Sobre Ações Parciais, Fibrados de Fell, e Grupóides

Fernando Abadie – Vicens ¹

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**
Orientador: **Prof. Dr. Ruy Exel**
1 de Setembro de 1999

¹Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da Fapesp, Processo No. 95/04097-9

Sobre Ações Parciais, Fibrados de Fell, e Grupóides

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e defendida por Fernando Abadie-Vicens, e aprovada pela comissão julgadora

São Paulo, 1 de Setembro de 1999

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (Presidente)	UFSC, IME-USP
Prof. Dr. Paulo Piccione	IME-USP
Prof. Dr. Antonio Roberto Da Silva	IM-UFRJ
Prof. Dr. Cassio Sigaud	IF-UFRJ
Prof. Dr. Gustavo Corach	UBA

AGRADECIM(I)ENTOS

A tese é longa, os agradecimentos também.

Antes que nada, agradezco a mi esposa, Daniella, y a mi hijo Marcos, que muchas veces me prestaron un tiempo que no se puede devolver, y me apoyaron en todo momento. Gracias a ellos concluí este trabajo, y a ellos también les pertenece.

Quero agradecer também ao Ruy pela dupla oportunidade de ter aceito ser meu orientador de mestrado primeiro, e de doutorado depois. Sua paixão pela matemática foi um permanente estímulo para mim, e seu profissionalismo um exemplo invalorable. Além do mais, o valor desta tese teria sido muito menor sem suas sugestões e correções.

A nuestras familias, que siempre nos alentaron y apoyaron.

A Jorge y Marcelo, que me hospedaron en su casa cuando llegué a San Pablo, y con quienes compartimos muy buenos momentos, conversaciones delirantes, cine, fútbol, pan con requesón y jamón, café con leche, cerveza, chocolates Bis, y otras mil cosas, incluyendo matemática. Con Marcelo fuimos, también, compañeros de carcajes y semillas de girasol.

Aos meus colegas da USP, de várias nacionalidades: Juaci, Ana Cláudia, Lúcia, Jair, Orlando. Claus, Pablo, Marcela, Ayumi, Marcelo, Saraiva, Bárbara, Irene, Zé, Sidney, Raul, Márcio, Cristian. Carolina, Nelson, Jorge, Jocirei, Ronaldo, Jorge.

A Celso, Silviane, Mara, Vera, Cláudia, David, Ademir, Lúcia, Ruy, Gui e Karin.

A Carlos, Susana, Carlos César, Sandra y Carla. Dancona ellos, que nos recibieron con los brazos abiertos y con quienes pasamos hermosos momentos. Gracias a Luis también.

À Universidade Federal de Santa Catarina em Florianópolis, pela hospitalidade com que fui recebido e por ter me facilitado o uso de suas instalações.

A Martha, que siempre estuvo generosamente a nuestro lado.

Aos meus companheiros de seminário de Álgebras de Operadores em São Paulo e Florianópolis: Cristina, Paolo, Marcela, Ruy, Ayumi, Ariel, José e Luiz; cada um deles me ensinou alguma coisa.

A la familia Merklen, siempre dispuesta a dar una mano.

A Paolo e Djacuí, pela aconchegante hospitalidade com que me receberam em sua casa.

Pela mesma razão a Jorge, Jocirei, Ronaldo e Ramiro.

E também por isso a Claus e Fátima.

A la Universidad de la República, Uruguay, por el apoyo recibido.

A Bea, el Leva y Walter, con quienes le agarré el gustito a esto.

A Cristina e Paolo, pelos vários favores que fizeram à distância para mim.

A la querida Marcela, por hacer varios trámites por mí durante mi ausencia en San Pablo, por haber recibido, guardado y comunicado mi correspondencia, y por otros múltiples favores.

A nuestra comunidad uruguaya y afín en San Pablo, por los momentos vividos: Jorge, Marcelo. Ana, Marcela, Daniel, Irene, Zé, Cecilia, Nelson, Jorge, Leticia, Fanny, Pablo.

A Nelson, que entre otras cosas le preparó y le dio la mema a Marcos varias veces, y nos dejó dormir un rato más.

A la gran Cecilia, siempre primera a la hora de mudanzas y hospitales. Che Ceci, sabés que ahora nos vamos para Montevideo a buscar donde vivir, y como nuestras cosas están en Paysandú, en una de esas nos podés dar una manito ...

A Jorge, con quien tanto ejercitamos el bello idioma castellano.

A Ayumi, nossa companheira e amiga em São Paulo e em Floripa. Vamos dizer o que? Te esperamos em Uruguay.

A nuestros compañeros chilenos, rivales en la cancha de fútbol. No se amarguen che, no siempre se gana; ¡pero podrían haberlo hecho por lo menos una vez! Igual, lo importante es jugar, ¿no?

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro recebido.

Ao Brasil e ao povo brasileiro.

*Este trabajo está dedicado
a la tripulación de mi barco
en este viaje:*

Marcos y Daniella

Abstract

This thesis has three parts. In the first one, we study the tensor products between Fell bundles and their applications. The main result of this part relates the maximal and minimal tensor products of the full and reduced cross sectional C^* -algebras of two Fell bundles, with the full and reduced cross sectional C^* -algebras of the corresponding maximal and minimal tensor products of the bundles. As an application we see, for instance, that the cross sectional C^* -algebra of a Fell bundle with the approximation property and exact fiber is also exact. In particular, the crossed product of an exact C^* -algebra by a partial action of an amenable group is exact.

In the second part, we study and solve in three categories the following problem: when is a partial action the restriction of a global one? Such an action is called enveloping action, and the space where it acts is the enveloping space. In the category of sets and maps, the enveloping action exists and is unique, and it is characterized by a universal property. The same happens in the category of topological spaces and continuous functions. In this case, however, the enveloping action of a partial action that acts on a Hausdorff space does not act in general on a Hausdorff space. We show that the enveloping space is Hausdorff if and only if the original one is Hausdorff, and the graph of the partial action is closed. We show that the flow of a vector field on a manifold is a partial action, whose graph may be closed or not. There exists one and only one enveloping action in the category of C^* -algebras and Morita equivalence bimodules as morphisms. In this context, the problem of the enveloping action turns out to be intimately related with Takai duality. In fact, our study of the enveloping action shows the form that Takai duality takes for crossed products by partial actions. As applications, we mention two. We prove that any partial action of a connected group on a unital C^* -algebra must be a global action. This generalizes the well known fact that the solutions of a differential equation on a compact manifold are defined on all of the real line. We also prove that the crossed product of the reduced cross sectional C^* -algebra of a Fell bundle by the dual coaction is liminal, postliminal, or nuclear, if and only if the unit fiber of the bundle is, respectively, liminal, postliminal, or nuclear.

In the third part we show that any partial action on a commutative C^* -algebra has naturally associated a groupoid with a Haar system, and that the crossed product by the partial action is isomorphic to the C^* -algebra of the groupoid.

Resumo

Esta tese tem tres partes. Na primeira, estudamos os produtos tensoriais de fibrados de Fell e suas aplicações. O resultado principal desta parte relaciona os produtos tensoriais máximo e mínimo das C^* -álgebras seccionais plena e reduzida de dois fibrados de Fell, com as C^* -álgebras plena e reduzida dos correspondentes produtos tensoriais máximo e mínimo dos fibrados. Como aplicação vemos, por exemplo, que se um fibrado de Fell satisfaz a propriedade de aproximação e tem fibra exata, então sua C^* -álgebra seccional é exata. Em particular, o produto cruzado de uma C^* -álgebra exata por uma ação parcial de um grupo amenable também é exato.

Na segunda parte estudamos e resolvemos em três categorias o seguinte problema: toda ação parcial é a restrição de uma ação global? Uma tal ação global é chamada ação envolvente, e o espaço onde age é o espaço envolvente. Na categoria de conjuntos e funções a ação envolvente existe e é única, e ela está caracterizada por uma propriedade universal. Na categoria de espaços topológicos e funções contínuas também. Porém, neste caso a ação envolvente de uma ação parcial sobre um espaço de Hausdorff pode estar agindo sobre um espaço que não é de Hausdorff. Vemos então que o espaço envolvente é de Hausdorff se e somente se o espaço inicial é de Hausdorff e o gráfico da ação parcial é fechado. Mostramos que o fluxo de um campo vetorial sobre uma variedade é uma ação parcial, cujo gráfico é fechado em alguns casos e em outros não. Na categoria de C^* -álgebras com os bimódulos de equivalência Morita como morfismos, a ação envolvente existe e é única. Neste contexto, o problema da ação envolvente está intimamente ligado com a dualidade de Takai. De fato, através do nosso estudo da ação envolvente mostramos qual é a forma que a dualidade de Takai toma para produtos cruzados por ações parciais. Como aplicações, mencionamos duas a seguir. Provamos que toda ação parcial de um grupo conexo sobre uma C^* -álgebra com unidade deve ser uma ação global, o que generaliza o conhecido fato de que as soluções de uma equação diferencial sobre uma variedade compacta estão definidas em toda a reta real. Também provamos que o produto cruzado da C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell pela coação dual é liminal, postliminal ou nuclear, se e somente se a fibra sobre a identidade é respectivamente liminal, postliminal, ou nuclear.

Na terceira parte mostramos que toda ação parcial sobre uma C^* -álgebra comutativa tem naturalmente associado um grupóide com sistema de Haar, e que o produto cruzado pela ação parcial é isomorfo à C^* -álgebra do grupóide.

Conteúdo

Prefácio	xiii
Parte I. Produtos Tensoriais de Fibrados de Fell	1
Introdução à Parte I	3
Capítulo 1. Produtos Tensoriais de C^* -anéis Ternários	9
1.1. C^* -anéis ternários	11
1.2. Produtos tensoriais de C^* -anéis ternários	19
1.3. C^* -anéis ternários exatos	28
Capítulo 2. Produtos Tensoriais de Fibrados de Fell	31
2.1. Produtos tensoriais de fibrados sobre grupos discretos	32
2.2. Produtos tensoriais de fibrados sobre grupos contínuos	36
2.3. Representações de produtos tensoriais de fibrados de Fell	40
Capítulo 3. C^* -álgebras seccionais de produtos tensoriais de fibrados de Fell	47
3.1. C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell. Amenabilidade	49
3.2. C^* -álgebras seccionais de produtos tensoriais de fibrados de Fell	54
3.3. Algumas aplicações	59
3.4. Comentários finais	69
Parte II. Ações Envolventes de Ações Parciais	71
Introdução à Parte II	73
Capítulo 4. Ações Envolventes na Categoria de Espaços Topológicos	79
4.1. Ações envolventes de ações parciais sobre conjuntos	80
4.1.1. Ações parciais sobre conjuntos	80
4.1.2. Ações envolventes	86
4.2. Ações envolventes de ações parciais topológicas	90
4.2.1. Uma construção alternativa do espaço e da ação envolventes	95
4.2.2. Alguns exemplos	96
4.2.3. Propriedades dinâmicas da ação envolvente	100
Capítulo 5. Ações Envolventes na Categoria de C^* -álgebras	103
5.1. Sobre a unicidade da ação envolvente	107
5.2. Ação parcial sobre o espectro e o espaço de ideais primitivos	108
5.3. Propriedades da álgebra envolvente	113
Capítulo 6. Produtos Cruzados Parcial e Envolvente	117
6.1. Equivalência Morita dos produtos cruzados parcial e envolvente	118

6.2. Aplicações e exemplos	122
Capítulo 7. Ações Morita Envolventes	133
7.1. Ações parciais equivalentes Morita.	134
7.2. C^* -álgebras de núcleos associadas a um fibrado de Fell	140
7.2.1. Operadores de Hilbert–Schmidt e núcleos de um fibrado de Fell	141
7.2.2. Ação sobre os núcleos	144
7.2.3. A C^* -álgebra reduzida dos núcleos de um fibrado de Fell	145
7.2.4. $\mathbb{K}(\mathcal{B}) = \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, e algumas aplicações	151
7.3. Sobre a existencia da ação envolvente a menos de equivalência Morita	153
7.4. Sobre a unicidade da ação envolvente a menos de equivalência Morita	158
7.5. Ações envolventes e produtos cruzados por coações	160
7.6. Algumas aplicações	163
Parte III. Produtos Cruzados Parciais e C^*-álgebras de Grupóides	165
Introdução à Parte III	167
Capítulo 8. Grupóide Associado a uma Ação Parcial	169
8.1. Ações parciais sobre X e ações parciais sobre $C_0(X)$	170
8.2. Grupóide associado a uma ação parcial	172
8.3. Sistema de Haar sobre $\mathcal{G}$	174
8.4. O Produto Cruzado Parcial e a C^* -álgebra do Grupóide	176
Bibliografia	181

Prefácio

Nesta tese estudamos diferentes aspectos das ações parciais e suas relações com as ações globais, os fibrados de Fell, e os grupóides.

A seguir descrevemos de forma bastante esquemática o trabalho. Maiores detalhes podem ser progressivamente achados nas introduções a cada parte, capítulo e seção.

Na Parte I estudamos os produtos tensoriais de fibrados de Fell. Os resultados obtidos, aplicados às ações parciais, permitem concluir que todo produto cruzado de uma C^* -álgebra nuclear por uma ação parcial contínua e torcida de um grupo localmente compacto amenable é também nuclear. Um resultado análogo é obtido para C^* -álgebras exatas.

Na Parte II consideramos o seguinte problema: quando e em que sentido uma ação parcial é a restrição de uma ação global? As respostas dependem da categoria onde ocorre a ação parcial, e também do que entendamos por restrição de uma ação parcial. Como veremos no Capítulo 7, na classe das C^* -álgebras é conveniente considerar estas restrições “a menos de equivalência Morita”. Neste sentido, mostramos que se α é uma ação parcial contínua de um grupo localmente compacto G sobre uma C^* -álgebra A , então existe uma ação global β sobre uma C^* -álgebra B , que tem um ideal I cuja β -órbita linear fechada é B , tal que α é equivalente Morita com $\beta|_I$. Provamos também que esta ação β é única a menos de equivalência Morita. Vemos também que este problema está intimamente relacionado com a dualidade de Takesaki–Takai de produtos cruzados. Ao longo do desenvolvimento da segunda parte, surgem alguns resultados sobre produtos cruzados por coações que acreditamos são novos; por exemplo, se B é um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , com fibra B_e sobre a identidade de G , e se δ é a coação dual de G sobre $C_r^*(B)$, então $C_r^*(B) \rtimes_{\delta,r} G$ é nuclear, liminal, postliminal, se e somente se B_e é respectivamente nuclear, liminal, postliminal.

A última parte é praticamente um apêndice desta tese. Nela vemos que toda ação parcial α de um grupo localmente compacto G sobre uma C^* -álgebra comutativa A tem associado naturalmente um grupóide localmente compacto $\mathcal{G}$, com um sistema de Haar canônico, e tal que a C^* -álgebra do grupóide $C^*(\mathcal{G})$ coincide com o produto cruzado $A \rtimes_{\alpha} G$.

Os produtos cruzados por grupos localmente compactos foram gradualmente definidos e estudados durante a década dos anos sessenta. Para ações de grupos discretos, foram introduzidas por Turumaru em [62], e estudados em profundidade por Zeller-Meyer em [67]. Os produtos cruzados de C^* -álgebras comutativas por grupos localmente compactos, também chamados C^* -álgebras de grupos de transformações, foram introduzidas por Glimm em [38], e estudados com detalhe por Effros e Hahn ([22]). A definição geral se deve a Doplicher, Kastler e Robinson ([21]). A idéia é codificar, na estrutura do produto cruzado, a ação do grupo sobre uma C^* -álgebra. Os produtos cruzados são usados tanto para estudar estas ações como para produzir novos exemplos de C^* -álgebras, ou descrever outras já conhecidas em termos de elementos mais simples.

Posteriormente, no final dos anos sessenta e durante os anos setenta e oitenta, foram introduzidas e estudadas outras construções relacionadas com a noção de produto cruzado. Talvez as principais sejam os fibrados de Fell e as C^* -álgebras de grupóides.

Em [34], [35], e [36], tentando generalizar a “análise do subgrupo normal” de Mackey, Fell desenvolveu a teoria de fibrados de Banach C^* -algébricos, hoje chamados fibrados de Fell, que de uma certa forma podem ser considerados como uma generalização dos produtos cruzados: cada produto cruzado induz um fibrado de Fell, cuja C^* -álgebra seccional coincide com o produto cruzado. A forma final de boa parte da obra de Fell se encontra em [37].

No ano 1980 apareceu o trabalho de J. Renault sobre C^* -álgebras de grupóides ([58]). As C^* -álgebras de grupóides constituem uma generalização das C^* -álgebras de grupos, dos produtos cruzados de C^* -álgebras comutativas por grupos localmente compactos, e das C^* -álgebras de folheações. Em muitos casos constituem um substituto adequado ao espaço de funções contínuas sobre espaços topológicos quociente não Hausdorff (ver por exemplo [15]).

Já nos anos noventa, uma generalização dos produtos cruzados, mais próxima da idéia original que os fibrados de Fell e as C^* -álgebras de grupóides, começou a ser desenvolvida por Exel em [23]. Em lugar de tomar uma ação dos inteiros sobre uma C^* -álgebra, o que é equivalente a dar um automorfismo da C^* -álgebra, se considera apenas um automorfismo parcial, isto é, um isomorfismo entre dois ideais da C^* -álgebra, e se consegue fazer uma construção análoga à de produto cruzado, assim como descrever algumas classes amplas de C^* -álgebras através desta construção ([25], [24]). Logo depois, esta construção foi generalizada, primeiro para o caso de ações parciais de grupos discretos ([47]), e depois para o caso geral de ações parciais torcidas de um grupo localmente compacto ([27]). Os produtos cruzados parciais estão intimamente ligados com os fibrados de Fell: em [27] se mostra que, sob certas condições não muito restritivas, todo fibrado de Fell provém de uma ação parcial torcida do grupo base. Posteriormente, outras C^* -álgebras foram descritas como produtos cruzados parciais, e inclusive generalizadas, como as C^* -álgebras de Cuntz–Krieger para matrizes infinitas ([31]).

Assim, as teorias de produtos cruzados, produtos cruzados parciais, C^* -álgebras de grupóides e fibrados de Fell, são teorias fortemente ligadas, de forma que resultados em uma delas podem produzir resultados em outra. O objetivo geral deste trabalho é achar novas relações entre todas estas construções, guiados pela teoria de ações parciais.

Parte I

Produtos Tensoriais de Fibrados de Fell

Introdução à Parte I

Esta primeira parte da tese está dedicada a desenvolver uma teoria de produtos tensoriais de fibrados de Fell sobre grupos localmente compactos, e aplicar esta teoria aos produtos tensoriais de C^* -álgebras. Está constituída por três capítulos que generalizam os resultados obtidos em [3] ao caso contínuo, e além disso inclui um resultado sobre C^* -álgebras exatas.

As motivações para iniciar estes estudos foram várias e de diferente teor. Por um lado, houve a intenção, menor, de generalizar a teoria de produtos tensoriais de C^* -álgebras a produtos tensoriais de C^* -anéis ternários (as fibras de um fibrado de Fell são C^* -anéis ternários), visando aplicações às C^* -álgebras. Por outro, dois artigos de Exel, [27] e [29], colocavam o problema da “estabilização” de um fibrado de Fell como uma questão de relevância. Com efeito, em [27], um amplo espectro de fibrados de Fell são classificados: todo fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre um grupo localmente compacto G , tal que $\mathcal{B}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, e tem fibra B_e estável sobre a identidade de G , é isomorfo ao fibrado de Fell de alguma ação parcial contínua torcida de G sobre B_e . Lembrar que B_e é chamada estável se $B_e \cong B_e \otimes \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é a C^* -álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável. Supondo que $\mathcal{B}$ tem o segundo axioma de enumerabilidade, mas B_e não é estável, pode ser tentado “estabilizar” o fibrado $\mathcal{B}$. Isto implica definir algum tipo de produto tensorial do fibrado de Fell $\mathcal{B}$ por $\mathcal{K}$, sendo o resultado um novo fibrado de Fell sobre o grupo G , cuja fibra sobre a identidade de G seja $B_e \otimes \mathcal{K}$. De ter sucesso uma tal construção, o fibrado de Fell $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$ seria isomorfo a um fibrado de Fell originado por uma ação parcial contínua torcida de G sobre $B_e \otimes \mathcal{K}$, e desta forma poderíamos obter informação sobre o próprio fibrado $\mathcal{B}$. Em [29], é feita uma estabilização *ad hoc* de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$, via uma representação de $\mathcal{B}$; neste caso, nosso propósito era fornecer uma construção de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$ independente de toda representação de $\mathcal{B}$.

Para explicar nossa motivação principal, devemos ainda citar outros trabalhos. Por um lado, já em 1997 a KK -teoria de Kasparov permitia classificar, a menos de isomorfismos, as C^* -álgebras que são simples, puramente infinitas, e nucleares (os principais nomes ligados com esta classificação são Kirchberg, Phillips e Rørdam). A nuclearidade de uma C^* -álgebra é uma propriedade relativa a produtos tensoriais. Dadas C^* -álgebras A e B , sobre o produto tensorial algébrico $A \odot B$ é possível definir, em geral, mais de uma C^* -norma. Entre elas, existem uma que é máxima e outra que é mínima, sendo os correspondentes completamentos denotados por $A \otimes_{\max} B$ e $A \otimes_{\min} B$. Uma C^* -álgebra A é nuclear se $A \otimes_{\max} B = A \otimes_{\min} B$, para toda C^* -álgebra B . Os teoremas de classificação tornaram o problema da nuclearidade de uma C^* -álgebra mais importante do que nunca. Entre as C^* -álgebras nucleares se encontram as C^* -álgebras comutativas, as C^* -álgebras aproximadamente finitas, e as C^* -álgebras de Cuntz–Krieger. Além disso, a classe de C^* -álgebras nucleares é fechada por ideais, quocientes, extensões, limites indutivos, equivalência Morita, e produtos cruzados por grupos amenable. Em [4], C. Anantharaman–Delaroche generalizou o conceito de grupo amenable para o de ação amenable, e provou que o produto cruzado de uma C^* -álgebra nuclear por uma ação amenable de um grupo discreto é nuclear. Em particular, mostrou que se A é comutativa, então a ação é amenable sempre que certa propriedade de aproximação fosse satisfeita. Mais tarde, foi introduzida por Exel ([28]) a noção de fibrado de Fell amenable sobre um grupo discreto, que generaliza o conceito de amenabilidade de uma ação. Exel provou também que, se o fibrado tem certa propriedade de aproximação, cuja relação com a propriedade de aproximação de Anantharaman–Delaroche ainda não está esclarecida², então o fibrado é amenable. Surgiu então a conjectura de que todo fibrado de Fell sobre um grupo discreto, com fibra nuclear sobre a identidade do grupo e com a propriedade de aproximação de Exel, teria C^* -álgebra seccional nuclear. Provar este resultado foi a razão definitiva para desenvolver este trabalho (os resultados iniciais se encontram em [3]). Para completar a descrição do momento em que este trabalho foi empreendido, deveríamos mencionar ainda um outro antecedente. Por esta época, Exel e Laca estavam generalizando as C^* -álgebras de Cuntz–Krieger para o caso de matrizes infinitas, usando os métodos de ações parciais. Eles mostraram que estas álgebras são C^* -álgebras seccionais de fibrados de Fell sobre grupos discretos livres, em geral em

² Esta situação mudou recentemente; consultar [33], 4.5 e 4.6

infinitos geradores. Mostraram também que, sob determinadas condições na matriz, estas álgebras são simples e puramente infinitas; além disso, os fibrados de Fell correspondentes têm a propriedade de aproximação de Exel, e fibra comutativa sobre a identidade, em particular nuclear. Provando a conjectura citada, se concluiu então que estas álgebras são nucleares, e portanto seriam novos exemplos das C^* -álgebras classificáveis através da K -teoria.

Descrevamos de maneira geral esta Parte I. No início de cada capítulo e cada seção podem ser achadas introduções mais detalhadas.

Para definir os produtos tensoriais entre fibrados de Fell, consideramos primeiro os produtos tensoriais entre as fibras correspondentes dos fibrados. Estas fibras são C^* -anéis ternários positivos. Um C^* -anel ternário positivo é uma versão abstrata de um anel ternário de operadores fechado, ou seja, um subespaço de Banach $E \subseteq B(H, K)$, onde H e K são espaços de Hilbert, tal que $T_1 T_2^* T_3 \in E$, sempre que T_1, T_2, T_3 pertençam a E . Por exemplo, toda C^* -álgebra é um C^* -anel ternário positivo. Por outro lado, se $E \subseteq B(H, K)$ é um anel ternário de operadores fechado, então E é um módulo de Hilbert pleno à direita sobre a C^* -álgebra $B = \overline{\text{span}}\{T^* S : T, S \in E\} \subseteq B(H)$. Inversamente, todo módulo de Hilbert tem uma representação como anel ternário de operadores. Assim vemos que o estudo de produtos tensoriais entre C^* -anéis ternários é conveniente não somente como estágio intermediário antes de considerar produtos tensoriais entre fibrados de Fell, senão também porque generaliza os produtos tensoriais entre C^* -álgebras ao contexto de módulos de Hilbert. Em particular, isto é importante do ponto de vista da equivalência Morita de C^* -álgebras. Como a equivalência Morita de C^* -álgebras se expressa através de módulos de Hilbert, é razoável esperar que obtenhamos algumas conclusões interessantes ao considerar produtos tensoriais entre objetos que incluem tanto às C^* -álgebras quanto aos módulos de Hilbert. De fato, veremos que as propriedades das C^* -álgebras que são definidas a partir de produtos tensoriais, como a nuclearidade e a exatidão, são preservadas por equivalência Morita, devido a que estas propriedades são comuns aos próprios módulos de equivalência. Para ser um pouco mais precisos, notemos que sobre o produto tensorial algébrico $E \odot F$ entre dois C^* -anéis ternários E e F poderia existir mais de uma C^* -norma sobre $E \odot F$, ou seja, uma norma tal que o correspondente completamente fosse um C^* -anel ternário: pensar, por exemplo, que E e F poderiam ser C^* -álgebras. Veremos que, como no caso de C^* -álgebras, existem um produto tensorial máximo $E \otimes_{\max} F$ e um produto tensorial mínimo $E \otimes_{\min} F$ entre os C^* -anéis ternários E e F . Como provou Zettl em [68], todo C^* -anel ternário tem associada uma C^* -álgebra B que satisfaz determinadas condições. Veremos que, se E_1, E_2 são C^* -anéis ternários com C^* -álgebras associadas B_1 e B_2 respectivamente, então existe uma bijeção entre a família de C^* -normas sobre $E_1 \odot E_2$ e a família de C^* -normas sobre $B_1 \odot B_2$; além disto, esta bijeção preserva às ordens.

Para construir produtos tensoriais entre os fibrados de Fell $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$, comecemos por definir produtos tensoriais entre cada fibra de $\mathcal{A}$ e cada fibra de $\mathcal{B}$. Estes produtos tensoriais devem ser feitos de uma maneira coerente, pois esperamos que a família de produtos tensoriais assim obtidos formem as fibras de um fibrado de Fell sobre $G \times H$. Assim, por exemplo, não devemos considerar o produto tensorial máximo num caso, e o mínimo em outro caso. Como as fibras de $\mathcal{A}$ são módulos de Hilbert à direita sobre A_e , e as de $\mathcal{B}$ sobre B_e , escolhido um produto tensorial $A_e \otimes_{\alpha} B_e$ entre A_e e B_e existe uma única C^* -norma sobre cada $A_t \odot B_s$ tal que o completamente $A_t \otimes_{\alpha} B_s$ correspondente é um módulo de Hilbert à direita sobre $A_e \otimes_{\alpha} B_e$, devido à correspondência entre as C^* -normas sobre produtos tensoriais de C^* -anéis ternários e de C^* -álgebras mencionada anteriormente. Aqui surge um problema: na verdade, a fibra de um fibrado de Fell é um bimódulo de Hilbert sobre a fibra da identidade, e nós construímos apenas uma família de “fibras” que são módulos de Hilbert à direita sobre a fibra da identidade. Deveríamos ver, então, que a mesma coleção de “fibras” seria obtida se fizéssemos a mesma construção considerando cada A_t e cada B_s como módulos de Hilbert à esquerda sobre A_e e B_e respectivamente. Verificamos este fato para o caso das normas máxima e mínima, que são as interessantes para os nossos fins. Não sabemos se vale também para qualquer outra C^* -norma sobre $A_e \odot B_e$. Uma vez feito isto, temos ainda que definir

uma topologia sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Fazer isto equivale essencialmente a declarar quais devem ser as seções contínuas do fibrado. Nós requerimos o que parece o mais natural: se f é uma seção contínua de $\mathcal{A}$ e g é uma seção contínua de $\mathcal{B}$, então a função $G \times H \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que $(t, s) \mapsto f(t) \otimes g(s)$ deve ser uma seção contínua de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Provamos então que esta família de seções determina realmente uma topologia sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, que o transforma num fibrado de Banach sobre $G \times H$. Vemos depois que, com as operações de produto e involução naturais, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é um fibrado de Fell sobre $G \times H$.

O seguinte passo é estudar as representações de $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$. No primeiro caso vemos que as representações não degeneradas de $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ sobre um módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ estão em correspondência biunívoca com as representações de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{H}$ cujas imagens comutam. No segundo caso, mostramos que se $\mathcal{A}$ se representa sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ através de $\pi_{\mathcal{A}}$, e $\mathcal{B}$ se representa sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{K}$ através de $\pi_{\mathcal{B}}$, então existe uma única representação $\pi_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ de $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ sobre $\mathcal{H} \otimes_{\min} \mathcal{K}$ tal que $(\pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}})(a \otimes b) = \pi_{\mathcal{A}}(a) \otimes \pi_{\mathcal{B}}(b) \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes_{\min} \mathcal{K})$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.

A seguir analisamos as C^* -álgebras seccionais dos produtos tensoriais, a C^* -álgebra seccional plena e a C^* -álgebra seccional reduzida.

Dado um fibrado de Fell $\mathcal{B}$, existem duas C^* -álgebras seccionais importantes associadas a $\mathcal{B}$. A primeira é a C^* -álgebra seccional (plena) $C^*(\mathcal{B})$, definida por Fell, cuja teoria de representações é equivalente à teoria de representações de $\mathcal{B}$. A segunda é $C_r^*(\mathcal{B})$, a C^* -álgebra reduzida de $\mathcal{B}$, concretamente definida através de uma representação de $C^*(\mathcal{B})$. A C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell foi definida por Exel em [28] para o caso de fibrados de Fell sobre grupos discretos. Em [50], Ng generalizou a definição para o caso contínuo. Eis rapidamente a definição de $C_r^*(\mathcal{B})$. Se $C_c(\mathcal{B})$ denota o espaço de seções contínuas de suporte compacto do fibrado $\mathcal{B}$, então $C_c(\mathcal{B})$ é um pré- B_e módulo de Hilbert à direita com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_G f(t)^* g(t) dt$. O completamento correspondente é denotado $L^2(\mathcal{B})$, e é um módulo de Hilbert pleno à direita sobre B_e . Agora, se $b_t \in B_t$, a transformação Λ_{b_t} tal que $\Lambda_{b_t}(f)|_s = b_t f(t^{-1}s)$, para $f \in C_c(\mathcal{B})$, se estende a um operador adjuntável sobre $L^2(\mathcal{B})$, cujo adjunto é $\Lambda_{b_t^*}$, e a aplicação $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$, tal que $b \mapsto \Lambda_b$, é uma representação de $\mathcal{B}$, que se integra a uma representação $\Lambda : C^*(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$, chamada representação regular. Define-se então $C_r^*(\mathcal{B}) := \Lambda(C^*(\mathcal{B}))$. Quando Λ é injetiva, diz-se que $\mathcal{B}$ é amenable.

Comparamos então as C^* -álgebras seccionais plenas e reduzidas de $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ com os produtos tensoriais das respectivas C^* -álgebras seccionais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Consideramos que nosso principal resultado na Parte I, sem contar as aplicações posteriores, é o seguinte: existe um diagrama comutativo natural:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}) & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C_r^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

Os isomorfismos verticais refletem uma bela harmonia entre construções universais (flecha da esquerda) e construções espaciais (flecha da direita). As flechas horizontais são produzidas por epimorfismos naturais: a superior é a composição da aplicação natural $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})$, que existe porque $\|\cdot\|_{\max} \geq \|\cdot\|_{\min}$, com a representação regular $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})$; a flecha inferior é a extensão contínua da função identidade sobre $C^*(\mathcal{A}) \otimes C^*(\mathcal{B})$, que existe porque $\|\cdot\|_{\max} \geq \|\cdot\|_{\min}$, composta com o produto tensorial das representações regulares de $C^*(\mathcal{A})$ e $C^*(\mathcal{B})$. Junto com a propriedade de aproximação de um fibrado de Fell, o diagrama acima é a ferramenta fundamental nas aplicações posteriores.

Na seção correspondente às aplicações, última da Parte I, começamos estendendo a propriedade de aproximação, introduzida por Exel para fibrados de Fell sobre grupos discretos, ao caso contínuo. Na verdade, damos duas versões da propriedade de aproximação que generalizam a de Exel. Uma, formalmente mais parecida à original, não parece ser de grande utilidade no caso contínuo. A segunda,

que chamamos propriedade de aproximação em L^1 , permite obter resultados análogos aos obtidos em [28] para o caso discreto: todo fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 é amenable; se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell sobre um grupo amenable, então $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 , e em particular é amenable. No entanto, um fibrado de Fell sobre um grupo não amenable pode ter a propriedade de aproximação, e em particular ser amenable ([29], [31]). O fato de que um fibrado de Fell sobre um grupo amenable é, ele também, amenable, parece ter sido provado primeiro para grupos localmente compactos por Ng em [50].

A propriedade de aproximação de Exel é expressada em termos de redes definidas sobre o grupo e a valores na fibra B_ϵ . Uma variação pequena que introduzimos, porém útil para o caso de um fibrado de Fell sobre um grupo amenable, é permitir que estas redes tomem valores em $M(B_\epsilon)$, a C^* -álgebra dos multiplicadores de B_ϵ . É necessário dizer que, antes que nós, o próprio Ng deu uma definição de propriedade de aproximação para o caso contínuo em [50]. Apesar de que tomamos um aspecto formal da definição dele (permitir duas redes em lugar da única presente na definição de Exel), achamos que a definição por ele proposta não é adequada, e portanto decidimos desenvolver a nossa própria versão.

O fato fundamental é que a propriedade de aproximação em L^1 é preservada por produtos tensoriais. Seguem deste fato nossas aplicações principais: se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e fibra B_ϵ nuclear, então $C^*(\mathcal{B})$ é nuclear; se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e fibra B_ϵ exata, então $C^*(\mathcal{B})$ é exata.

CAPÍTULO 1

Produtos Tensoriais de C^* -anéis Ternários

Neste capítulo estudaremos produtos tensoriais de C^* -anéis ternários (1.1, 1.8), como passo prévio antes de estudar os produtos tensoriais de fibrados de Fell. Embora seja este último nosso objetivo final, o tratamento dado aos C^* -anéis ternários é feito num contexto abstrato e independente dos fibrados de Fell: consideraremos os C^* -anéis ternários e seus homomorfismos como uma categoria que contém à categoria de C^* -álgebras e seus homomorfismos como subcategoria plena. É sob este ponto de vista que investigaremos os produtos tensoriais destes objetos e, portanto, os resultados obtidos são paralelos aos conhecidos para C^* -álgebras. Por exemplo, provamos que existem um produto tensorial máximo e um produto tensorial mínimo entre C^* -anéis ternários (1.51). Um outro aspecto eventualmente considerado dos C^* -anéis ternários é a função que eles têm como bimódulos de imprimitividade de C^* -álgebras ([59]), pelo menos no caso de C^* -anéis ternários positivos (1.27). Assim, seguem facilmente da teoria desenvolvida neste capítulo resultados já conhecidos: a nuclearidade e a exatidão são propriedades invariantes por equivalência Morita de C^* -álgebras (1.53 e 1.58).

O material está organizado da seguinte maneira. A primeira seção começa com a introdução de alguns conceitos básicos: C^* -anéis ternários, homomorfismos de C^* -anéis ternários, C^* -normas sobre um $*$ -anel ternário. Também está dedicada a relembrar os principais resultados de Zettl em [68], o primeiro deles sobre a decomposição de um C^* -anel ternário como soma direta de um C^* -anel ternário positivo e um C^* -anel ternário negativo (ver 1.27 e a página 12), e o segundo sobre a existência e unicidade de certa C^* -álgebra ligada ao C^* -anel ternário (ver página 12). Posteriormente são estudados os homomorfismos, ideais e quocientes de C^* -anéis ternários. Igual ao que acontece com os homomorfismos de C^* -álgebras, todo homomorfismo de C^* -anéis ternários é uma contração, uma isometria quando é injetivo, e tem imagem fechada (1.18, 1.32). Estes resultados sobre homomorfismos de C^* -anéis ternários são obtidos a partir dos já conhecidos para C^* -álgebras, usando o fato de que a cada homomorfismo de C^* -anéis ternários está associado um único homomorfismo entre as C^* -álgebras que Zettl associa a cada um dos C^* -anéis ternários. Este processo de associação de uma C^* -álgebra a cada C^* -anel ternário, e de um homomorfismo de C^* -álgebras a cada homomorfismo de C^* -anéis ternários, é de fato um funtor, que denotamos por Z em honra a Zettl (ver a página 12 e 1.19). Se E é um módulo de Hilbert à esquerda sobre uma C^* -álgebra A , a ação de A sobre E e o produto interno de E a valores em A definem uma estrutura de C^* -anel ternário sobre E ; neste caso, tem-se que $Z(E)$ é a C^* -álgebra dos operadores adjuntáveis compactos $\mathcal{K}_A(E)$. Na verdade, seria suficiente desenvolver toda a teoria apresentada neste capítulo apenas para módulos de Hilbert, objetos nos quais serão aplicados depois os resultados obtidos. Porém, acreditamos que o ponto de vista adotado clarifica o panorama e é mais sugestivo para os nossos fins, que são os de generalizar a teoria de produtos tensoriais de C^* -álgebras ao contexto de C^* -anéis ternários: de maneira um pouco esquemática, um C^* -anel ternário é um objeto muito parecido com uma C^* -álgebra: no entanto, um módulo de Hilbert é um espaço onde age uma C^* -álgebra.

As noções de ideais à esquerda, à direita, e bilaterais de um C^* -anel ternário são introduzidas em 1.20. A nossa definição de ideal bilateral parece, a princípio, mais fraca que a definida em [27] para o caso de anéis ternários de operadores. Porém, elas são equivalentes (1.22). Em 1.23 e 1.24, mostramos que o funtor Z é um isomorfismo entre os reticulados de ideais bilaterais do C^* -anel ternário E e da C^* -álgebra $Z(E)$. Posteriormente, mostramos que o quociente de um C^* -anel ternário por um ideal bilateral é um C^* -anel ternário com a norma quociente, e que Z é um funtor exato (1.29 e 1.31).

O núcleo do capítulo está na segunda seção, onde se encontra o resultado principal: cada C^* -norma sobre o produto tensorial algébrico $E \odot F$ entre C^* -anéis ternários E e F define uma única C^* -norma sobre o produto tensorial algébrico $Z(E) \odot Z(F)$ entre as C^* -álgebras $Z(E)$ e $Z(F)$, e viceversa; além disso, esta correspondência preserva as ordens entre as C^* -normas (1.50). Como consequência, tem-se que sempre existem uma C^* -norma máxima e uma C^* -norma mínima sobre $E \odot F$ (1.51). Também deduzimos que um C^* -anel ternário E é nuclear se e somente se $Z(E)$ é nuclear, e que se A e B são C^* -álgebras equivalentes Morita, então A é nuclear se e somente se B é nuclear (1.52, 1.53). Esta seção é encerrada com um resultado que generaliza o bem conhecido para espaços de Hilbert, que diz

que $B(H) \otimes_{\min} B(K) \hookrightarrow B(H \otimes K)$. Mostramos, em 1.54, que se E e F são módulos de Hilbert plenos sobre C^* -álgebras A e B respectivamente, e γ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, então existe uma (única) C^* -norma $\tilde{\gamma}$ sobre $\mathcal{L}(E) \odot \mathcal{L}(F)$ tal que $\mathcal{L}(E) \otimes_{\tilde{\gamma}} \mathcal{L}(F) \hookrightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\gamma} F)$. Em particular, tem-se que $\mathcal{L}(E) \otimes_{\min} \mathcal{L}(F) \subseteq \mathcal{L}(E \otimes_{\min} F)$. (aqui $\mathcal{L}(E)$ representa, como é usual, a C^* -álgebra dos operadores adjuntáveis sobre E).

A última seção está dedicada ao estudo de C^* -anéis ternários exatos, e os resultados principais são análogos aos obtidos para C^* -anéis ternários nucleares: E é exato se e somente se $Z(E)$ é exato (1.57). Se A e B são C^* -álgebras equivalentes Morita, então A é exata se e somente se B é exata (1.58).

1.1. C^* -anéis ternários

DEFINIÇÃO 1.1. Um $*$ -anel ternário é um espaço vetorial complexo E com uma transformação $\mu : E \times E \times E \rightarrow E$, chamado $*$ -produto ternário sobre E , que é linear nas variáveis ímpares e conjugado linear na segunda, e tal que:

$$\mu(\mu(x, y, z), u, v) = \mu(x, \mu(u, z, y), v) = \mu(x, y, \mu(z, u, v)). \quad \forall x, y, z, u, v \in E$$

Um homomorfismo de $*$ -anéis ternários é uma transformação linear $\phi : (E, \mu) \rightarrow (F, \nu)$ tal que

$$\nu(\phi(x), \phi(y), \phi(z)) = \phi(\mu(x, y, z)), \quad \forall x, y, z \in E.$$

Às vezes escreveremos simplesmente (x, y, z) ou $(x, y, z)_E$ em lugar de $\mu(x, y, z)$. Usaremos a expressão abreviada $*$ -ater em lugar de $*$ -anel ternário.

OBSERVAÇÃO 1.2. Estamos chamando aqui $*$ -aters aos mesmos objetos que aparecem em [44] sob o nome de “associative triple systems of the second kind”. Pensamos que a nossa terminologia é mais coerente com a noção de C^* -anel ternário devida a Zettl (Definition 0.1 de [68]), porque um C^* -anel ternário é um certo tipo de completamento de um $*$ -ater (ver Definição 1.8).

EXEMPLO 1.3. Seja $E = M_{m \times n}(\mathbb{C})$ o espaço de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$, e seja $\mu(x, y, z) = x \cdot y^* \cdot z$, onde y^* é a matriz transposta e conjugada de y , e onde $x \cdot y$ denota o produto usual de matrizes. Então, é fácil verificar que (E, μ) é um $*$ -ater.

EXEMPLO 1.4. Suponhamos que (E, μ) é um $*$ -ater. Sejam $E^a = E$ e $\mu^a = -\mu$. Então (E^a, μ^a) também é um $*$ -ater, como se verifica facilmente. Diremos que $(E, -\mu)$ é o *anti- $*$ -anel ternário* de (E, μ) . Se ϕ é um homomorfismo de um $*$ -ater E no anti- $*$ -ater de F , diremos que ϕ é um anti-homomorfismo de E em F , e que E e F são anti-isomorfos no caso de ser ϕ um isomorfismo.

EXEMPLO 1.5. Se E é um espaço vetorial complexo, denotemos por E^* o espaço vetorial complexo que é igual a E como grupo abeliano, e no qual a $\mathbb{C}$ -ação está dada por $\lambda \cdot x = \bar{\lambda}x$, $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{C}$, onde no termo direito da igualdade a ação de $\bar{\lambda}$ é a ação original $\mathbb{C}$ sobre E . Agora, se (E, μ) é um $*$ -ater, então $\mu^* : E^* \times E^* \times E^* \rightarrow E^*$ dada por $\mu^*(x, y, z) = \mu(z, y, x)$, $\forall x, y, z \in E^*$, é um $*$ -produto ternário sobre E^* . Chamaremos o $*$ -ater (E^*, μ^*) o *$*$ -anel ternário adjunto* de (E, μ) .

DEFINIÇÃO 1.6. Um anel ternário de operadores ([68]) é um subespaço E of $B(H, K)$, onde H, K são espaços de Hilbert complexos, e tal que $T_1 T_2^* T_3 \in E$, $\forall T_1, T_2, T_3 \in E$.

OBSERVAÇÃO 1.7. É claro que um anel ternário de operadores é também um $*$ -ater; por exemplo, o $*$ -ater do Exemplo 1.3 é isomorfo ao anel ternário de operadores $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

DEFINIÇÃO 1.8. Uma C^* -norma sobre um $*$ -anel ternário (E, μ) é uma norma que satisfaz as seguintes duas propriedades:

1. $\|\mu(x, y, z)\| \leq \|x\| \|y\| \|z\|, \forall x, y, z \in E$.
2. $\|\mu(x, x, x)\| = \|x\|^3, \forall x \in E$.

Dizemos então que $(E, \|\cdot\|)$ é um pré- C^* -anel ternário, e se é um espaço de Banach, dizemos que é um C^* -anel ternário. Como no caso de $*$ -aters, também usaremos as formas abreviadas pré- C^* -ater e C^* -ater.

OBSERVAÇÃO 1.9. É claro que $\|\cdot\|$ é uma C^* -norma sobre o $*$ -ater E se e somente se ela é uma C^* -norma sobre E^a (1.4), e também se e somente se ela é uma C^* -norma sobre E^* (1.5).

EXEMPLO 1.10. Se E é um módulo de Hilbert à direita sobre a C^* -álgebra B , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então (E, μ) é um C^* -anel ternário, onde $\mu(x, y, z) = x\langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E$.

EXEMPLO 1.11. Se $(E, \mu), (F, \nu)$ são C^* -anéis ternários, então $(E \oplus F, \mu \oplus \nu)$ também é um C^* -anel ternário, onde consideramos a norma do máximo sobre $E \oplus F$, e $\mu \oplus \nu$ é dada por $\mu \oplus \nu(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3) = \mu(x_1, x_2, x_3) \oplus \nu(y_1, y_2, y_3), \forall x_1, x_2, x_3 \in E, y_1, y_2, y_3 \in F$.

EXEMPLO 1.12. O $*$ -ater adjunto (cf. Exemplo 1.5) de um C^* -ater é ele mesmo um C^* -ater, e o anti- $*$ -ater de um C^* -ater é um C^* -ater.

EXEMPLO 1.13. Suponhamos que $E_1 \subseteq B(H), E_2 \subseteq B(K)$ são anéis ternários de operadores completos, e consideremos $E = E_1 \oplus E_2$ com a norma $\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$. Se $\mu : E \times E \times E \rightarrow E$ está dada por $\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = (x_1 y_1^* z_1, -x_2 y_2^* z_2)$, então (E, μ) é um C^* -ater.

Os C^* -anéis ternários foram definidos e estudados por Zettl em [68]. Ele provou que se E é um C^* -anel ternário, então existe, a menos de isomorfismos, um único par $(Z_r(E), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ tal que:

1. $Z_r(E)$ é uma C^* -álgebra e E é um $Z_r(E)$ módulo de Banach à direita.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_r : E \times E \rightarrow Z_r(E)$ é sesquilinear, conjugada linear na primeira variável, com $\|\langle \cdot, \cdot \rangle_r\|_r \leq 1$, e
 - $\langle x, yb \rangle_r = \langle x, y \rangle_r b, \forall x, y \in E, b \in Z_r(E)$.
 - $\langle x, y \rangle_r^* = \langle y, x \rangle_r, \forall x, y \in E$.
3. $\mu(x, y, z) = x\langle y, z \rangle_r, \forall x, y, z \in E$.
4. $\text{span}\langle E, E \rangle_r$ é denso em $Z_r(E)$.

Além disso, temos que

$$(1) \quad \|x\|^2 = \|\langle x, x \rangle_r\|, \forall x \in E.$$

Então ele definiu $E^+ = \{x \in E : \langle x, x \rangle_r \in Z_r(E)^+\}$ e $E^- = \{x \in E : \langle x, x \rangle_r \in -Z_r(E)^+\}$, e mostrou que eles são sub- C^* -anéis ternários de E , tais que E^+ é isomorfo a um anel ternário de operadores, e E^- é anti-isomorfo a um anel ternário de operadores (ver 1.4 e 1.6 acima). De fato, tem-se que $E = E^+ \oplus E^-$ como C^* -anéis ternários, e esta é a única decomposição de E como soma direta de dois sub- C^* -anéis ternários, um deles isomorfo a um anel ternário de operadores e o outro anti-isomorfo a um anel ternário de operadores. Chamaremos esta decomposição a *decomposição fundamental* de E .

Naturalmente, temos uma versão à esquerda destes resultados: existe um par $(Z_l(E), \langle \cdot, \cdot \rangle_l)$ satisfazendo propriedades análogas às de $(Z_r(E), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$, só que enunciadas da forma óbvia do lado

esquerdo. Assim, E , é um $Z_l(E) - Z_r(E)$ bimódulo de Banach. Notar que a decomposição de E com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$ coincide com a feita com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$, por causa da unicidade de tal decomposição. Em particular, concluímos que o Exemplo 1.13 é de fato o exemplo genérico de C^* -ater. Observar também que temos

$$\langle x, y \rangle_l z = \mu(x, y, z) = x \langle y, z \rangle_r, \quad \forall x, y, z \in E.$$

EXEMPLO 1.14. Sejam E um C^* -anel ternário, $x \in E$, e E_x o sub- C^* -anel ternário gerado por x dentro de E . Para cada $n \geq 0$, seja $x_n = x(\langle x, x \rangle_r)^n$. Então é claro que $x_n \in E_x, \forall n \geq 0$. Por outro lado, é imediato que $(x_n, x_m, x_k) = x_{n+m+k+1}$, donde segue que $E_x = \overline{\text{span}}\{x_n : n \geq 0\}$. Além disso, como $\langle x_n, x_m \rangle_r = \langle x, x \rangle_r^{n+m+1}$, concluímos que $Z_r(E_x) = C^*(\langle x, x \rangle_r) = C'(\sigma(\langle x, x \rangle_r))$.

PROPOSIÇÃO 1.15. Sejam (E, μ) um C^* -anel ternário, e (E^*, μ^*) o seu C^* -anel ternário adjunto (1.5). Então $Z_l(E^*) = Z_r(E)$, e $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_l^* = \langle x, y \rangle_r, \forall x, y \in E$, onde estamos indicando por $\langle \cdot, \cdot \rangle_l^*$ o $Z_l(E^*)$ -produto interno esquerdo associado a E^* como acima, e por $\tilde{x}, \tilde{y}$ os elementos $x, y \in E$ vistos dentro de E^* .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $[\cdot, \cdot] : E^* \times E^* \rightarrow Z_r(E)$ dada por $[\tilde{x}, \tilde{y}] = \langle x, y \rangle_r, \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in E^*$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ é conjugada linear na primeira variável, e como E^* é o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial conjugado de E , então $[\cdot, \cdot]$ será uma forma sesquilinear conjugada linear na segunda variável. É claro que $[\tilde{x}, \tilde{y}]^* = [\tilde{y}, \tilde{x}]$, e que $\|[\cdot, \cdot]\| \leq 1$. Notar que, como E é um módulo de Banach à direita sobre $Z_r(E)$, então E^* é um módulo de Banach à esquerda sobre $Z_r(E)$, onde consideramos a ação de $Z_r(E)$ sobre E^* dada por $b \cdot \tilde{x} = x b^*$. Se $b \in Z_r(E)$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in E^*$, temos:

$$[b \cdot \tilde{x}, \tilde{y}] = \langle x b^*, y \rangle_r = (\langle y, x b^* \rangle_r)^* = (\langle y, x \rangle_r b^*)^* = ([\tilde{x}, \tilde{y}]^* b^*)^* = b[\tilde{x}, \tilde{y}]$$

Por outro lado:

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_l^* \tilde{z} = \mu^*(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mu(z, y, x) = z \langle y, x \rangle_r = z \langle x, y \rangle_r^* = \langle x, y \rangle_r \cdot z = [\tilde{x}, \tilde{y}] \cdot \tilde{z},$$

o que encerra a prova (Na verdade, esta última igualdade já implica que $[\cdot, \cdot]$ é uma forma sesquilinear com as propriedades requeridas). $\square$

OBSERVAÇÃO 1.16. Suponhamos que (E, μ) é um C^* -anel ternário, e seja (E^a, μ^a) o anti- C^* -anel ternário de (E, μ) , i.e.: $E^a = E$ como espaço de Banach, e $\mu^a = -\mu$ (ver 1.4). Então temos um resultado similar ao da Proposição 1.15: $Z_r(E^a) = Z_r(E)$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle_r^a = -\langle \cdot, \cdot \rangle_r$, com a notação óbvia. Também, se (F, ν) é um outro C^* -ater, temos que (de novo com a notação óbvia) $Z_r(E \oplus F) = Z_r(E) \oplus Z_r(F)$, e $\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle_r^{E \oplus F} = \langle x_1, x_2 \rangle_r^E \oplus \langle y_1, y_2 \rangle_r^F, \forall x_1, x_2 \in E, y_1, y_2 \in F$ (ver o Exemplo 1.11). As demonstrações são muito fáceis e serão omitidas.

Notar que E e E^* são basicamente o mesmo objeto como C^* -anéis ternários, e portanto, pela Proposição 1.15, decorre que as propriedades de $Z_r(E)$ e $Z_l(E)$ deduzidas de propriedades de E como C^* -anel ternário serão as mesmas. Por esta razão, no que segue consideraremos apenas a versão direita da situação, e usaremos a notação Z e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em lugar de Z_r e $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$, a menos que seja necessário mencionar explicitamente o lado considerado. Porém, o leitor deve levar em conta que todos os resultados obtidos a seguir para Z_r valem também para Z_l .

LEMA 1.17. *Sejam I um $*$ -ideal bilateral, não necessariamente fechado, de uma $*$ -álgebra de Banach A , B uma C^* -álgebra, e $\rho : I \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Então ρ é contrativa, e portanto pode ser estendido, de forma única, a um homomorfismo de $*$ -álgebras de Banach $\rho : \bar{I} \rightarrow B$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\pi : \overline{\rho(I)} \rightarrow B(H)$ uma representação fiel e não degenerada. Então $\pi\rho$ é uma representação não degenerada de I . Por [37], VI-19.11, $\pi\rho$ é contrativa, e como π é uma isometria, tem-se que ρ também deve ser contrativa. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.18. *Seja $\pi : E \rightarrow F$ um homomorfismo de $*$ -aters (1.1), onde E e F são C^* -aters. Então π é uma contração, e existe um único $*$ -homomorfismo $Z(\pi) : Z(E) \rightarrow Z(F)$ tal que $Z(\pi)(\langle x, y \rangle_E) = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle_F$, $\forall x, y \in E$. Tem-se que $\pi(xb) = \pi(x)Z(\pi)(b)$, $\forall x \in E$, $b \in Z(E)$. Se π é injetivo (sobrejetivo, isomorfismo), então π é uma isometria, e $Z(\pi)$ é injetivo (sobrejetivo, isomorfismo).*

DEMONSTRAÇÃO. Se $Z(\pi)$ existe, deve ser $Z(\pi)(\langle x, y \rangle_E) = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle_F$, $\forall x, y \in E$. Portanto, temos que verificar que $\sum_i \langle x_i, y_i \rangle_E = 0$ implica que $\sum_i \langle \pi(x_i), \pi(y_i) \rangle_F = 0$. Agora, se $\sum_i \langle x_i, y_i \rangle_E = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \langle \pi(x_i), \pi(y_i) \rangle_F \right)^* \left(\sum_j \langle \pi(x_j), \pi(y_j) \rangle_F \right) &= \sum_i (\langle \pi(y_i), x_i \rangle_F) \left(\sum_j \langle \pi(x_j), \pi(y_j) \rangle_F \right) \\ &= \sum_i \langle \pi(y_i), \pi(x_i) \sum_j \langle \pi(x_j), \pi(y_j) \rangle_F \rangle_F \\ &= \sum_i \langle \pi(y_i), \pi(x_j \sum_j \langle x_j, y_j \rangle_E) \rangle_F \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos definido $Z(\pi) : \text{span}\langle E, E \rangle_E \rightarrow Z(F)$, que é um homomorfismo de $*$ -álgebras. Como $\text{span}\langle E, E \rangle_E$ é um $*$ -ideal bilateral denso de $Z(E)$, $Z(\pi)$ tem uma única extensão a um homomorfismo $Z(\pi) : Z(E) \rightarrow Z(F)$, pelo Lema 1.17 acima.

Agora, se $x \in E$, tem-se:

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\langle \pi(x), \pi(x) \rangle_F\| = \|Z(\pi)(\langle x, x \rangle_E)\| \leq \|\langle x, x \rangle_E\| = \|x\|^2,$$

já que $Z(\pi)$ é uma contração; portanto π é também uma contração. Em particular, π é contínuo, e portanto $\pi(xb) = \pi(x)Z(\pi)(b)$, $\forall x \in E$, $b \in Z(E)$, pois isto é válido para todo $b \in \text{span}\langle E, E \rangle_E$, que é denso em $Z(E)$.

Se π é sobrejetiva, é claro que $Z(\pi)$ também será sobrejetiva. Suponhamos que π é injetiva, e seja $b \in \ker Z(\pi)$. Então $\pi(xb) = 0$, $\forall x \in E$, e como π é injetiva, tem-se que $xb = 0$, $\forall x \in E$, e portanto $\text{span}\langle E, E \rangle_E b = 0$, donde $Z(E)b = 0$; em particular $b^*b = 0$, e então $b = 0$. Assim, concluímos que $Z(\pi)$ é injetiva. Em particular, $Z(\pi)$ é uma isometria, e portanto

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\langle \pi(x), \pi(x) \rangle_F\| = \|Z(\pi)(\langle x, x \rangle_E)\| = \|\langle x, x \rangle_E\| = \|x\|^2,$$

donde segue que π é uma isometria. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.19. Junto ao resultado do Zettl, a Proposição 1.18 mostra que a cada C^* -anel ternário podemos associar uma C^* -álgebra, única a menos de isomorfismos, e que a cada homomorfismo $\pi : E \rightarrow F$ de C^* -anéis ternários podemos associar um único homomorfismo $Z(\pi) : Z(E) \rightarrow Z(F)$ de C^* -álgebras. Suponhamos que $\rho : F \rightarrow G$ é um outro homomorfismo de C^* -aters. Então $Z(\rho\pi) = Z(\rho)Z(\pi)$, pela condição de unicidade. Na verdade, o homomorfismo $Z(\pi)$ depende das C^* -álgebras escolhidas para representar $Z(E)$ e $Z(F)$. Por esta razão, Z não é exatamente um funtor na

categoria de C^* -álgebras. Seria um funtor se escolhermos um representante de cada classe de isomorfismos de C^* -álgebras, e definíssemos o valor de Z dentro dessa família de representantes. Porém, perder flexibilidade na escolha de um representante para $Z(E)$ não é muito conveniente: o melhor é escolher o representante mais adequado ao contexto. Por exemplo, se $F \subseteq E$, sempre suporemos que $Z(F) = \overline{\text{span}}\langle F, F \rangle_E \subseteq Z(E)$.

DEFINIÇÃO 1.20. Sejam E um C^* -ater, e $F \subseteq E$ um subespaço fechado. Diremos que F é um ideal à esquerda (à direita) de E se $(E, E, F) \subseteq F$ (respectivamente: se $(F, E, E) \subseteq F$). Se F é um ideal à esquerda e à direita de E , diremos que é um ideal de E . Denotaremos os conjuntos de ideais, ideais à esquerda, ideais à direita de E , respectivamente por $I(E)$, $L(E)$, $R(E)$. Usaremos a notação $F \triangleleft E$ para indicar que F é um ideal bilateral de E .

OBSERVAÇÃO 1.21. Em [27], o autor introduziu a noção de ideal (bilateral) de um anel ternário de operadores, através de uma definição que, aparentemente, é mais restritiva que a nossa. Porém, elas são equivalentes, como se deduz de 1.22 a seguir.

OBSERVAÇÃO 1.22. Todo ideal à esquerda ou à direita é em particular um sub- C^* -ater. Por outro lado, F é um ideal bilateral de E se e somente se ele satisfaz a condição $(E, F, E) \subseteq F$. Com efeito, suponhamos primeiro que F é um ideal bilateral de E . Então, como $\text{span}(F, F, F)$ é denso em F , e o produto ternário é contínuo:

$$\begin{aligned} (E, F, E) &\subseteq \overline{\text{span}}(E, (F, F, F), E) \\ &= \overline{\text{span}}(E, F, (F, F, E)) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, F, (F, E, E)) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, F, F) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, E, F) \\ &\subseteq F. \end{aligned}$$

Inversamente, suponhamos que $(E, F, E) \subseteq F$, e mostremos que F é um ideal à direita de E :

$$\begin{aligned} (E, E, F) &\subseteq \overline{\text{span}}(E, E, (F, F, F)) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, (F, F, E), F) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, (E, F, E), F) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, F, F) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(E, F, E) \\ &\subseteq F. \end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que F também é um ideal à esquerda de E .

PROPOSIÇÃO 1.23. Sejam E um C^* -ater, e $A := Z(E)$. Consideremos as famílias $H(A)$ de sub- C^* -álgebras hereditárias de A , $I(A)$ de ideais de A . Então, $Z : L(E) \rightarrow H(A)$ é uma bijeção com inversa $T : H(A) \rightarrow L(E)$ dada por $T(B) = EB$ (levar em conta 1.19). Quando restrita a $I(E)$, Z é uma bijeção sobre $I(A)$. Além disto, Z e T preservam as relações de inclusão.

DEMONSTRAÇÃO. Se B é uma sub- C^* -álgebra de A , então:

$$(E, E, EB) = E\langle E, EB \rangle = E\langle E, E \rangle B = (E, E, E)B \subseteq EB,$$

donde EB é um ideal à esquerda de E . Inversamente, se F é um ideal à esquerda de E , temos:

$$\langle F, F \rangle \langle E, E \rangle \langle F, F \rangle = \langle E\langle F, F \rangle, E\langle F, F \rangle \rangle = \langle (E, F, F), (E, F, F) \rangle \subseteq \langle F, F \rangle,$$

donde tomando os fechos dos correspondentes espaços vetoriais gerados, vemos que $Z(F)Z(E)Z(F) = Z(F)$, isto é, $Z(F)$ hereditária. Para ver que as correspondências são mutuamente inversas, note que se F é um C^* -anel ternário, então $F = Z(F)F$; por outro lado, se B é uma sub- C^* -álgebra hereditária de A , então $Z(EB) = \overline{\text{span}}\langle EB, EB \rangle = \overline{\text{span}}B\langle E, E \rangle B = BAB = B$.

Se I é um ideal de $Z(E)$, temos que $(EI, E, E) = EI\langle E, E \rangle \subseteq EIA = EI$, e portanto EI é também um ideal à direita de E , e portanto um ideal de E . Inversamente, se F é um ideal de E , ele é em particular um ideal à esquerda, e portanto $Z(F)$ é um ideal à direita de $Z(E)$. Mas como F é também um ideal à direita de E , temos: $\langle E, E \rangle \langle F, F \rangle = \langle F\langle E, E \rangle, F \rangle = (F, E, E) \subseteq \langle F, F \rangle$, e então $Z(F)$ é um ideal à esquerda de A . $\square$

PROPOSIÇÃO 1.24. *Seja E um C^* -anel ternário, e seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família de ideais de E . Então $Z(\bigcap_{j \in J} E_j) = \bigcap_{j \in J} Z(E_j)$, e $Z(\overline{\text{span}} \bigcup_{j \in J} E_j) = \overline{\text{span}} \bigcup_{j \in J} Z(E_j)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $I = \bigcap_{j \in J} Z(E_j)$, $J = Z(\bigcap_{j \in J} E_j)$. Como $\bigcap_{j \in J} E_j \subseteq E_{j_0}$, $\forall j_0 \in J$, e como Z preserva as inclusões, tem-se $I \subseteq J$. Então:

$$\bigcap_{j \in J} E_j = EI \subseteq EJ \subseteq EZ(E_{j_0}) = E_{j_0}, \quad \forall j_0 \in J,$$

donde segue que $EI \subseteq EJ \subseteq E(\bigcap_{j \in J} Z(E_j)) = EI$, e portanto $I = J$.

A outra afirmação é consequência da já provada, pois o ideal gerado por uma família de ideais é a interseção de todos os ideais que contem a união dos ideais da família. $\square$

COROLÁRIO 1.25. *Seja $\pi : E \rightarrow F$ um homomorfismo de $*$ -aters entre os C^* -aters E e F . Então tem-se que $Z(\ker(\pi)) = \ker(Z(\pi))$. Em particular, π é injetiva se e somente se $Z(\pi)$ é injetiva.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $x, y \in \ker(\pi)$. Então $Z(\pi)(\langle x, y \rangle) = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle = 0$, e portanto $\langle x, y \rangle \in \ker(Z(\pi))$; logo, $Z(\ker(\pi)) \subseteq \ker(Z(\pi))$. Seja agora $G = E\ker(Z(\pi))$, e seja $x = ya \in G$, onde $y \in E$, $a \in \ker(Z(\pi))$. Temos: $\pi(x) = \pi(ya) = \pi(y)Z(\pi)(a) = 0$, donde segue que $x \in \ker(\pi)$, e portanto que $G \subseteq \ker(\pi)$. Assim, como Z é um isomorfismo de reticulados segundo 1.24, temos: $\ker(Z(\pi)) = Z(G) \subseteq Z(\ker(\pi)) \subseteq \ker(Z(\pi))$, e concluímos que $Z(\ker(\pi)) = \ker(Z(\pi))$. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.26. Na Proposição 1.18 vimos que se $\pi : E \rightarrow F$ é um homomorfismo sobrejetivo entre C^* -anéis ternários, então $Z(\pi) : Z(E) \rightarrow Z(F)$ também é sobrejetivo. Porém, a sobrejetividade de $Z(\pi)$ não implica a sobrejetividade de π . Basta considerar a inclusão $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ como espaços de Hilbert sobre $\mathbb{C}$: ι não é sobrejetiva, mas $Z(\iota)$ é a identidade sobre $\mathbb{C}$.

Como já foi observado, todo C^* -anel ternário admite uma única decomposição $E = E^+ \oplus E^-$, com E^+ isomorfo a um anel ternário de operadores e E^- anti-isomorfo a um anel ternário de operadores (página 12). E^+ e E^- são ideais de E , totalmente independentes um do outro. Por esta razão, será conveniente (e suficiente como veremos depois), considerar C^* -anéis ternários nos quais $E^- = 0$.

DEFINIÇÃO 1.27. Dizemos que o C^* -anel ternário E é positivo (negativo) se $E = E^+$ (respectivamente se $E = E^-$). Uma representação de um C^* -anel ternário positivo E sobre os espaços de Hilbert H_1 e H_2 é um homomorfismo de $*$ -anéis ternários $\pi : E \rightarrow B(H_1, H_2)$, onde o produto ternário sobre $B(H_1, H_2)$ está definido por: $(T_1, T_2, T_3) \mapsto T_1 T_2^* T_3$. π é dita fiel se ela é injetiva (por 1.18, π é automaticamente contrativa, e ela é uma isometria se for fiel)

Dado um B -módulo de Hilbert pleno à direita $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$, vimos no exemplo 1.10 que E é um C^* -ater com o produto ternário dado por $\mu(x, y, z) = x \langle y, z \rangle_B$. É claro que teremos $Z_r(E) = B$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle_r = \langle \cdot, \cdot \rangle_B$. Em particular, (E, μ) é um C^* -ater positivo. Portanto, C^* -anéis ternários positivos e módulos de Hilbert plenos são essencialmente o mesmo tipo de objetos. Porém, do ponto de vista da teoria de módulos, o usual é considerar homomorfismos entre módulos de Hilbert sobre a mesma C^* -álgebra B , e estes são certo tipo de transformações lineares contínuas que “interlaçam” as ações da álgebra B . Estes homomorfismos diferem dos homomorfismos que nós estamos considerando (1.1, 1.18). Um comentário similar cabe sobre os anéis ternários de operadores (1.6): um anel ternário de operadores pode ser entendido como uma representação concreta, espacial, de um C^* -ater positivo, o de um módulo de Hilbert. Mas, como objetos espaciais, talvez a noção de homomorfismo entre eles deveria também ser espacial: por exemplo, se $E_1 \subseteq B(H_1, K_1)$, $E_2 \subseteq B(H_2, K_2)$, onde H_1, H_2, K_1, K_2 são espaços de Hilbert, poderíamos desejar como homomorfismos pares (ρ_1, ρ_2) tais que $\rho_1 : H_1 \rightarrow H_2$, $\rho_2 : K_1 \rightarrow K_2$ são isometrias, e $\rho_2 E_1 \rho_1^* \subseteq E_2$.

Portanto, podemos pensar em C^* -anéis ternários positivos, módulos de Hilbert plenos e anéis ternários de operadores como objetos que se diferenciam apenas pelo ponto de vista adotado para estudá-los, o que se reflete nos homomorfismos escolhidos.

OBSERVAÇÃO 1.28. Seja (E, μ) um C^* -anel ternário, e seja $E = E^+ \oplus E^-$ a decomposição fundamental de E (definida na página 12). Seja $P_E : E \rightarrow E^+$ a projeção de E sobre E^+ ao longo de E^- (i.e.: $\ker P_E = E^-$). Então temos a *simetria fundamental* $J_E : E \rightarrow E$, dada por $J_E = 2Id_E - P_E$. A simetria fundamental é o único operador sobre E que satisfaz ([68], 3.1):

- $J_E^2 = Id_E$
- $J_E(x, y, z) = (J_E x, y, z) = (x, J_E y, z) = (x, y, J_E z)$, $\forall x, y, z \in E$.
- $(E, J_E \mu)$ é isomorfo a um anel ternário de operadores.

Portanto, se $E^p := E$ como espaço de Banach, $\mu^p := J_E \mu$, temos que (E^p, μ^p) é um C^* -anel ternário positivo. De fato, se $x_1, x_2, x_3 \in E^+$, $y_1, y_2, y_3 \in E^-$, então

$$\begin{aligned} \mu^p(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3) &= J_E \mu(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3) \\ &= J_E \mu(x_1, x_2, x_3) + J_E \mu(y_1, y_2, y_3) \\ &= \mu(x_1, x_2, x_3) - \mu(y_1, y_2, y_3), \end{aligned}$$

donde $(E^p, \mu^p) = (E^+, \mu|_{E^+}) \oplus (E^-, -\mu|_{E^-})$.

Notar que J_E é um automorfismo de (E, μ) , e em particular uma isometria, e que cada sub- C^* -ater F de E é invariante por J_E pois, segundo a Proposição 1.18, temos $F^+ = F \cap E^+$, $F^- = F \cap E^-$, e portanto $P_F = P_{E|_F}$, $J_F = J_{E|_F}$. Em particular, F é um sub- C^* -ater (ideal) de E se e somente se F^p é um sub- C^* -ater (resp.: ideal) de E^p .

PROPOSIÇÃO 1.29. Seja F um ideal de um C^* -anel ternário E , e consideremos a estrutura algébrica natural de $*$ -anel ternário do espaço quociente E/F . Com a norma quociente, E/F é um C^* -anel ternário, e $Z(E/F) = Z(E)/Z(F)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como F é um ideal de E , ele é invariante pelo produto ternário, e portanto o produto ternário sobre E induz um produto ternário $\bar{\mu}$ sobre E/F da forma natural, de maneira que E/F é um $*$ -anel ternário. A dificuldade está em verificar que $\|\cdot\|_q$, a norma quociente sobre E/F , é uma C^* -norma. Na verdade, também é imediato que, se $\bar{x}$ é a imagem de $x \in E$ em E/F pela aplicação quociente, então $\|\bar{\mu}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\|_q \leq \|\bar{x}\|_q \|\bar{y}\|_q \|\bar{z}\|_q$. Já a condição 2. da Definição 1.8 é menos evidente.

Suponhamos primeiro que E é um C^* -anel ternário positivo.

Sejam $A = Z(E)$, $I = Z(F)$. Se $a \in A$, denotamos por $\bar{a}$ a imagem de a em A/I . Suponhamos que $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{x} = \bar{y}$, e $\bar{u} = \bar{v}$, para $a, b \in A$, $x, y, u, v \in E$. Então:

$$xa - yb = x(a - b) + (x - y)b \in EI + FA = F,$$

$$\langle x, u \rangle - \langle y, v \rangle = \langle x, u - v \rangle + \langle x - y, v \rangle \in \langle E, F \rangle + \langle F, E \rangle \subseteq \langle F, F \rangle \subseteq I.$$

Assim, temos umas funções $\cdot : E/F \times A/I \rightarrow E/F$ e $[\cdot, \cdot] : E/F \times E/F \rightarrow A/I$ dadas por $\bar{x} \cdot \bar{a} = \overline{xa}$, e $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{\langle x, y \rangle}$, $\forall a \in A$, $x, y \in E$. É rotineiro verificar que $(E/F, \cdot, [\cdot, \cdot])$ é um A/I -módulo com semi-produto interno (ver [43], página 3). De fato, $[\cdot, \cdot]$ é um produto interno: se $[\bar{x}, \bar{x}] = 0$, então $\langle x, x \rangle \in I$, e portanto $Z(E_x) \subseteq I$, onde E_x é o sub- C^* -anel ternário de E gerado por x (ver o Exemplo 1.14). Segue que $x \in E_x = E_x Z(E_x) \subseteq EI = F$, e portanto $\bar{x} = 0$. Além disso, temos:

$$\|[\bar{x}, \bar{x}]\|_{A/I} = \|\overline{\langle x, x \rangle}\|_{A/I} = \inf_{b \in I} \|\langle x, x \rangle + b\|_A \leq \inf_{y \in F} \|\langle x + y, x + y \rangle\|_A = \inf_{y \in F} \|x + y\|_A^2 = \|\bar{x}\|_q^2$$

Temos então que E/F é um pré-módulo de Hilbert sobre A/I , e que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_q$, onde a primeira norma é a induzida pelo produto interno $[\cdot, \cdot]$. Queremos provar a desigualdade contrária.

Seja (u_i) uma identidade aproximada de I . Se $x \in E$ temos, $\forall y \in F$:

$$\|\bar{x}\|_q \leq \limsup_i \|x - xu_i\| = \limsup_i \|x - y + yu_i - xu_i\| = \limsup_i \|(x - y)(1 - u_i)\| \leq \|x - y\| \leq \|\bar{x}\|_q,$$

donde segue que $\|\bar{x}\|_q = \lim_i \|x - xu_i\|$, $\forall x \in E$. Agora:

$$\begin{aligned} \|x - xu_i\|^2 &= \|\langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle u_i - u_i \langle x, x \rangle + u_i \langle x, x \rangle u_i\| \\ &= \|(1 - u_i)(\langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle u_i)\| \\ &\leq \|\langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle u_i\|. \end{aligned}$$

Temos então que:

$$\|\bar{x}\|_q^2 = \lim_i \|x - xu_i\|^2 \leq \lim_i \|\langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle u_i\| = \|\overline{\langle x, x \rangle}\| = \|\bar{x}\|^2,$$

e portanto $\|\bar{x}\|_q \leq \|\bar{x}\|$, e segue então que $\|\bar{x}\|_q = \|\bar{x}\|$. Isto mostra que $(E/F, \|\cdot\|_q)$ é um módulo de Hilbert pleno sobre $Z(E)/Z(F)$, e portanto $Z(E/F) = Z(E)/Z(F)$.

Uma vez provado o resultado para C^* -anéis ternários positivos, é fácil estendê-lo para o caso geral. Como F é um ideal de E , então F^p é um ideal de E^p (ver 1.28 acima). Além disso, como $J_E(F) = F$, temos que J_E se fatora no quociente definindo um isomorfismo isométrico $\bar{J}_E : E/F \rightarrow E/F$. Por outro lado, E^p/F^p e E/F são o mesmo espaço de Banach com as respectivas normas quocientes. Portanto:

$$\begin{aligned} \|\overline{\mu(x, x, x)}\|_{E/F} &= \|\overline{J_E \mu(x, x, x)}\|_{E/F} \\ &= \|\overline{J_E \mu(x, x, x)}\|_{E^p/F^p} \\ &= \|\overline{\mu(J_E x, J_E x, J_E x)}\|_{E^p/F^p} \\ &= \|\overline{J_E x}\|_{E^p/F^p}^3 \\ &= \|\overline{J_E x}\|_{E/F}^3 \\ &= \|\bar{x}\|_{E/F}^3, \end{aligned}$$

o que encerra a prova. $\square$

COROLÁRIO 1.30. *Sejam E e G C^* -anéis ternários, e $\pi : E \rightarrow G$ um homomorfismo de $*$ -aters. Sejam $F = \ker(\pi)$, e $p : Z(E) \rightarrow Z(E)/Z(F)$ a aplicação quociente. Então existe um único homomorfismo de C^* -álgebras $\overline{Z(\pi)} : Z(E)/Z(F) \rightarrow Z(G)$ tal que $\overline{Z(\pi)}p = Z(\pi)$; este homomorfismo $\overline{Z(\pi)}$ é injetivo. Em particular, se $\pi : E \rightarrow E/F$ é a aplicação quociente, onde F é um ideal de E , então $\overline{Z(\pi)} : Z(E)/Z(F) \rightarrow Z(E/F)$ é um isomorfismo natural.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 1.18, existe um único homomorfismo de C^* -álgebras $Z(\pi) : Z(E) \rightarrow Z(G)$ tal que $\langle \pi(x), \pi(y) \rangle = Z(\pi)(\langle x, y \rangle)$, $\forall x, y \in E$. A existência e unicidade de $\overline{Z(\pi)}$, como também a sua injetividade, seguem agora da propriedade universal do quociente, junto com o fato de que $\ker(Z(\pi)) = Z(F)$ pelo Corolário 1.25.

