**SUBVARIEDADES COM CURVATURA
DE RICCI NÃO NEGATIVA**

Ézio de Araújo Costa

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração:
Orientador: **Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti**

– São Paulo, 13 de agosto de 1999 –

SUBVARIEDADES COM CURVATURA DE RICCI NÃO NEGATIVA

Ézio de Araujo Costa

Este exemplar corresponde à redação final da tese apresentada por Ézio de Araujo Costa, devidamente corrigida e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 13 de agosto de 1999

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (Presidente), IME-USP
- Prof. Dr. Francesco Mercuri, IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Lucio L. Rodríguez, IMPA-RJ
- Profa. Dra. Walcy Santos, UFRJ
- Profa. Dra. Maria Helena Noronha, Cal. State at Northridge

Agradecimentos

Ao Prof. Antonio Carlos Asperti, pela orientação, incentivo e paciência.

Ao Prof. Plinio Simões, pelo estímulo e pelas conversas sobre Matemática.

Aos Prof. Fabiano e Rosa, pelo agradável convívio.

Aos colegas Batista, Antonio, Pablo e Armando, pela convivência agradável.

RESUMO

Um tema clássico em geometria Riemanianna é o estudo das variedades compactas M^n com curvatura de Ricci não negativa. A esse respeito, existem diversos resultados do ponto de vista intrínseco. Por outro lado, um assunto relativamente pouco abordado é o estudo dessas variedades quando as consideramos também como subvariedades da esfera unitária S^{n+m} ou do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+m}$. Por exemplo, um problema que continua em aberto é a classificação das subvariedades M^n de $\mathbb{R}^{n+2}$, cujas curvaturas de Ricci são constantes (subvariedades de Einstein). Neste trabalho, descreveremos certas classes de subvariedades de S^{n+m} ($\mathbb{R}^{n+m}$) que têm curvatura de Ricci não negativa. Em particular, a esse respeito, obtivemos resultados de natureza topológica-geométrica: mostramos que sob certas condições a subvariedade em foco é homeomorfa a uma esfera ou isométrica a um toro com curvatura média constante na variedade ambiente. Esses resultados dependem da combinação de duas idéias: um critério de anulamento de grupos de homologia, baseado nos trabalhos de Lawson e Simons sobre correntes mínimas retificáveis e uma estimativa para a curvatura de Ricci de subvariedades. Posteriormente, daremos uma resposta parcial para a questão das subvariedades de Einstein de $\mathbb{R}^{n+2}$.

ABSTRACT

The study of compact manifolds with nonnegative Ricci curvature is a classical subject in Riemannian geometry and about it there exist several results in the intrinsic point of view. On the other hand, relatively little studied are such manifolds when considered as submanifolds of the unity sphere S^{n+m} or the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+m}$. For example, an still open problem is the classification of compact submanifolds M^n of $\mathbb{R}^{n+2}$ with constant Ricci curvature (Einstein submanifolds). In this work will first describe certain classes of submanifolds of S^{n+m} ($\mathbb{R}^{n+m}$) which have nonnegative Ricci curvature and obtain results of topological and geometric nature: we show that, under certain conditions, the submanifold we are studying is homeomorphic to a sphere or isometric to a torus with constant mean curvature in the ambient manifold. These results depend on the vanishing of homology groups, based on the work of Lawson and Simons on stable currents, and of an estimate for the Ricci curvature of submanifolds. In the last part of this work, we will give a partial answer to the question of the Einstein submanifolds of $\mathbb{R}^{n+2}$.

Conteúdo

Introdução	1
1 Resultados preliminares	14
1.1 Variedades Riemannianas - conceitos básicos	14
1.2 Imersões isométricas - equações fundamentais	16
1.3 Conceitos básicos de topologia algébrica. Teorema dos coeficientes universais. Dualidade de Poincaré. Conjectura de Poincaré	19
1.4 Correntes mínimas estáveis	21
2 Uma estimativa para a curvatura de Ricci de subvariedades	25
3 Um critério de anulamento de grupos de homologia de subvariedades	32
4 Subvariedades com curvatura de Ricci não negativa I	36
5 Subvariedades com curvatura de Ricci não negativa II	47
6 Subvariedades de Einstein	54
Referências	64

Introdução

Neste trabalho, $M = M^n$, $n \geq 2$, denotará uma subvariedade Riemanniana conexa, n -dimensional, isometricamente imersa em Q_c^{n+m} , onde Q_c^{n+m} é a esfera unitária S^{n+m} se $c = 1$, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+m}$ se $c = 0$, ou o espaço hiperbólico H^{n+m} se $c = -1$. Sejam $\vec{H}$, H e S o vetor curvatura média da imersão, sua norma e o quadrado da norma da segunda forma fundamental, respectivamente. Em [Si], Simons calculou o Laplaciano de S para subvariedades mínimas ($H = 0$) de S^{n+m} . Em particular, usando o princípio do máximo, ele mostrou que se M^n é compacta, $m = 1$ e $S \leq n$ em M^n então $S = 0$ ou $S = n$. Além disso, quando $S = 0$, M^n é uma esfera totalmente geodésica S^n . O caso em que $S = n$ foi estudado por Chern, do Carmo e Kobayashi [CdCK] e Lawson [L]. Eles mostraram que nesse caso, M^n é um toro $S_{c_1}^k \times S_{c_2}^{n-k}$ (toro de Clifford). Ainda é uma questão em aberto, se o resultado de Simons vale para subvariedades de S^{n+m} , $n \geq 3$. Posteriormente ao trabalho de Simons, Lawson e Simons [LS], abordaram uma questão de natureza puramente topológica. Usando a noção de correntes mínimas estáveis para representar grupos de homologia e a solução da conjectura generalizada de Poincaré, eles mostraram que se M^n , $n \geq 5$, é uma subvariedade compacta de S^{n+m} tal que $S < 2\sqrt{n-1}$ em M^n , então M^n é homeomorfa a S^n . Em particular, esse resultado é o melhor possível, pois existe um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$ com curvatura média H constante em S^{n+1} , tal que $S = 2\sqrt{n-1}$. Numa parte da tese de Leung [Le1], foi usado o método de Lawson e Simons para provar

o seguinte: Se M^n , $n \geq 4$, é uma subvariedade mínima, compacta e orientada de S^{n+m} tal que $S < n$ em M^n , então M^n é homeomorfa a S^n . Isso dava uma resposta parcial à questão inicial levantada pelo trabalho de Simons [Si]. Outros autores como Zhang [Z] e Shiohama e Xu [SX], também utilizaram o método de Lawson e Simons. Por outro lado, o trabalho de Simons, deu origem a vários resultados. Diversos autores estenderam o seu método para subvariedades com vetor curvatura média paralelo. Dentre esses, podemos citar os nomes de Erbacher [E], Okumura [O], Yau [Y], Alencar e do Carmo [AdC], Xu [Xu], Santos [S] e recentemente Hou [Ho]. Em particular, [AdC] e [Xu], provaram que se M^n é uma subvariedade compacta e orientada de S^{n+1} , com curvatura média constante $H \neq 0$ e tal que $S \leq C(H)$, onde $C(H)$ é dada por (4), então M^n é uma esfera totalmente umbílica ou um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$. Paralelamente, Santos [S], deu uma outra versão do resultado acima, para subvariedades com vetor curvatura média paralelo em S^{n+m} e obteve um resultado similar. Observe que nos trabalhos de [Si], [AdC] e [Xu], o “pinching” para S é $n, 2\sqrt{n-1}$ e $C(H)$, respectivamente. Esses valores correspondem a valores de S para toros com curvatura média constante em S^{n+1} . No nosso trabalho, em particular, estudamos subvariedades compactas de S^{n+m} que satisfazem a pelo menos uma das condições $S \leq n$ e $H = 0$, $S \leq 2\sqrt{n-1}$ ou $S \leq C(H)$ em M^n (Corolários 1,3 e Teorema 3, respectivamente). Mostramos que, em geral, M^n é homeomorfa a uma esfera ou isométrica a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$ com curvatura média constante em S^{n+1} . Em particular, o Corolário 1 dá uma resposta parcial à questão de Simons. Por sua vez, o Corolário 3 estende o Teorema de Lawsons e Simons e o Teorema 3 pode ser visto como uma generalização do resultado acima devido a Leung. Também obtivemos um resultado similar para as subvariedades estudadas por Santos. Esses resultados são versões topológicas-geométricas dos teoremas de [LS], [AdC], [Xu] e [S]. Para a prova desses, um fato é fundamental: essas

subvariedades têm curvatura de Ricci não negativa. Combinando essa informação com um critério de anulamento de grupos de homologia, nossos teoremas são demonstrados. Passaremos agora a enunciar esses resultados. Para isso, se $x \in M^n$, $T_x M$ e $(T_x M)^\perp$ denotarão o espaço tangente e normal a M^n em x , respectivamente. Faremos uso da seguinte convenção: para cada $x \in M^n$, seja $\xi_1, \dots, \xi_m$ uma base ortonormal qualquer de $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \vec{H}/H$ se $H(x) \neq 0$. Quando $H(x) \neq 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ denotarão os autovalores do operador de Weingarten A_{ξ_1} na direção ξ_1 . Se $H(x) = 0$, faça $\lambda_i = 0$ para todo i . Denote por $S_H = \text{tr} A_{\xi_1}^2$, se $H(x) \neq 0$ e $S_H = 0$, se $H(x) = 0$. Dizemos que uma imersão é *quase-umbílica* em $x \in M^n$, se existe um base ortonormal $\xi_1, \dots, \xi_m$, de $(T_x M)^\perp$ tal que cada operador de Weingarten A_{ξ_β} na direção ξ_β , $\beta = 1, \dots, m$, tem um autovalor de multiplicidade no mínimo igual a $n - 1$. Dada uma imersão, denotaremos por $N_1(x)$ e $R_x^\perp$ como sendo o primeiro espaço normal e o tensor de curvatura normal da imersão em x , respectivamente. Uma variedade Riemanniana M^n é *conformemente plana* se em cada ponto de M^n , existe um aberto que é conformemente difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$. Nosso primeiro resultado, a ser provado no Capítulo 2, dá uma estimativa para a curvatura de Ricci de subvariedades. Em particular, melhoramos um resultado devido a Leung [Le3].

Teorema 1 *Sejam $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$ uma imersão isométrica, $x \in M^n$ e $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. Então*

$$\text{Ric}(v) \geq \left(\frac{n-1}{n} \right) (nc - S) + nH^2 + (n-2)H \langle A_{\xi_1} v, v \rangle. \quad (1)$$

Além disso,

(a) *Se $n \geq 3$ e a igualdade em (1) ocorre para algum vetor unitário $v \in T_x M$, temos:*

(a1) f é quase-umbílica em x , $R_x^\perp = 0$ e a dimensão de $N_1(x)$ é no máximo igual a

2. Em particular, se $H(x) = 0$ a dimensão de $N_1(x)$ é no máximo igual a 1;

(a2) Se $\xi \in (T_x M)^\perp$, $\|\xi\| = 1$, então $A_\xi v = \mu v$, onde μ tem multiplicidade 1 ou n .

Além disso, se $w \perp v$ então $A_\xi w = \lambda w$, onde λ tem multiplicidade no mínimo igual a $n - 1$.

(b) Seja $n \geq 3$. Se para cada $x \in M^n$ existe um vetor unitário v em $T_x M$ tal que (1) é uma igualdade então M^n é conformemente plana. Em particular, se M^n é compacta e $c \geq 0$, então $H_i(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$ para $i = 2, \dots, n - 2$.

Como já observamos, Simons [Si], Lawson [L] e Chern, do Carmo e Kobayashi [CdCK] contribuíram para a classificação das subvariedades M^n , mínimas e compactas de S^{n+1} tais que $S \leq n$ em M^n . Um problema ainda em aberto é a completa classificação dessas subvariedades, quando a variedade ambiente é a esfera S^{n+m} . Espera-se que nesse caso, quando $n \geq 3$, M^n seja um toro (toro de Clifford) $S_{c_1}^k \times S_{c_2}^{n-k}$ ou o espaço projetivo complexo CP^2 . O Corolário 1 a seguir, dá uma resposta parcial para essa questão:

Corolário 1 *Seja M^n , $n \geq 3$, uma subvariedade mínima e compacta de S^{n+m} . Se $S \leq n$ e o grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M^n é infinito, então $S = n$, a codimensão m pode ser reduzida para 1 e M^n é isométrica ao toro de Clifford $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$ em S^{n+1} , onde $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$. Em particular, o operador de Weingarten numa direção normal tem apenas um par de autovalores μ_1, μ_2 tais que $\mu_1 \mu_2 = -1$, $c_1 = 1 + \mu_1^2$ e $c_2 = 1 + \mu_2^2$.*

Usando os trabalhos de Lawson e Simons [LS], Xin [Xi] e Leung [Le2] sobre correntes mínimas estáveis, obtivemos o seguinte critério de anulamento de grupos de homologia:

Teorema 2 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$, $c \geq 0$, uma imersão isométrica, onde M^n é compacta.*

(a) *Se para algum inteiro p tal que $2 \leq p \leq n/2$, temos que*

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-p} + \frac{n(n-2p)H\lambda_1}{n-p} + nc \quad (2)$$

em M^n , então o k -ésimo grupo de homologia de M^n com coeficientes inteiros $H_k(M, Z) = \{0\}$, para $p \leq k \leq n-p$.

(b) *Se*

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + nc \quad (3)$$

em M^n , então $\pi_1(M)$ é finito e o recobrimento universal de M^n , $\widetilde{M}^n$ é compacto. Além disso,

(b1) *Se $n = 2$, então M^2 é difeomorfa a S^2 ou ao espaço projetivo real $\mathbb{R}P^2$.*

(b2) *Se $n = 3$ e $\pi_1(M) = \{0\}$, então M^3 é difeomorfa a S^3 .*

(b3) *Se $n \geq 4$ e M^n é orientável quando n é par, então M^n é homeomorfa a S^n .*

Quando M^n é completa, temos o Corolário 2 a seguir.

Corolário 2 *Seja M^n , $n \geq 2$, uma subvariedade completa de Q_c^{n+m} , $c \geq 0$. Suponha que M^n é orientável quando n é par. Se $\sup(S - T) < 0$, onde T é o lado direito de (3), então são válidas as mesmas conclusões do Teorema 2(b).*

Em [AdC] e [Xu] foi provado o seguinte resultado de rigidez:

Teorema A *Seja M^n uma subvariedade compacta e orientada de S^{n+1} , com curvatura*

média constante $H \neq 0$. Se $S \leq C(H)$ em M^n , onde $C(H)$ é dada por (4), então M^n é isométrica a uma esfera totalmente umbílica ou a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$.

Nosso próximo resultado, provado no Capítulo 4, dá uma versão topológica-geométrica do Teorema A, para qualquer codimensão.

Teorema 3 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+m}$ uma imersão isométrica, onde M^n é compacta. Se $S \leq C(H)$ em M^n , onde*

$$C(H) = n + \frac{n^3 H^2}{2(n-1)} - \frac{n(n-2)H}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)}, \quad (4)$$

então a curvatura de Ricci é não negativa e temos as possibilidades (a) e (b):

(a) $\pi_1(M)$ é finito. Neste caso temos:

(a1) Se $n = 2$, então M^2 é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$;

(a2) Se $n = 3$ e $\pi_1(M) = \{0\}$, então M^3 é difeomorfa a S^3 ;

(a3) Seja $n \geq 4$ e assumamos que $H \neq 0$ quando $S = C(H)$. Se M^n é orientável quando n é par, então M^n é homeomorfa a S^n .

(b) $\pi_1(M)$ é infinito. Neste caso, $S = C(H)$ em M^n e

(b1) Se $n = 2$, então M^2 é flat.

(b2) Se $n \geq 3$, assumamos que M^n é orientável. Então a codimensão m de f pode ser reduzida para 1, f tem curvatura média H constante e duas curvaturas principais constantes, μ_1 e μ_2 , tais que $\mu_1 \mu_2 = -1$. Além disso, M^n é isométrica a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$ em S^{n+1} , onde $c_1 = 1 + \mu_1^2$ e $c_2 = 1 + \mu_2^2$.

