimensão finitística de uma álgebra de caminhos generalizada artiniana à esquerda com a dimensão finitística das álgebras A_i com $i \in \Delta_0$.

Sejam $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ uma aljava finita, $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \Delta_0\}$ uma família de K -álgebras com unidade e $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a respectiva $\mathcal{A}$ -álgebra de caminhos.

Consideremos a relação $\preceq$ em Δ_0 , definida da seguinte forma: $i \preceq j$ se $i = j$ ou existe um caminho de i para j em Δ . Dizemos que $i \sim j$ se $i \preceq j$ e $j \preceq i$. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em Δ_0 e define uma partição $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ sobre Δ_0 . Construiremos agora uma ordem parcial sobre o conjunto $\mathcal{P}$ que nos permitirá quebrar nossa álgebra em blocos e aplicar o teorema das componentes irredutíveis (2.14) para tirar informações sobre dimensão finitística da nossa $\mathcal{A}$ -álgebra de caminhos.

Definição 6.12 $V_k \leq V_l$ se e somente se, existem vértices $i \in V_k, j \in V_l$ tais que $i \preceq j$.

Como vimos no Capítulo 2 essa relação é reflexiva, transitiva e anti-simétrica, portanto uma ordem parcial.

Seja $E_i = \sum_{j \in V_i} e_j$. Obviamente essa soma é finita, pois Δ_0 estamos considerando finita. Observamos que

$$\begin{aligned} E_i R E_i &= \\ \left(\sum_{j \in V_i} e_j \right) R \left(\sum_{l \in V_i} e_l \right) &= \\ < \left(\sum_{j \in V_i} e_j \right) [(a_1 \beta_1 \dots a_n \beta_n a_{n+1})] \left(\sum_{l \in V_i} e_l \right) > = \\ < [a_j \beta_j \dots a_k \beta_k a_{k+1}] : a_j \in A_j, a_{k+1} \in A_l; j, l \in V_i > . \end{aligned}$$

Considere agora a subálgebra plena Δ' de Δ formada pelos vértices $i \in V_i$ e $\mathcal{A}^i = \{A_j : j \in V_i\}$. Então um elemento em $K(V_i, \mathcal{A}^i)$ é da forma $[a_1 \beta_1 \dots a_n \beta_n]$ com $a_1 \in A_j, a_{n+1} \in A_k$ para $j, k \in V_i$. Consequentemente $K(V_i, \mathcal{A}^i) \cong E_i R E_i$. Observe que podemos reordenar os idempotentes E'_i s de modo que se $i \leq j$, então $V_i \leq V_j$.

Neste caso $E_j R E_i = 0$. Se $K(\Delta, \mathcal{A})$ for artiniana á esquerda podemos aplicar a Proposição 2.14 e concluir que $\text{fpd}(K(\Delta, \mathcal{A}))$ é finita se e somente se $\text{fpd}(E_i R E_i)$ é finita para cada $i \in \Delta_0$. Isso é exatamente o que faremos na próxima proposição.

Proposição 6.13 *Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$, uma álgebra de caminhos generalizada artiniana, então a dimensão finitística de R é finita se e somente se a dimensão finitística de cada A_i for finita.*

Prova: Sendo $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ artiniana, pelo teorema anterior segue que $E_i R E_i = A_i$. O resultado agora segue pela Proposição 2.14.

Logo a dimensão finitística de R é finita se e somente se a dimensão finitística de cada A_i for finita. Com isso obtemos um critério para saber se uma álgebra de caminhos generalizada possui ou não dimensão finitística finita, apenas olhando para a álgebra ordinária e para as álgebras A_i . ■

Referências

- [A] Ibrahim Assem , *Algèbres et modules*, Enseignement des mathématiques (1997) Masson.
- [AB] M. Auslander and Buchsbaum, *homological dimension in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc **52** (1975), 69-74.
- [AF] F. Anderson and K. Fuller, *Rings and Categories of modules*, Springer Verlag
- [AG] David J. Anick and Edward. Green, *On the homology of quotient of path algebras*, Communication in Algebra **15** (1987), 309-341.
- [AR] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math. **86** (1991), 111-152.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of Representation Theory of Associative algebras*, preprint 1997.
- [B] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings*, Trans. Amer. Math Soc, **95** (1993), 466-488.
- [B2] H. Bass, *Injective dimension in Noetherian rings*, Trans. Amer. Math Soc, **102** (1962), 18-29.
- [BF] W. Burgess and K. Fuller, *Left almost serial rings and Cartan determinant conjecture*, in Methods in Module Theory, Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics Vol **140**, (1993).
- [CLS] Cibils, C.; Larrión, F. & Salmerón, L.: *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, México, UNAM, 1982 111pp.
- [C1] F. U. Coelho, *Uma introdução à teoria de representações de álgebras* (mini-curso), Atas da XII Escola de Álgebra, Diamantina (1992), 60p.
- [CL] F. U. Coelho and S. Liu *Generalized path algebras*, Proceedings of Euroconference “ Interactions between ring theory and representation of algebras”, Murcia, Espanha (1998) to appear .
- [CF] Carl Faith *Algebra II, Rings Theory*, Springer Verlag.

[F] K. Fuller, *The Cartan Determinant and Global Dimension of Artinian Rings*, Contemporary Mathematics. **124**, (1992), 51-72.

[FGR] R. Fossum, P. Griffith and I. Reiten *Trivial Extensions of Abelian Categories*, Lectures Notes in Math - Springer Verlag - Vol. **456** (1975).

[FS] K. Fuller and M. Saorin, *On the finitistic dimension conjecture for artinian rings*, Man. Math. **74**, (1992), 117-132.

[G] W. H. Gustafson, *Global dimension in serial rings*, J. Algebra **97** (1985), 14-16.

[GH] E. Green, B. Huisgen - Zimmermann, *Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube*, Math. Zeit. **206** (1991), 505-526.

[GKK] E. Green, E. Kirkman, J. Kuzmanovich, *Finitistic dimension of finite dimensional monomial algebras*, J. Algebra **136** (1991), 37-50.

[GR] M. Raynaud and L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1-89.

[H1] B. Huisgen - Zimmermann *The finitistic dimension conjectures - a tale of 3.5 decades*, Kluwer Academic Publishers - Abelian Groups and Modules (1995), 501- 517

[H2] B. Huisgen - Zimmermann, *Homological domino effects and the first finitistic dimension*, Invent Math **108** (1992), 369-383

[IZ] K Igusa, D. Zacharia, *Syzygy pairs in a monomial algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 601-604

[R] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press.

[S] S. Smalø, *The supremum of the difference between the big and the little finitistic dimensions is infinite*, Pro. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2619-2622

[T] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius rings and generalizations*, Lectures Notes in Math. **351** (1973), Springer-Verlag.

[W] Yong Wang, *Finitistic dimension of serial-like rings*, Journal of Pure e Applied Algebra **96** (1994), 81-96