Finalmente, se F é um ideal de E , pela Proposição 1.29 acima, temos que E/F é um C^* -anel ternário, e a projeção $\pi : E \rightarrow E/F$ é um homomorfismo de $*$ -aters. $\square$

COROLÁRIO 1.31. Z_r e Z_l são “funtores” (ver 1.19) exatos da categoria de C^* -anéis ternários na categoria de C^* -álgebras; mais precisamente: se $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi} F_2 \xrightarrow{\psi} F_3 \rightarrow 0$ é uma seqüência exata de C^* -anéis ternários, então também são exatas as seqüências de C^* -álgebras:

$$0 \rightarrow Z_r(F_1) \xrightarrow{Z_r(\phi)} Z_r(F_2) \xrightarrow{Z_r(\psi)} Z_r(F_3) \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow Z_l(F_1) \xrightarrow{Z_l(\phi)} Z_l(F_2) \xrightarrow{Z_l(\psi)} Z_l(F_3) \rightarrow 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1.30 acima temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z(F_1) & \xrightarrow{Z(\phi)} & Z(F_2) & \xrightarrow{p} & \frac{Z(F_2)}{Z(\phi)(Z(F_1))} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow \overline{Z(\psi)} \\ 0 & \rightarrow & Z(F_1) & \xrightarrow{Z(\phi)} & Z(F_2) & \xrightarrow{Z(\psi)} & Z(F_3) \rightarrow 0 \end{array}$$

Como a primeira fila é exata e os homomorfismos verticais são isomorfismos, concluímos que a segunda fila também é exata. $\square$

COROLÁRIO 1.32. *Se $\pi : E \rightarrow F$ é um homomorfismo de C^* -anéis ternários, então $\pi(E)$ é fechado em F . Os ideais de um C^* -anel ternário E são exatamente os núcleos dos seus homomorfismos.*

1.2. Produtos tensoriais de C^* -anéis ternários

No Lema seguinte, o produto tensorial algébrico dos espaços $E_1, \dots, E_n$ será denotado por $E_1 \odot \dots \odot E_n$, ou simplesmente por $\bigodot_{j=1}^n E_j$. Usaremos a mesma notação ao longo de todo o trabalho.

LEMA 1.33. *Sejam E_{ij} , F_i espaços vetoriais complexos, $\forall i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, e suponhamos que $\alpha_i : \prod_{j=1}^n E_{ij} \rightarrow F_i$ é uma transformação n -linear, para cada $i = 1, \dots, m$. Então existe uma única transformação n -linear $\alpha := \alpha_1 \odot \dots \odot \alpha_m$,*

$$\alpha : \prod_{j=1}^n \bigodot_{i=1}^m E_{ij} \rightarrow \bigodot_{i=1}^m F_i$$

tal que $\alpha(\bigodot_{i=1}^m e_{i1}, \dots, \bigodot_{i=1}^m e_{in}) \mapsto \bigodot_{i=1}^m \alpha_i(e_{i1}, \dots, e_{in})$

DEMONSTRAÇÃO. A existência da transformação α segue do uso reiterado dos isomorfismos naturais $L(V_1, \dots, V_n; W) \cong L(\bigodot_{j=1}^n V_j, W)$, onde $L(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ denota o espaço vetorial de transformações n -lineares sobre $V_1 \times \dots \times V_n$ a valores em W . A unicidade é evidente, porque α toma valores pré-estabelecidos sobre um conjunto gerador de seu domínio. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.34. *Se (E, μ) , (F, ν) são $*$ -anéis ternários, então $(E \odot F, \mu \odot \nu)$ é um $*$ -anel ternário.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja E^* o espaço vetorial conjugado de E , como no exemplo 1.5. Como as transformações

$$\mu : E \times E^* \times E \rightarrow E \quad \text{e} \quad \nu : F \times F^* \times F \rightarrow F$$

são trilineares, também $\mu \odot \nu : (E \odot F) \times (E^* \odot F^*) \times (E \odot F) \rightarrow E \odot F$ é trilinear. Mas $E^* \odot F^* = (E \odot F)^*$, donde $\mu \odot \nu : (E \odot F) \times (E \odot F)^* \times (E \odot F) \rightarrow E \odot F$ é trilinear e, com respeito às identidades algébricas da definição de $*$ -ater (1.1), sobre tensores elementares temos: se

$$(*) = \mu \odot \nu(\mu \odot \nu(x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2, x_3 \odot y_3), x_4 \odot y_4, x_5 \odot y_5)$$

então:

$$\begin{aligned} (*) &= \mu \odot \nu(\mu(x_1, x_2, x_3) \odot \nu(y_1, y_2, y_3), x_4 \odot y_4, x_5 \odot y_5) \\ &= \mu(\mu(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) \odot \nu(\nu(y_1, y_2, y_3), y_4, y_5) \\ &= \mu((x_1, \mu(x_4, x_3, x_2), x_5) \odot \nu(y_1, \nu(y_4, y_3, y_2), y_5)) \\ &= \mu \odot \nu((x_1, \mu(x_4, x_3, x_2), x_5) \odot (y_1, \nu(y_4, y_3, y_2), y_5)) \\ &= \mu \odot \nu(x_1 \odot y_1, \mu \odot \nu(x_4 \odot y_4, x_3 \odot y_3, x_2 \odot y_2), x_5 \odot y_5) \end{aligned}$$

A outra identidade é verificada com cálculos análogos. $\square$

DEFINIÇÃO 1.35. Um C^* -produto tensorial de dois C^* -anéis ternários $(E, \mu, \|\cdot\|)$ e $(F, \nu, \|\cdot\|)$ é um completamento do respectivo produto tensorial algébrico $(E \odot F, \mu \odot \nu)$ com respeito a uma C^* -norma. Se γ é uma tal C^* -norma, denotamos $E \otimes_\gamma F$ o correspondente C^* -produto tensorial.

DEFINIÇÃO 1.36. Diremos que o C^* -anel ternário E é nuclear se para todo C^* -anel ternário F existe um único C^* -produto tensorial $E \otimes F$.

OBSERVAÇÃO 1.37. Sejam (E, μ) , (F, ν) dois C^* -aters. Então

$$E \odot F = (E^+ \odot F^+) \oplus (E^- \odot F^-) \oplus (E^+ \odot F^-) \oplus (E^- \odot F^+).$$

Se γ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, então ela define por restrição C^* -normas sobre cada um dos somandos diretos $E^+ \odot F^+$, $E^- \odot F^-$, $E^+ \odot F^-$, $E^- \odot F^+$. Inversamente, se temos dada uma

C^* -norma sobre cada somando direto, então podemos definir unicamente uma C^* -norma sobre $E \odot F$ de forma tal que restringindo esta norma a cada somando reobtemos as normas dadas: basta definir, para $x = x^{++} \oplus x^{--} \oplus x^{+-} \oplus x^{-+}$ segundo a decomposição acima, $\gamma(x)$ igual ao máximo das normas respectivas em cada somando de x . Em particular, e lembrando também a Observação 1.9, γ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$ se e somente se ela é uma C^* -norma sobre $E^p \odot F^p$. Portanto, é suficiente estudar os produtos tensoriais de C^* -aters positivos. Notar que E é nuclear se e somente se E^+ e E^- são nucleares.

A seguir vemos uma prova simples de que sempre existe pelo menos um C^* -produto tensorial entre dois C^* -aters. Se E é um C^* -ater positivo, ele é um $(Z_l(E) - Z_r(E))$ -bimódulo de Hilbert pleno (pleno significa aquí que ele é pleno como módulo à esquerda e também como módulo à direita). Para simplificar a notação, vamos por A em lugar de $Z_l(E)$, e B em lugar de $Z_r(E)$. Então podemos formar a *álgebra vinculante* $\mathbb{L}(E)$ de E (em inglês: *linking algebra*). Lembrar que $\mathbb{L}(E) = \begin{pmatrix} A & E \\ E^* & B \end{pmatrix}$, com o produto:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \epsilon_1 \\ f_1^* & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \epsilon_2 \\ f_2^* & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + \langle \epsilon_1, f_2 \rangle_l & a_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 b_2 \\ f_1^* a_2 + b_1 \cdot f_2^* & \langle f_1, \epsilon_2 \rangle_r + b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

e a involução:

$$\begin{pmatrix} a & \epsilon \\ f^* & b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* & f \\ \epsilon^* & b^* \end{pmatrix}$$

Falta definir a norma sobre $\mathbb{L}(E)$. Consideremos o A -módulo de Hilbert à esquerda pleno $A \oplus E$, onde o produto interno $[\cdot, \cdot]_l : (A \oplus E) \times (A \oplus E) \rightarrow A$ é dado por: $[(a_1, \epsilon_1), (a_2, \epsilon_2)]_l = a_1 a_2^* + \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle_l$. Definamos $[\cdot, \cdot]_r : (A \oplus E) \times (A \oplus E) \rightarrow \mathbb{L}(E)$ como:

$$[(a_1, \epsilon_1), (a_2, \epsilon_2)]_r = \begin{pmatrix} a_1 & \epsilon_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a_2 & \epsilon_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* a_2 & a_1^* \epsilon_2 \\ \epsilon_1^* \cdot \epsilon_2 & \langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle_r \end{pmatrix}.$$

$A \oplus E$ é um módulo à direita sobre $\mathbb{L}(E)$, através de:

$$\left((a', \epsilon'), \begin{pmatrix} a & \epsilon \\ f^* & b \end{pmatrix} \right) \mapsto (a' a + \langle \epsilon', f \rangle_l, a' \epsilon + \epsilon' b).$$

Tem-se então, $\forall x, y, z \in A \oplus E$, que $[x, y]_l z = x[y, z]_r$. Portanto, temos uma inclusão

$$\text{span}[A \oplus E, A \oplus E]_r \hookrightarrow Z_r(A \oplus E).$$

Pelo teorema de Cohen-Hewitt (em 2.1 incluímos o enunciado deste teorema), sabemos que cada elemento de E é da forma $a\epsilon$, para alguns $a \in A$, $\epsilon \in E$. Analogamente, $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$, $\forall a \in A$, $b \in B$, e alguns $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. Portanto, temos que $[A \oplus E, A \oplus E]_r = \mathbb{L}(E)$. Por outro lado, as restrições da norma sobre $Z_r(A \oplus E)$ aos cantos $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^* & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ coincidem, através das identificações óbvias, com as normas sobre A , E , E^* e B respectivamente. Logo, $\mathbb{L}(E)$ é completa com respeito a esta norma, donde concluímos que $Z_r(A \oplus E) = \mathbb{L}(E)$. Consultar [10] e [11] para mais detalhes. Se E é um C^* -ater positivo, também chamaremos álgebra vinculante de E a $\mathbb{L}(E)$, a álgebra vinculante do $(Z_l(E) - Z_r(E))$ -bimódulo de Hilbert E .

PROPOSIÇÃO 1.38. *Sejam E e F dois C^* -anéis ternários positivos. Então cada C^* -produto tensorial $\mathbb{L}(E) \otimes_\gamma \mathbb{L}(F)$ entre as álgebras vinculantes de E e F define um C^* -produto tensorial $E \otimes_\gamma F$, por restrição da norma γ à imagem da inclusão natural $\iota : E \odot F \hookrightarrow \mathbb{L}(E) \otimes_\gamma \mathbb{L}(F)$ tal que $\sum_i \epsilon_i \odot f_i \mapsto \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & f_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A inclusão $\iota : E \odot F \hookrightarrow \mathbb{L}(E) \otimes_{\gamma} \mathbb{L}(F)$ tal que $\sum_i \epsilon_i \odot f_i \mapsto \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & f_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é claramente uma inclusão de $*$ -aters. Portanto, a restrição da C^* -norma de $\mathbb{L}(E) \otimes_{\gamma} \mathbb{L}(F)$ a $\iota(E \odot F)$ induz uma C^* -norma sobre $E \odot F$, como queríamos. $\square$

COROLÁRIO 1.39. *Dados dois C^* -anéis ternários E e F , sempre existe um C^* -produto tensorial entre eles.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Observação 1.37, γ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$ se e somente se ela é uma C^* -norma sobre $E^p \odot F^p$. Portanto, o Corolário é uma consequência direta da Proposição 1.38 acima. $\square$

DEFINIÇÃO 1.40. O produto tensorial espacial entre dois C^* -anéis ternários E e F é o produto tensorial induzido pelo produto tensorial espacial $\mathbb{L}(E^p) \otimes \mathbb{L}(F^p)$, segundo a Proposição 1.38 e o Corolário 1.39

OBSERVAÇÃO 1.41. Quando E e F são C^* -aters positivos, eles podem ser pensados como módulos de Hilbert. Deste ponto de vista, o produto tensorial espacial que acabamos de definir é conhecido como *produto tensorial exterior* ([43]).

OBSERVAÇÃO 1.42. A Proposição 1.38 implica que se $x = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \odot f_i \in E \odot F$, e $x \neq 0$, então $0 \neq \iota(x)^* \iota(x) = \sum_{i,j=1}^n \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_E \odot \langle f_i, f_j \rangle_F$. Note-se que esta é uma maneira bem simples de ver que $\sum_{i,j=1}^n \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_E \odot \langle f_i, f_j \rangle_F \neq 0$, enquanto que a prova fornecida em [43] usa o teorema altamente não trivial de estabilização de Kasparov ([41]).

Queremos ver que as C^* -normas sobre $E \odot F$ estão em bijeção natural com as C^* -normas sobre $Z(E) \odot Z(F)$. Precisaremos de alguns resultados preliminares, entre eles o seguinte Lema, cuja demonstração incluímos apenas para conveniência do leitor, já que consiste da repetição dos argumentos usados na prova do Lemma 4.3 de [43], onde somente a C^* -norma espacial foi considerada.

LEMA 1.43. *Sejam A e B C^* -álgebras, e suponhamos que $\mathbf{a} = (a_{ij})$, $\mathbf{c} = (c_{ij}) \in M_n(A)$, $\mathbf{b} = (b_{ij})$, $\mathbf{d} = (d_{ij}) \in M_n(B)$. Seja $A \otimes_{\gamma} B$ algum C^* -produto tensorial de A e B . Então:*

1. *Se $0 \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ e $0 \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{d}$, temos $(a_{ij} \odot b_{ij}) \leq (c_{ij} \odot d_{ij})$ em $M_n(A \otimes_{\gamma} B)$.*
2. *Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \geq 0$, então $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \odot b_{ij} \geq 0$ em $A \otimes_{\gamma} B$.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos primeiro que se $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M_n(A)^+$ e $\mathbf{b} = (b_{ij}) \in M_n(B)^+$, então $(a_{ij} \odot b_{ij}) \in M_n(A \otimes_{\gamma} B)^+$.

Como $\mathbf{a} = \mathbf{s}^* \mathbf{s}$ em $M_n(A)$, e $\mathbf{b} = \mathbf{t}^* \mathbf{t}$ em $M_n(B)$, teremos que, se $\mathbf{s} = (s_{ij})$ e $\mathbf{t} = (t_{ij})$, então

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ki}^* s_{kj}, \quad \text{and} \quad b_{ij} = \sum_{h=1}^n t_{hi}^* t_{hj}, \quad \forall i, j = 1 \dots n.$$

Portanto,

$$(a_{ij} \odot b_{ij}) = \left(\sum_{k,h=1}^n s_{ki}^* s_{kj} \odot t_{hi}^* t_{hj} \right) = \sum_{h,k=1}^n (s_{ki}^* s_{kj} \odot t_{hi}^* t_{hj}).$$

Assim, é suficiente mostrar que cada somando na última soma é um elemento positivo de $M_n(A \otimes_\gamma B)$, o que equivale a provar que se $a_1, \dots, a_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in B$, então $(a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j)$ é positivo em $M_n(A \otimes_\gamma B)$. Mas $a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j = (a_i \otimes b_i)^*(a_j \otimes b_j)$, donde segue que $(a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j) = u^* u \in M_n(A \otimes_\gamma B)^+$, onde $u = (u_{ij})$ é a matriz em $M_n(A \otimes_\gamma B)$ tal que $u_{1i} = a_i \otimes b_i$, e $u_{ij} = 0$ para $i > 0$. Agora, 1. segue do fato que $((c_{ij} - a_{ij}) \otimes b_{ij})$ e $(a_{ij} \otimes (d_{ij} - b_{ij}))$ são elementos positivos pela primeira parte da demonstração, e então também sua soma é um elemento positivo.

2. Seja $\tau \in M_n(A \otimes_\gamma B)$ tal que $(a_{ij} \otimes b_{ij}) = \tau^* \tau$. Podemos supor $A \otimes_\gamma B \subseteq B(H)$, para certo espaço de Hilbert H , e portanto $M_n(A \otimes_\gamma B) \subseteq B(H^n)$. Considere o operador $i : H \rightarrow H^n$ tal que $ih = (h, \dots, h)$, $\forall h \in H$. Então $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \otimes b_{ij} = i^* u^* u i \in B(H)^+$. Como $(A \otimes_\gamma B)^+ = (A \otimes_\gamma B) \cap B(H)^+$, concluímos que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \otimes b_{ij}$ é positivo em $A \otimes_\gamma B$. $\square$

Suponhamos que B_0 é uma sub- $*$ -álgebra de uma C^* -álgebra B , e E_0 é um B_0 -módulo à direita com uma forma sesquilinear definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_0 \times E_0 \rightarrow B_0$, ou seja:

1. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$, $\forall x, y \in E_0$, $b \in B_0$.
3. $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$, $\forall x, y \in E_0$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in E_0$, e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Então, $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\|\langle x, x \rangle\|}$ é uma norma sobre E_0 . Seja E o completamento de E_0 com respeito a esta norma. É possível estender a ação de B_0 sobre E_0 a uma ação de B sobre E , e também a forma sesquilinear a um B -produto interno sobre E , obtendo assim um B -módulo de Hilbert. Nos referiremos a esta construção como o *processo de duplo completamento* para $(E_0, B_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (ver [43] para mais informação).

PROPOSIÇÃO 1.44. *Sejam (E, μ) e (F, ν) C^* -anéis ternários positivos, e suponhamos que γ é uma C^* -norma sobre $Z(E) \odot Z(F)$.*

1. *Então existe uma única forma sesquilinear definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle : (E \odot F) \times (E \odot F) \rightarrow Z(E) \odot Z(F)$ tal que $\langle e \odot f, e' \odot f' \rangle = \langle e, e' \rangle_E \odot \langle f, f' \rangle_F$, $\forall e, e' \in E$, $f, f' \in F$.*
2. *A norma $\tilde{\gamma} : E \odot F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\gamma}(x) = \sqrt{\gamma(\langle x, x \rangle)}$ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, e a função $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$, definida no conjunto $\mathcal{N}_1$ de C^* -normas sobre $Z(E) \odot Z(F)$ e a valores no conjunto $\mathcal{N}_2$ de C^* -normas sobre $E \odot F$, preserva a ordem.*
3. *$E \otimes_{\tilde{\gamma}} F$ é um C^* -anel ternário positivo, e $Z(E \otimes_{\tilde{\gamma}} F) = Z(E) \otimes_\gamma Z(F)$.*

DEMONSTRAÇÃO. O Lema 1.33 implica a existência e unicidade de tal forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Vejamos que $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x = \sum_{i=1}^n e_i \odot f_i \in E \odot F$:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle e_i \odot f_i, e_j \odot f_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle_E \odot \langle f_i, f_j \rangle_F$$

Agora, $(\langle e_i, e_j \rangle_E)_{i,j=1}^n$ e $(\langle f_i, f_j \rangle_F)_{i,j=1}^n$ são elementos positivos de $M_n(A)$ e $M_n(B)$ respectivamente ([43], Lemma 4.2), e portanto $\sum_{i,j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle_E \odot \langle f_i, f_j \rangle_F$ é positivo em $Z(E) \otimes_\gamma Z(F)$ pelo Lemma 1.43. Finalmente, lembremos que, pela Observação 1.42, $\langle x, x \rangle = 0$ implica que $x = 0$. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma sesquilinear definida positiva, e então 1. fica provado.

Pelo processo de duplo completamento descrito acima, obtemos um $Z(E) \otimes_\gamma Z(F)$ -módulo de Hilbert G , com norma $\tilde{\gamma}$. Para provar que $\tilde{\gamma}$ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, mostremos primeiro que $\mu \odot \nu(x, y, z) = x \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E \odot F$; é claramente suficiente ver isto para $x = e \odot f$, $y = e' \odot f'$.

$z = \epsilon'' \odot f''$. Agora:

$$\begin{aligned} \mu \odot \nu(x, y, z) &= \mu \odot \nu(\epsilon \odot f, \epsilon' \odot f', \epsilon'' \odot f'') \\ &= \mu(\epsilon, \epsilon', \epsilon'') \odot \nu(f, f', f'') \\ &= (\epsilon \langle \epsilon', \epsilon'' \rangle_E) \odot (f \langle f', f'' \rangle_F) \\ &= (\epsilon \odot f)(\langle \epsilon', \epsilon'' \rangle_E \odot \langle f', f'' \rangle_F) \\ &= (\epsilon \odot f) \langle \epsilon' \odot f', \epsilon'' \odot f'' \rangle \\ &= x \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

Portanto, usando a teoria de módulos de Hilbert, podemos concluir que $\tilde{\gamma}$ é uma C^* -norma:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\mu \odot \nu(x, y, z)) &= \tilde{\gamma}(x \langle y, z \rangle) \\ &\leq \tilde{\gamma}(x) \tilde{\gamma}(\langle y, z \rangle) \\ &\leq \tilde{\gamma}(x) \tilde{\gamma}(y) \tilde{\gamma}(z) \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\mu \odot \nu(x, x, x)) &= \tilde{\gamma}(x \langle x, x \rangle) \\ &= \sqrt{\gamma(\langle x \langle x, x \rangle, x \langle x, x \rangle \rangle)} \\ &= \sqrt{\gamma(\langle x, x \rangle^3)} \\ &= \sqrt{\gamma(\langle x, x \rangle)^3} \\ &= \tilde{\gamma}(x)^3 \end{aligned}$$

Além disto, é óbvio que $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ preserva a ordem.

Finalmente, segue de 1. e 2. que $E \otimes_{\tilde{\gamma}} F$ é um $Z(E) \otimes_{\gamma} Z(F)$ -módulo de Hilbert pleno, e portanto $Z(E \otimes_{\tilde{\gamma}} F)$ é precisamente $Z(E) \otimes_{\gamma} Z(F)$. $\square$

COROLÁRIO 1.45. *Sejam (E, μ) e (F, ν) C^* -anéis ternários, e suponhamos que γ é uma C^* -norma sobre $Z(E) \odot Z(F)$.*

1. *Então existe uma única forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : (E \odot F) \times (E \odot F) \rightarrow Z(E) \odot Z(F)$ tal que $\langle \epsilon \odot f, \epsilon' \odot f' \rangle = \langle \epsilon, \epsilon' \rangle_E \odot \langle f, f' \rangle_F$, $\forall \epsilon, \epsilon' \in E, f, f' \in F$.*
2. *A norma $\tilde{\gamma} : E \odot F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\gamma}(x) = \sqrt{\gamma(\langle x, x \rangle)}$ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, e a função $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$, definida no conjunto $\mathcal{N}_1$ de C^* -normas sobre $Z(E) \odot Z(F)$ e a valores no conjunto $\mathcal{N}_2$ de C^* -normas sobre $E \odot F$, preserva a ordem.*
3. *$Z(E \otimes_{\tilde{\gamma}} F) = Z(E) \otimes_{\gamma} Z(F)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar a Proposição 1.44 aos C^* -aters positivos E^p e F^p , e lembrar que $Z(E^p) = Z(E)$, $Z(F^p) = Z(F)$ (1.28), e que $\tilde{\gamma}$ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$ se e somente se é uma C^* -norma sobre $E^p \odot F^p$ (1.37). $\square$

A seguir, queremos ver que vale o resultado recíproco, quer dizer: todo produto tensorial $E \otimes_{\alpha} F$ induz um produto tensorial $Z(E) \otimes_{\tilde{\alpha}} Z(F)$. Os resultados seguintes nos levam nessa direção.

O Lema a seguir é uma ligera modificação de T.6.1 de [65]. Denotamos por $M(A)$ a álgebra dos multiplicadores da C^* -álgebra A , e, se I, J são pré- C^* -álgebras, e γ é uma C^* -norma sobre a $*$ -álgebra $I \odot J$, então indicamos o correspondente completamento por $I \otimes_{\gamma} J$.

LEMA 1.46. *Suponhamos que I, J são $*$ -ideais bilaterais (não necessariamente fechados) das C^* -álgebras A e B respectivamente, e que γ é uma C^* -norma sobre $I \odot J$. Então:*

1. Existem aplicações $\iota_A : A \longrightarrow M(I \otimes_\gamma J)$ e $\iota_B : B \longrightarrow M(I \otimes_\gamma J)$ tais que

$$\iota_A(x)\iota_B(y) = \iota_B(y)\iota_A(x) = x \otimes y, \quad \forall x \in I, y \in J.$$

2. Se I é denso em A e J é denso em B , ι_A e ι_B são injetivas.

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a construção de ι_A , sendo análoga a construção de ι_B . Se $\iota : I \odot J \longrightarrow I \otimes_\gamma J$ é a inclusão canônica, definimos, para $a \in A$, as funções $L_a, R_a : I \odot J \longrightarrow I \otimes_\gamma J$ através das fórmulas $L_a = \iota(l_a \odot id_J)$, $R_a = \iota(r_a \odot id_J)$, onde $l_a, r_a : I \longrightarrow I$ são as multiplicações à esquerda e à direita pelo elemento a respectivamente; isto é, $L_a(x \odot y) = ax \odot y$ and $R_a(x \odot y) = xa \odot y$. Queremos ver (L_a, R_a) como um centralizador duplo de $I \otimes_\gamma J$. Notar que se $x = \sum_i a_i \odot b_i$, $y = \sum_j c_j \odot d_j \in I \odot J$, então:

$$\begin{aligned} L_a(xy) &= L_a(x)y \\ R_a(xy) &= xR_a(y) \\ xL_a(y) &= \sum_{i,j} a_i(ac_j) \odot b_id_j \\ &= \sum_{i,j} (a_ia)c_j \odot b_id_j \\ &= R_a(x)y \end{aligned}$$

Se provamos que L_a, R_a são limitados, poderemos estendê-los a operadores sobre $I \otimes_\gamma J$, obtendo um centralizador duplo.

Então, seja $t = \sum_{i=1}^n a_i \odot b_i \in I \odot J$, e consideremos

$$z = \begin{pmatrix} (\|a\|^2 - a^*a)^{\frac{1}{2}}a_1 \odot b_1 & \dots & (\|a\|^2 - a^*a)^{\frac{1}{2}}a_n \odot b_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(I \odot J);$$

Calculando, se verifica que $z^*z = (z_{ij})$, onde $z_{ij} = a_j^*(\|a\|^2 - a^*a)a_i \odot b_j^*b_i$. Agora, segue do Lema 1.43, que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_j^*(\|a\|^2 - a^*a)a_i \odot b_j^*b_i \geq 0$$

e portanto que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_j^*a^*aa_i \odot b_j^*b_i \leq \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^n a_j^*a_i \odot b_j^*b_i$$

Assim, $L_a(t)^*L_a(t) \leq \|a\|^2 t^*t$ e, tomando normas, concluímos que $\|L_a(t)\| \leq \|a\| \|t\|$. Logo $\|L_a\| \leq \|a\|$, e podemos estender $L_a : I \otimes_\gamma J \longrightarrow I \otimes_\gamma J$. De forma similar, podemos ver que também $\|R_a\| \leq \|a\|$, e desta maneira obtivemos um centralizador duplo de $I \otimes_\gamma J$. É claro que a aplicação $\iota_A : a \longmapsto (L_a, R_a)$ é um homomorfismo de C*-álgebras. É de verificação fácil que se ι_B é construída da mesma forma, teremos $\iota_A(x)\iota_B(y) = \iota_B(y)\iota_A(x) = x \otimes y$, $\forall x \in I, y \in J$. Isto encerra a prova de 1. .

Vejam agora que se I é denso em A , então ι_A é injetivo: se $(L_a, R_a) = 0$, então $L_a(t) = 0$, $\forall t \in I \odot J$, donde $ax \odot y = 0$, $\forall x \in I, y \in J$; isto implica que $ax = 0$, $\forall x \in I$, e então $a = 0$, porque I é denso em A . Isto prova 2. . $\square$

PROPOSIÇÃO 1.47. *Sejam I, J $*$ -ideais bilaterais densos das C^* -álgebras A e B respectivamente. Então cada C^* -norma sobre $I \odot J$ pode ser estendida a uma C^* -norma (não necessariamente única) sobre $M(A) \odot M(B)$. Além disto, os completamentos de $I \odot J$ e $A \odot B$ com respeito a esta C^* -norma coincidem.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja γ uma C^* -norma sobre $I \odot J$, e consideremos as aplicações $\iota_A : A \rightarrow M(I \otimes_\gamma J)$ e $\iota_B : B \rightarrow M(I \otimes_\gamma J)$ fornecidas pelo Lema 1.46. Suponhamos que $t = \sum_i a_i \odot b_i \in \ker(\iota_A \oplus \iota_B)$. Como $\ker(\iota_A \oplus \iota_B)$ é um ideal bilateral de $A \odot B$, temos em particular que $(x \otimes y)t, t(x \otimes y) \in \ker(\iota_A \oplus \iota_B)$, $\forall x \in I, y \in J$. Isto implica que $\sum_i x a_i \odot y b_i = 0 = \sum_i a_i x \odot b_i y$, $\forall x \in I, y \in J$, porque $\iota_A \oplus \iota_B$ é injetiva sobre $I \odot J$; mas estas igualdades valem também em qualquer C^* -completamento de $A \odot B$, por exemplo em $A \otimes_{\min} B$. Como $I \odot J$ é denso em $A \otimes_{\min} B$, concluímos que $t = 0$. Assim, $\iota_A \oplus \iota_B : A \odot B \rightarrow M(I \otimes_\gamma J)$ é injetiva. Portanto, o fecho de $(\iota_A \oplus \iota_B)(A \odot B)$ em $M(I \otimes_\gamma J)$ é um C^* -produto tensorial de A e B , que contém $I \odot J$ como subconjunto denso; deduzimos então que coincide com $I \otimes_\gamma J$. O resto da prova decorre agora de T.6.3 de [65], que afirma que toda C^* -norma sobre $A \odot B$ pode ser estendida a $M(A) \odot M(B)$.

Com respeito a última afirmação, é so levar em conta que, como I é denso em A e J é denso em B , então $I \odot J$ deve ser denso em $A \odot B$, pois toda C^* -norma $\|\cdot\|$ sobre $A \odot B$ satisfaz $\|a \odot b\| = \|a\|_A \|b\|_B$. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.48. *Sejam $(E, \mu) \in (F, \nu)$ C^* -anéis ternários. Suponhamos que α é uma C^* -norma sobre $E \odot F$. Então $Z(E \otimes_\alpha F)$ é um C^* -produto tensorial de $Z(E) \in Z(F)$, ou seja, existe uma C^* -norma $\bar{\alpha}$ sobre $Z(E) \odot Z(F)$ (necessariamente única) tal que $Z(E \otimes_\alpha F) = Z(E) \otimes_{\bar{\alpha}} Z(F)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_E, \langle \cdot, \cdot \rangle_F$ as correspondentes formas sesquilineares de $E \otimes_\alpha F$, E e F sobre $Z(E \otimes_\alpha F)$, $Z(E)$ e $Z(F)$ respectivamente. Lembrar que se E é um C^* -ater, então $\text{span}\langle E, E \rangle_E$ é um $*$ -ideal bilateral denso em $Z(E)$. Então, pela Proposição 1.47, é suficiente provar que $Z(E \otimes_\alpha F)$ é um C^* -completamento de $Z'_E \odot Z'_F$, onde $Z'_E = \text{span}\langle E, E \rangle_E$ e $Z'_F = \text{span}\langle F, F \rangle_F$. Como E é um Z'_E módulo à direita e F é um Z'_F módulo à direita, $E \odot F$ é um $Z'_E \odot Z'_F$ módulo à direita. Pelo Lema 1.33, existe uma única forma sesquilinear $[\cdot, \cdot] : (E \odot F) \times (E \odot F) \rightarrow Z'_E \odot Z'_F$ tal que $[e_1 \odot f_1, e_2 \odot f_2] = \langle e_1, e_2 \rangle_E \odot \langle f_1, f_2 \rangle_F \in Z'_E \odot Z'_F$, $\forall e_1, e_2 \in E, f_1, f_2 \in F$. Por outro lado, se $e \odot f \in E \odot F$, tem-se:

$$\begin{aligned} (e \odot f) \langle e_1 \odot f_1, e_2 \odot f_2 \rangle_\alpha &= \mu \odot \nu(e \odot f, e_1 \odot f_1, e_2 \odot f_2) \\ &= \mu(e, e_1, e_2) \odot \nu(f, f_1, f_2) \\ &= e \langle e_1, e_2 \rangle_E \odot f \langle f_1, f_2 \rangle_F \\ &= (e \odot f) [e_1 \odot f_1, e_2 \odot f_2] \end{aligned}$$

Assim, temos uma função $\phi : Z'_E \odot Z'_F \rightarrow C := \text{span}\langle E \odot F, E \odot F \rangle_\alpha$. Notar que C é uma sub- $*$ -álgebra de $Z(E \otimes_\alpha F)$, que é densa em $Z(E \otimes_\alpha F)$ porque $E \odot F$ é denso em $E \otimes_\alpha F$. Agora, ϕ é um $*$ -homomorfismo injetivo, pois a ação de $\phi(x)$ sobre $E \otimes_\alpha F$ é a extensão, necessariamente única, da ação de x sobre $E \odot F$. Na verdade, é claro também que a imagem de ϕ é toda a subálgebra C . Portanto, $\phi(Z'_E \odot Z'_F)$ é denso em $Z(E \otimes_\alpha F)$. Em outras palavras, $Z(E \otimes_\alpha F) = Z'_E \otimes_{\bar{\alpha}} Z'_F$, para alguma C^* -norma $\bar{\alpha}$ sobre $Z'_E \odot Z'_F$. Pela Proposição 1.47, concluímos que $Z(E \otimes_\alpha F) = Z(E) \otimes_{\bar{\alpha}} Z(F)$. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.49. Notar que a Proposição 1.48 implica que se α é uma C^* -norma sobre $E \odot F$, então $\alpha(x \odot y) = \|x\| \|y\|$.

TEOREMA 1.50. *Sejam E e F C*-anéis ternários. Consideremos os seguintes conjuntos:*

$$\mathcal{N}_1 = \{C^* - \text{normas sobre } Z(E) \odot Z(F)\}$$

$$\mathcal{N}_2 = \{C^* - \text{normas sobre } E \odot F\}$$

e as funções

$$\phi : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2 : \gamma \longmapsto \tilde{\gamma} \quad \text{definido no Corolário 1.45}$$

$$\psi : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}_1 : \alpha \longmapsto \bar{\alpha} \quad \text{definido na Proposição 1.48}$$

Consideramos $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ ordenados pela ordem usual de funções reais. Então, ϕ e ψ são isomorfismos de conjuntos ordenados, mutuamente inversos.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\gamma \in \mathcal{N}_1$. Então, por 3. do Corolário 1.45, tem-se que $Z(E \otimes_{\tilde{\gamma}} F)$ é precisamente $Z(E) \otimes_{\gamma} Z(F)$: isto é: $\tilde{\gamma} = \gamma$, e portanto $\psi\phi = id_{\mathcal{N}_1}$.

Consideremos agora $\alpha \in \mathcal{N}_2$. $\bar{\alpha}$ é a C*-norma sobre $Z(E) \odot Z(F)$ tal que $Z(E) \otimes_{\bar{\alpha}} Z(F) = Z(E \otimes_{\alpha} F)$. Agora, lembrar que $\hat{\alpha} : E \odot F \longrightarrow \mathbb{E}$ é definida como $\hat{\alpha}(x) = \sqrt{\bar{\alpha}(\langle x, x \rangle)}$, $\forall x \in E \odot F$, e $\bar{\alpha}(\langle x, x \rangle) = \alpha(x)^2$ pela equação (1) na página 12. Logo, $\bar{\alpha} = \alpha$, e isto mostra que $\phi\psi = id_{\mathcal{N}_2}$.

Como ϕ preserva a ordem (2. do Corolário 1.45), só falta provar que ψ também preserva a ordem para completar a prova. Sejam então $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_2$, com $\alpha \geq \beta$. Então a identidade sobre $E \odot F$ se estende por continuidade a um homomorfismo sobrejetivo $\pi : E \otimes_{\alpha} F \longrightarrow E \otimes_{\beta} F$, e portanto temos um homomorfismo sobrejetivo $Z(\pi) : Z(E \otimes_{\alpha} F) \longrightarrow Z(E \otimes_{\beta} F)$. Como $Z(\pi)$ é sobrejetivo e $E \otimes_{\alpha} F = Z(E) \otimes_{\bar{\alpha}} Z(F)$ e $E \otimes_{\beta} F = Z(E) \otimes_{\bar{\beta}} Z(F)$, concluímos que $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta}$. $\square$

Daqui em diante, escreveremos α em lugar de $\bar{\alpha}$ e γ em lugar de $\tilde{\gamma}$.

COROLÁRIO 1.51. *Sejam E e F C*-anéis ternários. Então existem uma C*-norma máxima $\|\cdot\|_{\text{máx}}$ sobre $E \odot F$, e uma C*-norma mínima $\|\cdot\|_{\text{mín}}$ sobre $E \odot F$, e*

$$Z(E \otimes_{\text{máx}} F) = Z(E) \otimes_{\text{máx}} Z(F).$$

$$Z(E \otimes_{\text{mín}} F) = Z(E) \otimes_{\text{mín}} Z(F).$$

A norma mínima é a norma espacial.

COROLÁRIO 1.52. *Um C*-anel ternário E é nuclear (1.36) se e somente se $Z(E)$ é uma C*-álgebra nuclear.*

Obtemos também como Corolário o resultado seguinte, já bem conhecido ([7]). Salientamos que estamos usando, e usaremos ao longo de todo o trabalho, a expressão “equivalência Morita” em lugar da expressão “equivalência forte de Morita”. Notar que não se trata do mesmo conceito de equivalência Morita da teoria de módulos.

COROLÁRIO 1.53. *Sejam A e B duas C*-álgebras equivalentes Morita. Então A é nuclear se e somente se B é nuclear.*

Para concluir esta seção, provamos um resultado que será útil mais tarde. Lembrar que se E é um B -módulo de Hilbert à direita, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_B(E)$ denota a C^* -álgebra dos operadores adjuntáveis sobre E , e $\mathcal{K}(E)$ é a sua sub- C^* -álgebra dos operadores adjuntáveis compactos.

PROPOSIÇÃO 1.54. *Sejam E e F módulos de Hilbert à direita plenos sobre as C^* -álgebras B_E e B_F respectivamente, e suponhamos que γ é uma C^* -norma sobre $E \odot F$. Então γ pode ser “estendida”, de maneira única, a uma C^* -norma $\tilde{\gamma}$ sobre $\mathcal{L}(E) \odot \mathcal{L}(F)$, e temos as seguintes inclusões:*

$$\mathcal{K}(E) \underset{\gamma}{\otimes} \mathcal{K}(F) \hookrightarrow \mathcal{L}(E) \underset{\tilde{\gamma}}{\otimes} \mathcal{L}(F) \hookrightarrow \mathcal{L}(E \underset{\gamma}{\otimes} F).$$

Se γ é a norma espacial, $\tilde{\gamma}$ também é a norma espacial.

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade segue do fato de que $\tilde{\gamma}$ sobre $\mathcal{L}(E) \odot \mathcal{L}(F)$ deve ser a restrição a este álgebra da C^* norma de $\mathcal{L}(E \underset{\gamma}{\otimes} F)$. Portanto, só temos que provar a existência de $\tilde{\gamma}$. Pensando E como C^* -ater, temos $Z_r(E) = B_E$, $Z_r(F) = B_F$ (ver o Exemplo 1.10), e então $Z_l(E) = \mathcal{K}(E)$, $Z_l(F) = \mathcal{K}(F)$. Observar que, pela versão à esquerda do Teorema 1.50, temos $\mathcal{K}(E) \underset{\gamma}{\otimes} \mathcal{K}(F) = \mathcal{K}(E \underset{\gamma}{\otimes} F)$. Por outro lado, temos que $M(\mathcal{K}(E)) = \mathcal{L}(E)$, $M(\mathcal{K}(F)) = \mathcal{L}(F)$, e $M(\mathcal{K}(E \underset{\gamma}{\otimes} F)) = \mathcal{L}(E \underset{\gamma}{\otimes} F)$ ([41]). Agora, a prova se encerra usando T.6.3 de [65], que diz que existe uma C^* -norma $\tilde{\gamma}$, que é a C^* -norma espacial se γ for a C^* -norma espacial, tal que se tem:

$$Z_l(E) \underset{\gamma}{\otimes} Z_l(F) \subseteq M(Z_l(E)) \underset{\tilde{\gamma}}{\otimes} M(Z_l(F)) \subseteq M(Z_l(E) \underset{\gamma}{\otimes} Z_l(F)).$$

□

1.3. C^* -anéis ternários exatos

Nesta seção introduzimos a noção de C^* -anel ternário exato, e provamos um resultado análogo ao Corolário 1.52. Uma boa introdução à teoria das C^* -álgebras exatas pode ser achada em [64].

Suponhamos que $0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\phi} F_2 \xrightarrow{\psi} F_3 \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de C^* -aters, isto é, ϕ e ψ são homomorfismos de $*$ -aters, ϕ é injetiva, ψ é sobrejetiva, e $\ker \psi = \phi(F_1)$. Seja E um C^* -ater. Então a sequência $0 \longrightarrow E \odot F_1 \xrightarrow{id \odot \phi} E \odot F_2 \xrightarrow{id \odot \psi} E \odot F_3 \longrightarrow 0$ também é exata. Por outro lado, temos uma inclusão $(E \odot F_2)/(E \odot F_1) \hookrightarrow (E \underset{\min}{\otimes} F_2)/(E \underset{\min}{\otimes} F_1)$, e este quociente é um C^* -ater. Portanto, existe uma C^* -norma γ sobre $E \odot F_3$ tal que

$$0 \longrightarrow E \underset{\min}{\otimes} F_1 \xrightarrow{id \odot \phi} E \underset{\min}{\otimes} F_2 \xrightarrow{id \odot \psi} E \underset{\gamma}{\otimes} F_3 \longrightarrow 0$$

é exata. Como γ é maior ou igual à norma mínima, a identidade sobre $E \odot F_3$ se estende por continuidade a um homomorfismo sobrejetivo $E \underset{\gamma}{\otimes} F_3 \longrightarrow E \underset{\min}{\otimes} F_3$.

DEFINIÇÃO 1.55. Dizemos que um C^* -anel ternário E é exato se para toda sequência exata

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$$

de C^* -anéis ternários, tem-se que

$$0 \longrightarrow E \underset{\min}{\otimes} F_1 \longrightarrow E \underset{\min}{\otimes} F_2 \longrightarrow E \underset{\min}{\otimes} F_3 \longrightarrow 0$$

também é exata.

PROPOSIÇÃO 1.56. *Sejam E e F C^* -anéis ternários, e suponhamos que G é um ideal de F . Então*

$$0 \longrightarrow E \otimes_{\min} G \longrightarrow E \otimes_{\min} F \longrightarrow E \otimes_{\min} (F/G) \longrightarrow 0$$

é exata se e somente se

$$0 \longrightarrow Z(E) \otimes_{\min} Z(G) \longrightarrow Z(E) \otimes_{\min} Z(F) \longrightarrow Z(E) \otimes_{\min} (Z(F)/Z(G)) \longrightarrow 0$$

é exata.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiro que

$$0 \longrightarrow E \otimes_{\min} G \longrightarrow E \otimes_{\min} F \longrightarrow E \otimes_{\min} (F/G) \longrightarrow 0$$

é exata. Pelo Corolário 1.51 e o fato que Z é um funtor exato, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z(E \otimes_{\min} G) & \longrightarrow & Z(E \otimes_{\min} F) & \longrightarrow & Z(E \otimes_{\min} (F/G)) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(G) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F/G) \longrightarrow 0 \\ & & = \downarrow & & = \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(G) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F)/Z(G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como a primeira e a segunda filas são exatas, a terceira também é exata.

Para provar o recíproco, notemos primeiro que:

$$0 \longrightarrow E \otimes_{\min} G \longrightarrow E \otimes_{\min} F \longrightarrow (E \otimes_{\min} F)/(E \otimes_{\min} G) \longrightarrow 0$$

é exata, e $(E \otimes_{\min} F)/(E \otimes_{\min} G)$ é um C^* -complemento do $*$ -ater $E \odot (F/G)$. Denotando a correspondente C^* -norma por γ , temos um homomorfismo sobrejetivo $\phi : E \otimes_{\gamma} (F/G) \longrightarrow E \otimes_{\min} (F/G)$ que estende a identidade sobre $E \odot (F/G)$. Aplicando o funtor exato Z , obtemos o seguinte diagrama comutativo com filas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(G) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\gamma} Z(F)/Z(G) \longrightarrow 0 \\ & & = \downarrow & & = \downarrow & & \downarrow Z(\phi) \\ 0 & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(G) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F) & \longrightarrow & Z(E) \otimes_{\min} Z(F)/Z(G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como o diagrama comuta e as filas são exatas, o homomorfismo sobrejetivo $Z(\phi)$ é um isomorfismo. $\square$

COROLÁRIO 1.57. *Um C^* -anel ternário E é exato (1.55) se e somente se $Z(E)$ é uma C^* -álgebra exata.*

DEMONSTRAÇÃO. Imediato da Proposição 1.56 $\square$

O seguinte resultado é conhecido ([48]):

COROLÁRIO 1.58. *Sejam A e B duas C^* -álgebras equivalentes Morita (cf. página 27). Então A é exata se e somente se B é exata.*

CAPÍTULO 2

Produtos Tensoriais de Fibrados de Fell

O nosso principal propósito neste capítulo é o de introduzir uma noção conveniente de produto tensorial de fibrados de Fell (2.8). Um produto tensorial dos fibrados $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ sobre os grupos G e H será um fibrado de Fell $\mathcal{C} = (C_r)_{r \in G \times H}$ sobre $G \times H$, e teremos que C_ϵ é um produto tensorial de A_ϵ e B_ϵ (denotaremos por ϵ o elemento neutro de qualquer grupo). Mostraremos que existem, a menos de isomorfismos, produtos tensoriais únicos $\mathcal{C}_{\max}$ e $\mathcal{C}_{\min}$ de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$, tais que $(\mathcal{C}_{\max})_\epsilon = A_\epsilon \otimes_{\max} B_\epsilon$ e $(\mathcal{C}_{\min})_\epsilon = A_\epsilon \otimes_{\min} B_\epsilon$.

Na primeira seção estudaremos o caso dos fibrados sobre grupos discretos, e na segunda seção o caso geral. Na terceira seção estudamos as representações dos produtos tensoriais.

Ao longo deste trabalho usaremos reiteradamente dois resultados muito importantes, cujos enunciados será conveniente incluir. O primeiro deles não é estritamente necessário para desenvolver o trabalho com sucesso, mas é útil para economizar tempo e espaço, evitando repetir várias vezes os mesmos argumentos de aproximação. Lembrar que se B é uma álgebra de Banach, e um espaço de Banach E é um B -módulo à direita, então E é chamado B -módulo de Banach se $\|xb\| \leq \|x\| \|b\|$, $\forall x \in E, b \in B$. O módulo é dito não degenerado se $\text{span } EB$ é denso em E . Temos então:

TEOREMA 2.1 (Cohen–Hewitt). *Sejam B uma álgebra de Banach com unidade aproximada, e E um B -módulo de Banach não degenerado. Então, dado $x \in E$, existem $y \in E, b \in B$, tais que $x = yb$.*

Uma demonstração do teorema de Cohen–Hewitt pode ser achada em [37] ou em [57].

Já o segundo resultado é fundamental na teoria de fibrados de Banach (incluímos a definição de fibrado de Banach na página 36). Trata-se do teorema de Douady–dal Soglio Hérault, sobre a existência de suficientes seções contínuas de um fibrado de Banach. Para uma demonstração deste teorema, consultar o Apêndice C de [37], especialmente C16 e C17.

TEOREMA 2.2 (Douady–dal Soglio Hérault). *Seja X um espaço topológico de Hausdorff, e seja $(\mathcal{B}, p)$ um fibrado de Banach sobre X . Se X é paracompacto ou localmente compacto, então para todo $b \in \mathcal{B}$ existe uma seção contínua de suporte compacto ξ de $\mathcal{B}$, tal que $\xi(p(b)) = b$.*

2.1. Produtos tensoriais de fibrados sobre grupos discretos

Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos G e H respectivamente. Consideremos, para $t \in G, s \in H$, o produto tensorial algébrico $A_t \odot B_s$. Fazendo variar t, s sobre G e H , obtemos uma família $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} = \{A_t \odot B_s\}_{(t,s) \in G \times H}$ de espaços vetoriais complexos, indexados por $G \times H$ (pensaremos também $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ como a união disjunta dos espaços $A_t \odot B_s$). O Lema 1.33 mostra que, se $(t, s), (t', s') \in G \times H$, temos aplicações $(A_t \odot B_s) \times (A_{t'} \odot B_{s'}) \rightarrow A_{tt'} \odot B_{ss'}$ tais que $(a_t \odot b_s, a_{t'} \odot b_{s'}) \mapsto a_t a_{t'} \odot b_s b_{s'}$, e $A_t \odot B_s \rightarrow A_{t^{-1}} \odot B_{s^{-1}}$ tais que $a_t \odot b_s \mapsto a_t^* \odot b_s^*$. Combinadas, estas famílias de aplicações produzem um produto $\cdot : (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \odot \mathcal{B})$ e uma involução $*$: $(\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \odot \mathcal{B})$ tais que o produto é associativo, bilinear sobre cada $(A_t \odot B_s) \times (A_{t'} \odot B_{s'}) \rightarrow A_{tt'} \odot B_{ss'}$, $*$ é antilinear quando restrita a $A_t \odot B_s \rightarrow A_{t^{-1}} \odot B_{s^{-1}}$, e $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*, \forall x, y \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Diremos que $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ é o *produto tensorial algébrico de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$* . Em outras palavras, $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ é um $*$ -fibrado algébrico, no sentido da seguinte Definição.

DEFINIÇÃO 2.3. *Seja G um grupo discreto, e suponhamos que $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é uma família de espaços vetoriais complexos. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um $*$ -fibrado algébrico sobre G com produto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ e involução $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se, $\forall a, b \in \mathcal{A}, t, s \in G$, tem-se:*

1. $A_t A_s \subseteq A_{ts}$
2. O produto $\cdot$ é bilinear sobre $A_t \times A_s \rightarrow A_{ts}$
3. O produto sobre $\mathcal{A}$ é associativo.
4. $(A_t)^* \subseteq A_{t^{-1}}$

5. $*$ é antilinear de A_t em $A_{t^{-1}}$.
6. $(ab)^* = b^*a^*$.
7. $a^{**} = a$.

Se, além disso, existe uma norma $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

8. $(A_t, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.
9. $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$
10. $\|a^*a\| = \|a\|^2$.
11. $a^*a \geq 0$ no completamento da pré- C^* -álgebra $(A_t, \|\cdot\|)$.

dizemos que $(\mathcal{A}, \cdot, *, \|\cdot\|)$ é um pré-fibrado de Fell sobre o grupo discreto G , e dizemos que $\|\cdot\|$ é uma C^* -norma sobre $\mathcal{A}$. Notar que 9. e 10. implicam que $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Lembrar que, se $(A_t, \|\cdot\|)$ é completo para todo $t \in G$, então $(\mathcal{A}, \cdot, *, \|\cdot\|)$ é chamado fibrado de Fell.

PROPOSIÇÃO 2.4. *Seja $\mathcal{A}^0 = (A_t^0)_{t \in G}$ um pré-fibrado de Fell sobre o grupo discreto G , com C^* -norma $\|\cdot\|$. Para cada $t \in G$, seja A_t o completamento de A_t^0 , e consideremos a família de espaços de Banach $(A_t)_{t \in G}$, com a norma estendida, que ainda denotamos $\|\cdot\|$. Então o produto e a involução sobre $\mathcal{A}^0$ podem ser estendidos de maneira única a $\mathcal{A}$, de tal forma que $\mathcal{A}$ é um fibrado de Fell sobre G com as operações estendidas. Dizemos então que $\mathcal{A}$ é um completamento do pré-fibrado de Fell $\mathcal{A}^0$.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é imediata, porque as condições 9. e 10. da Definição 2.3 implicam que $*$ e $\cdot$ são contínuas sobre $A_t^0 \rightarrow A_{t^{-1}}^0$ e $A_t^0 \times A_s^0 \rightarrow A_{ts}^0$ respectivamente, para todos $t, s \in G$, e portanto podem ser estendidas unicamente a aplicações contínuas $A_t \rightarrow A_{t^{-1}}$ e $A_t \times A_s \rightarrow A_{ts}$, definindo assim $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ e $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Pela continuidade das operações estendidas, estas satisfazem as condições algébricas 1.-7., e também 8.-11. de 2.3 $\square$

DEFINIÇÃO 2.5. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ $*$ -fibrados algébricos sobre o grupo discreto G . Um homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação tal que $\phi(A_t) \subseteq B_t$, $\forall t \in G$, e, $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $t \in G$:

1. ϕ é linear sobre $A_t \rightarrow B_t$
2. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
3. $\phi(a^*) = \phi(a)^*$

Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são pré-fibrados de Fell, também requerimos que ϕ seja contínua sobre cada A_t .

DEFINIÇÃO 2.6. Seja $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um $*$ -fibrado algébrico sobre o grupo discreto G . Uma representação $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{A}$ sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma aplicação π tal que $\mathcal{A} \rightarrow G \times \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada por $a_t \mapsto (t, \pi(a_t))$ é um homomorfismo de $*$ -fibrados algébricos, onde o produto sobre $G \times \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é $(t, T)(s, S) = (ts, TS)$, e a involução é $(t, T)^* = (t^{-1}, T^*)$. π é dita não degenerada se $\text{span } \pi(\mathcal{A})\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$.

OBSERVAÇÃO 2.7. Seja $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo discreto G , e sejam

$$C_c(\mathcal{A}) = \{f : G \rightarrow \mathcal{A} : f(t) \in A_t, \forall t \in G, \text{ e } \sup(f) \text{ é finito}\}$$

$$L^1(\mathcal{A}) := \{f : G \rightarrow \mathcal{A} : f(t) \in A_t, \forall t \in G, \text{ e } \sum_{t \in G} \|f(t)\| < \infty\}$$

$C_c(\mathcal{A})$ e $L^1(\mathcal{A})$ são $*$ -álgebras com as operações:

$$f * g(t) = \sum_{r \in G} f(r)g(r^{-1}t)$$

$$f^*(t) = f(t^{-1})^*.$$

Além disso, $L^1(\mathcal{A})$ é uma $*$ -álgebra de Banach com a norma: $\|f\|_1 = \sum_{t \in G} \|f(t)\|$. A C^* -álgebra envolvente de $L^1(\mathcal{A})$ é chamada C^* -álgebra seccional (plena) do fibrado de Fell $\mathcal{A}$, e é denotada por $C^*(\mathcal{A})$. Por [37], VIII-17.3, existe uma bijeção entre as representações de $\mathcal{A}$ sobre o espaço de Hilbert H e as representações de $C^*(\mathcal{A})$ sobre H , tal que se $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(H)$ é uma representação, a representação correspondente de $C^*(\mathcal{A})$ asigna o elemento $\sum_t \pi(f(t)) \in B(H)$ a todo elemento $f \in C_c(\mathcal{A})$. Voltaremos sobre este ponto quando consideremos o caso contínuo, no começo do Capítulo 3.

Notar que se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são pré-fibrados de Fell e $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de $*$ -fibrados algébricos, então ϕ é contínua se e somente se $\phi : \mathcal{A}_\epsilon \rightarrow \mathcal{B}_\epsilon$ é contínua, porque se $x \in \mathcal{A}$, então

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^* \phi(x)\| = \|\phi(x^* x)\| \leq \|\phi\|_{\mathcal{A}_\epsilon} \|x^* x\| = \|\phi\|_{\mathcal{A}_\epsilon} \|x\|^2.$$

Em particular, todo homomorfismo de $*$ -fibrados algébricos entre fibrados de Fell sobre grupos discretos é contínuo.

Note-se que com a noção de homomorfismo que acabamos de introduzir, dois complementos de um pré-fibrado de Fell dado sempre são isomorfos, e portanto o complemento de um pré-fibrado de Fell é essencialmente único.

Seja $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo entre dois fibrados de Fell, e suponhamos que $C^*(\mathcal{B}) \hookrightarrow B(H)$, como sub- C^* -álgebra não degenerada. A composição de ϕ com esta inclusão define uma representação sobre H do fibrado de Fell $\mathcal{A}$. Portanto, pela propriedade universal da C^* -álgebra de um fibrado de Fell ([37], VIII-17.3), existe uma única representação $C^*(\phi) : C^*(\mathcal{A}) \rightarrow B(H)$, que estende ϕ . Como a imagem de $C_c(\mathcal{A})$ está incluída em $C_c(\mathcal{B}) \subseteq C^*(\mathcal{B})$, e como $\text{span } C_c(\mathcal{A})$ é denso em $C^*(\mathcal{A})$, vemos que de fato tem-se $C^*(\phi) : C^*(\mathcal{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{B})$. Em conclusão, temos um funtor covariante C^* , da categoria dos fibrados de Fell sobre o grupo discreto G e seus homomorfismos (2.5), na categoria de C^* -álgebras.

Finalmente, observar que segue dos comentários acima que se $\mathcal{A}$ é um fibrado de Fell e π é uma representação de $\mathcal{A}$, então temos que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Voltemos para os produtos tensoriais.

DEFINIÇÃO 2.8. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos discretos G e H , e consideremos o produto tensorial algébrico $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Se α é uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, chamaremos o correspondente complemento $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ de $(\mathcal{A} \odot \mathcal{B}, \alpha)$ um produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

OBSERVAÇÃO 2.9. Se $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ é um produto tensorial entre $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, então $(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})_\epsilon$ deve ser um produto tensorial entre $\mathcal{A}_\epsilon$ e $\mathcal{B}_\epsilon$. De fato, se conhecermos a C^* -norma determinada por $(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})_\epsilon$ sobre $\mathcal{A}_\epsilon \odot \mathcal{B}_\epsilon$, então conhecemos a norma de qualquer elemento $x \in \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$, porque deve ser igual a $\sqrt{\alpha(x^* x)}$. Portanto, dois produtos tensoriais serão isomorfos se e somente se suas fibras sobre a identidade é o mesmo produto tensorial de $\mathcal{A}_\epsilon$ com $\mathcal{B}_\epsilon$. Uma primeira questão que surge é se cada produto tensorial de $\mathcal{A}_\epsilon$ e $\mathcal{B}_\epsilon$ determina um produto tensorial entre os fibrados de Fell $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. A pesar de que não estudaremos com profundidade este problema, veremos que este é verdadeiramente o caso para os produtos tensoriais que são realmente importantes para os nossos propósitos: o produto tensorial minimal e o produto tensorial maximal (Proposição 2.12).

PROPOSIÇÃO 2.10. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in H}$ fibrados de Fell, e seja α uma C^* -norma sobre $A_e \odot B_e$. Então α pode ser estendida a uma C^* -norma (ver 2.3) sobre todo $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ se e somente se $\alpha(x^*x) = \alpha(xx^*)$, $\forall x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Neste caso, a extensão é única.*

DEMONSTRAÇÃO. A condição é obviamente necessária devido à condição 10. da Definição 2.3.

Vejamos que também é suficiente. Para $x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, definamos $\|x\| = \sqrt{\alpha(x^*x)}$. Queremos ver que esta é uma C^* -norma sobre o $*$ -fibrado algébrico $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, isto é, que satisfaz as condições 8.–11. da Definição 2.3. É claro, pela própria definição de $\|\cdot\|$, que a condição 10. é satisfeita e, como estamos supondo que $\alpha(x^*x) = \alpha(xx^*)$, $\forall x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, também temos:

$$(2) \quad \|x\| = \|x^*\|, \quad \forall x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$$

Definamos $\langle \cdot, \cdot \rangle_r : (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ como $\langle x, y \rangle_r = x^*y$. Por 1.44 sabemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ é um produto interno sobre cada $A_t \odot B_s$, e é claro que $\|x\|^2 = \alpha(\langle x, x \rangle)$, $\forall x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Logo, as condições 8. e 11. também são satisfeitas. Com respeito à condição 9., observemos que o completamento de cada $A_t \odot B_s$ com respeito a $\|\cdot\|$ é um módulo de Hilbert à direita sobre $A_e \otimes_\alpha B_e$: em particular, temos:

$$(3) \quad \|ax\| \leq \|a\| \|x\|, \quad \forall a \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}, x \in A_e \odot B_e$$

Então:

$$\begin{aligned} \|ab\|^2 &= \|b^*a^*ab\| \\ &= \|\langle b, a^*ab \rangle_r\| \\ &\leq \|b\| \|a^*ab\| && \text{por Cauchy-Schwarz} \\ &= \|b\| \|b^*a^*a\| && \text{por (2)} \\ &\leq \|b\| \|b^*\| \|a^*a\| && \text{por (3)} \\ &= \|b\|^2 \|a\|^2 && \text{por (2)} \end{aligned}$$

Em conclusão, $\|\cdot\|$ é uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$.

Finalmente, a validade da última afirmação se deve a 2.9. □

Nossa próxima tarefa é mostrar que $\|\cdot\|_{\max}$ e $\|\cdot\|_{\min}$ sobre $A_e \odot B_e$ podem ser estendidas a $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Começamos com o resultado seguinte, com certeza bem conhecido, a pesar de que não conseguimos achar nenhuma referencia concreta para citar.

LEMA 2.11. *Sejam I e J ideais bilaterais fechados das C^* -álgebras A e B respectivamente. Então $I \otimes_{\max} J$ é o fecho de $I \odot J$ em $A \otimes_{\max} B$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\pi : I \otimes_{\max} J \rightarrow B(H)$ uma representação fiel e não degenerada de $I \otimes_{\max} J$. Então, ela se decompõe em representações fieis e não degeneradas $\pi_I : I \rightarrow B(H)$ e $\pi_J : J \rightarrow B(H)$, tais que $\pi_I(x)\pi_J(y) = \pi(x \odot y) = \pi_J(y)\pi_I(x)$, $\forall x \in I, y \in J$ (ver [65], T6.4, por exemplo). Como são não degeneradas, existem extensões únicas $\pi_A : A \rightarrow B(H)$ e $\pi_B : B \rightarrow B(H)$ a representações de A e B respectivamente ([37], VI-19.11). Se $a \in A$, $x \in I$, $b \in B$ and $y \in J$, então $\pi_A(ax)\pi_B(by) = \pi_B(by)\pi_A(ax)$, porque $ax \in I$ e $by \in J$. Como π_I e π_J são não degeneradas, concluímos que $\pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$, $\forall a \in A, b \in B$. Portanto, existe uma representação $\tilde{\pi} : A \otimes_{\max} B \rightarrow B(H)$ tal que $\tilde{\pi}(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b)$, $\forall a \in A, b \in B$. Assim, $\tilde{\pi}$ é uma extensão de π . Como toda representação é contrativa, concluímos que se $x \in I \odot J$, sua norma em $A \otimes_{\max} B$ é maior ou igual à sua norma maximal; portanto coincidem. □

PROPOSIÇÃO 2.12. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos discretos $G \in H$. Então, as normas $\|\cdot\|_{\min}$ e $\|\cdot\|_{\max}$ sobre $A_e \odot B_e$ podem ser estendidas a C^* -normas sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Se $\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} \in \mathcal{A} \otimes_{\beta} \mathcal{B}$ são produtos tensoriais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, com $\alpha \geq \beta$, então existe um único homomorfismo*

$$\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\beta} \mathcal{B},$$

que é a identidade quando restrito a cada $A_t \odot B_s$; este homomorfismo é sobrejetivo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A_t^* A_t$ o fecho em A_e de $\text{span}\{a_t^* a_t : a_t \in A_t\}$, e similarmente $B_s^* B_s$. Então $A_t^* A_t$ e $B_s^* B_s$ ideais bilaterais fechados de A_e e B_e respectivamente, e A_t pode ser visto como um C^* -anel ternário positivo com $Z_r(A_t) = A_t^* A_t$ e $Z_l(A_t) = A_t A_t^*$, e similarmente com B_s . Lembremos que existe uma C^* -norma maximal $\|\cdot\|_{\max}$ sobre $A_t \otimes_{\max} B_s$. Pelo Teorema 1.50, deve ser $Z_r(A_t \otimes_{\max} B_s) = A_t^* A_t \otimes_{\max} B_s^* B_s$ e $Z_l(A_t \otimes_{\max} B_s) = A_t A_t^* \otimes_{\max} B_s B_s^*$. Como estamos em presença de várias normas maximais, fixemos a seguinte notação para evitar confusões: com $\|\cdot\|_{\max}$, $\|\cdot\|_{\max}^r$, $\|\cdot\|_{\max}^l$ e $\|\cdot\|_{\mu}$ denotaremos respectivamente as normas maximais sobre $A_t \odot B_s$, $A_t^* A_t \odot B_s^* B_s$, $A_t A_t^* \odot B_s B_s^*$, e $A_t \odot B_s$. Como cada $A_t \otimes_{\max} B_s$ é um $(A_t A_t^* \otimes_{\max} B_s B_s^*, A_t^* A_t \otimes_{\max} B_s^* B_s)$ -bimódulo de Hilbert, sabemos que:

$$\|xx^*\|_{\max}^l = \|x\|_{\max}^2 = \|x^*x\|_{\max}^r, \quad \forall x \in A_t \odot B_s.$$

Finalmente, pelo Lema 2.11, $\|\cdot\|_{\mu}$ coincide com $\|\cdot\|_{\max}^r$ sobre $A_t^* A_t \odot B_s^* B_s$ e com $\|\cdot\|_{\max}^l$ sobre $A_t A_t^* \odot B_s B_s^*$. Deduzimos que

$$\|xx^*\|_{\mu} = \|x\|_{\max}^2 = \|x^*x\|_{\mu}, \quad \forall x \in A_t \odot B_s.$$

Portanto, pela Proposição 2.10, $\|\cdot\|_{\max}$ sobre $A_e \odot B_e$ pode ser estendida a todo $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$.

Os mesmos argumentos usados acima mostram que $\|\cdot\|_{\min}$ pode ser estendida, porque a norma mínima é a norma espacial, e, pela construção do produto tensorial espacial, é claro que a restrição da $\|\cdot\|_{\min}$ sobre $A_e \odot B_e$ a $I \odot J$ coincide com a norma espacial sobre $I \odot J$, onde I e J são sub- C^* -álgebras de A_e e B_e respectivamente.

A prova da última afirmação é trivial: o homomorfismo é a extensão contínua da identidade sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ (ver a Observação 2.7). $\square$

2.2. Produtos tensoriais de fibrados sobre grupos contínuos

Nesta seção estendemos a construção feita na primeira parte do capítulo ao caso de fibrados de Fell sobre grupos localmente compactos.

Um fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ sobre um grupo localmente compacto G é um fibrado de Banach $\mathcal{B}$ sobre G , com fibra B_t sobre $t \in G$, e existem sobre $\mathcal{B}$ um produto e uma involução contínuos que satisfazem as condições 1–11 da Definição 2.3. Em [37], os fibrados de Fell são chamados *C^* -fibrados algébricos*.

Lembrar que um fibrado de Banach ([37], II-13.4) $\mathcal{B}$ sobre um espaço topológico de Hausdorff X é um par (B, p) formado por um espaço topológico de Hausdorff B e uma aplicação contínua, aberta e sobrejetiva $p : B \rightarrow X$, junto com operações e normas que fazem com que cada fibra $B_x = p^{-1}(\{x\})$ seja um espaço de Banach complexo, e satisfazendo as seguintes quatro propriedades:

1. $b \mapsto \|b\|$ é contínua de B a $\mathbb{R}$.
2. A soma $+$: $\{(b, b') \in B \times B : p(b) = p(b')\} \rightarrow B$ é contínua.
3. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, a aplicação $B \rightarrow B$ tal que $b \mapsto \lambda b$ é contínua.
4. Se $x \in X$ e $(b_i) \subseteq B$ é uma rede tal que $p(b_i) \rightarrow x$ e $\|b_i\| \rightarrow 0$, então $b_i \rightarrow 0_x \in B$.

Nós denotaremos o espaço total também por $\mathcal{B}$.

Para futura referência, introduzimos a seguir três exemplos de fibrados de Fell.

EXEMPLO 2.13 (Fibrados triviais). Sejam G um grupo localmente compacto e A uma C^* -álgebra. Seja $\mathcal{B}_{G,A}$ o fibrado de Banach sobre G cujo espaço total é $G \times A$, com a projeção $p : G \times A \rightarrow G$ tal que $p(t, a) = t$. Sobre cada fibra tomamos a estrutura de espaço de Banach de A . O produto e a involução são definidos assim: $(s, a)(t, b) = (st, ab)$, e $(t, b)^* = (t^{-1}, b^*)$. Diremos que $\mathcal{B}_{G,A}$ é o *fibrado de Fell trivial sobre G com fibra A* . Quando $A = \mathbb{C}$, usaremos simplesmente a notação $\mathcal{B}_G$ para indicar o fibrado, e diremos que $\mathcal{B}_G$ é o *fibrado do grupo G* .

EXEMPLO 2.14 (Fibrado produto). Se $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e H é um outro grupo localmente compacto, podemos formar o fibrado produto $\mathcal{A} \times H$, que é um fibrado sobre $G \times H$, sendo (A_t, s) a fibra sobre (t, s) com a estrutura de espaço de A_t . Sobre $\mathcal{A} \times H$ colocamos a topologia produto. As operações sobre $\mathcal{A} \times H$ são definidas como: $(a_t, s)(a_{t'}, s') = (a_t a_{t'}, ss')$, e $(a_t, s)^* = (a_t^*, s^{-1})$. Notar que 2.13 é um caso particular desta construção. Os dois exemplos podem ser vistos como casos particulares de produtos tensoriais de fibrados de Fell.

EXEMPLO 2.15 (Fibrado associado a uma ação parcial torcida). Uma *ação parcial torcida* de G sobre a C^* -álgebra A é uma tripla

$$\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G}, \{w(t, t')\}_{(t, t') \in G \times G})$$

tal que, $\forall t \in G$, D_t é um ideal bilateral fechado de A , $\alpha_t : D_{t^{-1}} \rightarrow D_t$ é um isomorfismo, e, $\forall (t, t') \in G \times G$, $w(t, t')$ é um multiplicador unitário de $D_t \cap D_{t'}$, satisfazendo, para todos t, t', t'' pertencentes a G , as seguintes condições:

1. $D_e = A$, $\alpha_e = id_A$.
2. $\alpha_t(D_{t^{-1}} \cap D_{t'}) = D_t \cap D_{t'}$.
3. $\alpha_t(\alpha_{t'}(a))w(t, t') = \alpha_{tt'}(a)w(t, t')^*$, $\forall a \in D_{t^{-1}} \cap D_{t'}$.
4. $w(e, t) = 1 = w(t, e)$.
5. $\alpha_t(aw(t', t''))w(t, t't'') = \alpha_t(a)w(t', t'')w(tt', t'')$, $\forall a \in D_{t^{-1}} \cap D_{t'} \cap D_{t''}$.

Se, além disso, α satisfaz certas condições de continuidade (que não precisaremos aqui: consultar [27], Section 3, e ver a Definição 5.3 para o caso não torcido), ela é chamada *ação parcial torcida contínua* de G sobre A .

Suponhamos que $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G}, \{w(t, t')\}_{(t, t') \in G \times G})$ é uma ação parcial torcida contínua de G sobre A . Então α tem associado um fibrado de Fell $\mathcal{A}$ sobre G , definido como segue. $\mathcal{A} = \{(t, a) : t \in G, a \in D_t\} \subseteq G \times A$ com a topologia produto, e a projeção $p : \mathcal{A} \rightarrow G$ é dada por $p((t, a)) = t$. Simbolizamos o elemento (t, a) como $a\delta_t$, de forma que $A_t = D_t\delta_t$. O produto e a involução sobre $\mathcal{A}$ são definidos assim:

$$\begin{aligned} (a_t\delta_t)(a'_{t'}\delta_{t'}) &= \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a'_{t'})w(t, t')\delta_{tt'} \\ (a_t\delta_t)^* &= \alpha_{t^{-1}}(a_t^*)w(t^{-1}, t)^*\delta_{t^{-1}} \end{aligned}$$

Este exemplo é bem importante, porque, por 7.3 de [27], todo fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ com o segundo axioma de enumerabilidade e fibra B_e estável é isometricamente isomorfo a um fibrado de Fell que provém de uma ação parcial contínua torcida. Neste capítulo veremos que todo fibrado de Fell pode ser “estabilizado”, isto é, sempre existe $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é a C^* -álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável. Se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell que tem o segundo axioma de enumerabilidade, então $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$ também o tem, e pelo resultado mencionado acima, concluímos que $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$ é isomorfo ao fibrado de Fell definido por certa ação parcial contínua torcida.

Se X é um espaço topológico e (B, p) é um fibrado de Banach sobre X , representaremos por $C_c(X)$ o espaço vetorial das seções contínuas de suporte compacto de X . Indicaremos por X_d o conjunto X com a topologia discreta, e por B_d o fibrado de Banach sobre X_d , cuja fibra sobre $x \in X$ é idêntica como espaço de Banach à fibra correspondente de B , e a topologia sobre B_d é tal que $p : B_d \rightarrow X_d$ é contínua, ou seja, B_d é a união disjunta das fibras B_x , $x \in X$. Notar que se $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell, então $\mathcal{A}_d$ é um fibrado de Fell sobre G_d . Suponhamos que $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ são fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e suponhamos que $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$ é algum produto tensorial de $\mathcal{A}_d$ e $\mathcal{B}_d$, como na seção anterior. Introduziremos sobre $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$, de maneira canônica, uma topologia tal que $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$ será um fibrado de Fell sobre $G \times H$.

Para cada $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, seja $f \odot g : G \times H \rightarrow \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tal que $(f \odot g)(t, s) = f(t) \odot g(s)$, $\forall t \in G, s \in H$. Como cada $f \odot g$ é uma seção de $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ (de suporte compacto), podemos considerar o espaço vetorial $\Gamma = \text{span}\{f \odot g : f \in C_c(\mathcal{A}), g \in C_c(\mathcal{B})\}$. A topologia que queremos definir sobre $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ fica determinada pela exigência de que todo elemento de Γ seja uma seção contínua.

PROPOSIÇÃO 2.16. *Tem-se:*

1. Para cada $l \in \Gamma$, a função $G \times H \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $(t, s) \mapsto \|l(t, s)\|$ é contínua.
2. Para cada $(t, s) \in G \times H$, o conjunto $\Gamma(t, s) := \{l(t, s) : l \in \Gamma\}$ é denso em $A_t \otimes_\alpha B_s$.
3. Existe uma única topologia sobre $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$ que faz com que $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$ seja um fibrado de Banach sobre $(G \times H)$, e tal que Γ esteja incluído no espaço de seções contínuas do fibrado $\mathcal{A}_d \otimes_\alpha \mathcal{B}_d$ com esta topologia.

O fibrado de Banach sobre $G \times H$ assim obtido será denotado por $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente provar 1. e 2., porque então 3. é apenas uma conseqüência ([37], II-13.18). Começemos por 2.: se $x = \sum_{i=1}^n a_i \odot b_i \in A_t \odot B_s$, existem seções contínuas f_i, g_i de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente, tais que $f_i(t) = a_i, g_i(s) = b_i, \forall i = 1 \dots n$ ([37], C.17). Se $l = \sum_{i=1}^n f_i \odot g_i$, então $l \in \Gamma$, e:

$$l(t, s) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \odot g_i(s) = \sum_{i=1}^n a_i \odot b_i = x.$$

Isto demonstra 2., porque $A_t \odot B_s$ é denso em $A_t \otimes_\alpha B_s$. Para provar 1., fixemos $l = \sum_{i=1}^n f_i \odot g_i \in \Gamma$, e suponhamos que $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$. Então:

$$\|l(t, s)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) \odot g_i(s) \right\|^2 = \left\| \sum_{i,j=1}^n f_i(t)^* f_j(t) \odot g_i(s)^* g_j(s) \right\|$$

Notar que $t \mapsto f_i(t)^* f_j(t)$ e $s \mapsto g_i(s)^* g_j(s)$ são contínuas, porque os f_i e os g_i são seções contínuas, e as involuções de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são contínuas também. Agora, a propriedade de “cross-norm” (i.e.: $\|a \odot b\| = \|a\| \|b\|$) das C^* -normas sobre produtos tensoriais, implica que $a \odot b \rightarrow a_0 \odot b_0$ quando $a \rightarrow a_0$ e $b \rightarrow b_0$. Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^n f_i(t)^* f_j(t) \odot g_i(s)^* g_j(s) \rightarrow \sum_{i,j=1}^n f_i(t_0)^* f_j(t_0) \odot g_i(s_0)^* g_j(s_0)$$

quando $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$. Assim, $\|l(t, s)\| \rightarrow \|l(t_0, s_0)\|$ se $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$. □

LEMA 2.17. *A involução $*$: $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que G é um grupo, X é um conjunto com uma involução $*$, e $l : G \rightarrow X$ é uma função: definimos uma nova função $\tilde{l} : G \rightarrow X$ como $\tilde{l}(t) = l(t^{-1})^*$. Em particular, se l é uma seção contínua de suporte compacto de um fibrado de Fell, $\tilde{l}$ também é.