A condição $H \neq 0$ em (a3) é essencial, pois existe um toro $S_{c_1}^2 \times S_{c_2}^{n-2}$, $n \geq 4$, mínimo em S^{n+1} tal que $S = C(H) = n$. Quando M^n é uma subvariedade completa de S^{n+m} e $\sup(S - C(H)) < 0$, então M^n é necessariamente compacta. Nesse caso, se M^n , $n \neq 3$, é orientável, decorre do Teorema 3(a) que M^n é homeomorfa a S^n . Esse resultado foi obtido por Shiohama e Xu em [SX] e é consequência também do Corolário 2. Note que o “pinching” $C(H)$ para S no Teorema 3, depende de H e portanto depende de uma específica imersão. O “pinching” dependendo apenas de n foi obtido primeiramente por Lawson e Simons em [LS]. Eles provaram o seguinte

Teorema B *Seja M^n uma subvariedade compacta da esfera unitária S^{n+m} . Seja p um inteiro tal que $1 \leq p \leq n-1$. Se $S < \min(p(n-p), 2\sqrt{p(n-p)})$ em M^n então $H_p(M, Z) = H_{n-p}(M, Z) = \{0\}$. Além disso, se $n \geq 5$ e $S < 2\sqrt{n-1}$ em M^n , então M^n é homeomorfa a S^n .*

Recentemente Hou [Ho], melhorando um resultado devido a Yau [Y], provou o seguinte resultado de rigidez:

Teorema C *Seja M^n uma subvariedade compacta e orientada de S^{n+m} , com vetor curvatura média paralelo e não nulo. Suponha que $S \leq 2\sqrt{n-1}$ em M^n . Se $n \geq 8$ ou $m = 1, 2$, então M^n é isométrica a uma esfera totalmente umbílica ou a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$, onde $c_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ e $c_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.*

O Corolário 3 seguir, é uma extensão do Teorema B e dá uma versão topológica-geométrica para o Teorema C.

Corolário 3 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+m}$ uma imersão isométrica onde M^n é compacta.*

Suponha que $S \leq 2\sqrt{n-1}$ em M^n . Então a curvatura de Ricci de M^n é não negativa e temos apenas duas possibilidades (a) e (b):

(a) Existe um ponto $x \in M^n$ tal que $\text{Ric}(v) > 0$ para todo v unitário em $T_x M$. Neste caso, M^n admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva e

(a1) Se $n = 2$, então M^2 é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$;

(a2) Se $n = 3$, então M^3 é orientável com $H_2(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Além disso, se $\pi_1(M) = \{0\}$, então M^3 é difeomorfa a S^3 .

(a3) Se $n \geq 4$, assumamos que M^n é orientável quando n é par. Então M^n é homeomorfa a S^n .

(b) Para cada ponto $x \in M^n$, existe um vetor unitário $v \in T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Neste caso, $S = 2\sqrt{n-1}$ em M^n e

(b1) Se $n = 2$, então M^2 é flat e $H = 0$ em M^2 . Em particular, se $m = 1$ então M^2 é isométrica ao toro $S^1_2 \times S^1_2$.

Se $n \geq 3$, então $n^2 H^2 = n\sqrt{n-1} - 2(n-1)$ em M^n e a codimensão m de f pode ser reduzida para 1. Além disso, se M^n é orientável, então M^n é isométrica ao toro $S^1_{c_1} \times S^{n-1}_{c_2}$ em S^{n+1} , onde $c_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ e $c_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

O resultado (a1) foi obtido por Wei [W]. O resultado a seguir é consequência do Teorema B e mostra que é possível melhorar a estimativa do mesmo e do Corolário 3(a3), se acrescentarmos a hipótese (implícita no Teorema B e Corolário 3(a3)) de que M^n tem grupo fundamental finito.

Corolário 4 *Seja M^n , $n \geq 4$, uma subvariedade compacta de S^{n+m} tal que $S < 2\sqrt{2(n-2)}$ em M^n . Se M^n tem grupo fundamental finito e M^n é orientável quando n é par, então M^n é homeomorfa a S^n .*

O Corolário 4 é o melhor possível, pois existe um toro $S_{c_1}^2 \times S_{c_2}^{n-2}$, $n \geq 4$, em S^{n+1} tal que $S = 2\sqrt{2(n-2)}$. A classificação topológica das hipersuperfícies compactas e conformemente planas da esfera S^{n+1} foi obtida por do Carmo, Dajczer e Mercuri em [dCDM]. Em particular, usando argumentos similares aos da prova do Teorema 3, obtivemos o seguinte:

Corolário 5 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e orientada. Se M^n , $n \geq 4$, é conformemente plana e tem curvatura de Ricci não negativa, então M^n é difeomorfa a S^n ou isométrica a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$, $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$, com curvatura média H constante em S^{n+1} . Em particular, se $c_2 \geq \frac{n}{n-1}$ então $S = C(H)$ em M^n , onde $C(H)$ é dado por (4).*

Em [S], Santos estudou subvariedades compactas da esfera S_c^{n+m} , $m \geq 2$, que têm vetor curvatura média paralelo e que satisfazem à condição $S \leq C_0(H)$ em M^n , onde $C_0(H)$ é dado por (5). Em particular, o Teorema D abaixo (para $m \geq 2$), foi obtido por Santos.

Teorema D *Seja M^n uma subvariedade compacta, orientada e imersa isometricamente em S_c^{n+m} . Suponha que a imersão tem vetor curvatura média paralelo não nulo e que $R^\perp = 0$. Se $S \leq C_0(H)$ em M^n , onde $C_0(H)$ é dado por (5), então M^n é uma esfera totalmente umbílica ou existe H_0 , $0 \leq H_0 < H$, tal que M^n é e um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1} \subset S_{c+H_0}^{n+1}$,*

onde $S_{c+H_0^2}^{n+1}$ é uma esfera umbílica em S_c^{n+m} , $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c+H_0^2}$ e $c_2 = H^2 - H_0^2$.

O Teorema 4 a seguir (vide prova no Capítulo 5) dá uma versão topológica-geométrica para o Teorema D. Em particular, consideramos também o caso Euclidiano.

Teorema 4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$, $m \geq 2$, $c = 0, 1$, uma imersão isométrica onde M^n é compacta. Se $S \leq C_0(H)$ em M^n , onde*

$$C_0(H) = nc + 2nH^2 - \frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}, \quad (5)$$

então M^n tem curvatura de Ricci não negativa e temos as possibilidades (a) e (b):

(a) $\pi_1(M)$ é finito. Neste caso, temos:

(a1) *Se $n = 2$, então M^2 é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$;*

(a2) *Se $n = 3$ e $\pi_1(M) = \{0\}$, então M^3 é difeomorfa a S^3 ;*

(a3) *Se $n \geq 4$, assuma que $H \neq 0$ quando $S = C_0(H)$ e que M^n é orientável quando n é par. Então M^n é homeomorfa a S^n .*

(b) $\pi_1(M)$ é infinito. Neste caso, $S = C_0(H)$ em M^n e

(b1) *Se $n = 2$, então M^2 é flat;*

(b2) *Se $n \geq 3$, então $R^\perp = 0$, $\dim N_1 \leq 2$. f é quase-umbílica e temos apenas duas possibilidades (i) e (ii):*

(i) *$H = 0$ em M^n . Neste caso, M^n é isométrica ao toro de Clifford $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$ em S^{n+1} .*

(ii) Para todo x em M^n , $H(x) \neq 0$. Neste caso, $\widetilde{M}^n = \mathbb{R} \times S_{c_2}^{n-1}$, M^n é localmente isométrica a $M_1 \times M_{c_2}^{n-1}$, onde $\dim M_1 = 1$ e $M_{c_2}^{n-1}$ é uma variedade com curvatura seccional constante $c_2 > 0$. Assuma agora que M^n é orientável. Se $\dim N_1 = 1$, ou $m = 2$ e H é constante, ou N_1 é um subfibrado paralelo e H é constante, ou f tem vetor curvatura média paralelo, então M^n é isométrica a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1} \subset S_{c+H_0^2}^{n+1}$, onde $S_{c+H_0^2}^{n+1}$ é umbílica ou totalmente geodésica em Q_c^{n+m} , $c_2 = H^2 - H_0^2$, $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c+H_0^2}$ e $0 \leq H_0 < H$.

A partir de agora passaremos a estudar subvariedades de Einstein de uma forma espacial. As hipersuperfícies de Einstein em Q_c^{n+1} foram completamente classificadas (veja [R]). Entretanto, poucos resultados são conhecidos sobre essas subvariedades em codimensão dois. Por exemplo, em [M] foi mostrado que tais subvariedades, quando mínimas, devem ter segunda forma fundamental paralela. Em [ACN] foram classificadas as subvariedades compactas homogêneas e de Einstein em $\mathbb{R}^{n+2}$. Com relação a esse tema, obtivemos o Teorema 5, a ser provado no Capítulo 6.

Teorema 5 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+2}$, $c \geq 0$, uma imersão isométrica, onde M^n , $n \geq 4$, é uma variedade de Einstein completa com curvatura de Ricci ρ e suponha que*

$$\rho \geq \begin{cases} 2H^2 + 3c, & n = 4, \\ \frac{n(n-2)H^2}{n-1} + (n-1)c, & n \geq 5 \end{cases} \quad (6)$$

em M^n .

(a) *Se $c = 0$ e $n = 4$, então M^4 é isométrica a um plano totalmente geodésico, a uma esfera $S_{c_1}^4$ ou isométrica ao produto de duas esferas $S_{c_2}^2 \times S_{c_2}^2$. Além disso, no último*

caso, f tem vetor curvatura média paralelo, $c_2 = 2H^2$ e f pode ser vista como uma imersão mínima de M^4 em $S_{c_3}^5$, onde $S_{c_3}^5$ é uma esfera umbílica em $\mathbb{R}^6$.

- (b) Se $c > 0$ e $n = 4$, assuma que M^4 é orientável. Então M^4 é isométrica a uma esfera $S_{c_1}^4$.
- (c) Se $c = 0$ e $n \geq 5$, então M^n é isométrica a um plano totalmente geodésico ou a uma esfera $S_{c_1}^n$.
- (d) Se $c > 0$ e $n \geq 5$, assuma que M^n é orientável quando n é par. Então M^n é isométrica a uma esfera $S_{c_1}^n$.

Quando M^n não é necessariamente uma variedade de Einstein, o Corolário 5 a seguir dá uma versão topológica para o Teorema 5.

Corolário 5 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 4$, uma imersão isométrica onde M^n é completa. Denote por ρ_o o ínfimo das curvaturas de Ricci de M^n . Se ρ_o satisfaz (6) em M^n , então a curvatura seccional de M^n é não-negativa e apenas um dos dois casos (a) e (b) pode ocorrer:*

- (a) *Existe um ponto $x \in M^n$ tal que todas as curvaturas seccionais de M^n são positivas. Neste caso, M^n é homeomorfa a S^n .*
- (b) *Para todo ponto $x \in M^n$, existe uma curvatura seccional que se anula neste ponto. Neste caso temos:*
 - (b1) *Se $n = 4$, então $\rho_o \equiv 2H^2$ em M^4 , M^4 é isométrica a um plano totalmente geodésico ou a um produto de duas esferas $S_{c_2}^2 \times S_{c_2}^2$, onde $c_2 = 2H^2$. Além*

disso, no último caso, f pode ser vista como uma imersão mínima de M^4 em $S_{c_3}^5$, onde $S_{c_3}^5$ é uma esfera totalmente umbílica em $\mathbb{R}^6$.

(b2) Se $n \geq 5$, então M^n é isométrica a um plano totalmente geodésico.

Para $n = 4$ e codimensões superiores a dois, temos o Corolário 6 a seguir, que é consequência do Teorema 2.

Corolário 6 *Seja $f : M^4 \rightarrow Q_c^{4+m}$, $c \geq 0$, uma imersão isométrica, onde M^4 é compacta e orientável. Denote por ρ_o o ínfimo das curvaturas de Ricci de M^4 . Se $\rho_o > 2H^2 + 2c$ em M^4 , então M^4 é homeomorfa a S^4 .*

O resultado do Corolário 6 é o melhor possível no sentido de que existe uma imersão de $S_{2H^2}^2 \times S_{2H^2}^2$ em $\mathbb{R}^6$ tal que $\rho_o = 2H^2$. Para isso, considere o toro de Clifford $S_{c_2}^2 \times S_{c_2}^2$, mínimo em S^5 e depois componha essa imersão com a imersão umbílica de S^5 em $\mathbb{R}^6$. É importante observar também, com relação aos Corolários 4 e 5, que $\rho_o \leq (n-1)(H^2 + c)$ em todos os pontos de M^n .

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo reuniremos algumas definições e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Variedades Riemannianas - conceitos básicos

Seja $(M = M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana conexa, n -dimensional com métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ tangentes a M e por TM o seu fibrado tangente. Para cada $x \in M^n$, $T_x M$ denotará o espaço tangente a M^n em x . A conexão Riemanniana de M será denotada por ∇ . A **curvatura** R de M^n é a correspondência que associa a cada par X, Y em $\mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$ e $[X, Y]$ é o colchete de Lie de X e Y .

O **tensor de curvatura** de M^n é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Sejam agora $x \in M^n$ e $\Pi \subset T_x M$ um subespaço bidimensional de $T_x M$. Seja $\{v, w\}$ uma base de Π .

A **curvatura seccional** de Π em x é dada por

$$K(\Pi) = \frac{R(v, w, w, v)}{\|v \wedge w\|^2}, \quad \|v \wedge w\|^2 = \|w\|^2\|v\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \quad (1.1)$$

O **tensor de Ricci** em x é dado por

$$\text{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^n \langle R(v_i, v)w, v_i \rangle, \quad (1.2)$$

onde $\{v_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_x M$.

A **curvatura de Ricci**, $\text{Ric}(v)$, na direção v é definida como

$$\text{Ric}(v) = \langle Qv, v \rangle, \quad (1.3)$$

onde $Q : T_x M \rightarrow T_x M$ é a aplicação linear simétrica dada por

$$\langle Qv, w \rangle = \text{Ric}(v, w), \quad v, w \in T_x M. \quad (1.4)$$

Uma variedade Riemanniana M^n , $n \geq 3$, é chamada de **variedade de Einstein** se a curvatura de Ricci em cada ponto de M^n é constante.

A **curvatura escalar** de M^n em x é dada por

$$\tau = \text{tr}Q. \quad (1.5)$$

Uma variedade Riemanniana M^n é (localmente) **conformemente plana** quando em cada ponto de M^n existe uma vizinhança que é conformemente difeomorfa a um aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Quando $n = 3$, temos a seguinte caracterização dessas variedades:

Teorema 1.1.1 *Seja M^3 uma variedade Riemanniana. Para cada $x \in M^3$ denote por $\gamma : T_x M \rightarrow T_x M$ o operador dado por $\gamma(X) = QX - \frac{\tau}{4}X$, onde Q é dado por (1.4) e τ é a curvatura escalar de M^n em x . Então M^3 é conformemente plana se e somente se γ satisfaz a $(\nabla_X \gamma)(Y) = (\nabla_Y \gamma)(X)$.*

1.2 Imersões isométricas - equações fundamentais

Sejam $M = M^n$, $n \geq 2$ e Q_c^{n+m} , $m \geq 1$, variedades Riemanniana conexas, onde Q_c^{n+m} é simplesmente conexa, $(n+m)$ -dimensional, com curvatura seccional constante c . Denotemos por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de M^n e Q_c^{n+m} , respectivamente.

Se $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$ é uma imersão isométrica, denotaremos por $TM^\perp$ e $\nabla^\perp$ o fibrado normal e a conexão normal de f , respectivamente. O conjunto das secções de $TM^\perp$ será denotado por $\mathcal{X}(M)^\perp$.

Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^\perp$, temos as fórmulas de Gauss e de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad (1.6)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \bar{\nabla}_X^\perp \xi, \quad (1.7)$$

respectivamente, onde $\alpha : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ é a segunda forma fundamental de f e A_ξ é o operador de Weingarten na direção ξ , definido por

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle. \quad (1.8)$$

Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, $\xi \in \mathcal{X}(M)^\perp$, temos:

Equação de Gauss

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) + \\ & + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Equação de Codazzi

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \quad (1.10)$$

Equação de Ricci

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y), \quad (1.11)$$

onde $R^\perp$ é o tensor de curvatura normal da imersão e

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z), \quad (1.12)$$

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi. \quad (1.13)$$

Sejam agora $x \in M^n$ e $\{\xi_\beta\}_{\beta=1}^m$ uma base ortonormal de $(T_x M)^\perp$. O primeiro espaço normal de f em x é dado por

$$N_1(x) = \alpha(T_x M \times T_x M) \subset (T_x M)^\perp. \quad (1.14)$$

O vetor curvatura média de f em x e sua norma são definidos por

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^m (\text{tr } A_{\xi_\beta}) \xi_\beta \quad (1.15)$$

e $H = \|\vec{H}\|$.