Demonstremos agora o Lema. Provar que a involução é contínua equivale a mostrar que ela é aberta. Sabemos que um aberto básico da topologia definida na Proposição 2.16 é da forma

$$\mathcal{W}(l, U, \epsilon) = \{w \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : p(w) \in U, \text{ e } \|l(p(w)) - w\| < \epsilon\},$$

onde $p : \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} \rightarrow G \times H$ é a projeção do fibrado, $U \subseteq G \times H$ é aberto, $l = \sum_i f_i \otimes g_i$, com $f_i \in C_c(\mathcal{A})$, $g_i \in C_c(\mathcal{B})$, e $\epsilon > 0$ ([37], II-13.18). Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(l, U, \epsilon)^* &= \{w^* \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : p(w) \in U, \text{ e } \|l(p(w)) - w\| < \epsilon\} \\ &= \{w^* \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : p(w^*) \in U^{-1}, \text{ e } \|l(p(w^*)^{-1})^* - w^*\| < \epsilon\} \\ &= \{z \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : p(z) \in U^{-1}, \text{ e } \|\tilde{l}(p(z)) - z\| < \epsilon\} \\ &= \mathcal{W}(\tilde{l}, U^{-1}, \epsilon), \end{aligned}$$

o que prova que $*$ é aberta, e portanto contínua. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.18. *O produto $(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$ é contínuo.*

DEMONSTRAÇÃO. Afirmamos primeiro que se $a \rightarrow a_0$ em $\mathcal{A}$, e $b \rightarrow b_0$ em $\mathcal{B}$, então $a \odot b \rightarrow a_0 \odot b_0$ em $\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$. Sejam $W \subseteq \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$ aberto, tal que $a_0 \odot b_0 \in W$, e $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$ tais que $f(t_0) = a_0$ e $g(s_0) = b_0$. Então $(f \odot g)(t_0, s_0) = a_0 \odot b_0$. Como $f \odot g \in C_c(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})$, e como a norma é contínua, existem $\epsilon > 0$, $U \subseteq G$ e $V \subseteq H$ abertos tais que $(t_0, s_0) \in U \times V$ e $W \cap (\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})_{(t,s)} \supseteq B((f \odot g)(t, s), \epsilon)$, $\forall (t, s) \in U \times V$. Consideremos agora $W(f, U, \epsilon^{1/2})$ e $W(g, V, \epsilon^{1/2})$, abertos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ que contém a_0 e b_0 respectivamente. Temos:

$$\begin{aligned} W(f, U, \epsilon^{1/2}) \odot W(g, V, \epsilon^{1/2}) &= \{a_t \odot b_s \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : (t, s) \in U \times V, \text{ e} \\ &\quad \|f(t) - a_t\| < \epsilon^{1/2}, \|g(s) - b_s\| < \epsilon^{1/2}\} \\ &\subseteq \{x_{(t,s)} \in \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} : (t, s) \in U \times V, \text{ e } \|(f \odot g)(t, s) - x_{(t,s)}\| < \epsilon\} \\ &= W(f \odot g, U \times V, \epsilon) \\ &= \bigcup_{(t,s) \in U \times V} B((f \odot g)(t, s), \epsilon) \\ &\subseteq W, \end{aligned}$$

e portanto $a \odot b \rightarrow a_0 \odot b_0$ quando $a \rightarrow a_0$, $b \rightarrow b_0$.

Observar que $\forall f, f' \in C_c(\mathcal{A})$, $g, g' \in C_c(\mathcal{B})$, tem-se que a função $\mu : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$ tal que $((t, s), (t', s')) \mapsto (f \odot g)(t, s) \odot (f' \odot g')(t', s')$ é contínua, porque os produtos sobre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são contínuos. f, f', g, g' são contínuas, e como $\mu(t, s, t', s') = f(t)f'(t') \odot g(s)g'(s')$, a continuidade de μ segue do fato provado no começo.

Consideremos agora $x_0 \in (\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})_{(t_0, s_0)}$, $x'_0 \in (\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})_{(t'_0, s'_0)}$, e sejam $m \in \Gamma$, $1 > \epsilon > 0$, tais que $x_0 x'_0 \in W(m, Z, \epsilon)$, onde Z é algum subconjunto aberto de $G \times H$ que contém $(t_0 t'_0, s_0 s'_0)$. Sejam $M > 1 + \|x_0\| + \|x'_0\|$, $l, l' \in \Gamma$ tais que $\|l(t_0, s_0) - x_0\| < \epsilon/2M$, $\|l(t'_0, s'_0) - x'_0\| < \epsilon/2M$. Então temos que $\|l(t_0, s_0)l'(t'_0, s'_0) - x_0 x'_0\| = d < \epsilon$. Seja $d < \epsilon' < \epsilon$. Pelo visto acima, a função

$ll' : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que $((t, s), (t', s')) \mapsto l(t, s)l'(t', s')$ é contínua, e portanto existem vizinhanças abertas U, V, U' e V' de t_0, s_0, t'_0 e s'_0 respectivamente, tais que $ll'((U \times V) \times (U' \times V')) \subseteq W(m, Z, \epsilon')$. Sejam agora $N > 1 + \|l\|_\infty + \|l'\|_\infty$. $0 < \delta < (\epsilon - \epsilon')/4N$. Então temos que $W(l, U \times V, \delta)W(l', U' \times V', \delta) \subseteq W(m, Z, \epsilon)$. Com efeito, se $x_{(t,s)} \in W(l, U \times V, \delta)$, $x'_{(t',s')} \in W(l', U' \times V', \delta)$:

$$\begin{aligned} \|x_{(t,s)}x'_{(t',s')} - m(tt', ss')\| &\leq \|x_{(t,s)}x'_{(t',s')} - l(t, s)l'(t', s')\| + \|l(t, s)l'(t', s') - m(tt', ss')\| \\ &\leq \epsilon' + \|x_{(t,s)}(x'_{(t',s')} - l'(t', s'))\| + \|(x_{(t,s)} - l(t, s))l'(t', s')\| \\ &< \epsilon' + (\epsilon - \epsilon')/4N(\|x_{(t,s)} - l(t, s)\| \|l'(t', s')\|) + (\epsilon - \epsilon')/4 \\ &< \epsilon' + (\epsilon - \epsilon')/4N((\epsilon - \epsilon')/4 + N) + (\epsilon - \epsilon')/4 \\ &= \epsilon' + (\epsilon - \epsilon')(1/2 + (\epsilon - \epsilon')/4N) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 2.19. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e α uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. O produto tensorial $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ com respeito a α é o fibrado de Fell obtido completando o produto tensorial algébrico $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ com respeito à C^* -norma α , e provido da topologia definida pela Proposição 2.16.

PROPOSIÇÃO 2.20. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H . Se $\alpha \geq \beta$ são C^* -normas sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, então existe um único homomorfismo de fibrados de Fell

$$\sigma_\beta^\alpha : \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_\beta \mathcal{B}$$

tal que $\sigma_\beta^\alpha(a \odot b) = a \odot b, \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$. Este homomorfismo é sobrejetivo.

DEMONSTRAÇÃO. Por 2.12 sabemos que existe e é única tal aplicação σ_β^α . Também sabemos que é sobrejetiva. Só falta provar que é contínua. Mas as seções que definem as duas topologias em jogo são as mesmas, e a aplicação σ_β^α calculada em uma tal seção dá como resultado a mesma seção, donde, por [37] VIII-2.4, concluímos que σ_β^α é contínua. □

2.3. Representações de produtos tensoriais de fibrados de Fell

Os seguintes resultados serão úteis no próximo capítulo. O primeiro diz como obter uma representação de $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ a partir de representações de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$. O segundo mostra que existe uma correspondência bijetiva entre as representações não degeneradas de $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ e as representações não degeneradas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ que comutam.

DEFINIÇÃO 2.21. Seja $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G . Uma representação de $\mathcal{A}$ sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma aplicação $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(aa') = \pi(a)\pi(a')$, $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, $\forall a, a' \in \mathcal{A}$, $\pi|_{A_t}$ é linear (ou seja: π é uma representação do fibrado de Fell $\mathcal{A}_d$) que é contínua, no sentido de que $\forall h \in \mathcal{H}$ a função $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $a \mapsto \pi(a)h$ é contínua. A representação π é dita não degenerada se $\text{span } \pi(\mathcal{A})\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$; isto é equivalente

ao fato de ser não degenerada a restrição $\pi|_{A_\epsilon}$, que é uma representação de A_ϵ sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{H}$.

Se $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell (ou um *-fibrado algébrico), e $\mathcal{H}$ é um módulo de Hilbert, indicaremos por $R(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ a família de representações não degeneradas de $\mathcal{A}$ sobre o módulo de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ é outro fibrado de Fell (ou *-fibrado algébrico), indicaremos por $R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H}) = \{(\pi_1, \pi_2) \in R(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \times R(\mathcal{B}, \mathcal{H}) : \pi_1(a)\pi_2(b) = \pi_2(b)\pi_1(a), \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$, e por $R(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a união de todos os $R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$; em outras palavras, $R(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ está formada pelos pares de representações não degeneradas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ que comutam. Se A e B são *-álgebras, também usaremos as notações $R(A, \mathcal{H})$, $R(A, B, \mathcal{H})$, $R(A, B)$ com o mesmo significado.

PROPOSIÇÃO 2.22. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e sejam $\pi_{\mathcal{A}} \in R(\mathcal{A}, \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, $\pi_{\mathcal{B}} \in R(\mathcal{B}, \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$. Então existe uma única representação $\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}} \in R(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}, \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ tal que $(\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})(a \odot b) = \pi_{\mathcal{A}}(a) \odot \pi_{\mathcal{B}}(b)$, $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall b \in \mathcal{B}$. Se $\pi_{\mathcal{A}}|_{A_\epsilon}$ e $\pi_{\mathcal{B}}|_{B_\epsilon}$ são fiéis, então $(\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})|_{(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})_\epsilon}$ também é fiel.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 1.54, temos uma inclusão de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \otimes_{\min} \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ dentro de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$, tal que, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}), S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}), h_{\mathcal{A}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, h_{\mathcal{B}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ tem-se $(T \otimes S)(h_{\mathcal{A}} \odot h_{\mathcal{B}}) = T(h_{\mathcal{A}}) \odot S(h_{\mathcal{B}})$. Podemos considerar então, para cada $(t, s) \in G \times H$, a aplicação $A_t \times B_s \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ tal que $(a_t, b_s) \mapsto \pi_{\mathcal{A}}(a_t) \odot \pi_{\mathcal{B}}(b_s)$. Ela é bilinear, e portanto existe uma única transformação linear $(\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})_{(t,s)} : A_t \odot B_s \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ tal que $(\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})_{(t,s)}(a_t \odot b_s) = \pi_{\mathcal{A}}(a_t) \odot \pi_{\mathcal{B}}(b_s)$, $\forall a_t \in A_t, b_s \in B_s$. Esta coleção de transformações lineares constitui uma *-representação $\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}$ do pré-fibrado de Fell $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ (com a norma minimal); como restrita a $A_\epsilon \odot B_\epsilon$ é contínua, ela é contínua sobre cada fibra, e portanto se estende unicamente a uma representação de $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$, como fibrado de Fell sobre o grupo discreto $G_d \times H_d$. Falta mostrarmos que esta representação é contínua na topologia de $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ definida na Proposição 2.16.

Sejam $h_{\mathcal{A}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, h_{\mathcal{B}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, e consideremos o fibrado de Banach $G \times H \times (\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ sobre $G \times H$, e a aplicação $\Phi : \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B} \rightarrow G \times H \times (\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ dada por

$$\Phi(c_{t,s}) = (t, s, (\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})(c_{t,s})(h_{\mathcal{A}} \odot h_{\mathcal{B}})), \quad \forall c_{t,s} \in A_t \otimes_{\min} B_s.$$

Seja Γ como na Proposição 2.16. Para ver que Φ é um homomorfismo contínuo de fibrados de Banach, basta mostrar, segundo [37] II-13.16, que $\forall l \in \Gamma$ se tem que Φl é uma seção contínua do fibrado $G \times H \times (\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$. Para isto, basta apenas considerar seções l da forma $f \odot g$, com $f \in C_c(\mathcal{A}), g \in C_c(\mathcal{B})$. Suponhamos então que $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$ em $G \times H$; temos que mostrar que $\Phi(f(t) \odot g(s)) \rightarrow \Phi(f(t_0) \odot g(s_0))$, o que é equivalente a provar que $\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s))h_{\mathcal{B}}$ converge para $\pi_{\mathcal{A}}(f(t_0))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}$. Agora, se $\varepsilon(t, s) = \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s))h_{\mathcal{B}} - \pi_{\mathcal{A}}(f(t_0))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\|$, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, s) &\leq \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s))h_{\mathcal{B}} - \pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\| \\ &\quad + \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}} - \pi_{\mathcal{A}}(f(t_0))h_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\| \\ &\leq \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))\| \|h_{\mathcal{A}}\| \|\pi_{\mathcal{B}}(g(s))h_{\mathcal{B}} - \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\| \\ &\quad + \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} - \pi_{\mathcal{A}}(f(t_0))h_{\mathcal{A}}\| \|\pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\| \\ &\leq \|f\|_{\infty} \|h_{\mathcal{A}}\| \|\pi_{\mathcal{B}}(g(s))h_{\mathcal{B}} - \pi_{\mathcal{B}}(g(s_0))h_{\mathcal{B}}\| \\ &\quad + \|\pi_{\mathcal{A}}(f(t))h_{\mathcal{A}} - \pi_{\mathcal{A}}(f(t_0))h_{\mathcal{A}}\| \|g\|_{\infty} \|h_{\mathcal{B}}\|, \end{aligned}$$

que converge a zero porque $\pi_{\mathcal{A}}$ e $\pi_{\mathcal{B}}$ são representações contínuas.

O fato de ser Φ contínua implica que $\forall h_{\mathcal{A}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, h_{\mathcal{B}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, a aplicação $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes_{\min} \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ tal que $c \mapsto (\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})(c)(h_{\mathcal{A}} \odot h_{\mathcal{B}})$ é contínua; como $\|(\pi_{\mathcal{A}} \odot \pi_{\mathcal{B}})(c)\| \leq \|c\|$, $\forall c \in \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$, temos

também que $c \mapsto (\pi_A \otimes \pi_B)(c)(h)$ é contínua, $\forall h \in \mathcal{H}_A \otimes_{\min} \mathcal{H}_B$, donde segue que $\pi_A \otimes \pi_B$ é uma representação contínua.

Se π_A, π_B são não degeneradas, então $\pi_A|_{A_\epsilon}$ e $\pi_B|_{B_\epsilon}$ também são não degeneradas, e portanto, pelo teorema de Cohen-Hewitt, dados $h_A \in \mathcal{H}_A, h_B \in \mathcal{H}_B$, existem $a \in A_\epsilon, b \in B_\epsilon, h'_A \in \mathcal{H}_A, h'_B \in \mathcal{H}_B$, tais que $\pi_A(a)h'_A = h_A$, e $\pi_B(b)h'_B = h_B$. Portanto, $(\pi_A \otimes \pi_B)(a \otimes b)(h'_A \otimes h'_B) = h_A \otimes h_B$, donde deduzimos que $\text{span}\{(\pi_A \otimes \pi_B)(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})(\mathcal{H}_A \otimes_{\min} \mathcal{H}_B)\}$ é denso em $\mathcal{H}_A \otimes_{\min} \mathcal{H}_B$.

Por último, $(\pi_A \otimes \pi_B)|_{(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})_\epsilon} = \pi_A|_{A_\epsilon} \otimes \pi_B|_{B_\epsilon}$, que é injetiva se e somente se $\pi_A|_{A_\epsilon}$ e $\pi_B|_{B_\epsilon}$ são injetivas. $\square$

Suponhamos que $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell, e $L, R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, são aplicações contínuas e existe $t \in G$ tal que $L(A_s) \subseteq A_{ts}, R(B_s) \subseteq B_{ts}, \forall s \in G, L|_{A_s} : A_s \rightarrow A_{ts}, R|_{A_s} : A_s \rightarrow A_{ts}$ são lineares limitadas, e $\|L\| := \sup_s \|L|_{A_s}\| < \infty, \|R\| := \sup_s \|R|_{A_s}\| < \infty$. Então (L, R) é chamado multiplicador de ordem t de $\mathcal{A}$ se, $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, vale:

$$a_1 L(a_2) = R(a_1) a_2$$

$$L(a_1 a_2) = L(a_1) a_2$$

$$R(a_1 a_2) = a_1 R(a_2)$$

Simbolizamos o conjunto dos multiplicadores de $\mathcal{A}$ de ordem t por $M_t(\mathcal{A})$, e por $M(\mathcal{A}) = \bigcup_{t \in G} M_t(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os multiplicadores de $\mathcal{A}$ (a notação é diferente da usada em [37], VIII-2.14).

Cada $M_t(\mathcal{A})$ é um espaço de Banach com as operações óbvias e a norma

$$\|(L, R)\|_0 = \max\{\|L\|, \|R\|\}.$$

De fato, tem-se $\|L\| = \|R\|$. Além disso, podemos definir um produto e uma involução sobre $M(\mathcal{A})$:

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*),$$

onde $L^*(a) = L(a^*)^*$, e $R^*(a) = R(a^*)^*$. Com estas operações e norma, $M(\mathcal{A})$ é um fibrado de Fell sobre o grupo discreto G_d .

Além disto, $M(\mathcal{A})$ tem uma topologia “forte”: se $u_i = (L_i, R_i), u = (L, R)$, então $u_i \rightarrow u$ se $\forall a \in \mathcal{A}$ tem-se que $L_i(a) \rightarrow L(a), R_i(a) \rightarrow R(a)$. Por analogia ao caso das C^* -álgebras, chamaremos esta topologia de *estrita* (em [37], VIII-15.2, esta topologia é chamada *forte*). Se $u = (L, R) \in M(\mathcal{A})$, escreveremos ua e au em lugar de $L(a)$ e $R(a)$ respectivamente.

Há uma inclusão isométrica e contínua $\mathcal{A} \hookrightarrow M(\mathcal{A})$, dada por $a \mapsto (L_a, R_a)$, onde L_a é a multiplicação por a à esquerda, e R_a é a multiplicação por a à direita. Em particular, a topologia de $\mathcal{A}$ é mais forte que a herdada da topologia estrita de $M(\mathcal{A})$. Se A_ϵ tem unidade, elas coincidem; se A_ϵ não tem unidade, são diferentes: toda unidade aproximada de A_ϵ é convergente estritamente a $1 = (id, id) \in M(\mathcal{A})$, mas não é convergente em A_ϵ . Também temos uma inclusão isométrica $M(A_\epsilon) \hookrightarrow M_\epsilon(\mathcal{A})$, porque, sendo cada A_t um bimódulo de Hilbert sobre A_ϵ , ele é também, de forma natural, um bimódulo de Hilbert sobre $M(A_\epsilon)$, e é fácil mostrar que as ações por multiplicação à esquerda e à direita por elementos de $M(A_\epsilon)$ sobre $\mathcal{A}$ definem multiplicadores de ordem ϵ (Ver 2.23 abaixo).

Se $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é uma representação não degenerada de $\mathcal{A}$, então existe uma única extensão ([37], VIII-15.3) de π a uma representação $\pi' : M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\forall h \in \mathcal{H}$, a função $u \mapsto \pi'(u)h$ é estritamente contínua sobre cilindros de $\mathcal{A}$ (o cilindro de raio r de $\mathcal{A}$ é $C_r = \{a \in \mathcal{A} : \|a\| \leq r\}$)

LEMA 2.23. *A aplicação $M(B_\epsilon) \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $(u, b) \mapsto ub$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos primeiro que, fixado $u \in M(B_\epsilon)$, a função $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $b \mapsto ub$ é contínua. Para isto, basta provar que se $f \in C_c(\mathcal{B})$, então $uf : G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $(uf)|_t = uf(t)$ é contínua. Notemos que $B_\epsilon C_c(\mathcal{B})$ é denso na topologia do limite indutivo de $C_c(\mathcal{B})$, por [37], II-14.6 (ou 3.14), e portanto $B_\epsilon C_c(\mathcal{B})$ é denso em $C_0(\mathcal{B})$. Logo, $C_0(\mathcal{B})$ é um B_ϵ -módulo de Banach não degenerado. Portanto, pelo teorema de Cohen–Hewitt, existem $b \in B_\epsilon, g \in C_0(\mathcal{B})$, tais que $f = bg$, e é claro que podemos supor que $g \in C_c(\mathcal{B})$ (em outras palavras: $B_\epsilon C_c(\mathcal{B}) = C_c(\mathcal{B})$). Mas então $uf = (ub)g \in C_c(\mathcal{B})$, pois o produto é contínuo sobre $\mathcal{B}$.

Por último, suponhamos que $b_j \rightarrow b$ em $\mathcal{B}$, com $b_j \in B_{t_j}, b \in B_t$, e que $u_i \rightarrow u$ em $M(B_\epsilon)$. Como $\|\cdot\| : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existe j_0 tal que $\forall j \geq j_0$ tem-se que $\|b_j\| \leq M$. Então, se $j \geq j_0$: $\|u_i b_j - u b_j\| \leq M \|u_i - u\| \rightarrow 0$, donde segue que $(u_i b_j - u b_j) \rightarrow 0_t$ quando $(i, j) \rightarrow \infty$. Por outro lado, vimos no começo que $u b_j \rightarrow u b$, e portanto concluímos que $u_i b_j \rightarrow u b$ se $(i, j) \rightarrow \infty$. $\square$

O seguinte resultado é análogo ao Lema 1.46.

LEMA 2.24. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G} \in \mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ um produto tensorial entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Então existem inclusões únicas $\iota_{\mathcal{A}} : M(\mathcal{A}) \rightarrow M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ e $\iota_{\mathcal{B}} : M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ tais que $\iota_{\mathcal{A}}(u)\iota_{\mathcal{B}}(v) = \iota_{\mathcal{B}}(v)\iota_{\mathcal{A}}(u)$, $\forall u \in M(\mathcal{A}), v \in M(\mathcal{B})$, e tais que $\iota_{\mathcal{A}}(a)\iota_{\mathcal{B}}(b) = a \odot b$, $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$. Estas inclusões são isométricas e contínuas nas topologias estritas quando restritas a cilindros.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $u \in M_t(\mathcal{A})$. Para cada $r \in G, s \in H$, a transformação $A_r \times B_s \rightarrow A_{tr} \otimes B_s$ tal que $(a_r, b_s) \mapsto (ua_r, b_s)$ é bilinear, e portanto existe uma única transformação linear $L_u : A_t \odot B_s \rightarrow A_{tr} \otimes B_s$ tal que $a_r \odot b_s \mapsto ua_r \otimes b_s$. Analogamente, existe $R_u : A_t \odot B_s \rightarrow A_{rt} \otimes B_s$ tal que $R_u(a_r \odot b_s) = a_r u \otimes b_s$. A coleção destas transformações define duas aplicações $L_u, R_u : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tais que $\forall x, y \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ satisfazem: $L_u(xy) = L_u(x)y$, $R_u(xy) = xR_u(y)$, $xL_u(y) = R_u(x)y$. Se provarmos que L_u, R_u são limitados, então se estendem unicamente sobre cada fibra a operadores contínuos, que continuarão satisfazendo as relações algébricas acima; em outras palavras, o par formado por estas extensões será um multiplicador de ordem (t, ϵ) de $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_d$.

Seja $x = \sum_{i=1}^n a_i \odot b_i \in A_r \otimes B_s$. Então:

$$\|L_u x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n ua_i \odot b_i \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i^* u^* ua_j \odot b_i^* b_j.$$

Sejam $u = (u_{ij}) \in M_n(M(A_\epsilon))$, $a = (a_{ij}) \in M_n(A_r)$, dados por: $u_{ij} = \begin{cases} \sqrt{u^* u} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$

e $a_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{se } i = 1, \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$. Como A_r é um bimódulo de Hilbert sobre $M(A_\epsilon)$, $M_n(A_r)$ é um $M_n(M(A_\epsilon))$ -bimódulo de Hilbert: à direita com o produto $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_r = \mathfrak{x}^* \mathfrak{y}$, onde o produto é o produto usual de matrizes e, se $\mathfrak{x} = (x_{ij})$ e $\mathfrak{y} = (y_{ij})$, então $y_{ij} = x_{ji}^*$; o produto à esquerda é $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_l = \mathfrak{x} \mathfrak{y}^*$; as ações são dadas pelo produto de matrizes. Em particular temos $\langle ua, ua \rangle_r \leq u^* u \langle a, a \rangle_r \leq \|u\|^2 \langle a, a \rangle_r$, donde $\mathfrak{c} := \|u\|^2 \langle a, a \rangle_r - \langle ua, ua \rangle_r \geq 0$. Um cálculo rápido mostra que, se $\mathfrak{c} = (c_{ij})$, então $c_{ij} = a_i^* (\|u\|^2 - u^* u) a_j$.

Por outro lado, também $M_n(B_s)$ é um bimódulo de Hilbert sobre $M_n(M(B_\epsilon))$. Em particular, se $\mathfrak{b} = (b_{ij}) \in M_n(B_s)$ está dado por $b_{ij} = \begin{cases} b_j & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$, o elemento $\mathfrak{b}^* \mathfrak{b} = (b_i^* b_j)$ é positivo em $M_n(M(B_\epsilon))$. Agora, pelo Lema 1.43, temos que $\mathfrak{c} \odot \mathfrak{b}^* \mathfrak{b} = (a_i^* (\|u\|^2 - u^* u) a_j \odot b_i^* b_j)$ é um elemento positivo em qualquer C^* -completamento de $M_n(M(A_\epsilon)) \odot M_n(M(B_\epsilon))$, e $\sum_{i,j=1}^n a_i^* (\|u\|^2 - u^* u) a_j \odot$

$b_i^* b_j$ é positivo em qualquer C^* -completamento de $M(A_\epsilon) \odot M(B_\epsilon)$. Em particular,

$$\left\| \sum_{i,j=1}^n a_i^* u^* u a_j \odot b_i^* b_j \right\| \leq \|u\|^2 \left\| \sum_{i,j=1}^n a_i^* a_j \odot b_i^* b_j \right\|.$$

para qualquer C^* -norma sobre $A_\epsilon \odot B_\epsilon$. Isto mostra que $\|L_u x\|^2 \leq \|u\|^2 \|x\|^2$, como queríamos. Analogamente, vemos que $\|R_u x\|^2 \leq \|u\|^2 \|x\|^2$, e portanto (L_u, R_u) se estende a um multiplicador $\iota_{\mathcal{A}}(u)$ sobre $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_d$, e $\|\iota_{\mathcal{A}}(u)\| \leq \|u\|$. Na verdade, $\|\iota_{\mathcal{A}}(u)\| = \|u\|$: se $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ são tais que $\|a\|, \|b\| \leq 1$, então

$$\|\iota_{\mathcal{A}}(u)\| \geq \|\iota_{\mathcal{A}}(u)(a \odot b)\| = \|ua\| \|b\| = \|ua\|.$$

donde segue que $\|\iota_{\mathcal{A}}(u)\| \geq \|u\|$; assim, $\|\iota_{\mathcal{A}}(u)\| = \|u\|$, e portanto $\iota_{\mathcal{A}}$ é uma isometria.

Para ver que $\iota_{\mathcal{A}}(u) \in M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, falta mostrar que ele é contínuo. Para isto, consideremos $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$; então as funções $G \times H \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tais que $(t, s) \mapsto uf(t) \odot g(s)$ e $(t, s) \mapsto f(t)u \odot g(s)$ são contínuas. Um argumento igual ao de [37], II-13.16 (que é sobre a continuidade de aplicações que preservam as fibras), mostra que a continuidade das funções acima implica a continuidade de L_u e R_u ; de qualquer forma apresentamos a prova a seguir. Suponhamos que $x_i \rightarrow x$ em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, e seja $l = \sum_i f_i \odot g_i$ tal que $\|l(t, s) - x\| < \epsilon$, onde $x \in A_t \otimes B_s$, $x_i \in A_{t_i} \otimes B_{s_i}$. Como $x_i \rightarrow x$ e $l(t_i, s_i) \rightarrow l(t, s)$, a continuidade da norma e da soma implicam que existe i_0 tal que $\forall i \geq i_0$ deve ser $\|l(t_i, s_i) - x_i\| < \epsilon$. Agora, $\|L_u l(t_i, s_i) - L_u x_i\| \leq \epsilon \|u\|$, e $\|L_u l(t, s) - L_u x\| \leq \epsilon \|u\|$, e como $L_u l(t_i, s_i) \rightarrow L_u l(t, s)$, concluímos que $L_u x_i \rightarrow L_u x$.

Vejamos que $\iota_{\mathcal{A}}$ é estritamente contínua sobre cilindros. Se $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, e $(u_i) \subseteq \mathcal{A}$ é uma rede que converge estritamente a $u \in \mathcal{A}$, com $\|u_i\|, \|u\| \leq C$, então:

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{A}}(u_i)(a \odot b) &= u_i a \odot b \rightarrow ua \odot b = \iota_{\mathcal{A}}(u)(a \odot b) \\ (a \odot b)\iota_{\mathcal{A}}(u_i) &= au_i \odot b \rightarrow au \odot b = (a \odot b)\iota_{\mathcal{A}}(u) \end{aligned}$$

Então $\iota_{\mathcal{A}}(u_i)x \rightarrow \iota_{\mathcal{A}}(u)x$ e $x\iota_{\mathcal{A}}(u_i) \rightarrow x\iota_{\mathcal{A}}(u)$, $\forall x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$; como $\|\iota_{\mathcal{A}}u_i\|, \|\iota_{\mathcal{A}}u\| \leq C$, concluímos que $\iota_{\mathcal{A}}(u_i)x \rightarrow \iota_{\mathcal{A}}(u)x$ e $x\iota_{\mathcal{A}}(u_i) \rightarrow x\iota_{\mathcal{A}}(u)$, $\forall x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, donde $\iota_{\mathcal{A}}u_i$ converge estritamente a $\iota_{\mathcal{A}}(u)$.

Analogamente construímos $\iota_{\mathcal{B}} : M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$: se $v \in M(\mathcal{B})$ e $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, então $\iota_{\mathcal{B}}(v)(a \odot b) = a \odot vb$, e $(a \odot b)\iota_{\mathcal{B}}(v) = a \odot bv$. É claro que $\iota_{\mathcal{A}}(u)\iota_{\mathcal{B}}(v) = \iota_{\mathcal{B}}(v)\iota_{\mathcal{A}}(u)$, $\forall u \in M(\mathcal{A})$, $v \in M(\mathcal{B})$, e também que $\iota_{\mathcal{A}}(a)\iota_{\mathcal{B}}(b) = a \odot b$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.

Assim obtemos uma aplicação $M(\mathcal{A}) \times M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, dada por $(u, v) \mapsto \iota_{\mathcal{A}}(u)\iota_{\mathcal{B}}(v)$, que é bilinear sobre cada $M_t(\mathcal{A}) \times M_s(\mathcal{B})$, e portanto conseguimos uma aplicação $M(\mathcal{A}) \odot M(\mathcal{B}) \rightarrow M(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, que é linear sobre cada $M_t(\mathcal{A}) \odot M_s(\mathcal{B})$, e que é um homomorfismo de fibrados de Fell porque $\iota_{\mathcal{A}}(u)$ e $\iota_{\mathcal{B}}(v)$ comutam. $\forall u \in M(\mathcal{A})$, $v \in M(\mathcal{B})$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.25. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e seja $\mathcal{H}$ um módulo de Hilbert. Então, para cada $(\pi_1, \pi_2) \in R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$, existe uma única $\pi \in R(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}, \mathcal{H})$ tal que $\pi(a \odot b) = \pi_1(a)\pi_2(b)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. e a aplicação $(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi$ assim definida é uma bijeção entre $R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ e $R(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}, \mathcal{H})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\pi_1, \pi_2) \in R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$. A aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $(a_t, b_s) \mapsto \pi_1(a_t)\pi_2(b_s)$ é bilinear sobre cada $A_t \times B_s$, e portanto existe uma única $\pi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(a_t \odot b_s) = \pi_1(a_t)\pi_2(b_s)$. Como $\pi_1(a)$ e $\pi_2(b)$ comutam, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, tem-se que $\pi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é uma representação do pré-fibrado de Fell $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Notar que $x \mapsto \|x\|' = \max\{\|x\|_{\max}, \|\pi(x)\|\}$ é uma C^* -norma sobre $A_t \odot B_s$, donde segue que $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_{\max}$, e portanto $\|\pi(x)\| \leq \|x\|_{\max}$, $\forall x \in A_t \odot B_s$. Assim, π tem uma única extensão a uma representação $\pi :$

$(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B})_d \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Usando o teorema de Cohen-Hewitt, é fácil ver que esta representação é não degenerada: como π_1 é não degenerada, para todo $h \in \mathcal{H}$ existem $h' \in \mathcal{H}$ e $a \in \mathcal{A}_e$ tais que $\pi_2(a)h' = h$; como π_2 é não degenerada, existem $h'' \in \mathcal{H}$ e $b \in \mathcal{B}_e$ tais que $\pi_1(b)h'' = h'$; portanto $\pi(a \odot b)h'' = \pi_1(a)\pi_2(b)h'' = \pi_1(a)h' = h$.

Falta mostrar ainda que π é contínua. Por [37] II-13.16, para isto é suficiente provar que $\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, e $h \in \mathcal{H}$, a função $G \times H \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $(t, s) \longmapsto \pi((f \odot g)(t, s))h$ é contínua. Mas, se $(t, s) \longrightarrow (t_0, s_0)$:

$$\begin{aligned} \|\pi((f \odot g)(t, s))h - \pi((f \odot g)(t_0, s_0))h\| &= \|\pi_1(f(t))\pi_2(g(s))h - \pi_1(f(t_0))\pi_2(g(s_0))h\| \\ &\leq \|\pi_1(f(t))(\pi_2(g(s)) - \pi_2(g(s_0)))h\| \\ &\quad + \|(\pi_1(f(t)) - \pi_1(f(t_0)))\pi_2(g(s_0))h\| \\ &\leq \|f\|_\infty \|(\pi_2(g(s))h - \pi_2(g(s_0))h)\| \\ &\quad + \|\pi_1(f(t))\pi_2(g(s_0))h - \pi_1(f(t_0))\pi_2(g(s_0))h\| \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{pois } \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ são contínuas.} \end{aligned}$$

Portanto, $\pi \in R(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}, \mathcal{H})$.

Inversamente, suponhamos que $\pi \in R(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}, \mathcal{H})$. Por [37] VIII-15.3, π se estende de forma única a uma representação π' de $M(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B})$, tal que $x \longmapsto \pi'(x)h$ é estritamente contínua sobre cilindros, $\forall h \in \mathcal{H}$. Sejam $\pi_1 = \pi' \iota_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, e $\pi_2 = \pi' \iota_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, onde $\iota_{\mathcal{A}}$ e $\iota_{\mathcal{B}}$ são as inclusões fornecidas pelo Lema 2.24. Como π' , $\iota_{\mathcal{A}}$ e $\iota_{\mathcal{B}}$ são contínuas sobre cilindros temos imediatamente que $\forall h \in \mathcal{H}$ as funções $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H}$ dadas por $a \longmapsto \pi_1(a)h$ e $b \longmapsto \pi_2(b)h$ respectivamente são contínuas, donde segue que π_1 e π_2 são representações contínuas. Como $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ se tem que $\iota_{\mathcal{A}}(a)$ e $\iota_{\mathcal{B}}(b)$ comutam, então também comutam $\pi_1(a)$ e $\pi_2(b)$. Finalmente, as representações π_1 e π_2 são não degeneradas: basta mostrar que todo $\pi(a \odot b)h$ está na imagem de π_1 e na imagem de π_2 . Mas, por Cohen-Hewitt, a e b podem ser fatorizados como $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$, e portanto:

$$\begin{aligned} \pi_1(a_1)\pi(a_2 \odot b)h &= \pi(a_1 a_2 \odot b)h = \pi(a \odot b)h \\ \pi_2(b_1)\pi(a \odot b_2)h &= \pi(a \odot b_1 b_2)h = \pi(a \odot b)h \end{aligned}$$

Temos construído assim correspondências $(\pi_1, \pi_2) \longmapsto \pi$ e $\pi \longmapsto (\pi \iota_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}}, \pi \iota_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}})$, que são claramente mutuamente inversas. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.26. Na demonstração da Proposição 2.25, vimos na verdade que se $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\pi_2 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ são representações tais que $\pi_1(a)\pi_2(b) = \pi_2(b)\pi_1(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, então existe uma representação $\pi : \mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(a \odot b) = \pi_1(a)\pi_2(b)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. A hipótese de não degeneração de π_1 e π_2 foi usada apenas para ver que π também é não degenerada.

CAPÍTULO 3

C^* -álgebras seccionais de produtos tensoriais de fibrados de Fell

A organização deste capítulo é a seguinte. Na primeira seção introduzimos a C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell sobre um grupo localmente compacto, e também a noção de “amenabilidade” de um fibrado de Fell. Na segunda seção comparamos as C^* -álgebras seccionais de produtos tensoriais de fibrados de Fell com os produtos tensoriais das correspondentes C^* -álgebras seccionais. Finalmente, na última seção, utilizamos os resultados obtidos nas seções e capítulos anteriores para obter aplicações à teoria geral de C^* -álgebras, especialmente na área de produtos cruzados. Concretamente mostramos que: um fibrado de Fell com fibra nuclear (exata) e certa propriedade de aproximação, que generaliza ao caso contínuo a propriedade de aproximação introduzida em [28], tem C^* -álgebra seccional nuclear (respectivamente: exata). Estes resultados são obtidos essencialmente graças aos seguintes dois fatos: por um lado, as propriedades de aproximação são preservadas sob produtos tensoriais (3.27), e por outro tem-se que $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) \cong C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$, e $C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C_r^*(\mathcal{B}) \cong C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B})$, resultado que mostra uma bela coerência entre construções universais e construções espaciais (3.21).

Seja $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e seja $C_c(\mathcal{B})$ o espaço vetorial das seções contínuas de suporte compacto de $\mathcal{B}$ (a notação correspondente em [37] é $\mathfrak{L}(\mathcal{B})$). Consideremos, para cada subconjunto compacto K de G , o subespaço $C_K(\mathcal{B})$ de $C_c(\mathcal{B})$, formado pelas seções contínuas de $\mathcal{B}$ cujo suporte está contido em K . Com a norma do supremo, $C_K(\mathcal{B})$ é um espaço de Banach. Denotemos por $i_K : C_K(\mathcal{B}) \hookrightarrow C_c(\mathcal{B})$ a inclusão canônica. O sistema indutivo $(C_K(\mathcal{B}), i_K)_{K \subset G}$ define sobre $C_c(\mathcal{B})$ uma topologia localmente convexa, chamada *topologia do limite indutivo*. Ela está caracterizada pela seguinte propriedade universal: se $\mathfrak{F}$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, e $\phi : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{F}$ é uma transformação linear, então ϕ é contínua na topologia do limite indutivo se e somente se $\phi i_K : C_K(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{F}$ é contínua, para todo subconjunto compacto K de G ([37], II-14.3).

Sobre $C_c(\mathcal{B})$ podemos considerar outras topologias, induzidas pelas normas $\|\cdot\|_p$, para todo $p \in [1, \infty)$: se $f \in C_c(\mathcal{B})$, então $\|f\|_p = (\int_G \|f(t)\|^p dt)^{1/p}$. O completamento de $C_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma p é denotado por $\mathfrak{L}^p(\mathcal{B})$. No caso $p = 1$, o denotaremos também por $L^1(\mathcal{B})$. Os espaços $\mathfrak{L}^p(\mathcal{B})$ podem ser definidos para qualquer fibrado de Banach, e seus elementos podem ser vistos como seções do fibrado. De fato, $\mathfrak{L}^p(\mathcal{B})$ está formado pelas seções localmente mensuráveis f de $\mathcal{B}$ que se anulam fora de subconjuntos σ -compactos de G , e tais que $\int_G \|f(t)\|^p dt < \infty$; naturalmente, seções que diferem apenas sobre um conjunto de medida nula devem ser identificadas (consultar [37], II-15.7 e II-15.9).

Como é claro, a convergência em $C_c(\mathcal{B})$ com a topologia do limite indutivo implica a convergência em $\mathfrak{L}^p(\mathcal{B})$, $\forall p$.

$C_c(\mathcal{B})$ e $L^1(\mathcal{B})$ são $*$ -álgebras com as operações:

$$f * g(t) = \int_G f(r)g(r^{-1}t)dr$$

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1}f(t^{-1})^*,$$

onde $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a função modular sobre o grupo G (sempre consideraremos medidas de Haar à esquerda). $L^1(\mathcal{B})$ é de fato uma $*$ -álgebra de Banach com estas operações ([37], VIII-5.6). A C^* -álgebra envolvente de $L^1(\mathcal{B})$ é chamada a C^* -álgebra seccional (plena) do fibrado de Fell $\mathcal{B}$, e denotada por $C^*(\mathcal{B})$. Tem-se que $L^1(\mathcal{B}) \subseteq C^*(\mathcal{B})$. Por [37], VIII-17.3, cada representação π sobre um espaço de Hilbert H (ver Definição 2.21) pode ser “integrada” a uma representação $\int \pi$ de $C^*(\mathcal{B})$, de forma tal que para toda $f \in L^1(\mathcal{B})$, $h, k \in H$ se tem:

$$\langle (\int \pi)(f)|_h, k \rangle = \int_G \langle \pi(f(t))h, k \rangle dt.$$

Inversamente, cada representação de $C^*(\mathcal{B})$ pode ser obtida como a representação integrada de uma única representação do fibrado $\mathcal{B}$. Assim, temos que $\mathcal{B}$ e $C^*(\mathcal{B})$ têm a mesma teoria de representações.

3.1. C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell. Amenabilidade

Em [50], Ng definiu a C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell sobre um grupo localmente compacto, generalizando a definição de Exel para fibrados sobre grupos discretos dada em [28]. A definição é a seguinte: $C_r^*(\mathcal{B})$ é o fecho em $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ de $\Lambda(L^1(\mathcal{B}))$, onde $\Lambda_f \xi = f * \xi$, $\forall f \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^1(\mathcal{B})$, $\xi \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$. No caso de ser G um grupo localmente compacto não discreto, não é imediato que Λ , definida por convolução entre funções contínuas, possa ser estendida a uma representação de $L^1(\mathcal{B})$. No que segue, daremos uma demonstração deste fato, diferente da fornecida por Ng, e que nós achamos mais apropriada do ponto de vista da teoria dos fibrados de Fell. Posteriormente provamos que se $\mathcal{A}$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, então $C_r^*(\mathcal{A})$ é uma sub- C^* -álgebra de $C_r^*(\mathcal{B})$.

Se $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , com fibra B_e sobre a unidade e de G , então $L^2(\mathcal{B})$ é o B_e -módulo de Hilbert à direita obtido completando $C_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma definida pelo B_e -produto interno: $\langle \xi, \eta \rangle = \int_G \xi(s)^* \eta(s) ds$. Se $b_t \in B_t$, seja

$$(\Lambda_{b_t} \xi)|_s = b_t \xi(t^{-1}s), \quad \forall \xi \in C_c(\mathcal{B}).$$

Temos que $\Lambda_{b_t} \xi \in C_c(\mathcal{B})$, e $\text{supp}(\Lambda_{b_t} \xi) \subseteq t \text{supp}(\xi)$, pois se $\xi(s) = 0$, então $0 = b_t \xi(t^{-1}ts) = (\Lambda_{b_t} \xi)(ts)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{b_t} \xi, \Lambda_{b_t} \xi \rangle &= \int_G (\Lambda_{b_t} \xi)(s)^* (\Lambda_{b_t} \xi)(s) ds \\ &= \int_G (b_t \xi(t^{-1}s))^* (b_t \xi(t^{-1}s)) ds \\ &= \int_G \xi(t^{-1}s)^* b_t^* b_t \xi(t^{-1}s) ds \\ &\leq \int_G \xi(t^{-1}s)^* \|b_t^* b_t\| \xi(t^{-1}s) ds \\ &= \|b_t\|^2 \int_G \xi(s)^* \xi(s) ds \\ &= \|b_t\|^2 \langle \xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

donde concluímos que Λ_{b_t} pode ser estendido a todo $L^2(\mathcal{B})$; de fato, é fácil verificar que Λ_{b_t} é adjuntável, e $\Lambda_{b_t}^* = \Lambda_{b_t^*}$.

Definamos $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ dado por $b \mapsto \Lambda_b$. É imediato que Λ é uma representação algébrica de $\mathcal{B}$. Queremos ver que Λ é também contínua.

LEMA 3.1. *Se $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ e $b_t \in \mathcal{B}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $U \subseteq \mathcal{B}$ aberto, com $b_t \in U$, tal que se $b \in U$, então $\|\Lambda_b \xi - \Lambda_{b_t} \xi\|_\infty < \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que o resultado é falso. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda vizinhança aberta U de b_t existem $b_{r_U} \in U$ e $s_U \in G$ tais que $\|(\Lambda_{b_{r_U}} \xi)(s_U) - (\Lambda_{b_t} \xi)(s_U)\| \geq \varepsilon$, ou seja, $\|b_{r_U} \xi(r_U^{-1}s_U) - b_t \xi(t^{-1}s_U)\| \geq \varepsilon$. Notemos que $\text{supp}(\Lambda_{b_{r_U}} \xi) \subseteq r_U \text{supp}(\xi)$, $\text{supp}(\Lambda_{b_t} \xi) \subseteq t \text{supp}(\xi)$. Como $b_{r_U} \rightarrow b_t$, então $r_U \rightarrow t$ (pois $\pi : \mathcal{B} \rightarrow G$ é contínua). Portanto existem um compacto $K \subseteq G$ e uma vizinhança U_0 de b_t tais que $\text{supp}(\Lambda_{b_{r_U}} \xi) \subseteq K$, $\forall U \supseteq U_0$ (aqui $U \supseteq U_0$ significa que $U \subseteq U_0$).

Então $s_U \in K$, $\forall U \geq U_0$, e deve ter uma subrede convergente a certo $s_0 \in K$. Podemos supor que a própria rede $s_U \rightarrow s_0$. Mas então:

$$0 = \|b_t \xi(t^{-1}s_0) - b_t \xi(t^{-1}s_U)\| = \lim_U \|b_{r_U} \xi(r_U^{-1}s_U) - b_t \xi(t^{-1}s_U)\| \geq \varepsilon,$$

o que é uma contradição. $\square$

Lembrar que $\mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ se obtém completando $C_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma

$$\|\xi\|_2 = \left(\int_G \|\xi(s)\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Portanto, se $\xi_n \rightarrow \xi$ em $\mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, com $\xi_n, \xi \in C_c(\mathcal{B})$, temos que $\xi_n \rightarrow \xi$ em $L^2(\mathcal{B})$, pois $\|\xi\| \leq \|\xi\|_2$. Com efeito, $\|\xi\| = \|\int_G \xi(s)^* \xi(s) ds\|^{1/2}$, e como $\int_G \xi(s)^* \xi(s) ds$ é um elemento positivo de B_ϵ , existe um estado φ de B_ϵ tal que $\|\int_G \xi(s)^* \xi(s) ds\| = \varphi(\int_G \xi(s)^* \xi(s) ds)$. Mas então temos:

$$\begin{aligned} \left\| \int_G \xi(s)^* \xi(s) ds \right\| &= \varphi \left(\int_G \xi(s)^* \xi(s) ds \right) \\ &= \int_G \varphi(\xi(s)^* \xi(s)) ds \\ &\leq \int_G \|\xi(s)^* \xi(s)\| ds \\ &= \|\xi\|_2^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, é claro que se $b_r \rightarrow b_t$, então $\Lambda_{b_r} \xi \rightarrow \Lambda_{b_t} \xi$ em $\|\cdot\|$, pois $\|\xi\|_2 \leq \lambda(\sup(\xi)) \|\xi\|_\infty$ (sendo λ a medida de Haar à esquerda em G), e então pelo Lema 3.1 $\Lambda_{b_r} \xi \rightarrow \Lambda_{b_t} \xi$ em $\|\cdot\|_\infty$, e portanto $\Lambda_{b_r} \xi \rightarrow \Lambda_{b_t} \xi$ em $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|$.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Seja $\xi \in L^2(\mathcal{B})$. Então $\mathcal{B} \rightarrow L^2(\mathcal{B})$ tal que $b \mapsto \Lambda_b \xi$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $b \in \mathcal{B}$, e seja $b_j \rightarrow b$ em $\mathcal{B}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\xi_\varepsilon \in C_c(\mathcal{B})$ tal que $\|\xi - \xi_\varepsilon\| < \varepsilon$, e seja j_0 tal que $\|b_j\|, \|b\| \leq c, \forall j \geq j_0$ e certa constante c . Então, se $j \geq j_0$:

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{b_j} \xi - \Lambda_b \xi\| &\leq \|\Lambda_{b_j} \xi - \Lambda_{b_j} \xi_\varepsilon\| + \|\Lambda_{b_j} \xi_\varepsilon - \Lambda_b \xi_\varepsilon\| + \|\Lambda_b \xi_\varepsilon - \Lambda_b \xi\| \\ &\leq \|b_j\| \|\xi - \xi_\varepsilon\| + \|\Lambda_{b_j} \xi_\varepsilon - \Lambda_b \xi_\varepsilon\| + \|b\| \|\xi_\varepsilon - \xi\| \\ &< 2c\varepsilon + \|\Lambda_{b_j} \xi_\varepsilon - \Lambda_b \xi_\varepsilon\| \end{aligned}$$

Segue que $\limsup_j \|\Lambda_{b_j} \xi - \Lambda_b \xi\| \leq 2c\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, e portanto $\Lambda_{b_j} \xi \rightarrow \Lambda_b \xi$ em $\|\cdot\|$. $\square$

DEFINIÇÃO 3.3. A representação $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ definida acima é chamada representação regular do fibrado de Fell $\mathcal{B}$. Λ_{b_s} é a única extensão contínua a todo $L^2(\mathcal{B})$ da aplicação $C_c(\mathcal{B}) \rightarrow C_c(\mathcal{B})$ tal que, se $\xi \in C_c(\mathcal{B}), t \in G$, então $\Lambda_{b_s}(\xi)|_t = b_s \xi(s^{-1}t)$.

TEOREMA 3.4. *Existe uma única representação não degenerada*

$$\Lambda : L^1(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$$

sobre o módulo de Hilbert $L^2(\mathcal{B})$, dada por $f \mapsto \Lambda_f$, onde $\Lambda_f(\xi) = f * \xi, \forall f \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^1(\mathcal{B}), \xi \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$.

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 3.2 nos diz que $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ é uma representação de Fréchet, no sentido da Definição VIII-8.2 de [37]. Podemos aplicar então a Proposição VIII-11.3 de [37] para concluir que Λ é integrável, quer dizer, existe uma representação $\Lambda : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(\mathcal{B}))$ tal que:

$$\varphi(\Lambda_f) = \int_G \varphi(\Lambda_{f(s)}) ds, \quad \forall f \in C_c(\mathcal{B}), \varphi \in B(L^2(\mathcal{B}))'.$$

Além do mais, Λ é única. Pomos simplesmente $\Lambda_f = \int_G \Lambda_{f(s)} ds$.

Ainda queremos ver que $\forall f \in C_c(\mathcal{B})$, tem-se $\Lambda_f \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$. Agora, dados $\xi, \eta \in L^2(\mathcal{B})$, a aplicação $\epsilon_{\xi, \eta} : B(L^2(\mathcal{B})) \rightarrow B_c$ tal que $T \mapsto \langle \xi, T\eta \rangle$ é linear e contínua. Portanto, se $f \in C_c(\mathcal{B})$:

$$\epsilon_{\xi, \eta}(\Lambda_f) = \epsilon_{\xi, \eta} \left(\int_G \Lambda_{f(s)} ds \right) = \int_G \epsilon_{\xi, \eta}(\Lambda_{f(s)}) ds = \int_G \langle \xi, \Lambda_{f(s)}(\eta) \rangle ds,$$

ou seja:

$$(4) \quad \langle \xi, \Lambda_f(\eta) \rangle = \int_G \langle \xi, \Lambda_{f(s)}(\eta) \rangle ds$$

Em particular:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \Lambda_{f^\bullet}(\eta) \rangle &= \int_G \langle \xi, \Lambda_{f^\bullet(s)}(\eta) \rangle ds \\ &= \int_G \langle \xi, \Lambda_{\Delta(s^{-1})f(s^{-1})^\bullet}(\eta) \rangle ds \\ &= \int_G \Delta(s^{-1}) \langle \xi, \Lambda_{f(s^{-1})^\bullet}(\eta) \rangle ds \\ &= \int_G \Delta(s^{-1}) (\Delta(s) \langle \Lambda_{f(s)}(\xi), \eta \rangle) ds \\ &= \int_G \langle \eta, \Lambda_{f(s)}(\xi) \rangle^* ds \\ &= \left(\int_G \langle \eta, \Lambda_{f(s)}(\xi) \rangle ds \right)^* \\ &= (\langle \eta, \Lambda_f(\xi) \rangle)^* \\ &= \langle \Lambda_f(\xi), \eta \rangle \end{aligned}$$

Assim $\Lambda_f^* = \Lambda_{f^\bullet}$, e portanto $\Lambda_f \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$.

A representação $\Lambda : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ é contínua na norma $\|\cdot\|_1$: pela equação (4) temos:

$$\|\langle \xi, \Lambda_f(\eta) \rangle\| \leq \int_G \|\xi\| \|\Lambda_{f(t)}\eta\| dt \leq \int_G \|f(t)\| \|\xi\| \|\eta\| dt = \|f\|_1 \|\xi\| \|\eta\|.$$

Em particular:

$$\|\Lambda_f \xi\|^2 = \|\langle \Lambda_f \xi, \Lambda_f \xi \rangle\| = \|\langle \Lambda_{f^\bullet} f \xi, \xi \rangle\| \leq \|f^\bullet f\|_1 \|\xi\|^2 \leq \|f\|_1^2 \|\xi\|^2,$$

donde $\|\Lambda_f\| \leq \|f\|_1$. Portanto, Λ se estende de forma única por continuidade a uma representação de $L^1(\mathcal{B})$. Esta representação é não degenerada, pois $C_c(\mathcal{B}) * C_c(\mathcal{B})$ é denso em $C_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo, e portanto também em $L^2(\mathcal{B})$. $\square$

DEFINIÇÃO 3.5. A representação $\Lambda : L^1(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ definida no Teorema 3.4 é chamada representação regular (à esquerda) de $L^1(\mathcal{B})$, e $C_r^*(\mathcal{B}) := \overline{\Lambda(L^1(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ é chamada C^* -álgebra reduzida de $\mathcal{B}$. Se o fibrado de Fell provém de uma ação parcial torcida α de G sobre a C^* -álgebra A , então a correspondente C^* -álgebra reduzida é chamada produto cruzado reduzido, e é denotada por $A \rtimes_{\alpha,r} G$.

OBSERVAÇÃO 3.6. Em [50], Ng mostrou que se α é uma ação global de G sobre A , então o produto cruzado reduzido usual coincide com o produto cruzado reduzido que acabamos de definir (ver também [28], 3.8). Recentemente, Exel generalizou este resultado, provando que, se $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow B(H)$ é uma representação de $\mathcal{B}$ tal que $\pi|_{B_c}$ é fiel, e consideramos a representação $\pi_\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow B(L^2(G, H))$, dada por $\pi_\lambda(b_t) = \lambda_t \circ \pi(b_t)$, onde λ é a representação regular à esquerda de G sobre $L^2(G)$, então a representação integrada de π_λ define uma representação de $C^*(\mathcal{B})$, que se fatoriza por uma representação fiel de $C_r^*(\mathcal{B})$. Portanto, $C_r^*(\mathcal{B}) \cong \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B}))$.

Lembrar que um grupo G é dito “amenable” se existe um estado μ da C^* -álgebra $L^\infty(G)$ invariante à esquerda, ou seja tal que $\mu(f) = \mu(\lambda_t(f))$, $\forall f \in L^\infty(G)$, $t \in G$, onde $\lambda_t(f)|_s = f(t^{-1}s)$. Esta condição de G é equivalente à seguinte: a representação regular $\lambda : L^1(G) \longrightarrow B(L^2(G))$ se estende a um homomorfismo injetivo $\lambda : C^*(G) \longrightarrow B(L^2(G))$; lembrar também que a C^* -álgebra reduzida do grupo G é definida precisamente como $C_r^*(G) := \lambda(C^*(G)) \subseteq B(L^2(G))$. Portanto, G é amenable exatamente quando $\lambda : C^*(G) \longrightarrow C_r^*(G)$ é um isomorfismo. Entre os exemplos de grupos amenable estão todos os grupos abelianos e os grupos compactos. Entre os grupos discretos, a classe de grupos amenable é fechada por subgrupos, quocientes, extensões e limites indutivos. Exemplos de grupos que não são amenable são os grupos livres em dois ou mais geradores. A seguinte definição generaliza esta noção a fibrados de Fell.

DEFINIÇÃO 3.7. A representação regular Λ induz uma representação, também chamada regular e denotada por Λ , de $C^*(\mathcal{B})$. Quando

$$\Lambda : C^*(\mathcal{B}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{B})$$

é um isomorfismo, dizemos que $\mathcal{B}$ é “amenable”.

Encerrando esta seção, mostramos que se $\mathcal{A}$ é um subfibrado de Fell do fibrado $\mathcal{B}$, então $C_r^*(\mathcal{A})$ é uma sub- C^* -álgebra de $C_r^*(\mathcal{B})$.

DEFINIÇÃO 3.8. Se $\mathcal{B} = (B_x)_{x \in X}$ é um fibrado de Banach sobre o espaço topológico de Hausdorff X , dizemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ é um subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$ se $\mathcal{A}$ é fechado pelas operações de $\mathcal{B}$, e a projeção p de $\mathcal{B}$ restrita a $\mathcal{A}$ é aberta, ou seja, para todo aberto $U \subseteq \mathcal{B}$, $p(U \cap \mathcal{A})$ é um aberto de X . Um subfibrado de Fell $\mathcal{A}$ de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre o grupo localmente compacto G é um subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$ que também é fechado sob as operações de produto e involução. Um subfibrado de Banach $\mathcal{A}$ de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ é chamado ideal à direita se $\mathcal{AB} \subseteq \mathcal{A}$, e à esquerda se $\mathcal{BA} \subseteq \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é ideal à esquerda e à direita de $\mathcal{B}$, diremos que ele é um ideal bilateral, ou simplesmente um ideal de $\mathcal{B}$, e indicaremos esta relação por $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}$.

OBSERVAÇÃO 3.9. É imediato verificar que se $\mathcal{A}$ é um subfibrado de Banach (de Fell) de $\mathcal{B}$, então ele é um fibrado de Banach (respectivamente: de Fell) sobre $p(\mathcal{A})$, que é um subespaço aberto de X .

(respectivamente: um subgrupo aberto de G). No caso em que $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell sobre G , a medida de Haar sobre $p(\mathcal{A})$ é a restrição a $p(\mathcal{A})$ da medida de Haar de G . Assim, temos uma inclusão natural $L^1(\mathcal{A}) \hookrightarrow L^1(\mathcal{B})$.

PROPOSIÇÃO 3.10. *Se $\mathcal{A}$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, então $C_r^*(\mathcal{A}) \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ uma representação de $\mathcal{B}$ sobre o espaço de Hilbert H , tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel. Então $\rho := \pi|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow B(H)$ é uma representação de $\mathcal{A}$, tal que $\rho|_{A_e}$ é fiel. Seja $\pi_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow B(L^2(G) \otimes H)$ tal que $\pi_\lambda(b_t) = \lambda_t \otimes \pi(b_t)$, onde $\lambda : G \rightarrow B(L^2(G))$ é a representação regular à esquerda de G , ou seja: $\forall \xi \in L^2(G), \lambda_t(\xi)|_s = \xi(t^{-1}s)$. Da mesma forma, definamos $\rho_\lambda : \mathcal{A} \rightarrow B(L^2(G) \otimes H)$. É claro que $\rho_\lambda = \pi_\lambda|_{\mathcal{A}}$. Integrando π_λ e ρ_λ , obtemos representações de $C^*(\mathcal{B})$ e $C^*(\mathcal{A})$, que também chamamos π_λ e ρ_λ respectivamente, e é claro de novo que $\rho_\lambda|_{L^1(\mathcal{A})}$ coincide com $\pi_\lambda|_{L^1(\mathcal{A})}$. Agora, por 3.6 de [30], temos que π_λ se fatora através de um isomorfismo $\tilde{\pi}_\lambda : C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow \pi_\lambda(C_r^*(\mathcal{B}))$, e ρ_λ através de um isomorfismo $\tilde{\rho}_\lambda : C_r^*(\mathcal{A}) \rightarrow \rho_\lambda(L^1(\mathcal{A})) \cong C_r^*(\mathcal{A})$. Portanto, $\tilde{\pi}_\lambda^{-1} \tilde{\rho}_\lambda : C_r^*(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_\lambda(C_r^*(\mathcal{A})) \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$ é um isomorfismo. Assim, concluímos que $C_r^*(\mathcal{A})$ se identifica naturalmente com $C_r^*(\mathcal{A})$ dentro de $C_r^*(\mathcal{B})$. $\square$

OBSERVAÇÃO 3.11. No caso em que o grupo G seja discreto, há uma demonstração bem mais direta da Proposição 3.10, que comentaremos a seguir.

Se A e B são $*$ -álgebras, e A é um B -módulo à direita, dizemos que $E : A \rightarrow B$ é uma $(A - B)$ -esperança condicional, se E é um homomorfismo de B -módulos à direita que preserva a involução, i.e.:

- $E(ab) = E(a)b, \forall a \in A, b \in B$.
- $E(a^*) = E(a)^*, \forall a \in A$.

Por [28], existe uma esperança condicional fiel $E_B : C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow B_e$, ou seja, $E(a^*a) = 0 \iff a = 0$. Suponhamos que B é uma C^* -álgebra, G é um grupo discreto, e que $(B_t)_{t \in G}$ é uma *gradação* de B , isto é ([28], 3.1):

- Os B_t são uma coleção linearmente independente de subespaços de Banach de B , e tais que $B = \bigoplus_{t \in G} B_t$.
- $B_t^* = B_{t^{-1}}, \forall t \in G$.
- $B_s B_t \subseteq B_{st}, \forall s, t \in G$.

A graduação é chamada *topológica* se existe uma esperança condicional $F : B \rightarrow B_e$ tal que $F|_{B_e} = id_{B_e}$, $F|_{B_t} = 0, \forall t \neq e$.

A coleção (B_t) define naturalmente um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre G . Por [37], VIII-16.11, existe um epimorfismo natural $C^*(\mathcal{B}) \rightarrow B$ e, se a graduação for topológica, existe um outro epimorfismo $B \rightarrow C_r^*(\mathcal{B})$; este epimorfismo é um isomorfismo exatamente quando a esperança condicional F é fiel, o que permite caracterizar facilmente a C^* -álgebra reduzida de um fibrado de Fell entre as C^* -álgebras que têm uma graduação topológica dada pelas fibras do fibrado e certa esperança condicional.

Voltando à Proposição 3.10, $C_r^*(\mathcal{B})$ possui uma esperança condicional fiel $E : C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow B_e$. Se A é o fecho de $L^1(\mathcal{A})$ em $C_r^*(\mathcal{B})$, e $F = E|_A$, então o par $((A_t)_{t \in G}, F)$ é uma graduação topológica de A e F é fiel, donde concluímos que $A \cong C_r^*(\mathcal{A})$ naturalmente.

DEFINIÇÃO 3.12. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ fibrados de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e seja $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, tal que $\phi : \mathcal{A}_d \rightarrow \mathcal{B}_d$ é um homomorfismo de fibrados de Fell sobre grupos discretos (ver Definição 2.5). Se ϕ é contínua, dizemos que ϕ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

OBSERVAÇÃO 3.13. Suponhamos que $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de fibrados de Fell. Então, se $f \in L^1(\mathcal{A})$, temos que $\phi^1(f) : G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\phi^1(f)(t) = \phi(f(t))$ está em $L^1(\mathcal{B})$, e $\|\phi^1(f)\|_1 \leq \|f\|_1$. Por outro lado, é imediato que ϕ^1 é um homomorfismo de $*$ -álgebras, e portanto se estende de forma única a um homomorfismo $C^*(\phi) : C^*(\mathcal{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{B})$. Assim, obtemos um funtor da categoria dos fibrados de Fell sobre G na categoria das C^* -álgebras; de fato, este funtor é a composição do funtor $\mathcal{A} \mapsto L^1(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}) \mapsto (L^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi^1} L^1(\mathcal{B}))$, na categoria de C^* -álgebras, com o funtor: $\mathcal{A} \mapsto L^1(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}) \mapsto (L^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi^1} L^1(\mathcal{B}))$.

3.2. C^* -álgebras seccionais de produtos tensoriais de fibrados de Fell

O objetivo desta seção é de comparar os produtos tensoriais de C^* -álgebras associadas a fibrados de Fell com as C^* -álgebras associadas aos produtos tensoriais dos fibrados de Fell. O principal resultado é o Teorema 3.21. Começamos com uma ligeira generalização de [37], II-14.6:

LEMA 3.14. Sejam $\mathcal{B}$ um fibrado de Banach sobre o espaço topológico X , e $F \subseteq C_c(\mathcal{B})$ um subespaço vetorial de $C_c(\mathcal{B})$ tal que existe um subespaço vetorial $\Theta \subseteq C_c(X)$, denso na topologia do limite indutivo, e tal que:

1. $\forall f \in F, \theta \in \Theta$, tem-se que $\theta f \in F$.
2. $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ é denso em B_x , $\forall x \in X$.

Então F é denso em $C_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo (II-14.6 de [37] tem exatamente o mesmo enunciado, exceto que Θ é o espaço vetorial de todas as funções complexas contínuas sobre X).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\overline{F}$ o fecho de F em $C_c(\mathcal{B})$ com respeito à topologia do limite indutivo. Queremos provar que $\overline{F} = C_c(\mathcal{B})$, e portanto basta mostrar que $\overline{F}$ é denso em $C_c(\mathcal{B})$. Para isto usamos [37], II-14.6. Em primeiro lugar: $B_x = \overline{F(x)} \subseteq \overline{F}(x)$, donde segue que $\overline{F}(x)$ é denso em B_x , $\forall x \in X$. Só resta provar que $\forall g \in \Theta$ e $\forall \theta : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, tem-se que $\theta g \in \overline{F}$. Podemos supor $\theta \in C_c(X)$ (porque $g \in C_c(\mathcal{B})$), e também que $\theta \neq 0$, $g \neq 0$. Agora, dado $\epsilon > 0$, sejam $f \in F$ tal que $f \neq 0$ e $\|f - g\|_\infty < \epsilon/2\|\theta\|_\infty$, e $\phi \in \Theta$ tal que $\|\theta - \phi\|_\infty < \epsilon/2\|f\|_\infty$. Então:

$$\|\phi f - \theta g\|_\infty \leq \|(\phi - \theta)f\|_\infty + \|\theta(f - g)\|_\infty \leq \|\phi - \theta\|_\infty \|f\|_\infty + \|\theta\|_\infty \|f - g\|_\infty < \epsilon$$

Portanto, como $\phi f \in F$, temos que $\theta g \in \overline{F}$. □

LEMA 3.15. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell, $D = C_c(\mathcal{A}) \odot C_c(\mathcal{B})$, e suponhamos que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é um produto tensorial de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Então existe um único homomorfismo injetivo de álgebras $j' : D \rightarrow C_c(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, tal que $j'(f \odot g) = f \otimes g$, ou seja: $j'(f \odot g)|_{(t,s)} = f(t) \otimes g(s)$, $\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, $t \in G$, e $s \in H$. Além disso, $j'(D)$ é denso em $C_c(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo.

DEMONSTRAÇÃO. Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única transformação linear $j' : C_c(\mathcal{A}) \odot C_c(\mathcal{B}) \rightarrow C_c(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ tal que $j'(f \odot g)(t, s) = f(t) \otimes g(s)$. j' é um

homomorfismo de $*$ -álgebras, como se verifica facilmente. Além disto, ele é injetivo: suponhamos que $l = \sum_{i=1}^n f_i \odot g_i$ é tal que $j'(l) = 0$. Então $\langle j'(l), j'(l) \rangle = 0$, ou seja:

$$\int_{G \times H} \sum_{i,j=1}^n f_i(t)^* f_j(t) \odot g_i(s)^* g_j(s) d(t, s) = 0.$$

Mas

$$\int_{G \times H} \sum_{i,j=1}^n f_i(t)^* f_j(t) \odot g_i(s)^* g_j(s) d(t, s) = \left(\int_G \sum_{i,j=1}^n f_i(t)^* f_j(t) dt \right) \odot \left(\int_H \sum_{i,j=1}^n g_i(s)^* g_j(s) ds \right),$$

e portanto $\langle j'(l), j'(l) \rangle = \langle l, l \rangle$, onde l está sendo visto como elemento de $L^2(\mathcal{A}) \odot L^2(\mathcal{B})$, e o produto interno $\langle l, l \rangle$ toma valores sobre $A_\ell \odot B_\ell$. Como $\langle l, l \rangle = 0$, tem-se que $l = 0$.

Para ver que $j'(D)$ é denso em $C_c(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo, usamos o Lema 3.14 acima. É claro que $j'(D)(t, s)$ é denso em $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{(t,s)}$, $\forall (t, s) \in G \times H$; por outro lado, se $\Theta = C_c(G) \odot C_c(H)$, sejam $\theta \in \Theta$, e $l \in D$, digamos $\theta = \sum_i \phi_i \odot \psi_i$, $l = \sum_j f_j \odot g_j$. Então:

$$\theta j'(l)|_{(t,s)} = \left(\sum_i \phi_i(t) \psi_i(s) \right) \left(\sum_j f_j(t) \odot g_j(s) \right) = \sum_i \sum_j (\phi_i f_j)(t) \odot (\psi_i g_j)(s) = j'(l')(t, s),$$

onde $l' = \sum_i \sum_j \phi_i f_j \odot \psi_i g_j \in D$. Assim, concluímos que $j'(D)$ é denso em $C_c(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.16. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell. Então existe um único isomorfismo $j : C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$, tal que $j(f \odot g)|_{(t,s)} = f(t) \odot g(s)$, $\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, e $(t, s) \in G \times H$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se H é um espaço de Hilbert e $\mathcal{C} = (C_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell, então existe uma bijeção $R(\mathcal{C}, \mathcal{H})$ e $R(C^*(\mathcal{C}), \mathcal{H})$ (notação introduzida na página 41), que a cada $\pi \in R(\mathcal{C}, \mathcal{H})$ associa a representação integrada $\int_G \pi$ de $C^*(\mathcal{C})$, determinada pelos seus valores em $C_c(\mathcal{C})$: se $f \in C_c(\mathcal{C})$ e $h \in \mathcal{H}$, então $(\int_G \pi) f|_h = \int_G \pi(f(t)) h dt$ (ver [37], VIII-17.3, e a introdução ao presente capítulo). Notar também que se $\mathcal{C}' = (C'_s)_{s \in H}$ é um outro fibrado de Fell, então $R(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{H}) \rightarrow R(C^*(\mathcal{C}), C^*(\mathcal{C}'), \mathcal{H})$ tal que $(\pi, \pi') \mapsto (\int_G \pi, \int_H \pi')$ também é uma bijeção, pois os correspondentes integrandos comutam.

Por outro lado, lembremos que, pela Proposição 2.25, temos uma bijeção entre $R(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{H})$ e $R(\mathcal{C} \otimes_{\max} \mathcal{C}', \mathcal{H})$, dada por $(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi_1 \times \pi_2$, onde $(\pi_1 \times \pi_2)(a \odot b) = \pi_1(a) \pi_2(b)$ (em particular, isto é válido quando G e H são o grupo trivial, e então a correspondência acima vira uma correspondência entre representações de C^* -álgebras).

Sejam D e $j' : D \rightarrow C_c(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$ como no Lema 3.15. Os comentários acima implicam que $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B})$ é um completamento de D com respeito à norma:

$$\left\| \sum_i f_i \odot g_i \right\| = \sup \left\{ \left\| \sum_i \int_G \pi_1(f_i) \int_H \pi_2(g_i) \right\| : (\pi_1, \pi_2) \in R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H}) \right\},$$

e $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$ é o completamento de $j(D)$ com respeito à norma:

$$\left\| j' \left(\sum_i f_i \odot g_i \right) \right\| = \sup \left\{ \left\| \int_{G \times H} (\pi_1 \times \pi_2) \left(\sum_i f_i \odot g_i \right) \right\| : (\pi_1, \pi_2) \in R(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H}) \right\}.$$

Agora, se $h \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{G \times H} (\pi_1 \times \pi_2) \left(\sum_i f_i \odot g_i \right) \right) h &= \int_{G \times H} \sum_i \pi_1(f_i(t)) \pi_2(g_i(s)) h d(t, s) \\
 &= \sum_i \int_G \int_H \pi_1(f_i(t)) \pi_2(g_i(s)) h ds dt \\
 &= \sum_i \int_G \pi_1(f_i(t)) \int_H \pi_2(g_i(s)) h ds dt \\
 &= \sum_i \int_G \pi_1(f_i(t)) \left(\int_H \pi_2(g_i) \right) h dt \\
 &= \sum_i \left(\int_G \pi_1(f_i) \int_H \pi_2(g_i) \right) h,
 \end{aligned}$$

o que mostra que $j' : D \rightarrow j'(D)$ é uma isometria com estas normas, e portanto, como D é denso em $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B})$, j' tem uma única extensão a um homomorfismo $j : C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$, que é um isomorfismo porque $j'(D)$ é denso em $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$, já que, por 3.15, é denso em $C_c(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo, e portanto em $L^1(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.17. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell, e suponhamos que $\alpha \geq \beta$ são C^* -normas sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Então existe um único homomorfismo*

$$\sigma_{\beta}^{\alpha} : C^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathcal{A} \otimes_{\beta} \mathcal{B}),$$

tal que $\sigma_{\beta}^{\alpha}(f \odot g) = f \odot g$, $\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$. Além disso, σ_{β}^{α} é sobrejetivo.

DEMONSTRAÇÃO. Por 2.20 existe $\sigma_{\beta}^{\alpha} : \mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\beta} \mathcal{B}$, homomorfismo sobrejetivo de fibrados de Fell. Agora, por 3.13, σ_{β}^{α} induz um homomorfismo $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) \rightarrow C^*(\mathcal{A} \otimes_{\beta} \mathcal{B})$, que continuamos chamando σ_{β}^{α} . Se $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, $\sigma_{\beta}^{\alpha}(f \odot g)|_{(t,s)} = \sigma_{\beta}^{\alpha}(f(t) \odot g(s)) = f(t) \odot g(s) = f \odot g(t, s)$, donde segue que $\sigma_{\beta}^{\alpha}(f \odot g) = f \odot g$. Como $\text{span}\{f \odot g : f \in C_c(\mathcal{A}), g \in C_c(\mathcal{B})\}$ é denso em $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})$, vemos que σ_{β}^{α} é único. $\square$

Para o próximo resultado, notar que $L^2(\mathcal{A})$ e $L^2(\mathcal{B})$ são módulos de Hilbert plenos sobre A_e e B_e respectivamente, e portanto, se α é uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, existe uma única C^* -norma sobre $L^2(\mathcal{A}) \odot L^2(\mathcal{B})$, que também chamamos α , tal que o completamento $L^2(\mathcal{A}) \otimes_{\alpha} L^2(\mathcal{B})$ de $L^2(\mathcal{A}) \odot L^2(\mathcal{B})$ com respeito a esta norma é um módulo de Hilbert pleno sobre $A_e \otimes_{\alpha} B_e$, de forma que $\forall \xi_1, \xi_2 \in L^2(\mathcal{A})$, $\eta_1, \eta_2 \in L^2(\mathcal{B})$ seja (ver 1.44):

$$\langle \xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \odot \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

LEMA 3.18. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell, e α uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Então existe um único isomorfismo*

$$j_2 : L^2(\mathcal{A}) \otimes_{\alpha} L^2(\mathcal{B}) \rightarrow L^2(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}),$$

tal que $j_2(\xi \odot \eta) = \xi \odot \eta$, $\forall \xi \in C_c(\mathcal{A}) \subseteq L^2(\mathcal{A})$, $\eta \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja j' a aplicação definida no Lema 3.15. Se $\xi_1, \xi_2 \in C_c(\mathcal{A})$, $\eta_1, \eta_2 \in C_c(\mathcal{B})$, $j'(\xi_1 \odot \eta_1), j'(\xi_2 \odot \eta_2) \in C_c(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle j'(\xi_1 \odot \eta_1), j'(\xi_2 \odot \eta_2) \rangle &= \int_{G \times H} (\xi_1 \odot \eta_1)(t, s)^* (\xi_2 \odot \eta_2)(t, s) d(t, s) \\ &= \int_G \int_H \xi_1(t)^* \xi_2(t) \otimes \eta_1(s)^* \eta_2(s) ds dt \\ &= \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \otimes \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \end{aligned}$$

Por outro lado, se $a \in A_\epsilon$, $b \in B_\epsilon$, $\xi \in C_c(\mathcal{A})$, e $\eta \in C_c(\mathcal{B})$:

$$(j'(\xi \odot \eta))(a \odot b)|_{(t,s)} = (\xi(t) \odot \eta(s))(a \odot b) = \xi(t)a \odot \eta(s)b = j'((\xi \odot \eta)(a \odot b))|_{(t,s)}.$$

Portanto, j' é um homomorfismo de pré-módulos de Hilbert sobre $A_\epsilon \otimes_\alpha B_\epsilon$, que é injetivo (3.15) e de imagem densa em $L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$: por 3.15, a imagem de j' é densa na topologia do limite indutivo de $C_c(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$, e portanto denso em $L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$. Logo, j' se estende de forma única a um isomorfismo $j_2 : L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}) \longrightarrow L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$. $\square$

Seja α uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Como temos inclusões $C_r^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}))$ e $C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$, então $C_r^*(\mathcal{A}) \odot C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A})) \odot \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$. Pela Proposição 1.54, temos uma inclusão $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A})) \odot \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B})) \hookrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}))$, e portanto temos uma inclusão:

$$C_r^*(\mathcal{A}) \odot C_r^*(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B})).$$

DEFINIÇÃO 3.19. Se α é uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, definimos $C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B})$ como sendo o fecho de $C_r^*(\mathcal{A}) \odot C_r^*(\mathcal{B})$ dentro de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}))$ segundo a inclusão acima.