O quadrado da norma da segunda forma fundamental de f em x é dado por

$$S = \sum_{\beta=1}^m \text{tr} A_{\xi_\beta}^2. \quad (1.16)$$

Seguem-se da equação de Gauss as seguintes relações:

$$\sum_{\beta=1}^m A_{\xi_\beta}^2 - \sum_{\beta=1}^m (\text{tr} A_{\xi_\beta}) A_{\xi_\beta} = -Q + (n-1)cI, \quad (1.17)$$

$$S = -\tau + n^2 H^2 + n(n-1)c, \quad (1.18)$$

onde $I : T_x M \rightarrow T_x M$ é a aplicação identidade e Q é dado por (1.4).

Daremos agora uma caracterização de subvariedades conformemente planas em termos de quase-umbilicidade. Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$ é **quase-umbílica** em x se existe um referencial ortonormal $\{\xi_\beta\}_{\beta=1}^m$ em $(T_x M)^\perp$ tal que cada operador de Weingarten A_{ξ_β} na direção ξ_β possui um autovalor de multiplicidade no mínimo igual a $n-1$. Dizemos que f é **quase-umbílica** se f é quase umbílica em todos os pontos de M^n . A prova do Teorema 1.2.1 a seguir pode ser encontrada em [D., Teorema 7.11] e [C1, Chap. 5] respectivamente.

Teorema 1.2.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$ uma imersão isométrica.*

- (a) *Se $n \geq 4$, $m = 1$ e M^n é conformemente plana, então f é quase-umbílica.*
- (b) *Se $n \geq 4$ e f é quase-umbílica, então M^n é conformemente plana. Também, se $n = 3$, $m = 1$ e f é quase-umbílica, então M^3 é conformemente plana.*

1.3 Conceitos básicos de topologia algébrica. Teorema dos coeficientes universais. Dualidade de Poincaré. Conjectura de Poincaré

Uma boa referência para este parágrafo é [B]. Aqui, $M = M^n$ denotará uma variedade conexa e compacta. $H_i(M, Z)$ e $H^i(M, Z)$, $i \in Z$, denotarão os grupos de homologia e cohomologia de M^n com coeficientes inteiros. Esses grupos são abelianos, finitamente gerados e portanto

$$H_i(M, Z) \cong F_i \oplus T_i, \quad H^i(M, Z) \cong F^i \oplus T^i,$$

onde $F_i \cong F^i \cong Z \oplus \cdots \oplus Z$ (b_i vezes). F_i e F^i são chamados de partes livres de $H_i(M, Z)$ e $H^i(M, Z)$, respectivamente. O inteiro b_i é chamado de i -ésimo número de Betti de M^n . T_i e T^i são grupos finitos, chamados de subgrupos de torção de $H_i(M, Z)$ e $H^i(M, Z)$, respectivamente.

Enunciaremos agora alguns fatos básicos a respeito desses grupos.

(R1) Se $i < 0$ ou $i > n$, então $H_i(M, Z) \cong H^i(M, Z) \cong \{0\}$.

(R2) $H_0(M, Z) \cong H^0(M, Z) \cong Z$, $T^1 \cong T_0 \cong \{0\}$.

(R3) Se M^n é orientável, então $H_n(M, Z) \cong Z$.

Se M^n é não orientável, então $H_n(M, Z) \cong \{0\}$.

(R4) $H_1(M, Z) \cong \pi_1(M)/[\pi_1, \pi_1]$, onde $\pi_1(M)$ é o grupo fundamental de M^n e $[\pi_1, \pi_1]$ é o subgrupo dos comutadores de $\pi_1(M)$.

(R5) (Teorema dos coeficientes universais)

$$F^i \cong F_i, \quad T^i \cong T_{i-1}, \quad \text{para todo } i.$$

(R6) (Dualidade de Poincaré)

Se M^n é orientável, então

$$H^i(M, Z) \cong H_{n-i}(M, Z), \text{ para todo } i.$$

(R7) Seja M^n , $n \geq 4$, uma variedade compacta e simplesmente conexa. Se $H_i(M, Z) = \{0\}$, para $i = 1, \dots, n-1$, então M^n é homeomorfa à esfera S^n .

O resultado (R7) é uma versão da conjectura generalizada de Poincaré e foi provado por Smale para $n \geq 5$ e por Friedman para $n = 4$.

Provaremos agora um lema que é essencial para os nossos resultados.

Lema 1.3.1 *Seja M^n , $n \geq 4$, uma variedade conexa, compacta, n -dimensional tal que M^n é orientável quando n é par. Seja $\widetilde{M}^n$ o recobrimento universal de M^n . Se $\pi_1(M)$ é finito e $H_i(\widetilde{M}, Z) \cong H_i(M, Z) = \{0\}$, para $i = 2, \dots, n-2$, então M^n é homeomorfa a S^n .*

Prova: Mostraremos inicialmente que M^n é orientável quando n é ímpar. De fato, suponha que M^n é não orientável. Como n é ímpar, é um fato que a característica de Euler de M^n , $\chi(M) = 0$. Pelo resultado (R3), $H_n(M, Z) = \{0\}$ e portanto o n -ésimo número de Betti de M^n , $b_n = 0$. Usando (R2), vemos que $b_0 = 1$. Também, como $\pi_1(M)$ é finito, segue de (R4) que $H_1(M, Z)$ é finito e portanto $b_1 = 0$. Dessa forma, temos que $b_0 = 1$ e $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_{n-2} = b_n = 0$. Mas a característica de Euler de M^n é dada por

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + \dots + b_{n-1} - b_n = 1 + b_{n-1} > 0,$$

o que é uma contradição. Assumiremos portanto que M^n é sempre orientável. Agora, como $H_1(M, Z)$ é finito, o subgrupo de torção T_1 é isomorfo a $H_1(M, Z)$. Pelo teorema dos coeficientes universais (R5), temos que $H^{n-1}(M, Z) \cong F_{n-1}$.

Pela dualidade de Poincaré (R6), temos que

$$H_1(M, Z) \cong H^{n-1}(M, Z).$$

Assim, $H_1(M, Z) \cong T_1 \cong F_{n-1}$. Mas T_1 é finito e portanto $F_{n-1} = \{0\}$. Também, $H_1(M, Z) = T_1 = \{0\}$. Usando novamente (R5), temos que $T_{n-1} \cong T^n$. Aplicando (R3) a T^n , obtemos que $T_{n-1} = \{0\}$. Dessa forma, temos que $H_{n-1}(M, Z) = \{0\}$. Aplicando os mesmos argumentos anteriores a $\widetilde{M}$, concluímos que $H_i(\widetilde{M}, Z) = \{0\}$, $i = 1, \dots, n-1$. Desde que $\widetilde{M}^n$ é simplesmente conexa, segue da solução da conjectura generalizada de Poincaré (R7) que $\widetilde{M}$ é homeomorfa a S^n .

Temos então uma variedade compacta M^n , $n \geq 4$, com $H_i(M, Z) = \{0\}$, para $i = 1, \dots, n-1$ e tal que $\widetilde{M}$ é homeomorfa a S^n . Por um teorema devido a Sjerve [Sj], $\pi_1(M) = \{0\}$. Usando novamente a solução da conjectura generalizada de Poincaré (R6) para M^n , concluímos que M^n é homeomorfa a S^n . Isso encerra a demonstração.

1.4 Correntes mínimas estáveis

Seja $M = M^n$ uma variedade Riemanniana. Sejam p um inteiro tal que $1 \leq p \leq n-1$ e h^p a medida de Hausdorff p -dimensional em M . Um subconjunto S de M^n é **p -retificável** se (a menos de um conjunto de h^p -medida nula) S é união disjunta de subvariedades p -dimensionais S_k de M^n , $S = \bigcup_{k \geq 1} S_k$.

Em particular, para quase todo $x \in S$ (relativamente a h^p) existe um espaço tangente $T_x S \subset T_x M$. O subespaço tangente $T_x S$ determina dois p -vetores simples unitários $\zeta_x =$

$\pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_p \in \wedge^p T_x M$, onde $\{e_i\}_{i=1}^p$ é uma base ortonormal de $T_x S$. A escolha de um sinal em ζ_x nos dá uma orientação para S em x .

Um **conjunto orientado p -retificável** em M^n é um par $\vec{S} = (S, \zeta)$, onde S é um subconjunto p -retificável de M e $\zeta : S \rightarrow \wedge^p T M$ é uma secção h^p -mensurável do p -produto exterior de $T M$ tal que em quase todos os pontos de S , $\zeta(x) = \zeta_x$ é um vetor simples unitário que representa $T_x S$.

Seja agora $\wedge^p M$ o conjunto das p -formas diferenciais em M^n . Podemos identificar $\vec{S} = (S, \zeta)$ com o funcional linear $\vec{S} : \wedge^p M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\vec{S}(\omega) = \int_S \omega(\zeta_x) dh^p(x).$$

$\vec{S}$ torna-se um funcional linear contínuo, se em $\wedge^p M$ colocarmos a norma do supremo

$$\|\omega\| = \sup\{\|\omega_x\| : x \in M^n\}.$$

A norma dual, ou **massa**, satisfaz

$$M(\vec{S}) = \sup\{\vec{S}(\omega); \|\omega\| \leq 1\} = h^p(S).$$

Definimos o conjunto $R_p(M)$ das **correntes p -retificáveis** sobre M^n como sendo

$$R_p(M) = \left\{ \vec{S} = \sum_{j=1}^{\infty} j \vec{S}_j; \vec{S}_j = (S_j, \zeta_j) \text{ e } M(\vec{S}) = \sum_{j=1}^{\infty} j h^p(S_j) < \infty \right\}.$$

Consideremos agora M^n compacta. Sejam $\vec{S} \in R_p(M)$, V um campo vetorial sobre M^n e $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, o grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerado por V .

Para cada $t \in \mathbb{R}$, temos um p -corrente retificável, $\varphi_{t*}(\vec{S})$ dada por

$$\varphi_{t*}(\vec{S})(\omega) = \vec{S}(\varphi_t^*(\omega)),$$

onde $\varphi^* : \wedge^p M \rightarrow \wedge^p M$ é o **pullback** das formas induzidas por φ .

Um p -corrente $\vec{S} \in R_p(M)$ é chamada de **mínima estável** se para todo campo V em M , $\exists \varepsilon > 0$, tal que

$$M(\varphi_{t*}\vec{S}) \geq M(\vec{S}), \quad |t| < \varepsilon.$$

Em particular, neste caso, temos que

$$\frac{d}{dt}M(\varphi_{t*}\vec{S}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2}M(\varphi_{t*}\vec{S}) \geq 0.$$

Um teorema devido a Federer e Fleming [FF], assegura que se M^n é compacta e o grupo $H_p(M, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$, para algum p , então existe pelo menos uma p -corrente mínima estável em M^n .

Lawson e Simons [LS] calcularam $\frac{d^2}{dt^2}M(\varphi_{t*}\vec{S})$ para subvariedades compactas M^n da esfera S^{n+m} , usando como V o gradiente de uma função altura em M^n . A partir dessa expressão e do resultado de [FF], Lawson e Simons [LS], e mais tarde Xin [Xi] e Leung [Le2] (para subvariedades compactas de $\mathbb{R}^{n+m}$) obtiveram o Teorema 1.4.1 a seguir, que é essencial neste trabalho.

Teorema 1.4.1 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+m}$ uma imersão isométrica, onde M^n é compacta e $c \geq 0$. Sejam p, q inteiros positivos tais que $p + q = n$. Suponha que em cada ponto x de M^n e para todas as bases ortonormais $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ de $T_x M$ temos que*

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n \left[2\|\alpha(v_i, v_k)\|^2 - \langle \alpha(v_i, v_i), \alpha(v_k, v_k) \rangle \right] < pqc. \quad (1.19)$$

Então $H_p(M, \mathbb{Z}) = H_q(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Além disso, se $p = 1$, então $\pi_1(M) = \{0\}$.

Na prova de Lawson e Simons, a condição (1.19) implica em particular que

$$\frac{d^2}{dt^2}M(\varphi_{t*}\vec{S}) < 0$$

para um determinado campo vetorial V , onde $\vec{S}$ é uma p -corrente mínima. Portanto, neste caso, $\vec{S}$ não pode ser estável e decorre então do teorema de Federer e Fleming que $H_p(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

Capítulo 2

Uma estimativa para a curvatura de Ricci de subvariedades

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 1 e o Corolário 1 citados na introdução. Para isso, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.0.2 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 2$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e respectiva norma $\| \cdot \|$. Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear simétrica e seja H tal que $\text{tr}A = nH$ e autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.*

(a) *Se $v \in V$, $\|v\| = 1$, então*

$$\langle A^2 v, v \rangle \leq \left(\frac{n-1}{n} \right) [\text{tr}A^2 - nH^2] + 2H\langle Av, v \rangle - H^2.$$

(b) *Seja $n \geq 3$. Se a igualdade em (a) ocorre para algum v unitário, então $Av = \lambda_j v$, para algum j , onde λ_j tem multiplicidade 1 ou n . Além disso, se w é ortogonal a v , então $Aw = \lambda_k w$, para algum k , onde λ_k tem multiplicidade no mínimo igual a $n-1$.*

(c) *Se $v \in V$, $\|v\| = 1$, então*

$$\langle Av, v \rangle \geq \lambda_1 \geq H - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n} \right) [\text{tr}A^2 - nH^2]}.$$

Além disso, se $\lambda_1 = H - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right) [\text{tr}A^2 - nH^2]}$, então $\lambda_i = \lambda_2$, para todo $i \geq 2$.

Prova: Seja $\{v_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de V tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(a) Assuma inicialmente que $\text{tr}A = nH = 0$ e seja λ_j tal que

$$\lambda_j^2 = \max_i \{\lambda_i^2\}. \quad (2.1)$$

Desde que $\text{tr}A = 0$, é claro que

$$\lambda_j^2 = \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \quad (2.2)$$

e

$$\lambda_j^2 \leq \left(\frac{n-1}{n} \right) \text{tr}A^2.$$

Seja $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Segue de (2.1) e (2.2) que

$$\langle A^2 v, v \rangle \leq \lambda_j^2 \leq \left(\frac{n-1}{n} \right) \text{tr}A^2, \quad (2.3)$$

o que prova (a) para o caso em que $H = 0$.

Suponha agora que $\text{tr}A = nH \neq 0$ e faça $B = A - HI$, onde $I : V \rightarrow V$ é a aplicação identidade. É fácil ver que $\text{tr}B = 0$, $B^2 = A^2 - 2HA + H^2I$ e $\text{tr}B^2 = \text{tr}A^2 - nH^2$. Aplicando o caso anterior à B , obtemos (a) imediatamente para $H \neq 0$.

(b) Seja $n \geq 3$ e assuma inicialmente que $\text{tr}A = nH = 0$. Seja v um vetor unitário tal que $\langle A^2 v, v \rangle = \left(\frac{n-1}{n} \right) \text{tr}A^2$. Usando (2.3), obtemos que $\langle A^2 v, v \rangle = \lambda_j^2 = \left(\frac{n-1}{n} \right) \text{tr}A^2$. Como (2.2) também é uma igualdade, concluímos que existe k tal que $\lambda_i = \lambda_k$, para todo $i \neq j$. Sejam λ_j e λ_k os dois possivelmente únicos autovalores de A . Temos então três casos apenas:

(caso 1) $\lambda_j = \lambda_k$. Neste caso é óbvio que $Av = \lambda_j v$;

(caso 2) $\lambda_j = -\lambda_k$. Como $n \geq 3$ e $\text{tr}A = 0$ é fácil ver que $\lambda_i = 0$ para todo i e que $Av = 0.v = 0$;

(caso 3) $\lambda_j^2 \neq \lambda_k^2$. Assuma que $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Como $\langle A^2 v, v \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^2 = \lambda_j^2$, então $\sum_{i=1}^n a_i^2 (\lambda_i^2 - \lambda_k^2) = 0$. Usando (2.1), vemos que $a_i = 0$, para todo $i \neq k$. Em particular, como $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, temos que $a_k = \pm 1$ e $Av = \lambda_k v$.

Em qualquer dos três casos acima, fica provada a primeira parte de (a) para o caso em que $H = 0$. Se $H \neq 0$, faça $B = A - HI$ e aplique o caso anterior à B . Para a segunda parte de (b), seja w ortogonal a v . Pelo que foi exposto acima, podemos escrever $w = \sum_{i \neq j} b_i v_i$ onde $Aw = \lambda_k w$. Isso prova a segunda parte de (b).

(c) Seja $v \in V$, $\|v\| = 1$. É claro que $\langle Av, v \rangle \geq \lambda_1$. Suponha inicialmente que $H = 0$. Desde que $\lambda_1 \leq 0$, fazendo $v = v_1$ em (a), concluímos que $\lambda_1 \geq -\sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right) \text{tr}A^2}$, o que prova a primeira parte de (c) para $H = 0$.