PROPOSIÇÃO 3.20. Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e seja $j_2 : L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}) \longrightarrow L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$ o isomorfismo de 3.18. Então $Ad(j_2)(C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B})) = C_r^*(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$, ou seja: se $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}))$, então $T \in C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B})$ se e somente se $j_2 T j_2^* \in C_r^*(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$. Assim, obtemos um isomorfismo

$$j_r : C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}),$$

único tal que

$$(5) \quad j_r(\Lambda_{\mathcal{A}}(f) \odot \Lambda_{\mathcal{B}}(g)) = \Lambda_{\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}}(f \odot g),$$

$\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$.

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade de j_r é clara, pois está determinada sobre um conjunto denso pela equação (5). Temos que provar que j_r existe. Em lugar de $\Lambda_{\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}}$ escreveremos simplesmente Λ . Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única transformação $\Lambda_{\mathcal{A}} \odot \Lambda_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}))$ tal que $(\Lambda_{\mathcal{A}} \odot \Lambda_{\mathcal{B}})(a \odot b) = \Lambda_{\mathcal{A}}(a) \odot \Lambda_{\mathcal{B}}(b)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Por 3.18 temos um isomorfismo $j_2 : L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B}) \longrightarrow L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$, único tal que $j_2(\xi \odot \eta) = \xi \odot \eta$. $\forall \xi \in C_c(\mathcal{A}) \subseteq L^2(\mathcal{A})$, $\eta \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$. Assim, j_2 induz um isomorfismo

$$Ad(j_2) : \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}) \otimes_\alpha L^2(\mathcal{B})) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})),$$

dados por $T \mapsto j_2 T j_2^*$. Em particular, se $T = \Lambda(a_t \otimes b_s)$, temos:

$$\begin{aligned} \Lambda(a_t \otimes b_s)(j_2(\xi \otimes \eta))|_{(t_0, s_0)} &= (a_t \otimes b_s)(\xi \otimes \eta)((t, s)^{-1}(t_0, s_0)) \\ &= a_t \xi(t^{-1}t_0) \otimes b_s \eta(s^{-1}s_0) \\ &= (\Lambda_{\mathcal{A}}(a_t)\xi)(t_0) \otimes (\Lambda_{\mathcal{B}}(b_s)\eta)(s_0) \\ &= (\Lambda_{\mathcal{A}}(a_t)\xi \otimes \Lambda_{\mathcal{B}}(b_s)\eta)(t_0, s_0) \\ &= j_2(\Lambda_{\mathcal{A}}(a_t)\xi \otimes \Lambda_{\mathcal{B}}(b_s)\eta)(t_0, s_0) \\ &= j_2((\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes \Lambda_{\mathcal{B}})(a_t \otimes b_s)(\xi \otimes \eta))|_{(t_0, s_0)}, \end{aligned}$$

donde segue que $\Lambda(x) = j_2(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes \Lambda_{\mathcal{B}})(x)j_2^*$, $\forall x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, e também que $\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes \Lambda_{\mathcal{B}}$ se estende a todo $\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$. Depois de integrar as representações, segue que também é $\Lambda(f \otimes g) = j_2(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes \Lambda_{\mathcal{B}})(f \otimes g)j_2^*$, $\forall f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$.

Finalmente, como $j'(D) = \text{span}\{f \otimes g : f \in C_c(\mathcal{A}), g \in C_c(\mathcal{B})\}$ é denso em $C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})$, concluímos que $C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) = j_2(C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B}))j_2^*$, como queríamos demonstrar.

Em particular, $j_r : C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B})$ tal que $x \mapsto j_2 x j_2^*$ é um isomorfismo que satisfaz a equação (5). $\square$

TEOREMA 3.21. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H . Então, para toda C^* -norma α sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} D_{\alpha} : & C^*(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}) & \xrightarrow{\sigma_{\alpha}^{\text{máx}}} & C^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) & \xrightarrow{\Lambda} & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}) \\ & \uparrow j \cong & & & & \uparrow \cong j_r \\ & C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}}} & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C_r^*(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{\alpha}^{\text{máx}}} & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\tilde{\alpha}} C_r^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

onde $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\alpha} \Lambda_{\mathcal{B}}$, $\sigma_{\alpha}^{\text{máx}}$ e $\tilde{\sigma}_{\alpha}^{\text{máx}}$ são fornecidos por 3.17, j por 3.16, j_r por 3.20, e $\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}}$ é o produto tensorial das representações regulares de $C^*(\mathcal{A})$ e $C^*(\mathcal{B})$ respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$. Então:

$$\begin{aligned} \Lambda \sigma_{\alpha}^{\text{máx}} j(f \otimes g) &= \Lambda \sigma_{\alpha}^{\text{máx}}(f \otimes g) && \text{por 3.16} \\ &= \Lambda(f \otimes g) && \text{por 3.15} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} j_r \tilde{\sigma}_{\alpha}^{\text{máx}}(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}})(f \otimes g) &= j_r \tilde{\sigma}_{\alpha}^{\text{máx}}(\Lambda_{\mathcal{A}}(f) \otimes \Lambda_{\mathcal{B}}(g)) \\ &= j_r(\Lambda_{\mathcal{A}}(f) \otimes \Lambda_{\mathcal{B}}(g)) && \text{por 3.15} \\ &= \Lambda(f \otimes g) && \text{por 3.20} \end{aligned}$$

Como $C_c(\mathcal{A}) \otimes C_c(\mathcal{B})$ é denso em $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B})$, concluímos que

$$\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\alpha} \Lambda_{\mathcal{B}} \sigma_{\alpha}^{\text{máx}} j(x) = j_r \tilde{\sigma}_{\alpha}^{\text{máx}}(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}})(x), \quad \forall x \in C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B}),$$

e portanto o diagrama comuta. $\square$

COROLÁRIO 3.22. *O fibrado de Fell $\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}$ é amenable se e somente se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ são fibrados de Fell amenable. e $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B}) = C^*(\mathcal{A}) \widetilde{\otimes}_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para $\alpha = \text{máx}$, o correspondente diagrama $D_{\text{máx}}$ fica:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}) & \xrightarrow{\Lambda} & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}) \\ \uparrow j \cong & & \uparrow \cong j_r \\ C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C^*(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}})} & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\text{máx}} C_r^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

Assim, Λ é um isomorfismo se e somente se $\tilde{\sigma}(\Lambda_{\mathcal{A}} \otimes_{\text{máx}} \Lambda_{\mathcal{B}})$ também é, ou seja, $C^*(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\text{máx}} \mathcal{B})$ se e só se $C^*(\mathcal{A}) = C_r^*(\mathcal{A})$, $C^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$, e $\|\cdot\|_{\text{máx}} = \|\cdot\|_{\text{máx}}^{\sim}$. $\square$

3.3. Algumas aplicações

Nesta seção estudaremos algumas conexões entre a amenabilidade de fibrados de Fell e produtos tensoriais de fibrados de Fell. Daremos duas versões da propriedade de aproximação para fibrados de Fell sobre grupos localmente compactos que generalizam, ambas, a definição de Exel em [28]. Uma delas, a propriedade de aproximação em L^1 , implica que o fibrado que a possui é amenable. A demonstração deste fato é exatamente igual à original para grupos discretos ([28], 4.6), válida no contexto contínuo pelo recente resultado em [30] que permite construir uma imagem isomorfa de $C_r^*(\mathcal{B})$ a partir de qualquer representação de $\mathcal{B}$ que seja fiel quando restrita à fibra sobre a unidade. Veremos que estas propriedades de aproximação são preservadas por produtos tensoriais, e deste fato obteremos as nossas principais aplicações: (a) se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e com fibra nuclear, então $C^*(\mathcal{B})$ é nuclear (3.29). (b) se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e com fibra exata, então $C^*(\mathcal{B})$ é exata (3.35). Veremos também que todo fibrado de Fell sobre um grupo amenable tem a propriedade de aproximação em L^1 , e em particular é amenable.

Em [28], 4.4, Exel introduziu a noção de fibrado de Fell com a *propriedade de aproximação*: um fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ sobre um grupo discreto G tem a propriedade de aproximação se existe uma rede $(\phi_i)_{i \in I}$ de funções de suporte finito $\phi_i : G \rightarrow B_e$ tal que:

1. A rede está limitada, no sentido de que: $\sup_{i \in I} \|\sum_{t \in G} \phi_i(t)^* \phi_i(t)\| = M < \infty$.
2. Para cada $t \in G$ e $b_t \in B_t$ tem-se: $\lim_i \sum_{r \in G} \phi_i(tr)^* b_t \phi_i(r) = b_t$.

A relevância deste conceito está no fato de que um fibrado de Fell sobre um grupo discreto com a propriedade de aproximação é necessariamente amenable, ou seja, a C^* -álgebra do fibrado coincide com a C^* -álgebra reduzida do fibrado ([28], 4.6). Posteriormente, Ng sugeriu uma definição de propriedade de aproximação para o caso de um fibrado sobre um grupo localmente compacto qualquer, parecida com a de Exel, embora não mais geral, e provou que, se o fibrado tem esta propriedade de aproximação e satisfaz a condição de ser “próprio”, então ele é amenable ([50]). Recentemente, Exel provou que todo fibrado de Fell é próprio ([30]), razão pela qual a hipótese adicional do fibrado de Fell ser próprio colocada por Ng virou supérflua. Por outro lado, não conhecemos nenhum exemplo não trivial de um fibrado de Fell que satisfaça a propriedade de aproximação introduzida em [50]. Ng afirma que se o fibrado de Fell é sobre um grupo amenable, então ele satisfaz automaticamente sua propriedade de aproximação. Porém, nós achamos que a demonstração deste fato providenciada por Ng é, no mínimo, incompleta. Por esta razão, não tentaremos usar os resultados de [50] para generalizar os nossos ao caso contínuo. Em lugar disso, consideraremos uma outra propriedade de aproximação no caso contínuo, na verdade duas, que generalizam quase diretamente a definição de Exel, mas que tomam também um elemento da definição de Ng, no sentido de permitir duas redes

em lugar da única rede (ϕ_i) considerada acima. Também admitimos que as redes envolvidas tomem valores na álgebra $M(B_\epsilon)$ dos multiplicadores de B_ϵ ¹

Parte da terminologia (M -propriedade de aproximação, propriedade de aproximação positiva) é tomada da definição de Ng:

DEFINIÇÃO 3.23. Seja $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G .

1. Dizemos que $\mathcal{B}$ tem a M -propriedade de aproximação (enumerável) se existem redes (respectivamente: seqüências), $(\phi_i), (\psi_i) \subseteq C_c(G, M(B_\epsilon)) \subseteq L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$ tais que:
 - (a) $\sup_i \{\|\phi_i\|, \|\psi_i\|\} \leq M$ (a norma é como elementos de $L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$).
 - (b) Se $\Phi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ está definido como: $\Phi_i(b_t) = \int_G \phi_i(s)^* b_t \psi_i(t^{-1}s) ds$, então $\Phi_i(b_t) \rightarrow b_t$, $\forall b_t \in \mathcal{B}$. Diremos que (ϕ_i) e (ψ_i) são redes aproximantes para $\mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação (enumerável) se tem a M -propriedade de aproximação (enumerável) para algum $M > 0$.
3. Se em (a) podemos escolher $\phi_i = \psi_i$, dizemos que $\mathcal{B}$ tem a M -propriedade de aproximação positiva, ou a propriedade de aproximação positiva.
4. Dizemos que $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 se tem a propriedade de aproximação com redes aproximantes tais que, para toda função $f \in C_c(B)$, tem-se que as funções $\Phi_i(f)$ definidas como $\Phi_i(f)|_t = \Phi_i(f(t))$ convergem a f em $L^1(\mathcal{B})$.

OBSERVAÇÃO 3.24. Notar que $L^2(G)$ é um C^* -anel ternário nuclear, pois é um espaço de Hilbert, de forma que o produto tensorial $L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$ é único. Por outro lado, $L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$ se identifica naturalmente com $L^2(G, M(B_\epsilon))$, o completamento de $C_c(G, M(B_\epsilon))$ com respeito ao produto interno: $\langle f, g \rangle = \int_G f(t)^* g(t) dt$, ou seja, $L^2(G, M(B_\epsilon)) = L^2(M(B_\epsilon) \times G)$ (ver 2.14).

Como vimos no Capítulo 2 (página 42), cada multiplicador de B_ϵ define um multiplicador de $\mathcal{B}$ de ordem ϵ , e portanto a fórmula que define $\Phi(b_t)$ faz sentido, e tem-se que $\Phi(b_t) \in B_t$, $\forall b_t$. Com respeito a 4., observar que, pelo Lema 2.23, o integrando na integral que define $\Phi(f)$ é uma função contínua de suporte compacto, e portanto está nas condições de [37], II-15.19, o que implica que $\Phi(f) \in C_c(\mathcal{B})$.

Notar, por último, que no caso de ser G um grupo discreto, as duas propriedades de aproximação são equivalentes, ou seja, a propriedade de aproximação implica a propriedade de aproximação em L^1 . Veremos em 3.26 outros casos em que ambas propriedades são equivalentes.

O seguinte resultado é uma generalização direta de [28], 4.3, ao caso contínuo.

TEOREMA 3.25. Se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 , então $\mathcal{B}$ é amenable.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ é uma representação não degenerada tal que $\pi|_{B_\epsilon}$ é fiel. Também chamamos π à representação integrada de π , e a sua única extensão a $M(\mathcal{B})$ (ver página 42). Como $\pi|_{B_\epsilon}$ é fiel, $\pi|_{M(B_\epsilon)}$ também é fiel. Dado $\phi \in C_c(G, M(B_\epsilon)) \subseteq L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$,

¹ Este fato, que sugere maior flexibilidade para um fibrado de Fell ter a propriedade de aproximação, na verdade não modifica nada substancialmente: basta multiplicar à direita cada elemento da rede por uma unidade aproximada de B_ϵ ; contudo, no caso de um fibrado de Fell sobre um grupo amenable achamos uma rede aproximante (ver Definição 3.23) que toma valores no centro de $M(B_\epsilon)$, o que talvez tenha relação com a propriedade de aproximação de Anantharaman-Delaroche

consideremos o operador $V_\phi : H \longrightarrow L^2(G) \otimes H$ tal que $V_\phi h|_t = \pi(\phi(t))h$. Temos então:

$$\begin{aligned}
 \|V_\phi\|^2 &= \sup_{\|h\|=1} \int_G \langle \pi(\phi(t))h, \pi(\phi(t))h \rangle dt \\
 &= \sup_{\|h\|=1} \int_G \langle \pi(\phi(t)^* \phi(t))h, h \rangle dt \\
 &= \sup_{\|h\|=1} \left\langle \int_G \pi(\phi(t)^* \phi(t)) dt h, h \right\rangle \\
 &= \sup_{\|h\|=1} \langle \pi(\langle \phi, \phi \rangle) h, h \rangle \\
 &= \|\pi(\langle \phi, \phi \rangle)\| \quad \text{porque } \pi(\langle \phi, \phi \rangle) \text{ é positivo} \\
 &= \|\langle \phi, \phi \rangle\| \quad \text{porque } \pi|_{M(B_e)} \text{ é fiel} \\
 &= \|\phi\|^2
 \end{aligned}$$

Calculemos V_ϕ^* : se $h \in H$, $\xi \in L^2(G)$, então

$$\langle V_\phi h, \xi \rangle = \int_G \langle \pi(\phi(t))h, \xi(t) \rangle dt = \int_G \langle h, \pi(\phi(t)^* \xi(t)) \rangle dt = \langle h, \int_G \pi(\phi(t)^* \xi(t)) dt \rangle,$$

donde concluímos que $V_\phi^*(\xi) = \int_G \pi(\phi(t)^* \xi(t)) dt$. Notar que se $\psi \in C_c(G, M(B_e))$, então $V_\phi^* V_\psi h = \int_G \pi(\phi(t)^* V_\psi h|_t) dt = \int_G \pi(\phi(t)^* \pi(\psi(t))h) dt = \pi(\langle \phi, \psi \rangle)h$. Além disso, se $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C_c(G, M(B_e))$, $h \in H$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 V_{\phi_1(\phi_2, \phi_3)} h|_t &= \pi(\phi_1(t)(\phi_2, \phi_3))h \\
 &= \pi(\phi_1(t))\pi(\langle \phi_2, \phi_3 \rangle)h \\
 &= V_{\phi_1} V_{\phi_2}^* V_{\phi_3} h|_t
 \end{aligned}$$

Portanto, como $\phi \mapsto V_\phi$ é uma isometria sobre o subespaço denso $C_c(G, M(B_e))$, então se estende a uma aplicação $\pi_2 : L^2(G) \otimes M(B_e) \longrightarrow \pi_2(L^2(G) \otimes M(B_e)) \subseteq B(H, L^2(G) \otimes H)$, que é um isomorfismo de C^* -anéis ternários positivos².

Consideremos agora a representação $\pi_\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow B(L^2(G) \otimes H)$, tal que $\pi_\lambda(b_t) = \lambda_t \otimes \pi(b_t)$ e sua representação integrada, que continuaremos chamando $\pi_\lambda : C^*(\mathcal{B}) \longrightarrow B(L^2(G) \otimes H)$ (ver 3.6). Definamos, para $\phi, \psi \in L^2(G) \otimes M(B_e)$, a aplicação completamente limitada $\Psi : \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B})) \longrightarrow B(H)$ tal que $\Psi(x) = V_\phi^* x V_\psi$, $\forall x \in \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B}))$. Temos então que $\|\Psi(x)\| \leq \|\phi\| \|\psi\| \|x\|$, e portanto $\|\Psi\| \leq \|\phi\| \|\psi\|$. Consideremos também, para $f \in C_c(\mathcal{B})$, a função $\Phi(f) : G \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $\Phi(f)|_t = \int_G \phi(s)^* f(t) \psi(t^{-1}s) ds$. Seja $F(t, s) = \phi(s)^* f(t) \psi(t^{-1}s)$. Então, por 2.23, $F : G \times G \longrightarrow \mathcal{B}$ é contínua de suporte compacto, e tal que $F(t, s) \in B_t$, $\forall t \in G$. Então, por [37], II-15.19, temos que a função $t \mapsto \int_G F(t, s) ds$ é uma seção contínua de suporte compacto de $\mathcal{B}$. Em outras palavras, $\Phi(f) \in C_c(\mathcal{B})$. De fato, é claro que $\text{supp}(\Phi(f)) \subseteq \text{supp}(f)$. Além disto, temos que $\pi(\Phi(f)) = \Psi(\pi_\lambda(f))$. Com efeito.

²Curiosamente, ou nem tanto, a mesma fórmula utilizada para definir π_2 pode ser utilizada para obter um homomorfismo injetivo de C^* -anéis ternários positivos $L^2(\mathcal{B}) \longrightarrow B(H, L^2(G) \otimes H)$: ver 7.22

se $h, k \in H$:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\Phi(f))h, k \rangle &= \left\langle \int_G \pi(\Phi(f)|_t)h, k \right\rangle \\
&= \int_G \left\langle \pi \left[\int_G \phi(s)^* f(t) \psi(t^{-1}s) ds \right] h, k \right\rangle \\
&= \int_G \int_G \langle \pi(\phi(s)^* f(t) \psi(t^{-1}s))h, k \rangle ds dt \\
&= \int_G \int_G \langle \pi(\phi(s)^*) \pi(f(t)) \pi(\psi(t^{-1}s))h, k \rangle ds dt \\
&= \int_G \langle \pi(\phi(s)^*) \int_G \pi(f(t)) V_\psi h|_{t^{-1}s} dt, k \rangle ds \\
&= \int_G \langle \pi(\phi(s)^*) \left[\int_G (\lambda_t \odot \pi)(f(t)) (V_\psi h) dt \right] |_s, k \rangle ds \\
&= \int_G \langle \pi(\phi(s)^*) \pi_\lambda(f)(V_\psi h)(s) ds, k \rangle \\
&= \left\langle \int_G \pi(\phi(s)^*) (\pi_\lambda(f) V_\psi h)(s) ds, k \right\rangle \\
&= \langle (V_\phi^* \pi_\lambda(f) V_\psi)h, k \rangle \\
&= \langle \Psi(\pi_\lambda(f))h, k \rangle
\end{aligned}$$

donde segue que $\pi(\Phi(f)) = \Psi(\pi_\lambda(f))$. Em particular, temos que $\Psi(\pi_\lambda(C_c(\mathcal{B}))) \subseteq \pi(C_c(\mathcal{B})) \subseteq \pi(C^*(\mathcal{B}))$, que é fechado, e portanto $\Psi(\pi_\lambda(C^*(\mathcal{B}))) \subseteq \pi(C^*(\mathcal{B}))$. Desta forma, temos que $\Psi : \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B})) \rightarrow \pi(C^*(\mathcal{B}))$. Suponhamos que $(\phi_i), (\psi_i)$ são redes aproximantes como na Definição 3.23, com $\|\phi_i\| \|\psi_i\| \leq M, \forall i$, de forma que temos $\Phi_i : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow C_c(\mathcal{B})$, e sabemos que $\Phi_i(f)$ converge em $L^1(\mathcal{B})$, para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$. Sejam $\Psi_i : \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B})) \rightarrow \pi(C^*(\mathcal{B}))$ as correspondentes transformações completamente limitadas, ou seja: $\Psi_i(x) = V_{\phi_i}^* x V_{\psi_i}, \forall x \in \pi_\lambda(C^*(\mathcal{B}))$. Como $\Phi_i(f) \rightarrow f$ em $L^1(\mathcal{B})$, então $\Phi_i(f) \rightarrow f$ em $C^*(\mathcal{B})$, e portanto $\pi(\Phi_i(f)) \rightarrow \pi(f)$ em $\pi(C^*(\mathcal{B}))$. Conseqüentemente, $\|\pi(\Phi_i(f))\| \rightarrow \|\pi(f)\|$. Por outro lado, $\pi(\Phi_i(f)) = \Psi_i(\pi_\lambda(f))$, donde segue que:

$$\|\pi(f)\| = \lim_i \|\pi(\Phi_i(f))\| = \lim_i \|\Psi_i(\pi_\lambda(f))\| \leq \limsup_i \|\Psi_i\| \|\pi_\lambda(f)\| \leq M \|\pi_\lambda(f)\|.$$

Como $C_c(\mathcal{B})$ é denso em $L^1(\mathcal{B})$, segue que $\|\pi(y)\| \leq M \|\pi_\lambda(y)\|, \forall y \in C^*(\mathcal{B})$.

Em particular, se π é uma representação fiel de $C^*(\mathcal{B})$, concluímos que π_λ também é fiel, o que, por [30], implica que $C^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.26. *Seja $\mathcal{B}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G . Tem-se:*

1. *Se G é discreto e $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação, então $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 .*
2. *Se $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação enumerável, então $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 .*
3. *Se G é amenable, então $\mathcal{B}$ tem a 1-propriedade de aproximação positiva em L^1 .*

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação, como já foi observado, é claramente verdadeira, porque se f é uma função de suporte compacto sobre o grupo discreto G , então f é de suporte finito, e como $\sup(\Phi(f))$ está incluído em $\sup(f)$, as integrais envolvidas são de fato somas finitas sobre $\sup(f)$, e portanto a convergência pontual implica a convergência destas somas.

Com respeito à segunda afirmação, se $\mathcal{B}$ tem a M -propriedade de aproximação enumerável, temos que cada função $t \mapsto \|(\Phi_n(f) - f)|_t\|$ tem suporte compacto contido em $\text{sup}(f)$. Por outro lado, esta sequência converge pontualmente a zero e está limitada em $\|\cdot\|_\infty$. Com efeito, na demonstração de 3.25, vimos que para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$ tem-se que $\pi(\Phi(f)) = \Psi(\pi_\lambda(f)) = V_\phi^* \pi_\lambda(f) V_\psi$, onde π é uma representação de $C^*(\mathcal{B})$. A mesma conta mostra que $\pi(\Phi(b_t)) = \Psi(\pi_\lambda(b_t)) = V_\phi^* \pi_\lambda(b_t) V_\psi$, para toda representação π de $\mathcal{B}$, e para todo $b_t \in \mathcal{B}$. Em particular, se $\pi|_{B_\epsilon}$ é injetiva, tem-se que:

$$\|\Phi(f(t))\| = \|\pi(\Phi(f(t)))\| = \|V_\phi^* \pi_\lambda(f(t)) V_\psi\| \leq \|\phi\| \|\psi\| \|f(t)\|,$$

donde segue que $\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|\phi\| \|\psi\| \|f\|_\infty$. Então temos que $\|\Phi_n(f) - f\|_\infty \leq (\|\phi\| \|\psi\| + 1) \|f\|_\infty \leq (M + 1) \|f\|_\infty$. Segue então, pelo teorema de convergência dominada de Lebesgue, que $\Phi_n(f)$ converge a f em $L^1(\mathcal{B})$.

Por último, consideremos a terceira afirmação. Por [52], 7.3.8, existe uma rede $(\varphi_i)_{i \in I}$ na esfera unitária de $L^2(G)$, tal que a rede $(\sigma_i)_{i \in I}$ converge uniformemente sobre compactos a 1, onde $\sigma_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ está definida como $\sigma_i(t) = \int_G \overline{\varphi_i(s)} \varphi_i(t^{-1}s) ds$. Vejamos que podemos supor que φ_i é contínua de suporte compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, e cada $i \in I$, existe $\varphi_{i,n} \in C_c(G)$ tal que $\|\varphi_{i,n}\|_2 \leq 1$, e $\|\varphi_i - \varphi_{i,n}\|_2 < 1/2n$. Temos então:

$$\begin{aligned} \int_G |\overline{\varphi_{i,n}(s)} \varphi_{i,n}(t^{-1}s) - \overline{\varphi_i(s)} \varphi_i(t^{-1}s)| ds &\leq \int_G |\varphi_{i,n}(t^{-1}s)| |\overline{\varphi_{i,n}(s)} - \overline{\varphi_i(s)}| ds \\ &\quad + \int_G |\overline{\varphi_i(s)}| |\varphi_{i,n}(t^{-1}s) - \varphi_i(t^{-1}s)| ds \\ &\leq \|\varphi_{i,n}\|_2 \|\varphi_{i,n} - \varphi_i\|_2 + \|\varphi_i\|_2 \|\varphi_{i,n} - \varphi_i\|_2 \\ &\leq 2\|\varphi_{i,n} - \varphi_i\|_2 \\ &< 1/n \end{aligned}$$

Consideremos agora a rede $(\varphi_{i,n})$ indexada em $I \times \mathbb{Z}^+$ com a ordem produto, e sejam $\sigma_{i,n} : G \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\sigma_{i,n}(t) = \int_G \overline{\varphi_{i,n}(s)} \varphi_{i,n}(t^{-1}s) ds$. Então $\sigma_{i,n}$ converge uniformemente a 1 sobre compactos. Com efeito, sejam $K \subseteq G$ um compacto, $\epsilon > 0$. Como σ_i converge a 1 uniformemente sobre compactos, existe $i_0 \in I$ tal que para todo $i \geq i_0$ e para todo $t \in K$ se tem: $|1 - \sigma_i(t)| < \epsilon/2$. Seja $n_0 > 2/\epsilon$; então, se $i \geq i_0$, $n \geq n_0$, $t \in K$, pelo cálculo acima temos:

$$|1 - \sigma_{i,n}(t)| \leq |1 - \sigma_i(t)| + 1/n < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pelo provado acima sabemos então que existe uma rede $(\varphi_i)_{i \in I}$ incluída na bola unidade de $L^2(G)$, formada por funções contínuas de suporte compacto, e tais que σ_i converge uniformemente sobre compactos à função 1, onde $\sigma_i(t) = \int_G \overline{\varphi_i(s)} \varphi_i(t^{-1}s) ds$. Para cada $i \in I$, definamos $\phi_i, \psi_i : G \rightarrow M(B_\epsilon)$ tais que $\phi_i(t) = \psi_i(t) = \varphi_i(t) 1$, onde 1 é a unidade de $M(B_\epsilon)$. Então:

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int_G (\varphi_i(s) 1)^* \varphi_i(s) 1 ds = \int_G |\varphi_i(s)| ds 1 = \|\varphi_i\| 1,$$

o que mostra que $\phi_i \in L^2(G) \otimes M(B_\epsilon)$, e que $\|\phi_i\| \leq 1$, $\forall i \in I$. Por outro lado, se $b_t \in \mathcal{B}$,

$$\Phi_i(b_t) = \int_G \phi_i(s)^* b_t \phi_i(t^{-1}s) ds = \sigma_i(t) b_t \rightarrow b_t,$$

e se $f \in C_c(\mathcal{B})$, então:

$$\|\Phi_i(f) - f\|_1 = \int_{\text{sup}(f)} \|\sigma_i(t)f(t) - f(t)\| dt \leq \|f\|_\infty \int_{\text{sup}(f)} |\sigma_i(t) - 1| dt \rightarrow 0,$$

porque $\text{sup}(f)$ é compacto, e portanto $\sigma_i \rightarrow 1$ uniformemente sobre $\text{sup}(f)$, que por sua vez implica que a integral correspondente converge a zero. Concluimos assim que $\mathcal{B}$ tem a 1-propriedade de aproximação positiva em L^1 . $\square$

PROPOSIÇÃO 3.27. *Sejam $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in H}$ fibrados de Fell sobre os grupos localmente compactos G e H , e α uma C^* -norma sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Tem-se:*

1. *Se $(\phi_i)_{i \in I}$, $(\psi_i)_{i \in I}$ são redes aproximantes para $\mathcal{A}$, e $(\phi'_j)_{j \in J}$, $(\psi'_j)_{j \in J}$ são redes aproximantes para $\mathcal{B}$, então $(\phi_i \odot \phi'_j)_{(i,j) \in I \times J}$, $(\psi_i \odot \psi'_j)_{(i,j) \in I \times J} \subseteq C_c(G \times H, M(A_\epsilon \otimes_\alpha B_\epsilon))$ é uma rede aproximante para $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$.*
2. *Se $\mathcal{A}$ tem a M -propriedade de aproximação (positiva, enumerável) e $\mathcal{B}$ tem a N -propriedade de aproximação (respectivamente: positiva, enumerável), então $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tem a MN -propriedade de aproximação (respectivamente: positiva, enumerável).*
3. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm a propriedade de aproximação, então $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação.*
4. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm a propriedade de aproximação em L^1 então $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 , e em particular é amenable.*

DEMONSTRAÇÃO. Por [65], T.6.3, existe uma inclusão $M(A_\epsilon) \odot M(B_\epsilon) \hookrightarrow M(A_\epsilon \otimes_\alpha B_\epsilon)$. Sejam $\tilde{\alpha}$ a C^* -norma obtida sobre $M(A_\epsilon) \odot M(B_\epsilon)$ através desta inclusão, e $M(A_\epsilon) \otimes_{\tilde{\alpha}} M(B_\epsilon)$ o correspondente produto tensorial. Podemos ver $L^2(G) \otimes M(A_\epsilon)$ e $L^2(H) \otimes M(B_\epsilon)$ como $L^2(M(A_\epsilon) \times G)$ e $L^2(M(B_\epsilon) \times H)$ respectivamente, onde $M(A_\epsilon) \times G$ e $M(B_\epsilon) \times H$ são os fibrados de Fell produto (ou triviais com fibras $M(A_\epsilon)$ e $M(B_\epsilon)$ respectivamente; ver 2.13 e 2.14). Como $L^2(G) \otimes M(A_\epsilon)$ e $L^2(H) \otimes M(B_\epsilon)$ são módulos de Hilbert à direita plenos sobre $M(A_\epsilon)$ e $M(B_\epsilon)$ respectivamente, então existe uma única C^* -norma sobre $(L^2(G) \otimes M(A_\epsilon)) \odot (L^2(H) \otimes M(B_\epsilon))$, que também chamamos $\tilde{\alpha}$, e tal que $(L^2(G) \otimes M(A_\epsilon)) \otimes_{\tilde{\alpha}} (L^2(H) \otimes M(B_\epsilon))$, o correspondente completamento, é um módulo de Hilbert à direita pleno sobre $M(A_\epsilon) \otimes_{\tilde{\alpha}} M(B_\epsilon)$. De fato, em 3.18 vimos que este módulo de Hilbert é naturalmente isomorfo a $L^2(G \times H) \otimes (M(A_\epsilon) \otimes_{\tilde{\alpha}} M(B_\epsilon))$. Assim, nas condições de 1., obtemos redes $(\phi_i \odot \phi'_j)$, $(\psi_i \odot \psi'_j) \subseteq L^2(G \times H, M(A_\epsilon) \otimes_{\tilde{\alpha}} M(B_\epsilon)) \subseteq L^2(G \times H, M(A_\epsilon \otimes_\alpha B_\epsilon))$, e é claro que $\phi_i \odot \phi'_j$ e $\psi_i \odot \psi'_j$ são contínuas de suporte compacto. Além disso, $\|\phi_i \odot \phi'_j\| = \|\phi_i\| \|\phi'_j\|$, e $\|\psi_i \odot \psi'_j\| = \|\psi_i\| \|\psi'_j\|$ (1.49). Em particular, se $\|\phi_i\| \|\psi_i\| \leq M$ e $\|\phi'_j\| \|\psi'_j\| \leq N$, então

$$\|\phi_i \odot \phi'_j\| \|\psi_i \odot \psi'_j\| = \|\phi_i\| \|\phi'_j\| \|\psi_i\| \|\psi'_j\| \leq MN.$$

Notar também que se $\phi_i = \psi_i$ e $\phi'_j = \psi'_j$, então $\phi_i \otimes \phi'_j = \psi_i \otimes \psi'_j$.

Suponhamos que as redes acima são aproximantes, de forma que $\mathcal{A}$ tem a M -propriedade de aproximação e $\mathcal{B}$ tem a N -propriedade de aproximação. Sejam $\Phi_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $a_t \mapsto \int_G \phi_i(t')^* a_t \psi_i(t^{-1}t') dt'$, e $\Phi'_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $b_s \mapsto \int_H \phi'_j(s')^* b_s \psi'_j(s^{-1}s') ds'$. Sejam $a_{t_0} \in \mathcal{A}$ e $b_{s_0} \in \mathcal{B}$. Como Φ_i e Φ'_j convergem pontualmente às respectivas identidades de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, existem $i_0 \in I$, $j_0 \in J$ tais que, $\forall i \geq i_0$, $j \geq j_0$, se tem $\|\Phi_i(a_{t_0}) - a_{t_0}\| < \epsilon/2N$ e $\|\Phi'_j(b_{s_0}) - b_{s_0}\| < \epsilon/2$. Consideremos $\Phi_{i,j} : \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tal que

$$\Phi_{i,j}(x_{(t,s)}) = \int_{G \times H} (\phi_i \odot \phi'_j)(t', s') x_{(t,s)} (\psi_i \odot \psi'_j)(t^{-1}t', s^{-1}s') d(t', s').$$

Se $(i, j) \geq (i_0, j_0)$ temos:

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{i,j}(a_{t_0} \otimes b_{s_0}) - (a_{t_0} \otimes b_{s_0})\| &= \left\| \int_{G \times H} (\phi_i \otimes \phi'_j)(t, s)(a_{t_0} \otimes b_{s_0})(\psi_i \otimes \psi'_j)(t_0^{-1}t, s_0^{-1}s) d(t, s) - (a_{t_0} \otimes b_{s_0}) \right\| \\
 &= \left\| \int_G \int_H \phi_i(t) a_{t_0} \psi_i(t_0^{-1}t) \otimes \phi'_j(s) b_{s_0} \psi'_j(s_0^{-1}s) dt ds - (a_{t_0} \otimes b_{s_0}) \right\| \\
 &= \|\Phi_i(a_{t_0}) \otimes \Phi'_j(b_{s_0}) - (a_{t_0} \otimes b_{s_0})\| \\
 &\leq \|(\Phi_i(a_{t_0}) - a_{t_0}) \otimes \Phi'_j(b_{s_0})\| + \|a_{t_0} \otimes (\Phi'_j(b_{s_0}) - b_{s_0})\| \\
 &\leq \|\Phi_i(a_{t_0}) - a_{t_0}\| \|\Phi'_j(b_{s_0})\| + \|a_{t_0}\| \|\Phi'_j(b_{s_0}) - b_{s_0}\| \\
 &\leq \epsilon \quad \text{porque } \|\Phi'_j(b_{s_0})\| \leq N \|b_{s_0}\|
 \end{aligned}$$

Como vimos na demonstração de 3.25, tem-se que $\|\Phi_{i,j}(x)\| \leq MN\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$, e consequentemente $\Phi_{i,j}(x) \rightarrow x$, $\forall x \in \mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$. Isto prova 1., 2. e 3.

Suponhamos agora que as redes acima são tais que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 , com $\|\phi_i\| \|\psi_i\| \leq M$, $\|\phi'_i\| \|\psi'_i\| \leq N$. Notar que, se $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{B})$, então $\Phi_{i,j}(f \otimes g) = \Phi_i(f) \otimes \Phi'_j(g)$, e portanto,

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{i,j}(f \otimes g) - f \otimes g\|_1 &= \|\Phi_i(f) \otimes \Phi'_j(g) - f \otimes g\|_1 \\
 &\leq \|\Phi_i(f) \otimes (\Phi'_j(g) - g)\|_1 + \|(\Phi_i(f) - f) \otimes g\|_1 \\
 &\leq \|\phi_i\| \|\psi_i\| \|f\|_1 \|\Phi'_j(g) - g\|_1 + \|\Phi_i(f) - f\|_1 \|g\|_1 \\
 &\rightarrow 0 \quad \text{quando } i, j \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Logo, temos também que $\Phi_{i,j}(l) \rightarrow l$ em $L^1(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$, para toda $l \in \Gamma = \{\sum_k f_k \otimes g_k\}$. Como Γ é denso em $C_c(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo, também é denso em $L^1(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$. Logo, dados $\epsilon > 0$, $m \in C_c(\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B})$, existe $l \in \Gamma$ tal que $\|m - l\|_1 < \epsilon/3(MN + 1)$, e existem i_0, j_0 tais que $\|\Phi_{i,j}(l) - l\|_1 < \epsilon/3$, $\forall i \geq i_0, j \geq j_0$. Portanto, se $i \geq i_0, j \geq j_0$:

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{i,j}(m) - m\|_1 &\leq \|\Phi_{i,j}(m - l)\|_1 + \|\Phi_{i,j}(l) - l\|_1 + \|l - m\|_1 \\
 &< MN\epsilon/3(MN + 1) + \epsilon/3(MN + 1) + \epsilon/3 \\
 &< \epsilon,
 \end{aligned}$$

donde concluímos que $\mathcal{A} \otimes_\alpha \mathcal{B}$ tem a propriedade de aproximação em L^1 . $\square$

Antes de passar às aplicações provamos um outro resultado, sobre limites indutivos de fibrados de Fell, que pode resultar útil em algumas situações (ver por exemplo 3.31).

PROPOSIÇÃO 3.28. *Seja $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e suponhamos que $(G_i)_{i \in I}$ é uma família dirigida de subgrupos abertos de G (i.e.: para todos i, j existe $k \geq i, j$, tal que $G_i, G_j \subseteq G_k$), tal que $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Seja $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{G_i}$, a retração do fibrado $\mathcal{B}$ a G_i . Então $\varinjlim C_r^*(\mathcal{B}_i) = C_r^*(\mathcal{B})$, e se cada $\mathcal{B}_i$ é amenable, então também $\mathcal{B}$ é amenable.*

DEMONSTRAÇÃO. Como cada $\mathcal{B}_i$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, temos por 3.10, que $C_r^*(\mathcal{B}_i)$ é uma sub- C^* -álgebra de $C_r^*(\mathcal{B})$; como $C_c(\mathcal{B}) \subseteq \bigcup_i C_r^*(\mathcal{B}_i)$, concluímos que $\bigcup_i C_r^*(\mathcal{B}_i)$ é denso em $C_r^*(\mathcal{B})$, e portanto $\varinjlim C_r^*(\mathcal{B}_i) = C_r^*(\mathcal{B})$.

Suponhamos agora que cada $\mathcal{B}_i$ é amenable, e denotemos por $\|\cdot\|_i$ a norma sobre $C^*(\mathcal{B}_i) = C_r^*(\mathcal{B}_i)$. Denotemos por $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_r$ as normas sobre $C^*(\mathcal{B})$ e $C_r^*(\mathcal{B})$ respectivamente. Seja $f \in C_c(\mathcal{B})$; para provar que $\mathcal{B}$ é amenable, é suficiente mostrar que $\|f\| = \|f\|_r$. Como f tem suporte compacto e os G_i são uma família de abertos que cobrem G , existe uma subfamília finita $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$ que cobre o

suporte de f . Como os G_i são uma família dirigida, existe $j \in I$ tal que $j \geq i_l$ e $G_j \supseteq G_{i_l}$, $\forall l = 1, \dots, n$. Então $f \in C_c(\mathcal{B}_j)$. Consideremos uma representação $\pi : L^1(\mathcal{B}) \rightarrow B(H)$. Por restrição, temos uma representação $\pi_j : L^1(\mathcal{B}_j) \rightarrow B(H)$, e portanto $\|\pi(f)\| = \|\pi_j(f)\| \leq \|f\|_j$, donde segue, depois de tomar supremo na família das representações de $L^1(\mathcal{B})$, que $\|f\| \leq \|f\|_j$. Conseqüentemente, $\|f\| = \|f\|_r$, já que $\|f\|_r = \|f\|_j$. $\square$

COROLÁRIO 3.29. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fibrados de Fell que têm a propriedade de aproximação em L^1 , então $A_\epsilon \odot B_\epsilon$ admite exatamente uma C^* -norma se e somente se $C^*(\mathcal{A}) \odot C^*(\mathcal{B})$ admite exatamente uma C^* -norma. Em particular, se $\mathcal{A}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e fibra nuclear A_ϵ , então $C^*(\mathcal{A})$ também é nuclear (lembrar que por 3.26, basta que o grupo de base seja amenable para que o fibrado tenha a propriedade de aproximação em L^1).*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ são fibrados de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 , então $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ tem também a propriedade de aproximação em L^1 por 3.27, e assim o diagrama $D_{\min}$ fica:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}) & \xrightarrow{\sigma_{\min}^{\max}} & C^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}) \\ \uparrow j \cong & & \uparrow \cong j_r \\ C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{\min}^{\max}} & C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

Se $A_\epsilon \odot B_\epsilon$ admite apenas uma C^* -norma, então $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ o que implica que $\sigma_{\min}^{\max} = id$, e portanto que $\tilde{\sigma}_{\min}^{\max} = id$, donde segue que $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) = C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C^*(\mathcal{B})$. Na outra direção, suponhamos que $C^*(\mathcal{A}) \odot C^*(\mathcal{B})$ admite apenas uma C^* -norma. Então $\tilde{\sigma}_{\min}^{\max} = id$, e portanto $\sigma_{\min}^{\max} = id$. Logo, $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$, donde segue que $A_\epsilon \otimes_{\max} B_\epsilon = A_\epsilon \otimes_{\min} B_\epsilon$.

Com respeito à última afirmação, observar que toda C^* -álgebra B pode ser enxergada como um fibrado de Fell sobre o grupo trivial, e é claro que toda unidade aproximada de B fará o serviço de rede aproximante para este fibrado de Fell (ou mesmo a função que vale 1 em $M(B)$!). Conseqüentemente, pela primeira parte do Corolário temos $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} B = C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} B$, i.e., $C^*(\mathcal{A})$ é uma C^* -álgebra nuclear. $\square$

COROLÁRIO 3.30. *Se $\mathcal{A}$ é um fibrado de Fell com a propriedade de aproximação em L^1 e fibra nuclear sobre a unidade, e se $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell amenable, então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ também é amenable.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 3.29, as nossas suposições sobre $\mathcal{A}$ implicam que $C^*(\mathcal{A})$ é nuclear. Portanto, deve ser $C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{B}) = C^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C^*(\mathcal{B})$, e o resultado segue do Corolário 3.22. $\square$

COROLÁRIO 3.31. *Suponhamos que o fibrado de Fell $\mathcal{B}$ está nas hipóteses da Proposição 3.28. Se B_ϵ é nuclear e cada $\mathcal{B}_i$ tem a propriedade de aproximação em L^1 , então $C^*(\mathcal{B})$ é nuclear.*

DEMONSTRAÇÃO. Como B_ϵ é nuclear e cada $\mathcal{B}_i$ tem a propriedade de aproximação em L^1 , então por 3.29 temos que $C^*(\mathcal{B}_i)$ é nuclear, $\forall i \in I$, e daqui $\varinjlim C^*(\mathcal{B}_i)$ também é nuclear; mas $C^*(\mathcal{B}) = \varinjlim C^*(\mathcal{B}_i)$ pela Proposição 3.28. $\square$

COROLÁRIO 3.32. *Todo produto cruzado parcial torcido de uma C^* -álgebra nuclear por um grupo amenable é nuclear. Em particular, a C^* -álgebra parcial $C_p^*(G)$ de um grupo discreto amenable é nuclear.*

DEMONSTRAÇÃO. Lembrar de [27] (ver também 2.15) que uma ação parcial torcida de uma C^* -álgebra A por um grupo localmente compacto define um fibrado de Fell sobre o grupo, cuja fibra sobre a identidade é A . Agora, se o grupo é amenable, 4.7 de [28] mostra que o fibrado de Fell em questão tem a propriedade de aproximação e é amenable, e portanto, se além disso A é nuclear, o Corolário 3.29 implica que também é nuclear a C^* -álgebra seccional do fibrado, que é precisamente o produto cruzado pela ação parcial.

Com respeito à última afirmação, ela é verdadeira porque $C_p^*(G)$ é por definição um produto cruzado parcial de uma C^* -álgebra comutativa pelo grupo G (ver [26], 6.4). $\square$

DEFINIÇÃO 3.33. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ fibrados de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e sejam $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ homomorfismos de fibrados de Fell. Dizemos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

é exata se ϕ é injetiva, ψ é sobrejetiva, e $\ker \psi = \text{Im} \phi$. Equivalentemente, a sequência acima é exata se e somente se a sequência

$$0 \longrightarrow A_t \xrightarrow{\phi} B_t \xrightarrow{\psi} C_t \longrightarrow 0$$

é exata, $\forall t \in G$.

A seguinte é uma generalização de [1], 3.1, ao caso contínuo.

PROPOSIÇÃO 3.34. *Seja $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ uma sequência exata de fibrados de Fell sobre o grupo localmente compacto G . Então:*

1. $0 \longrightarrow L^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi^1} L^1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi^1} L^1(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$ é exata.
2. $0 \longrightarrow C^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{C^*(\phi)} C^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{C^*(\psi)} C^*(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$ é exata.

DEMONSTRAÇÃO. Como toda representação não degenerada de $L^1(\mathcal{A})$ tem uma única extensão a uma representação de $L^1(\mathcal{B})$, temos que $C^*(\mathcal{A})$ é o fecho de $L^1(\mathcal{A})$ dentro de $C^*(\mathcal{B})$, e portanto basta provar 1., porque 2. segue de [67], 2.29, e do fato de $L^1(\mathcal{F})$ ter uma unidade aproximada, para todo fibrado de Fell $\mathcal{F}$.

- ϕ^1 é isométrica:

Como ϕ é injetiva, ela é uma isometria, e portanto, se $f \in L^1(\mathcal{A})$:

$$\|\phi^1(f)\|_1 = \int_G \|\phi^1(f)(t)\| dt = \int_G \|\phi(f(t))\| dt = \int_G \|f(t)\| dt = \|f\|_1.$$

- $\ker \psi^1 = \text{Im} \phi^1$:

A inclusão $\text{Im} \phi^1 \subseteq \ker \psi^1$ é clara; provemos a inclusão inversa. Seja $g \in \ker \psi^1$. Então $\|\psi^1(g)\|_1 = 0$, e portanto $\psi(g(t)) = 0$, para quase todo t de G ; podemos supor que $\psi(g(t)) = 0$, para todo t em G . Assim, $g(t) \in \ker \psi = \text{Im} \phi$, $\forall t \in G$, e portanto existe um único $f(t) \in A_t$ tal que $\phi(f(t)) = g(t)$, $\forall t \in G$. Como ϕ é um isomorfismo contínuo isométrico entre $\mathcal{A}$ e $\phi(\mathcal{A})$ ([37], II-13.17), e temos que $f = (\phi^1)^{-1}(g)$, então $f \in L^1(\mathcal{A})$, e portanto $g \in \text{Im} \phi^1$.

- ψ^1 é sobrejetiva:

Podemos supor que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. $L^1(\mathcal{A})$ é um $*$ -ideal bilateral fechado de $L^1(\mathcal{B})$, portanto existe um isomorfismo de $*$ -álgebras $\frac{L^1(\mathcal{B})}{L^1(\mathcal{A})} \xrightarrow{\bar{\psi}} \psi^1(L^1(\mathcal{B})) \subseteq L^1(\mathcal{C})$. Notar que a imagem de $\bar{\psi}$ contém $\psi^1(C_c(\mathcal{B}))$, que é denso em $C_c(\mathcal{C})$ na topologia do limite indutivo porque, sendo ψ sobrejetiva, $\psi^1(C_c(\mathcal{B}))$ satisfaz a hipótese de 3.14. Portanto $\text{Im} \bar{\psi}$ é denso em $L^1(\mathcal{C})$. Basta provar então que $\bar{\psi}$ é uma isometria, onde $\frac{L^1(\mathcal{B})}{L^1(\mathcal{A})}$ tem a norma quociente. Sejam $f \in C_c(\mathcal{B})$, $\bar{f}$ sua projeção no quociente. Pelo teorema do quociente, temos que $\|\bar{\psi}\| = \|\psi^1\|$, e portanto $\|\bar{\psi}(\bar{f})\| \leq \|\psi^1\| \|\bar{f}\| \leq \|\bar{f}\|$. Para provar a desigualdade contrária, consideremos $\epsilon > 0$ arbitrário, e seja M a medida de uma vizinhança compacta V do suporte de f . Para cada $s \in V$, existe $g_s \in C_c(\mathcal{A})$ tal que $\|f(s) - g_s(s)\| < \|\bar{f}(s)\| + \epsilon/M$, e podemos supor que $\text{supp}(g_s) \subseteq V$. Como f , g_s , e $t \mapsto \bar{f}(t)$ são contínuas, para cada $s \in \text{supp}(f)$ deve existir uma vizinhança V_s de s , que podemos supor contida em V , e tal que $\|f(t) - g_s(t)\| < \|\bar{f}(t)\| + \epsilon/M, \forall t \in V_s$. Agora, $\{V_s : s \in \text{supp}(f)\}$ é uma cobertura aberta do compacto $\text{supp}(f)$, e portanto existe uma subcobertura finita $V_{s_1}, \dots, V_{s_n}$. Seja G_* a compactificação com um ponto de G , e definamos $s_{n+1} = *$, $V_{s_{n+1}} = G_* \setminus \text{supp}(f)$ e $g_{s_{n+1}} = 0$, onde $*$ representa o ponto acrescentado. Assim, $\{V_{s_i}\}_{i=1}^{n+1}$ é uma cobertura aberta de G_* . Seja $(\phi_i)_{i=1}^{n+1}$ uma partição da unidade de G_* subordinada a $\{V_{s_i}\}_{i=1}^{n+1}$, e definamos $g = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i g_{s_i}$. Então $g \in C_c(\mathcal{A})$, $\text{supp}(g) \subseteq V$, e

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\| &\leq \int_G \|f(t) - g(t)\| dt \\ &= \int_V \left\| \sum_{i=1}^{n+1} (\phi_i(t) f(t) - \phi_i(t) g_{s_i}(t)) \right\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{V_{s_i}} \phi_i(t) \|f(t) - g_{s_i}(t)\| dt \\ &\leq \int_V \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(t) (\|\bar{f}(t)\| + \epsilon/M) dt \\ &\leq \int_G \|\psi(f(t))\| dt + \epsilon \\ &= \|\psi^1(f)\|_1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Como esta desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\|f\| \leq \|\psi^1(f)\|_1$, e portanto $\|\bar{f}\| = \|\bar{\psi}(f)\|_1$. Como, além disso, $\bar{\psi}$ tem imagem densa em $L^1(\mathcal{C})$, então $\text{Im}(\bar{\psi}) = L^1(\mathcal{C})$, e como $\text{Im}(\psi^1) = \text{Im}(\bar{\psi})$, concluímos que ψ^1 é sobrejetiva. □

TEOREMA 3.35. Se $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ é um fibrado de Fell com fibra exata e a propriedade de aproximação em L^1 , então $C^*(\mathcal{A})$ é uma C^* -álgebra exata.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam B uma C^* -álgebra, $I \triangleleft B$. Como A_t é exato $\forall t \in G$, a sequência de fibrados de Fell

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\min} I \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\min} B \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\min} (B/I) \longrightarrow 0$$

é exata, e cada um dos fibrados da sequência tem a propriedade de aproximação em L^1 , (3.27). Como C^* é um funtor exato (da categoria de $*$ -álgebras com unidade aproximada na categoria das

C^* -álgebras), e neste caso é $C^* = C_r^*$, a sequência de C^* -álgebras

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} I) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} B) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} (B/I)) \longrightarrow 0$$

também é exata.

Finalmente, 3.20 fornece um isomorfismo natural entre $C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} C')$ e $C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} C'$, para toda C^* -álgebra C' . Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} I) & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} B) & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A} \otimes_{\min} (B/I)) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} I & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} B & \longrightarrow & C_r^*(\mathcal{A}) \otimes_{\min} (B/I) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como a primeira fila é exata e o diagrama comuta, a segunda fila também é exata. Segue daqui que $C^*(\mathcal{A})$, que é igual a $C_r^*(\mathcal{A})$, é uma C^* -álgebra exata. $\square$

COROLÁRIO 3.36. *Todo produto cruzado parcial torcido de uma C^* -álgebra exata por um grupo amenable é exato.*

DEMONSTRAÇÃO. Um produto cruzado parcial torcido é por definição a C^* -álgebra seccional de um certo fibrado de Fell sobre o grupo que age ([27]), e com fibra sobre a identidade igual à C^* -álgebra onde a ação ocorre. Se o grupo é amenable, o correspondente fibrado de Fell tem a propriedade de aproximação em L^1 por 3.26; se a C^* -álgebra é exata, o fibrado tem fibra exata, e portanto o Corolário decorre do Teorema 3.35 acima. $\square$

3.4. Comentários finais

Como já foi mencionado na Introdução à Parte I, os resultados do Capítulo 3 foram provados primeiro para fibrados sobre grupos discretos em [3] (exceto, é claro, o Teorema 3.25 e a Proposição 3.26, provados em [28]). Em particular, 3.29 foi provado neste caso. Quando o grupo é discreto, a C^* -álgebra seccional reduzida de um fibrado de Fell tem uma caracterização muito conveniente em termos de uma esperança condicional (3.11), caracterização que já não existe no caso contínuo. Logo depois de divulgarmos [3], recebemos de parte de Ng o seu pré-artigo [50]. Neste artigo, ele considerava uma certa C^* -álgebra seccional $C_c^*(\mathcal{B})$ do fibrado $\mathcal{B}$, e chamava “próprio” ao fibrado $\mathcal{B}$ se $C_c^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$. Então mostrava que, se $\mathcal{B}$ é próprio e G é amenable (ou se $\mathcal{B}$ satisfaz uma certa propriedade de aproximação), então $\mathcal{B}$ é amenable. Em abril deste ano, Exel publicou [30], onde prova que $C_c^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$ para todo fibrado $\mathcal{B}$. Quando apareceu [30], Exel e Ng decidiram combinar os seus respectivos resultados em [30] e [50]. O resultado é [33], que foi divulgado em junho.

Em [30], mostra-se como obter uma imagem isomorfa de $C_r^*(\mathcal{B})$ usando representações do fibrado sobre espaços de Hilbert. Com este resultado na mão, nós tentamos generalizar os nossos resultados de [3] ao contexto contínuo (ainda sabendo que [33] estava em elaboração). Em particular, achávamos que a versão da propriedade de aproximação introduzida por Ng em [50] para o caso contínuo era inadequada. Os autores de [33] também consideraram uma outra propriedade de aproximação no caso contínuo, igual à nossa exceto que a convergência de $\Phi_i(f)$ a f é na topologia do limite indutivo de $C_c(\mathcal{B})$. Em [33], a convergência de $\Phi(f)$ a f na topologia do limite indutivo para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$ é expressada dizendo que Φ converge à identidade $id_{\mathcal{B}}$ sobre *fatias compactas* de $\mathcal{B}$ (“compact slices”). Naturalmente que a convergência $\Phi_i \rightarrow id_{\mathcal{B}}$ sobre fatias compactas implica a propriedade de aproximação em L^1 ; não sabemos se vale também a recíproca. Em todo caso, a convergência

sobre fatias compactas considerada em [33] é utilizada apenas para ver que $\Phi(f) \rightarrow f$ em $L^1(\mathcal{B})$, e portanto pode ser substituída pela propriedade de aproximação em L^1 .

Antes de encerrar estes comentários, gostaríamos de acrescentar uma última observação. Nossa propriedade de aproximação implica a existência de umas redes aproximantes que tomem valores na álgebra dos multiplicadores da fibra sobre a identidade do grupo. Como já foi comentado oportunamente, esta não é uma diferença substancial: seria a mesma coisa pedir que as redes fossem a valores na fibra sobre a unidade. No entanto, ao provarmos que um fibrado de Fell sobre um grupo amenable é também amenable, achamos uma rede aproximante que toma seus valores em $Z(M(B_e))$ (o centro da álgebra dos multiplicadores). Lembrar que em [4], a autora considera certa propriedade de aproximação, que é satisfeita quando existe uma certa rede de funções de tipo positivo (com respeito a uma ação) que tomam valores no centro de uma certa álgebra de von Neumann. Isto pode ser apenas uma coisa casual, mas talvez valha a pena aprofundar neste aspecto.

Parte II

Ações Envolventes de Ações Parciais

Introdução à Parte II

A pergunta que motiva esta segunda parte do trabalho é a seguinte: quando é que uma ação parcial α de um grupo G sobre uma C^* -álgebra A é a restrição a A de uma ação global β sobre uma C^* -álgebra B que contém A como ideal? Para evitar soluções redundantes, exigimos também que a β -órbita de A gere linearmente um subespaço denso de B . Uma tal ação β será chamada ação envolvente de α . Naturalmente, a restrição de uma ação global a um ideal define uma ação parcial sobre este ideal. Junto com todo problema de existência vem o problema da unicidade da eventual solução, problema que também consideramos para a ação envolvente.

A pergunta acima pode ser considerada também para ações parciais em outras categorias, e de fato isto é extremamente conveniente. Por exemplo, não podemos esperar que exista uma ação β como acima se o problema já não tem solução na categoria de conjuntos e funções. Afortunadamente, nesta categoria a ação envolvente existe e é única. Levando em conta a dualidade entre a categoria de espaços topológicos localmente compactos de Hausdorff e funções contínuas próprias com a categoria de C^* -álgebras comutativas e seus homomorfismos, também não cabe esperar que exista a desejada β se não existe ação envolvente na categoria de espaços topológicos de Hausdorff. Na verdade, a consideração do problema da ação envolvente nesta categoria determinou um ponto de inflexão no desenvolvimento do trabalho: se bem toda ação parcial contínua α sobre um espaço topológico X possui uma única ação envolvente $\hat{\alpha}$, agindo sobre um espaço topológico $\hat{X}$ que contém X como subespaço aberto, exemplos simples mostram que $\hat{X}$ pode ser de Hausdorff sem que X seja de Hausdorff. Se X é localmente compacto e de Hausdorff, α induz uma ação parcial α^* sobre $C_0(X)$. Se α^* tem ação envolvente β agindo sobre a C^* -álgebra B , é fácil ver que B deve ser comutativa, e que β induz sobre o espectro $\hat{B}$ de B uma ação que é ação envolvente de α . Daqui concluímos que nem sempre haverá ação envolvente na categoria de C^* -álgebras.

Esta conclusão parece frustrar as nossas expectativas, ou pelo menos nos obriga a reformulá-las. Sendo otimistas e enigmáticos, podemos interpretar o fato anterior assim: não existe a C^* -álgebra envolvente B , mas sim existe o seu espectro: $\hat{X}$. Em outras palavras, precisamos achar uma outra noção de ação envolvente, mais flexível, de forma que toda ação parcial tenha ação envolvente; se conseguirmos uma tal noção, no exemplo acima $\hat{X}$ deveria ser o espectro da correspondente C^* -álgebra envolvente. Como achar uma definição alternativa de ação envolvente? Por um lado, o conceito considerado no começo parece o único razoável; por outro, os exemplos mostram que a categoria resultou rígida demais para permitir a existência de ação envolvente em todos os casos. Isto sugere flexibilizar a categoria, por exemplo acrescentando morfismos. Como já foi observado, se queremos uma solução, os espaços topológicos de Hausdorff e as C^* -álgebras não comutativas devem estar num mesmo nível, no sentido de que o espaço envolvente de uma ação parcial sobre um espaço de Hausdorff possa ser, em geral, uma C^* -álgebra não comutativa. Isto concorda com o moderno ponto de vista que interpreta a teoria de C^* -álgebras como uma teoria de espaços topológicos “não comutativos”, ou “quânticos”. Neste sentido também, deveríamos poder comparar C^* -álgebras comutativas com C^* -álgebras não comutativas, coisa que não podemos fazer com os homomorfismos usuais de C^* -álgebras: se B é isomorfa a B' , então B é comutativa se e somente se B' é comutativa. Podemos, no entanto, identificar duas C^* -álgebras quando elas sejam equivalentes Morita. Assim, por exemplo, o espaço topológico com apenas um ponto pode ser representado tanto pela C^* -álgebra $\mathbb{C}$ dos complexos, como pela C^* -álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{C})$, ou ainda pela C^* -álgebra $\mathcal{K}$ dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert de dimensão infinita enumerável.

As considerações que fizemos sugerem substituir a definição de ação envolvente inicial pela seguinte: β é uma ação envolvente de α , a menos de equivalência Morita, se β é a ação envolvente de uma ação parcial equivalente Morita com α ; naturalmente, isto requer definir equivalência Morita entre ações parciais. Um argumento que reforçou significativamente este ponto de vista, foi um resultado que tínhamos obtido no caso de existir ação envolvente, junto com uma observação que descreveremos a seguir. Por um lado, provamos que se (β, B) é uma ação envolvente de (α, A) , então os produtos cruzados reduzidos $A \rtimes_{\alpha, r} G$ e $B \rtimes_{\beta, r} G$ são equivalentes Morita. Por outro lado, supondo que G

é abeliano, o teorema de Takai implica que $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ é equivalente Morita com B , onde $\hat{\alpha}$ é a ação dual de G sobre $A \rtimes_{\alpha} G$; além disso, β é equivalente Morita com a ação bidual $\hat{\hat{\alpha}}$ de G sobre $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} G$. Isto sugere que, no caso de não existir (β, B) , o par $(\alpha, A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} G)$ pode ser um substituto adequado para (β, B) . Se G não é abeliano, podemos ainda ter esperanças similares, usando os resultados da teoria de dualidade para produtos cruzados por grupos não comutativos, análogos ao teorema de Takai. Afortunadamente, este ponto de vista resultou acertado: para toda ação parcial de um grupo localmente compacto sobre uma C^* -álgebra existe uma ação envolvente a menos de equivalência Morita, e esta ação envolvente é única a menos de equivalência Morita. Equivalentemente: toda ação parcial tem uma única ação envolvente na categoria de C^* -álgebras com os bimódulos de Hilbert plenos como morfismos.

Antes de descrever a organização do trabalho, gostaríamos de salientar alguns dos resultados e aplicações mais importantes obtidos, além do principal, já mencionado acima. Mostramos que sempre existe e é única a ação envolvente de uma ação parcial na categoria de conjuntos e também na categoria de espaços topológicos, e as caracterizamos através de propriedades universais. Caracterizamos também as ações parciais sobre espaços de Hausdorff, cujo espaço envolvente é de Hausdorff, como aquelas que tem gráfico fechado (no sentido precisado em 4.51). Ainda na categoria de espaços topológicos, vemos que, de maneira geral, as propriedades dinâmicas de uma ação parcial e de sua ação envolvente são as mesmas. Já no contexto de C^* -álgebras, vemos que a ação envolvente (β, B) da ação parcial (α, A) é única, sempre que exista. Além disso, provamos que $A \rtimes_{\alpha, r} G$ e $B \rtimes_{\beta, r} G$ são equivalentes Morita, e também que A e B são bastante parecidas, no sentido de que A é nuclear, liminal, postliminal (por exemplo), se e somente se B é nuclear, liminal, postliminal respectivamente. Isto implica, em particular, que se B é um fibrado de Fell e δ é a coação dual sobre $C_r^*(B)$, então $C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} G$ é nuclear, liminal, postliminal, se e somente se B_t (a fibra de B sobre a identidade de G) é, respectivamente, nuclear, liminal, postliminal. Que saibamos, isto era sabido apenas para fibrados de Fell sobre grupos discretos ([53], [49]).

Um resultado bastante curioso, implicado pelo nosso resultado principal, é o seguinte: se G é um grupo conexo que age parcialmente sobre uma C^* -álgebra com unidade, então a ação parcial é, na verdade, uma ação global. Esta é uma generalização bastante agradável, do conhecido resultado sobre sistemas dinâmicos que ocorrem em variedades compactas: se $\dot{x} = \mathbf{v}(x)$ é uma equação diferencial sobre uma variedade compacta X , então as soluções da equação estão definidas sobre toda a reta real. Com efeito, como mostramos no Capítulo 4, o fluxo de uma tal equação diferencial é uma ação parcial de $\mathbb{R}$ sobre a variedade X , e portanto induz uma ação parcial sobre $C_0(X)$. Como X é compacta, $C_0(X)$ tem unidade, e portanto a ação parcial é uma ação global. Isto equivale a dizer que as soluções da equação acima estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que α é uma ação parcial contínua de G sobre A , e sejam $\hat{A}$ e $\text{Prim}(A)$ o espectro e o espaço de ideais primitivos de A , respectivamente. Então α induz ações parciais contínuas $\hat{\alpha}$ sobre $\hat{A}$ e $\hat{\alpha}$ sobre $\text{Prim}(A)$, e temos o seguinte bonito resultado: se (β, B) é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de (α, A) , então $(\hat{\beta}, B)$ é a ação envolvente de $(\hat{\alpha}, \hat{A})$, e $(\hat{\beta}, \text{Prim}(B))$ é a ação envolvente de $(\hat{\alpha}, \hat{A})$.

Finalmente, mostramos que se (β, B) é a ação envolvente de (α, A) , então $A \rtimes_{\alpha, r} G$ é equivalente Morita com $B \rtimes_{\beta, r} G$.

Esta segunda parte do nosso trabalho está distribuída em quatro capítulos.

O primeiro deles, embora importante para o desenvolvimento posterior, é totalmente elementar do ponto de vista das técnicas matemáticas utilizadas. Nele estudamos e resolvemos o problema

da existência e unicidade da ação envolvente nas categorias de conjuntos e de espaços topológicos. Consideramos o exemplo do fluxo de uma equação diferencial mencionado anteriormente, e também apresentamos exemplos elementares de ações parciais sobre espaços de Hausdorff cujos espaços envolventes não são de Hausdorff. Caracterizamos as ações parciais cujas ações envolventes atuam sobre espaços de Hausdorff, e comparamos as propriedades dinâmicas de uma ação parcial e de sua ação envolvente.

No Capítulo 5, consideramos o problema da ação envolvente na categoria de C^* -álgebras. Essencialmente, o único problema é o da unicidade da ação envolvente no caso em que exista. Vemos, em 5.11, que a ação envolvente é única sempre que exista. Neste capítulo mostramos que uma ação parcial sobre A induz ações parciais sobre o espectro de A e sobre o espaço de ideais primitivos de A . Na última parte comparamos algumas propriedades de A e da C^* -álgebra envolvente B . Vemos, por exemplo, que se $\mathcal{C}$ é uma classe de C^* -álgebras fechada por ideais, quocientes, extensões e limites indutivos, então A pertence a $\mathcal{C}$ se e somente se B pertence a $\mathcal{C}$.

O resultado principal do Capítulo 6 é: se (β, B) é uma ação envolvente de (α, A) , então $A \rtimes_{\alpha, r} G$ e $B \rtimes_{\beta, r} G$ são equivalentes Morita. Apresentamos depois, bastante rapidamente, alguns exemplos e aplicações. A aplicação que pessoalmente nos parece mais interessante é que toda representação parcial de um grupo discreto "amenable" é uma compressão de uma representação unitária do grupo, e em particular é uma função de tipo positivo. Achamos que este resultado deve ser válido ainda no caso não amenable.

Dedicamos também algumas páginas ao estudo de certa C^* -álgebra $E(G)$ de dimensão finita ligada naturalmente a um grupo finito G . Lembremos que se G é um grupo discreto, existe uma C^* -álgebra $C_p^*(G)$ cuja teoria de representações reflete a teoria de representações parciais do grupo. $C_p^*(G)$ é um produto cruzado parcial de uma C^* -álgebra comutativa por uma ação parcial de G . No caso de ser G finito, esta ação parcial tem sempre ação envolvente, e como G é amenable, $C_p^*(G)$ é equivalente Morita com o correspondente produto cruzado pela ação envolvente, que denotamos por $E(G)$. Sendo equivalentes Morita, $C_p^*(G)$ e $E(G)$ têm a mesma teoria de representações, e portanto a teoria de representações de $E(G)$ também deve refletir a teoria de representações parciais de G . Por outro lado, parece-nos que o cálculo de $E(G)$ é mais simples que o cálculo de $C_p^*(G)$, pelo menos no caso em que G seja comutativo. A única razão para ter dedicado tantas páginas a este exemplo foi mostrar, através da análise de casos particulares, que este é realmente o caso. No ano passado foi provado que $C_p^*(G)$ é um invariante completo dos grupos abelianos finitos ([20]). Acreditamos que o mesmo acontece com $E(G)$, com a vantagem de que seu cálculo é mais fácil. Os assuntos principais desta tese impediram que dedicássemos mais tempo ao estudo desta álgebra.

O Teorema 7.38 é o mais importante da Parte II. Nele provamos que toda ação parcial tem uma ação envolvente a menos de equivalência Morita. Suponhamos que α é uma ação parcial sobre A , e seja $\mathcal{B}$ o fibrado de Fell associado a α . Em particular, a fibra B_ϵ sobre a identidade de G se identifica com A . Construímos uma C^* -álgebra $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, que chamamos C^* -álgebra reduzida dos núcleos de $\mathcal{B}$, sobre a qual existe uma ação natural β de G , e mostramos que $(\beta, \mathbb{K}_r(\mathcal{B}))$ é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α . Rapidamente descrito, isto é feito assim: $L^2(\mathcal{B})$ é um módulo de Hilbert pleno à direita sobre A , e portanto induz uma equivalência Morita entre A e I_r , onde $I_r = \mathcal{K}(L^2(\mathcal{B}))$, a C^* -álgebra dos operadores compactos do A -módulo de Hilbert $L^2(\mathcal{B})$. Acontece que I_r é um ideal de $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, e que β é a ação envolvente de $\beta|_{I_r}$, donde segue, após um certo trabalho, que β é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α . Mostramos, depois, que $(\beta, \mathbb{K}_r(\mathcal{B}))$ é um sistema dinâmico isomorfo a $(\delta, C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} G)$. Além da C^* -álgebra $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, consideramos outra C^* -álgebra $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ associada ao fibrado, definida através de uma construção universal. Provamos que $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ e $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ são naturalmente isomorfas.

Em [54], Quigg mostrou que a dualidade de Takai falhava para produtos cruzados por automorfismos parciais (i.e., produtos cruzados por certas ações parciais de $\mathbb{Z}$, determinadas por um automorfismo parcial de uma C^* -álgebra; os automorfismos parciais e seus produtos cruzados são o

antecedente imediato da teoria de ações parciais e os correspondentes produtos cruzados). Ele afirma inclusive que a dualidade de Takai tende a falhar tanto mais quanto mais parcial o automorfismo é. Em nossa terminologia, e de maneira pouco formal, isto corresponde ao seguinte fato: se α é uma ação global, então $I_r = \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ e β é equivalente Morita com α (é outra forma de expressar o teorema de Imai–Takai); se α é “muito parcial”, então I_r é apenas uma parte “pequena” de $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$. Porém, não tão pequena para que não possamos recuperar $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ a partir de I_r e de β . Por outro lado, sendo a restrição de β a I_r equivalente Morita com α , vemos que, mais do que falhar, a dualidade de Takai para ações parciais adquire uma forma diferente, que é a forma descrita neste trabalho: se α é uma ação parcial sobre A , então existe um ideal I_r de $A \rtimes_{\alpha,r} G \rtimes_{\delta,r} G$ que é equivalente Morita com A , e tal que a ação parcial $\delta|_{I_r}$ é equivalente Morita com α .

Finalmente, algumas palavras deveriam ser ditas sobre a escolha de construções espaciais em lugar de construções universais, ou seja, porque trabalhamos com produtos cruzados reduzidos por ações e coações, e não com produtos cruzados plenos. Mais do que uma preferência, fomos impulsados a isto pelo Teorema 6.6, onde mostramos que $A \rtimes_{\alpha,r} G \overset{M}{\sim} B \rtimes_{\beta,r} G$, sendo (β, B) a ação envolvente de (α, A) . Não conseguimos provar um resultado similar para os produtos cruzados plenos. Se tal resultado existe, naturalmente que outras escolhas são possíveis. De fato, na teoria de dualidade de Takai existem as duas versões, a espacial e a universal (ver [56]).

CAPÍTULO 4

Ações Envolventes na Categoria de Espaços Topológicos

Estudaremos, neste capítulo inicial da Parte II, o problema da existência e unicidade da ação envolvente em duas categorias: a categoria de conjuntos e funções, e a categoria de espaços topológicos e funções contínuas.

Na primeira seção nos concentramos na categoria dos conjuntos e funções. Começamos com um estudo das propriedades básicas das ações parciais sobre conjuntos, generalizando a teoria bem conhecida de ações globais sobre conjuntos. Em particular, mostramos que uma ação parcial transitiva é isomorfa a uma ação parcial por translação sobre um conjunto de classes laterais do grupo com respeito ao estabilizador de um elemento (4.21). Este resultado é a chave para mostrar que toda ação parcial tem uma ação envolvente. O Teorema 4.23 mostra que, além de existir, a ação envolvente de uma ação parcial está caracterizada por uma propriedade universal, e em particular é única. Duas caracterizações simples da ação envolvente são dadas em 4.29 e 4.30. Em 4.35, aplicamos os resultados prévios para estudar ações envolventes de ações parciais que comutam.

Na segunda seção consideramos ações parciais contínuas sobre espaços topológicos. Começamos apresentando um par de exemplos motivadores. O primeiro é a ação parcial obtida pela restrição de uma ação contínua sobre um espaço topológico a um subconjunto aberto deste espaço (4.38). Este exemplo é um dos fundamentos da noção de ação envolvente que consideraremos nesta categoria. O segundo exemplo provém da teoria de sistemas dinâmicos: a ação parcial é o fluxo de uma equação diferencial sobre uma variedade (4.39). A Proposição 4.40 está diretamente relacionada com este exemplo, porque mostra que uma ação parcial contínua de um grupo conexo sobre um espaço topológico compacto é necessariamente uma ação global, resultado que generaliza o bem conhecido fato de que as soluções de uma equação diferencial sobre uma variedade compacta estão definidas sobre toda a reta real. Resultados posteriores, dos Capítulos 6 e 7, mostrarão que, na verdade, toda ação parcial contínua de um grupo conexo sobre uma C^* -álgebra cujo espaço de ideais primitivos seja compacto é uma ação global (5.18 e 7.50).

Logo depois da Proposição 4.40, iniciamos o estudo do problema da ação envolvente neste contexto topológico. Neste sentido, o resultado principal é o Teorema 4.44, que mostra a existência e a unicidade da ação envolvente, e a caracteriza por uma propriedade universal. Apresentamos seguidamente um exemplo de importantes consequências: uma ação parcial sobre um espaço de Hausdorff cujo espaço envolvente não é de Hausdorff (4.50). Este exemplo implica que nem sempre existirá ação envolvente de uma ação parcial sobre uma C^* -álgebra (na categoria de C^* -álgebras). Posteriormente caracterizamos as ações parciais sobre espaços de Hausdorff que têm ação envolvente de Hausdorff: são aquelas cujo gráfico é fechado (4.51).

Em 4.46 e 4.47 damos construções alternativas das ações envolventes, tanto no caso de ações sobre conjuntos como no caso de ações sobre espaços topológicos (para quem tiver pressa, esta é uma ótima oportunidade para evitar a leitura da primeira parte do capítulo!). Usamos esta construção para descrever o espaço envolvente da ação parcial gerada por um homeomorfismo parcial de um espaço topológico.

Por último, no final do capítulo, comparamos propriedades topológicas da ação parcial e de sua ação envolvente, concluindo que em geral são as mesmas. Também vemos que os correspondentes espaços de órbitas são naturalmente homeomorfos. (4.62).

4.1. Ações envolventes de ações parciais sobre conjuntos

4.1.1. Ações parciais sobre conjuntos. Nesta seção lembramos a definição e fazemos um estudo primário das ações parciais, generalizando a teoria bem conhecida de ações plenas. Definimos morfismos entre ações parciais de G , de maneira que a classe de ações parciais de G com estes morfismos é uma categoria que contém como subcategoria plena à categoria de ações plenas e funções covariantes. O resultado principal da seção é o Lema 4.21, que descreve completamente às ações

parciais transitivas. Como no caso de ações plenas, uma ação parcial transitiva é isomorfa a uma ação por translação sobre um conjunto de classes laterais à esquerda segundo um subgrupo de G .

DEFINIÇÃO 4.1. Uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X é um par $\alpha = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\alpha_s\}_{s \in G})$ formado por uma coleção $\{X_s\}_{s \in G}$ de subconjuntos de X e uma coleção de bijeções $\{\alpha_s : X_{s^{-1}} \rightarrow X_s\}$, tais que:

1. $X_e = X$.

2. α_{st} é uma extensão de $\alpha_s \alpha_t$, onde o domínio de $\alpha_s \alpha_t$ é $\alpha_t^{-1}(X_{s^{-1}})$.

Se $\alpha = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\alpha_s\}_{s \in G})$ e $\beta = (\{Y_s\}_{s \in G}, \{\beta_s\}_{s \in G})$ são ações parciais de G sobre conjuntos X e Y , então um morfismo (ou G -morfismo) $\phi : \alpha \rightarrow \beta$ é uma função $\phi : X \rightarrow Y$ tal que, $\forall t \in G$, tem-se que $\phi(X_t) \subseteq Y_t$, e o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{t^{-1}} & \xrightarrow{\phi} & Y_{t^{-1}} \\ \alpha_t \downarrow & & \downarrow \beta_t \\ X_t & \xrightarrow{\phi} & Y_t \end{array}$$

OBSERVAÇÃO 4.2. O domínio de $\alpha_s \alpha_t$ está claramente contido em $X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}}$, pois α_{st} estende $\alpha_s \alpha_t$. Por outro lado, se $x \in X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}}$, existem $z = \alpha_{st}(x)$, $y = \alpha_t(x)$, de forma que $x = \alpha_{t^{-1}}(y)$, e como α_s estende $\alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}$, temos: $z = \alpha_{st} \alpha_{t^{-1}}(y) = \alpha_s(y) = \alpha_s \alpha_t(x)$, donde segue que x pertence ao domínio de $\alpha_s \alpha_t$. Em conclusão, $\text{dom}(\alpha_s \alpha_t) = X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}}$.

DEFINIÇÃO 4.3. Diremos que uma ação parcial $\tau = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\tau_s\}_{s \in G})$ é trivial se $X_s = X_{s^{-1}}$ e $\tau_s = id_{X_s}$, $\forall s \in G$. Os casos extremos de ações parciais triviais são a ação trivial do grupo e a ação parcial supertrivial, definida como: $X_e = X$, $X_s = \emptyset$ se $s \neq e$, $\tau_e = id_X$, e $\tau_s = \emptyset$ se $s \neq e$.

OBSERVAÇÃO 4.4. Se β é uma ação parcial de G sobre um conjunto Y , e τ é a ação parcial supertrivial de G sobre o conjunto X , então qualquer função $\phi : X \rightarrow Y$ é um morfismo $\phi : \tau \rightarrow \beta$.

OBSERVAÇÃO 4.5. É muito fácil verificar que a classe de ações parciais de G com os morfismos definidos acima formam uma categoria $\mathcal{A}_p(G)$ que contém à categoria $\mathcal{A}(G)$, de ações plenas de G e funções covariantes, como subcategoria plena. Cada morfismo injetivo é um monomorfismo. Inversamente, cada monomorfismo é uma função injetiva. Com efeito, suponhamos que ϕ é um monomorfismo. Quer dizer que se $\psi_1, \psi_2 : \gamma \rightarrow \alpha$ são morfismos tais que $\phi \psi_1 = \phi \psi_2$, então $\psi_1 = \psi_2$. Consideremos a ação parcial supertrivial τ de G sobre X (Definição 4.3). Então cada função $\psi : X \rightarrow X$ é um morfismo $\psi : \tau \rightarrow \alpha$. Se ϕ não fosse injetora, existiriam $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tais que $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Tomando $\psi_1 = id_X$, $\psi_2 : X \rightarrow X$ tal que $\psi_2(x) = x$ se $x \neq x_1, x_2$, e $\psi_2(x_1) = x_2, \psi_2(x_2) = x_1$, teríamos que $\phi \psi_1 = \phi \psi_2$, mas $\psi_1 \neq \psi_2$, o que contradiz o fato de ϕ ser um monomorfismo. Isto mostra que se ϕ é um monomorfismo, então ϕ é uma função injetiva.

Com a notação usada na Definição 4.1, introduzimos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.6. Se β é uma ação plena sobre o conjunto Y , e $\phi : \alpha \rightarrow \beta$ é um monomorfismo, diremos que (ϕ, Y, β) , ou simplesmente β , é uma extensão de α .

EXEMPLO 4.7. Suponhamos que $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação, e seja $X \subseteq Y$. Para $s \in G$ consideremos $X_{s-1} = \beta_s^{-1}(X) \cap X$, e $\alpha_s : X_{s-1} \rightarrow X_s$ tal que $\alpha_s(x) = \beta_s(x)$. Então $\alpha = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\alpha_s\}_{s \in G})$ é uma ação parcial, e a inclusão $\iota : X \hookrightarrow Y$ é um morfismo. Assim, (ι, Y, β) é uma extensão de α .

DEFINIÇÃO 4.8. Se $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação e $X \subseteq Y$, a ação parcial α construída no Exemplo 4.7 acima se chama restrição de β ao conjunto X , e se denota $\alpha = \beta|_X$.

OBSERVAÇÃO 4.9. A noção de restrição não é exatamente a oposta da noção de extensão. Mais precisamente, se α é uma ação parcial sobre $X \subseteq Y$, e β é uma ação sobre Y tal que $\forall t \in G$ e $x \in X_{t-1}$ temos $\beta_t(x) = \alpha_t(x)$, então é verdade que (ι, Y, β) é uma extensão de α , mas não podemos afirmar que $\alpha = \beta|_X$. Por exemplo, se τ é a ação parcial supertrivial de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2$, e β é a ação por translação $\beta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, então $(id_{\mathbb{Z}_2}, \mathbb{Z}_2, \beta)$ é uma extensão de τ , mas $\alpha \neq \beta = \beta|_{\mathbb{Z}_2}$.

OBSERVAÇÃO 4.10. Como mostra o exemplo de 4.9, um morfismo entre ações parciais pode ser bijetivo sem ser um isomorfismo. Porém, se $\alpha = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ e $\beta = (\{Y_t\}_{t \in G}, \{\beta_t\}_{t \in G})$ são ações parciais e $\phi : \alpha \rightarrow \beta$ é um morfismo bijetivo tal que $\phi(X_t) = Y_t$, $\forall t \in G$, então é fácil ver que ϕ^{-1} é um morfismo de β em α , que é inverso de ϕ , e assim concluímos que ϕ é um isomorfismo.

A seguinte é uma versão puramente conjuntista do Lemma 1.2 em [55].

PROPOSIÇÃO 4.11. Sejam G um grupo e $\alpha = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\alpha_s\}_{s \in G})$ um par formado por uma coleção $\{X_s\}_{s \in G}$ de subconjuntos de um conjunto Y , e $\alpha_s : X_{s-1} \rightarrow X_s$ uma bijeção, $\forall s \in G$. Então α é uma ação parcial sobre $X := X_e$ se e somente se as condições seguintes são satisfeitas, $\forall s, t \in G$:

1. α_e é a identidade sobre X , e $\alpha_{s-1} = \alpha_s^{-1}$.
2. $\alpha_s(X_{s-1} \cap X_t) = X_s \cap X_{st}$.
3. $\alpha_s \alpha_t : X_{t-1} \cap X_{t-1s-1} \rightarrow X_s \cap X_{st}$ é uma bijeção, e $\alpha_s \alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$, $\forall x \in X_{t-1} \cap X_{t-1s-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiro que as propriedades 1, 2 e 3 são verificadas por α . Devido à propriedade 3, só temos que ver que $X_{t-1} \cap X_{t-1s-1}$ contém $\alpha_t^{-1}(X_{s-1})$, o domínio de $\alpha_s \alpha_t$ considerado na Definição 4.1. Agora, se $x \in \alpha_t^{-1}(X_{s-1})$, temos que $\alpha_t(x) \in X_{s-1} \cap X_t$, e portanto, usando 2, concluímos que $\alpha_s \alpha_t(x) \in X_s \cap X_{st}$. Quer dizer que $\alpha_t^{-1}(X_{s-1}) \subseteq (\alpha_s \alpha_t)^{-1}(X_s \cap X_{st}) = X_{t-1} \cap X_{t-1s-1}$, onde a última igualdade se deve à propriedade 3.

Suponhamos agora que α é uma ação parcial. Por 1 da Definição 4.1, temos que α_e está definida sobre X , e por 2 da Definição 4.1, $\alpha_e = \alpha_{e^2}$ é uma extensão de α_e^2 , quer dizer, $\alpha_e = \alpha_e^2$; segue que

$$id_X = \alpha_e^{-1} \alpha_e = \alpha_e^{-1} \alpha_e^2 = \alpha_e.$$

Por 2 de 4.1, e pela conclusão obtida acima, temos que id_X é uma extensão de $\alpha_s \alpha_{s-1}$ e de $\alpha_{s-1} \alpha_s$, e portanto $\alpha_s^{-1} = \alpha_{s-1}$. Isto demonstra 1.

Vejamos 2: se $x \in X_{s^{-1}} \cap X_t$, então $\alpha_s(x) \in X_s$; por outro lado, $x = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(x))$, e portanto

$$\alpha_s(x) = \alpha_s \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(x)) = \alpha_{st}(\alpha_{t^{-1}}(x)),$$

pois α_{st} estende $\alpha_s \alpha_t$. Segue que $\alpha_s(x)$ pertence a X_{st} , a imagem de α_{st} , e concluímos que $\alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) \subseteq X_s \cap X_{st}$. Mas então, usando de novo esta inclusão, com s^{-1} em lugar de s , temos:

$$X_{s^{-1}} \cap X_t = \alpha_{s^{-1}} \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) \subseteq \alpha_{s^{-1}}(X_s \cap X_{st}) \subseteq X_{s^{-1}} \cap X_t,$$

e portanto $\alpha_{s^{-1}}(X_s \cap X_{st}) = X_{s^{-1}} \cap X_t$; logo, $X_s \cap X_{st} = \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t)$, donde segue 3. $\square$

OBSERVAÇÃO 4.12. No conjunto de condições 1,2,3 do Lema acima, a condição 2 pode ser substituída pela condição aparentemente mais fraca

$$2' : \quad \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) \subseteq X_s \cap X_{st}.$$

A razão é que $\alpha_{s^{-1}} \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) = X_{s^{-1}} \cap X_t$, por 3.

Seja $\alpha = (\{X_s\}_{s \in G}, \{\alpha_s\}_{s \in G})$ uma ação parcial sobre o conjunto X . Definimos $\Gamma_\alpha \subseteq G \times X$ como:

$$\Gamma_\alpha = \{(t, x) : x \in X_{t^{-1}}\}.$$

Denotaremos também por α à função $\Gamma_\alpha \rightarrow X$ tal que $(t, x) \mapsto (t, \alpha_t(x))$. Finalmente, se $x \in X$, definimos

$$A_x = \{t \in G : (t, x) \in \Gamma_\alpha\}.$$

Em outras palavras, A_x é o subconjunto de G formado pelos elementos t tais que x está no domínio de α_t , ou, ainda, A_x é o conjunto de elementos de G que agem sobre x .

PROPOSIÇÃO 4.13. *Sejam α uma ação parcial sobre o conjunto X e $A = \bigcap_{x \in X} A_x$. Então A é um submonóide de G . Se cada elemento de A tem ordem finita, então A é um subgrupo de G .*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $s, t \in A$. Se $x \in X$, então $(t, x) \in \Gamma_\alpha$, pois $t \in A$, e pela mesma razão $(s, \alpha_t(x)) \in \Gamma_\alpha$. Como α_{st} estende $\alpha_s \alpha_t$, concluímos que $(st, x) \in \Gamma_\alpha$. Como isso é para todo $x \in X$, vemos que $st \in A$. Pela definição de ação parcial, $e \in A_x, \forall x \in X$, e portanto A_x tem unidade. A segunda afirmação da Proposição é evidente. $\square$

EXEMPLO 4.14. Seja α a ação parcial de $\mathbb{R}$ sobre $X = [0, +\infty)$, obtida restringindo a ação por translação de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R} : (t, x) \mapsto t + x$. Então $X_t = [-t, +\infty) \cap [0, +\infty)$, ou seja, $X_t = [0, +\infty)$ se $t \geq 0$, $X_t = [|t|, +\infty)$ se $t < 0$. Portanto, se $x \in X$, temos que $A_x = [-x, +\infty)$, donde

$$A = \bigcap_{x \in X} A_x = \bigcap_{x \geq 0} [-x, +\infty) = [0, +\infty),$$

que é um submonóide mas não um subgrupo de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 4.15. Seja α uma ação parcial sobre X , e seja $x \in X$. A órbita de x é $o(x) = \{\alpha_t(x) : t \in A_x\}$. Diremos que x é um ponto fixo se $o(x) = \{x\}$, e diremos que a ação é transitiva se existe $x \in X$ tal que $o(x) = X$.

PROPOSIÇÃO 4.16. *Sejam α uma ação parcial sobre X , e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : y \in o(x)\}$. Então $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em X , cujas classes de equivalência são as órbitas da ação parcial.*

DEMONSTRAÇÃO. $e \in A_x, \forall x$, e então $(x, \alpha_e(x)) = (x, x) \in \mathcal{R}$; portanto, a relação é reflexiva. Também é simétrica: se $y \in o(x)$, existe $t \in A_x$ tal que $\alpha_t(x) = y$, e portanto $y \in X_t$; mas $\alpha_{t^{-1}}(y) = \alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(x)) = \alpha_{t^{-1}t}(x) = \alpha_e(x) = x$, donde $x \in o(y)$, ou seja, $(y, x) \in \mathcal{R}$.

Com respeito à propriedade transitiva, suponhamos que $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$. Existem $s \in A_x, t \in A_y$, tais que $\alpha_s(x) = y, \alpha_t(y) = z$. Logo, $x \in \text{dom}(\alpha_t \alpha_s) \subseteq \text{dom}(\alpha_{ts})$, e $\alpha_{ts}(x) = \alpha_t \alpha_s(x) = \alpha_t(y) = z$; então $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Finalmente, é óbvio pela definição de $\mathcal{R}$ que as classes de equivalência são as órbitas de α . $\square$

DEFINIÇÃO 4.17. Seja $x \in X$. O estabilizador de x é $G_x = \{t \in A_x : \alpha_t(x) = x\}$. Se for necessário indicar a dependência com respeito à ação α , o denotaremos G_x^α ; usaremos a mesma convenção para todos os objetos definidos a partir de uma ação parcial.

PROPOSIÇÃO 4.18. *Sejam α uma ação parcial sobre o conjunto X , e seja $x \in X$. Então G_x é um subgrupo de G . Além disso, se $y = \alpha_t(x)$, então:*

1. $G_y = tG_x t^{-1}$.
2. $A_y = A_x t^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Notemos primeiro que $e \in G_x$ e, se $t \in G_x$, então $x = \alpha_t(x) \in \text{dom} \alpha_{t^{-1}}$, e $\alpha_{t^{-1}}(x) = \alpha_{t^{-1}} \alpha_t(x) = \alpha_e(x) = x$, donde $t^{-1} \in G_x$. Sejam agora $s, t \in G_x$. Então $\alpha_s \alpha_t(x) = \alpha_s(x) = x$, e como α_{st} é uma extensão de $\alpha_s \alpha_t$, vemos que $st \in G_x$. Assim, G_x é um subgrupo de G .

Se $y = \alpha_t(x)$, e $s \in G_x$, temos que $\alpha_t \alpha_s \alpha_{t^{-1}}(y) = \alpha_t \alpha_s(x) = \alpha_t(x) = y$, o que mostra que $tG_x t^{-1} \subseteq G_y$, e também que $t^{-1}G_y t \subseteq G_x$, pois $x = \alpha_{t^{-1}}(y)$. Logo: $G_y \subseteq tG_x t^{-1} \subseteq G_y$, e concluímos que $G_y = tG_x t^{-1}$.

Se $y = \alpha_t(x)$ e $s \in A_x$, então $\alpha_s \alpha_{t^{-1}}(y) = \alpha_{st^{-1}}(y)$, e portanto $st^{-1} \in A_y$. Logo $A_x t^{-1} \subseteq A_y$, e da mesma forma $A_y t \subseteq A_x$, donde segue que $A_y = A_x t^{-1}$. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.19. *Sejam $x \in X$ e R um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de G_x em G . Então:*

$$A_x = \biguplus_{r \in R \cap A_x} rG_x$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $r \in R \cap A_x$ e $s \in G_x$; então é claro que $rs \in A_x$, e portanto $\biguplus_{r \in R \cap A_x} rG_x \subseteq A_x$. Por outro lado, dado $t \in A_x$, existem únicos $r_t \in R, s_t \in G_x$, tais que $r_t s_t = t$. Isto implica que $r_t = t s_t^{-1} \in A_x G_x = A_x$. Logo $r_t \in R \cap A_x$, e portanto $t = r_t s_t \in r_t G_x \subseteq \biguplus_{r \in R \cap A_x} rG_x$, o que encerra a demonstração. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.20. *Sejam $N = \bigcap_{x \in X} G_x$, e A como na Proposição 4.13. Então $N \subseteq A$, e N é um subgrupo de G tal que $tNt^{-1} \subseteq N$, $\forall t \in A$. Em particular N é normal em A quando A é um subgrupo.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 4.19, temos que $G_x \subseteq A_x$, $\forall x \in X$, e portanto

$$N = \bigcap_{x \in X} G_x \subseteq \bigcap_{x \in X} A_x = A.$$

Finalmente, $tNt^{-1} \subseteq N$, pela Proposição 4.18. $\square$

LEMA 4.21. *Seja α uma ação parcial sobre X , e seja $x \in X$. Então $\phi_x : o(x) \rightarrow A_x/G_x$ tal que $\alpha_t(x) \mapsto tG_x$ é um isomorfismo, onde consideramos sobre A_x/G_x a ação parcial obtida por restrição da ação por translação $G \times G/G_x \rightarrow G/G_x$, e sobre $o(x)$ a restrição de α .*

DEMONSTRAÇÃO. Notar que se $s, t \in A_x$, então $\alpha_t(x) = \alpha_s(x)$ se e somente se $s^{-1}t \in G_x \iff sG_x = tG_x$, donde vemos que ϕ_x está definida e é injetiva, tomando valores sobre G/G_x . Além disso, se $t \in A_x$, tem-se que $\phi_x(\alpha_t(x)) = tG_x \in A_x/G_x$. Se $y = \alpha_t(x)$ e $s \in A_y$, então

$$\begin{aligned} \phi_x(\alpha_s(y)) &= \phi_x(\alpha_s\alpha_t(x)) \\ &= \phi_x(\alpha_{st}(x)) \\ &= (st)G_x \\ &= s(tG_x) \\ &= s\phi_x(\alpha_t(x)) \\ &= s\phi_x(y), \end{aligned}$$

e portanto ϕ é um morfismo. Como é claro que ϕ também é sobrejetivo, vemos que é um morfismo bijetivo. Notemos, para terminar, que se $s, t \in A_x$, então $sG_x = tG_x$ se e somente se $t^{-1}s \in G_x$, e portanto $\alpha_{t^{-1}s}(x) = x$, e como α_s estende $\alpha_t\alpha_{t^{-1}s}$, temos que $\alpha_s(x) = \alpha_t(x)$. Assim, temos definida uma função $\psi_x : A_x/G_x \rightarrow o(x)$, tal que $tG_x \mapsto \alpha_t(x)$. ψ_x é um morfismo: sejam $t, s \in A_x$, tais que $stG_x \in A_x/G_x$; por 4.19, $G_x \subseteq A_x$, donde $st \in A_x$, e além disso:

$$\begin{aligned} \psi_x(stG_x) &= \psi_x((st)G_x) \\ &= \alpha_{st}(x) \\ &= \alpha_s\alpha_t(x) \\ &= \alpha_s(\psi_x(tG_x)). \end{aligned}$$

Por outro lado, é claro que ψ_x é a função inversa de ϕ_x , e que ψ_x é um G -morfismo. Daí segue que ϕ_x é um isomorfismo de ações parciais. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.22 (Equação das classes). *Sejam α uma ação parcial sobre X e $W \subseteq X$ um conjunto de representantes das órbitas. $F \subseteq X$ o conjunto dos pontos fixos. Então:*

$$X = F \uplus \bigsqcup_{w \in W \setminus F} o(w),$$

e portanto:

$$|X| = |F| + \sum_{w \in W \setminus F} |A_w/G_w|.$$

DEMONSTRAÇÃO. A primeira equação é obviamente verdadeira, pois as órbitas são as classes de equivalência de X , e portanto constituem uma partição de X . Daí segue imediatamente que $|X| = |F| + \sum_{w \in W \setminus F} |o(w)|$ e, usando o Lema 4.21, sabemos que $|o(w)| = |A_w/G_w|$, donde a segunda equação segue. $\square$

4.1.2. Ações envolventes. O resultado principal desta seção é o Teorema 4.23, que estende o Lema 4.21, e que mostra que toda ação parcial é a restrição de uma ação plena, que chamaremos envolvente.¹ Após este teorema, alguns exemplos são considerados, como também alguns critérios (4.29 e 4.30) para decidir quando uma extensão de uma ação parcial é sua ação envolvente.

TEOREMA 4.23. *Seja α uma ação parcial de G sobre X . Então existe um par $(\phi, \dot{\alpha})$ formado por uma ação plena $\dot{\alpha}$ de G sobre um conjunto $\dot{X}$, e um morfismo $\phi : \alpha \rightarrow \dot{\alpha}$, tal que para todo morfismo $\psi : \alpha \rightarrow \beta$, onde β é uma ação plena, existe um único morfismo $\eta : \dot{\alpha} \rightarrow \beta$ tal que $\eta\phi = \psi$:*

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\phi} & \dot{\alpha} \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta \\ & \beta & \end{array}$$

Além disso, o par $(\phi, \dot{\alpha})$ fica unicamente determinado, a menos de isomorfismos canônicos, pela propriedade acima. Tem-se que $(\phi, \dot{X}, \dot{\alpha})$ é uma extensão de α , e $\alpha \cong \bar{\alpha} := \dot{\alpha}|_{\phi(X)}$. Desta forma obtemos um funtor $\mathcal{A}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}(G)$, que leva α em $\bar{\alpha}$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $W \subseteq X$ um conjunto de representantes das órbitas, $\dot{X} = \bigsqcup_{w \in W} G/G_w$, e $\phi : X \rightarrow \dot{X}$ tal que $\phi = \bigsqcup_{w \in W} \phi_w$, onde $\phi_w : o(w) \rightarrow A_w/G_w$ é tal que $\phi_w(\alpha_t(w)) = tG_w$. Como as ϕ_w são injetivas (Lema 4.21), temos que ϕ é injetiva. Consideremos sobre $\dot{X}$ a ação $\dot{\alpha} : G \times \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ dada por $\dot{\alpha}(t, sG_w) = tsG_w$. Se $x \in X$, existe um único $w \in W$, e algum $t \in G$, tais que $x = \alpha_t(w)$. Suponhamos que $s \in A_x$; então $\alpha_s(x) = \alpha_s\alpha_t(w) = \alpha_{st}(w)$, donde

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_s(x)) &= \phi(\alpha_{st}(w)) \\ &= \phi_w(\alpha_{st}(w)) \\ &= stG_w \\ &= \dot{\alpha}_s(tG_w) \\ &= \dot{\alpha}_s(\phi_w(\alpha_t(w))) \\ &= \dot{\alpha}_s(\phi(x)) \end{aligned}$$

Logo, $\phi : \alpha \rightarrow \dot{\alpha}$ é um monomorfismo, e portanto $(\phi, \dot{X}, \dot{\alpha})$ é uma extensão de α .

Para ver que $\alpha \cong \bar{\alpha}$, onde $\bar{\alpha}$ é a restrição de $\dot{\alpha}$ a $\phi(X)$, por 4.10 basta ver que $\forall s \in G$, temos $\phi(X_s) = \dot{X}_s$, onde $\dot{X}_s = \dot{\alpha}_s^{-1}(\phi(X)) \cap \phi(X)$. Fixado $x \in X_{s^{-1}}$, existem $w \in W$, $t \in G$, tais que $x = \alpha_t(w)$, e pela Proposição 4.18, temos que $A_x = A_w t^{-1}$. Da mesma forma, $A_{\phi(x)}^{\bar{\alpha}} = A_{\phi(w)}^{\dot{\alpha}} t^{-1}$, pois $\phi(x) = \bar{\alpha}_t(\phi(w))$. Por outro lado, $A_{\phi(w)}^{\dot{\alpha}} = \{r \in G : rG_w \in A_w/G_w\} = A_w$. Portanto

¹Em termos categóricos, se $\mathcal{F} : \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$ é o funtor de esquecimento, então $\dot{\alpha}$ é o universal de α com respeito a $\mathcal{F}$, e portanto é único a menos de isomorfismos em $\mathcal{A}(G)$

$A_x = A_{\phi(x)}^{\bar{\alpha}}, \forall x \in X$. Agora, $X_{s^{-1}} = \{x \in X : s \in A_x\} = \{x \in X : s \in A_{\phi(x)}^{\bar{\alpha}}\}$, e portanto $\phi(X_{s^{-1}}) = \{\phi(x) : s \in A_{\phi(x)}^{\bar{\alpha}}\} = \dot{X}_{s^{-1}}$. Concluimos então que $\alpha \cong \bar{\alpha}$.

Suponhamos agora que $\psi : \alpha \rightarrow \beta$ é um morfismo, onde β é uma ação sobre um conjunto Y . Queremos achar um morfismo $\eta : \dot{\alpha} \rightarrow \beta$ tal que $\eta\phi = \beta$. Como $\forall t \in G$ temos que $tG_w = \dot{\alpha}_t(\phi(w))$, e η deve ser um morfismo, tem que ser $\eta(tG_w) = \beta_t(\eta(\phi(w))) = \beta_t(\psi(w))$. Portanto, basta ver que se $tG_w = sG_w$, temos que $\beta_t(\psi(w)) = \beta_s(\psi(w))$ ou, equivalentemente, que $s^{-1}t \in G_{\psi(w)}^{\beta}$; mas $\beta_{s^{-1}t}(\psi(w)) = \psi(\alpha_{s^{-1}t}(w)) = \psi(w)$, pois $s^{-1}t \in G_w$.

A unicidade salvo isomorfismos da extensão $(\phi, \dot{X}, \dot{\alpha})$ se prova da maneira usual. $\square$

DEFINIÇÃO 4.24. Se α é uma ação parcial sobre um conjunto X , toda tripla $(\phi, \dot{\alpha}, \dot{X})$ como a fornecida pelo Teorema 4.23 acima será chamada ação envolvente de α . Em geral não faremos referência a aplicação ϕ , e diremos simplesmente que $\dot{\alpha}$ (ou $(\dot{\alpha}, \dot{X})$) é a ação envolvente de α (ou (α, X) respectivamente). O espaço $\dot{X}$ será chamado espaço ação envolvente.

OBSERVAÇÃO 4.25. Da construção da ação envolvente vemos que $|\dot{X}| \leq |G| |X/\alpha|$, e haverá igualdade quando os estabilizadores sejam todos triviais. Em particular, $\dot{X}$ será finito quando G e X sejam finitos.

EXEMPLO 4.26. Suponhamos que G é um grupo que age parcialmente sobre um conjunto X através da ação parcial supertrivial τ (lembrar 4.3). Notar que se $\gamma : G \times X \rightarrow X$ é uma ação, então γ é automaticamente uma extensão de τ . Seguindo a construção da ação envolvente feita no Teorema 4.23, vemos que na verdade a ação envolvente é $(\phi, \dot{X}, \dot{\tau})$, onde $\dot{X} = G \times X$, $\phi : X \rightarrow \dot{X}$ é dada por $\phi(x) = (e, x)$, e $\dot{\tau}_s(t, x) = (st, x)$, $\forall s, t \in G, x \in X$. Para qualquer ação γ como acima, $\eta : \dot{X} \rightarrow X$ tal que $(t, x) \mapsto x$, é o G -morfismo do Teorema 4.23.

EXEMPLO 4.27. É claro que se $\alpha : G \times X \rightarrow X$ é uma ação, então $\dot{X} = X$ e $\dot{\alpha} = \alpha$. Portanto o funtor $\alpha \mapsto \dot{\alpha}$ é inverso à direita do funtor de esquecimento $\mathcal{F}$.

EXEMPLO 4.28. Sejam $X = \{1, \dots, n\}$ e α a ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre X dada pela restrição da ação por translação de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$. Temos que todos os estabilizadores são triviais e que a ação é transitiva, donde, seguindo a prova do Teorema 4.23, podemos identificar $\dot{X}$ com $\mathbb{Z}$, $\phi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ com a inclusão $j \mapsto j - 1$, e então $\dot{\alpha} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é a ação por translação.

Uma outra extensão natural que existe para a ação parcial α acima é a seguinte: identifiquemos X com $\mathbb{Z}_n$, e definamos $\gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ tal que $\gamma(k, \bar{j}) = \overline{k+j}$. Então deve existir um $\mathbb{Z}$ -morfismo $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, ou seja, $\eta(\dot{\alpha}_k(j)) = \gamma_k(\eta(j))$; é claro que η é precisamente a projeção canônica $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$.

Nos exemplos considerados acima, achamos as correspondentes ações envolventes seguindo a prova do Teorema 4.23. A proposição a seguir fornece um critério um pouco mais prático para determinar se uma ação que estende uma ação parcial é a ação envolvente ou não. Ver também o Corolário 4.30

PROPOSIÇÃO 4.29. *Sejam α uma ação parcial de G sobre X , e (ψ, Y, β) uma extensão de α . Então (ψ, Y, β) é a ação envolvente de α se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. *A aplicação quociente $\psi : X/\alpha \rightarrow Y/\beta$ é uma bijeção.*
2. *$G_x^\alpha = G_{\psi(x)}^\beta, \forall x \in X$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiro que β é a ação envolvente. Então β é isomorfa à ação α construída no Teorema 4.23, quem obviamente satisfaz 1 e 2.

Inversamente, suponhamos que a extensão (ψ, Y, β) satisfaz 1 e 2. Vejamos que ela possui a propriedade universal que define a ação envolvente: para todo morfismo $\lambda : \alpha \rightarrow \gamma$, onde γ é uma ação plena, existe um morfismo $\eta : \beta \rightarrow \gamma$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\psi} & \beta \\ & \searrow \lambda & \swarrow \eta \\ & \gamma & \end{array}$$

Suponhamos então que γ é uma ação plena sobre um conjunto Z . Queremos achar $\eta : Y \rightarrow Z$ tal que $\eta(\beta_t(y)) = \gamma_t(\eta(y))$, $\forall y \in Y$, e tal que $\eta\psi = \lambda$. Seja R um conjunto de representantes das α -órbitas. Por 1, $\psi(R)$ é um conjunto de representantes das β -órbitas. Agora, dado $y \in Y$, existem $t \in G$ e um único $r \in R$ tais que $\beta_t(\psi(r)) = y$. Se tal η existe, devemos ter:

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \eta(\beta_t(\psi(r))) \\ &= \gamma_t(\eta(\psi(r))) \\ &= \gamma_t(\lambda(r)). \end{aligned}$$

Agora, se $\beta_t(\psi(r)) = \beta_s(\psi(r)) = y$, então $\beta_{s^{-1}t}(\psi(r)) = \psi(r)$, e portanto $s^{-1}t \in G_{\psi(r)}^\beta = G_r^\alpha$, devido a 2. Segue então que:

$$\lambda(r) = \lambda(\alpha_{s^{-1}t}(r)) = \gamma_{s^{-1}t}(\lambda(r)),$$

pois λ é um G -morfismo. Como γ é uma ação, então

$$\gamma_s(\lambda(r)) = \gamma_s(\gamma_{s^{-1}t}(\lambda(r))) = \gamma_t(\lambda(r)).$$

Isto mostra que podemos definir η , e é óbvio agora que η é um G -morfismo. Finalmente, se $x \in X$ é tal que $x = \alpha_t(r)$, $r \in R$, então

$$\begin{aligned} \eta\psi(x) &= \eta\psi(\alpha_t(r)) \\ &= \eta(\beta_t(\psi(r))) \\ &= \gamma_t(\lambda(r)) \\ &= \lambda(\alpha_t(r)) \\ &= \lambda(x) \end{aligned}$$

Segue então que $\eta\psi = \lambda$. □

COROLÁRIO 4.30. *Se $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação, $X \subseteq Y$, e $\alpha = \beta|_X$, então $\alpha = \beta|_{\dot{X}}$, onde $\dot{X} = \bigcup_{x \in X} \alpha^\beta(x)$. Em particular, se α é uma ação parcial sobre um conjunto X , e β é uma extensão de α tal que $\alpha = \beta|_X$, então α é a restrição de β à β -órbita de X .*

DEMONSTRAÇÃO. Se $x \in X$, temos que $G_x^\beta \subseteq A_x^\alpha$, e portanto $G_x^\beta = G_x^\alpha$. Por outro lado, a definição de $\tilde{X}$ implica que se $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$ é a inclusão, então o morfismo quociente $\tilde{\iota} : X/\alpha \rightarrow \tilde{X}/(\beta|_{\tilde{X}})$ é sobrejetivo. Finalmente, se $x_1, x_2 \in X$ são tais que $x_2 = \beta_t(x_1)$ para algum $t \in G$, segue que $t \in A_{x_1}^\alpha$, e que $x_2 = \alpha_t(x_1)$, donde deduzimos que $\tilde{\iota}$ é também injetiva. Assim obtemos, usando a Proposição 4.29, que $\tilde{\alpha} = \beta|_{\tilde{X}}$. $\square$

EXEMPLO 4.31. Seja G agindo parcialmente por conjugação sobre um subconjunto X , e sejam $Y = \bigcup_{t \in G} tXt^{-1}$ e $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ a ação por conjugação. Esta extensão é a ação envolvente da ação parcial considerada, devido ao Corolário 4.30.

EXEMPLO 4.32. Suponhamos que α é uma ação parcial de G sobre X , tal que $G_x^\alpha = \{e\}$, $\forall x \in X$ (a ação parcial é “livre”). Indiquemos por $\bar{x}$ a órbita de $x \in X$, e seja $\sigma : X/\alpha \rightarrow X$ uma seção, i.e., $\sigma(\bar{x}) = \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in X/\alpha$. Como $G_x^\alpha = \{e\}$, existe um único $t_x \in G$ tal que $x = \alpha_{t_x}(\sigma(\bar{x}))$, e portanto $t_{\alpha_s(x)} = st_x$, $\forall s \in A_x$. Sejam $Y = G \times (X/\alpha)$, $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ tal que $\beta_s(t, \bar{x}) = (st, \bar{x})$, e $\phi : X \rightarrow Y$ tal que $\phi(x) = (t_x, \bar{x})$. Então, se $s \in A_x$,

$$\phi(\alpha_s(x)) = (t_{\alpha_s(x)}, \bar{x}) = (st_x, \bar{x}) = \beta_s(t_x, \bar{x}) = \beta_s(\phi(x)).$$

Se $\phi(x) = \phi(y)$, então $\bar{x} = \bar{y}$, $t_x = t_y$, e portanto $x = t_x \sigma(\bar{x}) = t_y \sigma(\bar{y}) = y$. Assim, (ϕ, Y, β) é uma extensão de α .

Claramente temos que $G_{\phi(x)}^\beta = \{e\}$, $\forall x \in X$, $\bigcup_{x \in X} \phi^\beta(\phi(x)) = Y$. Se $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, então $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, donde $\tilde{\phi}$ é injetora. Logo (ϕ, Y, β) é a ação envolvente de α pela Proposição 4.29.

EXEMPLO 4.33. Sejam G um grupo, $X = \{F \subseteq G : e \in F\}$, e α a ação parcial de G sobre X tal que $X_t = \{F \in X : t^{-1} \in F\}$, e $\alpha_t : X_{t^{-1}} \rightarrow X_t$ tal que $\alpha_t(F) = tF$. Então $\alpha = \beta|_X$, onde $\beta : G \times P(G) \rightarrow P(G)$ está dada por $(t, E) \mapsto tE$, e $P(G)$ denota a família de subconjuntos de G . Segue de 4.30 que a ação envolvente de α é $(\iota, \tilde{X}, \tilde{\alpha})$, onde $\tilde{X} = \{tF : F \in X, t \in G\} = P(G) \setminus \{\emptyset\}$, e ι é a inclusão.

Terminamos esta seção com uma aplicação a ações parciais que comutam.

DEFINIÇÃO 4.34. Sejam $\alpha = (\{X_t^\alpha\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ e $\beta = (\{X_s^\beta\}_{s \in H}, \{\beta_s\}_{s \in H})$ duas ações parciais dos grupos G e H sobre o conjunto X . Diremos que α e β comutam se:

1. $\beta_s(X_t^\alpha) \cap X_s^\beta = \alpha_t(X_s^\beta) \cap X_t^\alpha$, $\forall t \in G, s \in H$.
2. Se $t \in G, s \in H$, então $\alpha_t \beta_s(x) = \beta_s \alpha_t(x)$, $\forall x \in \beta_s^{-1}(X_{t^{-1}}^\alpha) \cap X_{s^{-1}}^\beta$.

PROPOSIÇÃO 4.35. Se α e β são ações parciais que comutam, dos grupos G e H sobre o conjunto X , então existem ações $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ que comutam, de G e H sobre um conjunto $\tilde{X}$, tais que $X \subseteq \tilde{X}$, $\alpha = \tilde{\alpha}|_X$ e $\beta = \tilde{\beta}|_X$, e $\tilde{X} = \bigcup_{t \in G, s \in H} \tilde{\alpha}_t \tilde{\beta}_s(X)$. A tripla $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{X})$ é única a menos de isomorfismos.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos $\gamma = (\{X_{(t,s)}\}_{(t,s) \in G \times H}, \{\gamma_{(t,s)}\}_{(t,s) \in G \times H})$, onde

$$X_{(t,s)} = \beta_s(X_t^\alpha) \cap X_s^\beta, \quad \gamma_{(t,s)} = \alpha_t \beta_s.$$

Então γ é uma ação parcial de $G \times H$ sobre X e, se $\iota_G : G \rightarrow G \times H$ e $\iota_H : H \rightarrow G \times H$ são as incluições canônicas, então $\alpha = \gamma_{\iota_G}$ e $\beta = \gamma_{\iota_H}$.

Seja agora $(\dot{\gamma}, \dot{X})$ a ação envolvente da ação parcial γ . Obtemos ações $\hat{\alpha} := \dot{\gamma}_{\iota_G}$ e $\hat{\beta} := \dot{\gamma}_{\iota_H}$ de G e H sobre $\dot{X}$, que claramente satisfazem $\alpha = \hat{\alpha}|_X$ e $\beta = \hat{\beta}|_X$. A unicidade se deduz da unicidade de $\dot{\gamma}$. $\square$

OBSERVAÇÃO 4.36. Notar que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são ao mesmo tempo extensões das ações envolventes $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ de α e β , e coincidem com elas se e somente se $o^{\hat{\alpha}}(X) = \dot{X}$ e $o^{\hat{\beta}}(X) = \dot{X}$.

4.2. Ações envolventes de ações parciais topológicas

Nesta seção tentaremos obter resultados análogos aos da seção anterior, mas num contexto topológico. De fato, mostraremos que se G é um grupo topológico agindo sobre um espaço topológico X através de uma ação parcial contínua α , e se $(\dot{\alpha}, \dot{X})$ é a correspondente ação envolvente, então existe sobre $\dot{X}$ uma única topologia $\dot{\tau}$ tal que $\dot{\alpha} : G \times \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ é contínua, $X \subseteq \dot{X}$ é aberto, e a topologia relativa de X como subespaço de $\dot{X}$ coincide com a topologia original de X . Teremos que $(\dot{\alpha}, \dot{X}, \dot{\tau})$ está unicamente determinada a menos de isomorfismos. Veremos também que α e $\dot{\alpha}$ compartilham várias propriedades topológicas, como minimalidade, liberdade topológica, etc. Finalmente, caracterizamos aquelas ações parciais sobre espaços topológicos de Hausdorff para as quais o espaço envolvente também é de Hausdorff. O fato de existirem ações parciais sobre espaços de Hausdorff com espaços envolventes não de Hausdorff será de muita importância quando consideremos ações parciais na categoria de C^* -álgebras.

No que segue, G é um grupo topológico com topologia τ_G , X é um espaço topológico com topologia τ , $\alpha = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial de G sobre X , com ação envolvente $\dot{\alpha}$ agindo sobre o espaço envolvente $\dot{X}$, que contém X como subconjunto. Suporemos ainda que a ação parcial α é contínua, segundo a definição seguinte (ver também 5.3 e 8.3):

DEFINIÇÃO 4.37. Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma ação parcial $\alpha = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ do grupo G sobre X é dita contínua se o domínio de α , definido como $\Gamma_\alpha = \{(t, x) \in G \times X : x \in X_{t^{-1}}\}$, é aberto em $G \times X$, e a função $\Gamma_\alpha \rightarrow X$ dada por $(x, t) \mapsto \alpha_t(x)$ é contínua. Identificaremos esta função com a ação parcial α , e em particular a denotaremos também pelo símbolo α . Notar que esta definição implica que cada $\alpha_t : X_{t^{-1}} \rightarrow X_t$ é um homeomorfismo.

EXEMPLO 4.38. Suponhamos que $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação contínua do grupo topológico G sobre o espaço topológico Y , e seja $X \subseteq Y$ um subconjunto aberto. Consideremos a ação parcial $\alpha := \beta|_X$ (ver 4.8, 4.7). Afirmamos que α é uma ação parcial contínua. Só é necessário mostrar que Γ_α é aberto, porque o resto decorre da continuidade de β . Agora, seja $(t, x) \in \Gamma_\alpha$, de forma que $\alpha_t(x) \in X$. Como X é aberto e β é contínua, existe uma vizinhança W de $G \times Y$ tal que $\beta(W) \subseteq X$, e portanto $W \subseteq \Gamma_\alpha$, pela definição de α . Portanto Γ_α é aberto.

Antes de começar a estudar as ações envolventes de ações parciais contínuas, gostaríamos de apresentar uma situação típica em que tem uma ação parcial presente: o fluxo de um sistema dinâmico

EXEMPLO 4.39. Consideremos uma variedade diferenciável X e sobre ela um campo vetorial diferenciável $\mathbf{v} : X \rightarrow TX$. Podemos considerar então a equação diferencial

$$(6) \quad \dot{x} = \mathbf{v}(x)$$

Então o fluxo gerado pela equação (6) é uma ação parcial contínua de $\mathbb{R}$ sobre X (de fato: diferenciável).

Vejamos os detalhes com cuidado. Citando 1.48 de [63], podemos afirmar que para cada $x \in X$ existe uma curva diferenciável γ_x , cujo domínio é um intervalo (a_x, b_x) , e tal que:

1. $0 \in (a_x, b_x)$, e $\gamma_x(0) = x$, $\forall x \in X$.
2. γ_x é uma curva integral de $\mathbf{v}$, ou seja: $\dot{\gamma}_x(t) = \mathbf{v}(\gamma_x(t))$, para todo $x \in X$ e para todo t no domínio de γ_x .
3. Se $\mu : (c, d) \rightarrow X$ é outra curva integral de $\mathbf{v}$ tal que $\mu(0) = x$, então $(c, d) \subseteq (a_x, b_x)$, e $\mu = \gamma_x|_{(c, d)}$.
4. Para cada $t \in \mathbb{R}$ seja $X_{-t} = \{x \in X : t \in (a_x, b_x)\}$, e seja $\alpha_t : X_{-t} \rightarrow X$ tal que $\alpha_t(x) = \gamma_x(t)$.

Então:

- (a) Para todo $x \in X$ existem $V \subseteq X$ aberto e $\epsilon > 0$ tais que $x \in V \subseteq X_{-t}$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e a transformação $(-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow X$ tal que $(t, y) \mapsto \alpha_t(y)$ é diferenciável.
- (b) X_t é aberto, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- (c) $X = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}$.
- (d) $\alpha_t : X_{-t} \rightarrow X_t$ é um difeomorfismo.
- (e) Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Então $\text{dom}(\alpha_s \alpha_t) \subseteq X_{-(s+t)}$, mas em geral não são iguais. Se $st > 0$, temos que $\text{dom}(\alpha_s \alpha_t) = X_{-(s+t)}$.

Além disto, se $y \in \text{dom}(\alpha_s \alpha_t)$, então $\alpha_s \alpha_t(y) = \alpha_{s+t}(y)$.

Seja $\Gamma_\alpha = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : x \in X_{-t}\}$. Então Γ_α é aberto. Com efeito, seja $(t, x) \in \Gamma_\alpha$. Por 4.(a), existem $\epsilon > 0$ e $V \subseteq D_s$, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, tais que $\alpha_t(x) \in V$ e existe $\alpha_s(y)$, $\forall (s, y) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V$: como α_t é contínua e X_t é aberto (por 4.(d) e (b), respectivamente), existe $U \subseteq X_t$ tal que $x \in U$ e $\alpha_t(U) \subseteq V$. Portanto, U está contido no domínio de $\alpha_s \alpha_t$, que está incluído no domínio de α_{s+t} . $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Segue que $U \times (t - \epsilon, t + \epsilon) \subseteq \Gamma_\alpha$, e portanto Γ_α é aberto.

Em conclusão, $\alpha = (\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{R}$ sobre a variedade X . Em geral, esta coleção de aplicações α_t , ou a aplicação $\Gamma_\alpha \rightarrow X$ tal que $(t, x) \mapsto \alpha_t(x)$, é chamado *fluxo* da equação diferencial (6). Consultar por exemplo [39].

Um resultado conhecido de sistemas dinâmicos diz que se $\mathbf{v}$ é um campo diferenciável sobre uma variedade compacta X , então as curvas integrais da equação (6) estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Na verdade, temos o seguinte resultado mais geral.

PROPOSIÇÃO 4.40. *Seja α uma ação parcial do grupo G sobre o espaço compacto X . Então existe um subgrupo aberto H de G tal que α restrita a H é uma ação global (uma ação global é uma ação no sentido usual: colocamos o adjetivo “global” para salientar que cada elemento do grupo age sobre cada elemento do espaço).*

Em particular, se G é conexo, α é uma ação global.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in X$, existem um aberto $U_x \subseteq X$ que contém x e um aberto simétrico $V_x \subseteq G$ que contém a identidade e de G , e tais que $V_x \times U_x \subseteq \Gamma_\alpha$. Como X é compacto, existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$. Seja $V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$, de forma que V é uma vizinhança simétrica da identidade. Agora, se $x \in X$, existe j tal que $x \in U_{x_j}$, e portanto $V \times \{x\} \subseteq V_{x_j} \times U_{x_j} \subseteq \Gamma_\alpha$. Então V está contido em cada A_x , o conjunto de elementos de G que agem sobre x . Consequentemente, $V \subseteq A = \bigcap_{x \in X} A_x$. Como A é um sub-monóide de G (4.13), o monóide $H =$

$\bigcup_{n \geq 1} V^n$ gerado por V está contido em A . Mas como V é simétrico, o monóide H também é simétrico, e portanto um subgrupo de G . Como V é aberto, H também é aberto.

Com respeito à última afirmação, é só lembrar que o único subgrupo aberto de um grupo conexo é o próprio grupo (se um subgrupo é aberto, também é aberta cada classe lateral segundo o subgrupo, o que implica, depois de tomar a união das classes disjuntas com o subgrupo, que o subgrupo será fechado; mas o único subconjunto não vazio aberto e fechado de um espaço conexo é o próprio espaço). $\square$

OBSERVAÇÃO 4.41. Decorre da demonstração da Proposição 4.40 acima, que se X é um espaço compacto, então A é aberto. Notar que, em geral, A é aberto se e somente se e é um ponto interior de A . O Exemplo 4.14 mostra que A pode ter pontos interiores ainda se e não é ponto interior.

A seguir iniciamos a procura de uma ação envolvente para uma ação parcial contínua. Guiados pelo Exemplo 4.38, tentaremos achar um espaço topológico Y que contenha como subespaço topológico aberto o espaço X onde ocorre nossa ação parcial, e também uma ação contínua sobre Y , tal que a restrição desta ação a X coincida com a ação parcial. Como já existem um conjunto envolvente $\dot{X}$ e uma ação envolvente $\dot{\alpha}$ da ação parcial, o que temos que achar é uma topologia adequada sobre $\dot{X}$, de forma que X seja um subespaço topológico aberto de $\dot{X}$, $\dot{\alpha}$ seja contínua sobre $\dot{X}$ com esta topologia, e a restrição de $\dot{\alpha}$ a X coincida com α .

Seja $\bar{\alpha}$ a restrição de $\dot{\alpha}$ a $G \times X$, ou seja: $\bar{\alpha} : G \times X \rightarrow \dot{X}$ é tal que $\bar{\alpha}(t, x) = \dot{\alpha}(t, x) = \dot{\alpha}_t(x)$.

PROPOSIÇÃO 4.42. A topologia final de $\dot{X}$ definida por $\bar{\alpha}$ é:

$$\dot{\tau} = \left\{ \bigcup_{t \in G} \dot{\alpha}_t(V_t) : V_t \in \tau \right\}.$$

Além disso, X é aberto em $\dot{X}$, e a inclusão $\iota : (X, \tau) \hookrightarrow (\dot{X}, \dot{\tau})$ é um homeomorfismo sobre sua imagem.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $t \in G$, $V \in \tau$. Então:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^{-1}(\dot{\alpha}_t(V)) &= \{(s, x) \in G \times H : \bar{\alpha}(s, x) = \dot{\alpha}(t, y), \text{ para algum } y \in V\} \\ &= \{(s, x) \in G \times H : \bar{\alpha}(t^{-1}s, x) \in V\} \\ &= (\bar{\alpha}(\lambda_t^{-1} \times id_X))^{-1}(V), \end{aligned}$$

onde $\lambda_t : G \rightarrow G$ é dada por $\lambda_t(s) = ts$. Como $\lambda_t^{-1} \times id_X : G \times X \rightarrow G \times X$ é um homeomorfismo, $(\bar{\alpha}(\lambda_t^{-1} \times id_X))^{-1}(V)$ será aberto em $G \times X$ se e somente se $\bar{\alpha}^{-1}(V)$ é aberto; mas como $V \subseteq X$, $\bar{\alpha}^{-1}(V) = \alpha^{-1}(V)$, que é aberto, pois Γ_α é aberto em $G \times X$ e α é contínua. Portanto, $\dot{\alpha}_t(V) \in \dot{\tau}$, $\forall t \in G$, $V \in \tau$.

Inversamente, suponhamos que $W \subseteq \dot{X}$ é aberto na topologia final. Então:

$$W = W \cap (\bigcup_{t \in G} \dot{\alpha}_t(X)) = \bigcup_{t \in G} (W \cap \dot{\alpha}_t(X)) = \bigcup_{t \in G} \dot{\alpha}_t(\bar{\alpha}^{-1}(W) \cap X).$$

Seja $V_t = \bar{\alpha}^{-1}(W) \cap X$. Basta mostrar que $V_t \in \tau$, $\forall t \in G$. Agora:

$$V_t = \{x \in X : \bar{\alpha}(t, x) \in W\} = \{x \in X : (t, x) \in \bar{\alpha}^{-1}(W)\} = p_2(\bar{\alpha}^{-1}(W)),$$

onde $p_2 : G \times X \rightarrow X$ é a projeção. Como $W \in \dot{\tau}$, então $\bar{\alpha}^{-1}(W) \in \tau_G \times \tau$, e como p_2 é aberta, concluímos que $V_t \in \tau$.

Fica claro da caracterização acima da topologia $\dot{\tau}$, que cada aberto V de X também pertence a $\dot{\tau}$, pois $V = \dot{\alpha}_\epsilon(V)$. Portanto a inclusão $\iota : X \hookrightarrow \dot{X}$ é aberta. Por outro lado, se $V_t \in \tau$, temos:

$$\begin{aligned} X \cap \dot{\alpha}_t(V_t) &= \{x \in X : \exists y \in V_t \text{ tal que } \dot{\alpha}_t(y) = x\} \\ &= \{x \in X : \exists y \in V_t \text{ tal que } \alpha_t(y) = x\} \\ &= \alpha_t(V_t \cap X_{t^{-1}}), \end{aligned}$$

que pertence a τ . Assim, ι é um homeomorfismo sobre sua imagem. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.43. *Seja $\dot{\tau}$ a topologia sobre $\dot{X}$ definida na Proposição 4.42. Então a ação envolvente $\dot{\alpha} : (G \times \dot{X}, \tau_G \times \dot{\tau}) \longrightarrow (\dot{X}, \dot{\tau})$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que ver que para todo $V \in \tau$, e para todo $t \in G$, o conjunto $\dot{\alpha}^{-1}(\dot{\alpha}_t(V))$ é aberto em $G \times \dot{X}$. Temos (lembrar a definição de λ_t na Proposição 4.42):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^{-1}(\dot{\alpha}_t(V)) &= \{(s, \dot{x}) \in G \times \dot{X} : \dot{\alpha}(s, \dot{x}) \in \dot{\alpha}(\{t\} \times V)\} \\ &= \{(s, \dot{x}) \in G \times \dot{X} : \dot{\alpha}(t^{-1}s, \dot{x}) \in V\} \\ &= (\dot{\alpha}(\lambda_t^{-1} \times id_{\dot{X}}))^{-1}(V) \\ &= (\lambda_t^{-1} \times id_{\dot{X}})^{-1}(\dot{\alpha}^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Como $\lambda_t \times id_{\dot{X}} : G \times \dot{X} \longrightarrow G \times \dot{X}$ é um homeomorfismo, basta mostrarmos que $\dot{\alpha}^{-1}(V)$ é aberto.

Seja $(s_0, \dot{x}_0) \in \dot{\alpha}^{-1}(V)$, e sejam $t_0 \in G$, $x_0 \in X$ tais que $\bar{\alpha}(t_0, x_0) = \dot{x}_0$. Como $(s_0, \dot{x}_0) \in \dot{\alpha}^{-1}(V)$, tem-se que $\dot{\alpha}(s_0 t_0, x_0) \in V$, e portanto $s_0 t_0 \in A_{x_0}$. Em outras palavras, $(s_0 t_0, x_0) \in \Gamma_\alpha$. Como Γ_α é aberto em $G \times X$, existem abertos $U \subseteq G$ e $W \subseteq X$ tais que $(s_0 t_0, x_0) \in U \times W \subseteq \Gamma_\alpha$. Como α é contínua, podemos supor também que $\alpha(U \times W) \subseteq V$. Agora, o produto é contínuo em G , de forma que existem abertos U_0, U_1 em G , com $s_0 \in U_0$, $t_0 \in U_1$, e tais que $U_0 U_1 \subseteq U$. Segue então que $(U_0 U_1) \times W \subseteq \Gamma_\alpha$, e $\alpha((U_0 U_1) \times W) \subseteq V$. Mas isto implica que $U_0 \times \dot{\alpha}_{t_0}(W) \subseteq \dot{\alpha}^{-1}(V)$: se $s \in U_0$, $x \in W$:

$$\dot{\alpha}(s, \dot{\alpha}_{t_0}(x)) = \dot{\alpha}(s t_0, x) = \alpha(s t_0, x) \in V.$$

Como $(s_0, \dot{x}_0) \in U_0 \times \dot{\alpha}_{t_0}(W)$, aberto em $\dot{\alpha}^{-1}(V)$, concluímos que $\dot{\alpha}^{-1}(V)$ é aberto, e portanto $\dot{\alpha}$ é contínua. $\square$

TEOREMA 4.44. *Seja α uma ação parcial contínua de um grupo topológico (G, τ_G) sobre um espaço topológico (X, τ) , e seja $\dot{\alpha}$ a ação envolvente de α , agindo sobre o espaço envolvente $\dot{X}$, com $X \subseteq \dot{X}$. Então $\dot{\tau}$ é a única topologia sobre $\dot{X}$ que satisfaz as seguintes três propriedades:*

1. X é aberto em $\dot{X}$.
2. Se $U \subseteq X$, então $U \in \tau \iff U \in \dot{\tau}$, i.e., a topologia τ coincide com a topologia que X herda de $\dot{\tau}$.
3. $\dot{\alpha} : (G \times \dot{X}, \tau_G \times \dot{\tau}) \longrightarrow (\dot{X}, \dot{\tau})$ é contínua.

Além disso, $(\dot{X}, \dot{\alpha}, \dot{\tau})$ satisfaz a seguinte propriedade universal: se $\iota : \alpha \longrightarrow \beta$ é um morfismo contínuo, onde β é uma ação contínua de G sobre um espaço topológico Y , então existe um único

morfismo contínuo $\eta : \dot{X} \longrightarrow Y$ tal que $\eta|_X = \psi$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\iota} & \dot{\alpha} \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta \\ & \beta & \end{array}$$

Inversamente, suponhamos que (ϕ, X', α') é tal que X' é um espaço topológico, α' é uma ação contínua de G sobre X' , $\phi : X \longrightarrow X'$ é um morfismo contínuo de ações parciais, e suponhamos que para todo morfismo contínuo $\psi : \alpha \longrightarrow \beta$, onde β é uma ação contínua sobre o espaço topológico Z , existe um único morfismo contínuo de ações parciais $\eta : \alpha' \longrightarrow \beta$ tal que $\eta\phi = \psi$. Então existe um único isomorfismo $\theta : \dot{\alpha} \longrightarrow \alpha'$ de ações parciais que é um homeomorfismo entre $\dot{X}$ e X' , e tal que $\theta\iota = \phi$.

DEMONSTRAÇÃO. As Proposições 4.42 e 4.43 mostram que $\dot{\tau}$ satisfaz as condições 1., 2. e 3. acima. Suponhamos que τ' é uma topologia que também as verifica. Então, devido às duas primeiras, cada $V \in \tau$ pertence também a τ' . A terceira condição implica que cada $\dot{\alpha}_t : (\dot{X}, \tau') \longrightarrow (\dot{X}, \tau')$ é um homeomorfismo, e portanto $\dot{\alpha}_t(V_t) \in \tau', \forall t \in G, V_t \in \tau$. Segue então que $\dot{\tau} \subseteq \tau'$. Mas como $\bar{\alpha} : (G \times X, \tau_G \times \tau'_X) \longrightarrow (\dot{X}, \tau')$ é obviamente contínua e $\dot{\tau}$ é a topologia final definida por $\bar{\alpha}$, concluímos que também deve ser $\tau' \subseteq \dot{\tau}$, e portanto $\dot{\tau} = \tau'$.

Suponhamos agora que $\psi : \alpha \longrightarrow \beta$ é um morfismo contínuo, onde β é uma ação contínua de G sobre o espaço topológico Y . Pelo Teorema 4.23, sabemos que existe um único morfismo de ações $\eta : \dot{\alpha} \longrightarrow \beta$ tal que $\eta\iota = \psi$, e a única coisa que temos que provar é que $\eta : \dot{X} \longrightarrow Y$ é contínua. Como $\dot{\tau}$ é a topologia final sobre $\dot{X}$ com respeito a $\bar{\alpha}$, temos que η é contínua se e somente se $\eta\bar{\alpha}$ é contínua. Notemos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \dot{X} \\ \downarrow id_G \times \psi & & \downarrow \eta \\ G \times Y & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Com efeito, dado $(t, x) \in G \times X$,

$$\beta_t(\psi(x)) = \eta(\dot{\alpha}_t(x)) = \eta\bar{\alpha}(t, x).$$

Portanto, $\beta(id_G \times \psi) = \eta\bar{\alpha}$, e como $\beta(id_G \times \psi)$ é contínua, concluímos que η é contínua.

Suponhamos agora que (ϕ, X', α') satisfaz a propriedade universal. Então existem únicos morfismos contínuos de ações parciais $\theta : \dot{X} \longrightarrow X'$ e $\theta' : X' \longrightarrow \dot{X}$ tais que $\theta\iota = \phi$, e $\theta'\phi = \iota$. Então $id_{X'}\phi = \phi = \theta\theta'\phi$, e $id_{\dot{X}}\iota = \iota = \theta'\theta\iota$. Como $id_{X'}$ e $\theta\theta'$ são morfismos contínuos de ações parciais, concluímos que, pela unicidade na propriedade universal de $(\dot{X}, \dot{\alpha})$, deve ser $id_{X'} = \theta\theta'$. Analogamente $id_{\dot{X}} = \theta'\theta$. Segue que θ é um isomorfismo e um homeomorfismo. $\square$

DEFINIÇÃO 4.45. Seja α uma ação parcial do grupo topológico (G, τ_G) sobre o espaço topológico (X, τ_X) . Diz-se que (ϕ, Y, τ_Y, β) é uma ação envolvente de α se: β é uma ação contínua sobre o espaço topológico (Y, τ_Y) , (ϕ, Y, β) é uma ação envolvente no sentido da Definição 4.24, e $\phi : X \longrightarrow \phi(X)$ é um homeomorfismo, onde a topologia de $\phi(X)$ é a herdada de τ_Y .

4.2.1. Uma construção alternativa do espaço e da ação envolventes. A seguir veremos que $\tilde{X}$ pode ser construído como quociente de uma relação de equivalência sobre $G \times X$, que $\tilde{\alpha}$ é então a ação quociente da ação de G por translação à esquerda na primeira variável de $G \times X$, e que $\tilde{\tau}$ é a correspondente topologia quociente.

PROPOSIÇÃO 4.46. *Seja $\alpha = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial do grupo G sobre o conjunto X , e seja $\beta : G \times X \rightarrow G \times X$ dada por $\beta_t(s, x) = (ts, x)$. Definamos sobre $G \times X$ a seguinte relação $\sim$:*

$$(r, x) \sim (s, y) \iff s^{-1}r \in A_x \text{ e } \alpha_{s^{-1}r}(x) = y.$$

Então:

1. β é uma ação sobre $G \times X$, compatível com a relação $\sim$.
2. $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $G \times X$.
3. Seja $\frac{\beta}{\sim} : G \times (\frac{G \times X}{\sim}) \rightarrow \frac{G \times X}{\sim}$ a ação quociente, e seja $\phi : X \rightarrow \frac{G \times X}{\sim}$ a composição da aplicação $x \mapsto (e, x)$ de $X \rightarrow G \times X$ com a projeção $p : G \times X \rightarrow \frac{G \times X}{\sim}$. Então $(\phi, \frac{G \times X}{\sim}, \frac{\beta}{\sim})$ é a ação envolvente de α .

DEMONSTRAÇÃO. 1. e 2. são evidentes, de modo que podemos concentrarmos em 3. Vejamos que $(\phi, \frac{G \times X}{\sim}, \frac{\beta}{\sim})$ é uma extensão de α . Como $(e, \alpha_s(x)) \sim (s, x)$, $\forall s \in A_x$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_s(x)) &= p(e, \alpha_s(x)) \\ &= p(s, x) \\ &= p(\beta_s(e, x)) \\ &= (\beta/\sim)_s p(e, x) \\ &= (\beta/\sim)_s \phi(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\phi(x) = \phi(y)$, então $(e, x) \sim (e, y)$, o que implica que $x = y$. Conseqüentemente, $\phi : \alpha \rightarrow \frac{\beta}{\sim}$ é uma extensão. Vejamos que $(\phi, \frac{G \times X}{\sim}, \frac{\beta}{\sim})$ tem a propriedade universal da ação envolvente (lembrar o Teorema 4.23), o que acabaria a prova. Notemos primeiro que se $\gamma : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação, e $\psi : X \rightarrow Y$ é uma função arbitrária, então a função $\eta' : G \times X \rightarrow Y$ tal que $(t, x) \mapsto \gamma_t(\psi(x))$ é um G -morfismo, onde estamos considerando a ação β sobre $G \times X$. Com efeito:

$$\eta'(\beta_s(t, x)) = \eta'(st, x) = \gamma_{st}(\psi(x)) = \gamma_s \gamma_t(\psi(x)) = \gamma_s(\eta'(t, x))$$

Suponhamos agora que $\psi : \alpha \rightarrow \gamma$ é um morfismo, e sejam $(t, x) \sim (s, y)$. Então, como $s^{-1}t \in A_x$, e $\alpha_{s^{-1}t}(x) = y$:

$$\gamma_{s^{-1}}(\eta'(t, x)) = \gamma_{s^{-1}}(\gamma_t(\psi(x))) = \gamma_{s^{-1}t}(\psi(x)) = \psi(\alpha_{s^{-1}t}(x)) = \psi(y)$$

Portanto:

$$\eta'(t, x) = \gamma_s(\psi(y)) = \eta'(s, y),$$

de maneira que η' passa ao quociente, e obtemos um morfismo $\eta : \frac{G \times X}{\sim} \rightarrow Y$ tal que:

$$\eta\phi(x) = \eta'(e, x) = \gamma_e(\psi(x)) = \psi(x).$$

Assim, $\eta\phi = \psi$. A unicidade da aplicação η é trivial, já que ele é um morfismo. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.47. *Seja α uma ação parcial contínua do grupo topológico (G, τ_G) sobre o espaço topológico (X, τ) , e seja $\frac{\tau_G \times \tau}{\sim}$ a topologia quociente sobre o espaço quociente $\frac{G \times X}{\sim}$ construído na Proposição 4.46 acima. Então $(\phi, \frac{\beta}{\sim}, \frac{G \times X}{\sim}, \frac{\tau_G \times \tau}{\sim})$ é a ação envolvente de α .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que $(\frac{G \times X}{\sim}, \frac{\beta}{\sim}, \frac{\tau_G \times \tau}{\sim})$ satisfaz a propriedade universal do Teorema 4.44, que caracteriza a topologia do espaço topológico envolvente.

Sejam γ uma ação contínua de G sobre Y , e suponhamos que $\psi : \alpha\gamma$ é um morfismo contínuo. Pela Proposição 4.46, existe um único morfismo $\eta : (\frac{G \times X}{\sim}) \rightarrow Y$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\phi} & \frac{\beta}{\sim} \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta \\ & \gamma & \end{array}$$

De fato, temos que η está determinado por $\eta(p(e, x)) = \psi(x)$. Temos que mostrar que η é contínua. Para isto, observemos que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{p} & (\frac{G \times X}{\sim}) \\ \downarrow id_G \times \psi & & \downarrow \eta \\ G \times Y & \xrightarrow{\gamma} & Y \end{array}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} \gamma(id \times \psi)(t, x) &= \gamma_t(\psi(x)) \\ &= \gamma_t \eta(p(e, x)) \\ &= \eta\left(\left(\frac{\beta}{\sim}\right)_t(p(e, x))\right) \\ &= \eta(p(\beta_t(e, x))) \\ &= \eta(p(t, x)) \\ &= \eta p(t, x). \end{aligned}$$

Como $\gamma(id \times \psi)$ é contínua, temos que ηp também é contínua. Como $\frac{G \times X}{\sim}$ tem a topologia quociente induzida por p , isto implica que η é contínua. $\square$

Existe uma construção conhecida em sistemas dinâmicos, chamada *suspensão de um sistema discreto*. Suponhamos que $h : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo, de forma que temos uma ação $\alpha : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ dada por $\alpha_n(x) = h^n(x)$. Sobre $\mathbb{R} \times X$ considera-se a seguinte relação de equivalência: $(t, x) \sim (s, y)$ se e somente se $n := t - s \in \mathbb{Z}$, e $h^n(x) = y$. Sobre o quociente $Y := (\mathbb{R} \times X) / \sim$ define-se então uma ação de $\mathbb{R}$: $\beta : \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ tal que $\beta_s((t, x)) = (t + s, x)$. Notar que α pode ser vista como uma ação parcial de $\mathbb{R}$ sobre X (embora não contínua segundo nossa definição), e portanto β é a ação envolvente desta ação parcial. Assim, vemos que a ação envolvente de uma ação parcial é uma generalização da suspensão de uma ação do grupo dos inteiros.

4.2.2. Alguns exemplos. A seguir consideramos alguns exemplos de ações envolventes, entre eles vários nos quais o espaço envolvente não é de Hausdorff. Também determinamos precisamente as ações parciais cuja ação envolvente age sobre um espaço de Hausdorff: são aquelas que tem gráfico fechado. Em particular, levando em conta o exemplo do fluxo 4.39, este fato divide os campos vetoriais

em duas classes, segundo que a correspondente ação parcial tenha gráfico fechado ou não. Veremos que nenhuma destas classes é vazia.

EXEMPLO 4.48. Considere a ação $\beta_\theta : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$ dada pela rotação por um ângulo irracional θ : $\beta_k(z) = e^{2\pi i k \theta} z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. Seja $X = \{1\} \subseteq S^1$, e consideremos a ação parcial supertrivial α sobre X (Definição 4.3). É claro que a ação envolvente algébrica de (X, α) é $(\mathbb{Z}, \dot{\alpha})$, onde X se identifica com $X' = \{0\}$, e $\dot{\alpha}(k) = k + 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. A topologia $\dot{\tau}$ de $\mathbb{Z} = \dot{X}$ correspondente segundo o Teorema 4.44 é a topologia discreta, pois $X = \{0\}$ deve ser aberto em $\dot{X}$. Obviamente a inclusão $\psi : X \hookrightarrow S^1$ tal que $1 \mapsto 1$ é um morfismo contínuo, e portanto existe um único morfismo contínuo $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ tal que $\eta(0) = 1$. Naturalmente, temos que $\eta(k) = e^{2\pi i k \theta}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 4.49. Seja β_θ como no exemplo acima, e seja α_θ^U a restrição de β_θ a um aberto não vazio $U \subseteq S^1$ qualquer. Como a ação β_θ é minimal, é claro que β_θ é a ação envolvente de α_θ^U . Este exemplo chama a atenção sobre o fato de uma ação parcial determinar propriedades topológicas profundas de $\dot{X}$, diferentes das propriedades do próprio X ; por exemplo, o grupo de homotopia $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, enquanto que $\pi_1(U) = 0$ se U é um arco de circunferência diferente de S^1 .

O seguinte exemplo mostra que, embora uma ação parcial atue sobre um espaço de Hausdorff, a sua ação envolvente não tem por que agir sobre um espaço de Hausdorff.

EXEMPLO 4.50. Consideremos a seguinte ação parcial trivial α de $\mathbb{Z}_2$ sobre o intervalo $X = [0, 1]$: $\alpha_0 = id_X$, $\alpha_1 = id_V$, onde $V = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Seja $\dot{\alpha} : G \times \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ a ação envolvente de α . Sabemos que para todo $x \in V$ temos que $\dot{\alpha}_0(x) = x = \dot{\alpha}_1(x)$, e que para cada $x \notin V$, deve ser $\dot{\alpha}_1(x) \neq x$. Portanto, como conjunto, $\dot{X}$ pode ser representado assim:

Ou seja, $\dot{X} = V \sqcup \biguplus_{i=1,2} J_i^\pm$, onde J_1^- , J_1^+ são cópias disjuntas do intervalo $[0, \frac{1}{3}]$, e J_2^- , J_2^+ são cópias disjuntas do intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$. Se $x \notin V$, usamos as notações x^+ e x^- para indicar que $x \in J_i^+$ ou que $x \in J_i^-$ respectivamente; é também conveniente pôr $x = x^+ = x^-$ quando $x \in V$. Identificamos $\dot{X}$ com $J_1^- \sqcup V \sqcup J_2^-$. Desta forma, $\dot{\alpha}_1(x^-) = x^+$, e $\dot{\alpha}_1(x^+) = x^-$, $\forall x^-, x^+ \in \dot{X}$. Seja $U \subseteq \dot{X}$ tal que $\frac{1}{3}^\pm, \frac{2}{3}^\pm \notin U$. Da descrição da topologia $\dot{\tau}$ na Proposição 4.42, é claro que U é aberto em $\dot{X}$ se e somente se ele é aberto em nossa representação como subconjunto do plano, com a topologia herdada da usual de $\mathbb{R}^2$. Agora, as vizinhanças básicas ao redor de $\frac{1}{3}^+$ são da forma (a^+, b^+) , onde $a < \frac{1}{3} < b$, e as vizinhanças básicas de $\frac{1}{3}^-$ são da forma (c^-, d^-) , onde $c < \frac{1}{3} < d$. Nestas condições, temos que $(a^+, b^+) \cap (c^-, d^-) = (\frac{1}{3}, \min\{b, d\}) \neq \emptyset$. Portanto $\frac{1}{3}^+, \frac{1}{3}^-$ não tem vizinhanças disjuntas: duas respectivas vizinhanças possuem sempre uma parte comum não vazia, contida em V . Da mesma forma podem ser descritos os abertos básicos de $\frac{2}{3}^+$ e $\frac{2}{3}^-$, e concluímos que $\frac{2}{3}^+$ e $\frac{2}{3}^-$ também são inseparáveis.

A obstrução para que o espaço envolvente não seja de Hausdorff é revelada na proposição que segue.

PROPOSIÇÃO 4.51. *Sejam α uma ação parcial contínua do grupo topológico G sobre o espaço de Hausdorff X , e $(\dot{\alpha}, \dot{X}, \dot{\tau})$ sua ação envolvente. Seja $\text{Gr}(\alpha)$ o gráfico de α , ou seja: $\text{Gr}(\alpha) = \{(t, x, y) \in G \times X \times X : x \in X_{t^{-1}}, \alpha_t(x) = y\}$. Então $(\dot{X}, \dot{\tau})$ é um espaço de Hausdorff se e somente se $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado em $G \times X \times X$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\dot{X}$ é de Hausdorff, e seja $(t_i, x_i, \alpha(t_i, x_i)) \rightarrow (t, x, y) \in G \times X \times X$. Em particular, $\alpha(t_i, x_i) \rightarrow y \in X$. Como $\dot{\alpha}$ é contínua, $\dot{\alpha}(t_i, x_i) \rightarrow \dot{\alpha}(t, x)$ e, devemos ter que $y = \alpha(t, x)$ pois o limite é único por ser $\dot{X}$ de Hausdorff. Segue que $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado em $G \times X \times X$.

Inversamente, suponhamos que $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado em $G \times X \times X$, e sejam $\dot{x} \neq \dot{y} \in \dot{X}$. Queremos mostrar que existem abertos disjuntos em $\dot{X}$, cada um dos quais contém $\dot{x}$ ou $\dot{y}$. Como cada $\dot{\alpha}_t$ é um homeomorfismo de $\dot{X}$, podemos supor que de fato $\dot{x} = x \in X$. Sejam $y \in X$, $t \in G$ tais que $\dot{\alpha}_t(y) = \dot{y}$. Suponhamos então que toda vizinhança de x tem interseção não vazia com toda vizinhança de $\dot{y}$. Então, para todo par (U, V) de vizinhanças de x e y respectivamente, contidas em X , existe $x_{U,V} \in U \cap \dot{\alpha}_t(V)$, digamos $x_{U,V} = \dot{\alpha}_t(y_{U,V})$, com $y_{U,V} \in V$. Consideremos a rede $\{(t, y_{U,V}, x_{U,V})\}_{U,V} \subseteq \text{Gr}(\alpha)$. Então $\{(t, y_{U,V}, x_{U,V})\}_{U,V}$ converge para (t, y, x) ; mas como $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado, temos que $\alpha_t(y) = x$, donde $x = \dot{y}$. Portanto, $\dot{X}$ é de Hausdorff. $\square$

OBSERVAÇÃO 4.52. Se G é discreto e α é uma ação parcial sobre X , então $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado em $G \times X \times X$ se e somente se $\text{Gr}(\alpha_t)$ é fechado em $X \times X$, $\forall t \in G$.

OBSERVAÇÃO 4.53. Naturalmente, se $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ é uma ação contínua sobre um espaço de Hausdorff Y , e $X \subseteq Y$ é aberto, e se definimos $\alpha := \beta|_X$ (4.8), então obtemos uma ação parcial com gráfico fechado, pois a ação envolvente de α é a ação β restrita à β -órbita de X em Y , que é um espaço de Hausdorff. Notar que se Y não for de Hausdorff mas soubermos que $\overline{X}$ sim é de Hausdorff, então $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado, e portanto a β -órbita de X é de Hausdorff, pois coincide com $\dot{X}$.

EXEMPLO 4.54. Suponhamos que $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um homeomorfismo, e seja $U \subseteq [0, 1]$ um aberto que não é todo $[0, 1]$. Restringindo a U a ação global $\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $(n, t) \mapsto h^n(t)$, obtemos uma ação parcial α' de $\mathbb{Z}$ sobre U . Denotemos por U'_n o domínio de α'_n . Definamos agora $X_0 = [0, 1]$, e $X_n = U'_n$, $\forall n \neq 0$, e sejam $\alpha_n : X_{-n} \rightarrow X_n$ dadas por $\alpha_n = \alpha'_n$ se $n \neq 0$, $\alpha_0 = id_{X_0}$. Então α não tem gráfico fechado, porque $\alpha_1 = h|_U : U \rightarrow h(U)$ não pode ter gráfico fechado, já que U e $h(U)$ são diferentes de $[0, 1]$. Portanto o espaço envolvente correspondente a α não é de Hausdorff.

EXEMPLO 4.55. Usaremos a construção da Proposição 4.47 para descrever o espaço envolvente de uma ação parcial gerada por um homeomorfismo parcial de um espaço topológico.

Sejam X um espaço topológico, $U, V \subseteq X$ abertos, e $h : U \rightarrow V$ um homeomorfismo. Seja $\alpha = (\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ a ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre X gerada por h , ou seja: $X_0 = X$, $\alpha_0 = id_X$, $X_{-n} = \bigcap_{j=0}^{n-1} h^{-j}(U)$ se $n > 0$, $X_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} h^j(V)$ se $n > 0$, e $\alpha_n : X_{-n} \rightarrow X_n$ tal que $\alpha_n(x) = h^n(x)$.