Se $H \neq 0$, faça $B = A - HI$ e escolha $v = v_1$ em (a), para B . Desde que $\lambda_1 \geq H$, o resultado em (c) segue imediatamente.

Seja agora $\lambda_1 = H - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right) [\text{tr}A^2 - nH^2]}$ e assumamos inicialmente que $H = 0$. É óbvio que $\lambda_1^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \text{tr}A^2$. Por outro lado, $\lambda_1^2 \leq \lambda_j^2 \leq \left(\frac{n-1}{n}\right) \text{tr}A^2$, onde λ_j é dado por (2.1) e portanto $\lambda_1^2 = \lambda_j^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \text{tr}A^2$. Como (2.2) também é uma igualdade, concluímos que $\lambda_i = \lambda_2$ para $i \geq 2$. Se $H \neq 0$, faça $B = A - HI$. Usando o fato de que $\lambda_1 \leq H$, é só aplicar o caso anterior à B , para a prova definitiva de (c).

Prova do Teorema 1 Sejam $x \in M^n$, $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. Seja $\{\xi_\beta\}_{\beta=1}^m$ uma base ortonormal qualquer de $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \frac{\vec{H}}{H}$, quando $H(x) \neq 0$. Se $\vec{H}(x) \neq 0$, denote

por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ os autovalores de A_{ξ_1} e se $H(x) = 0$, faça $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Com isso, temos que $\text{tr} A_{\xi_1} = nH$ e $\text{tr} A_{\xi_\beta} = 0$, para $\beta = 2, \dots, m$. Levando esses valores em (1.17) e tendo em conta (1.3), obtemos que

$$-\text{Ric}(v) + (n-1)c = \sum_{\beta=2}^m \langle A_{\xi_\beta}^2 v, v \rangle + \langle A_{\xi_1}^2 v, v \rangle - nH \langle A_{\xi_1} v, v \rangle. \quad (2.4)$$

Agora, aplicando o Lema 2.0.2(a) para cada A_{ξ_β} em (2.4), obtemos facilmente (1).

Para (a), seja $n \geq 3$ e suponha que em (1) ocorre uma igualdade para algum v unitário em $T_x M$. Combinando essa igualdade em (1) com (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=2}^m \left[\left(\langle A_{\xi_\beta}^2 v, v \rangle - \left(\frac{n-1}{n} \right) \text{tr} A_{\xi_\beta}^2 \right) + \left(\langle A_{\xi_1}^2 v, v \rangle \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{n-1}{n} \right) (\text{tr} A_{\xi_1}^2 - nH^2) - 2H \langle A_{\xi_1} v, v \rangle - H^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Levando em conta o Lema 2.0.2(a) e (2.5) concluimos que $\langle A_{\xi_\beta}^2 v, v \rangle = \frac{n-1}{n} \text{tr} A_{\xi_\beta}^2$, $\beta \geq 2$ e que $\langle A_{\xi_1}^2 v, v \rangle = \frac{n-1}{n} (\text{tr} A_{\xi_1}^2 - nH^2) + 2H \langle A_{\xi_1} v, v \rangle + H^2$. Aplicando agora o Lema 2.0.2(b) a cada A_{ξ_β} , concluimos que para todo $\beta \geq 1$, A_{ξ_β} admite um autovalor de multiplicidade no mínimo igual a $n-1$. Isso mostra que f é quase-umbílica em x . Por outro lado, desde que v é autovetor para todo A_{ξ_β} , decorre do Lema 2.0.2(b) que existe uma base de autovetores que diagonaliza todos os A_{ξ_β} e portanto, $R_x^\perp = 0$.

Seja agora $v_1, v_2, \dots, v_n$ uma base ortonormal de $T_x M$ tal que

$$\begin{aligned} A_{\xi_\beta} v_i &= \lambda_\beta v_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad \beta = 1, \dots, m, \quad \text{e} \\ A_{\xi_\beta} v_1 &= \mu_\beta v_1, \quad \beta = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Sabemos que o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é gerado por $\alpha(v_i, v_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Também, se $i \geq 2$, temos que $\alpha(v_i, v_i) = \sum_{\beta=1}^m \lambda_\beta \xi_\beta = \xi$ e se $i = 1$, temos que $\alpha(v_1, v_1) = \sum_{\beta=1}^m \mu_\beta \xi_\beta = \xi_0$.

Isso prova que a dimensão de $N_1(x)$ é no máximo igual a 2. Em particular, se $H(x) = 0$, então $(n-1)\lambda_\beta + \mu_\beta = \text{tr} A_{\xi_\beta} = 0$ para $\beta = 1, \dots, m$. Portanto, neste caso, a dimensão de $N_1(x)$ é no máximo igual a 1. Isso encerra a prova de (a1).

Para (a2), seja $\xi \in (T_x M)^\perp$ unitário. Suponha inicialmente que $H(x) = 0$. Usando os mesmos argumentos da prova de (a1) e o Lema 2.0.2 (b), é fácil ver que $A_\xi v = \mu v$, onde μ tem multiplicidade 1 ou n . Se $H(x) \neq 0$ e $\xi = \xi_1 = \vec{H}/H$, pelo mesmo motivo acima exposto, $A_{\xi_1} v = \mu v$, onde μ tem multiplicidade 1 ou n . Também, se $H(x) \neq 0$ e $\xi \perp \xi_1$ então A_ξ tem a mesma propriedade de A_{ξ_1} com respeito a v . Em geral, podemos escrever sempre $\xi = \sum_{\beta=1}^m c_\beta \xi_\beta$, onde $\xi_1, \dots, \xi_m$ é uma base ortonormal de $(T_x M)^\perp$ e $\xi_1 = \vec{H}/H$ se $H(x) \neq 0$. Agora, aplicando os casos anteriores à cada A_{ξ_β} , obtemos (a2) para o caso genérico. Seja agora $w \perp v$. Decorre também do Lema 2.0.2 e dos mesmos argumentos anteriores que $A_\xi w = \lambda w$, onde λ tem multiplicidade no mínimo igual a $n-1$.

Para (b), seja $n \geq 3$ e suponha que (1) é uma igualdade em M^n . Pelo resultado em (a1), f é quase-umbílica. Se $n \geq 4$, segue do Teorema 1.2.1(b) que M^n é conformemente plana. Seja agora $n = 3$. Devemos mostrar que $(\nabla_X \gamma)(Y) = (\nabla_Y \gamma)(X)$, onde $\gamma(X) = Q(X) - \frac{\tau}{4}X$ é dado como no Teorema 1.1.1. Dado $x \in M^3$, desde que $\mathbb{R}^\perp = 0$, existe um aberto conexo V em M^3 onde está definido um referencial local ortonormal $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathcal{X}(M)^\perp$ tal que $\nabla^\perp \xi_\beta = 0$, $\beta \geq 1$. Devido ao Teorema 1(a), existe uma base ortonormal X_1, X_2, X_3 em $T_x M$ tal que $A_{\xi_\beta} X_1 = \mu_\beta X_1$ e $A_{\xi_\beta} X_i = \lambda_\beta X_i$, $\beta \geq 1$ e $i = 2, 3$. Usando (1.17), e notando que $\text{tr} A_{\xi_\beta} = \mu_\beta + 2\lambda_\beta$ e $\tau = \text{Ric}(X_1) + 2\text{Ric}(X_i)$, $i = 2, 3$, obtemos que $\text{Ric}(X_1) = 2c + 2 \sum_{\beta \geq 1} \lambda_\beta \mu_\beta$ e $\text{Ric}(X_i) = 2c + \sum_{\beta \geq 1} (\lambda_\beta \mu_\beta + \lambda_\beta^2)$. Levando esses valores na expressão de γ , temos que

$$\gamma(X_1) = (c/2 + \sum_{\beta \geq 1} \lambda_\beta (\mu_\beta - \lambda_\beta/2)) X_1,$$

$$\gamma(X_i) = (c/2 + 1/2 \sum_{\beta \geq 1} \lambda_\beta^2) X_i,$$

donde concluimos que $\gamma = (c/2)I + \sum_{\beta \geq 1} \lambda_\beta (A_{\xi_\beta} - \frac{\lambda_\beta I}{2})$. Suponha que $m = 1$ e sejam os dois conjuntos $A = \{y \in V : \lambda_1 = \mu_1\}$ e $B = \{y \in V : \lambda_1 \neq \mu_1\}$. É claro que $\text{int}(A) \cup B$ é aberto e denso em V e em particular, nesse conjunto, as funções λ_1 e μ_1 são diferenciáveis (no caso m geral, é necessário considerar 2^m de tais conjuntos). Usando a equação de Codazzi para cada A_{ξ_β} em $\text{int}(A) \cup B$, obtemos que γ satisfaz a equação de Codazzi em $\text{int}(A) \cup B$ e, portanto, em V . Sejam agora $n \geq 3$, M^n compacta e $c \geq 0$. Por (a1) e por um resultado devido a Moore (v. Theorem 7.13 [D]) concluimos que $H_i(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$ para $i = 2, \dots, n-2$.

Prova do Corolário 1 Seja M^n uma subvariedade compacta e mínima de S^{n+m} . Suponha que $n \geq 3$ e $S \leq n$ em M^n . Usando (1), vemos que M^n tem curvatura de Ricci não negativa. Afirmamos que para cada x em M^n existe um vetor unitário $v \in T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. De fato, se isso não ocorre, então segue de um teorema devido a Aubin [A, p.397] que M^n admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Neste caso, pelo teorema de Bonnet-Myers, $\pi_1(M)$ é finito, o que contradiz a hipótese. Isso prova nossa afirmação. Seja agora x um ponto qualquer de M^n e escolha um v unitário em $T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Como x é arbitrário, usando (1) para x e v , concluimos que $S = n$ em M^n . Além disso, segue do Teorema 1(a) que $R^\perp = 0$ e a dimensão de N_1 é no máximo igual a 1. Desde que $S \neq 0$ em M^n , a dimensão de N_1 é igual a 1. Temos então uma subvariedade mínima de S^{n+m} com $R^\perp = 0$ tal que a dimensão de N_1 é constante e igual a 1. Por um resultado devido a Dajczer [D, Teorema 4.4], N_1 é um subfibrado paralelo com dimensão constante igual a 1. Então, por um conhecido teorema de Erbacher, a codimensão m pode ser reduzida para 1 e M^n pode ser vista como uma

subvariedade mínima e compacta de S^{n+1} tal que $S = n$ em M^n . O Corolário 1 segue então dos resultados de [L] ou [CdCK].

Observação: Na prova do Corolário 1, poderíamosmos ter usado um teorema de Kenmotsu [K]. Entretanto, optamos por uma prova independente desse resultado.

Capítulo 3

Um critério de anulamento de grupos de homologia de subvariedades

Nesse capítulo, demonstraremos o Teorema 2 e o Corolário 2. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.0.3 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 2$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e respectiva norma $\| \cdot \|$. Sejam $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear simétrica com $\text{tr}A = nH$ e p um inteiro positivo tal que $p \leq n/2$. Se $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , denote por*

$$\theta = \begin{cases} \text{tr}A^2 - (n+1)H^2 - (n-2)H\langle Av_1, v_1 \rangle & , \text{ se } p = 1, \\ \frac{p(n-p)}{n}\text{tr}A^2 - pnH^2 - (n-2p)H \sum_{i=1}^p \langle Av_i, v_i \rangle & , \text{ se } p > 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Então

$$\left(\sum_i \langle Av_i, v_i \rangle \right)^2 - nH \sum_i \langle Av_i, v_i \rangle + 2H \sum_{i,k} \langle Av_i, v_k \rangle^2 \leq \theta, \quad (3.2)$$

onde $i = 1, \dots, p$ e $k = p+1, \dots, n$.

Prova: Desde que A é simétrica, temos que $\text{tr}A^2 = \sum_{r,s=1}^n \langle Av_r, v_s \rangle^2$ e

$$\text{tr}A^2 \geq \sum_i \langle Av_i, v_k \rangle^2 + \sum_k \langle Av_k, v_k \rangle^2 + 2 \sum_{i,k} \langle Av_i, v_k \rangle^2. \quad (3.3)$$

Assuma inicialmente o caso em que $\text{tr} A = nH = 0$. Se $p = 1$ é claro que

$$\text{tr} A^2 \geq \langle Av_1, v_1 \rangle^2 + 2 \sum_k \langle Av_1, v_k \rangle^2,$$

o que prova (3.2) para $H = 0$ e $p = 1$. Se $2 \leq p \leq n/2$, temos que $p(n-p) \geq n$. Por outro lado,

$$\text{tr} A^2 \geq \frac{1}{p} \left[\sum_i \langle Av_i, v_i \rangle \right]^2 + \frac{1}{n-p} \left[\sum_i \langle Av_k, v_k \rangle \right]^2 + 2 \sum_{i,k} \langle Av_i, v_k \rangle^2. \quad (3.4)$$

Desde que $\text{tr} A = \sum_i \langle Av_i, v_i \rangle + \sum_k \langle Av_k, v_k \rangle = 0$, decorre das desigualdades acima que

$$\frac{p(n-p)}{n} \text{tr} A^2 \geq \left[\sum_i \langle Av_i, v_i \rangle \right]^2 + 2 \sum_{i,k} \langle Av_i, v_k \rangle^2,$$

que é o resultado desejado (3.2) para $H = 0$ e $p > 1$.

Considere agora o caso em que $H \neq 0$. Fazendo $B = A - HI$, onde $I : V \rightarrow V$ é a aplicação identidade, temos que $\text{tr} B = 0$, $B^2 = A^2 - 2HA + H^2I$ e $\text{tr} B^2 = \text{tr} A^2 - nH^2$. Neste caso, (3.2) segue imediatamente aplicando o caso $H = 0$ a B .

Prova do Teorema 2 Seja $2 \leq p \leq n/2$ e assuma que a desigualdade (2) valha em M^n . Sejam $x \in M^n$ e $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$. Considere $\{\xi_\beta\}_{\beta=1}^m$ uma base ortonormal qualquer de $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \frac{\tilde{H}}{H}$, quando $H(x) \neq 0$. Seja A_{ξ_β} o operador de Weingarten na direção ξ_β , para cada β . Desde que $\text{tr} A_{\xi_\beta} = 0$ para todo $\beta > 1$ e $\text{tr} A_{\xi_1} = nH$, podemos escrever (1.19) como

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n \left[2\|\alpha(v_i, v_k)\|^2 - \langle \alpha(v_i, v_i), \alpha(v_k, v_k) \rangle \right] = 2 \sum_{\substack{i,k \\ \beta \geq 1}} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_k \rangle^2 - \sum_{\substack{i,k \\ \beta \geq 1}} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_i \rangle \langle A_{\xi_\beta} v_k, v_k \rangle = \\ &= 2 \sum_{\substack{i,k \\ \beta > 1}} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_k \rangle^2 + \sum_{\beta > 1} \left[\sum_i \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_i \rangle \right]^2 + 2 \sum_{i,k} \langle A_{\xi_1} v_i, v_k \rangle^2 + \left[\sum_i \langle A_{\xi_1} v_i, v_i \rangle \right]^2 - nH \sum_i \langle A_{\xi_1} v_i, v_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desde que $S = \sum_{\beta=1}^m \text{tr} A_{\xi_\beta}^2$, usando (3.2) em (3.5), para cada A_{ξ_β} , nós obtemos

$$\Phi \leq \frac{p(n-p)}{n} S - pnH^2 - (n-2p)H \sum_{i=1}^p \langle A_{\xi_1} v_i, v_i \rangle.$$

Observe que quando $H \neq 0$, $\langle A_{\xi_1} v_i, v_i \rangle \geq \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de A_{ξ_1} .

De qualquer forma, segue da desigualdade acima que

$$\Phi \leq \frac{p(n-p)}{n} S - pnH^2 - p(n-2p)H\lambda_1.$$

Assim, a condição (1.19) do Teorema 1.4.1, $\Phi < pqc$ é satisfeita se

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-p} + \frac{n(n-2p)H\lambda_1}{n-p} + nc \quad (3.6)$$

em M^n . Em particular, $H_p(M, Z) = \{0\}$. Por outro lado, se $p \leq k \leq n-p$, temos que

$$\frac{n^2 H^2}{n-p} + \frac{n(n-2p)H\lambda_1}{n-p} + nc \leq \frac{n^2 H^2}{n-k} + \frac{n(n-2k)H\lambda_1}{n-k} + nc. \quad (3.7)$$

Usando (3.6), (3.7) e o Teorema 1.4.1 novamente, concluimos que $H_k(M, Z) = \{0\}$. Isso prova o Teorema 2(a).

Para (b), seja $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. É claro que $\langle A_{\xi_1} v, v \rangle \geq \lambda_1$ quando $H(x) \neq 0$. De qualquer forma, decorre de (1) que

$$\text{Ric}(v) \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)(nc - S) + (n-2)H\lambda_1 + nH^2. \quad (3.8)$$

Como por hipótese, $S < \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + nc$ em M^n , segue de (3.8) que a curvatura de Ricci de M^n é estritamente positiva. Portanto, pelo teorema de Bonnet-Myers, $\pi_1(M)$ é finito e $\widetilde{M}^n$ é compacto. Se $n = 2$, o resultado (b1) segue da fórmula de Gauss-Bonnet. Se $n = 3$, desde que $\pi_1(M) = \{0\}$, o resultado (b2) segue do teorema de Hamilton [H].

Se $n \geq 4$, suponha que M^n é orientável quando n é par. Desde que

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-1)H\lambda_1}{n-1} + nc \leq \frac{n^2 H^2}{n-2} + \frac{n(n-4)H\lambda_1}{n-2} + nc \quad (3.9)$$

em M^n , segue do Teorema 2(a) que $H_k(M, Z) = \{0\}$ para $2 \leq k \leq n-2$.

Seja agora $\pi : \widetilde{M}^n \rightarrow M^n$ a aplicação de recobrimento. Desde que $\widetilde{M}^n$ é compacto, usando os mesmos argumentos anteriores aplicados à imersão $f \circ \pi$, concluímos também que $H_k(\widetilde{M}, Z) = \{0\}$, para $2 \leq k \leq n-2$. Neste caso, (b3) é consequência imediata do Lema 1.3.1.

Capítulo 4

Subvariedades com curvatura de Ricci não negativa I

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 3 e os Corolário 3 e 4.

Prova do Teorema 3 Sejam $x \in M^n$ e $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. Escolha $\xi_1, \dots, \xi_m$ uma base ortonormal qualquer de $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \vec{H}/H$ se $H(x) \neq 0$. Observe que se $H(x) \neq 0$, podemos usar o Lema 2.0.2(c) para obter $\langle A_{\xi_1} v, v \rangle \geq \lambda_1 \geq H - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)(S_H - nH^2)}$, onde $S_H = \text{tr} A_{\xi_1}^2$. De qualquer forma, decorre de (1) e da observação acima que

$$\frac{n}{n-1} \text{Ric}(v) \geq A \geq B \geq C, \quad (4.1)$$

onde

$$A = \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + n - S, \quad (4.2)$$

$$B = n - S + 2nH^2 - \frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}, \quad (4.3)$$

$$C = n - S + 2nH^2 - \frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S - nH^2)}. \quad (4.4)$$

Afirmamos que a condição $S \leq C(H)$ é equivalente a $C \geq 0$ e que $S = C(H)$ se e somente

se $C = 0$. De fato, fazendo $S_1 = S - nH^2$, temos que

$$\begin{aligned} C &= n + nH^2 - \left[\sqrt{S_1} + \frac{n(n-2)H}{2(n-1)} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right]^2 + \frac{n(n-2)^2 H^2}{4(n-1)} \\ &= (K-L)(K+L), \text{ onde} \\ K &= \sqrt{n + \frac{n^3 H^2}{4(n-1)}} \quad \text{e} \quad L = \sqrt{S_1} + \frac{(n-2)H}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, $C \geq 0$ se e somente se $K \geq L$ e $C = 0$ se e somente se $K = L$. Mas a condição $K \geq L$ é equivalente a

$$n + \frac{n^3 H^2}{4(n-1)} \geq S_1 + \frac{n(n-2)^2 H^2}{4(n-1)} + \frac{(n-2)H}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} S_1. \quad (4.5)$$

Um pequeno cálculo mostra que a condição (4.5) é equivalente a $S \leq C(H)$. Isso prova nossa afirmação. Por outro lado, segue de (4.1) e da afirmação anterior que M^n tem curvatura de Ricci não negativa. Agora, consideremos inicialmente o caso (a):

(a) Seja $\pi_1(M)$ finito. Observe que neste caso, $\widetilde{M}^n$ é compacto.

(a1) Seja $n = 2$. Como a curvatura seccional é não negativa, decorre da fórmula de Gauss-Bonnet que M^2 é difeomorfa a S^2 ou ao espaço projetivo real $\mathbb{R}P^2$.

(a2) Seja $n = 3$. Suponha inicialmente que existe um ponto x em M^3 tal que $\text{Ric}(v) > 0$ para todo v unitário em $T_x M$. Decorre então do teorema de Aubin [A, p.397] que M^n admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Neste caso, como $\pi_1(M) = \{0\}$, usando o teorema de Hamilton [H] vemos que M^3 é difeomorfa a S^3 . Suponha agora que para cada ponto x em M^3 , existe um v unitário em $T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Como $C \geq 0$, concluímos neste caso, que em (4.1) só ocorrem igualdades. Também é fácil ver que em (1) ocorre uma igualdade para x e v . Como x é arbitrário,

decorre do Teorema 1(b) que M^3 é conformemente plana. Em particular, como $\pi_1(M^3) = \{0\}$, segue então do teorema de Kuiper [Ku] que M^3 é difeomorfa a S^3 . Fica portanto encerrada a prova de (a2).

(a3) Seja $n \geq 4$ e assumamos que $H \neq 0$ quando $S = C(H)$. Desde que $A \geq B \geq C \geq 0$ (veja 4.1) e $\lambda_1 \leq H$, temos que

$$S \leq \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + n \leq \frac{n^2 H^2}{n-2} + \frac{n(n-4)H\lambda_1}{n-2} + n. \quad (4.6)$$

Afirmamos que

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-2} + \frac{n(n-4)H\lambda_1}{n-2} + n \quad (4.7)$$

em M^n . De fato, se existe um ponto x em M^n tal que (4.7) é uma igualdade, então também segue da igualdade em (4.6) que $H(x) = 0$ ou $\lambda_1(x) = H(x)$. Como, por hipótese, $H(x) \neq 0$, então $\lambda_1(x) = H(x)$. Por outro lado, como também $C = 0$, concluímos de (4.1) que $A = B = 0$, em x . Por sua vez, os dados anteriores implicam que $S(x) = n + 2nH^2 = nH^2$, o que é uma contradição. Isso prova nossa afirmação. Agora, usando o Teorema 2(a), concluímos que $H_i(M, Z) = \{0\}$ para $i = 2, \dots, n-2$, e o mesmo vale para $\widetilde{M}^n$. Nesse caso, (a3) decorre diretamente do Lema 1.3.1.

(b) Seja $\pi_1(M)$ infinito. Afirmamos que para cada x em M^n , existe um vetor unitário $v \in T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. De fato, se tal não ocorresse, decorreria do teorema de Aubin [A, p.397] e do teorema de Bonnet-Myers que $\pi_1(M)$ é finito, o que contradiria nossa hipótese. Neste caso, usando (4.1) e o fato de que $C \geq 0$, concluímos que

$$S = C(H), \quad A = B = C = 0 \quad (4.8)$$

em M^n . Além disso, se $n \geq 3$ e $H \neq 0$ em M^n temos que

$$S = S_H, \quad \lambda_1 = H - \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)} \quad (4.9)$$

em M^n . Consideremos agora as seguintes possibilidades (b1) e (b2):

(b1) Seja $n = 2$. Neste caso é claro que M^2 é flat.

(b2) Seja $n \geq 3$. Assumiremos inicialmente que $H \neq 0$ em M^n . Devido a (4.9) e ao Lema 2.0.2 (c), concluimos que A_{ξ_1} tem apenas dois autovalores λ_1, λ_2 , onde λ_2 tem multiplicidade pelo menos $n - 1$. Também, desde que $S = S_H$ em M^n , N_1 é gerado por $\vec{H}$. Provaremos agora que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ em M^n . Para isso, note que se $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$ e $\text{Ric}(v) = 0$, então em (1) ocorre uma igualdade para x e v e em particular $A_{\xi_1} v = \lambda_1 v$. Seja agora $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ uma base ortonormal de $T_x M$ tal que $A_{\xi_1} v = \lambda_1 v$ e $A_{\xi_1} v_i = \lambda_2 v_i$, $i \geq 2$. Usando a equação de Gauss (1.9), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Ric}(v) = \sum_i^n (1 + \langle \alpha(v_1, v_1), \alpha(v_i, v_i) \rangle - \|\alpha(v_1, v_i)\|^2) \\ &= (n-1)(\lambda_1 \lambda_2 + 1). \end{aligned}$$

Dessa forma, fica provado que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ em x . Como x é arbitrário, $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ em M^n . Afirmamos agora que N_1 é um subfibrado paralelo. Para isso, sejam $\xi_1 = \vec{H}/H$, $\xi_2, \dots, \xi_n$ um referencial local ortonormal em $\mathcal{X}(M)^\perp$ e $X_1, \dots, X_n$ um referencial local ortonormal em $\mathcal{X}(M)$ tal que $A_{\xi_1} X_1 = \lambda_1 X_1$, $A_{\xi_1} X_i = \lambda_2 X_i$, $i \geq 2$. Desde que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ em M^n , λ_1 e λ_2 são funções diferenciáveis em M^n . Usando as equações de Codazzi (1.10), para $i \geq 2$, temos que

$$\begin{cases} (\nabla_{X_1}^\perp \alpha)(X_i, X_1) = (\nabla_{X_i}^\perp \alpha)(X_1, X_1), \\ (\nabla_{X_1}^\perp \alpha)(X_i, X_i) = (\nabla_{X_i}^\perp \alpha)(X_1, X_i) \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \nabla_{X_1}^\perp \alpha(X_i, X_1) - \alpha(\nabla_{X_1} X_i, X_1) - \alpha(X_i, \nabla_{X_1} X_1) = \\
& = \nabla_{X_i}^\perp \alpha(X_1, X_1) - \alpha(\nabla_{X_i} X_1, X_1) - \alpha(X_1, \nabla_{X_i} X_1), \\
& \nabla_{X_1}^\perp \alpha(X_i, X_i) - \alpha(\nabla_{X_1} X_i, X_i) - \alpha(X_i, \nabla_{X_1} X_i) = \\
& = \nabla_{X_i}^\perp \alpha(X_1, X_i) - \alpha(\nabla_{X_i} X_1, X_i) - \alpha(X_1, \nabla_{X_i} X_i). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Por outro lado, como N_1 é gerado por $\vec{H}$, temos que

$$\begin{aligned}
& \alpha(\nabla_{X_1} X_i, X_i) = \alpha(X_1, \nabla_{X_i} X_1) = 0 \\
& \alpha(X_i, X_1) = 0, \alpha(X_1, X_1) = \lambda_1 \xi_1, \alpha(X_i, X_i) = \lambda_2 \xi_1, \\
& \alpha(\nabla_{X_1} X_i, X_1) = \lambda_1 \langle \nabla_{X_1} X_i, X_1 \rangle \xi_1 = -\lambda_1 \langle X_i, \nabla_{X_1} X_1 \rangle, \\
& \alpha(X_i, \nabla_{X_1} X_1) = \lambda_2 \langle \nabla_{X_1} X_1, X_i \rangle X_1, \alpha(\nabla_{X_i} X_1, X_1) = \lambda_2 \langle \nabla_{X_i} X_1, X_1 \rangle \xi_1 \text{ e} \\
& \alpha(X_1, \nabla_{X_i} X_i) = \lambda_1 \langle X_1, \nabla_{X_i} X_i \rangle \xi_1, \text{ onde } i \geq 2.
\end{aligned}$$

Levando esses dados em (4.10), obtemos para $i \geq 2$ que

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \langle X_i, \nabla_{X_1} X_1 \rangle \xi_1 - \lambda_2 \langle \nabla_{X_1} X_1, X_i \rangle \xi_1 = \nabla_{X_i}^\perp \lambda_1 \xi_1 = X_i(\lambda_1) \xi_1 + \lambda_1 \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 \text{ e} \\
& -\lambda_1 \langle X_1, \nabla_{X_i} X_i \rangle \xi_1 - \lambda_2 \langle \nabla_{X_i} X_1, X_i \rangle \xi_1 = \nabla_{X_1}^\perp \lambda_2 \xi_1 = X_1(\lambda_2) \xi_1 + \lambda_2 \nabla_{X_1}^\perp \xi_1,
\end{aligned}$$

o que acarreta

$$\begin{cases} \lambda_1 \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 = [(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \nabla_{X_1} X_i, X_1 \rangle - X_i(\lambda_1)] \xi_1, \\ \lambda_2 \nabla_{X_1}^\perp \xi_1 = [(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \nabla_{X_i} X_1, X_1 \rangle - X_1(\lambda_2)] \xi_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Mas os lados esquerdos de (4.11) não podem ser paralelos a ξ_1 , a menos que $\nabla_{X_i}^\perp \xi_1 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Isso prova a nossa afirmação. Temos então uma imersão $f : M^n \rightarrow S^{n+m}$ tal

N_1 é 1-dimensional e paralelo. Por um conhecido resultado de Erbacher, a codimensão m pode ser reduzida para 1 e f pode ser vista como uma imersão de M^n em S^{n+1} com A_{ξ_1} tendo apenas dois autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Agora, por um resultado devido a Ryan [R, p.372], a distribuição $T_{\lambda_2} = \{X : A_{\xi_1}X = \lambda_2 X\}$ é diferenciável e involutiva. Além disso, $X_i(\lambda_2) = 0$ para $i \geq 2$. Desde que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, também $X_i(\lambda_1) = 0$, $i \geq 2$. Dessa forma, usando (4.11) obtemos $\langle \nabla_{X_1}^{X_i}, X_i \rangle = 0$ para $i \geq 2$. Também $\langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_1 \rangle = 0$, o que mostra que a distribuição ortogonal $T_{\lambda_2}^\perp$ é totalmente geodésica. Temos então uma variedade compacta M^n , com curvatura de Ricci não negativa e com uma folheação T_{λ_2} em M^n de codimensão 1 tal que a distribuição ortogonal $T_{\lambda_2}^\perp = \{X : A_{\xi_1}X = \lambda_1 X\}$ é totalmente geodésica. Segue imediatamente do Corolário 2 de [BW] que T_{λ_2} é também totalmente geodésica e daí, $\langle \nabla_{X_i}^{X_1}, X_1 \rangle = 0$ para $i \geq 2$. Usando (4.11) novamente, concluímos que $X_1(\lambda_2) = 0$. Isso prova que λ_2 e λ_1 são constantes em M^n . É claro que também f tem curvatura média constante $H \neq 0$ e $S = C(H)$ em M^n . Nesse caso, o resultado (b2) segue então do Teorema A.

Consideremos agora o caso em que existe um ponto x_0 em M^n tal que $H(x_0) = 0$. Observe que como $A = B = C = 0$ em M^n , temos que (1) é uma igualdade em M^n . Pelo Teorema 1, (a) e (b), $R^\perp = 0$ e M^n é conformemente plana. Por outro lado, como $H(x_0) = 0$, temos que $S(x_0) = n$. Usando (1.18), concluímos que em x_0 , a curvatura escalar de M^n é $\tau(x_0) = n(n-2)$ e portanto M^n não é flat. Nesse caso, como $\pi_1(M)$ é infinito, usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 1 de Noronha [N, pg.259], concluímos que $\widetilde{M}^n = \mathbb{R} \times S_{c_2}^{n-1}$, para algum $c_2 > 0$. Isso prova que $\widetilde{M}^n$, e portanto M^n tem curvatura escalar τ constante. Pelo que foi exposto acima, $\tau = n(n-2)$. Usando (1.18) novamente, concluímos que $S = n^2 H^2 + n$ em M^n . Combinando esse resultado com

$S = C(H)$ é fácil ver que $H = 0$ e $S = n$ em M^n . Como $\pi_1(M)$ é infinito, nesse caso, o resultado (b2) decorre imediatamente do Corolário 1.