Dado $(n, x) \in \mathbb{Z} \times X$, com $n \geq 0$, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $(n, x) \sim (m, y)$, para algum $y \in X$; na verdade, este y é único: se $(m, y) \sim (m, y')$, então $\alpha_{m-m}(y) = y'$, ou seja $y = y'$. Analogamente, para cada $(n, x) \in \mathbb{Z} \times X$, com $n \leq 0$, existe $m \leq 0$ máximo tal que $(n, x) \sim (m, y)$, para algum $y \in X$, e de novo temos que y é único. Temos definida assim uma função $\mu : \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z} \times X$, tal que $\mu(n, x) = (m, y)$, definido da forma acima. Notar que $\mu|_{\{0\} \times X}$ é a identidade.

Afirmamos que se (n, x) é tal que $\mu(n, x) = (m, y)$, com $m > 0$, então $y \in X \setminus U$: caso contrário, poderíamos considerar o elemento $(m-1, h(y))$, e teríamos que $\alpha_{m-1-n}(h(y)) = \alpha_{m-n}(y) = x$, o que implicaria que $(m-1, h(y)) \sim (n, x)$, contradizendo com isso a minimalidade de m . Por outro lado, o mesmo argumento mostra que se (n, x) é tal que $n \geq 0$ e $x \notin U$, então $\mu(n, x) = (n, x)$. Um resultado análogo obtemos para $n \leq 0$: se (n, x) é tal que $n \leq 0$ e $x \notin V$, então $\mu(n, x) = (n, x)$, e também se tem que para todo $n \leq 0$ e para todo x , se $\mu(n, x) = (m, y)$, então $y \notin V$. Portanto $\mu : \mathbb{Z} \times X \rightarrow Z := (\mathbb{Z}^- \times (X \setminus V)) \times (\{0\} \times X) \times (\mathbb{Z}^+ \times (X \setminus U))$ é sobrejetiva. Por outro lado, é claro que se $\mu(n_1, x_1) = \mu(n_2, x_2)$, então $(n_1, x_1) \sim (n_2, x_2)$. Inversamente, suponhamos que $(n_1, x_1) \sim (n_2, x_2)$. Se $n_1, n_2 \geq 0$ ou $n_1, n_2 \leq 0$, então é claro que $\mu(n_1, x_1) = \mu(n_2, x_2)$. Se $n_1 n_2 < 0$, suponhamos que $n_1 < 0 < n_2$: como existe $\alpha_{n_2-n_1}$, e $n_2 - n_1 > n_2$, existe $\alpha_{n_2}(x_2)$, e temos então que $\mu(n_2, x_2) = (0, \alpha_{n_2}(x_2))$, porque $(n_2, x_2) \sim (0, \alpha_{n_2}(x_2))$; mas também temos que $(n_1, x_1) \sim (0, \alpha_{n_2}(x_2))$, e portanto $\mu(n_1, x_1) = \mu(n_2, x_2)$. Em conclusão, $\mu(n_1, x_1) = \mu(n_2, x_2)$ se e somente se $(n_1, x_1) = (n_2, x_2)$, de maneira que $(\mathbb{Z} \times X)/\sim$ se identifica com o conjunto Z .

Se $A = C_0(X)$, então a ação parcial α define uma ação parcial β sobre A . Esta ação parcial fica determinada unicamente pelo *automorfismo parcial* $\beta_1 : C_0(V) \rightarrow C_0(U)$, tal que $\beta_1(f) = f \circ h^{-1}$. A teoria de produtos cruzados por ações parciais começou com a definição por Exel de produtos cruzados por automorfismos parciais ([23]). Por exemplo, toda C^* -álgebra aproximadamente finita é um produto cruzado por um sistema dinâmico parcial deste tipo (ver [8] sobre as C^* -álgebras aproximadamente finitas, e [25] para o resultado mencionado), e o mesmo acontece com as C^* -álgebras de Bunce–Deddens (introduzidas e estudadas em [12] e [13]; que são produtos cruzados por automorfismos parciais foi provado em [24]). Veremos no Capítulo 7 que existem uma C^* -álgebra B e uma ação γ sobre B , naturalmente associadas a A , e tais que o espectro de B coincide com o espaço envolvente de X , e a ação induzida por γ sobre o espectro de B é a ação envolvente de α . Portanto, a descrição acima do espaço envolvente de X ilustra sobre o espectro desta C^* -álgebra B . Em alguns casos particulares, por exemplo as C^* -álgebras aproximadamente finitas ou as C^* -álgebras de Bunce–Deddens, o espaço topológico X pode ser descrito com bastante detalhe ([25], [2] e [24]).

Finalmente, consideramos alguns casos do exemplo do fluxo de um campo vetorial, dois com gráfico fechado e um com gráfico não fechado.

EXEMPLO 4.56. Consideremos a ação parcial α sobre $\mathbb{R}^+$ dada pelo fluxo da equação diferencial

$$(7) \quad \dot{y} = -y^2$$

Se γ_x é a solução de (7) tal que $\gamma_x(0) = x$, então é imediato que $\gamma_x(t) = x/(1+tx)$, e está definida para todo $t > -1/x$. Portanto $\text{Gr}(\alpha) = \{(t, x, \frac{x}{1+tx}) : t > -\frac{1}{x}\}$, que é fechado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

EXEMPLO 4.57. Seja agora a equação diferencial em $\mathbb{R}^+$ dada por:

$$(8) \quad \dot{y} = 1/2y$$

Neste caso, $\gamma_x(t) = \sqrt{x^2 + t}$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, de forma que o gráfico da ação α correspondente é fechado; de fato: $\text{Gr}(\alpha) = \{(t, x, \sqrt{x^2 + t}) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+\}$, que é fechado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

EXEMPLO 4.58. Seja $X = \mathbb{P}^2 \setminus \{(1, 0)\}$, e consideremos sobre X a equação diferencial:

$$(9) \quad \dot{y} = (1, 0)$$

Então, $\gamma_x(t) = x + t(1, 0)$, definida para todo t se $x \neq (\lambda, 0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{P}$. Se $x = (\lambda, 0)$, então o intervalo de definição de γ_x é $(-\infty, 1 - \lambda)$ se $\lambda < 1$, e $(1 - \lambda, \infty)$ se $\lambda > 1$. Sejam $x_n = (0, \frac{1}{n})$ e $t_n = 2$, $\forall n \geq 1$. Então $z_n := (t_n, x_n, (2, \frac{1}{n})) \in \text{Gr}(\alpha)$, $\forall n \geq 1$, e $z_n \rightarrow z$, onde $z = (2, (0, 0), (2, 0))$. Mas $z \notin \text{Gr}(\alpha)$, porque γ_0 não está definida em $t = 2$. Assim, vemos que $\overline{\text{gr}(\alpha)} \neq \text{gr}(\alpha)$.

4.2.3. Propriedades dinâmicas da ação envolvente. A seguir vemos que α e $\hat{\alpha}$ possuem as mesmas propriedades dinâmicas.

DEFINIÇÃO 4.59. Seja α uma ação parcial contínua de G sobre X . Então dizemos que:

1. α é livre se o estabilizador de todo elemento é trivial.
2. α é transitiva se existe apenas uma órbita.
3. α é minimal se toda órbita é densa em X .
4. α é topologicamente livre se $\forall t \neq e$ tem-se que $F_t = \{x \in D_{t^{-1}} : \alpha_t(x) = x\}$ tem interior vazio.
5. α é topologicamente transitiva se para todo par de abertos não vazios U e V de X existe $t \in G$ tal que $\alpha_t(U \cap X_{t^{-1}}) \cap V \neq \emptyset$.
6. Se G e X são localmente compactos, α é chamada errante se $\forall K \subseteq X$ compacto tem-se que o conjunto $A(K) = \{s \in G : \alpha_s(K \cap X_{s^{-1}}) \cap K \neq \emptyset\}$ é precompacto.
7. Se G e X são localmente compactos, e X é de Hausdorff, α é chamada própria se a aplicação $(\alpha \times id_X) : \Gamma_\alpha \rightarrow X \times X$ tal que $(t, x) \mapsto (\alpha_t(x), x)$ é própria (lembrar que uma função contínua f é chamada própria quando $f^{-1}(K)$ é compacto, para todo compacto K).

OBSERVAÇÃO 4.60. Notar que a condição 6. é equivalente à seguinte propriedade: 6'. para todo par de subconjuntos compactos K_1 e K_2 de X , o conjunto

$$A(K_1, K_2) := \{s \in G : \alpha_s(K_1 \cap X_{s^{-1}}) \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

é precompacto. Com efeito, $A(K) = A(K, K)$, e $A(K_1, K_2) \subseteq A(K_1 \cup K_2)$.

OBSERVAÇÃO 4.61. Suponhamos que α é errante, e que X é de Hausdorff, e sejam $K_1, K_2 \subseteq X$ compactos. Então

$$\begin{aligned} (\alpha \times id_X)^{-1}(K_1 \times K_2) &= \{(t, x) : x \in K_2 \cap X_{t^{-1}} \text{ e } \alpha_t(x) \in K_1\} \\ &= \{(t, x) : x \in \alpha_{t^{-1}}(K_1 \cap X_t) \cap K_2\} \\ &= \{(t, x) : t \in A(K_1, K_2)^{-1} \text{ e } x \in \alpha_{t^{-1}}(K_1 \cap X_t) \cap K_2\} \\ &\subseteq \overline{A(K_1, K_2)^{-1}} \times K_2, \end{aligned}$$

onde $A(K_1, K_2)$ é como em 4.60 acima. Como α é errante e a inversão no grupo é contínua, temos que $\overline{A(K_1, K_2)^{-1}}$ é compacto, e portanto $\overline{A(K_1, K_2)^{-1}} \times K_2$ também é compacto. Agora, $K_1 \times K_2$ é compacto no espaço de Hausdorff X , e portanto é fechado; como $\alpha \times id_X$ é contínua, $(\alpha \times id_X)^{-1}(K_1 \times K_2)$ é fechado, e daqui compacto, pois está contido no compacto $\overline{A(K_1, K_2)^{-1}} \times K_2$. Finalmente, se $K \subseteq X \times X$ é compacto, sempre existem $K_1, K_2 \subseteq X$ compactos tais que $K \subseteq K_1 \times K_2$, e portanto $(\alpha \times id_X)^{-1}(K)$ é um subconjunto fechado do compacto $(\alpha \times id_X)^{-1}(K_1 \times K_2)$, e portanto também é compacto. Assim, vemos que uma ação parcial errante sobre um espaço de Hausdorff é própria.

Inversamente, suponhamos que α é própria, e seja K um subconjunto compacto de X . Então $(\alpha \times id_X)^{-1}(K \times K)$ é compacto, ou seja: $\{(t, x) : t \in A(K)^{-1} \text{ e } \alpha_t(x) \in K\}$ é compacto, e portanto

também é compacta a projeção deste conjunto na primeira coordenada, que é exatamente $A(K)^{-1}$. Portanto, $A(K)$ é compacto, donde segue que a ação α é errante. Portanto, toda ação parcial própria é errante.

PROPOSIÇÃO 4.62. *Sejam α uma ação parcial contínua do grupo topológico G sobre o espaço topológico X , e seja $\hat{\alpha}$ a correspondente ação envolvente sobre o espaço envolvente $\hat{X}$. Então temos:*

1. α é livre se e só se $\hat{\alpha}$ é livre.
2. α é transitiva se e só se $\hat{\alpha}$ é transitiva.
3. α é topologicamente livre se e só se $\hat{\alpha}$ é topologicamente livre.
4. α é topologicamente transitiva se e só se $\hat{\alpha}$ é topologicamente transitiva.
5. α é minimal se e só se $\hat{\alpha}$ é minimal.
6. α é errante se e só se $\hat{\alpha}$ é errante.
7. α é própria e $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado se e só se $\hat{\alpha}$ é própria.
8. A aplicação quociente $\hat{i} : X/\alpha \hookrightarrow \hat{X}/\hat{\alpha}$ é um homeomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\hat{x} \in \hat{X}$ tal que $\hat{x} = \hat{\alpha}_t(x)$, $x \in X$, $t \in G$. Então temos $G_{\hat{x}} = tG_x t^{-1}$. Sejam $F_t^\alpha = \{x \in X : \alpha_t(x) = x\}$ e $F_t^{\hat{\alpha}} = \{\hat{x} \in \hat{X} : \hat{\alpha}_t(\hat{x}) = \hat{x}\}$. Então é claro que $F_t^\alpha = X \cap F_t^{\hat{\alpha}}$, $\forall t \in G$. Notar também que, como X é aberto em $\hat{X}$, o interior de um conjunto $D \subseteq X$ como subconjunto de X é o mesmo que o interior de D como subconjunto de $\hat{X}$. Denotamos o interior de D com $\text{int}(D)$.

1. É imediato do fato de ser $G_{\hat{x}} = tG_x t^{-1}$, pois o subgrupo conjugado do grupo trivial é também trivial.
2. É consequência imediata da Proposição 4.29.
3. Se $\hat{\alpha}$ é topologicamente livre, α também é topologicamente livre, pois $\text{int}(F_t^\alpha) = \text{int}(X \cap F_t^{\hat{\alpha}}) \subseteq \text{int}(F_t^{\hat{\alpha}}) = \emptyset$. Inversamente, suponhamos que α é topologicamente livre. Se $\hat{x} = \hat{\alpha}_s(x) \in F_t^{\hat{\alpha}}$, então $t \in G_{\hat{x}} = sG_x s^{-1}$, donde $s^{-1}ts \in G_x$, e portanto $x \in F_{s^{-1}ts}^\alpha$. Suponhamos que $\hat{x} \in \text{int}(F_t^{\hat{\alpha}})$: então existe $U \subseteq X$ aberto tal que $\hat{\alpha}_s(U) \subseteq F_t^{\hat{\alpha}}$, pois $\hat{\alpha}_s$ é um homeomorfismo. Mas então devemos ter que $U \subseteq F_{s^{-1}ts}^\alpha$, e portanto $x \in \text{int}(F_{s^{-1}ts}^\alpha) = \emptyset$, o que é contraditório.
4. Suponhamos primeiro que $\hat{\alpha}$ é topologicamente transitiva, e sejam U, V abertos não vazios de X . Como eles são também abertos em $\hat{X}$, existe $t \in G$ tal que $\hat{\alpha}_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Por outro lado, $\hat{\alpha}_t(U) \cap V = (\hat{\alpha}_t(U) \cap V) \cap (\hat{\alpha}_t(X) \cap X)$, e portanto:

$$\alpha_t(U \cap X_{t^{-1}}) \cap V = (\hat{\alpha}_t(U) \cap V) \cap X_t = \hat{\alpha}_t(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Na outra direção, sejam U, V abertos não vazios de $\hat{X}$. Então existem abertos não vazios U' e V' em X , e $r, s \in G$, tais que $\hat{\alpha}_r(U') \subseteq U$, e $\hat{\alpha}_s(V') \subseteq V$. Como α é topologicamente transitiva, existe $t \in G$ tal que $\alpha_t(U' \cap X_{t^{-1}}) \cap V' \neq \emptyset$. Trocando U' por $U' \cap X_{t^{-1}}$ se for necessário, podemos supor que $U' \subseteq X_{t^{-1}}$. Agora:

$$\hat{\alpha}_{str^{-1}}(U) \cap V \supseteq \hat{\alpha}_{str^{-1}}(\hat{\alpha}_r(U')) \cap \hat{\alpha}_s(V') = \hat{\alpha}_s(\hat{\alpha}_t(U') \cap V') = \hat{\alpha}_s(\alpha_t(U') \cap V') \neq \emptyset.$$

5. Evidente, pois todas as $\hat{\alpha}$ -órbitas tem interseção não vazia com X .
6. Como X e $\hat{X}$ são localmente homeomorfos, no sentido de que todo aberto de $\hat{X}$ é homeomorfo a algum aberto de X e viceversa, temos que X é localmente compacto se e somente se $\hat{X}$ é localmente compacto.

Suponhamos que $\hat{\alpha}$ é errante, e seja $K \subseteq X$ compacto. Usando as notações da Definição 4.59 e a Observação 4.60, e colocando um supraíndice que corresponda a ação envolvida, temos claramente que $A^\alpha(K) \subseteq A^{\hat{\alpha}}(K)$. Como o conjunto à direita tem fecho compacto, o conjunto à esquerda também, e portanto α é errante.

Inversamente, supondo que α é errante, seja $K \subseteq \dot{X}$ compacto. Como X é localmente compacto e K é compacto, e como cada $\dot{\alpha}_t : \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ é um homeomorfismo, vemos que existem $K_1, \dots, K_l \subseteq X$ compactos, e $t_1, \dots, t_l \in G$, tais que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^l \dot{\alpha}_{t_j}(K_j)$. Suponhamos que $s \in A^{\dot{\alpha}}(K)$; então existem i, j tais que $s \in A^{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha}_{t_i}(K_i), \dot{\alpha}_{t_j}(K_j))$, ou seja, $t_j^{-1}st_i \in A^{\dot{\alpha}}(K_i, K_j) = A^{\alpha}(K_i, K_j)$. Assim, $A^{\dot{\alpha}}(K) \subseteq \bigcup_{i,j=1}^l A^{\alpha}(K_i, K_j)$, e portanto $A^{\dot{\alpha}}(K)$ é precompacto. Segue que $\dot{\alpha}$ é errante.

7. Já vimos em 5. que X é localmente compacto se e somente se $\dot{X}$ é localmente compacto. Suponhamos que $\dot{\alpha}$ é própria. Então ela é errante por 4.61, e portanto α é errante pelo item acima. Como $\dot{X}$ é de Hausdorff, X é de Hausdorff e $Gr(\alpha)$ deve ser fechado por 4.51. O fato de ser X de Hausdorff e α errante implica que α é própria, de novo por 4.61.

Inversamente, suponhamos que α é própria e de gráfico fechado. Como ela é própria, $\dot{\alpha}$ é errante e X é de Hausdorff; como $Gr(\alpha)$ é fechado, $\dot{X}$ é de Hausdorff. Finalmente, como $\dot{\alpha}$ é errante sobre o Hausdorff $\dot{X}$, ela é própria.

8. Pela Proposição 4.29, sabemos que $\tilde{\iota}$ é uma bijeção. Temos o diagrama comutativo, onde p_α e $p_{\dot{\alpha}}$ são as projeções canônicas:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & \dot{X} \\ p_\alpha \downarrow & & \downarrow p_{\dot{\alpha}} \\ X/\alpha & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \dot{X}/\dot{\alpha} \end{array}$$

Como X/α tem a topologia quociente, $\tilde{\iota}$ é contínua se e somente se $\tilde{\iota}p_\alpha$ é contínua. Pela comutatividade do diagrama, isto é equivalente à continuidade de $p_{\dot{\alpha}}\iota$, que é contínua porque $p_{\dot{\alpha}}$ e ι são contínuas. Portanto $\tilde{\iota}$ é contínua. Resta mostrar que $\tilde{\iota}$ é aberta. Seja $U \subseteq X/\alpha$ aberto. Então $\tilde{\iota}(U) \subseteq \dot{X}/\dot{\alpha}$ é aberto se e só se $p_{\dot{\alpha}}^{-1}(\tilde{\iota}(U))$ é aberto em $\dot{X}$. Mas $\dot{x} \in p_{\dot{\alpha}}^{-1}(\tilde{\iota}(U)) \iff \exists x \in X, t \in G$ tais que $p_\alpha(x) \in U$ e $\dot{\alpha}_t(x) = \dot{x}$. Portanto $p_{\dot{\alpha}}^{-1}(\tilde{\iota}(U)) = \bigcup_{t \in G} \dot{\alpha}_t(p_\alpha^{-1}(U))$, que é aberto em $\dot{X}$. Concluimos assim que $\tilde{\iota}$ é um homeomorfismo.

□

CAPÍTULO 5

Ações Envolventes na Categoria de C^* -álgebras

Neste capítulo consideraremos ações parciais na categoria das C^* -álgebras, e veremos como alguns dos resultados das seções anteriores podem ser usados para obter conclusões neste contexto. Mostraremos que a ação envolvente de uma ação parcial sobre uma C^* -álgebra é única a menos de isomorfismos, quando ela existir. Neste caso, veremos também que a álgebra e sua álgebra envolvente compartilham várias propriedades, como nuclearidade, ser CCR, GCR, etc.

Precisamos lembrar a definição de ação parcial contínua sobre uma C^* -álgebra.

DEFINIÇÃO 5.1. Sejam E um espaço de Banach, X um espaço topológico e, para cada $x \in X$, E_x um subespaço de Banach de E . Dizemos que $\{E_x\}_{x \in X}$ é uma família contínua se $\forall U \subseteq E$ aberto, o conjunto $\{x \in X : U \cap E_x \neq \emptyset\}$ é aberto em X (ver [27]).

OBSERVAÇÃO 5.2. Seja $\mathcal{E} = \{(x, v) \in X \times E : v \in E_x\}$, seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ a projeção natural. Então $\{E_x\}_{x \in X}$ é contínua se e somente se π é aberta.

DEFINIÇÃO 5.3. Sejam G um grupo localmente compacto, e $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial de G sobre a C^* -álgebra A . Sejam

$$B^{-1} = \{(t, b) \in G \times B : b \in D_{t^{-1}}\}, \text{ e } B = \{(t, b) \in G \times B : b \in D_t\}.$$

Dizemos que α é contínua se a família $\{D_t\}_{t \in G}$ é contínua e a aplicação (também chamada) $\alpha : B^{-1} \rightarrow B$ tal que $(t, b) \mapsto (t, \alpha_t(b))$ é contínua (notar que sendo $\{D_t\}_{t \in G}$ contínua, B e B^{-1} são fibrados de Banach).

Em [27], Exel mostra que se $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial de G sobre a C^* -álgebra A , o fibrado de Banach $B_\alpha = \{(t, x) : x \in D_t\} \subseteq G \times A$, com a topologia relativa, é um fibrado de Fell com as seguintes operações (onde $x_t \delta_t := (t, x_t) \in B_\alpha$):

- $(x_t \delta_t) * (x_s \delta_s) = \alpha_t(\alpha_t^{-1}(x_t)x_s) \delta_{ts}$.
- $(x_t \delta_t)^* = \alpha_t^{-1}(x_t^*) \delta_{t^{-1}}$.

B_α se chama *produto semidireto* de A e G . O produto cruzado de A por G segundo a ação parcial α é definido como:

$$A \rtimes_\alpha G := C^*(B_\alpha),$$

e o produto cruzado reduzido como:

$$A \rtimes_{\alpha, r} G := C_r^*(B_\alpha).$$

Para motivar a definição de ação envolvente de uma ação parcial sobre uma C^* -álgebra que daremos a seguir, consideremos primeiro o caso comutativo. Suponhamos então que $A = C_0(X)$ é uma C^* -álgebra comutativa, e que $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial contínua do grupo G sobre A . Então existe uma única ação parcial contínua $\dot{\alpha} = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\dot{\alpha}_t\}_{t \in G})$ sobre X , tal que $D_t = C_0(X_t)$, e $\alpha_t(a) = a \circ \dot{\alpha}_{t^{-1}}$, $\forall t \in G, a \in D_{t^{-1}}$. Suponhamos que $\text{Gr}(\dot{\alpha})$ é fechado em $G \times X \times X$. Então o espaço envolvente $\dot{X}$ de X é de Hausdorff pela Proposição 4.51. Seja $B = C_0(\dot{X})$, e seja $\dot{\alpha}$ a ação sobre B induzida pela ação envolvente $\dot{\alpha}$ de $\dot{\alpha}$, ou seja, $\dot{\alpha}_t(b) = b \circ \dot{\alpha}_{t^{-1}}$, $\forall b \in B$. Como X é aberto em $\dot{X}$, temos que A é um ideal bilateral fechado em B , e é imediato ver que $\alpha = \dot{\alpha}|_A$. Por

outro lado, do teorema de Stone-Weierstrass deduzimos que $\text{span}\{\hat{\alpha}_t(a) : a \in A, t \in G\}$ é denso em B .

Em geral, se V é um espaço vetorial onde um grupo G está agindo através de uma ação γ , e se $S \subseteq V$, indicaremos por $\gamma(S)$ a órbita de S : $\gamma(S) := \{\gamma_t(s) : s \in S, t \in G\}$, e por $[\gamma(S)]$ a *órbita linear* de S : $[\gamma(S)] := \text{span}\{\gamma_t(s) : s \in S, t \in G\}$. Se V tem topologia, diremos que $[\gamma(S)]$ é a *órbita linear fechada* de S . Com esta notação introduzimos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 5.4. Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial contínua de um grupo topológico G sobre uma C^* -álgebra A , e seja β uma ação contínua de G sobre uma C^* -álgebra B que contém A . Diremos que (β, B) é uma ação envolvente de (α, A) (na categoria de C^* -álgebras), se as seguintes três propriedades são satisfeitas:

1. A é um ideal bilateral fechado de B .
2. $\alpha = \beta|_A$.
3. $[\alpha(A)]$ é denso em B (Ver a notação acima).

Diremos que B é uma C^* -álgebra envolvente.

Veremos que, a diferença do que acontece com as ações parciais sobre conjuntos e sobre espaços topológicos, nem sempre haverá ação envolvente de uma ação parcial na categoria das C^* -álgebras. Porém, se existir, ela é (essencialmente) única.

A Definição 5.4 sugere imediatamente a pergunta seguinte: se β é uma ação contínua de um grupo G sobre uma C^* -álgebra B , e A é um ideal bilateral fechado de B , então $\alpha := \beta|_A$ é uma ação parcial contínua? Se o grupo G é discreto é fácil ver que sim, mas se o grupo não for discreto, algumas verificações menos imediatas são necessárias. É estas verificações que faremos a seguir.

DEFINIÇÃO 5.5. Seja $\beta = (\{D_t^\beta\}_{t \in G}, \{\beta_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial do grupo discreto G sobre a C^* -álgebra A , e seja I um ideal de A . Definimos a restrição $\beta|_I$ de β a I como $\alpha = (\{D_t^\alpha\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$, onde:

- $D_t^\alpha = (I \cap D_t^\beta) \cap \beta_t(I \cap D_{t^{-1}}^\beta)$.
- $\alpha_t(x) = \beta_t(x)$, $\forall x \in D_t^\alpha$.

É claro que α é uma ação parcial sobre I .

Queremos ver que se β é contínua, então α também é contínua. Este fato é uma consequência direta do seguinte lema.

LEMA 5.6. *Sejam E e E' dois espaços de Banach, G um espaço topológico localmente compacto, $\{E_t\}_{t \in G}$, $\{E'_t\}_{t \in G}$ famílias contínuas, $\mathcal{E} = \{(t, x) \in G \times E : x \in E_t\}$, $\mathcal{E}' = \{(t, x) \in G \times E' : x \in E'_t\}$ os correspondentes fibrados de Banach, e $\beta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ contínua, tal que $\beta(t, x) = (t, \beta_t(x))$, $\forall (t, x) \in \mathcal{E}$. Tem-se:*

1. Se $\xi : G \rightarrow \mathcal{E}$ é uma seção contínua, então $\beta\xi$ é uma seção contínua de $\mathcal{E}'$.
2. Se $F'_t = \beta_t(E_t)$, então $\{F'_t\}_{t \in G}$ é uma família contínua.
3. Se $E = E'$ é uma C^* -álgebra, e cada E_t , E'_t é um ideal bilateral fechado de E , então $\{E_t \cap E'_t\}_{t \in G}$ é uma família contínua.

DEMONSTRAÇÃO. 1. Se ξ é seção de $\mathcal{E}$, é claro que $\beta\xi$ é seção de $\mathcal{E}'$: se ξ é contínua, então $\beta\xi$ também é contínua.

2. Sejam $t_0 \in G$, $x'_0 \in F'_{t_0}$, tais que $x'_0 = \beta_{t_0}(x_0)$, para algum $x_0 \in E_{t_0}$. Como G é localmente compacto, existe $\xi : G \rightarrow \mathcal{E}$, seção contínua, tal que $\xi(t_0) = x_0$. Então $\beta\xi$ é uma seção contínua de $\{F'_t\}$ tal que $\beta\xi(t_0) = (t_0, \beta_{t_0}(x_0))$. Então $\{F'_t\}$ é uma família contínua, por [27], Proposition 3.3.
3. Seja $x \in E_t \cap E'_t$. Pelo teorema de Cohen-Hewitt, existem $y \in E_t$, $z \in E'_t$, tais que $x = yz$. Como G é localmente compacto, existem seções ξ de $\mathcal{E}$ e ξ' de $\mathcal{E}'$ tais que $\xi(t) = y$, $\xi'(t) = z$. Como E_t , E'_t são ideais bilaterais, temos $E_t E'_t \subseteq E_t \cap E'_t$, e portanto η tal que $\eta(s) = \xi(s)\xi'(s)$ é uma seção contínua uma seção do fibrado correspondente à família $\{E_t \cap E'_t\}_{t \in G}$. Como $\eta(t) = \xi(t)\xi'(t) = yz = x$, temos que $\{E_t \cap E'_t\}_{t \in G}$ é uma família contínua, de novo por [27], 3.3.

□

PROPOSIÇÃO 5.7. *Sejam $\beta = (\{D_t^\beta\}_{t \in G}, \{\beta_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial contínua do grupo G sobre a C^* -álgebra A , I um ideal de A , e $\alpha = \beta|_I = (\{D_t^\alpha\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ a restrição de β ao ideal I . Então $\mathcal{B}_\alpha$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}_\beta$, e α é uma ação parcial contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. $\{D_t^\alpha\}$ é uma família contínua: lembrar que $D_t^\alpha = (I \cap D_t^\beta) \cap \beta_t(I \cap D_{t^{-1}}^\beta)$; por 3. do Lema 5.6, $\{I \cap D_t^\beta\}$ e $\{I \cap D_{t^{-1}}^\beta\}$ são famílias contínuas, e por 2. $\{\beta_t(I \cap D_{t^{-1}}^\beta)\}$ é contínua; então $\{D_t^\alpha\}$ é contínua, usando de novo 3. Em particular, o fibrado de Banach $\mathcal{B}_\alpha$ é um subfibrado de Banach de $\mathcal{B}_\beta$, e como α é a restrição de β , também o produto e a involução de $\mathcal{B}_\alpha$ são as restrições das correspondentes operações sobre $\mathcal{B}_\beta$. A continuidade da aplicação α é automática, pois α é a restrição da aplicação contínua β ao subfibrado $\mathcal{B}_\alpha$ correspondente a α . □

PROPOSIÇÃO 5.8. *Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial contínua de um grupo topológico G sobre uma C^* -álgebra abeliana A , e seja $\hat{\alpha}$ a correspondente ação parcial de G sobre $\hat{A}$. Então as condições seguintes são equivalentes:*

1. $\text{Gr}(\hat{\alpha})$ é fechado em $G \times \hat{A} \times \hat{A}$.
2. α possui ação envolvente na categoria de C^* -álgebras comutativas.
3. α possui ação envolvente na categoria de C^* -álgebras.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que 2. implica 3., e 1. e 2. são equivalentes pela Proposição 4.51, devido à equivalência entre as categorias de espaços de Hausdorff localmente compactos e de C^* -álgebras comutativas. Basta portanto mostrar que 3. implica 2. Suponhamos então que (β, B) é uma ação envolvente da ação parcial α sobre a C^* -álgebra abeliana A . Como A é um ideal comutativo de B , então A está contido no centro $Z(B)$ de B : sejam $a \in A$, $b \in B$, e $(e_i)_{i \in I} \subseteq A$ uma unidade aproximada de A ; então:

$$ab = \lim_i (ab)e_i = \lim_i a(be_i) = \lim_i (be_i)a = \lim_i b(e_i a) = ba.$$

Como $Z(B)$ é invariante, temos que $\beta_t(A) \subseteq Z(B)$, $\forall t \in G$, e portanto $[\beta(A)] = \text{span}\{\gamma_t(a) : t \in G, a \in A\} \subseteq Z(B)$. Mas $B = \overline{[\beta(A)]} \subseteq Z(B) \subseteq B$, e concluímos que $B = Z(B)$, ou seja, B é abeliana. □

5.1. Sobre a unicidade da ação envolvente

A Proposição 5.8 mostra, junto com os exemplos 4.50, 4.54 e 4.58, que nem sempre existe ação envolvente no sentido de C^* -álgebras. Nesta seção mostraremos que, pelo menos, teremos unicidade da ação envolvente quando ela existir. Notar que já sabemos isso no caso comutativo.

LEMA 5.9. *Seja A uma C^* -álgebra.*

1. *Seja $J \triangleleft A$ e definamos $\|\cdot\|_J : A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\|a\|_J = \sup\{\|ax\| : x \in J, \|x\| \leq 1\}$. Então $\|\cdot\|_J$ é uma C^* -seminorma sobre A , ou seja, é uma seminorma tal que $\|a^*\|_J = \|a\|_J$ e $\|a^*a\|_J = \|a\|_J^2$, $\forall a \in A$.*
2. *Sejam $\mathcal{J}$ uma família de ideais de A , $I = \overline{\text{span}}\{J : J \in \mathcal{J}\}$, e $\|\cdot\|_{\mathcal{J}} : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|a\|_{\mathcal{J}} = \sup_{J \in \mathcal{J}} \|a\|_J$. Então $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ é uma C^* -seminorma sobre A , e é uma norma se e somente se I é um ideal essencial de A . Neste caso, tem-se que $\|\cdot\|_{\mathcal{J}} = \|\cdot\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $\|\cdot\|_J$ é uma seminorma. Sejam $x \in J$, com $\|x\| \leq 1$, $a, b \in A$. Então, se $bx \neq 0$:

- $\|abx\| = \|bx\| \|a \frac{bx}{\|bx\|}\| \leq \|b\|_J \|a\|_J$, e portanto $\|ab\|_J \leq \|a\|_J \|b\|_J$.
- $\|ax\|^2 = \|x^*a^*ax\| \leq \|a^*ax\| \leq \|a^*a\|_J \leq \|a^*\|_J \|a\|_J$, donde segue que $\|a^*\|_J = \|a\|_J$ e $\|a\|_J^2 = \|a^*a\|_J$.

Assim, vemos que $\|\cdot\|_J$ é uma C^* -seminorma sobre A . Como o supremo de C^* -seminormas é uma C^* -seminorma, temos também que $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ é uma C^* -seminorma sobre A . Agora temos:

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\|_{\mathcal{J}} \text{ é uma } C^*\text{-norma} &\iff \|a\|_{\mathcal{J}} = 0 \text{ implica que } a = 0 \\
 &\iff ax = 0 \forall x \in J \text{ e } \forall J \in \mathcal{J} \text{ implica que } a = 0 \\
 &\iff aI = 0 \text{ implica que } a = 0 \\
 &\iff I \text{ é um ideal essencial em } A
 \end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ é uma C^* -norma sobre A , e seja $A_{\mathcal{J}}$ o correspondente completamento de A . Seja $\pi : A_{\mathcal{J}} \rightarrow B(H)$ uma representação fiel de $A_{\mathcal{J}}$; como π é fiel, tem-se que $\|a\|_{\mathcal{J}} = \|\pi(a)\|$, $\forall a \in A_{\mathcal{J}}$. Por outro lado, como A está contido em $A_{\mathcal{J}}$, a restrição de π a A é uma representação fiel de A , e portanto temos que $\|a\| = \|\pi(a)\|$, $\forall a \in A$, donde segue que $\|\cdot\|_{\mathcal{J}} = \|\cdot\|$. $\square$

LEMA 5.10. *Seja (α, A) uma ação parcial de G , e suponhamos que (β, B) e (γ, C) são ações envolventes de α . Então, $\forall a, b \in A$, $t \in G$, tem-se: $\beta_t(a)b = \gamma_t(a)b$ (notar que cada um destes produtos é um elemento de D_t).*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (u_i) uma unidade aproximada de $D_{t^{-1}}$. Então $u_i a \in D_{t^{-1}}$, $\forall i$, e como α é a restrição a A de β e também de γ temos:

$$\beta_t(a)b = \lim \beta_t(u_i a)b = \lim \alpha_t(u_i a)b = \lim \gamma_t(u_i a)b = \gamma_t(a)b.$$

$\square$

TEOREMA 5.11. *Seja (α, A) uma ação parcial de G , e suponhamos que (β, B) e (γ, C) são ações envolventes de α . Então existe um único isomorfismo $\phi : B \rightarrow C$ tal que $\phi\beta_t = \gamma_t\phi$, $\forall t \in G$, e $\phi|_A = \text{id}_A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para $s \in G$, sejam $\|\cdot\|_s : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|^s : C \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\|b\|_s := \sup\{\|bx\| : x \in \beta_s(A), \|x\| \leq 1\}$ e $\|c\|^s := \sup\{\|cy\| : y \in \gamma_s(A), \|y\| \leq 1\}$. Pelo Lema 5.9, $\|\cdot\|_s$ e $\|\cdot\|^s$ são C^* -seminormas, e $\|\cdot\|_B = \sup_s \|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_C = \sup_s \|\cdot\|^s$.

Sejam $t_1, \dots, t_n \in G$, e $a_1, \dots, a_n \in A$. Queremos ver que $\|\sum_i \beta_{t_i}(a_i)\|_B = \|\sum_i \gamma_{t_i}(a_i)\|_C$. Para isto, basta mostrar que $\|\sum_i \beta_{t_i}(a_i)\|_s = \|\sum_i \gamma_{t_i}(a_i)\|^s, \forall s \in G$. Sejam $s \in G$ e $a \in A$. Usando o Lema 5.10 temos:

$$\|\sum_i \beta_{t_i}(a_i)\beta_s(a)\| = \|\beta_s(\sum_i \beta_{s^{-1}t_i}(a_i)a)\| = \|\gamma_s(\sum_i \gamma_{s^{-1}t_i}(a_i)a)\| = \|\sum_i \gamma_{t_i}(a_i)\gamma_s(a)\|.$$

Portanto $\|\sum_i \beta_{t_i}(a_i)\|_s = \|\sum_i \gamma_{t_i}(a_i)\|^s, \forall s \in G$, e então $\|\sum_i \beta_{t_i}(a_i)\|_B = \|\sum_i \gamma_{t_i}(a_i)\|_C$. Assim, $\phi : [\beta(A)] \rightarrow [\gamma(A)]$ tal que $\phi(\sum_i \beta_{t_i}(a_i)) = \sum_i \gamma_{t_i}(a_i)$ é uma isometria de um $*$ -ideal denso de B sobre um $*$ -ideal denso de C , e portanto se estende por continuidade a um isomorfismo $\phi : B \rightarrow C$, que claramente satisfaz $\gamma_t \circ \phi = \phi \circ \beta_t, \forall t \in G$, e $\phi|_A = id_A$; além disto, é claro que estas duas condições determinam unicamente a ϕ . $\square$

5.2. Ação parcial sobre o espectro e o espaço de ideais primitivos

Queremos ver a seguir como se manifesta a presença de uma ação parcial α sobre uma C^* -álgebra A no espectro de A e no espaço de ideais primitivos de A .

Será conveniente relembrar e resumir os fatos mais importantes relativos ao espectro e ao espaço de ideais primitivos. Para mais detalhes, consultar por exemplo [57], Apêndice A.

§1 O espaço de ideais primitivos

O núcleo de uma representação irredutível de A é chamado *primitivo*, e o conjunto de tais ideais é denotado por $\text{Prim}(A)$. Todo ideal I de A é a interseção dos ideais primitivos que o contem. Além disso, se $P \in \text{Prim}(A)$ é tal que $P \supseteq I \cap J$, onde I e J são ideais de A , tem-se que $P \supseteq I$ ou $P \supseteq J$.

Para cada ideal I de A consideremos o conjunto $\mathcal{O}_I = \{P \triangleleft A : P \text{ é primitivo e } P \not\supseteq I\}$. Então $\{\mathcal{O}_I : I \triangleleft A\}$ é uma topologia sobre o conjunto $\text{Prim}(A)$, conhecida como topologia de Jacobson (também “hull-kernel”), e $\text{Prim}(A)$ com a topologia de Jacobson é chamado *espaço de ideais primitivos* de A . A correspondência $I \mapsto \mathcal{O}_I$ é uma bijeção, e $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I \cap J}$.

Suponhamos que $I \triangleleft A$, e seja $r : \mathcal{O}_I \rightarrow \text{Prim}(I)$ a aplicação restrição, ou seja: $r(P) = P \cap I$. Então r é um homeomorfismo. Em particular, para cada $Q \in \text{Prim}(I)$ existe um único ideal primitivo P de A tal que $P \cap I = Q$.

Se $\phi : A \rightarrow A'$ é um isomorfismo de C^* -álgebras, ele induz um homeomorfismo $\tilde{\phi} : \text{Prim}(A) \rightarrow \text{Prim}(A')$, definido por $\tilde{\phi}(P) = \phi(P)$.

§2 O espectro de A

O espectro de A está constituído pelas classes de equivalência unitária de representações irredutíveis de A , e é simbolizado por $\hat{A}$.

Existe uma aplicação natural $\kappa : \hat{A} \rightarrow \text{Prim}(A)$, dada por $\kappa([\pi]) = \ker \pi$, que é sobrejetiva mas em geral não é injetiva.

Sobre $\hat{A}$ se considera a topologia inicial definida por κ . Com esta topologia, $\hat{A}$ é localmente compacto, e é compacto se A tem unidade ([37], VII-6.11). Assim, os abertos de $\hat{A}$ são da forma $\mathcal{V}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$. De novo, portanto, estão parametrizados pelos ideais de A .

Suponhamos que $I \triangleleft A$. Então temos uma aplicação restrição $r : \mathcal{V}_I \rightarrow \hat{I}$, tal que $r([\pi]) = [\pi|_I]$, e r é um homeomorfismo.

O diagrama abaixo comuta, para todo ideal I de A :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_I & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{O}_I \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ \dot{I} & \xrightarrow{\kappa} & \text{Prim}(I) \end{array}$$

Finalmente, se $\phi : A \rightarrow A'$ é um isomorfismo, temos um homeomorfismo $\hat{\phi} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ tal que $[\pi] \mapsto [\pi \circ \phi^{-1}]$, e o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{\phi}} & A' \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \\ \text{Prim}(A) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \text{Prim}(A') \end{array}$$

Temos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 5.12. *Seja $\beta : G \times B \rightarrow B$ uma ação contínua do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra B . Então:*

1. $\hat{\beta} : G \times \hat{B} \rightarrow \hat{B}$ tal que $\hat{\beta}_t([\pi]) = [\pi \circ \beta_{t^{-1}}]$ é uma ação contínua.
2. $\tilde{\beta} : G \times \text{Prim}(B) \rightarrow \text{Prim}(B)$ tal que $\tilde{\beta}_t(P) = \beta_t(P)$ é uma ação contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Uma demonstração de 1. pode ser achada em [57], 7.1. Para provar 2., notemos que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times \hat{B} & \xrightarrow{id \times \kappa} & G \times \text{Prim}(B) \\ \hat{\beta} \downarrow & & \downarrow \tilde{\beta} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\kappa} & \text{Prim}(B) \end{array}$$

Como $\hat{B}$ tem a topologia inicial induzida da topologia de $\text{Prim}(B)$ através de κ , então $\text{Prim}(B)$ é precisamente o espaço topológico quociente de $\hat{B}$ com respeito a κ , e $G \times \text{Prim}(B)$ é o quociente de $G \times \hat{B}$ com respeito a $id \times \kappa$. Portanto, $\tilde{\beta}$ é contínua se e somente se $\tilde{\beta}(id \times \kappa)$ é contínua; mas $\tilde{\beta}(id \times \kappa) = \kappa \hat{\beta}$, e $\kappa \hat{\beta}$ é contínua. $\square$

Veremos a seguir que se α é uma ação parcial de um grupo discreto sobre a C^* -álgebra A , então α induz ações parciais contínuas sobre $\text{Prim}(A)$ e $\hat{A}$. Mais tarde veremos que este resultado é válido também para grupos não discretos.

PROPOSIÇÃO 5.13. *Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \alpha_{t \in G})$ uma ação parcial do grupo discreto G sobre a C^* -álgebra A . Para cada $t \in G$, seja $\mathcal{O}_t = \mathcal{O}_{D_t} = \{P \in \text{Prim}(A) : P \not\supseteq D_t\}$. Então $\hat{\alpha} = (\{\mathcal{O}_t\}_{t \in G}, \{\hat{\alpha}_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial contínua de G sobre $\text{Prim}(A)$, onde $\hat{\alpha}_t(P)$ está definido como sendo o único ideal primitivo de A tal que $\hat{\alpha}_t(P) \cap D_t = \alpha_t(P \cap D_{t^{-1}})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Da própria definição, temos que $\mathcal{O}_e = \mathcal{O}_A = \text{Prim}(A)$, e $\tilde{\alpha}_e = id$. Por outro lado, a definição de $\tilde{\alpha}_t$ implica que o diagrama seguinte é comutativo, onde a flecha horizontal superior está induzida pelo isomorfismo $\alpha_t : D_{t-1} \rightarrow D_t$, ou seja, $\alpha_t^*(P) = \alpha_t(P)$, e as verticais são as aplicações de restrição. Como cada r e α_t^* são homeomorfismos, temos que $\tilde{\alpha}_t : \mathcal{O}_{t-1} \rightarrow \mathcal{O}_t$ é um homeomorfismo, e é claro que sua inversa é $\tilde{\alpha}_{t-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim}(D_{t-1}) & \xrightarrow{\alpha_t^*} & \text{Prim}(D_t) \\ r \cong \uparrow & & \uparrow r \cong \\ \mathcal{O}_{t-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_t} & \mathcal{O}_t \end{array}$$

Temos que provar que $\tilde{\alpha}_{ts}$ é uma extensão de $\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s$.

A primeira coisa que verificamos é que $\text{dom}(\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s) \subseteq \text{dom}(\tilde{\alpha}_{ts}) = \mathcal{O}_{s-1t-1}$. Suponhamos que $P \in \text{dom}(\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s)$. Então $P \in \mathcal{O}_{s-1}$, e $\tilde{\alpha}_s(P) \in \mathcal{O}_{t-1}$. Suponhamos que $P \notin \mathcal{O}_{s-1t-1}$, ou seja, suponhamos que $P \not\supseteq D_{s-1t-1}$; em particular, $P \cap D_{s-1} \not\supseteq D_{s-1t-1} \cap D_{s-1}$. Como $P \cap D_{s-1} \in \text{Prim}(D_{s-1})$, $\alpha_s(P \cap D_{s-1}) \in \text{Prim}(D_s)$, e então $\tilde{\alpha}_s(P) \cap D_{s-1} = \alpha_s(P \cap D_{s-1}) \supseteq \alpha_s(D_{s-1t-1} \cap D_{s-1}) = D_{t-1} \cap D_s$. Portanto, $\tilde{\alpha}_s(P) \supseteq D_{t-1} \cap D_s$, e como $\tilde{\alpha}_s(P)$ é um ideal primitivo, deve ser $\tilde{\alpha}_s(P) \supseteq D_{t-1}$ ou $\tilde{\alpha}_s(P) \supseteq D_s$, isto é: ou $\tilde{\alpha}_s(P) \notin \mathcal{O}_{t-1}$ ou $\tilde{\alpha}_s(P) \notin \mathcal{O}_s$. Esta é uma contradição, que surgiu de supor que $P \notin \mathcal{O}_{s-1t-1}$; portanto $P \in \mathcal{O}_{s-1t-1}$.

Vejamos agora que $\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s(P) = \tilde{\alpha}_{ts}(P)$, $\forall P \in \text{dom}(\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s)$. Como $P \not\supseteq D_{s-1} \cap D_{s-1t-1}$, então $\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s(P) \not\supseteq D_t \cap D_{ts}$. Portanto, para ver que $\tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s(P) = \tilde{\alpha}_{ts}(P)$, basta mostrar que suas restrições a $D_t \cap D_{ts}$ coincidem. Agora:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_t \tilde{\alpha}_s(P) \cap D_t \cap D_{ts} &= \tilde{\alpha}_t(\tilde{\alpha}_s(P)) \cap \alpha(D_s \cap D_{t-1}) \quad \text{porque } \alpha \text{ é ação parcial} \\ &= \alpha_t(\tilde{\alpha}_s(P) \cap D_{t-1}) \cap \alpha(D_s \cap D_{t-1}) \quad \text{pela definição de } \tilde{\alpha}_t \\ &= \alpha_t(\tilde{\alpha}_s(P) \cap D_{t-1} \cap D_s) \\ &= \alpha_t(\alpha_s(P \cap D_{s-1}) \cap D_{t-1} \cap D_s) \quad \text{pela definição de } \tilde{\alpha}_s \\ &= \alpha_t(\alpha_s(P \cap D_{s-1}) \cap \alpha_s(D_{s-1t-1} \cap D_{s-1})) \quad \text{porque } \alpha \text{ é ação parcial} \\ &= \alpha_t(\alpha_s(P \cap D_{s-1} \cap D_{s-1t-1})) \\ &= \alpha_t \alpha_s(P \cap D_{s-1} \cap D_{s-1t-1}) \\ &= \alpha_t \alpha_s((P \cap D_{s-1t-1}) \cap (D_{s-1} \cap D_{s-1t-1})) \\ &= \alpha_{ts}(P \cap D_{s-1t-1}) \cap D_t \cap D_{ts} \quad \text{porque } \alpha \text{ é ação parcial} \\ &= \tilde{\alpha}_{ts}(P) \cap D_t \cap D_{ts} \quad \text{pela definição de } \tilde{\alpha}_{ts}. \end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO 5.14. *Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial do grupo discreto G sobre a C^* -álgebra A . Para cada $t \in G$, seja $\mathcal{V}_t = \{[\pi] \in \hat{A} : \pi|_{D_t} \neq 0\}$, ou seja, $\mathcal{V}_t = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_t)$, onde $\mathcal{O}_t$ é como em 5.13. Então $\hat{\alpha} = (\{\mathcal{V}_t\}_{t \in G}, \{\hat{\alpha}_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial contínua de G sobre o espaço topológico $\hat{A}$, onde, se $[\pi] \in \mathcal{V}_t$, então $\alpha_t([\pi])$ é a classe da única extensão de $\pi \circ \alpha_{t-1} : D_t \rightarrow B(H_\pi)$ a todo A .*

DEMONSTRAÇÃO. Tem-se claramente que $\mathcal{V}_e = \hat{A}$, $\hat{\alpha}_e = id$, e que $\hat{\alpha}_t : \mathcal{V}_{t-1} \rightarrow \mathcal{V}_t$ é uma bijeção com inversa $\hat{\alpha}_{t-1}$. Além disso, $\hat{\alpha}_t$ é contínua, e daí um homeomorfismo, por causa da comutatividade do diagrama seguinte, junto com o fato de que a topologia de $\hat{A}$ é a topologia inicial induzida pela

aplicação κ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{t-1} & \xrightarrow{\hat{\alpha}_t} & \mathcal{V}_t \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa \\ \mathcal{O}_{t-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_t} & \mathcal{O}_t \end{array}$$

Finalmente, temos que ver que α_{ts} é uma extensão de $\hat{\alpha}_t \hat{\alpha}_s$. Agora, usando de novo o diagrama acima e o fato de que $\tilde{\alpha}$ é uma ação parcial:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\hat{\alpha}_t \hat{\alpha}_s) &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \hat{\alpha}_s^{-1}(\mathcal{V}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \hat{\alpha}_s^{-1} \kappa^{-1}(\mathcal{O}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap (\kappa \hat{\alpha}_s)^{-1}(\mathcal{O}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap (\tilde{\alpha}_s \kappa)^{-1}(\mathcal{O}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \kappa^{-1} \tilde{\alpha}_s^{-1}(\mathcal{O}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \kappa^{-1} \tilde{\alpha}_s^{-1}(\mathcal{O}_{t-1} \cap \mathcal{O}_s) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \kappa^{-1}(\mathcal{O}_{s-1} \cap \mathcal{O}_{t-1}) \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \mathcal{V}_{s-1} \cap \mathcal{V}_{t-1} \\ &= \mathcal{V}_{s-1} \cap \mathcal{V}_{t-1} \\ &\subseteq \mathcal{V}_{s-1} \cap \mathcal{V}_{t-1} \\ &= \text{dom}(\hat{\alpha}_{ts}) \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $[\pi] \in \text{dom}(\hat{\alpha}_t \hat{\alpha}_s)$. Então $\kappa([\pi]) \not\subseteq D_{s-1} \cap D_{t-1}$. Agora, é fácil ver que $\hat{\alpha}_{ts}([\pi])$ e $\hat{\alpha}_t \hat{\alpha}_s([\pi])$ coincidem sobre $D_{s-1} \cap D_{t-1}$ (na verdade: representantes destas classes restritos a $D_{s-1} \cap D_{t-1}$ são unitariamente equivalentes). Portanto, $\alpha_{ts}([\pi]) = \hat{\alpha}_t \hat{\alpha}_s([\pi])$. $\square$

Suponhamos a seguir que a ação parcial (α, A) tem uma ação envolvente (β, B) . Como $A \triangleleft B$, $\hat{A}$ é naturalmente homeomorfo a um subconjunto aberto de B , e portanto a ação $\hat{\beta}$ restrita a este aberto define, via este homeomorfismo, uma ação parcial de G sobre $\hat{\alpha}$. Veremos a seguir que esta ação parcial coincide com $\hat{\alpha}$. Analogamente, a restrição de $\hat{\beta}$ a $\text{Prim}(A)$ coincide com $\tilde{\alpha}$.

PROPOSIÇÃO 5.15. *Seja α uma ação parcial sobre A , e suponhamos que β é uma ação envolvente de α , agindo sobre B . Então $(r^{-1}, \text{Prim}(B), \hat{\beta})$ é uma ação envolvente de $(\tilde{\alpha}, \text{Prim}(A))$, e $(r^{-1}, \hat{B}, \hat{\beta})$ é a ação envolvente de $(\hat{\alpha}, \hat{A})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Identifiquemos $\text{Prim}(A)$ com $\mathcal{O}_A$ através do homeomorfismo r^{-1} . Assim, $\tilde{\alpha} = (\{\mathcal{O}_t\}, \{\tilde{\alpha}_t\})$ tem a forma seguinte: $\mathcal{O}_t = \{P \in \text{Prim}(B) : P \not\subseteq D_t\}$, e se $P \in \mathcal{O}_{t-1}$, então $\tilde{\alpha}_t(P) \in \mathcal{O}_t$ é o único ideal primitivo de B tal que $\tilde{\alpha}_t(P) \cap D_t = \alpha_t(P \cap D_{t-1})$. Vejamos primeiro que $\text{dom}(\hat{\beta}_t|_{\mathcal{O}_A}) =$

$\text{dom } \hat{\alpha}_t$:

$$\begin{aligned}
 \text{dom}(\tilde{\beta}_t)|_{\mathcal{O}_A} &= \{P \in \text{Prim}(B) : P \in \mathcal{O}_A \text{ e } \tilde{\beta}_t(P) \in \mathcal{O}_A\} \\
 &= \mathcal{O}_A \cap \{P \in \text{Prim}(B) : P \in \tilde{\beta}_{t-1}(\mathcal{O}_A)\} \\
 &= \mathcal{O}_A \cap \{P \in \text{Prim}(B) : P \in \mathcal{O}_{\tilde{\beta}_{t-1}(A)}\} \\
 &= \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_{\tilde{\beta}_{t-1}(A)} \\
 &= \mathcal{O}_{A \cap \tilde{\beta}_{t-1}(A)} \\
 &= \mathcal{O}_{D_{t-1}} \\
 &= \mathcal{O}_{t-1} \\
 &= \text{dom}(\hat{\alpha}_t)
 \end{aligned}$$

Agora, se $P \in \mathcal{O}_{t-1}$, temos que $\tilde{\beta}_t(P) = \beta_t(P) \not\subseteq D_t$, e portanto $\tilde{\beta}_t(P) \in \mathcal{O}_t$. Mas $\beta_t(P) \cap D_t = \beta_t(P \cap \beta_{t-1}(D_t)) = \alpha_t(P \cap D_{t-1})$. Então $\tilde{\beta}_t(P)$ coincide com $\hat{\alpha}_t(P)$ devido à definição deste último.

Falta verificar apenas que a $\tilde{\beta}$ -órbita de $\mathcal{O}_A$ é $\text{Prim}(B)$. Suponhamos que existe $P \in \text{Prim}(B)$ tal que $P \neq \tilde{\beta}_t(Q)$, $\forall Q \in \mathcal{O}_A$. Então $\tilde{\beta}_t(P) \notin \mathcal{O}_A$, $\forall t \in G$, ou seja, $\beta_t(P) \supseteq A$, $\forall t \in G$. Mas então $P \supseteq \beta_t(A)$, $\forall t \in G$, e portanto $P \supseteq [\beta(A)] = B$, porque β é a ação envolvente de α . A contradição implica que todo ideal primitivo pertence à $\tilde{\beta}$ -órbita de algum elemento de $\mathcal{O}_A$.

Com respeito a β e α , identifiquemos $\hat{A}$ com $\mathcal{V}_A$ através de r^{-1} . Assim, $\hat{\alpha} = (\{\mathcal{V}_t\}, \{\hat{\alpha}_t\})$ tem a forma seguinte: $\mathcal{V}_t = \{[\pi] \in \hat{B} : \pi|_{D_t} \neq 0\}$, e para $[\pi] \in \mathcal{V}_{t-1}$, $\hat{\alpha}_t([\pi])$ é a classe da única extensão a B da representação irredutível $\pi \circ \alpha_{t-1}$ de D_t . Dos cálculos feitos anteriormente segue que $\text{dom}(\hat{\beta})|_{\mathcal{V}_A} = \mathcal{V}_{t-1} = \text{dom}(\hat{\alpha}_t)$. Por outro lado, se $[\pi] \in \mathcal{V}_{t-1}$, então $(\pi \circ \beta_{t-1})$ é uma extensão a B da representação $\pi \circ \alpha_{t-1}$, e portanto $\hat{\beta}_t([\pi])$ coincide com $\hat{\alpha}_t([\pi])$. Falta ver só que a $\tilde{\beta}$ -órbita de $\mathcal{V}_A$ é todo $\hat{B}$, o que é análogo ao já feito para $\hat{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$: se $[\pi] \notin \tilde{\beta}_t(\mathcal{V}_A)$, $\forall t \in G$, então $\pi|_{\beta_t(A)} = 0$, $\forall t \in G$, e portanto $\pi = 0$, o que é absurdo. $\square$

Os seguintes tres resultados valem ainda quando a ação parcial α não possui ação envolvente, mas ainda é cedo para demonstrá-los.

COROLÁRIO 5.16. *Suponhamos que a ação parcial (α, A) tem ação envolvente (β, B) . Então as ações parciais $\hat{\alpha}$ sobre $\hat{A}$ e $\hat{\alpha}$ sobre $\text{Prim}(A)$ induzidas por α são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO. Por 5.15 temos que $\hat{\alpha}$ é a restrição de $\hat{\beta}$ ao subconjunto aberto $\mathcal{V}_A$ de $\hat{B}$, e $\hat{\alpha}$ é a restrição de $\tilde{\beta}$ ao subconjunto aberto $\mathcal{O}_A$ de $\text{Prim}(B)$. Como β e $\tilde{\beta}$ são contínuas por 5.12, temos que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ são contínuas pelo exemplo 4.38. $\square$

COROLÁRIO 5.17. *Suponhamos que (α, A) é uma ação parcial que tem ação envolvente (β, B) . Então, se $\hat{A} = \text{Prim}(A)$, também é $\hat{B} = \text{Prim}(B)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por 5.15 temos que $(\tilde{\beta}, \hat{B})$ é a ação envolvente de $\hat{\alpha}$ e $(\tilde{\beta}, \text{Prim}(B))$ é a ação envolvente de $\hat{\alpha}$. Mas, como neste caso $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}$, e como a ação envolvente é única, concluímos que $(\tilde{\beta}, \hat{B}) = (\tilde{\beta}, \text{Prim}(B))$. $\square$

COROLÁRIO 5.18. *Suponhamos que α é uma ação parcial do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra A , que tem ação envolvente (β, B) . Se $\text{Prim}(A)$ é compacto, então existe um subgrupo aberto H de G tal que a restrição de α a H é uma ação global. Em particular, se G é conexo, α é uma ação global (e portanto $\alpha = \beta$, $A = B$). Em particular, isto vale se A tem unidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Se A tem unidade, $\text{Prim}(A)$ é compacto por [37], VII-6.11. Por 5.16, $\tilde{\alpha}$ é contínua. Portanto, se $\text{Prim}(A)$ é compacto, por 4.40 existe um subgrupo aberto H de G tal que $\tilde{\alpha}$ restrita a H é uma ação global sobre $\text{Prim}(A)$, e portanto todo ideal primitivo pertence ao domínio de $\tilde{\alpha}_s$, $\forall s \in H$. Pela definição de $\tilde{\alpha}$, isto implica que nenhum ideal primitivo de A contém o ideal $D_{s^{-1}}$, o que implica que $D_{s^{-1}} = A$, $\forall s \in H$. Portanto $\alpha|_{H \times A}$ é uma ação global. Se G é conexo, então $G = H$. $\square$

5.3. Propriedades da álgebra envolvente

Esta última parte do capítulo será dedicada a comparar propriedades de uma C^* -álgebra A sobre a qual age uma ação parcial α , com a C^* -álgebra B envolvente de A onde atua a ação envolvente, sempre que esta exista. Veremos que várias propriedades são comuns às duas álgebras. Em toda a seção estaremos supondo que (β, B) é uma ação envolvente de (α, A) .

Começamos com um resultado que descreve B como limite indutivo, e que permite afirmar que, sob certas condições na classe de C^* -álgebras consideradas, A pertence a uma tal classe se e somente se B pertence.

PROPOSIÇÃO 5.19. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de C^* -álgebras fechada por ideais, extensões, quocientes e limites indutivos. Então $A \in \mathcal{C}$ se e somente se $B \in \mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $B \in \mathcal{C}$, então $A \in \mathcal{C}$ porque $\mathcal{C}$ é fechada por ideais.

Inversamente, suponhamos que $A \in \mathcal{C}$. Seja T um subconjunto denso de G . Para cada conjunto finito $F = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$, consideremos $B_F = \beta_{t_1}(A) + \dots + \beta_{t_n}(A)$. Então B_F é um ideal de B ([52], 1.5.8). Por outro lado, $B = \varinjlim B_F$: se $t \in G$, $a \in A$, existe uma rede $\{t_i\} \subseteq T$ tal que $t_i \rightarrow t$, e portanto $\beta_{t_i}(a) \rightarrow \beta_t(a)$, porque β é contínua. Assim, $\beta_t(a) \in \overline{\bigcup_i \beta_{t_i}(A)} \subseteq \varinjlim B_F$; como $B = \overline{[\beta(A)]}$, temos que $B \subseteq \varinjlim B_F$, e portanto são iguais. Consequentemente, basta provar que $B_F \in \mathcal{C}$, $\forall F$, e por indução é suficiente mostrar que, se $I, J \in \mathcal{C}$, com $I \triangleleft B$, $J \triangleleft B$, então $I + J \in \mathcal{C}$. Agora, temos a seguinte sequência exata de C^* -álgebra:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} I + J \xrightarrow{\pi} J/(I \cap J) \longrightarrow 0,$$

onde ι é a inclusão e π é a projeção no quociente. Como $J \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada por quocientes, então $J/(I \cap J) \in \mathcal{C}$. Finalmente, como $I, J/(I \cap J) \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada por extensões, temos que $I + J \in \mathcal{C}$. $\square$

Lembrando que uma C^* -álgebra é chamada *aproximadamente finita* se ela é o limite indutivo de um sistema direto enumerável de C^* -álgebras de dimensão finita, temos:

COROLÁRIO 5.20. *Suponhamos que B é a álgebra envolvente de A . Então temos:*

1. *A é nuclear se e somente se B é nuclear*
2. *Se G é um grupo separável, então A é aproximadamente finita se e somente se B é aproximadamente finita.*

DEMONSTRAÇÃO. A classe de C^* -álgebra nucleares é fechada por ideais (2.11), quocientes ([64], 2.5), extensões ([65], T.6.27) e limites indutivos ([65], T.M). Portanto 1. segue de 5.19. A classe de C^* -álgebra aproximadamente finitas é fechada por ideais, quocientes, extensões ([19], III.4.1, III.4.4 e III.6.3 respectivamente) e limites indutivos enumeráveis (segue da própria definição de C^* -álgebra aproximadamente finita); assim 2. segue da demonstração de 5.19 $\square$

Lembremos algumas outras propriedades de C^* -álgebras que compararemos depois em A e B . As seguintes definições e resultados podem ser achados no capítulo 6 de [52].

DEFINIÇÃO 5.21. Sejam A uma C^* -álgebra e $x \in A$. Então diz-se que:

1. x é abeliano se $\overline{xAx}$ é uma C^* -álgebra abeliana.
2. A é de tipo I_0 se ela está gerada pelos seus elementos abelianos.
3. A é de tipo I se para todo ideal I de A , tem-se que A/I contém elementos abelianos não nulos.
4. A é liminal (ou CCR), se para toda representação irredutível (π, H_π) se tem que $\pi(A) = \mathcal{K}(H_\pi)$
5. A é postliminal (ou GCR) se para toda representação irredutível (π, H_π) se tem que $\pi(A) \supseteq \mathcal{K}(H_\pi)$
6. A é antiliminal se A não contém elementos abelianos não nulos.

Existem as seguintes relações de implicação:

$$A \text{ abeliana} \implies A \text{ de tipo } I_0 \implies A \text{ liminal} \implies A \text{ postliminal} = \text{tipo } I.$$

PROPOSIÇÃO 5.22. Seja (α, A) uma ação parcial que tem ação envolvente (β, B) . Então:

1. A é de tipo I_0 se e somente se B é de tipo I_0 .
2. A é liminal se e somente se B é liminal.
3. A é postliminal se e somente se B é postliminal.
4. A é antiliminal se e somente se B é antiliminal.

DEMONSTRAÇÃO. Começamos observando que se um elemento x de um ideal I de uma C^* -álgebra C é abeliano em I , então é também abeliano em C : se (u_i) é uma unidade aproximada de I , e $c \in C$, então $xcx = \lim_i xu_i cu_i x \in \overline{xIx}$, donde segue que $\overline{xCx} = \overline{xIx}$ (na verdade, $\overline{xIx}$ é a C^* -álgebra hereditária gerada por x em I , e portanto também a C^* -álgebra hereditária gerada por x em C , que é exatamente $\overline{xCx}$).

1. Se A é de tipo I_0 , $\beta_t(A)$ é de tipo I_0 , e como $[\beta(A)]$ é denso em B , e cada elemento abeliano de $\beta_t(A)$ é abeliano em B , concluímos que B também é de tipo I_0 . Se B é de tipo I_0 , então A é de tipo I_0 por [52], 6.2.10.
2. Se B é liminal, então [52], 6.2.9 implica que A é liminal. Inversamente, suponhamos que A é liminal, e seja $\pi : B \rightarrow B(H_\pi)$ uma representação irredutível de B . Como cada $\beta_t(A)$ é liminal, temos que $\pi|_{\beta_t(A)} = 0$ ou $\pi(\beta_t(A)) = \mathcal{K}(H_\pi)$; como $B = \overline{[\beta(A)]}$, concluímos que $\pi(B) = \mathcal{K}(H_\pi)$.
3. Se B é postliminal, então A é postliminal por [52], 6.2.9. Agora, se A é postliminal, cada $\beta_t(A)$ também é postliminal. Portanto, se $\pi : B \rightarrow H_\pi$ é uma representação irredutível, então $\pi|_{\beta_t(A)}$ é não nula para algum $t \in G$, e neste caso também é irredutível; portanto $\pi(B) \supseteq \pi(\beta_t(A)) \supseteq \mathcal{K}(H_\pi)$, donde segue que B é postliminal.

4. Se B é antiliminal, não contém elementos abelianos não nulos, e então, como vimos no começo da prova, A também não tem elementos abelianos não nulos; assim, A é antiliminal. Suponhamos que A é antiliminal, e seja $b \in B$ um elemento abeliano de B . Se $a \in A$, $t \in G$, temos que $\beta_t(a)b$ e $b\beta_t(a)$ são elementos abelianos de $\beta_t(A)$: $\overline{\beta_t(a)b\beta_t(A)\beta_t(a)b} \subseteq \beta_t(A) \cap \overline{bBb}$, e portanto $\overline{\beta_t(a)b\beta_t(A)\beta_t(a)b}$ é uma C^* -álgebra abeliana; da mesma forma, $\overline{b\beta_t(a)\beta_t(A)b\beta_t(a)}$ é uma C^* -álgebra abeliana. Assim temos que $\beta_t(a)b$ e $b\beta_t(a)$ são abelianos, e portanto nulos, já que cada $\beta_t(A)$ é antiliminal, donde concluímos que b é um anulador de $\beta_t(A)$, $\forall t \in G$. Mas então $b[\overline{\beta(A)}] = 0$, o que implica que $b = 0$ e então que B é antiliminal.

□

CAPÍTULO 6

Produtos Cruzados Parcial e Envolvente

Demonstraremos neste capítulo um dos resultados principais da parte 2: se (β, B) é uma ação envolvente da ação parcial (α, A) , no sentido de C^* -álgebras, então $A \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$ (6.6), onde $\stackrel{M}{\sim}$ significa equivalência Morita. Na verdade, deduziremos este fato de um outro mais geral (6.3), que também será de muita utilidade no seguinte Capítulo. Veremos também que, se a ação parcial α é amenable, então a ação envolvente β também é amenable (6.7).

Posteriormente aplicaremos o Teorema 6.6 à análise de alguns exemplos. Entre as aplicações há um resultado de dilatação de uma representação parcial a uma representação unitária que parece de bastante interesse. Todas estas aplicações são apenas uma primeira aproximação aos exemplos considerados, e sentimos que bastante mais pode ser feito após um estudo mais profundo.

6.1. Equivalência Morita dos produtos cruzados parcial e envolvente

Obteremos a equivalência Morita entre os produtos cruzados reduzidos (pela ação parcial e pela ação envolvente) como caso particular de um teorema mais geral sobre equivalência Morita (6.4), que será utilizado também em outras ocasiões. As hipóteses em 6.4 implicam uma “equivalência Morita” entre os fibrados de Fell $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Temos que supor, porém, que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Temos tentado achar uma definição geral de equivalência Morita entre fibrados de Fell, mas para a noção que nos parece adequada não conseguimos provar que $C_r^*(\mathcal{A}) \stackrel{M}{\sim} C_r^*(\mathcal{B})$, nem que $C^*(\mathcal{A}) \stackrel{M}{\sim} C^*(\mathcal{B})$.

LEMA 6.1. *Seja $f : G \rightarrow H$ uma função contínua entre dois grupos topológicos G e H , e seja $K \subseteq G$ compacto. Então f é uniformemente contínua sobre K , no seguinte sentido: dada uma vizinhança W da identidade de H , existe uma vizinhança V da identidade de G , tal que para todos $r, s \in K$ tais que $r^{-1}s \in V$ e $rs^{-1} \in V$ tem-se que $f(r)f(s)^{-1} \in W$ e $f(r^{-1})f(s) \in W$. Em particular, se f tem suporte compacto, ela é uniformemente contínua, no sentido de que podemos substituir K por G na condição acima.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F : G \times G \rightarrow H \times H$ tal que $F(r, s) = (f(r)f(s)^{-1}, f(r)^{-1}f(s))$. Então F é uma função contínua, e $F(s, s) = (e, e)$, $\forall s \in G$. Suponhamos que para toda vizinhança V da identidade de G existem $r_V, s_V \in K$ tais que $r_V^{-1}s_V \in V$ e $r_V s_V^{-1} \in V$ mas $F(r_V, s_V) \notin W \times W$. Como K é compacto, a rede (r_V) deve ter uma subrede convergente, e portanto podemos supor que a própria (r_V) converge a certo ponto $r \in K$. Isto implica que (s_V) também converge, ao mesmo limite r , já que $s_V \in r_V V$, $\forall V$. Como F é contínua, e $F(r, r) = (e, e)$, deve ser $F(r_V, s_V) \in W \times W$, $\forall V \geq V_0$. $\square$

Sejam $\mathcal{V}$ uma base local de vizinhanças precompactas e simétricas da unidade $e \in G$, dirigido pela relação: $V \geq V' \iff V \subseteq V'$, $\{(f_V, V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ uma unidade aproximada de $L^1(G)$ contida em $C_c(G)$, tal que $\text{supp}(f_V) \subseteq V$, $f_V \geq 0$, e $\int_G f_V(s)ds = 1$, $\forall V \in \mathcal{V}$.

LEMA 6.2. *Sejam $\mathcal{B}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , $b : G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ uma função contínua de suporte compacto, tal que $b(r, s) \in B_s$, $\forall (r, s) \in G \times G$. Seja $(f_V)_{V \in \mathcal{V}}$ uma unidade aproximada de $L^1(G)$ como a descrita acima, e definamos, para cada par $(V, r) \in \mathcal{V} \times G$, a função $b_{V,r} : G \rightarrow \mathcal{B}$, tal que $b_{V,r}(t) = \int_G f_V(r^{-1}s)b(s, t)ds$. Então:*

1. $b_{V,r} \in C_c(\mathcal{B})$, $\forall V \in \mathcal{V}$, $r \in G$.
2. $\lim_V b_{V,r} = b_r$ na topologia do limite indutivo de $C_c(\mathcal{B})$, onde $b_r : G \rightarrow \mathcal{B}$ é dada por $b_r(s) = b(r, s)$.

DEMONSTRAÇÃO. A função $\mu : G \times G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $(r, t, s) \mapsto f_V(r^{-1}s)b(s, t)$ é uma função contínua e tal que $\mu(r, t, s) \in B_s, \forall r, s, t \in G$. Portanto, por [37], II-15.19, a função $G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $(r, t) \mapsto \int_G f_V(r^{-1}s)b(s, t)ds$ é contínua. Em particular, $b_{V,r}$ é contínua, o que prova 1. .

Com respeito a 2., sejam $K_1, K_2 \subseteq G$ compactos tais que $\text{sup}(b) \subseteq K_1 \times K_2$. Como a função b é contínua, cada $b_r : G \rightarrow \mathcal{B}$ é uma seção contínua tal que $\text{sup}(b_r) \subseteq K_2$, de forma que temos uma função $G \rightarrow C_c(\mathcal{B})$ tal que $r \mapsto b_r$, cujo suporte está contido em K_1 . Esta função é contínua. Com efeito, seja $r_0 \in G$. Como a função $G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(r, s) \mapsto \|b(r_0, s) - b(r, s)\|$ é contínua e se anula para cada (r_0, s) , com $s \in K_2$, existem vizinhanças abertas U_s de r_0 , V_s de s , tais que $\|b(r_0, s') - b(r, s')\| < \epsilon, \forall r \in U_s, s' \in V_s$. Como os V_s cobrem o compacto K_2 , existe uma subcobertura finita $V_{s_1}, \dots, V_{s_n}$ de K_2 . Seja $U = \bigcap_{i=1}^n U_{s_i}$. Então U é uma vizinhança aberta de r_0 . Sejam $r \in U, s \in G$. Então $s \notin K_2$, em cujo caso $b_r(s) = 0, \forall r \in G$, ou $s \in K_2$, e portanto $s \in V_{s_i}$ para algum i , e neste caso $(r, s) \in U_{s_i} \times V_{s_i}$, donde segue que $\|b_{r_0}(s) - b_r(s)\| < \epsilon$, e portanto $\|b_{r_0} - b_r\|_\infty < \epsilon$. Assim, vemos que $r \mapsto b_r$ é contínua. De fato ela é uniformemente contínua, porque tem suporte compacto. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $V_0 \in \mathcal{V}$ tal que se $r^{-1}s \in V_0$, então $\|b_r - b_s\|_\infty < \epsilon$. Temos assim, para todo $V \in \mathcal{V}$, tal que $V \geq V_0$:

$$\begin{aligned} \|(b_r - b_{V,r})(t)\| &= \left\| \int_G f_V(r^{-1}s)(b(r, t) - b(s, t))ds \right\| \\ &\leq \int_V f_V(r^{-1}s) \|b(r, t) - b(s, t)\| ds \\ &= \int_{rV} f_V(r^{-1}s) \|b(r, t) - b(s, t)\| ds \\ &= \epsilon \int_{rV} f(r^{-1}s) ds \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\|b_r - b_{V,r}\|_\infty < \epsilon, \forall V \geq V_0$, e daqui segue que $\lim_V b_{V,r} = b_r, \forall r \in G$. $\square$

TEOREMA 6.3. Sejam $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in G}$ um ideal à direita de $\mathcal{B}$ (ver 3.8), $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ contido em $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{AE} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{EE}^* \subseteq \mathcal{A}$, tem-se:

1. $L^1(\mathcal{A})L^1(\mathcal{E}) \subseteq L^1(\mathcal{E})$
2. $L^1(\mathcal{E})L^1(\mathcal{B}) \subseteq L^1(\mathcal{E})$.
3. $L^1(\mathcal{E})L^1(\mathcal{E})^* = L^1(\mathcal{A})$
4. Se para cada $t \in G$ tem-se que $\text{span}(\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap B_t)$ é denso em B_t , então $\overline{\text{span}}L^1(\mathcal{E})^*L^1(\mathcal{E}) = L^1(\mathcal{B})$.

DEMONSTRAÇÃO. Para provar as duas primeiras inclusões acima, é suficiente mostrar que $C_c(\mathcal{A}) * C_c(\mathcal{E}) \subseteq C_c(\mathcal{E})$ e $C_c(\mathcal{E}) * C_c(\mathcal{B}) \subseteq C_c(\mathcal{E})$. Vejamos:

1. Sejam $a \in C_c(\mathcal{A}), \xi \in C_c(\mathcal{E}), t \in G$; então:

$$a * \xi(t) = \int_G a(s)\xi(s^{-1}t)ds \in E_t,$$

pois $a(s)\xi(s^{-1}t) \in A_s E_{s^{-1}t} \subseteq \mathcal{E} \cap B_t = E_t, \forall s, t \in G$. Portanto $a * \xi \in C_c(\mathcal{E})$.