Prova do Corolário 3

Seja $x \in M^n$ e $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. Seja $S \leq 2\sqrt{n-1}$ em M^n . Usando (4.1), obtemos que

$$\frac{n}{n-1} \text{Ric}(v) \geq A \geq B \geq C = D \geq E \geq 0, \quad (4.12)$$

onde A, B, C são dados por (4.2), (4.3) e (4.4), respectivamente, e

$$D = n - \frac{nS}{2\sqrt{n-1}} + \frac{a^2}{2\sqrt{n-1}}, \quad (4.13)$$

$$a = (\sqrt{n-1} + 1)\sqrt{n}H - (\sqrt{n-1} - 1)\sqrt{S - nH^2}, \quad (4.14)$$

$$E = n \left(1 - \frac{S}{2\sqrt{n-1}} \right). \quad (4.15)$$

Desde que $C \geq 0$, já sabemos da prova do Teorema 3 que $S \leq C(H)$ em M^n e que M^n tem curvatura de Ricci não negativa. Temos então apenas duas possibilidades (a) e (b):

(a) Existe um ponto x em M^n tal que $\text{Ric}(v) > 0$ para todo v unitário em $T_x M$. Nesse caso, segue do teorema de Aubin [A, p.397] que M^n admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Além disso, decorre do teorema de Bonnet-Myers que $\pi_1(M)$ é finito e $\widetilde{M}^n$ é compacto. Desse modo temos

(a1) Se $n = 2$, segue da fórmula de Gauss-Bonnet que M^2 é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$.

(a2) Seja $n = 3$. Segue dos mesmos argumentos usados na prova do Lema 1.3.1, que M^3 é orientável e que o segundo grupo de homologia de M^3 com coeficientes inteiros se anula. Além disso, decorre do teorema de Hamilton que se $\pi_1(M) = \{0\}$, então M^3 é difeomorfa a S^3 .

(a3) Seja $n \geq 4$ e assumamos que M^n é orientável quando n é par. Afirmamos que $H \neq 0$ quando $S = C(H)$. De fato, assumamos que existe um ponto x_0 em M^n tal que $S(x_0) = C(H)$. Nesse caso, sabemos que $C(x_0) = 0$. Como $C = D \geq E \geq 0$, concluímos que $D(x_0) = E(x_0) = 0$. Isso prova que em x_0 , $S = 2\sqrt{n-1}$, $n^2 H^2 = n\sqrt{n-1} - 2(n-1)$ e $S = nH^2$, o que é uma contradição. O resultado (a3) decorre então do Teorema 3(a3).

(b) Para cada ponto x em M^n , existe um vetor unitário v em $T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Segue agora de (4.12) que $A = B = C = D = E = 0$ em M^n . Em particular, de $B = C$, temos que $S = 2\sqrt{n-1}$ e $n^2 H^2 = n\sqrt{n-1} - 2(n-1)$ em M^n . Além disso,

(b1) Se $n = 2$, então M^2 é flat e $H = 0$. Em particular, se $m = 1$, segue dos resultados de [CdCK] ou [L] que M^2 é isométrica ao toro $S^1_2 \times S^1_2$.

(b2) Seja $n \geq 3$. Nesse caso, decorre também de $B = C$ que $S = S_H$ em M^n e portanto N_1 é gerado por $\vec{H}$. Como na prova do Teorema 3(b3), vemos que (4.11) vale na presente situação, e portanto, N_1 é paralelo, a codimensão m de f pode ser reduzida para 1 e f pode ser vista como uma hipersuperfície de M^n em S^{n+1} com curvatura média constante $H \neq 0$ tal que $S = 2\sqrt{n-1}$. Nesse caso, (b2) é consequência direta do Teorema C.

Prova do Corolário 4

Sejam $n \geq 4$ e $\pi_1(M)$ finito. Observe que devido ao Teorema B, $H_i(M, \mathbb{Z}) = 0$,

$i = 2, \dots, n - 2$ e o mesmo vale para $\widetilde{M}^n$. Usando o Lema 1.3.1, obtemos o resultado desejado.

Prova do Corolário 5

Consideremos inicialmente $\pi_1(M)$ finito. Nesse caso, como M^n é orientável, decorre dos resultados de [dCDM] que M^n é difeomorfa a S^n . Seja agora $\pi_1(M)$ infinito. Observe que devido ao Teorema 1.2.1 (a), f é quase-umbílica. Sejam agora $x \in M^n$ e ξ_1 unitário em $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \frac{\vec{H}}{H}$ se $H(x) \neq 0$. Como f é quase-umbílica, A_{ξ_1} tem no máximo dois autovalores μ_1, μ_2 , onde μ_2 tem multiplicidade no mínimo igual a $n - 1$. Seja agora $v_1, \dots, v_n$ uma base ortonormal de $T_x M$ tal que $A_{\xi_1} v_1 = \mu_1 v_1$ e $A_{\xi_1} v_i = \mu_2 v_i$, $i \geq 2$. Usando esses dados em (1.17), obtemos

$$\mu_1^2 - nH\mu_1 = -\text{Ric}(v_1) + (n - 1), \quad (4.16)$$

$$\mu_2^2 - nH\mu_2 = -\text{Ric}(v_i) + (n - 1) = -\rho + (n - 1), \quad (4.17)$$

$$\mu_1 + (n - 1)\mu_2 = nH, \quad (4.18)$$

onde $i \geq 2$ e $\rho = \text{Ric}(v_i)$. Afirmamos que M^n não é flat. De fato, se $\tau = 0$ então $\text{Ric}(v_i) = 0$, para $i \geq 1$. Decorre então de (4.16) e (4.17) que $(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 - nH) = 0$. Se $\mu_1 = \mu_2$, então segue de (4.16) e (4.18) que $-(n - 1)H^2 = n - 1$, o que é uma contradição. Por outro lado, se $\mu_1 + \mu_2 = nH$, segue de (4.18) que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, o que também é uma contradição. Temos então uma variedade compacta M^n , conformemente plana com curvatura de Ricci não negativa. Desde que $\pi_1(M)$ é infinito e M^n é não flat, Noronha [N, p.259] provou que nessas condições, $\widetilde{M}^n = \mathbb{R} \times S_{c_2}^{n-1}$. Em particular, $\widetilde{M}^n$

e M^n têm curvatura escalar constante τ . Além disso, M^n tem curvatura seccional não negativa. Por outro lado, o tensor de Ricci de M^n tem apenas um autovalor nulo e decorre dessas observações que $\text{Ric}(v_1) = 0$ e $\tau = (n-1)\rho = (n-1)(n-2)c_2$. Usando agora (4.18) em (4.16),

$$(n-1)\mu_2^2 - nH\mu_2 = 1. \quad (4.19)$$

Combinando (4.19) com (4.17), obtemos

$$(n-2)\mu_2^2 = \rho - (n-2). \quad (4.20)$$

Isso mostra que μ_2 é constante em M^n e o mesmo ocorre com H . Em particular, segue de (4.16) que $\mu_1\mu_2 = -1$ em M^n . Temos então uma hipersuperfície compacta de S^{n+1} com curvatura média constante H e curvaturas seccionais não negativas. Podemos então usar o resultado obtido por Hu [Hu] para concluir que M^n é isométrica a um toro $S_{c_1}^1 \times S_{c_2}^{n-1}$, onde $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$, $S = C(H)$ onde $C(H)$ é dada por (4), ou $S = n + \frac{nH^3}{2(n-1)} + \frac{n(n-2)H\sqrt{n^2H^2+4(n-1)}}{2(n-1)}$. Observe agora que $\rho = (n-2)c_2$. Usando (4.19) e (4.20), obtemos

$$n(n-2)H\mu_2 = (n-1)(n-2)c_2 - n(n-2). \quad (4.21)$$

Em particular, se $c_2 \geq \frac{n}{n-1}$, então $H\mu_2 \geq 0$. Considere inicialmente $c_2 = \frac{n}{n-1}$. Segue de (4.21) e do fato de que $\mu_1\mu_2 = -1$ que $H = 0$. Nesse caso, $S = n = C(H)$. Seja agora $c_2 > \frac{n}{n-1}$. Segue de (4.21) que $\mu_2 > 0$ e em particular, $\mu_1 < 0$. Observe que nesse caso, $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 , são os primeiro e segundo autovalores de A_{ξ_1} , respectivamente, onde $\xi_1 = \frac{\vec{H}}{H}$. Desde que $S = \lambda_1^2 + (n-1)\lambda_2^2$, usando (4.18), temos que $S = \frac{n^2H^2}{n-1} + \frac{n\lambda_1^2 - 2nH\lambda_1}{n-1}$. Tendo em conta (4.16) e $\text{Ric}(v_1) = 0$, obtemos $\lambda_1^2 - nH\lambda_1 = n-1$. Por outro lado, é fácil ver (veja prova do Lema 2.0.2(c)) que $\lambda_1 = H - \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}$.

Agora, substituindo λ_1 na expressão anterior de S , obtemos que $S = C(H)$, onde $C(H)$ é dada por (4). Isso encerra a prova do Corolário 4.

Capítulo 5

Subvariedades com curvatura de Ricci não negativa II

Neste capítulo demonstraremos o Teorema 4.

Prova do Teorema 4

Sejam $x \in M^n$ e $v \in T_x M$, $\|v\| = 1$. Denote por $S_H = \text{tr} A_{\xi_1}^2$, onde $\xi_1 = \vec{H}/H$ se $H(x) \neq 0$. Se $H(x) = 0$, faça $S_H = 0$. Como na prova do Teorema 3, temos

$$\frac{n}{n-1} \text{Ric}(v) \geq A \geq B, \quad (5.1)$$

onde

$$A = \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + n - S \quad (5.2)$$

e

$$B = n - S + 2nH^2 - \frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}. \quad (5.3)$$

Observe que se $S \leq C_0(H)$, então $B \geq 0$ e $\text{Ric}(v) \geq 0$. Isso mostra que M^n tem curvatura de Ricci não negativa. Temos então duas possibilidades (a) e (b):

(a) Seja $\pi_1(M)$ finito.

(a1) Seja $n = 2$. Como M^2 tem curvatura seccional não negativa, segue da fórmula de Gauss- Bonnet que M^2 é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$.

(a2) Seja $n = 3$. Assuma inicialmente que existe um ponto x em M^3 tal que $\text{Ric}(v) > 0$ para todo v unitário em $T_x M$. Nesse caso, decorre do teorema de Aubin [A, p.397] que M^3 admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Em particular, se $\pi_1(M) = \{0\}$, então segue do teorema de Hamilton [H] que M^3 é difeomorfa a S^3 . Assuma agora que para cada ponto x em M^3 , existe um vetor v unitário em $T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Neste caso, decorre de (5.1) que $A = B = 0$ em M^3 . É fácil ver também, que (1) é uma igualdade para x e v . Além disso, segue do Teorema 1(b) que M^3 é conformemente plana. Em particular, se $\pi_1(M) = 0$, podemos usar o teorema de Kuiper [K] para concluir que M^3 é difeomorfa a S^3 .

(a3) Seja $n \geq 4$ e assuma que $H \neq 0$ quando $S = C_0(H)$. Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 3(a3), concluimos que (4.7) vale em M^n . Além disso, pelos mesmos motivos, se M^n é orientável quando n é par, então M^n é homeomorfa a S^n .

(b) Seja $\pi_1(M)$ infinito. Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 3(b), para cada ponto $x \in M^n$ existe um vetor unitário $v \in T_x M$ tal que $\text{Ric}(v) = 0$. Decorre de (5.1) que $A = B = 0$ e $S = C_0(H)$ em M^n . É fácil ver neste caso, que (1) é uma igualdade para x e v .

(b1) Se $n = 2$, é claro que M^2 é flat.

(b2) Seja $n \geq 3$. Pelo Teorema 1, $R^\perp = 0$, $\dim N_1 \leq 2$ e f é quase-umbílica. Em particular, M^n é conformemente plana e além disso, em cada ponto $x \in M^n$, existem

bases ortonormais $\xi_1, \dots, \xi_m$ em $(T_x M)^\perp$, onde $\xi_1 = \frac{\vec{H}}{H}$, se $H(x) \neq 0$ e $v_1, \dots, v_n$ em $T_x M$ tais que $\text{Ric}(v_1) = 0$,

$$A_{\xi_1} v_1 = \lambda_1 v_1, A_{\xi_1} v_i = \lambda_2 v_i, i \geq 2,$$

e

$$A_{\xi_\beta} v_1 = \mu_\beta v_1, A_{\xi_\beta} v_i = -\frac{\mu_\beta v_i}{n-1}, \beta \geq 2, i \geq 2.$$

Levando esses dados em (1.17), obtemos

$$-\lambda_1^2 + nH\lambda_1 - \sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta^2 + (n-1)c = \text{Ric}(v_1) = 0$$

e

$$-\lambda_2^2 + nH\lambda_2 - \sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta^2 + (n-1)c = \text{Ric}(v_i) = \rho, i \geq 2.$$

Observe que a curvatura escalar de M^n é $\tau = (n-1)\rho$. Afirmamos que M^n não é flat.

De fato, suponha que $\tau = (n-1)\rho = 0$. Usando (1.18), vemos que $S = n^2 H^2 + n(n-1)c$.

Por outro lado, como $S = C_0(H)$, obtemos

$$n(n-2)[H^2 + c] = -\frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}$$

e portanto $c = 0$ e $H = 0$. Mas este caso não pode ocorrer, pois não existem subvariedades mínimas e compactas no espaço Euclidiano. Dessa forma, temos uma variedade compacta M^n , com curvatura de Ricci não negativa e grupo fundamental infinito. Decorre então do teorema de Cheeger e Gromoll [CG] que $\widetilde{M}^n = R^k \times N$, onde $k \geq 1$ e N é compacta. Mas nesse caso, como M^n é conformemente plana e não flat, Noronha [N, pg.259] mostrou que $k = 1$ e $N = S_{c_2}^{n-1}$, onde $c_2 > 0$. Em particular, $\widetilde{M}^n$, e portanto M^n têm curvatura escalar constante $\tau = (n-1)\rho > 0$. Afirmamos que só existem duas possibilidades (a) e (b), respectivamente: $H = 0$ em M^n ou $H(x) \neq 0$ para todo x em M^n . De fato, se existe

x_0 em M^n tal que $H(x_0) = 0$, segue de (1.18) e de $S = C_0(H)$ que $\tau = n(n-2)c$. Usando novamente (1.18) e $S = C_0(H)$, obtemos que

$$n^2 H^2 = -\frac{n(n-2)H}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - nH^2)}.$$

Portanto, $H \equiv 0$ e é claro que $c = 1$. Neste caso, (b2)(i) segue diretamente do Corolário 2.

Resta então apenas uma alternativa: $H \neq 0$ em M^n . Observe que ainda neste caso, $\widetilde{M}^n = \mathbb{R} \times S_{c_2}^{n-1}$ e portanto M^n é localmente simétrica. Como M^n é conformemente plana e tem curvatura de Ricci não negativa, podemos usar o Teorema A de [ST] para concluir que M^n é localmente isométrica a $M_1 \times M_{c_2}^{n-1}$, onde $\dim M_1 = 1$ e $M_{c_2}^{n-1}$ é uma variedade com curvatura seccional constante $c_2 > 0$. Assuma agora que M^n é orientável. Sejam agora $x \in M^n$ e $\xi_1 = \vec{H}/H$, $\xi_2, \dots, \xi_m$ um referencial local ortonormal em $\mathcal{X}(M)^\perp$. Note que o tensor de Ricci tem, neste caso, apenas um autovalor nulo. Portanto podemos considerar também um referencial ortonormal local $\{X_i\}_{i=1}^n$, em torno de x , tal que $\text{Ric}(X_1) = 0$. Usando o Teorema 1(b), temos

$$\begin{cases} A_{\xi_1} X_1 = \lambda_1 X_1, & A_{\xi_\beta} X_1 = \mu_\beta X_1, & \beta \geq 2, \\ A_{\xi_1} X_i = \lambda_2 X_i, & A_{\xi_\beta} X_i = \frac{-\mu_\beta}{n-1} X_i, & i \geq 2, \beta \geq 2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Note que

$$\begin{cases} \alpha(X_1, X_1) = \lambda_1 \xi_1 + \sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta \xi_\beta, \\ \alpha(X_i, X_i) = \lambda_2 \xi_1 - \frac{1}{n-1} \sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta \xi_\beta. \end{cases} \quad (5.5)$$

Portanto N_1 é gerado por ξ_1 e $\xi_0 = \sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta \xi_\beta$. Usando (5.4) em (1.17), temos

$$\lambda_1^2 - nH\lambda_1 + u_1^2 = (n-1)c, \quad (5.6)$$

$$\lambda_2^2 - nH\lambda_2 + u_2^2 = -\rho + (n-1)c, \quad (5.7)$$

onde

$$u_1 = \sqrt{\sum_{\beta \geq 2} \mu_\beta^2} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{-u_1}{n-1} \quad \text{e} \quad \lambda_1 + (n-1)\lambda_2 = nH. \quad (5.8)$$