2. Sejam $\xi \in C_c(\mathcal{E}), b \in C_c(\mathcal{B}), t \in G$; então:

$$\xi * b(t) = \int_G \xi(s)b(s^{-1}t)ds \in E_t,$$

pois $\xi(s)b(s^{-1}t) \in E_s B_{s^{-1}t} \subseteq \mathcal{E} \cap B_t = E_t, \forall s, t \in G$. Portanto $\xi * b \in C_c(\mathcal{E})$.

3. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, temos inclusões isométricas $L^1(\mathcal{A}) \subseteq L^1(\mathcal{E}) \subseteq L^1(\mathcal{B})$. $L^1(\mathcal{A})$ é uma sub- $*$ -álgebra de Banach com unidade aproximada de $L^1(\mathcal{B})$, e está contida no ideal à direita $L^1(\mathcal{E})$ de $L^1(\mathcal{B})$ (sabemos que é um ideal à direita por 2.). Portanto, usando 1. e o teorema de Cohen-Hewitt:

$$L^1(\mathcal{A}) = L^1(\mathcal{A}) * L^1(\mathcal{A})^* \subseteq L^1(\mathcal{E}) * L^1(\mathcal{E})^*.$$

Por outro lado, se $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{E})$, $t \in G$:

$$\begin{aligned} \xi * \eta^*(t) &= \int_G \xi(s) \eta^*(s^{-1}t) ds \\ &= \int_G \xi(s) \Delta(t^{-1}s) \eta(t^{-1}s)^* ds \\ &= \int_G \Delta(t^{-1}s) \xi(s) \eta(t^{-1}s)^* ds \in A_t. \end{aligned}$$

pois $\xi(s) \eta(t^{-1}s)^* \in E_s E_{t^{-1}s}^* \in \mathcal{A} \cap B_t = A_t$. $\forall s, t \in G$. Portanto $\xi * \eta^* \in C_c(\mathcal{A})$, o que prova a inclusão contrária.

4. Sejam $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{E})$, $t \in G$. Então:

$$\begin{aligned} \xi^* * \eta(t) &= \int_G \xi^*(s) \eta(s^{-1}t) ds \\ &= \int_G \Delta(s^{-1}) \xi(s^{-1})^* \eta(s^{-1}t) ds \\ &= \int_G \Delta(s^{-1}) \xi(s^{-1})^* \eta(s^{-1}t) ds. \end{aligned}$$

Consideremos agora $\{(f_V, V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ uma unidade aproximada como no Lema 6.2. Para $\xi \in C_c(\mathcal{E})$, $V \in \mathcal{V}$, $r \in G$, seja $\xi_{V,r} : G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$\xi_{V,r}(s) = \Delta(s^{-1}) f_V(r^{-1}s^{-1}) \xi(s).$$

Então $\xi_{V,r} \in C_c(\mathcal{E})$, e temos:

$$\begin{aligned} \xi_{V,r}^* * \eta(t) &= \int_G \Delta(s^{-1}) \Delta(s) f_V(r^{-1}s) \xi(s^{-1})^* \eta(s^{-1}t) ds \\ &= \int_G f_V(r^{-1}s) \xi(s^{-1})^* \eta(s^{-1}t) ds \\ &= \int_G f_V(r^{-1}s) \zeta_{\xi,\eta}(s, t) ds, \end{aligned}$$

onde $\zeta_{\xi,\eta} : G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ é tal que $\zeta_{\xi,\eta}(s, t) = \xi(s^{-1})^* \eta(s^{-1}t)$. Notar que $\zeta_{\xi,\eta}$ é contínua e de suporte compacto: se $\zeta_{\xi,\eta}(s, t) \neq 0 \rightarrow s \in (\text{sup}(\xi))^{-1}$ e $s^{-1}t \in \text{sup}(\eta)$, donde segue que $t \in s \text{sup}(\eta) \subseteq (\text{sup}(\xi))^{-1} \text{sup}(\eta)$; portanto, $\text{sup}(\zeta_{\xi,\eta}) \subseteq (\text{sup}(\xi))^{-1} \times (\text{sup}(\xi))^{-1} \text{sup}(\eta)$, que é compacto. Usando agora o Lema 6.2, vemos que $\lim_V \xi_{V,r}^* * \eta = \zeta_{\xi,\eta,r}$ na topologia do limite indutivo de $C_c(\mathcal{B}_\beta)$, e portanto também em $L^1(\mathcal{B}_\beta)$. Assim, temos que $(\overline{\text{span}} L^1(\mathcal{E})^* L^1(\mathcal{E})) \cap C_c(\mathcal{B}) \supseteq Z$, onde $Z = \text{span}\{\zeta_{\xi,\eta,r} : \xi, \eta \in C_c(\mathcal{E}), r \in G\}$.

Para mostrar que $\overline{\text{span}} L^1(\mathcal{E})^* L^1(\mathcal{E}) = L^1(\mathcal{B})$, basta ver que Z é denso em $C_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo; para isso é suficiente, por [37], II-14.6 (ou por 3.14), ver que: (a) $Z(t)$ é denso em B_t , $\forall t \in G$, onde $Z(t) = \{\zeta(t) : \zeta \in Z\}$ e (b) se $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, então $g\zeta \in Z$, $\forall \zeta \in Z$.

- (a) Temos: $Z(t) \supseteq \{\zeta_{\xi,\eta,r} : \xi, \eta \in C_c(\mathcal{E}), r \in G\} = \{\xi(r^{-1})^* \eta(r^{-1}t) : \xi, \eta \in C_c(\mathcal{E}), r \in G\}$.

Portanto, $Z(t) \supseteq \overline{\text{span}}\{E_{r^{-1}}^* E_{r^{-1}t} : r \in G\} = (B_t \cap \overline{\text{span}} \mathcal{E}^* \mathcal{E}) = B_t$ pela hipótese 4. .

- (b) Sejam $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{E})$, $r, t \in G$. Definindo $g^r : G \rightarrow \mathbb{C}$ como $g^r(s) = g(rs)$ tem-se:

$$(g\zeta_{\xi, \eta, r})(t) = g(t)\xi(r^{-1})^* \eta(r^{-1}t) = \xi(r^{-1})^* g^r(r^{-1}t) \eta(r^{-1}t) = \zeta_{\xi, g^r \eta, r}(t).$$

Como $\zeta_{\xi, g^r \eta, r} \in C_c(\mathcal{E})$, concluímos que $\zeta_{\xi, g^r \eta, r} \in Z$, o que encerra a prova. $\square$

COROLÁRIO 6.4. *Sejam $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in G}$ um ideal à direita de $\mathcal{B}$ (ver 3.8), e $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ contido em $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{AE} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{EE}^* \subseteq \mathcal{A}$, tem-se que $C_r^*(\mathcal{A})$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $C_r^*(\mathcal{B})$, e se $(B_t \cap \overline{\text{span}} \mathcal{EE}^*)$ é denso em B_t , para cada $t \in G$, então $C_r^*(\mathcal{A})$ e $C_r^*(\mathcal{B})$ são equivalentes Morita, através do ideal direito $C_r^*(\mathcal{E}) := \overline{L^1(\mathcal{E})} \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por 3.10, sabemos que $C_r^*(\mathcal{A})$ é naturalmente isomorfa ao fecho de $L^1(\mathcal{A})$ em $C_r^*(\mathcal{B})$. Por 6.3 2., $L^1(\mathcal{E})$ é um ideal à direita em $L^1(\mathcal{B})$, e portanto $C_r^*(\mathcal{E})$, seu fecho em $C_r^*(\mathcal{B})$, é um ideal direito de $C_r^*(\mathcal{B})$. Agora, de 3. deduzimos que $C_r^*(\mathcal{A}) = C_r^*(\mathcal{E})C_r^*(\mathcal{E})^*$, e portanto $C_r^*(\mathcal{A})$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $C_r^*(\mathcal{B})$. Finalmente, a última afirmação segue do quarto ponto de 6.3. $\square$

COROLÁRIO 6.5. *Sejam $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in G}$ um ideal à direita de $\mathcal{B}$ (ver 3.8), e $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ contido em $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{AE} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{EE}^* \subseteq \mathcal{A}$, e se $\text{span}(B_t \cap \mathcal{EE}^*)$ é denso em B_t , para cada $t \in G$, então $\mathcal{B}$ é amenable sempre que $\mathcal{A}$ seja amenable.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\mathcal{A}$ é amenable, e sejam $\|\cdot\|_{\max}$ a norma de $C^*(\mathcal{B})$ e $\|\cdot\|_r$ a norma sobre $C_r^*(\mathcal{B})$. O fecho de $C_c(\mathcal{A})$ dentro de $C_r^*(\mathcal{B})$ é $C_r^*(\mathcal{A})$, pela Proposição 3.10. Também temos que o fecho de $C_c(\mathcal{A})$ dentro de $C^*(\mathcal{B})$ é $C^*(\mathcal{A}) = C_r^*(\mathcal{A})$, pois toda representação de $L^1(\mathcal{B})$ induz uma representação de $L^1(\mathcal{A})$ por restrição, e portanto a norma de $C^*(\mathcal{A})$ é maior ou igual que $\|\cdot\|_{\max}$; a amenabilidade de $\mathcal{A}$ implica que são iguais. Seja $\xi \in C_c(\mathcal{E})$. Como $C^*(\mathcal{A}) = C_r^*(\mathcal{A})$ por hipótese, e $\xi * \xi^* \in C_c(\mathcal{A})$ por 6.3, temos que:

$$\|\xi\|_r^2 = \|\xi^* * \xi\|_r = \|\xi * \xi^*\|_r = \|\xi * \xi^*\|_{\max} = \|\xi^* * \xi\|_{\max} = \|\xi\|_{\max}^2,$$

e portanto $\|\xi\|_r = \|\xi\|_{\max}$. Então, os completamentos de $C_c(\mathcal{E})$ com respeito a $\|\cdot\|_{\max}$ e $\|\cdot\|_r$ coincidem; denotemos este completamento por E . Temos então que E é um módulo de Hilbert pleno sobre $C^*(\mathcal{B})$ e também sobre $C_r^*(\mathcal{B})$. Mas por [68], E só pode ser um módulo de Hilbert pleno sobre uma única C^* -álgebra; isto implica que $C^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$, e portanto $\mathcal{B}$ é amenable. $\square$

TEOREMA 6.6. *Sejam β uma ação contínua do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra B , $I \triangleleft B$, $\alpha = \beta|_I$. Então $I \rtimes_{\alpha, r} G$ é uma subálgebra hereditária de $B \rtimes_{\beta, r} G$. Se além disso $[\beta(I)]$ é denso em B , i.e. β é a ação envolvente de α , então $I \rtimes_{\alpha, r} G \in B \rtimes_{\beta, r} G$ são Morita equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\mathcal{B}_\beta = (B_t)_{t \in G}$ o fibrado de Fell associado a β , $\mathcal{B}_\alpha = (A_t)_{t \in G}$ o fibrado de Fell associado a α , e $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in G}$, onde $E_t = \{(t, x) \in \mathcal{B}_\beta : x \in I\}$. É claro que $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}_\beta$ como subfibrados de Banach, e que $\mathcal{B}_\alpha$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}_\beta$. Além disso, se $(r, a_r) \in A_r$, $(s, x_s) \in E_s$, $(t, y_t) \in E_t$, $(u, b_u) \in B_u$, tem-se:

- $(r, a_r)(s, x_s) = (rs, \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)x_s)) \in E_{rs}$, porque $\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)x_s) \in I$. Portanto: $\mathcal{B}_\alpha \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$

- $(s, x_s)(t, y_t)^* = (s, x_s)(t^{-1}, \beta_{t^{-1}}(y_t^*)) = (st^{-1}, x_s \beta_{st^{-1}}(y_t^*)) \in A_{st^{-1}}$, porque $x_s \beta_{st^{-1}}(y_t^*) \in I \cap \beta_{st^{-1}}(I) = D_{st^{-1}}$. Assim, $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subseteq B_\alpha$.
- $(s, x_s)(u, b_u) = (su, x_s \beta_s(b_u)) \in E_u$ porque I é um ideal e $x_s \in I$. Logo, $\mathcal{E}B_\beta \subseteq \mathcal{E}$.

Portanto, estamos nas condições do Corolário 6.4, donde concluímos que $I \rtimes_{\alpha, r} G = C_r^*(B_\alpha)$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $C_r^*(B_\beta) = B \rtimes_{\beta, r} G$.

Suponhamos agora que β é a ação envolvente de α , ou seja, que $[\beta(I)]$ é denso em B . Para ver que $I \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$, basta ver que $(\overline{\text{span}} \mathcal{E}^* \mathcal{E}) \cap B_t$ é denso em B_t , para todo $t \in G$. Agora: $(s, x_s)^*(t, y_t) = (s^{-1}, \beta_{s^{-1}}(x_s^*))(t, y_t) = (s^{-1}t, \beta_{s^{-1}}(x_s^* y_t))$. Portanto, $(\text{span} \mathcal{E}^* \mathcal{E}) \cap B_t = \{(t, \beta_v(x' y')) : v \in G, x', y' \in I\}$. Pelo teorema de Cohen-Hewitt, cada $z \in I$ pode ser escrito na forma $z = x' y'$, para certos $x', y' \in I$. Portanto, o conjunto acima é exatamente $\{t\} \times [\beta(I)]$, que é denso em B_t . $\square$

COROLÁRIO 6.7. *Se β é a ação envolvente de uma ação parcial amenable α (ver 3.7), então β também é amenable.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue de 6.5. $\square$

6.2. Aplicações e exemplos

Como aplicações do Teorema 6.6, a seguir vemos alguns exemplos de C^* -álgebras que são Morita equivalentes a produtos cruzados reduzidos por ações globais de grupos discretos; também obtemos um resultado de dilatação de representações parciais de grupos discretos amenable.

EXEMPLO 6.8. Se $X = \{1, \dots, n\}$, e α é a ação parcial de $\mathbb{Z}$ por translação, então $\dot{X} = \mathbb{Z}$, e $\dot{\alpha}$ é a translação. Portanto, usando o Teorema 6.6, obtemos o resultado bem conhecido seguinte:

$$M_n(\mathbb{C}) = C(X) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z} \stackrel{M}{\sim} C_0(\mathbb{Z}) \rtimes_{\dot{\alpha}, r} \mathbb{Z} = K(\ell^2(\mathbb{Z})).$$

EXEMPLO 6.9. Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ um irracional, $\beta_\theta : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\beta_\theta(k, z) = e^{2k\pi i \theta} z$. Se $U \subseteq S^1$ é um aberto não vazio, e $\alpha_\theta^U := \beta_\theta|_U$, então (S^1, β_θ) é a ação envolvente de (U, α_θ^U) (ver o exemplo 4.49). Segue que:

$$A_\theta := C(S^1) \rtimes_{\beta_\theta} \mathbb{Z} \stackrel{M}{\sim} C_0(U) \rtimes_{\alpha_\theta^U} \mathbb{Z}.$$

EXEMPLO 6.10. C^* -álgebra parcial de um grupo discreto

Suponhamos que G é discreto, e consideremos a seguinte ação parcial (canônica) α de G sobre $X_G = \{\omega \in 2^G : \epsilon \in \omega\}$, onde X_G tem a topologia produto e, se $t \in G$, então $X_t = \{\omega \in X_G : t \in \omega\}$, e $\alpha_t : X_{t^{-1}} \rightarrow X_t$ está dada por $\alpha_t(\omega) = t\omega$, $\forall \omega \in X_{t^{-1}}$.

Como $\{0, 1\}$ é compacto, temos que 2^G é compacto com a topologia produto, e portanto X_G , X_t são compactos, pois são fechados em 2^G . Isto implica que $\text{Gr}(\alpha)$ é fechado em $G \times X_G \times X_G$ (ver Observação 4.52), e portanto o espaço envolvente $\dot{X}_G$ é de Hausdorff, pela Proposição 4.51. De fato, é claro que X_G é também aberto em 2^G , e portanto, levando em conta o Teorema 4.44, a ação

envolvente de α é simplesmente $\dot{\alpha} : G \times \dot{X}_G \longrightarrow \dot{X}_G$ tal que $\dot{\alpha}_t(\omega) = t\omega$, $\forall \omega \in \dot{X}_G$, $t \in G$, onde $\dot{X}_G$ é a órbita de X_G pela ação por translação à esquerda por elementos de G dentro de 2^G , isto é: $\dot{X}_G = \{\omega \in 2^G : \omega \neq \emptyset\}$. Devido à nossa Proposição 4.62 e à Proposition 5.1 de [32], temos que $\dot{\alpha}$ é topologicamente livre se e somente se G é infinito.

Lembremos de [26] (ver também [32]), que a C^* -álgebra parcial do grupo G é definida como $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha} G$. A propriedade fundamental de $C_p^*(G)$ é que as representações parciais de G estão em correspondência biunívoca com as representações não degeneradas de $C_p^*(G)$. Se G é amenable, então $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha} G = C(X_G) \rtimes_{\alpha, r} G$, por [28], Theorem 4.7. e também temos $C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G = C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}, r} G$. Então, se G é amenable, o Teorema 6.6 implica que temos:

$$C_p^*(G) \overset{M}{\sim} C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G.$$

EXEMPLO 6.11. C^* -álgebra parcial de um grupo finito

A seguir estudamos um caso particular do exemplo acima, a saber, o caso em que G é um grupo finito. Uma referência suficiente para esta parte é [60]

Como G é finito, temos que $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha} G$ é equivalente Morita com a álgebra envolvente $E(G) := C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G$. O nosso objetivo é achar a álgebra $E(G)$, e compará-la com $C_p^*(G)$, que vem sendo estudada em [20], inclusive de um ponto de vista puramente algébrico.

Começaremos com algumas considerações gerais sobre produtos cruzados de C^* -álgebras comutativas de dimensão finita por grupos finitos.

Consideremos então um grupo finito G que atua sobre um conjunto finito X através de uma ação β . Suponhamos inicialmente que β é transitiva. Neste caso, é conhecido que β é isomorfa à ação por translação à esquerda $\tau : G \times (G/G_x^\beta) \longrightarrow G/G_x^\beta$, tal que $\beta_r(sG_x^\beta) = (rs)G_x^\beta$, onde G_x^β é o estabilizador de qualquer elemento $x \in X$. Por outro lado, é fácil ver que o correspondente produto cruzado é $M_{[G:H]}(\mathbb{C}G_x^\beta)$, sendo $\mathbb{C}G_x^\beta$ a álgebra do grupo G_x^β , i.e.:

$$C(X) \rtimes_{\beta} G = C(G/G_x^\beta) \rtimes_{\tau} G = M_{[G:G_x^\beta]}(\mathbb{C}G_x^\beta).$$

Se a ação β é arbitrária, ela será transitiva quando restrita a cada uma das suas órbitas. Portanto, se R^β é um conjunto completo de representantes das órbitas, e $o(x)$ denota a órbita do elemento $x \in X$, teremos:

$$C(X) \rtimes_{\beta} G = \bigoplus_{r \in R^\beta} (C(o(r)) \rtimes_{\beta|_{o(r)}} G) = \bigoplus_{r \in R^\beta} M_{[G:G_r^\beta]}(\mathbb{C}G_r^\beta).$$

Queremos ir um pouco além desta descrição de $C(X) \rtimes_{\beta} G$, e para isso introduzimos algo de notação. Seja H um subgrupo de G ; indicaremos esta relação pondo $H \leq G$, e $H < G$ se H for um subgrupo próprio de G . Para $H \leq G$, definimos $X_H^\beta = \{x \in X : G_x^\beta = H\}$, e $F_H^\beta(X) = \{x \in X : H \leq G_x^\beta\}$. Indicaremos por n_H^β o cardinal de X_H^β . Em geral, $|S|$ denotará o cardinal do conjunto S ; assim por exemplo, $n_H^\beta = |X_H^\beta|$. Se $t \in G$, denotaremos por H_t o subgrupo de G conjugado com H através de t , ou seja: $H_t = tHt^{-1}$, e por $[H]$ a classe de conjugação de H , isto é, $[H] = \{H_t : t \in G\}$. Seja $C = \{[H] : H \leq G\}$ a família de classes de conjugação de subgrupos de G . Notar que a função $X \longrightarrow \{\text{subgrupos de } G\}$ que a cada elemento $x \in X$ associa seu estabilizador G_x^β passa aos quocientes, donde obtemos uma função $\text{Est} : X/\beta \longrightarrow C$ tal que $o(x) \longmapsto [G_x^\beta]$. Dado $H \leq G$, definimos $n_{[H]}^\beta = |\text{Est}^{-1}([H])|$, isto é, $n_{[H]}^\beta$ é o número de órbitas cujos elementos têm estabilizador conjugado com H . Notar que a quantidade de tais elementos é $n_{[H]}^\beta [G : H]$. Daqui em

diante, R^β denotará um conjunto completo de representantes das órbitas e, para $H \leq G$, indicaremos por $R_{[H]}^\beta = \{r \in R^\beta : \text{Est}(o(r)) = [H]\}$. É claro que $n_{[H]}^\beta = |R_{[H]}^\beta|$.

PROPOSIÇÃO 6.12. *Suponhamos que $\beta : G \times X \rightarrow X$ é uma ação de um grupo finito G sobre um conjunto finito X . Então, com a notação acima temos:*

1. $C(X) \rtimes_\beta G = \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H)^{n_{[H]}^\beta}$, onde $M_n(\mathbb{C}H)^k = \underbrace{M_n(\mathbb{C}H) \oplus \dots \oplus M_n(\mathbb{C}H)}_{k \text{ vezes}}$ (em particular, $M_n(\mathbb{C}H)^0 = 0$).
2. Se G é abeliano, então $C(X) \rtimes_\beta G = \bigoplus_{H \leq G} M_{[G:H]}(\mathbb{C})^{|H|n_{[H]}^\beta}$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$\begin{aligned} C(X) \rtimes_\beta G &= \bigoplus_{r \in R^\beta} C(o(r)) \rtimes_{\beta|_{o(r)}} G \\ &= \bigoplus_{r \in R^\beta} M_{[G:G_r^\beta]}(\mathbb{C}G_r^\beta) \\ &= \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} \bigoplus_{r \in R_{[H]}^\beta} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H) \\ &= \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H)^{n_{[H]}^\beta}. \end{aligned}$$

O enunciado para G abeliano segue do fato que $\mathbb{C}H = \mathbb{C}^{|H|}$, para todo subgrupo H de G , e de que podemos identificar H com $[H]$, pois todos os subgrupos são normais. $\square$

O Lema seguinte será útil para calcular $E(G)$.

LEMA 6.13. *Tem-se:*

1. $F_H(X) = \biguplus_{H \leq K \leq G} X_K^\beta$, e $n_H^\beta = |F_H(X)| - \sum_{H < K \leq G} n_K^\beta$
2. $n_H^\beta = n_{[H]}^\beta [N_G(H) : H]$, onde $N_G(H)$ é o normalizador de H em G .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira parte do Lema é trivial, e portanto provaremos apenas a segunda. Para isto, notemos que se $t \in G$, então $tX_H^\beta = X_{Ht}^\beta$, e, em particular, $|X_{Ht}^\beta| = |X_H^\beta|$. Portanto:

$$n_{[H]}^\beta [G : H] = \left| \biguplus_{r \in R_{[H]}^\beta} o(r) \right| = \left| \biguplus_{H' \in [H]} X_{H'}^\beta \right| = |[H]| |X_H^\beta| = [G : N_G(H)] n_H^\beta.$$

Então, $n_H^\beta = (n_{[H]}^\beta [G : H]) / [G : N_G(H)] = [N_G(H) : H] n_{[H]}^\beta$. $\square$

OBSERVAÇÃO 6.14. Notar que, como conjunto, $C(X) \rtimes_{\beta} G$ pode ser identificado com $\{f : G \rightarrow C(X)\}$, e portanto $\dim(C(X) \rtimes_{\beta} G) = |G||X|$. Por outro lado, pela Proposição 6.12 temos:

$$\begin{aligned} \dim(C(X) \rtimes_{\beta} G) &= \dim \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H)^{n_H^{\beta}/[N_G(H):H]} \\ &= \sum_{[H] \in \mathcal{C}} [G:H]^2 |H| \frac{n_H^{\beta}}{[N_G(H):H]} \\ &= \sum_{[H] \in \mathcal{C}} |[H]| |G| n_H^{\beta}. \end{aligned}$$

Assim concluímos que, para toda ação β de um grupo finito G sobre um conjunto finito X , tem-se:

$$\sum_{[H] \in \mathcal{C}} |[H]| n_H^{\beta} = |X|.$$

OBSERVAÇÃO 6.15. Seja c_G o número de classes de conjugação do grupo G . Lembrar que $\dim(Z(\mathbb{C}G)) = c_G$, onde $Z(\mathbb{C}G)$ denota o centro de G . Como $C(X) \rtimes_{\beta} G = \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H)^{n_H^{\beta}/[N_G(H):H]}$, tem-se que $\dim(Z(C(X) \rtimes_{\beta} G)) = \sum_{[H] \in \mathcal{C}} c_H n_H^{\beta}$.

LEMA 6.16. Sejam $\beta : G \times X \rightarrow X$ e $\gamma : H \times Y \rightarrow Y$ ações dos grupos finitos G e H sobre os conjuntos finitos X, Y . Seja $\beta \times \gamma : (G \times H) \times (X \times Y) \rightarrow X \times Y$ a ação produto. Então temos, para $G' \leq G, H' \leq H$:

$$(X \times Y)_{G' \times H'}^{\beta \times \gamma} = X_{G'}^{\beta} \times Y_{H'}^{\gamma}, \quad n_{G' \times H'}^{\beta \times \gamma} = n_{G'}^{\beta} n_{H'}^{\gamma}, \quad n_{[G'] \times [H']}^{\beta \times \gamma} = n_{[G']}^{\beta} n_{[H']}^{\gamma}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(x, y) \in X \times Y$. Então $(G \times H)_{(x,y)}^{\beta \times \gamma} = G_x^{\beta} \times H_y^{\gamma}$. Segue que $(x, y) \in (X \times Y)_{G' \times H'}^{\beta \times \gamma} \iff (G \times H)_{(x,y)}^{\beta \times \gamma} = G' \times H' \iff G_x^{\beta} = G' \text{ e } H_y^{\gamma} = H' \iff x \in X_{G'}^{\beta} \text{ e } y \in Y_{H'}^{\gamma}$.

A última igualdade se deduz das duas primeiras e de 2. do Lema 6.13, além da observação trivial de que $[N_{G \times H}(G' \times H') : G' \times H'] = [N_G(G') : G'] [N_H(H') : H']$. $\square$

Podemos agora considerar o caso em que a ação β é a ação à envolvente da ação parcial de G sobre G que define $C_p^*(G)$. Ou seja, $\dot{\alpha} : G \times \dot{X}_G \rightarrow \dot{X}_G$ é tal que $\forall t \in G, A \in \dot{X}_G$, temos $\dot{\alpha}_t(A) = tA$, onde $\dot{X}_G = \{A \subseteq G : A \neq \emptyset\}$. Em lugar de pôr $(\dot{X}_G)_{\dot{H}}^{\dot{\alpha}}, n_{\dot{H}}^{\dot{\alpha}}$, etc., poremos simplesmente X_H, n_H , etc.

Para referência posterior, e utilizando já o Lema 6.13, reestabelecemos a Proposição 6.12 para o caso da álgebra $E(G)$.

PROPOSIÇÃO 6.17. 1. $E(G) = \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}} M_{[G:H]}(\mathbb{C}H)^{n_H/[N_G(H):H]}$, e $n_H \neq 0, \forall H \leq G$.
2. Se G é abeliano, então $E(G) = \bigoplus_{H \leq G} M_{[G:H]}(\mathbb{C})^{(n_H |H|^2)/|G|}$.

DEMONSTRAÇÃO. A única novidade com respeito à Proposição 6.12 e ao Lema 6.13, é a afirmação de que $n_H \neq 0$, para todo subgrupo H de G ; mas isto é claro, porque o estabilizador do conjunto $H \in \dot{X}_G$ é o subgrupo H , e portanto $H \in X_H$. $\square$

OBSERVAÇÃO 6.18. Lembrar que se H é um grupo finito e $\mathbb{C}H = \bigoplus_{i=1}^r M_{d_i}(\mathbb{C})$, então cada d_i é um divisor de H . Por outro lado, como $n_H \neq 0$, para todo subgrupo H de G , vemos que na decomposição de $E(G)$ como soma de álgebras de matrizes complexas, os tamanhos das matrizes que aparecem são da forma $[G:H]d \leq |G|$, onde H é um subgrupo arbitrário de G , e d é um divisor de $|H|$. Em particular, no caso abeliano os tamanhos das matrizes complexas envolvidas são exatamente os divisores da ordem de G .

Antes de calcularmos $E(G)$ em alguns exemplos concretos, tentaremos achar uma fórmula para n_H .

- PROPOSIÇÃO 6.19. 1. Seja $A \in \dot{X}_G$, e suponhamos que $H \leq G_A$. Então existem $a_1, \dots, a_l \in A$ tais que $A = \biguplus_{i=1}^l Ha_i$.
2. Seja $A \in \dot{X}_G$ tal que $A = \biguplus_{i=1}^l Ha_i$, para certo $H \leq G$ e certos $a_1, \dots, a_l$. Quando $\text{mdc}(l, [G:H]) = 1$, então $G_A = H$.
3. (a) $n_G = 1$
 (b) $|F_H(\dot{X}_G)| = 2^{[G:H]} - 1$, e $n_H = 2^{[G:H]} - 2 - \sum_{H < H' < G} n_{H'}$.
 (c) Se $H < G$, então $n_H \geq 2^{[G:H]} - 2 - \sum_{\{l < [G:H]: \text{mdc}(l, [G:H]) > 1\}} \binom{[G:H]}{l}$.
4. Se $M < G$ é maximal, então
 (a) $n_M = 2^{[G:M]} - 2$.
 (b) $n_{[M]} = (2^{[G:M]} - 2)/[G:M]$, se M é normal em G .
 (c) $n_{[M]} = 2^{[G:M]} - 2$, se M não é normal em G .

- DEMONSTRAÇÃO. 1. Como $H \leq G_A$, temos que $hA = A, \forall h \in H$, e portanto H atua sobre A por translação à esquerda. Se $a \in A$, a correspondente órbita é Ha .
2. Por 1., existem $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m \in A$ tais que $A = \biguplus_{i=1}^l Ha_i$ e $A = \biguplus_{j=1}^m G_A a_j$. Como $H \leq G_A$, temos que $G_A = \biguplus_{k=1}^{[G_A:H]} Hx_k$, para certos $x_1, \dots, x_{[G_A:H]} \in G_A$. Portanto, $A = \biguplus_{j=1}^m (\biguplus_{k=1}^{[G_A:H]} Hx_k) b_j = \biguplus_{j=1}^m \biguplus_{k=1}^{[G_A:H]} Hx_k b_j$, donde concluímos que $Hx_k b_j, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, [G_A:H]$, são as órbitas da ação de H sobre A por translação à esquerda. Portanto, $l = m[G_A:H]$, e como $[G_A:H]$ divide $[G:H]$, a nossa hipótese implica que $[G_A:H] = 1$, ou seja, $G_A = H$.
3. (a) Se $A \neq G$ e $t \notin A$, existe $s \in G$ tal que $sa = t$, para algum $a \in A$. Portanto $G_A \neq G$. Portanto $n_G = 1$, sendo o conjunto G o único elemento de $\dot{X}_G$ cujo estabilizador é G .
- (b) Sejam $Ht_1, \dots, Ht_{[G:H]}$ as classes laterais à direita de H em G . Para $l \leq [G:H]$, seja $A = \biguplus_{j=1}^r Ht_{i_j}$, para $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_l}\} \subseteq \{t_1, \dots, t_{[G:H]}\}$. Como $\forall l = 1, \dots, [G:H]$ existem $\binom{[G:H]}{l}$ destes conjuntos, e estes são (por 1.) os únicos pontos fixos por H , temos que $|F_H(\dot{X}_G)| = \sum_{l=1}^{[G:H]} \binom{[G:H]}{l} = 2^{[G:H]} - 1$. O resto de 3.(b) segue de 1. do Lema 6.13.
- (c) Se $\text{mdc}(l, [G:H]) = 1$, temos por 2. acima que $G_A = H$. Como existem $\binom{[G:H]}{l}$ destes conjuntos teremos que:

$$\begin{aligned} n_H &\geq \sum_{\{l \leq [G:H]: \text{mdc}(l, [G:H])=1\}} \binom{[G:H]}{l} \\ &= \sum_{l=1}^{[G:H]-1} \binom{[G:H]}{l} - \sum_{\{l < [G:H]: \text{mdc}(l, [G:H]) > 1\}} \binom{[G:H]}{l}. \end{aligned}$$

4. Se M é maximal entre os subgrupos próprios de G , $[G : M]$ é primo, e portanto o segundo somando em 3.(b) é igual a zero. Para provar (b) e (c), é só observar que, como M é maximal, tem-se que $N_G(M) = G$ ou $N_G(M) = M$, e depois usar 2. do Lema 6.13.

□

Já está na hora de ver alguns exemplos, que se calculam facilmente usando principalmente a Proposição 6.19 e o Lema 6.13.

Exemplo: $E(\mathbb{Z}_p)$, p primo

Temos que o grupo trivial $1 = \{e\}$ é um subgrupo maximal e normal de $\mathbb{Z}_p$. Portanto $n_{[1]} = \frac{2^p - 2}{p}$. Como, por outro lado, $n_{[\mathbb{Z}_p]} = 1$, concluímos que

$$E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{C}^p \oplus M_p(\mathbb{C})^{\frac{2^p - 2}{p}}.$$

Exemplo: $E(\mathbb{Z}_{p^2})$, p primo

$\mathbb{Z}_{p^2}$ é cíclico, e portanto tem exatamente um subgrupo H de ordem p , que é maximal e normal. Então $n_{[H]} = \frac{2^p - 2}{p}$. Por outro lado, $n_{[1]} = \frac{n_1}{[N_G(1) : 1]} = \frac{n_1}{p^2}$. Pelo Lema 6.13, sabemos que $n_1 = (2^{p^2} - 1) - n_H - n_G = (2^{p^2} - 1) - (2^p - 2) - 1 = 2^{p^2} - 2^p$. Portanto:

$$E(\mathbb{Z}_{p^2}) = \mathbb{C}^{p^2} \oplus M_p(\mathbb{C})^{2^p - 2} \oplus M_{p^2}(\mathbb{C})^{(2^{p^2} - 2^p)/p^2}$$

Exemplo: $E(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$, p, q primos, $p < q$

Existem dois subgrupos maximais: H , de ordem p , K , de ordem q . Portanto $n_{[H]} = \frac{2^q - 2}{q}$, $n_{[K]} = \frac{2^p - 2}{p}$. Então $n_1 = 2^{pq} - 1 - (2^q - 2) - (2^p - 2) - 1 = 2^{pq} - 2^q - 2^p + 2$ (notar que nestes primeiros tres exemplos, o valor de n_1 também podia ter sido obtido usando os valores achados antes junto com o valor da dimensão de $E(G)$). Temos assim:

$$E(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) = \mathbb{C}^{pq} \oplus M_p(\mathbb{C})^{\frac{2}{p}(2^p - 2)} \oplus M_q(\mathbb{C})^{\frac{2}{q}(2^q - 2)} \oplus M_{pq}(\mathbb{C})^{\frac{1}{pq}(2^{pq} - 2^p - 2^q + 2)}$$

Exemplo: $E(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$, p primo

Cada subgrupo de ordem p é maximal, e existem exatamente $p+1$ de tais subgrupos. Se H é um deles, temos $n_{[H]} = \frac{2^p - 2}{p}$. Então, $n_1 = (2^{p^2} - 1) - (p+1)(2^p - 2) - 1 = 2^{p^2} - (p+1)2^p + 2p$. Logo:

$$E(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) = \mathbb{C}^{p^2} \oplus M_p(\mathbb{C})^{(p+1)(2^p - 2)} \oplus M_{p^2}(\mathbb{C})^{\frac{1}{p^2}(2^{p^2} - (p+1)2^p + 2p)}$$

Exemplo: $E(S_3)$, onde S_3 é o grupo de permutações de três elementos

Sejam P_2 um 2-Sylow e P_3 um 3-Sylow de S_3 . Como $P_3 \triangleleft S_3$, temos que $n_{[P_3]} = \frac{2^2-2}{2} = 1$. P_2 é maximal, mas não é normal. Portanto $n_{[P_2]} = 2^3 - 2 = 6$. Por último, como o número de 2-Sylow é exatamente 3: $n_1 = (2^6 - 1) - 2 - 3 \times 6 - 1 = 42$, e portanto $n_{[1]} = \frac{42}{6} = 7$. Por outro lado, S_3 tem duas representações unidimensionais, a trivial e o sinal, e como $E(S_3)$ não é comutativa e tem dimensão 6, deduzimos que $\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C}^2 \oplus M_2(\mathbb{C})$. Em conclusão, temos:

$$E(S_3) = \mathbb{C}^2 \oplus M_2(\mathbb{C})^4 \oplus M_3(\mathbb{C})^{12} \oplus M_6(\mathbb{C})^7$$

PROPOSIÇÃO 6.20. *Seja $G = H \times K$. Consideremos a subálgebra $E_H(G)$ de $E(G)$ definida como:*

$$E_H(G) = \bigoplus_{H \leq H' \leq G} M_{[G:H']}(\mathbb{C}H')^{n_{[H']}}.$$

Então temos que

$$E_H(G) = \mathbb{C}H \otimes E(K).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $H \leq H'$, então existe um (único) subgrupo K' de K tal que $H' = H \times K'$ (a saber: $K' = H' \cap K$). Portanto, temos: $[G : H'] = [H \times K : H \times K'] = [K : K']$ e, pelo Lema 6.16, $n_{[H']} = n_{[H \times K]} = n_{[H]}^H n_{[K']}^K = n_{[K']}^K$, onde estamos utilizando as notações $n_{[H]}^H$ e $n_{[K']}^K$ para indicar que estamos enxergando H como subgrupo de H , e K' como subgrupo de K . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} E_H(G) &= \bigoplus_{H \leq H'} M_{[G:H']}(\mathbb{C}H')^{n_{[H']}} \\ &= \bigoplus_{H \leq H'} M_{[G:H']}(\mathbb{C}(H \times K'))^{n_{[H']}} \\ &= \bigoplus_{K \leq K'} (M_{[K:K']}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}H \otimes \mathbb{C}K' \otimes \mathbb{C}^{n_{[K']}^K}) \\ &= \mathbb{C}(H) \otimes \left[\bigoplus_{K \leq K'} M_{[K:K']}(\mathbb{C}K')^{n_{[K']}^K} \right] \\ &= \mathbb{C}H \otimes E(K) \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 6.21. $\dim E_H(G) = |G|(2^{[G:H]} - 1)$

OBSERVAÇÃO 6.22. Sejam G abeliano, p um primo que divide a ordem de G , P o p -Sylow de G , e $N \leq G$ tal que $G = P \times N$. Sabemos que $E(G) = \bigoplus_{d| |G|} M_d(\mathbb{C})^{a_d}$, para certos inteiros positivos a_d . É claro então que $E_N(G) = \bigoplus_{p^j \leq |G|} M_{p^j}(\mathbb{C})^{a_{p^j}}$. Em particular, se G_1, G_2 são grupos abelianos tais que $E(G_1) = E(G_2)$, com $G_i = P_i \times N_i$, onde P_i é o p -Sylow de G_i , temos que $E(P_1) = E(P_2)$: $|G_1| = |G_2|$ porque $\dim E(G)$ é uma função estritamente crescente, e portanto $|P_1| = |P_2|$, $|N_1| = |N_2|$, donde vemos que $E_{N_1}(G_1) = E_{N_2}(G_2)$, i.e. $E(P_1)^{|N_1|} = E(P_2)^{|N_2|}$; logo $E(P_1) = E(P_2)$. Segue que se quisermos mostrar que $E(G)$ é um invariante completo dos grupos abelianos finitos, bastaria mostrar que isto é verdadeiro com respeito aos p -grupos abelianos finitos. Por sua vez, para isto seria suficiente

provar que a quantidade de subgrupos maximais de dois p -grupos abelianos finitos da mesma ordem é diferente se os grupos não são isomorfos.

EXEMPLO 6.23. C^* -álgebras de Wiener-Hopf de grupos ordenados

Para maiores detalhes sobre as C^* -álgebras que consideramos a seguir, consultar [51], o artigo de Nica onde elas foram introduzidas. Sejam G um grupo discreto e $P \subseteq G$ um subsemigrupo. Temos uma ordem parcial sobre G definida como: $r \leq s \iff r^{-1}s \in P$. Supomos que o par (G, P) satisfaz a condição de “quase-lattice”: se $r, s \in G$ e $P_{r,s} = \{t \in P : r \leq t, s \leq t\} \neq \emptyset$, então $P_{r,s}$ tem um elemento mínimo $r \sim s$, chamado mínimo múltiplo comum de r, s . Se $P_{r,s} = \emptyset$, definimos $r \sim s = \infty$. Uma representação isométrica de P sobre o espaço de Hilbert H é um mapa $V : P \rightarrow B(H)$ tal que $V_r^* V_r = 1$, e $V_r V_s = V_{rs}$, $\forall r, s \in P$. A representação V é chamada covariante se $V_r V_r^* V_s V_s^* = V_{r \sim s} V_{r \sim s}^*$, $\forall r, s \in P$, com a convenção $V_\infty = 0$. Para um tal par, Nica define em [51] duas C^* -álgebras: $C^*(G, P)$ e $\mathcal{T}(G, P)$. $C^*(G, P)$ é uma C^* -álgebra caracterizada por uma propriedade universal: as representações covariantes de P estão em bijeção com as representações não degeneradas de $C^*(G, P)$. A C^* -álgebra $\mathcal{T}(G, P)$, chamada de Wiener-Hopf, é a C^* -álgebra gerada pela representação regular esquerda de P sobre $\ell^2(P)$, que é covariante.

Em [32], os autores provam que $C^*(G, P)$ e $\mathcal{T}(G, P)$ são respectivamente os produtos cruzados pleno e reduzido por uma ação parcial de G . Lembremos os ingredientes do sistema dinâmico parcial.

Seja $\omega \subseteq G$. Dizemos que ω é hereditário (com respeito a P), se $tP^{-1} \subseteq \omega$, $\forall t \in \omega$. Dizemos que ω é dirigido se $\forall r, s \in \omega$, existe $t \in \omega \cap P$ tal que $r \leq t$, $s \leq t$. Usando as notações de 6.10, seja $X_N = \{\omega \in X_G : \omega \text{ é dirigido e hereditário}\}$. Se α é a ação parcial canônica sobre X_G , então $\alpha(X_N) \subseteq X_N$ (Lemma 6.3 de [32]). Além disso, X_N é compacto ([32], Proposition 4.1). Sejam $X_t^N = X_N \cap X_t$, e $\alpha_t^N : X_{t^{-1}}^N \rightarrow X_t^N$ tal que $\alpha_t^N = \alpha|_{X_{t^{-1}}^N}$. Então α^N é uma ação parcial sobre X_N . Como X_t^N é fechado em X_N , temos de novo que $\text{Gr}(\alpha^N)$ é fechado em $G \times X_N \times X_N$, e portanto X_N é de Hausdorff. É claro que, como conjunto, X_N é a α -órbita de X_N , onde α é a ação envolvente da ação parcial canônica α . Porém, não temos verificado ainda se a topologia de X_N é a herdada da topologia produto de 2^G .

Com os elementos introduzidos acima temos ([32], 6.4 e 6.8):

$$C^*(G, P) = C(X_N) \rtimes_{\alpha^N} G, \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(G, P) = C(X_N) \rtimes_{\alpha^N, r} G.$$

Portanto, pelo Teorema 6.6, temos que $\mathcal{T}(G, P) \stackrel{M}{\sim} C(X_N) \rtimes_{\alpha^N, r} G$.

EXEMPLO 6.24. C^* -álgebras parciais com relações de grupos discretos

Na verdade, os exemplos 6.10 e 6.23 são casos particulares de uma situação mais geral, estudada em [32]. Sem entrar em detalhes, que podem ser consultados em [32], qualquer C^* -álgebra universal associada a representações parciais, que satisfazem um certo conjunto de relações $\mathcal{R}$, é um produto cruzado parcial da ação parcial canônica restrita a um determinado subconjunto compacto α -invariante $X_{\mathcal{R}}$ de X_G , chamado o espectro das relações $\mathcal{R}$ ([32], 4.4). Sejam $X_t^{\mathcal{R}} = X_{\mathcal{R}} \cap X_t$, e $\alpha_t^{\mathcal{R}} : X_{t^{-1}}^{\mathcal{R}} \rightarrow X_t^{\mathcal{R}}$ a restrição de α_t a $X_{t^{-1}}^{\mathcal{R}}$. Como $X_{\mathcal{R}}$ é invariante, e cada X_t é aberto em X_G , então cada $X_t^{\mathcal{R}}$ é aberto em $X_{\mathcal{R}}$, e $\alpha^{\mathcal{R}}$ é uma ação parcial; como X_t é fechado em X_G , então cada $X_t^{\mathcal{R}}$ é fechado em $X_{\mathcal{R}}$, e portanto $\alpha^{\mathcal{R}}$ tem gráfico fechado em $G \times X_{\mathcal{R}} \times X_{\mathcal{R}}$. Portanto $X_{\mathcal{R}}$ é de Hausdorff. De novo como conjunto, $X_{\mathcal{R}}$ não é outra coisa que a α -órbita de $X_{\mathcal{R}}$, mas não parece que possamos

fazer também uma identificação topológica entre estes espaços topológicos. Devido ao Teorema 6.6, podemos concluir, como nos exemplos acima, que

$$C(X_{\mathcal{K}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{K}, r}^M G \approx C(\dot{X}_{\mathcal{K}}) \rtimes_{\dot{\alpha}, \mathcal{K}, r} G.$$

Outro caso particular destas álgebras são as C^* -álgebras de Cuntz-Krieger, para matrizes finitas ou infinitas ([32] e [31]).

O último resultado do capítulo diz que toda representação parcial de um grupo discreto amenable pode ser dilatada a uma representação unitária do grupo. Em particular, é uma função de tipo positivo. Lembremos primeiro a definição de representação parcial de um grupo discreto ([26], 6.2):

DEFINIÇÃO 6.25. Seja G um grupo discreto. Uma representação parcial de G sobre o espaço de Hilbert H é uma aplicação $u : G \rightarrow B(H)$ tal que, $\forall t, s \in G$:

1. $u(s)u(t)u(t^{-1}) = u(st)u(t^{-1})$.
2. $u(t^{-1}) = u(t)^*$
3. $u(e) = id_H$

OBSERVAÇÃO 6.26. É fácil ver que as condições acima implicam que cada $u(t)$ é uma isometria parcial, e também que $u(s^{-1})u(s)u(t) = u(s^{-1})u(st)$, $\forall s, t \in G$. Usaremos a notação u_t em lugar de $u(t)$.

PROPOSIÇÃO 6.27. Sejam G um grupo discreto amenable, e $u : G \rightarrow B(H)$ uma representação parcial. Então existem um espaço de Hilbert $\dot{H}$, que contém H como subespaço de Hilbert, e uma representação unitária $\dot{u} : G \rightarrow B(\dot{H})$, tais que

$$u_t = P_H \dot{u}_t i_H, \quad \forall t \in G,$$

onde $P_H : \dot{H} \rightarrow H$ é a projeção ortogonal de $\dot{H}$ sobre H , e $i_H : H \rightarrow \dot{H}$ é a inclusão natural.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $X_t = \{\omega \in 2^G : e, t \in \omega\}$, $\alpha_t : X_{t^{-1}} \rightarrow X_t$ tal que $\alpha_t(\omega) = t\omega$, $\forall \omega \in X_{t^{-1}}$. Então α é uma ação parcial sobre $X_G := X_e$, e $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha} G$. Como G é amenable, também temos que $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha, r} G$. Sejam $\mathcal{B}_{\alpha}$ o fibrado de Fell sobre G definido pela ação parcial α , 1_t a função característica de X_t e, se $a_t \in C_0(X_t)$, o elemento $a_t \delta_t \in C_c(\mathcal{B}_{\alpha})$ definido como $a_t \delta_t(s) = \delta_{t, s} a_t$, onde $\delta_{t, s}$ é o símbolo de Kronecker.

Por 6.5 de [26], u define uma única representação $\pi_u : C_p^*(G) \rightarrow B(H)$, não degenerada, e tal que $\pi_u(1_t \delta_t) = u_t$, $\forall t \in G$. Em particular, $\pi_u(1_e \delta_e) = id_H$.

Pelo Teorema 6.6, temos que $C_p^*(G) = C(X_G) \rtimes_{\alpha, r} G$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}, r} G$, que é igual a $C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G$ pois G é amenable. Além disto, $C_p^*(G)$ é equivalente Morita a $C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G$. Portanto, existem um espaço de Hilbert $\dot{H}$ e uma representação não degenerada $\dot{\pi}_u : C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}} G \rightarrow B(\dot{H})$, tais que H é um subespaço de Hilbert de $\dot{H}$, e π_u é a compressão de $\dot{\pi}_u$ a H , isto é: $\pi_u(x) = P_H \dot{\pi}_u(x) i_H$, $\forall x \in C_p^*(G)$, onde $P_H : \dot{H} \rightarrow H$ é a projeção ortogonal, e $i_H = P_H^* : H \rightarrow \dot{H}$, a inclusão natural ([37], XI-7.6).

Agora, $\dot{\pi}_u = \dot{\phi} \times \dot{u}$, para alguma representação covariante $(\dot{\phi}, \dot{u})$ do sistema dinâmico $(C_0(\dot{X}_G), \dot{\alpha}, G)$; em particular, $\dot{u} : G \rightarrow B(\dot{H})$ é uma representação unitária de G .

Notar que, como X_G é aberto e fechado em $\dot{X}_G$, então $1_e \in C(\dot{X}_G)$, e podemos calcular, em $C(\dot{X}_G) \rtimes_{\dot{\alpha}, r} G$:

$$(1_e \delta_e)(1_t \delta_t)(1_e \delta_e) = (1_e \delta_t)(1_e \delta_e) = 1_e \dot{\alpha}_t(1_e) \delta_t = 1_t \delta_t.$$

Portanto:

$$u_t = \pi_u(1_t \delta_t) = P_H \dot{\pi}_u(1_t \delta_t)|_H = P_H \dot{\pi}(1_e \delta_e) \dot{\pi}(1_t \delta_t) \dot{\pi}(1_e \delta_e)|_H = P_H \dot{\pi}(1_e \delta_e) \dot{u}_t \dot{\pi}(1_e \delta_e)|_H.$$

Agora notemos que $\dot{\pi}(1_e \delta_e)$ é uma projeção ortogonal tal que $P_H \dot{\pi}(1_e \delta_e)|_H = \pi(1_e \delta_e) = id_H$, e portanto é maior o igual que a projeção ortogonal $Q_H \in B(\dot{H})$ com imagem H . Assim, temos que $Q_H \dot{\pi}(1_e \delta_e) = Q_H = \dot{\pi}(1_e \delta_e) Q_H$. Por outro lado, é claro que $P_H Q_H = P_H$. $Q_H = Q_H i_H$, e portanto temos

$$P_H \dot{\pi}(1_e \delta_e) = (P_H Q_H) \dot{\pi}(1_e \delta_e) = P_H (Q_H \dot{\pi}(1_e \delta_e)) = P_H Q_H = P_H,$$

$$\dot{\pi}(1_e \delta_e) i_H = \dot{\pi}(1_e \delta_e) (Q_H i_H) = (\dot{\pi}(1_e \delta_e) Q_H) i_H = Q_H i_H = i_H.$$

Concluimos então que:

$$u_t = P_H \dot{\pi}(1_e \delta_e) \dot{u}_t \dot{\pi}(1_e \delta_e) i_H = P_H \dot{u}_t i_H,$$

o que encerra a demonstração. $\square$

OBSERVAÇÃO 6.28. A hipótese de amenabilidade do grupo G foi necessária porque só sabemos que existe equivalência Morita entre os produtos cruzados reduzidos. Se também os produtos cruzados plenos fossem equivalentes Morita, então o mesmo resultado valeria para representações parciais de grupos discretos arbitrários. Achamos que tal resultado deve ser verdadeiro. Um possível caminho de demonstração pode ser tentado levando em conta a observação a seguir. Suponhamos que $u : G \rightarrow H$ é uma representação parcial de G , e seja H_t o espaço final da isometria parcial u_t , ou seja, $H_t = u_t u_t^*(H)$. Para cada t consideremos $\psi_t : H_{t^{-1}} \rightarrow H_t$ tal que $\psi_t(x) = u_t(x)$. Então ψ_t é um isomorfismo de espaços de Hilbert, e não é muito difícil ver que a coleção $\psi = (\{H_t\}_{t \in G}, \{\psi_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial. Portanto, ψ tem uma ação envolvente $\tilde{\psi}$, agindo sobre certo espaço topológico de Hausdorff (porque cada ψ_t tem gráfico fechado). No caso de G amenable, e usando a notação de 6.27, este espaço de Hausdorff deve estar contido em $\dot{H}$, e deve gerá-lo como espaço de Hilbert.

CAPÍTULO 7

Ações Morita Envolventes

Vimos que nem sempre existe ação envolvente de uma ação parcial sobre uma C^* -álgebra. No que segue tentaremos contornar este problema, achando uma solução alternativa. Introduziremos uma noção mais fraca de ação envolvente (7.13), porém conseguindo resultados totalmente análogos aos obtidos no capítulo anterior: comparar por exemplo o Teorema 6.6 com a Proposição 7.14.

A idéia do novo conceito surge da seguinte observação. Suponhamos que G é um grupo abeliano, e que α é uma ação parcial de G sobre a C^* -álgebra A , que tem uma ação envolvente β agindo sobre a C^* -álgebra B . Pelo Teorema 6.6, temos que $A \rtimes_{\alpha} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta} G$. Temos agora a ação dual $\hat{\beta} : \hat{G} \times (B \rtimes_{\beta} G) \rightarrow B \rtimes_{\beta} G$ que, quando restrita à subálgebra $A \rtimes_{\alpha} G$, é exatamente a ação dual $\hat{\alpha}$ sobre $A \rtimes_{\alpha} G$. Segue, usando resultados de Combes ([14]) ou de Curto, Muhly e Williams ([18]), que teremos

$$(10) \quad A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta} G \rtimes_{\hat{\beta}} \hat{G}$$

Notar que o lado esquerdo da relação (10) pode ser definido ainda no caso em que o par (B, β) não exista; notar também que o lado direito de (10) é isomorfo a $B \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$, pelo teorema de Takai ([61]). Em particular, $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ e B são equivalentes Morita quando B existe. Além disto, podemos considerar a ação bidual α sobre $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$, e, de novo pelo teorema de Takai, teremos que $(A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong (A \rtimes_{\alpha} G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$. Em particular, $(A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ e $A \rtimes_{\alpha} G$ são equivalentes Morita.

No caso em que G não é abeliano, ainda podemos fazer raciocínios semelhantes, usando desta vez a teoria de dualidade para grupos não abelianos, concretamente os teoremas de Imai–Takai e de Katayama, que generalizam o teorema de Takai ([40] e [42]; em [6] pode ser achada a versão mais geral de teoremas de dualidade existente no contexto de C^* -álgebras).

As considerações acima mostram que o par $(A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \alpha)$ é um substituto muito adequado para o par (B, β) no caso deste não existir. Porém, gostaríamos de achar uma relação mais forte entre estes pares, além dos fatos já notados. Concretamente, gostaríamos de ver o par $(A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \alpha)$ como a ação envolvente de uma ação parcial “equivalente Morita” com a nossa ação parcial inicial (7.6). Uma tal ação será chamada ação envolvente a menos de equivalência Morita (7.13). Assim, poderíamos dizer que o problema de achar ações envolventes de ações parciais estaria sendo substituído pela seguinte pergunta: toda classe de equivalência Morita de ações parciais possui uma classe de equivalência Morita de ações envolvente? Na primeira seção precisaremos melhor esta pergunta e na segunda veremos que a resposta é afirmativa. Veremos também, na terceira seção, que a ação envolvente a menos de equivalência Morita é única, a menos de equivalência Morita, naturalmente. É um fato conhecido que as C^* -álgebras formam uma categoria com os bimódulos de equivalência como morfismos ([59]). Formalmente, portanto, para um grupo discreto estamos provando que a ação envolvente de uma ação parcial dada de um grupo discreto sempre existe e é única nesta categoria. Na quarta seção relacionamos as ações envolventes a menos de equivalência Morita com as ações duais sobre produtos cruzados por coações, conectando a nossa prova da existência de ação envolvente a menos de equivalência Morita com a idéia mencionada no começo desta introdução. Finalmente, na última seção estudamos brevemente algumas aplicações; por exemplo, mostramos que uma ação parcial de um grupo conexo sobre uma C^* -álgebra com unidade deve ser uma ação global.

7.1. Ações parciais equivalentes Morita.

A seguir definimos ações parciais equivalentes Morita, e provamos que esta equivalência Morita é uma relação de equivalência na classe de ações parciais contínuas sobre C^* -álgebras de um grupo localmente compacto G . Também mostramos, usando o Teorema 6.3, que os produtos cruzados reduzidos de ações parciais equivalentes Morita são, eles também, equivalentes Morita.

Duas ações parciais (α, A) e (β, B) serão ditas equivalentes Morita quando elas sejam induzidas por uma ação parcial sobre um bimódulo de equivalência entre A e B :

DEFINIÇÃO 7.1. Sejam E um C^* -anel ternário, e $\alpha = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial sobre o conjunto subjacente de E . Diremos que α é uma ação parcial do grupo G sobre o C^* -anel ternário E se para todo $t \in G$, tem-se que E_t é um ideal de E e $\alpha_t : E_{t^{-1}} \rightarrow E_t$ é um isomorfismo de C^* -anéis ternários. Se G é localmente compacto e $\{E_t\}$ é uma família contínua, e $\mathcal{E} = \{(t, x) : x \in E_{t^{-1}}\} \subseteq G \times E$ com a topologia produto, dizemos que α é uma ação parcial contínua sobre E se a aplicação $\mathcal{E} \rightarrow E$ tal que $(t, x) \mapsto \alpha_t(x)$ é contínua.

PROPOSIÇÃO 7.2. Seja $\alpha = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial do grupo discreto G sobre o C^* -anel ternário E . Sejam:

$$\alpha^l = (\{Z_l(E_t)\}_{t \in G}, \{Z_l(\alpha_t)\}_{t \in G})$$

$$\alpha^r = (\{Z_r(E_t)\}_{t \in G}, \{Z_r(\alpha_t)\}_{t \in G})$$

Então α^l é uma ação parcial de G sobre $Z_l(E)$, e α^r é uma ação parcial de G sobre $Z_r(E)$.

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 1.23, $Z_r(E_t) \triangleleft Z_r(E)$, $\forall t \in G$, e pela Proposição 1.18, temos que cada $Z_r(\alpha_t) : Z_r(E_{t^{-1}}) \rightarrow Z_r(E_t)$ é um isomorfismo, e $Z_r(\alpha_t) = id_{Z_r(E_t)}$. Usando a Proposição 1.24, é claro que, como α_{st} é uma extensão de $\alpha_s \alpha_t$, então $Z_r(\alpha_{st})$ é uma extensão de $Z_r(\alpha_s \alpha_t)$. Agora, o domínio de $\alpha_s \alpha_t$ é $E_{t^{-1}} \cap E_{t^{-1}s^{-1}}$, e $\alpha_s \alpha_t : E_{t^{-1}} \cap E_{t^{-1}s^{-1}} \rightarrow E_t \cap E_{st}$ é um isomorfismo. Por 1.24, o domínio de $Z_r(\alpha_s \alpha_t) = Z_r(E_{t^{-1}}) \cap Z_r(E_{t^{-1}s^{-1}})$. Como α é uma ação parcial, também temos por 1.24 que $Z_r(\alpha_t)(Z_r(E_{t^{-1}}) \cap Z_r(E_r)) = Z_r(E_t) \cap Z_r(E_r)$. Segue daqui que o domínio de $Z_r(\alpha_s)Z_r(\alpha_t)$ é $Z_r(E_{t^{-1}}) \cap Z_r(E_{t^{-1}s^{-1}})$, e é claro então que $Z_r(\alpha_s)Z_r(\alpha_t) = Z_r(\alpha_s \alpha_t)$. Portanto, $Z_r(\alpha_{st})$ é uma extensão de $Z_r(\alpha_s)Z_r(\alpha_t)$. $\square$

OBSERVAÇÃO 7.3. É claro que toda ação parcial γ sobre um C^* -anel ternário E é também uma ação parcial sobre E^* , o C^* -anel ternário adjunto de E . Denotando esta ação parcial por γ^* , é claro que $(\gamma^*)^l = \gamma^r$, e $(\gamma^*)^r = \gamma^l$.

EXEMPLO 7.4. Se E é um ideal à direita de uma C^* -álgebra A , na qual G age através de uma ação β , então $\alpha := \beta|_E$ é uma ação parcial sobre E , e tem-se que $\alpha^r = \beta|_{\overline{\text{span}} E \cdot E}$, e $\alpha^l = \beta|_{\overline{\text{span}} E E \cdot}$.

PROPOSIÇÃO 7.5. Suponhamos que $\gamma = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial do grupo G sobre o C^* -anel ternário positivo E , e sejam $(\beta, B) = (\gamma^l, Z_l(E))$, $(\alpha, A) = (\gamma^r, Z_r(E))$. Consideremos as ações parciais $(\tilde{\beta}, \text{Prim}(B)) \in (\tilde{\alpha}, \text{Prim}(A))$ induzidas por β e α sobre $\text{Prim}(B)$ e $\text{Prim}(A)$ respectivamente, segundo 5.13. Então existe um homeomorfismo natural $h : \text{Prim}(B) \rightarrow \text{Prim}(A)$ tal que $h : \tilde{\beta} \rightarrow \tilde{\alpha}$ é um isomorfismo de ações parciais. Em particular, $\tilde{\beta}$ é uma ação contínua se e somente se $\tilde{\alpha}$ é uma ação contínua. Um enunciado análogo é válido para as ações parciais $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\alpha}$ induzidas por β e α sobre os respectivos espectros $\hat{B}$ e $\hat{A}$ de B e A , segundo 5.14.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $I \triangleleft B$, por 1.23 I tem associado um único ideal $h(I)$ de A : $h(I) = Z_r(IE)$. É conhecido que se $P \in \text{Prim}(B)$, então $h(P) \in \text{Prim}(A)$, e também que é um homeomorfismo (consultar por exemplo 3.3 de [57]; que h é um homeomorfismo é fácil de ver, porque, por 1.24, h é um

isomorfismo entre os reticulados de ideais de B e de A). Em particular, temos que $h(Z_l(E_t)) = Z_r(E_t)$, donde segue que $h(\mathcal{O}_t^B) = \mathcal{O}_t^A$. Seja $I \triangleleft B$. Então $\beta_t(Z_l(E_{t-1}) \cap I)$ é um ideal de $Z_l(E_t)$, e portanto existe um único $F \triangleleft E_t$ tal que $Z_l(F) = \beta_t(Z_l(E_{t-1}) \cap I)$. Afirmamos que $F = \gamma_t(E_{t-1} \cap IE)$. Com efeito, $\langle F, F \rangle_l = \langle \gamma_t(E_{t-1} \cap IE), \gamma_t(E_{t-1} \cap IE) \rangle_l = \beta_t(\langle E_{t-1} \cap IE, E_{t-1} \cap IE \rangle_l)$, e portanto $Z_l(F) = \beta_t(Z_l(E_{t-1}) \cap I)$. Da mesma forma, se $J \triangleleft A$, tem-se que $\alpha_t(Z_r(E_{t-1}) \cap J) = Z_r(\gamma_t(E_{t-1} \cap EJ))$. Agora, se $P \in \mathcal{O}_{t-1}^B$, $\tilde{\beta}_t(P) = Q$, onde $Q \in \text{Prim}(B)$ é o único tal que $Q \cap Z_l(E_t) = \beta_t(Z_l(E_{t-1}) \cap P)$. Usando de novo o fato de que h é um isomorfismo de reticulados, temos que $h(Q) \cap h(Z_l(E_t)) = h(\beta_t(Z_l(E_{t-1}) \cap P))$. Ou seja,

$$h(Q) \cap Z_r(E_t) = Z_r(E_{t-1} \cap PE) = \alpha_t(Z_r(E_{t-1}) \cap Z_r(PE)) = \alpha_t(Z_r(E_{t-1}) \cap h(P)).$$

Portanto, como $h(Q)$ é primitivo, deve coincidir com $\tilde{\alpha}_t(h(P))$. Logo, $h : \tilde{\beta} \rightarrow \tilde{\alpha}$ é um morfismo de ações parciais, tal que $h(\text{dom}(\tilde{\beta}_s)) = \text{dom}(\tilde{\alpha}_s)$, $\forall s \in G$, e portanto é um isomorfismo (ver 4.10). Como h é um homeomorfismo, então $\tilde{\beta}$ é contínua se e somente se $\tilde{\alpha}$ é contínua.

A prova do correspondente fato para β e α é similar será omitida. $\square$

DEFINIÇÃO 7.6. Sejam $\alpha = (\{A_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ e $\beta = (\{B_t\}_{t \in G}, \{\beta_t\}_{t \in G})$ ações parciais contínuas do grupo localmente compacto G sobre as C^* -álgebras A e B respectivamente. Dizemos que α é equivalente Morita com β se existe uma ação parcial contínua $\gamma = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\gamma_t\}_{t \in G})$ sobre um C^* -anel ternário positivo E , tal que $\gamma^l = \alpha$, e $\gamma^r = \beta$. O par (E, γ) será chamado sistema parcial de equivalência Morita. Usaremos a notação $\alpha \stackrel{M}{\sim} \beta$ para indicar que α é equivalente Morita com β .

OBSERVAÇÃO 7.7. Em [14], Combes definiu ações equivalentes Morita. Quando α e β são ações globais na Definição 7.6, γ é necessariamente uma ação global, e portanto nossa definição de equivalência Morita coincide com a definição de Combes neste caso. Notar que, de fato, para que α , β e γ sejam ações globais, é necessário e suficiente que apenas uma delas seja uma ação global.

LEMA 7.8. Sejam E um C^* -anel ternário e $A = Z_r(E)$. Se $\{D_t\}_{t \in G}$ é uma família contínua de ideais bilaterais em A , então $\{E_t\}_{t \in G}$ é uma família contínua de ideais bilaterais em E , onde $E_t = ED_t$, $\forall t \in G$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $U \subseteq E$ aberto, e $G_U = \{s \in G : U \cap E_s \neq \emptyset\}$, e suponhamos que $t \in G_U$. Seja $x \in U \cap E_t$. Então existem $y \in E$, $a \in D_t$ tais que $x = ya$. Como a ação de A sobre E é contínua, existem $V \subseteq E$, e $W \subseteq A$ abertos, tais que $y \in V$, $a \in W$, e $VW \subseteq U$. Agora, $a \in W \cap D_t$, e como $\{D_s\}_{s \in G}$ é contínua, o conjunto $G_W = \{s \in G : W \cap D_s \neq \emptyset\}$ é aberto e contém t . Seja, para cada $s \in G_W$, $a_s \in W \cap D_s$. Então $xa_s \in E_s \cap VW \subseteq E$, donde segue que $t \in G_W \subseteq G_U$, e portanto G_U é aberto. $\square$

Veremos a seguir que a equivalência Morita de ações parciais é uma relação de equivalência na classe de ações parciais. Lembremos que se E é um $(A - B)$ bimódulo de Hilbert e F é um $(B - C)$ bimódulo de Hilbert, então podemos construir um $(A - C)$ bimódulo de Hilbert $E \otimes_B F$ chamado *produto tensorial interno*. A construção deste bimódulo é feita assim: se toma primeiro o produto tensorial algébrico $E \odot F$, e se considera sobre $E \odot F$ a única C -forma sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ tal que $\langle x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2 \rangle = \langle y_1, \langle x_1, x_2 \rangle_B y_2 \rangle_C$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ é o C -produto interno sobre F , e $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ é o B -produto interno sobre E ; esta forma sesquilinear é um semi-produto interno, e então $E \otimes_B F$ é o completamento de $(E \odot F)/N$ com respeito ao produto interno induzido no quociente, onde

$N = \{z \in E \odot F : \langle z, z \rangle'_r = 0\}$. De forma análoga se procede para definir a estrutura de A -módulo de Hilbert sobre $E \otimes_B F$. O ponto crucial é que o submódulo de $E \odot F$ onde se anula $\langle \cdot, \cdot \rangle'_l$ coincide com N : de fato, $N = \text{span}\{xb \odot y - x \odot by : x \in E, y \in F, b \in B\}$ (consultar [59] e [43]). Indicaremos por $x \odot y$ a projeção de $x \odot y$ sobre $E \otimes_B F$.

LEMA 7.9. *Sejam E_1, F_1 ($A - B$) bimódulos de Hilbert, E_2, F_2 $B - C$ bimódulos de Hilbert, e sejam $\mu_1 : E_1 \rightarrow F_1$, $\mu_2 : E_2 \rightarrow F_2$ morfismos de C^* -anéis ternários (onde consideramos sobre E_1, E_2, F_1 , e F_2 as estruturas de C^* -anéis ternários induzidas pelas suas estruturas de bimódulos de Hilbert). Então, se $Z_r(\mu_1) = Z_l(\mu_2)$, existe um único morfismo de C^* -anéis ternários $\mu_1 \odot_B \mu_2 : E_1 \otimes_B E_2 \rightarrow F_1 \otimes_B F_2$ tal que $(\mu_1 \odot_B \mu_2)(x_1 \otimes x_2) = \mu_1(x_1) \odot \mu_2(x_2)$, $\forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$. Se μ_1 e μ_2 são isomorfismos, então $\mu_1 \odot_B \mu_2$ também é um isomorfismo. Além disto, teremos que $Z_l(\mu_1 \odot_B \mu_2) = Z_l(\mu_1)$, e $Z_r(\mu_1 \odot_B \mu_2) = Z_r(\mu_2)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mu_1 \odot \mu_2 : E_1 \odot E_2 \rightarrow F_1 \odot F_2$ a única transformação linear tal que $x_1 \odot x_2 \mapsto \mu_1(x_1) \odot \mu_2(x_2)$, $\forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, que é um morfismo de C^* -anéis ternários. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $[\cdot, \cdot]$ os correspondentes C -semiprodutos internos sobre $E_1 \odot E_2$ e $F_1 \odot F_2$ respectivamente. Tomemos $z, z' \in E_1 \odot E_2$, $z = \sum_i x_i \odot y_i$, $z' = \sum_j x'_j \odot y'_j$. Então, com notação óbvia, temos:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad [(\mu_1 \odot \mu_2)(z), (\mu_1 \odot \mu_2)(z')] &= \left[\sum_i (\mu_1 \odot \mu_2)(x_i \odot y_i), \sum_j (\mu_1 \odot \mu_2)(x'_j \odot y'_j) \right] \\
 &= \sum_{i,j} [\mu_1(x_i) \odot \mu_2(y_i), \mu_1(x'_j) \odot \mu_2(y'_j)] \\
 &= \sum_{i,j} \langle \mu_2(y_i), \langle \mu_1(x_i), \mu_1(x'_j) \rangle_B^{F_1} \mu_2(y'_j) \rangle_C^{F_2} \\
 &= \sum_{i,j} \langle \mu_2(y_i), Z_r(\mu_1)(\langle x_i, x'_j \rangle_B^{E_1}) \mu_2(y'_j) \rangle_C^{F_2} \\
 &= \sum_{i,j} \langle \mu_2(y_i), Z_l(\mu_2)(\langle x_i, x'_j \rangle_B^{E_1}) \mu_2(y'_j) \rangle_C^{F_2} \\
 &= \sum_{i,j} \langle \mu_2(y_i), \mu_2(\langle x_i, x'_j \rangle_B^{E_1} y'_j) \rangle_C^{F_2} \\
 &= \sum_{i,j} Z_r(\mu_2)(\langle y_i, \langle x_i, x'_j \rangle_B^{E_1} y'_j \rangle_C^{E_2}) \\
 &= Z_r(\mu_2) \left(\sum_{i,j} \langle y_i, \langle x_i, x'_j \rangle_B^{E_1} y'_j \rangle_C^{E_2} \right) \\
 &= Z_r(\mu_2) \left(\sum_{i,j} \langle x_i \odot y_i, x'_j \odot y'_j \rangle \right) \\
 &= Z_r(\mu_2)(\langle z, z' \rangle)
 \end{aligned}$$

Tomando $z = z'$ na equação (11), e calculando normas, temos

$$\|(\mu_1 \odot \mu_2)(z)\|^2 = \|Z_r(\mu_2)(\langle z, z \rangle)\| \leq \|z\|^2.$$

Assim, vemos que $\mu_1 \odot \mu_2$ passa aos quocientes, onde é uma contração, e portanto se estende por continuidade a uma aplicação $\mu_1 \odot_B \mu_2 : E_1 \otimes_B E_2 \rightarrow F_1 \otimes_B F_2$, que é um homomorfismo de C^* -anéis ternários, e que satisfaz, $\forall z, z' \in E_1 \otimes_B E_2$:

$$[(\mu_1 \odot_B \mu_2)(z), (\mu_1 \odot_B \mu_2)(z')] = Z_r(\mu_2)(\langle z, z' \rangle),$$

donde concluímos que $Z_r(\mu_1 \odot_B \mu_2) = Z_r(\mu_2)$; analogamente, tem-se que $Z_l(\mu_1 \odot_B \mu_2) = Z_l(\mu_1)$.

Por último, se μ_1, μ_2 são isomorfismos, podemos aplicar a primeira parte aos mapas μ_1^{-1} e μ_2^{-1} , e notar que $id_{E_1} \odot id_{E_2} = id_{E_1} \otimes_B id_{E_2}$, e $id_{F_1} \odot id_{F_2} = id_{F_1} \otimes_B id_{F_2}$. $\square$

PROPOSIÇÃO 7.10. *A equivalência Morita de ações parciais é uma relação de equivalência.*

DEMONSTRAÇÃO. A propriedade reflexiva é óbvia, e a propriedade recíproca segue da Observação 7.3.

Suponhamos agora que $\alpha = (\{A_t\}, \{\alpha_t\})$ é uma ação parcial contínua de G sobre A , $\beta = (\{B_t\}, \{\beta_t\})$ é uma ação parcial contínua de G sobre B , e que $\gamma = (\{C_t\}, \{\gamma_t\})$ é uma ação parcial contínua de G sobre C , tais que $\alpha \stackrel{M}{\sim} \beta$ através da ação parcial contínua $\mu = (\{E_t\}, \{\mu_t\})$ de G sobre o C^* -anel ternário E , e $\beta \stackrel{M}{\sim} \gamma$ através da ação parcial contínua $\nu = (\{F_t\}, \{\nu_t\})$ de G sobre o C^* -anel ternário F . Consideremos a família $\mu \odot_B \nu = (\{E_t \otimes_B F_t\}, \{\mu_t \odot_B \nu_t\})$. Como μ_{rs} estende $\mu_r \mu_s$ e ν_{rs} estende $\nu_r \nu_s$, então $\mu_{rs} \odot_B \nu_{rs}$ estende $(\mu_r \odot_B \nu_r)(\mu_s \odot_B \nu_s)$. É claro também que $E_\epsilon \otimes_B F_\epsilon = E \otimes_B F$, $(\mu \odot_B \nu)_\epsilon = id_E \odot_B id_F$. Por outro lado, $Z_r(E_t \otimes_B F_t) = C_t$:

$$\begin{aligned} \overline{\text{span}}\langle E_t \otimes_B F_t, E_t \otimes_B F_t \rangle_C &= \overline{\text{span}}\langle F_t, \langle E_t, E_t \rangle_B F_t \rangle_C \\ &= \overline{\text{span}}\langle F_t, B_t F_t \rangle_C \\ &= \overline{\text{span}}\langle F_t, F_t \rangle_C \\ &= C_t \end{aligned}$$

Analogamente, $Z_l(E_t \otimes_B F_t) = A_t$. Por último, pelo Lema 7.9, cada $\mu_t \odot_B \nu_t : E_t^{-1} \otimes_B F_t^{-1} \rightarrow E_t \otimes_B F_t$ é um isomorfismo, e $Z_l(\mu_t \odot_B \nu_t) = Z_l(\mu_t) = \alpha_t$, $Z_r(\mu_t \odot_B \nu_t) = Z_r(\nu_t) = \gamma_t$, de forma que $\mu \odot_B \nu$ é uma ação parcial sobre $E \otimes_B F$, e $(\mu \odot_B \nu)^l = \alpha$, $(\mu \odot_B \nu)^r = \gamma$.