É fácil concluir de (5.6), (5.7) e (5.8) que

$$n(n-2)H\lambda_2 = \tau - n(n-2)c. \quad (5.9)$$

Por outro lado, desde que $S = C_0(H)$ então $S \leq nc + 2nH^2$. Usando (1.18), temos $\tau - n(n-2)c \geq n(n-2)H^2 > 0$. Decorre agora de (5.8), que $H\lambda_2 = \text{constante} > 0$. Consideremos inicialmente que $\dim N_1 = 1$. É claro que nesse caso, N_1 é gerado por ξ_1 e em particular $u_1 = u_2 = 0$ em M^n . Em particular, é fácil ver, usando a equação de Codazzi de modo similar a (4.11) que N_1 é paralelo e portanto podemos reduzir a codimensão de f para 1. Neste caso, f pode ser vista como uma imersão de M^n em Q_c^{n+1} . Mas M^n é compacta e em cada ponto de M^n existe uma curvatura seccional que se anula. Portanto $c = 1$. Além disso, $S = C_0(H) = C(H)$, onde $C(H)$ é dada por (4). Dessa forma, o resultado desejado é consequência direta do Teorema 3(b2). Considere agora que H constante. Neste caso, segue de (5.6), (5.7) e (5.9) que $\lambda_2, \lambda_1, u_1$ e u_2 são constantes em M^n . Se $u_1 = 0$, é claro que $\xi_0 = 0$ e recaímos no caso anterior. Suponha então que $u_1 \neq 0$. É claro que $\dim N_1 = 2$ e que N_1 é gerado por ξ_1 e ξ_0 em M^n . Tendo em conta (5.4) e (5.5), podemos usar a equação de Codazzi, para obter equações análogas às (4.11):

$$\lambda_1 \nabla_{X_1}^\perp \xi_1 + \nabla_{X_1}^\perp \xi_0 = \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle \right] \xi_1 + \frac{n}{n-1} \left[\langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle \right] \xi_0. \quad (5.10)$$

e

$$\lambda_2 \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 - \frac{1}{n-1} \nabla_{X_i}^\perp \xi_0 = \left[(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \nabla_{X_i}^{X_i}, X_1 \rangle \right] \xi_1 - \frac{n}{n-1} \left[\langle \nabla_{X_i}^{X_i}, X_1 \rangle \right] \xi_0. \quad (5.11)$$

Tomando o produto interno de (5.10) com ξ_1 e ξ_0 , respectivamente, obtemos

$$\lambda_1 \langle \nabla_{X_1}^\perp \xi_1, \xi_0 \rangle = \frac{n}{n-1} \langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle u_1^2, \quad (5.12)$$

$$\langle \nabla_{X_1}^\perp \xi_0, \xi_1 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \nabla_{X_1}, X_i \rangle. \quad (5.13)$$

Multiplicando (5.13) por λ_1 e somando com (5.12),

$$\langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle \left(\frac{n}{n-1} u_1^2 + \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 \right) = 0.$$

Usando $\lambda_2 = \frac{1}{n-1}(nH - \lambda_1)$ e (5.6), obtemos que $\langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle (u_1^2 + \lambda_1^2 + c) = 0$ e portanto $\langle \nabla_{X_1}^{X_1}, X_i \rangle = 0$. Dai, segue de (5.13) que $\langle \xi_0, \nabla_{X_1}^\perp \xi_1 \rangle = 0$. De forma similar, usando (5.11), obtemos também, que $\langle \xi_0, \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 \rangle = 0$, $i \geq 2$. Supondo agora que $m = 2$, é claro que $\nabla^\perp \xi_1 = 0$. Além disso, como H é constante, concluímos que $\nabla^\perp \vec{H} = 0$. Quando $c = 1$, o resultado decorre do Teorema D. Se $c = 0$, considere a direção

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}} \left[(u_2 - u_1) \xi_1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{u_1} \xi_0 \right].$$

É claro que $\nabla^\perp \xi = 0$ e é fácil ver que ξ é uma direção umbílica. Usando os mesmos argumentos da prova do Lema 2.1 de [S], podemos concluir que $f(M^n) \subset S_{c_3}^{n+1}$, onde $S_{c_3}^{n+1}$ é uma subvariedade umbílica de $\mathbb{R}^{n+2}$. Além disso, o quadrado da norma da segunda forma da imersão $f(M^n) \subset S_{c_3}^{n+1}$ é dada e $\bar{S} = S - nc_3 = C_0(\bar{H})$, onde $\bar{H}$ é a curvatura média da imersão $f(M^n) \subset S_{c_3}^{n+1}$. Neste caso, podemos usar o Teorema D para obter o resultado desejado. Vamos considerar agora que N_1 é paralelo e que H é constante. Como $\dim N_1 = 2$, podemos usar a Proposição 4.1 de [D], para reduzir a codimensão

da imersão para 2 a assim recaímos no caso anterior. Considere agora que f tem vetor curvatura média paralelo. Usando o Teorema 4.4 de [D], vemos que N_1 é paralelo e portanto recaímos também no caso anterior

Capítulo 6

Subvariedades de Einstein

Neste capítulo provaremos o Teorema 5 e os Corolários 5 e 6. Para isso, necessitamos da proposição a seguir que, em particular, generaliza um teorema devido a Erbacher [E, Teorema 2], que provou a mesma para imersões entre espaços de curvaturas constantes.

Proposição 6.0.4 *Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+2}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica onde M^n é uma variedade de Einstein. Denote por ρ a curvatura de Ricci de M^n e suponha que $\rho \geq (n-1)c$.*

(a) *Se $\rho > (n-1)c$, então $R^\perp = 0$.*

(b) *Se $\rho = (n-1)c$, então para todo $x \in M^n$ temos que $R_x^\perp = 0$ ou $\nu_f(x) = n-2$, onde $\nu_f(x)$ é o índice de nulidade relativa de f em x .*

Lembremos que o índice de nulidade relativa de f em x é definido por $\nu_f(x) = \dim\{X \in T_x M : \alpha(X, Y) = 0, Y \in T_x M\}$.

A prova da Proposição 6.0.4 depende do lema a seguir, que demonstraremos inicialmente.

Lema 6.0.5 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 3$, com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $A, B : V \rightarrow V$ aplicações lineares simétricas tais que*

$$A^2 + B^2 = rI, \quad (6.1)$$

onde $I : V \rightarrow V$ é a aplicação identidade. Se A ou B não admite um par de autovalores da forma $\pm\lambda$, $\lambda \neq 0$, então $AB = BA$.

Prova do Lema 6.0.5 Se $r = 0$ é claro que $A = B = 0$ e $AB = BA$. Sejam então $r > 0$ e $\{v_i\}_{i=1}^n$ uma base de V tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, $i \geq 1$. Considere $v = v_1$. Temos $BAv = \lambda_1 Bv$. Se $\lambda_1 = 0$, temos que $BAv = 0$ e $\langle ABv, ABv \rangle = \langle A^2 Bv, Bv \rangle$. Usando (6.1) vemos que $A^2 B = BA^2$. Logo, $\langle ABv, ABv \rangle = \langle A^2 Bv, Bv \rangle = \langle BA^2 v, Bv \rangle = 0$. Isso mostra que $ABv = BA v = 0$. Suponha agora que $\lambda_1 \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} \langle BAv - ABv, v_i \rangle &= \langle BAv, v_i \rangle - \langle ABv, v_i \rangle \\ &= \lambda_1 \langle Bv, v_i \rangle - \langle Bv, Av_i \rangle = (\lambda_1 - \lambda_i) \langle Bv, v_i \rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Se $\lambda_i = \lambda_1$, é claro que $\langle BAv - ABv, v_i \rangle = 0$. Se $\lambda_i \neq \lambda_1$, também por hipótese $\lambda_i \neq -\lambda_1$, pois $\lambda_1 \neq 0$. Nesse caso, usando (6.1), temos

$$v_i = \frac{1}{r}(B^2 v_i + \lambda_i^2 v_i) \quad \text{e} \quad B^2 v = rv - \lambda_1^2 v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_i) \langle Bv, v_i \rangle &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)}{r} \langle Bv, B^2 v_i + \lambda_i^2 v_i \rangle \\ &= (\lambda_1 - \lambda_i) \left\{ \langle Bv, \lambda_i^2 v_i \rangle + \langle B^2 v, Bv_i \rangle \right\} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)}{r} \left\{ \lambda_i^2 \langle Bv, v_i \rangle + (r - \lambda_1^2) \langle Bv, v_i \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $(\lambda_1 - \lambda_i)(r - \lambda_i^2 - r + \lambda_1^2)\langle Bv, v_i \rangle = 0$. Isso mostra que $\langle Bv, v_i \rangle = 0$. Segue agora de (6.2) que $\langle BAv - ABv, v_i \rangle = 0$. Como v_i foi escolhido arbitrariamente na base, podemos concluir que $BAv = ABv$. Mas $v = v_1$ também foi escolhido arbitrariamente na base $\{v_i\}_{i=1}^n$, o que prova que $AB = BA$.

Prova da Proposição 6.0.4 Seja $f : M_1^n \rightarrow Q_c^{n+2}$ uma imersão isométrica, onde M^n é uma variedade de Einstein. Para cada $x \in M^n$ escolha uma base ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\}$ de $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \vec{H}/H$ quando $H(x) \neq 0$. Usando (1.17), obtemos

$$A_{\xi_1}^2 + A_{\xi_2}^2 - nHA_{\xi_1} = (-\rho + (n-1)c)I, \quad (6.3)$$

onde $I : T_x M \rightarrow T_x M$ é a identidade. Podemos escrever (6.3) como

$$A^2 + B^2 = rI,$$

onde $A = A_{\xi_1} - \frac{nH}{2}I$, $B = A_{\xi_2}$ e $r = -\rho + (n-1)c + \frac{n^2H^2}{4}$. Seja agora $\rho > (n-1)c$. Nesse caso, segue de (6.3) que se μ é um autovalor para A_{ξ_1} então $\mu > 0$. Note que a condição $R^\perp = 0$ é equivalente ao fato de que $A_{\xi_1}A_{\xi_2} = A_{\xi_2}A_{\xi_1}$, que por sua vez é equivalente a $AB = BA$. Suponha agora por absurdo que $AB \neq BA$. Segue do Lema (6.0.5) que A admite um par de autovalores da forma $\pm\lambda$ com $\lambda \neq 0$. Por sua vez, isso implica que A_{ξ_1} tem um par de autovalores μ_1, μ_2 , tais que $\mu_1 + \mu_2 = nH$. Mas $\text{tr}A_{\xi_1} = nH$. Como $n \geq 3$, deve existir um autovalor não positivo para A_{ξ_1} , o que é uma contradição. Isso mostra que $A_{\xi_1}A_{\xi_2} = A_{\xi_2}A_{\xi_1}$, o que é equivalente a $R^\perp = 0$. Sejam agora $\rho = (n-1)c$, $x \in M^n$ e suponha que $R_x^\perp \neq 0$. Então, pelo mesmo motivo acima exposto, $AB \neq BA$. Por outro lado é fácil ver, usando (6.3), que se μ é um autovalor de A_{ξ_1} , então $\mu \geq 0$. Denote por $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ os autovalores de A_{ξ_1} . Como $AB \neq BA$, segue do Lema 6.0.5 que A tem dois autovalores da forma $\pm\lambda$, onde $\lambda \neq 0$. Isso mostra que A_{ξ_1} tem dois autovalores (digamos

μ_1, μ_2), tais que $\mu_1 + \mu_2 = nH$. Como $\mu_i \geq 0$, é claro que $\mu_3 = \dots = \mu_n = 0$. Afirmamos que $\mu_1 \neq 0$ e $\mu_2 \neq 0$. Com efeito, suponha que $\mu_2 = 0$ (o caso $\mu_1 = 0$ é similar). Segue de (6.3) que $A_{\xi_2}v_2 = 0$. Em particular, como $A_{\xi_1}v_i = 0$, $i \geq 3$, então também $A_{\xi_2}v_i = 0$, $i \geq 3$. Desde que $\text{tr}A_{\xi_2} = 0$, concluimos que $A_{\xi_2} = 0$ e portanto $A_{\xi_2}A_{\xi_1} = A_{\xi_1}A_{\xi_2}$, o que é uma contradição. Dessa forma, temos que $\mu_1 \neq 0$ e $\mu_2 \neq 0$ e é claro que nesse caso $\nu_f(x) = n - 2$. Isso encerra a prova de (b).

Prova do Teorema 5 Seja $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+2}$, $c \geq 0$, uma imersão isométrica, onde M^n é uma variedade de Einstein completa com curvatura de Ricci ρ .

Seja $n = 4$ e assuma que $\rho \geq 2H^2 + 3c$ em M^4 . Provaremos inicialmente que M^4 tem curvatura seccional não negativa. Para isso, sejam $\{v_1, v_2\}$ um conjunto ortonormal em $T_x M$ e $\{v_i\}_{i=1}^4$ uma base ortonormal de $T_x M$. Segue da equação de Gauss (1.9) que

$$\rho = \text{Ric}(v_j) = \sum_{\beta=1}^2 \langle A_{\xi_\beta} v_j, v_j \rangle \sum_{i \neq j} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_i \rangle - \sum_{\beta=1}^2 \sum_{i \neq j} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_j \rangle^2 + 3c,$$

onde $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, 4$ e $\{\xi_1, \xi_2\}$ é uma base ortonormal em $(T_x M)^\perp$ tal que $\xi_1 = \vec{H}/H$ quando $H(x) \neq 0$. Desde que $\text{tr}A_{\xi_1} = 4H$ e $\text{tr}A_{\xi_2} = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2\rho &= \text{Ric}(v_1) + \text{Ric}(v_2) = 4H [\langle A_{\xi_1} v_1, v_1 \rangle + \langle A_{\xi_1} v_2, v_2 \rangle] \\ &\quad - \sum_{\beta=1}^2 \left[\langle A_{\xi_\beta} v_1, v_1 \rangle^2 + \langle A_{\xi_\beta} v_2, v_2 \rangle^2 \right] + a + 6c, \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde

$$a = - \sum_{\beta=1}^2 \left[\sum_{i \neq 1} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_1 \rangle^2 + \sum_{i \neq 2} \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_2 \rangle^2 \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2\rho = & -[\langle A_{\xi_1} v_1, v_1 \rangle + \langle A_{\xi_1} v_2, v_2 \rangle - 2H]^2 - [\langle A_{\xi_2} v_1, v_1 \rangle + \langle A_{\xi_2} v_2, v_2 \rangle]^2 + \\
& + 2 \sum_{\beta=1}^2 [\langle A_{\xi_\beta} v_1, v_1 \rangle \langle A_{\xi_\beta} v_2, v_2 \rangle] + a + 4H^2 + 6c.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Agora, pela equação de Gauss temos que

$$K(v_1, v_2) = \sum_{\beta=1}^2 \langle A_{\xi_\beta} v_1, v_1 \rangle \langle A_{\xi_\beta} v_2, v_2 \rangle - \sum_{\beta=1}^2 \langle A_{\xi_\beta} v_1, v_2 \rangle^2 + c.$$

Descartando os dois primeiros termos do lado direito de (6.5) e usando $K(v_1, v_2)$, obtemos

$$2\rho \leq 2[K(v_1, v_2) - c] + 2 \sum_{\beta=1}^2 \langle A_{\xi_\beta} v_1, v_2 \rangle^2 + a + 4H^2 + 6c,$$

onde

$$2 \sum_{\beta=1}^2 \langle A_{\xi_\beta} v_1, v_2 \rangle^2 + a = - \sum_{\substack{\beta=1,2 \\ i \neq 1,2}} [\langle A_{\xi_\beta} v_i, v_1 \rangle^2 + \langle A_{\xi_\beta} v_i, v_2 \rangle^2] \leq 0.$$

Segue daí que

$$K(v_1, v_2) \geq \rho - 2H^2 - 2c. \tag{6.6}$$

(a) Sejam agora $n = 4$ e $c = 0$. Se $\rho \geq 2H^2$, decorre de (6.6) que M^4 tem curvatura seccional não negativa. Se $\rho = 0$, é claro que $H \equiv 0$ em M^4 . Neste caso, segue de (6.3) que $A_{\xi_1} = A_{\xi_2} = 0$ em M^4 . Isso prova que f é totalmente geodésica. Suponha agora que $\rho > 0$. Segue do teorema de Bonnet-Myers, que M^4 é compacta e que $\pi_1(M)$ é finito. Usando os resultados de [BM2] vemos que M^4 é necessariamente orientável. Também, segue dos resultados de [BM1] que $\pi_1(M) = \{0\}$. Em particular, decorre da Proposição 6.0.4(a), que M^4 tem operador de curvatura puro e não negativo. Temos assim uma variedade de Einstein M^4 , compacta, simplesmente conexa com operador de curvatura

puro e não negativo. Por um teorema devido a Tachibana [P., Corol. 5.4, p. 199], M^4 é um espaço simétrico. Temos então um espaço simétrico compacto com operador de curvatura puro e não negativo. Segundo [DMN], M^4 é um espaço de curvatura contante ou um produto de espaços de curvatura constante. Desde que M^4 é simplesmente conexa, é isométrica a $S_{c_1}^4$ ou a $S_{c_2}^2 \times S_{c_2}^2$. Além disso, no último caso, como em cada ponto de $S_{c_2}^2 \times S_{c_2}^2$ existe uma curvatura seccional que se anula, segue de (6.6) e de $\rho \geq 2H^2$ que $\rho \equiv 2H^2$ em M^4 . Por outro lado, como $\mathbb{R}^\perp = 0$, em cada ponto x de M^4 existe uma base $X_1, \dots, X_4$ de $T_x M$ que diagonaliza A_{ξ_1} e A_{ξ_2} , onde $\xi_1 = \vec{H}/H$ e ξ_2 é ortonormal a ξ_1 . Suponha que $A_{\xi_1} X_i = \lambda_i X_i$, $A_{\xi_2} X_i = \mu_i X_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Se $i \neq j$, podemos usar (6.3) para obter

$$\lambda_i^2 - 4H\lambda_i + \mu_i^2 = -2H^2, \quad \lambda_j^2 - 4H\lambda_j + \mu_j^2 = -2H^2. \quad (6.7)$$

Portanto,

$$(\lambda_i + \lambda_j - 2H)^2 + (\mu_i + \mu_j)^2 = 2K(X_i, X_j). \quad (6.8)$$

Agora, como $R^\perp = 0$, os $K(X_i, X_j)$ são autovalores do operador de curvatura de M^4 . Logo, em todo ponto de M^4 , existem $i \neq j$ (digamos $i = 1$, $j = 2$) tais que $K(X_1, X_2) = 0$. Segue portanto de (6.8) que $\lambda_1 + \lambda_2 = 2H$ e $\mu_1 = -\mu_2$. Também, como $\text{tr} A_{\xi_2} = 0$, vemos que $\mu_3 = -\mu_4$. Usando (6.7), concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = H$ e que $\mu_1 = \pm H$, $\mu_2 = -\mu_1$, $\mu_3 = \pm H$, $\mu_4 = -\mu_3$. Então f é uma imersão pseudo-umbílica (isto é, $A_{\xi_1} = HI$), onde H é constante. Pelas Proposições 2.4 e 2.5 de [C1, p.178–179], concluímos que $\nabla^\perp \vec{H} = 0$ e que $f(M^4)$ é uma hipersuperfície mínima de uma esfera $S_{c_1}^5$ totalmente umbílica em $\mathbb{R}^6$. Isso prova (a).

(b) Seja $c > 0$, tal que $\rho \geq 2H^2 + 3c \geq 3c$. Note que se $\rho = 3c$, $H = 0$ e portanto segue de (6.3) que f é totalmente geodésica e $M^4 = S_c^4$. Seja agora $\rho > 3c$. Decorre da Proposição 6.0.4(a) que $R^\perp = 0$. Em particular, segue desse fato e de (6.6) que M^4 tem operador de curvatura positivo. Agora, é fácil ver, de acordo com (1.18) e $\rho \geq 2H^2 + 3c$, que $S \leq 8H^2 < 8H^2 + 4c$. Usando o Teorema 2(a), concluímos que $H_2(M, Z) = 0$ e o mesmo vale para $\widetilde{M}^4$. Nesse caso, segue do Lema 1.3.1 que $\pi_1(M) = 0$. Temos então uma variedade de Einstein M^4 , simplesmente conexa, com operador de curvatura positivo. Usando o teorema de Tachibana [T], vemos que M^4 é isométrica a uma esfera $S_{c_1}^4$.

(c) Sejam $c = 0$, $n \geq 5$ e $\rho \geq \frac{n(n-2)H^2}{n-1}$. Usando (1.18), temos que

$$S \leq \frac{n^2 H^2}{n-1} \quad (6.9)$$

em M^n . Mas nesse caso, Chen [C2, Lema 3.2], provou que se $x \in M^n$ e $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto ortonormal em $T_x M$, então

$$2K(v_1, v_2) \geq -S + \frac{n^2 H^2}{n-1}. \quad (6.10)$$

Em particular, isso mostra que M^n tem curvatura seccional não negativa. Se $\rho = 0$, é claro que $H = 0$ em M^n . Nesse caso, segue de (6.9) que $S = 0$ e f é totalmente geodésica. Seja agora $\rho > 0$. Em particular, M^n é compacta e $\pi_1(M)$ é finito. Usando os resultados de [BM2] e [BM1], concluímos que $\pi_1(M) = \{0\}$. Agora, apenas um dos casos abaixo pode ocorrer:

1º caso - Existe $x \in M^n$ tal que todas as curvaturas seccionais são positivas em x . Segue então do teorema de Tachibana (veja [T] ou [P, Cor. 5.4]), que M^n é isométrica a uma

esfera $S_{c_1}^n$.

2º caso - Para cada ponto de M^n , existe uma curvatura seccional que se anula neste ponto. Nesse caso, segue de (6.9) e (6.10) que $S = \frac{n^2 H^2}{n-1}$ e $\rho = \frac{n(n-2)H^2}{n-1}$ em M^n . Afirmamos que $H = 0$ em M^n . De fato, assumamos que $H(x_0) \neq 0$ em algum ponto $x_0 \in M^n$. Em particular, Chen [C2, Lema 3.2], provou que neste caso existe um referencial ortonormal $\xi_1 = \vec{H}/H$, ξ_2 em $(T_x M)^\perp$ tal que A_{ξ_1} tem um autovalor $\mu = \frac{nH}{n-1}$ e, além disso, se $X \in T_x M$ é tal que $A_{\xi_1} X = \mu X$, então $A_{\xi_2} X = 0$. Levando esses dados em (6.3), concluimos que

$$\rho = \frac{n^2(n-2)H^2}{(n-1)^2} = \frac{n(n-2)H^2}{n-1}.$$

Portanto, $H(x_0) = 0$, o que é uma contradição. Isso mostra que $H = 0$ em M^n e é claro que f é totalmente geodésica.

(d) Sejam $c > 0$, $n \geq 5$ e $\rho \geq \frac{n(n-2)H^2}{n-1} + (n-1)c \geq (n-1)c$. Note que se $\rho = (n-1)c$, então $H = 0$ e segue de (6.3) que f é totalmente geodésica. Seja agora $\rho > (n-1)c$. Segue da Proposição 6.0.4(a) que $R^\perp = 0$. Usando (1.18), temos que

$$S \leq \frac{n^2 H^2}{n-1} \tag{6.11}$$

em M^n . Desde que $\rho > (n-1)c$, segue de (6.3) que $\lambda_1 > 0$ e em particular,

$$S < \frac{n^2 H^2}{n-1} + \frac{n(n-2)H\lambda_1}{n-1} + nc$$

em M^n . Neste caso, podemos usar o Teorema 2(b) para concluir que M^n é homeomorfa a S^n . Por outro lado, Chen [C2, Lema 3.2], mostrou que para todo $x \in M^n$ e todo conjunto ortonormal $\{v_1, v_2\}$ em $T_x M$,

$$2K(v_1, v_2) \geq -S + \frac{n^2 H^2}{n-1} + 2c.$$

Isso prova, segundo (6.11), que M^n tem curvatura seccional estritamente positiva. Desde que $R^\perp = 0$ e $\pi_1(M) = \{0\}$, segue do teorema de Tachibana [T] que M^n é isométrica a uma esfera $S_{c_1}^n$. Isso encerra a demonstração de (d).

Prova do Corolário 5 Sejam M^n completa e $\rho_o = \inf$ das curvaturas de Ricci de M^n . Suponha que ρ_o satisfaz (6). Se $n = 4$, note que (6.6) continua válida para ρ_o . Também, se $n \geq 5$, (6.9) e (6.10) continuam válidas. Em particular, em qualquer situação, M^n tem curvatura seccional não negativa e apenas uma das duas possibilidades (a) e (b) pode ocorrer:

(a) Existe um ponto em M^n tal que as curvaturas seccionais neste ponto são estritamente positivas. Em particular, $\rho_o > 0$. Neste caso, seguem dos resultados de [BM2] e [BM1] que M^n é homeomorfa a S^n .

(b) Para cada ponto $x \in M^n$, existe uma curvatura seccional que se anula nesse ponto. Considere inicialmente que $n = 4$. Segue de (6.6) que $\rho_o = 2H^2$ em M^4 e portanto $\tau = 8H^2$ em M^4 . Sejam agora $x \in M^4$ e $\{v_i\}_{i=1}^4$ uma base ortonormal qualquer de $T_x M$. Temos

$$\text{Ric}(v_1) + \text{Ric}(v_2) + \text{Ric}(v_3) + \text{Ric}(v_4) = \tau = 8H^2.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^4 (\text{Ric}(v_i) - 2H^2) = 0.$$

Mas $\text{Ric}(v_i) \geq \rho_o = 2H^2$. Isso mostra que $\text{Ric}(v_i) = 2H^2$ e é claro que M^4 é uma variedade de Einstein. Neste caso, o resultado (b1) seguirá do Teorema 5(a).

Seja agora $n \geq 5$. Usando (6.9) e (6.10), obtemos

$$\rho_o = \frac{n(n-2)H^2}{n-1} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{n(n-2)H^2}{n-1} \quad \text{em } M^n.$$

Aplicando os mesmos argumentos do caso anterior, concluimos que M^n tem curvatura de Ricci constante e igual a ρ_o . Neste caso, (b2) seguirá então do Teorema 5(c).

Prova do Corolário 6

Seja $\rho_o > 2H^2 + 2c$ em M^4 . Então $\tau > 8H^2 + 8c$ em M^4 . Usando (1.18), vemos que $S \leq 8H^2 < 8H^2 + 4c$ em M^4 . Portanto, segue do Teorema 2(a) que $H_2(M, Z) = 0$ e o mesmo vale para $\widetilde{M}^4$. Agora, é só usar o Lema 1.3.1 para concluir que se M^4 é orientável, então M^4 é homeomorfa a S^4 .

Referências

- [A] Aubin, T., *Metriques Riemanniennes et courbure.*, J. Diff. Geom., **4** (1970), 385–424.
- [ACN] Asperti, A.C., Castro, H.P., Noronha, M. H., *Compact homogeneous Einstein manifolds in codimension two*, Note di Matematica, vol. 161, (1996), 9-19.
- [AdC] Alencar, H. e do Carmo, M. *Hypersurfaces with constant mean curvatures in spheres*, Proc. of A.M.S., **120** (1994), 1223–1228.
- [B] Bredon, G.E. *Topology and geometry*. Springer-Verlag, 1993.
- [BM1] Balbin, Y. e Mercuri, F. *Isometric immersions in codimension two with nonnegative curvature.*, Math. Z., **173** (1980), 111-117.
- [BM2] Balbin, Y. e Mercuri, F. *Codimension two nonorientable submanifolds with non-negative curvature.*, Proc. A.M.S., **103** (1988), 918–920.
- [BW] Brito, F.G.B. e Walczak, P.G. *Totally geodesic foliations with integrable normal bundles.*, Bol. Soc. Bras. Mat., v.17, **1**, (1986), 41–46.
- [C1] Chen, B.Y. *Geometry of submanifolds.*, M. Dekker, N. York, 1973.
- [C2] Chen, B.Y. *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds.*, Arch. Math., **60** (1993), 568–578.
- [CdCK] Chern, S.S., do Carmo, M. e Kobayashi, S. *Minimal submanifolds of the sphere with second fundamental form of constant length.*, Func. Anal. and Related Fields. (1970), 59–75, Springer - New York.
- [CG] Cheeger, J. e Gromoll, D. *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature.*, J. Diff. Geom., **6** (1971), 119–128.
- [CY] Chen, B.Y. e Yano, K. *Sous-varieté localement conformes a un espace euclidean.*, C.R. Acad. Sci. Paris, **275** (1972), 123–126.

- [D] Dajczer, M. *Submanifolds and isometric immersions*. Publishy or Perish, Inc. Houston, 1990.
- [dCDM] do Carmo, Dajczer, M. e Mercuri, M. *Compact conformally flat hypersurfaces.*, Trans. A.M.S., **288**, (1985), 189-203.
- [DMN] Derdziński, A., Mercuri, F. e Noronha, M.H., *Manifolds with pure non-negative curvature operator*, Bol. Soc. Bras. Mat., **18**, (1987), 13-22.
- [E] Erbarcher, J., *Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connection.*, Nagoya Math. J., **45**, (1971), 139-165.
- [FF] Federer, H. Fleming, W., *Normal and integral currents*. Ann. of Math., **72**, (1960) 458-520.
- [H] Hamilton, R.S. *Three manifolds with positive Ricci curvature.*, J. Diff. Geom., **17**(1982), 255-306.
- [Ho] Hou, H.Z., *A pinching problem on submanifolds with parallel meean curvature vector field in a sphere.*, Kodai, Math. J., **21**, (1998), 35-45.
- [Hu] Hu, Z-J., *Complete hypersurfaces with constant mean curvature and non-negative sectional curvatures.*, Proc. A. M. S., Vol 123, **9**, (1995), 2835-2840.
- [K] Kenmotsu, K. *Some remarks on minimal submanifolds*. Tohoku Math. J., **22** (1970), 240-248.
- [Ku] Kuiper, N.H., *On conformally flat spaces in the large.*, Ann. of Math., **50**, (1949), 916-924.
- [L] Lawson, H.B. *Local rigid theorems for minimal hypersurfaces.*, Ann. of Math., **89** (1969), 187-197.
- [Le1] Leung, P.F. *Minimal submanifolds in sphere.*, Math. Z., **183**, (1983) 75-86.
- [Le2] Leung, P.F., *On a relation between the topology and the intrinsic and extrinsic geometries of a compact submanifold.*, Proc. Ed. Math. Soc., **28** (1985), 305-311.
- [Le3] Leung, P.F., *An estimate on the Ricci curvature of a submanifold and some applications.*, Proc. A.M.S., **114**, (1992), 1051-1061.
- [LS] Lawson, H.B. e Simons, J., *On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry.*, Ann. of Math., **98** (1973), 427-450.

- [M] Matsuyama, Y., *Minimal Einstein submanifolds with codimension two*, Tensor, New Ser. 52,1(1993),61-68.
- [N] Noronha, M.H., *Some compact conformally flat manifolds with non-negative scalar curvature.*, Geom. Dedicata,47, (1993),225-268.
- [O] Okumura, M., *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor.*, Trans.AM.S., 178, (1973),285-291.
- [P] Petersen, P., *Riemannian Geometry.*, 1998, Springer-Verlag-N.York, Inc.
- [R] Ryan, P., *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces.*, Tôhoku, Math. J., 21 (1969), 363-388.
- [S] Santos, W., *Imersões com vetor curvatura média paralelo na esfera.*, Tese de Doutorado (IMPA), Série F-051.
- [Si] Simons, S.J., *Minimal varieties in Riemannian manifolds.*, Ann. of Math., 88 (1968), 62-105.
- [Sj] Sjerve, D., *Homology spheres wich are covered by spheres.*, J. London Math. Soc., vol.6, 2, (1973), 333-336.
- [ST] Sekigawa K. e Takagi, H., *On conformally flat spaces satysfying a certain condition on the Ricci tensor.*,Tôhoku Math. J., 23, (1973), 1-11.
- [SX] Shiohama, K. e Xu, H., *The topological sphere theorem for complete submanifolds.*, Comp. Math., 107 (1997), 221-232.
- [T] Tachibana, S., *A theorem on Riemannian manifolds of positive curvature operator.*, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 301-302.
- [Xi] Xin, Y.L. , *An application of integral current to the vanishing theorems*, Sci. Sinica, Ser. A, 27 (1984), 234-241.
- [Xu] Xu, H., *A rigity theorem for submanifolds with paralell mean curvature vector in a sphere.*, Arch. Math. (Basel), 61 (1993), 489-496.
- [Y] Yau, S.T., *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math., vol. 97, 1, (1975), 76-100.
- [W] Wei, S.W., *Generalized idea of Synge and its applications to topology and calculus of variations in positively curved manifolds.*, Proc. of Symp. on Pure Mathematics, 45 (1986), Part 2, 533-539.

- [Z] Zhang, X.S., *Geometry and topology of submanifolds*, Kodai Math. J., **17**, (1994) 262-272.