Só está faltando mostrar que $\mu \odot_B \nu$ é contínua. A família $\{E_t \otimes_B F_t\}_{t \in G}$ é contínua pelo Lema 7.8, já que γ é contínua. Seja $\mathcal{E} \otimes_B \mathfrak{F} = \{(t, z) : z \in E_{t^{-1}} \otimes_B F_{t^{-1}}\}$. Por último, vejamos que $\mu \odot_B \nu$ é contínua. Em primeiro lugar, notar que, se $f \in C_c(\mathcal{E})$, $g \in C_c(\mathfrak{F})$, então $f \odot_B g : G \rightarrow \mathcal{E} \otimes_B \mathfrak{F}$ tal que $(f \odot_B g)(t) = (t, f(t) \odot g(t))$ é uma seção contínua do fibrado de Banach $\mathcal{E} \otimes_B \mathfrak{F}$, e para cada $t \in G$, $\text{span } f \odot_B g(t) : f \in C_c(\mathcal{E}), g \in C_c(\mathfrak{F})$ é denso em $(\mathcal{E} \otimes_B \mathfrak{F})_t$. Por outro lado, a função $G \rightarrow (E \otimes_B F)$ tal que $t \mapsto (t, \mu_t(f(t)) \odot \nu_t(g(t)))$ é contínua, $\forall f \in C_c(\mathcal{E}), g \in C_c(\mathfrak{F})$; concluímos, usando [37], II-14.6 e II-13.16, que a aplicação $\mathcal{E} \otimes_B \mathfrak{F} \rightarrow G \times (E \otimes_B F)$ tal que $(t, x) \mapsto (t, (\mu_t \odot \nu_t)(x))$ é um homomorfismo contínuo de fibrados de Banach, e portanto que $\mu \odot_B \nu$ é uma ação parcial contínua.

Assim, temos que $\alpha \stackrel{M}{\sim} \gamma$. $\square$

PROPOSIÇÃO 7.11. *Sejam $\alpha = (\{A_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ e $\beta = (\{B_t\}_{t \in G}, \{\beta_t\}_{t \in G})$ ações parciais do grupo localmente compacto G sobre as C^* -álgebras A e B respectivamente. Se α e β são equivalentes Morita, então $A \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que α e β são equivalentes Morita através de $\gamma = (\{E_t\}, \{\gamma_t\})$; digamos que $\gamma^l = \alpha$, e $\gamma^r = \beta$. Seja $\mathbb{L}(E)$ a álgebra vinculante de E : $\mathbb{L}(E) = \begin{pmatrix} A & E \\ E^* & B \end{pmatrix}$ (ver a página 21). Como A e $\mathbb{L}(E)$ são equivalentes Morita através do A -módulo de Hilbert à esquerda $A \oplus E$, cada ideal A_t de A é Morita equivalente com um certo ideal de $\mathbb{L}(E)$, gerado pelos elementos do tipo $\begin{pmatrix} x_t & x'_t \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} y_t & y'_t f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t^* y_t & x_t^* y'_t f \\ x'_t \epsilon y_t & \langle x'_t \epsilon, y'_t f \rangle_r \end{pmatrix}$. Este ideal é $\begin{pmatrix} A_t & E_t \\ E_t^* & B_t \end{pmatrix}$, ou seja, a álgebra vinculante $\mathbb{L}(E_t)$ de E_t . É claro que a família $(\mathbb{L}(E_t))_{t \in G}$ é contínua, porque (A_t) , (E_t) , (E_t^*) e (B_t) são contínuas.

Definamos agora $\mathbb{L}(\gamma_t) : \mathbb{L}(E_{t-1}) \longrightarrow \mathbb{L}(E_t)$, através de

$$\mathbb{L}(\gamma_t) : \begin{pmatrix} a_{t-1} & x_{t-1} \\ y_{t-1} & b_{t-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_t(a_{t-1}) & \gamma_t(x_{t-1}) \\ \gamma_t(y_{t-1}) & \beta_t(b_{t-1}) \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que, como $\gamma_t(a_{t-1}x_{t-1}) = \alpha_t(a_{t-1})\gamma_t(x_{t-1})$ e $\gamma_t(x_{t-1}b_{t-1}) = \gamma_t(x_{t-1})\beta_t(b_{t-1})$, $\forall x_{t-1} \in E_{t-1}$, $a_{t-1} \in A_{t-1}$, $b_{t-1} \in B_{t-1}$, então $\mathbb{L}(\gamma) = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\mathbb{L}(\gamma_t)\}_{t \in G})$ é uma ação parcial de G sobre $\mathbb{L}(E)$, e que $\mathbb{L}(\gamma)$ restrita a $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é isomorfa a α , restrita a $\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é isomorfa a γ , e restrita a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ é isomorfa a β . Concluimos que α é equivalente Morita com $\mathbb{L}(\gamma)$. Da mesma forma, basta restringir $\mathbb{L}(\gamma)$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^* & B \end{pmatrix}$ para ver que ela é equivalente a β . Diremos que $\mathbb{L}(\gamma)$ é a *ação parcial vinculante* de γ .

As considerações acima mostram que podemos supor que $A = pBp$, para certa projeção $p \in M(B)$, e tal que α e γ são as restrições de β a $pBp = A$ e a $E = pB$ respectivamente. Sejam agora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ os fibrados de Fell correspondentes a α e β respectivamente, e seja $\mathcal{E} = (\{t\} \times E_t)_{t \in G}$. Temos então que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ é um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, e $\mathcal{E}$ é um subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$. Por outro lado, se $(r, a_r) \in \mathcal{A}$, $(s, x_s) \in \mathcal{E}$, $(t, y_t) \in \mathcal{E}$, e $(u, b_u) \in \mathcal{B}$, temos:

- $(r, a_r)(s, x_s) = (rs, \beta_r(\beta_r^{-1}(a_r)x_s)) \in (rs, \beta_r(A_{r-1}E_s)) \in \mathcal{E}$.
- $(s, x_s)(u, b_u) = (su, \beta_s(\beta_s^{-1}(x_s)b_u)) \in (su, \beta_s(E_{s-1}B_u)) \in \mathcal{E}$.
- $(s, x_s)(t, y_t)^* = (s, x_s)(t^{-1}, \beta_{t-1}(y_t^*)) = (st^{-1}, \beta_s(\beta_{s-1}(x_s)\beta_{t-1}(y_t^*)))$, que pertence a $(st^{-1}, \beta_s(A_{s-1} \cap A_{t-1})) \subseteq (st^{-1}, A_s \cap A_{st^{-1}}) \in \mathcal{A}$.
- $(s, x_s)^*(t, y_t) = (s^{-1}, \beta_{s-1}(x_s^*))(t, y_t) = (s^{-1}t, \beta_{s-1}(x_s^*y_t))$. Agora, dado $t \in G$, temos que $\overline{\text{span}}\{\beta_{s-1}(x_s^*y_t) : s \in G, x_s \in E_s, y_t \in E_t\} = B_t$: o membro esquerdo da igualdade acima contém $\overline{\text{span}}E_c^*E_t = \overline{\text{span}}E^*E_t \supseteq \overline{\text{span}}E_t^*E_t = B_t$.

Portanto, estamos nas condições do Corolário 6.4, donde concluimos que $C_r^*(\mathcal{A}) \overset{M}{\sim} C_r^*(\mathcal{B})$, ou seja $A \rtimes_{\alpha, r} G \overset{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$. $\square$

OBSERVAÇÃO 7.12. Parece razoável esperar um resultado similar a 7.11 para os correspondentes produtos cruzados plenos. Porém, não conseguimos provar este resultado. As dificuldades são as mesmas que aparecem quando queremos comparar $A \rtimes_{\alpha} G$ e $\dot{A} \rtimes_{\dot{\alpha}} G$, onde $(\dot{\alpha}, \dot{A})$ é a ação envolvente de (α, A) .

Tendo chegado a este ponto, introduzimos a noção de ação envolvente a menos de equivalência Morita.

DEFINIÇÃO 7.13. Seja α uma ação parcial contínua do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra A . Diremos que uma ação contínua β de G sobre uma C^* -álgebra B é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α , se existe um ideal $I \triangleleft B$ tal que $[\beta(I)]$ é denso em B e $\alpha \overset{M}{\sim} \beta|_I$.

Encerramos a seção provando o resultado correspondente ao Teorema 6.6 no Capítulo 6: se (β, B) é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de (α, A) , então $A \rtimes_{\alpha, r} G \overset{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$.

PROPOSIÇÃO 7.14. *Seja (A, α) uma ação parcial contínua do grupo localmente compacto G , e seja (B, β) uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α . Então:*

$$A \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como (B, β) é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α , existe um ideal I de B tal que $\beta|_I \stackrel{M}{\sim} \alpha$, e $\overline{[\beta(I)]} = B$. Pela Proposição 7.11, $A \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} I \rtimes_{\beta|_I, r} G$. Como β é a ação envolvente de $\beta|_I$, temos que $I \rtimes_{\beta|_I, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$, por 6.6. Como a equivalência Morita de C^* -álgebras é transitiva, concluímos que $A \rtimes_{\alpha, r} G \stackrel{M}{\sim} B \rtimes_{\beta, r} G$. $\square$

7.2. C^* -álgebras de núcleos associadas a um fibrado de Fell

Na próxima seção provaremos que sempre existe uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de uma ação parcial dada. De fato, se α é uma ação parcial de G sobre a C^* -álgebra A , mostraremos que existe uma forma funtorial de achar uma ação envolvente a menos de equivalência Morita. Descrevamos rapidamente as construções envolvidas. Dada α , ela tem um fibrado de Fell associado $\mathcal{B}_\alpha = (B_t)_{t \in G}$ (2.15). Agora, existem várias álgebras ligadas naturalmente a $\mathcal{B}_\alpha$, que são diversos completamentos de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B}_\alpha) = \{k : G \times G \rightarrow \mathcal{B}_\alpha : k(r, s) \in B_{rs^{-1}}, \forall r, s \in G, \text{ e } k \text{ é contínua e de suporte compacto}\}$. Sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B}_\alpha)$ existe uma ação natural $\tilde{\alpha}$ de G : $\tilde{\alpha}_t(k)|_{(r, s)} = \Delta(t)k(rt, st)$, onde Δ é a função modular de G . Existe um $*$ -homomorfismo injetivo $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}_\alpha) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}_\alpha))$; completando $\Omega(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}_\alpha))$ em $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}_\alpha))$, obtemos $\mathbb{K}_r(\mathcal{B}_\alpha)$, que chamamos C^* -álgebra reduzida dos núcleos de $\mathcal{B}_\alpha$. A ação $\tilde{\alpha}$ se estende a $\mathbb{K}_r(\mathcal{B}_\alpha)$, e o par $(\mathbb{K}_r(\mathcal{B}_\alpha), \tilde{\alpha})$ é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α .

A construção descrita acima pode ser feita para qualquer fibrado de Fell. Este é o objetivo da presente seção. Seja $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ o conjunto das funções contínuas e de suporte compacto $k : G \times G \rightarrow \mathcal{B}$, tais que $k(r, s) \in B_{rs^{-1}}, \forall r, s \in G$. Então $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ é uma $*$ -álgebra normada com as operações: $k_1 * k_2(r, s) := \int_G k_1(r, t)k_2(t, s)dt$, $k^*(r, s) := k(s, r)^*$, e a norma $\|k\|_2^2 = \int_{G \times G} \|k(r, s)\|_2^2 d(r, s)$. Além disso, cada $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ age sobre $C_c(\mathcal{B})$ como um operador integral: $k\xi|_r = \int_G k(r, s)\xi(s)ds, \forall \xi \in C_c(\mathcal{B})$. Por esta razão, k é chamado núcleo do fibrado $\mathcal{B}$, e $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ é a álgebra dos núcleos contínuos de $\mathcal{B}$. Existe uma aplicação sesquilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_I : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, dada por $\langle \xi, \eta \rangle_I(r, s) = \xi(r)\eta(s)^*$. Seja $I_c(\mathcal{B}) := \text{span}\langle C_c(\mathcal{B}), C_c(\mathcal{B}) \rangle_I \subseteq \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, e seja $E = L^2(\mathcal{B})$. Então é fácil ver que existe uma inclusão: $I_c(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{K}(E)$, de imagem densa. De fato, com um pouco mais de trabalho, é possível mostrar que existe um $*$ -homomorfismo injetivo $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, único tal que $\Omega_k \xi = k\xi, \forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ e $\forall \xi \in C_c(\mathcal{B})$. A C^* -álgebra reduzida dos núcleos de $\mathcal{B}$ é definida então como: $\mathbb{K}_r(\mathcal{B}) := \overline{\Omega(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(E)$. Também usamos a notação I_r para denotar $\overline{\Omega(C_c(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(E)$ (i.e. : $I_r = \mathcal{E}$).

Sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ existe uma ação natural β de G , dada por $\beta_t(k)|_{(r, s)} = \Delta(t)k(rt, st)$, onde Δ é a função modular do grupo G . Tem-se que a β -órbita linear de $I_c(\mathcal{B})$ é densa em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo. Como β pode ser estendida a $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, temos então que $(\beta, \mathbb{K}_r(\mathcal{B}))$ é a ação envolvente de $\beta|_{I_r}$.

Além de $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ existem outros completamentos de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$: a $*$ -álgebra de Banach $HS(\mathcal{B})$ dos operadores de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{B}$ (que é o completamento de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_2$), e sua C^* -álgebra envolvente $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Por outro lado, para cada representação $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ tal que $\pi|_{B_\varepsilon}$ é fiel, existe uma representação induzida $\pi_c : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$, também fiel. Definimos então $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ como o completamento de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma $\|k\| := \|\pi_c(k)\|$. Acontece que $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ é naturalmente isomorfa a $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, e, em particular, não depende de π .

A ação natural β é contínua na norma $\|\cdot\|_2$, e portanto se estende a uma ação sobre $HS(\mathcal{B})$, e daqui a $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Pela propriedade universal de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, existe um epimorfismo natural (que também chamaremos Ω) $\Omega : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, tal que $\Omega_k \xi = k\xi$, $\forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Este epimorfismo também é covariante com respeito as ações naturais. Seja I o fecho de $I_c(\mathcal{B})$ dentro de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Então tem-se que $(\beta, \mathbb{K}(\mathcal{B}))$ é a ação envolvente de $\beta|_I$. Veremos que $\Omega|_I : I \longrightarrow I_r$ é um isomorfismo, donde seguirá, por causa da unicidade da ação envolvente, que $\Omega : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ é na verdade um isomorfismo.

A seção é encerrada com algumas aplicações. Por exemplo, vemos que $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ é nuclear, liminal, postliminal, se e somente se $\mathcal{B}_c$ é nuclear, liminal, ou postliminal, respectivamente.

7.2.1. Operadores de Hilbert–Schmidt e núcleos de um fibrado de Fell. Seja $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G . Consideremos uma função $k : G \times G \longrightarrow \mathcal{B}$ contínua e de suporte compacto, tal que $k(r, s) \in B_{rs^{-1}}$, $\forall r, s \in G$. Uma tal função será chamada *núcleo contínuo de suporte compacto associado a $\mathcal{B}$* . Denotamos por $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ o conjunto de tais núcleos. Veremos mais tarde que cada k pode ser visto como um operador integral, o que justifica o termo “núcleo” que estamos utilizando.

PROPOSIÇÃO 7.15. $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ é uma $*$ -álgebra normada com as operações de soma e produto por escalares ponto a ponto, as operações de produto e involução dadas por:

$$k_1 * k_2(r, s) = \int_G k_1(r, t) k_2(t, s) dt, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}).$$

$$k^*(r, s) = k(s, r)^*, \forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}),$$

e a norma $\|k\|_2 = (\int_G \int_G \|k(r, s)\|^2 dr ds)^{1/2}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\nu : G \times G \longrightarrow G$ tal que $\nu(r, s) = rs^{-1}$, e seja $\mathcal{B}_\nu$ a retração de $\mathcal{B}$ com respeito a ν ([37], II-13.3). Então $\mathcal{B}_\nu$ é um fibrado de Banach sobre $G \times G$, e a fibra de $\mathcal{B}_\nu$ sobre (r, s) é $(r, s, B_{rs^{-1}})$, que podemos identificar com $B_{rs^{-1}}$. Portanto, $\mathbb{K}_c(\mathcal{B}) = C_c(\mathcal{B}_\nu)$ como espaço vetorial.

Consideremos agora a função $\mu : G \times G \times G \longrightarrow \mathcal{B}_\nu$ tal que $\mu(t, r, s) = (r, s, k_1(r, t)k_2(t, s))$. Temos que μ é uma função contínua, de suporte compacto, e tal que $\mu(t, r, s) \in (\mathcal{B}_\nu)_{(r, s)}$, $\forall t, r, s \in G$. Portanto, estamos em condições de aplicar [37], II-15.19, donde concluímos que a função $(r, s) \longmapsto \int_G \mu(t, r, s) dt$ é uma seção contínua de suporte compacto de $\mathcal{B}_\nu$; em outras palavras, $k_1 * k_2 \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$.

Com respeito a k^* , temos que $\text{supp}(k^*)$ é compacto, e $k^*(r, s) = k(s, r)^* \in B_{sr^{-1}}^* = B_{rs^{-1}}$. Portanto $k^* \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$.

Por outro lado, se $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, temos:

$$\begin{aligned} (k_1 * k_2) * k_3(r, s) &= \int_G (k_1 * k_2)(r, t) k_3(t, s) dt \\ &= \int_G \int_G k_1(r, u) k_2(u, t) k_3(t, s) du dt \\ &= \int_G \int_G k_1(r, u) k_2(u, t) k_3(t, s) dt du \\ &= \int_G k_1(r, u) k_2 * k_3(u, s) du \\ &= k_1 * (k_2 * k_3)(r, s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(k_1 * k_2)^*(r, s) &= (k_1 * k_2)(s, r)^* \\
&= \left[\int_G k_1(s, t) k_2(t, r) dt \right]^* \\
&= \int_G [k_1(s, t) k_2(t, r)]^* dt \quad \text{porque } * : B_{sr^{-1}} \longrightarrow B_{rs^{-1}} \text{ é antilinear contínua} \\
&= \int_G k_2(t, r)^* k_1(s, t)^* dt \\
&= \int_G k_2^*(r, t) k_1^*(t, s) dt \\
&= (k_2^* * k_1^*)(r, s).
\end{aligned}$$

Assim, vemos que $\mathbb{L}_c(\mathcal{B})$ é uma $*$ -álgebra. Vejamos que também é normada:

$$\begin{aligned}
\|k_1 * k_2\|_2^2 &= \int_G \int_G \|(k_1 * k_2)(r, s)\|^2 dr ds \\
&= \int_G \int_G \left\| \int_G k_1(r, t) k_2(t, s) dt \right\|^2 dr ds \\
&\leq \int_G \int_G \left[\int_G \|k_1(r, t) k_2(t, s)\| dt \right]^2 dr ds \\
&\leq \int_G \int_G \left[\int_G \|k_1(r, t)\| \|k_2(t, s)\| dt \right]^2 dr ds \\
&\leq \int_G \int_G \left[\left(\int_G \|k_1(r, u)\|^2 du \right)^{1/2} \left(\int_G \|k_2(v, s)\|^2 dv \right)^{1/2} \right]^2 dr ds \quad \text{por Cauchy-Schwarz} \\
&= \int_G \int_G \left[\int_G \|k_1(r, u)\|^2 du \int_G \|k_2(v, s)\|^2 dv \right] dr ds \\
&= \left[\int_G \int_G \|k_1(r, u)\|^2 dr du \right] \left[\int_G \int_G \|k_2(v, s)\|^2 dv ds \right] \\
&= \|k_1\|_2^2 \|k_2\|_2^2
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\|k^*\|_2^2 = \int_G \int_G \|k^*(r, s)\|^2 dr ds = \int_G \int_G \|k(s, r)^*\|^2 dr ds = \int_G \int_G \|k(s, r)\|^2 dr ds = \|k\|_2^2.$$

□

Seja agora $E := L^2(\mathcal{B})$, ou seja, E é o completamento de pré- B_e -módulo de Hilbert à direita $C_c(\mathcal{B})$, com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_r : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow B_e$ dado por $\langle \xi, \eta \rangle_r = \int_G \xi(r)^* \eta(r) dr$.

$C_c(\mathcal{B})$ tem estrutura de $\mathbb{L}_c(\mathcal{B})$ -módulo à esquerda: se $k \in \mathbb{L}_c(\mathcal{B})$, $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, $r \in G$, definimos: $k\xi|_r = \int_G k(r, s) \xi(s) ds$. Temos também um “produto interno” $\langle \cdot, \cdot \rangle_l : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{L}_c(\mathcal{B})$ tal que $\langle \xi, \eta \rangle|_{(r, s)} = \xi(r) \eta(s)^*$. Tem-se:

1. $(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_l \xi_3)|_r = \int_G \xi_1(r) \xi_2(s)^* \xi_3(s) ds = \xi_1(r) \int_G \xi_2(s)^* \xi_3(s) ds = (\xi_1 \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_r)|_r$, e portanto $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_l \xi_3 = \xi_1 \langle \xi_2, \xi_3 \rangle_r$. $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in C_c(\mathcal{B})$.

2. Se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, $r, s \in G$:

$$\begin{aligned} \langle k \cdot \xi, \eta \rangle_l \big|_{(r,s)} &= (k \cdot \xi)(r) \eta(s)^* \\ &= \left(\int_G k(r, t) \xi(t) dt \right) \eta(s)^* \\ &= \int_G k(r, t) \xi(t) \eta(s)^* dt \\ &= \int_G k(r, t) \langle \xi, \eta \rangle_l(t, s) ds \\ &= k * \langle \xi, \eta \rangle_l \big|_{(r,s)} \end{aligned}$$

3. Se $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_l^* \big|_{(r,s)} = \langle \xi, \eta \rangle_l(s, r)^* = (\xi(s) \eta(r)^*)^* = \eta(r) \xi(s)^* = \langle \eta, \xi \rangle_l \big|_{(r,s)},$$

e portanto $\langle \xi, \eta \rangle_l^* = \langle \eta, \xi \rangle_l$.

4. Seja $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Então $\langle \xi, \xi \rangle_l = 0 \iff \xi(r) \xi(s)^* = 0, \forall r, s \in G$ e portanto $\langle \xi, \xi \rangle_l = 0 \iff \xi = 0$.

5. Se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$,

$$\begin{aligned} \langle k\xi, \eta \rangle_r &= \int_G \left[\int_G k(r, s) \xi(s) ds \right]^* \eta(r) dr \\ &= \int_G \int_G \xi(s)^* k(r, s)^* \eta(r) dr ds \\ &= \int_G \xi(s)^* (k^* \eta)(s) ds \\ &= \langle \xi, k^* \eta \rangle_r \end{aligned}$$

Denotaremos por $I_c(\mathcal{B}) := \text{span}\langle C_c(\mathcal{B}), C_c(\mathcal{B}) \rangle_l$, que é um $*$ -ideal bilateral de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$.

Seja $[\cdot, \cdot] : E \times E \longrightarrow Z_l(E)$ o produto interno à esquerda correspondente ao C^* -anel ternário positivo E . Notar que existe um $*$ -homomorfismo injetivo natural $I_c(\mathcal{B}) \hookrightarrow Z_l(E)$, único tal que $\langle \xi, \eta \rangle_l = [\xi, \eta]$, $\forall \xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, porque se $k = \sum_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle_l = 0$, tem-se que $k\xi = 0$, $\forall \xi \in C_c(\mathcal{B})$, e como $k\xi = \sum_i [\xi_i, \eta_i] \xi$, e $C_c(\mathcal{B})$ é denso em E , concluímos que $\sum_i [\xi_i, \eta_i] = 0 \in Z_l(E)$. Por outro lado, como $\text{span}[C_c(\mathcal{B}), C_c(\mathcal{B})]$ é denso em $Z_l(E)$, temos que $Z_l(E)$ é um C^* -completamento da $*$ -álgebra $I_c(\mathcal{B})$. Denotaremos este completamento por $I_r(\mathcal{B})$ em lugar de $Z_l(E)$. Veremos mais tarde que esta inclusão se estende a uma inclusão $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$.

No caso em que $\mathcal{B}$ seja $\mathcal{B}_G$, o fibrado do grupo G , então o completamento de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_2$ é exatamente o espaço de operadores de Hilbert–Schmidt do espaço de Hilbert $L^2(G)$ ([37], VI-15.21). Isto motiva a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 7.16. A $*$ -álgebra $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ será chamada álgebra dos núcleos contínuos de suporte compacto do fibrado de Fell $\mathcal{B}$. O completamento $HS(\mathcal{B})$ de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_2$ é uma $*$ -álgebra de Banach, que chamaremos álgebra dos operadores de Hilbert–Schmidt do fibrado de Fell $\mathcal{B}$. O fecho de $I_c(\mathcal{B})$ dentro de $HS(\mathcal{B})$ será denotado por $I_2(\mathcal{B})$.

DEFINIÇÃO 7.17. A C^* -álgebra envolvente de $HS(\mathcal{B})$ será chamada C^* -álgebra dos núcleos do fibrado de Fell $\mathcal{B}$, e será denotada por $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. O fecho de $I_c(\mathcal{B})$ dentro de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ será denotado por $I(\mathcal{B})$.

OBSERVAÇÃO 7.18. Notar que, como espaço de Banach, $HS(\mathcal{B}) = \mathfrak{L}^2(\mathcal{B}_\nu)$ (consultar [37], II-15.7–15.9, ou o começo do Capítulo 3).

7.2.2. Ação sobre os núcleos. Temos sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ a seguinte ação natural de G : $\beta : G \times \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ tal que $\beta_t(k)(r, s) = \Delta(t)k(rt, st)$. Verifiquemos que β é uma ação:

$$\begin{aligned} \beta_t(k_1 * k_2)|_{(r,s)} &= \Delta(t)(k_1 * k_2)(rt, st) \\ &= \Delta(t) \int_G k_1(rt, u)k_2(u, st)du \\ &= \Delta(t) \int_G \Delta(t)k_1(rt, vt)k_2(vt, st)dv \\ &= \int_G \beta_t(k_1)(r, v)\beta_t(k_2)(v, s)dv \\ &= \beta_t(k_1) * \beta_t(k_2)|_{(r,s)} \end{aligned}$$

e

$$(\beta_t(k^*))|_{(r,s)} = \Delta(t)k^*(rt, st) = \Delta(t)k(st, rt)^* = \beta_t(k)(s, r)^* = \beta_t(k^*)|_{(r,s)}.$$

Esta ação pode ser estendida a $HS(\mathcal{B})$: fazendo $u = rt$, $v = st$ na integral abaixo temos:

$$\|\beta_t(k)\|_2^2 = \int_G \int_G \Delta(t)^2 \|k(rt, st)\|^2 dr ds = \int_G \int_G \Delta(t)^{-1} \Delta(t)^{-1} \Delta(t)^2 \|k(u, v)\|^2 dudv = \|k\|_2^2.$$

Notar que β é uma ação contínua sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com a topologia do limite indutivo, e portanto é contínua sobre $HS(\mathcal{B})$. Como $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ é a C^* -álgebra envolvente de $HS(\mathcal{B})$, β também se estende a uma ação contínua sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Todas estas ações serão denotadas por β .

PROPOSIÇÃO 7.19. *A β -órbita linear de $I_c(\mathcal{B})$ é densa em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Lembrar que $\mathbb{K}_c(\mathcal{B}) = C_c(\mathcal{B}_\nu)$, onde $\mathcal{B}_\nu$ é a retração de $\mathcal{B}$ com respeito à aplicação $\nu : G \times G \longrightarrow G$ tal que $\nu(r, s) = rs^{-1}$. Portanto, usando o Lema 3.14, basta mostrar que, se Z é a β -órbita linear de $I_c(\mathcal{B})$, então tem-se: 1. $Z(r, s)$ é denso em $B_{rs^{-1}}$, $\forall r, s \in G$ e 2. $\forall \varphi_i, \psi_i \in C_c(G)$, e $\forall \zeta \in Z$, a função $(r, s) \longmapsto \sum_i \varphi_i(r)\psi_i(s)\zeta(r, s)$ pertence a Z .

1. Dado $b \in B_{rs^{-1}}$, por Cohen–Hewitt existem $b_1 \in B_e$, $b_2 \in B_{rs^{-1}}$ tais que $b_1 b_2 = b$. Também existem seções $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$ tais que $\xi(e) = \Delta(r)b_1$, $\eta(sr^{-1}) = b_2^*$. Então temos: $\beta_{r^{-1}}(\langle \xi, \eta \rangle_t)|_{(r,s)} = \Delta(r)^{-1} \xi(rr^{-1}) \eta(sr^{-1})^* = \Delta(r)^{-1} \Delta(r) b_1 (b_2^*)^* = b$.
2. Sejam $\varphi, \psi \in C_c(G)$, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, $r, s, t \in G$. Lembrar que se $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, então $\phi_t : G \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida como sendo $\phi_t(s) = \phi(st)$.

$$\begin{aligned} (\varphi \odot \psi)(\beta_t(\langle \xi, \eta \rangle_t))|_{(r,s)} &= \varphi(r)\psi(s)\Delta(t)\xi(rt)\eta(st)^* \\ &= \varphi_{t^{-1}}(rt)\psi_{t^{-1}}(st)\Delta(t)\xi(rt)\eta(st)^* \\ &= \beta_t(\langle \varphi_{t^{-1}}\xi, \bar{\psi}_{t^{-1}}\eta \rangle_t)|_{(r,s)}, \end{aligned}$$

donde segue que $(\varphi \odot \psi)(\beta_t(\langle \xi, \eta \rangle_t)) \in Z$, porque $\varphi_{t^{-1}}\xi, \bar{\psi}_{t^{-1}}\eta \in C_c(\mathcal{B})$.

□

Lembrar que um fibrado de Fell é chamado *saturado* se para todos $r, s \in G$, tem-se que $\text{span } B_r B_s$ é denso em B_{rs} . Acontece que o ideal $I_c(\mathcal{B})$ mede o nível de saturação do fibrado:

PROPOSIÇÃO 7.20. *$\mathcal{B}$ é saturado se e somente se $I_c(\mathcal{B})$ é denso em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiro que $\mathcal{B}$ é saturado. Se $\varphi, \psi \in C_c(G)$, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, então $(\varphi \odot \psi)\langle \xi, \eta \rangle_l = \langle \varphi \xi, \bar{\psi} \eta \rangle_l \in I_c(\mathcal{B})$. Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é saturado, dados $a \in B_{rs^{-1}}$ e $\epsilon > 0$, existem $b_1, \dots, b_n \in B_r$, $c_1, \dots, c_n \in B_s$, tais que $\|b - \sum_{i=1}^n b_i c_i^*\| < \epsilon$. Além disso, existem seções $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in C_c(\mathcal{B})$ tais que $\xi_j(r) = b_j$, e $\eta_j(s) = c_j$, $\forall j = 1, \dots, n$. Portanto: $\|b - \sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \eta_i \rangle_l\|_{(r,s)} = \|b - \sum_{i=1}^n \xi_i(r) \eta_i(s)^*\| = \|b - \sum_{i=1}^n b_i c_i^*\| < \epsilon$. Logo, usando 3.14, temos que $I_c(\mathcal{B})$ é denso em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo.

Inversamente, suponhamos que $\mathcal{B}$ não é saturado: existem $r, s \in G$ tais que $\overline{\text{span}} B_r B_{s^{-1}} \neq B_{rs^{-1}}$. Seja $b \in B_{rs^{-1}}$ tal que $b \notin \overline{\text{span}} B_r B_{s^{-1}}$, e seja d a distância de b a $\overline{\text{span}} B_r B_{s^{-1}}$. Como $G \times G$ é localmente compacto, existe uma seção contínua de suporte compacto de B_r que toma o valor b em (r, s) ; em outras palavras, existe $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ tal que $k(r, s) = b$. Agora, se $\xi_i, \eta_i \in C_c(\mathcal{B})$:

$$\|k - \sum_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle_l\|_\infty \geq \|k(r, s) - \sum_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle_l(r, s)\| = \|b - \sum_i \xi_i(r) \eta_i(s)^*\| \geq d,$$

e portanto $k \notin \overline{I_c(\mathcal{B})}$, pois $d > 0$. □

7.2.3. A C^* -álgebra reduzida dos núcleos de um fibrado de Fell. Nosso próximo objetivo será mostrar que a ação de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ sobre $C_c(\mathcal{B})$ se estende a todo E , e que então temos um $*$ -homomorfismo injetivo $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(E)$. Para isto, precisaremos representar fielmente $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ como uma $*$ -álgebra de operadores sobre um espaço de Hilbert, e representar também E como um anel ternário de operadores.

PROPOSIÇÃO 7.21. *Seja $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ uma representação do fibrado de Fell $\mathcal{B}$ sobre o espaço de Hilbert H . Para $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, definimos $\pi_c(k) : C_c(G, H) \rightarrow C_c(G, H)$ tal que $\pi_c(k)x|_r = \int_G \pi(k(r, s))x(s)ds \forall x \in C_c(G, H)$. Então tem-se que $\|\pi_c(k)x\|_2 \leq \|k\|_2 \|x\|_2$, e portanto $\pi_c(k)$ se estende a um operador $\pi_c(k) : L^2(G, H) \rightarrow L^2(G, H)$, com $\|\pi_c(k)\| \leq \|k\|_2$. Além disso, $\pi_c : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$ é uma representação contínua da $*$ -álgebra normada $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$. Se $\pi|_{B_c}$ é fiel, então π_c é fiel; se π é não degenerada, então π_c é não degenerada.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $x \in C_c(G, H)$ e como $\mathcal{B} \times H \rightarrow H$ tal que $(b, h) \mapsto \pi(b)h$ é contínua ([37], VIII-8.8), temos que a função $G \times G \rightarrow H$ tal que $(r, s) \mapsto \pi(k(r, s))x(s)$ é contínua, e como tem suporte compacto deduzimos que $r \mapsto \int_G \pi(k(r, s))x(s)ds$ é uma função contínua de suporte

compacto de G em H , e em particular pertence a $L^2(G, H)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \|\pi_c(k)x\|_2^2 &= \int_G \|\pi_c(k)x(r)\|^2 dr \\ &= \int_G \left\| \int_G \pi(k(r, s))x(s)ds \right\|^2 dr \\ &\leq \int_G \left[\left(\int_G \|\pi(k(r, s))\|^2 ds \right)^{1/2} \|x\|_2 \right]^2 dr \\ &\leq \left(\int_G \int_G \|k(r, s)\|^2 dr ds \right) \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

donde segue que $\|\pi_c(k)\| \leq \|k\|_2$. Portanto, $\pi_c(k)$ se estende a um operador contínuo $\pi_c(k) : L^2(G, H) \rightarrow L^2(G, H)$, e π_c se estende por continuidade a uma transformação linear contínua $HS(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$.

Agora, se $x \in C_c(G, H)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} \pi_c(k_1 * k_2)x|_r &= \int_G \pi((k_1 * k_2)(r, s))x(s)ds \\ &= \int_G \pi \left[\int_G k_1(r, t)k_2(t, s)dt \right] x(s)ds \\ &= \int_G \pi(k_1(r, t)) \left[\int_G \pi(k_2(t, s))x(s)ds \right] dt \\ &= \int_G \pi(k_1(r, s)) [\pi_c(k_2)x](t)dt \\ &= \pi_c(k_1)\pi_c(k_2)x|_r \end{aligned}$$

Então π_c preserva os produtos. Com respeito à involução, se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $x, y \in C_c(G, H)$:

$$\begin{aligned} \langle \pi_c(k)x, y \rangle &= \int_G \langle \pi_c(k)x(r), y(r) \rangle dr \\ &= \int_G \int_G \langle \pi(k(r, s))x(s), y(r) \rangle ds dr \\ &= \int_G \int_G \langle x(s), \pi(k(r, s)^*)y(r) \rangle ds dr \\ &= \int_G \langle x(s), \int_G \pi(k^*(s, r)^*)y(r)dr \rangle ds \\ &= \int_G \langle x(s), \pi_c(k^*)y(s) \rangle ds \\ &= \langle x, \pi_c(k^*)y \rangle, \end{aligned}$$

e portanto $\pi_c(k^*) = \pi_c(k)^*$. Assim, temos que $\pi_c : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$ é uma representação, contínua na norma $\|\cdot\|_2$.

Suponhamos que $\pi|_{B_c}$ é fiel. Se for $\pi_c(k) = 0$, para $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, teríamos que, $\forall x \in C_c(G, H)$, seria $\int_G \pi(k(r, s))x(s)ds = 0$. Em particular, se $(f_V)_{V \in \mathcal{V}}$ é uma identidade aproximada de $L^1(G)$ como em 6.2 e $h \in H$, escolhendo $x(s) = f_V(t^{-1}s)h$ e tomando limite em V , temos por 6.2 que $\pi(k(r, t))h = 0$, e portanto que $\pi(k(r, s)) = 0$, $\forall r, s \in G$. Logo, π_c também é fiel.

Suponhamos finalmente que π é não degenerada, e seja $y \in L^2(G, H)$ tal que $\langle \pi_c(k)x, y \rangle = 0$, $\forall x \in L^2(G, H)$, $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$. Então temos que $\int_G \langle \pi_c(k)x(r), y(r) \rangle dr = 0$, $\forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $\forall x \in C_c(G, H)$. Logo, $\int_G \int_G \langle \pi(k(r, s))x(s), y(r) \rangle ds dr = 0$, $\forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $x \in C_c(G, H)$, o que implica que

$\langle \pi(k(r, s))x(s), y(r) \rangle = 0$ em quase todo ponto $(r, s) \in G \times G$, donde segue que $y(r) = 0$ para quase todo ponto $r \in G$, porque $\{\pi(k(r, s))x(s) : k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}), (r, s) \in G \times G, x \in C_c(G, H)\} = H$. Com efeito, como π é não degenerada, $\pi|_{B_e}$ também é não degenerada, e portanto, dado $h \in H$, existem $b \in B_e$ e $h' \in H$, tais que $\pi(b)h' = h$. Agora, pelo teorema de Cohen–Hewitt, existem $b_1, b_2 \in B_e$ tais que $b = b_1 b_2^*$, e pelo teorema de Douady–dal Soglio Hérault existem seções $\eta_1, \eta_2 \in C_c(\mathcal{B})$ tais que $\eta_i(e) = b_i$, $i = 1, 2$. Definamos $k : G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $k(r, s) = \eta_1(r)\eta_2(s)^*$. Então é claro que $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$. Por último, tomando $x \in C_c(G, H)$ tal que $x(e) = h'$, temos que:

$$\pi(k(e, e))x(e) = \pi(\eta_1(e)\eta_2(e)^*)h' = \pi(b_1 b_2^*)h' = \pi(b)h' = h.$$

Assim, concluímos que $\eta = 0$ em $L^2(G, H)$, e portanto π_c é não degenerada. $\square$

Suponhamos que $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ é uma representação sobre o espaço de Hilbert H , tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel. Pela Proposição 7.21, temos uma representação fiel $\pi_c : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$. Seja $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ o completamento de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ com respeito à norma $\|k\| = \|\pi_c(k)\|$. Então β também se estende a uma ação contínua sobre $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$. Para mostrá-lo, lembrar que a representação regular à direita de G sobre o espaço de Hilbert $L^2(G, H)$ é definida como $\rho : G \times L^2(G, H) \rightarrow L^2(G, H)$, tal que $\rho_t(x)|_r = \Delta(t)^{1/2}x(rt)$, $\forall r, t \in G, x \in L^2(G, H)$. Agora, se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $x \in C_c(G, H)$:

$$\begin{aligned} \pi_c(\beta_t(k))x|_r &= \int_G \pi(\beta_t(k)(r, s))x(s)ds \\ &= \int_G \Delta(t)\pi(k(rt, st))x(s)ds \\ &= \int_G \pi(k(rt, u))x(ut^{-1})du \\ &= \int_G \Delta(t)^{1/2}\pi(k(rt, u))\rho_{t^{-1}}(x)(s)ds \\ &= (\rho_t \pi_c(k) \rho_{t^{-1}})x|_r, \end{aligned}$$

donde segue que:

$$(12) \quad \pi_c(\beta_t(k)) = \rho_t \pi_c(k) \rho_{t^{-1}}$$

e em particular temos que $\|\pi_c(\beta_t(k))\| = \|\pi_c(k)\|$.

Vamos provar a seguir que se $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ é uma representação sobre o espaço de Hilbert H , tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel, então π induz uma representação fiel de E como um anel ternário de operadores de H em $L^2(G, H)$. Lembrar que uma representação de um C^* -anel ternário positivo sobre os espaços de Hilbert H e K é um homomorfismo de C^* -anéis ternários $E \rightarrow B(H, K)$ (ver 1.27).

LEMA 7.22. *Seja $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ uma representação do fibrado de Fell $\mathcal{B}$. Então existe uma única representação $\pi_2 : L^2(\mathcal{B}) \rightarrow B(H, L^2(G, H))$, tal que $\forall \xi \in C_c(\mathcal{B})$ e $h \in H$ se tem: $\pi_2(\xi)h|_r = \pi(\xi(r))h$. Se $\pi|_{B_e}$ é fiel, então π_2 é fiel.*

DEMONSTRAÇÃO. π_2 é contínua:

$$\begin{aligned}
 \|(\pi_2\xi)h\|_2^2 &= \int_G \langle (\pi_2\xi)h|_r, (\pi_2\xi)h|_r \rangle dr \\
 &= \int_G \langle \pi(\xi(r))h, \pi(\xi(r))h \rangle dr \\
 &= \int_G \langle \pi(\xi(r)^*\xi(r))h, h \rangle dr \\
 &= \langle \pi \left[\int_G \xi(r)^*\xi(r) dr \right] h, h \rangle \\
 &= \langle \pi(\langle \xi, \xi \rangle_r) h, h \rangle.
 \end{aligned}$$

Segue que $\pi_2\xi \in L^2(G, H)$. Por outro lado, como $\pi(\langle \xi, \xi \rangle_r)$ é um operador positivo, tomando supremo sobre a esfera unitária de H na igualdade acima, concluímos que $\|\pi_2\xi\| = \|\pi(\langle \xi, \xi \rangle_r)\|^{1/2}$. Portanto, $\|\pi_2\xi\| \leq \|\xi\|$, e $\|\pi_2\xi\| = \|\xi\|$ se $\pi|_{B_e}$ é fiel. Assim, podemos estender π_2 a $L^2(B)$, e esta extensão será uma isometria se $\pi|_{B_e}$ é fiel.

Calculemos $(\pi_2\xi)^*$: se $h \in H$, $x \in L^2(G, H)$:

$$\langle (\pi_2\xi)h, x \rangle = \int_G \langle \pi(\xi(r))h, x(r) \rangle dr = \int_G \langle h, \pi(\xi(r)^*)x(r) \rangle dr = \langle h, \int_G \pi(\xi(r)^*)x(r) dr \rangle,$$

donde segue que $(\pi_2\xi)^*x = \int_G \pi(\xi(r)^*)x(r) dr \in H$. Portanto, se $\xi, \eta, \zeta \in C_c(B)$, $h \in H$, $r \in G$:

$$\begin{aligned}
 \pi_2(\xi)\pi_2(\eta)^*\pi_2(\zeta)h|_r &= \pi(\xi(r))\pi_2(\eta)^*\pi(\zeta(r))h \\
 &= \pi(\xi(r)) \int_G \pi(\eta(s)^*)\pi_2(\zeta)h|_s ds \\
 &= \int_G \pi(\xi(r)\eta(s)^*)\pi(\zeta(s))h ds \\
 &= \int_G \pi(\xi(r)\eta(s)^*\zeta(s))h ds \\
 &= \pi(\xi(r)\langle \eta, \zeta \rangle_r)h \\
 &= \pi_2(\xi\langle \eta, \zeta \rangle_r)h|_r
 \end{aligned}$$

Portanto, π_2 é um homomorfismo de C^* -anéis ternários positivos. $\square$

TEOREMA 7.23. *Seja $\pi : B \rightarrow B(H)$ uma representação do fibrado de Fell B , e sejam $\pi_c : \mathbb{K}_c(B) \rightarrow B(L^2(G, H))$ e $\pi_2 : L^2(B) \rightarrow B(H, L^2(G, H))$ as representações fornecidas por 7.21 e 7.22 respectivamente. Então temos:*

1. Para todos $k \in \mathbb{K}_c(B)$, $b \in B_e$, e $\xi, \eta \in L^2(B)$:

- (a) $\pi_2(k\xi) = \pi_c(k)\pi_2(\xi)$.
- (b) $\pi_c(\langle \xi, \eta \rangle_l) = \pi_2(\xi)\pi_2(\eta)^*$
- (c) $\pi_2(\xi b) = \pi_2(\xi)\pi(b)$
- (d) $\pi(\langle \xi, \eta \rangle_r) = \pi_2(\xi)^*\pi_2(\eta)$.

2. Existe um $*$ -homomorfismo injetivo $\Omega : \mathbb{K}_c(B) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, único tal que

$$\Omega(k)\xi|_r = \int_G k(r, s)\xi(s)ds, \quad \forall k \in \mathbb{K}_c(B) \quad \forall \xi \in C_c(B).$$

3. Para toda $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow B(H)$ tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel, existe um isomorfismo $\mu : \overline{\pi_c(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}))} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\Omega} & \mathcal{L}(E) \\ & \searrow \pi_c \quad \nearrow \mu & \\ & \pi_c(\mathbb{K}_c(\mathcal{B})) & \end{array}$$

Em particular, $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ não depende da representação π .

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que vale 1., e seja $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow B(H)$ uma representação tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel. Então a representação fiel $\pi_c : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow B(L^2(G, H))$ se estende de forma única a uma representação fiel $\tilde{\pi} : \mathbb{K}_\pi(\mathcal{B}) \longrightarrow B(L^2(G, H))$. Por outro lado, $\pi_2 : E \longrightarrow B(H, L^2(G, H))$ é um homomorfismo injetivo de C^* -anéis ternários. Portanto, $\sigma : E \longrightarrow \pi_2(E)$ tal que $\sigma(\xi) = \pi_2(\xi)$ é um isomorfismo de C^* -anéis ternários. Assim, a aplicação $Ad_\sigma : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(\pi_2(E))$ tal que $T \longmapsto \sigma T \sigma^{-1}$ é um isomorfismo. Agora, por 1.(a) e (d), temos que cada $\tilde{\pi}(k) \in \mathcal{L}(\pi_2(E))$, e portanto $Ad_\sigma^{-1}(\tilde{\pi}(k)) \in \mathcal{L}(E)$. Além disso, se $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, tem-se:

$$Ad_\sigma^{-1}(\pi_c(k))(\xi) = (\sigma^{-1}\pi_c(k)\sigma)\xi = \sigma^{-1}(\pi_c(k)\pi_2(\xi)) = \sigma^{-1}(\pi_2(k\xi)) = \sigma^{-1}(\sigma(k\xi)) = k\xi.$$

Isto significa que a aplicação $C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow C_c(\mathcal{B})$, tal que $\xi \longmapsto k\xi$, pode ser estendida por continuidade a um operador adjuntável $\Omega(k) : E \longrightarrow E$. Temos definida assim uma aplicação $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$. Por outro lado, se definimos $\mu : \overline{\pi_c(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}))} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ como a restrição de Ad_σ^{-1} a $\overline{\pi_c(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}))}$, temos que $\mu\pi_c = \Omega$. Como $\mu\tilde{\pi} : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ é injetiva, tem-se que Ω é injetiva e que a norma de $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ dentro de $\mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ coincide com $\|\Omega(k)\|$. Isto prova 2. e 3. .

Logo, somente falta provar 1. .

Sejam $h \in H$, $r \in G$, $x \in L^2(G, H)$:

- $\pi_2(k\xi) = \pi_c(k)\pi_2(\xi)$:

$$\begin{aligned} (\pi_2(k\xi))h|_t &= (k\xi)(t)h \\ &= \pi \left[\int_G k(r, s)\xi(s) \right] hds \\ &= \int_G \pi(k(t, s))\pi(\xi(s))hds \\ &= \int_G \pi(k(t, s))(\pi_2\xi)h|_s ds \\ &= \pi_c(k)(\pi_2\xi)h|_t \end{aligned}$$

- $\pi_c(\langle \xi, \eta \rangle_l) = \pi_2(\xi)\pi_2(\eta)^*$:

$$\begin{aligned} \pi_c(\langle \xi, \eta \rangle_l)x|_t &= \int_G \pi(\langle \xi, \eta \rangle_l(t, s))x(s)ds \\ &= \int_G \pi(\xi(t)\eta(s)^*)x(s)ds \\ &= \int_G \pi(\xi(t))\pi(\eta(s)^*)x(s)ds \\ &= \pi(\xi(t)) \int_G \pi(\eta(s)^*)x(s)ds \\ &= (\pi_2\xi)(\pi_2\eta)^*x|_t \end{aligned}$$

- $\pi_2(\xi b) = \pi_2(\xi)\pi(b)$

$$\pi_2(\xi b)h|_r = \pi(\xi b(r))h = \pi(\xi(r)b)h = \pi(\xi(r))\pi(b)h|_r = \pi_2(\xi)\pi(b)h|_r.$$

- $\pi(\langle \xi, \eta \rangle_r) = \pi_2(\xi)^* \pi_2(\eta)$:

$$\begin{aligned} \pi_2(\xi)^* \pi_2(\eta)h &= \int_G \pi(\xi(r)^*) \pi_2(\eta)h|_r ds \\ &= \int_G \pi(\xi(r)^*) \pi(\eta(r))h dr \\ &= \int_G \pi(\xi(r)^* \eta(r))h dr \\ &= \pi(\langle \xi, \eta \rangle_r)h \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 7.24. Sejam $\mathcal{B}$ um fibrado de Fell, e $\Omega : \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$ o homomorfismo definido no Teorema 7.23 acima. Seja $\mathbb{K}_r(\mathcal{B}) := \overline{\Omega(\mathbb{K}_c(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}))$. Diremos que $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ é a C^* -álgebra reduzida dos núcleos do fibrado de Fell $\mathcal{B}$.

OBSERVAÇÃO 7.25. Notar que se $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ é uma representação tal que $\pi|_{B_e}$ é fiel, então $\mathbb{K}_r(\mathcal{B}) \cong \mathbb{K}_\pi(\mathcal{B})$ naturalmente. Em particular, a ação β sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ se estende a $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$.

Pela propriedade universal de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, existe um epimorfismo canônico $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, que também denotaremos por Ω , único tal que $\Omega(k)\xi|_r = \int_G k(r, s)\xi(s)ds$, $\forall k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, e $\forall \xi \in C_c(\mathcal{B})$. Este homomorfismo é também um G -morfismo com respeito à ação natural β . Veremos logo que, de fato, este é sempre um isomorfismo.

OBSERVAÇÃO 7.26. Sejam $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ e $f \in C_c(\mathcal{B})$, e definamos $h : G \times G \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $h(r, t) = \int_G f(s)k(s^{-1}r, t)ds$. Notar que $h(r, t) \in B_{rt^{-1}}$, $\forall r, t \in G$, pois para todos $r, s, t \in G$, tem-se que $f(s)k(s^{-1}r, t) \in B_s B_{s^{-1}rt^{-1}} \subseteq B_{rt^{-1}}$. Assim, temos que $h \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$. Agora, considerando $\xi \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$, temos:

$$\Lambda_f \Omega_k \xi|_r = \int_G f(s) \Omega_k(\xi)(s^{-1}r)ds = \int_G \int_G f(s)k(s^{-1}r, t)\xi(t)dt ds = \int_G h(r, t)\xi(t)dt = \Omega_h \xi|_r.$$

Portanto, concluímos que $C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq M(\mathbb{K}_r(\mathcal{B}))$. Em particular, toda representação de $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ define uma representação de $C_r^*(\mathcal{B})$.

COROLÁRIO 7.27. Sejam $I = I(\mathcal{B})$ o fecho de $I_c(\mathcal{B})$ dentro de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, e $I_r = I_r(\mathcal{B})$ o fecho de $\Omega(I_c(\mathcal{B}))$ em $\mathbb{K}_r(\mathcal{B})$. Então:

1. $(\mathbb{K}(\mathcal{B}), \beta)$ é a ação envolvente de $(I, \beta|_I)$.
2. $(\mathbb{K}_r(\mathcal{B}), \beta)$ é a ação envolvente de $(I_r, \beta|_{I_r})$.

DEMONSTRAÇÃO. As duas partes são consequência direta de 7.19.

□

7.2.4. $\mathbb{k}(\mathcal{B}) = \mathbb{k}_r(\mathcal{B})$, e algumas aplicações. Veremos a seguir que o epimorfismo canônico $\mathbb{k}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{k}_r(\mathcal{B})$ é um isomorfismo. De fato, mostraremos que a restrição deste epimorfismo ao ideal I é um isomorfismo $I \cong I_r$, e portanto deve ser $\mathbb{k}(\mathcal{B}) \cong \mathbb{k}_r(\mathcal{B})$, por causa da unicidade da ação envolvente. O fato de ser $I \rightarrow I_r$ um isomorfismo decorre do Lema 7.28 abaixo, que permite gerar um módulo de Hilbert sobre I através do processo de completamento duplo (ver a página 23) e do Lema 7.29, que mostra que, sob determinadas circunstâncias, duas C^* -normas comparáveis sobre um $*$ -anel ternário devem ser iguais.

LEMA 7.28. *Seja $\mathfrak{c} := \overline{\{\sum_{i=1}^n k_i * k_i^* : n \geq 1, k_i \in I_c(\mathcal{B})\}} \subseteq I_c(\mathcal{B})$, onde o fecho é na topologia do limite indutivo. Então, se $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, tem-se que $\langle \xi, \xi \rangle_I \in \mathfrak{c}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Como vimos na demonstração do Lema 2.23, existem $\eta \in C_c(\mathcal{B})$, $b \in B_\epsilon$, tais que $\xi = \eta b$. Seja $\zeta \in C_c(\mathcal{B})$ tal que $\zeta(e) = b^*$. A função $G \rightarrow B_\epsilon$ tal que $t \mapsto \zeta(t)^* \zeta(t) - bb^*$ é contínua e se anula em $t = e$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V_ϵ de e , tal que se $t \in V_\epsilon$, então $\|\zeta(t)^* \zeta(t) - bb^*\| < \epsilon$. Seja $(f_V)_{V \in \mathcal{V}}$ uma unidade aproximada de $L^1(G)$ como no Lema 6.2, e para cada $V \in \mathcal{V}$ seja $\zeta_V = f_V^{1/2} \zeta$. Então $\zeta_V \in C_c(\mathcal{B})$, e se $V \geq V_\epsilon$ (ou seja: $V \subseteq V_\epsilon$):

$$\begin{aligned} \|\langle \zeta_V, \zeta_V \rangle_r - bb^*\| &= \left\| \int_G \zeta_V(t)^* \zeta_V(t) dt - bb^* \right\| \\ &= \left\| \int_G f_V(t) (\zeta(t)^* \zeta(t) - bb^*) dt \right\| \\ &\leq \int_G f_V(t) \|\zeta(t)^* \zeta(t) - bb^*\| dt \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

e portanto $\langle \zeta_V, \zeta_V \rangle_r \rightarrow bb^*$.

Consideremos agora, para cada $V \in \mathcal{V}$, o núcleo $k_V \in I_c(\mathcal{B})$ dado por $k_V = \langle \eta, \zeta_V \rangle_I$. Se $V \geq V_\epsilon$ tem-se:

$$\begin{aligned} \|(\langle \xi, \xi \rangle_I - k_V * k_V^*)|_{(r,s)}\| &= \|\xi(r)\xi(s)^* - \int_G k_V(r,t)k_V^*(t,s)dt\| \\ &= \|\eta(r)b(\eta(s)b)^* - \int_G k_V(r,t)k_V(s,t)^*dt\| \\ &= \|\eta(r)bb^*\eta(s)^* - \int_G \eta(r)\zeta_V(t)^*(\eta(s)\zeta_V(t)^*)^*dt\| \\ &= \|\eta(r)bb^*\eta(s)^* - \int_G \eta(r)\zeta_V(t)^*\zeta_V(t)\eta(s)^*dt\| \\ &= \|\eta(r)(bb^* - \langle \zeta_V, \zeta_V \rangle_r)\eta(s)^*\| \\ &\leq \epsilon \|\eta\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Portanto, $k_V * k_V^* \rightarrow \langle \xi, \xi \rangle_I$ na topologia do limite indutivo, e portanto $\langle \xi, \xi \rangle_I \in \mathfrak{c}$. □

LEMA 7.29. *Sejam $(E', (\cdot, \cdot, \cdot))$ um $*$ -anel ternário, e $\|\cdot\|, |\cdot|$ duas C^* -normas sobre E' , com $\|\cdot\| \leq |\cdot|$. Sejam E o completamento de E' com respeito a $\|\cdot\|$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow Z(E)$ o correspondente produto interno. Se $\text{span}(E', E')$ é um ideal de $Z(E)$, então $\|\cdot\| = |\cdot|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam F o completamento de E' com respeito a $|\cdot|$, e $[\cdot, \cdot] : F \times F \rightarrow Z(F)$ o correspondente produto interno.

Sejam $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in E'$, e suponhamos que $\sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle = 0 \in Z(E)$. Então, $\forall z \in E'$:

$$0 = z \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle = \sum_{i=1}^n (z, x_i, y_i) = z \sum_{i=1}^n [x_i, y_i],$$

donde segue que $\sum_{i=1}^n [x_i, y_i] = 0 \in Z(F)$, porque E' é denso em F . Portanto, podemos definir $\psi : \text{span}\langle E', E' \rangle \rightarrow Z(F)$ tal que $\psi(\sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle) = \sum_{i=1}^n [x_i, y_i]$. É imediato verificar que este é um $*$ -homomorfismo. Como $\text{span}\langle E', E' \rangle$ é um ideal de $Z(E)$, ele é contrativo (1.17). Então temos, $\forall x \in E'$:

$$|x|^2 = |[x, x]| = |\psi(\langle x, x \rangle)| \leq \|\langle x, x \rangle\| = \|x\|^2 \leq |x|^2,$$

e portanto $\|\cdot\| = |\cdot|$ □

PROPOSIÇÃO 7.30. *Para todo fibrado de Fell $\mathcal{B}$ tem-se que $\Omega : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{c}$ como no Lema 7.28, ou seja, $\mathfrak{c} \subseteq I_c(\mathcal{B})$ é o cone fechado na topologia do limite indutivo gerado pelos elementos da forma $k * k^*$, com $k \in I_c(\mathcal{B})$. Como a convergência na topologia do limite indutivo implica a convergência em $HS(\mathcal{B})$, e portanto em $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, temos que $\mathfrak{c} \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{B})^+$. Logo, pelo Lema 7.28, $\langle \cdot, \cdot \rangle_I : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$ é um produto interno. Consideremos sobre $C_c(\mathcal{B})$ a norma $|\cdot|$ induzida por $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, ou seja, $|\xi| = \|\langle \xi, \xi \rangle_I\|$, onde estamos vendo o elemento $\langle \xi, \xi \rangle_I$ como pertencente a $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Em particular, $|\xi| \geq \|\xi\|$, onde esta última é a norma de ξ como elemento de $L^2(\mathcal{B})$. Agora, podemos usar o Lema 7.29 acima com $E' = C_c(\mathcal{B})$, donde concluímos que $\|\cdot\| = |\cdot|$. Portanto $I = Z_r(E) = I_r$, e como $(\beta, \mathbb{K}(\mathcal{B}))$ e $(\beta, \mathbb{K}_r(\mathcal{B}))$ são respectivamente as ações envolventes de $\beta|_I$ e $\beta|_{I_r}$, então $\mathbb{K}(\mathcal{B}) = \mathbb{K}_r(\mathcal{B})$, pela unicidade da ação envolvente. □

Em [53], Quigg introduziu a noção de *propriedade ideal de uma C^* -álgebra*

DEFINIÇÃO 7.31. Uma propriedade de uma C^* -álgebra é chamada ideal se para toda C^* -álgebra existe um ideal máximo da álgebra que possui esta propriedade, e tal que a propriedade é invariante por equivalência Morita e herdada por ideais.

Exemplos de propriedades ideais são a nuclearidade, a liminalidade, a postliminalidade.

COROLÁRIO 7.32. *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade ideal. Então B_ϵ tem a propriedade $\mathcal{P}$ se e somente se $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{P}$ é invariante por equivalência Morita, B_ϵ tem $\mathcal{P}$ se e somente se I tem $\mathcal{P}$. Agora, $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ tem um ideal máximo que tem a propriedade $\mathcal{P}$. Este ideal deve conter todos os ideais $\beta_t(I)$, pois todos eles, sendo isomorfos a I , têm a propriedade $\mathcal{P}$. Mas, o menor ideal que contém todos os ideais $\beta_t(I)$ é a própria C^* -álgebra $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, devido a 7.27. □

COROLÁRIO 7.33. *Suponhamos que $\mathcal{C}$ é uma classe de C^* -álgebras fechada por ideais, extensões, quocientes, limites indutivos e equivalência Morita. Então $B_\epsilon \in \mathcal{C} \iff \mathbb{K}(\mathcal{B}) \in \mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $B_\epsilon \overset{M}{\sim} I$, temos que $B_\epsilon \in \mathcal{C} \iff I \in \mathcal{C}$. Agora, como β é a ação envolvente de $\beta|_I$, por 5.19 temos que $I \in \mathcal{C} \iff \mathbb{K}(\mathcal{B}) \in \mathcal{C}$. Assim, $B_\epsilon \in \mathcal{C} \iff \mathbb{K}(\mathcal{B}) \in \mathcal{C}$. □

Antes de encerrar esta seção, gostaríamos de enfatizar o caráter funtorial das construções realizadas. Suponhamos que $\mathcal{A} = (A_t)$ e $\mathcal{B} = (B_t)$ são fibrados de Fell sobre o grupo localmente compacto G , e suponhamos que $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de fibrados de Fell. Então, se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{A})$, é claro que $\phi(k) \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, onde $\phi(k)|_{(r,s)} = \phi(k(r,s))$. Por outro lado, é fácil verificar que a aplicação $\phi : \mathbb{K}_c(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ assim definida é um homomorfismo de $*$ -álgebras. Além disso, também é claro que $\phi(k) \in HS(\mathcal{B})$, e $\|\phi(k)\|_2 \leq \|k\|_2$, e portanto ϕ se estende a um homomorfismo $\phi : HS(\mathcal{A}) \rightarrow HS(\mathcal{B})$ de $*$ -álgebras de Banach. Assim, fica induzido um homomorfismo de C^* -álgebras $\mathbb{K}(\phi) : \mathbb{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$.

Se $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é injetiva, então $\mathbb{K}(\phi) : \mathbb{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$ também é injetiva: seja $\pi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ uma representação tal que $\pi|_{B_\epsilon}$ é fiel. Então $\pi\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(H)$ é uma representação tal que $\pi\phi|_{A_\epsilon}$ é fiel. Por outro lado, é claro que $\widetilde{\pi\phi} = \widetilde{\pi}\mathbb{K}(\phi)$. Como o membro esquerdo desta igualdade é injetivo, o membro direito também é, o que mostra que $\mathbb{K}(\phi)$ é injetivo.

7.3. Sobre a existência da ação envolvente a menos de equivalência Morita

Nesta seção aplicaremos os resultados prévios ao caso em que o fibrado de Fell $\mathcal{B}$ provém de uma ação parcial α . Mostraremos então que a ação natural sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α . Suponhamos que $\mathcal{B}$ é o fibrado de Fell de uma ação parcial $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$. Definimos sobre E a ação parcial $\gamma = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\gamma_t\}_{t \in G})$, onde $E_t = ED_t$, e $\gamma_t : E_{t^{-1}} \rightarrow E_t$ é tal que $\gamma_t(\xi)|_r = \Delta(t)^{1/2}\xi(rt)$, para toda $\xi \in E_{t^{-1}} \cap C_c(\mathcal{B})$. No Teorema 7.38, obtemos o resultado principal da Parte II, ao mostrar que $\gamma^r = \alpha$ e $\gamma^l = \tilde{\alpha}$, onde $\tilde{\alpha}$ é a ação natural de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Decorre então que $(\mathbb{K}(\mathcal{B}), \tilde{\alpha})$ é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α , e portanto toda ação parcial possui uma ação envolvente a menos de equivalência Morita.

LEMA 7.34. *Seja B um fibrado de Banach sobre o espaço localmente compacto X . Suponhamos que $\Theta \subseteq C_c(X)$ é denso em $C_c(X)$ na topologia do limite indutivo, e que $F \subseteq C_c(B)$ é um subespaço vetorial tal que $\Theta F \subseteq F$. Então o fecho de F na topologia do limite indutivo é o conjunto: $\{g \in C_c(B) : g(x) \in \overline{F(x)}, \forall x \in X\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in X$, a aplicação $e_x : C_c(B) \rightarrow B_x$ tal que $f \mapsto f(x)$ é linear e contínua na topologia do limite indutivo. Portanto $e_x(\overline{F}) \subseteq \overline{F(x)}$. Inversamente, suponhamos que $g \in C_c(B)$ é tal que $g(x) \in \overline{F(x)}, \forall x \in X$. Como X é localmente compacto, existe $K \subseteq X$ compacto que contém $\text{supp}(g)$ no seu interior. Agora, para cada $\epsilon > 0$, e cada $x \in K$, existe $f_x \in F$ tal que $\|g(x) - f_x(x)\| < \epsilon$, e podemos supor que $\text{supp}(f_x) \subseteq K$. Como g, f_x e a norma sobre B são funções contínuas, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que $\|g(y) - f_x(y)\| < \epsilon, \forall y \in V_x$. A família $(V_x)_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K , que é compacto, e portanto existe uma subcobertura finita $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$. Seja $(\psi_j)_{j=1}^m$ uma partição da unidade de K subordinada à cobertura (V_{x_j}) , e seja $f = \sum_{j=1}^m \psi_j f_{x_j}$. Então temos: se $x \notin K$, $\|g(x) - f(x)\| = 0$ porque ambas funções se anulam fora de

K ; se $x \in K$, então:

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_j \psi_j(x)g(x) - \sum_j \psi_j(x)f_{x_j}(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j: x \in V_{x_j}} \psi_j(x)[g(x) - f_{x_j}(x)] \right\| \\ &\leq \sum_j \psi_j(x)\epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, só falta mostrar que $f \in \overline{F}$. Para isto é suficiente mostrar que $\psi f' \in \overline{F}$, $\forall \psi \in C_c(G)$ e $f' \in F$. Mas, como Θ é denso em $C_c(G)$, existe $\psi' \in \Theta$ tal que $\|\psi - \psi'\|_\infty \leq \varepsilon$, para ε dado, e portanto $\|\psi f' - \psi' f'\|_\infty \leq \varepsilon \|f'\|_\infty$; como $\Theta F \subseteq F$, temos que $\psi' f' \in F$, e portanto $\psi f' \in \overline{F}$, o que encerra a prova. $\square$

PROPOSIÇÃO 7.35. *Sejam $\mathcal{B}$ um fibrado de Fell, β a ação natural de G sobre $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, e $I_c(\mathcal{B}) = \text{span}\langle C_c(\mathcal{B}), C_c(\mathcal{B}) \rangle_l$ o $*$ -ideal bilateral de $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ definido antes da Proposição 7.19. Para cada $t \in G$, seja $I_t^c = I_c(\mathcal{B}) \cap \beta_t(I_c(\mathcal{B}))$. Então o fecho de I_t^c na topologia do limite indutivo é o conjunto $\{k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) : k(r, s) \in (\text{span } B_r B_s^* \cap \text{span } B_{rt} B_{st}^*), \forall r, s \in G\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $k \in I_c(\mathcal{B})$. Então existem $\xi_i, \eta_i \in C_c(\mathcal{B})$, tais que $k = \sum_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle_l$. Em particular, $k(r, s) = \sum_i \xi_i(r) \eta_i(s)^* \in \text{span } B_r B_s^*, \forall r, s \in G$. Agora se $k \in I_t^c$, então $\beta_{t^{-1}}(k) \in I_c(\mathcal{B})$, e portanto $\beta_{t^{-1}}(k)(r, s) \in \text{span } B_r B_s^*, \forall r, s \in G$, ou seja, $\Delta(t)^{-1} k(rt^{-1}, st^{-1}) \in \text{span } B_r B_s^*, \forall r, s \in G$, o que equivale a dizer que $k(r, s) \in \text{span } B_{rt} B_{st}^*, \forall r, s \in G$. Seja $\Theta = C_c(G) \odot C_c(G)$. Então Θ é uma subálgebra densa de $C_c(G \times G)$ na topologia do limite indutivo. Se $\phi, \psi \in C_c(G)$, $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, então $(\phi \otimes \psi)(\xi, \eta)_l = \langle \phi\xi, \psi\eta \rangle_l$, donde segue que $\Theta I_t^c \subseteq I_t^c$. Agora o resultado segue do Lema 7.34. $\square$

Suponhamos a seguir que $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial contínua do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra A , e seja $\mathcal{B}_\alpha$ o fibrado de Fell associado a α . Para cada $t \in G$, consideremos o subconjunto $E_t := \overline{\text{span}} ED_t$ de E . Pelo teorema de Cohen-Hewitt, $E_t = \{\xi a : \xi \in E, a \in D_t\}$. Pela Proposição 1.23, E_t é um ideal bilateral de E . Se $\xi : G \rightarrow \mathcal{B}$ é uma seção, existe uma única função $\xi' : G \rightarrow A$ tal que $\xi'(r) \in D_r, \forall r \in G$, e tal que $\xi(r) = (r, \xi'(r))$. ξ é contínua e de suporte compacto se e somente se ξ' é contínua e de suporte compacto. Suponhamos que $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, e $a \in D_t$. Então $\xi a|_r = \xi(r)(e, a) = (r, \xi'(r))(e, a) = (r, \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(\xi'(r))a))$. Como $\alpha_{r^{-1}}(\xi'(r))a \in D_{r^{-1}} \cap D_t$, temos que $\xi a|_r \in D_r \cap D_{rt}, \forall r \in G$. Portanto E_t é o fecho de $E_t^c := \{\xi \in C_c(\mathcal{B}) : \xi'(r) \in D_r \cap D_{rt}, \forall r \in G\}$.

PROPOSIÇÃO 7.36. *Sejam $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial de G sobre A , com fibrado de Fell associado $\mathcal{B}$. Então temos:*

1. $B_r B_s^* = \{(rs^{-1}, D_r \cap D_{rs^{-1}})\}, \forall r, s \in G$.
2. $B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^* = \{(rs^{-1}, D_r \cap D_{rt} \cap D_{rs^{-1}})\}, \forall r, s, t \in G$.
3. O fecho de $\langle E_t^c, E_t^c \rangle_l$ na topologia do limite indutivo coincide com o fecho de I_t^c na topologia do limite indutivo, e portanto é o conjunto: $\{k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) : k(r, s) \in B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^*, \forall r, s \in G\}$.
4. $Z_l(E_t) = I_t$, onde I_t é o fecho de I_t^c em I .
5. Se $\tilde{\alpha}$ é a ação natural de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$, então $\tilde{\alpha}|_I = (\{I_t\}_{t \in G}, \{\tilde{\alpha}_t|_{I_t}\}_{t \in G})$.

DEMONSTRAÇÃO.

1. Lembrar que $B_r = (r, D_r)$, $\forall r \in G$.

$$\begin{aligned} (r, D_r)(s, D_s)^* &= (r, D_r)(s^{-1}, \alpha_{s^{-1}}(D_s)) \\ &= (rs^{-1}, \alpha_r(\alpha_{s^{-1}}(D_r)\alpha_{s^{-1}}(D_s))) \\ &= (rs^{-1}, \alpha_r(D_{rs^{-1}} \cap D_{s^{-1}})) \\ &= (rs^{-1}, D_r \cap D_{rs^{-1}}) \end{aligned}$$

2. $B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^* = \{(rs^{-1}, D_r \cap D_{rs^{-1}})\} \cap \{(rs^{-1}, D_{rt} \cap D_{rs^{-1}})\} = \{(rs^{-1}, D_r \cap D_{rt} \cap D_{rs^{-1}})\}$

3. Sejam $\xi, \eta \in E$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle_l(r, s) &= \xi(r)\eta(s)^* \\ &= (r, \xi'(r))(s, \eta'(s))^* \\ &= (r, \xi'(r))(s^{-1}, \alpha_{s^{-1}}(\eta'(s)^*)) \\ &= (rs^{-1}, \alpha_r(\alpha_{s^{-1}}(\xi'(r))\alpha_{s^{-1}}(\eta'(s)))) \end{aligned}$$

Portanto, se $\xi, \eta \in E_t^c$, então

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle_l &\in (rs^{-1}, \alpha_r(\alpha_{s^{-1}}(D_r \cap D_{rt})\alpha_{s^{-1}}(D_s \cap D_{st}))) \\ &= (rs^{-1}, \alpha_r(D_{rs^{-1}} \cap D_{rt} \cap D_{s^{-1}})) \\ &= (rs^{-1}, D_r \cap D_{rt} \cap D_{rs^{-1}}) \\ &= B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^*, \quad \text{por 2.} \end{aligned}$$

Como $B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^*$ é um espaço vetorial fechado, o Lema 7.34 mostra que o fecho na topologia do limite indutivo de $\langle E_t^c, E_t^c \rangle_l$ é $\{k \in \mathbb{k}_c(\mathcal{B}) : k(r, s) \in B_r B_s^* \cap B_{rt} B_{st}^*, \forall r, s \in G\}$, e por 7.35, este conjunto coincide com o fecho de I_t^c na topologia do limite indutivo, o que prova 3.

4. É consequência direta de 3.

5. Temos que mostrar que $I \cap \check{\alpha}_t(I) = I_t$. Como $I_t^c = I_c(\mathcal{B}) \cap \check{\alpha}_t(I_c(\mathcal{B})) \subseteq I \cap \check{\alpha}_t(I)$, temos que $I_t \subseteq I \cap \check{\alpha}_t(I)$.

Para provar a inclusão inversa, por 1.23 basta mostrar que $(I \cap \check{\alpha}_t(I))E \subseteq E_t$. Seja $x \in I \cap \check{\alpha}_t(I)$. Então $x = \check{\alpha}_t(y)$, para algum $y \in I$. Para ϵ dado, seja $k \in \mathbb{k}_c(\mathcal{B})$ tal que $\|y - k\| < \epsilon$. Então $\|x - \check{\alpha}_t(k)\| < \epsilon$, porque $\check{\alpha}_t$ é uma isometria. Consideremos agora $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Temos:

$$\check{\alpha}_t(k)\xi|_r = \int_G \Delta(t)k(rt, st)\xi(s)ds \in B_{rt} B_{st} B_s.$$

Por 1., $B_{rt} B_{st} B_s = (rs^{-1}, D_{rt} \cap D_{rs^{-1}})(s, D_s)$, e portanto

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_t(k)\xi|_r &\in (r, \alpha_{rs^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(D_{rt} \cap D_{rs^{-1}})D_s)) \\ &= (r, \alpha_{rs^{-1}}(D_{rs^{-1}} \cap D_{st} \cap D_s)) \\ &= (r, D_{rs^{-1}} \cap D_{rt} \cap D_r), \end{aligned}$$

donde segue que $\check{\alpha}_t(k)\xi \in E_t^c$. Pela continuidade do produto, segue agora que $xE \subseteq E_t$, $\forall x \in I \cap \check{\alpha}_t(I)$, o que encerra a demonstração. $\square$

Consideremos agora, para cada $t \in G$, a aplicação $\gamma_t' : C_c(G, A) \rightarrow C_c(G, A)$ tal que $\gamma_t'(\xi)|_r = \Delta(t)^{1/2}\xi'(rt)$. Notar que se ξ' é tal que $G \rightarrow \mathcal{B}_\alpha$ é tal que $r \mapsto (r, \xi'(r))$ é um elemento de $E_{t^{-1}}^c$, então $r \mapsto (r, \gamma_t'(\xi')(r))$ é um elemento de E_t^c : $\gamma_t'(\xi')(r) = \Delta(t)^{1/2}\xi'(rt) \in D_{rt} \cap D_{rtt^{-1}} = D_r \cap D_{rt}$. Portanto, podemos definir $\gamma_t : E_{t^{-1}}^c \rightarrow E_t^c$, tal que $\gamma_t(\xi)(r) = (r, \gamma_t'(\xi')(r)) = (r, \Delta(t)^{1/2}\xi'(rt))$.

LEMA 7.37. *Sejam X, Y espaços topológicos, H um grupo topológico, e $f : X \times Y \rightarrow H$ uma função contínua. Se $K \subseteq Y$ é compacto e W é uma vizinhança da identidade em H , então cada $x_0 \in X$ tem uma vizinhança U tal que $\forall x \in U$ e $\forall y \in K$, tem-se que $f(x, y)f(x_0, y)^{-1} \in W$, e $f(x, y)^{-1}f(x_0, y) \in W$. Em particular, se H é um espaço normado e f tem suporte compacto, a função $X \rightarrow C_0(Y, H)$ tal que $x \mapsto f_x$, onde $f_x(y) = f(x, y)$, é contínua na topologia da convergência uniforme.*

DEMONSTRAÇÃO. Como o produto e a inversão em H são contínuas, e como f é contínua, para cada $y \in K$ existem vizinhanças U_y e V_y de x_0 e de y respectivamente, tais que

$$f(x, y)f(x_0, y)^{-1} \in W, \text{ e } f(x, y)^{-1}f(x_0, y) \in W, \forall x \in U_y, y \in V_y.$$

Agora, a família $(V_y)_{y \in K}$ é uma cobertura aberta de K , e portanto existe uma subcobertura finita $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Seja $U = \bigcap_{j=1}^n U_{y_j}$. Então U é uma vizinhança de x_0 , e se $(x, y) \in U \times K$, então existe y_j tal que $(x, y) \in U_{y_j} \times V_{y_j}$, e portanto $f(x, y)f(x_0, y)^{-1} \in W$, e $f(x, y)^{-1}f(x_0, y) \in W$, como tínhamos afirmado.

Se H é um espaço normado, seu grupo aditivo é um grupo topológico com a topologia induzida pela norma. Por outro lado, como f tem suporte compacto, existem compactos $K_1 \subseteq X$ e $K_2 \subseteq Y$, tais que $\text{supp}(f) \subseteq K_1 \times K_2$. Pela primeira parte do lema, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\|f_x(y) - f_{x_0}(y)\| < \epsilon$, $\forall x \in U$, $y \in K_2$; e se $y \notin K_2$, $f_x(y) = f_{x_0}(y) = 0$, donde segue que $\|f_x(y) - f_{x_0}(y)\| < \epsilon$, $\forall x \in U$, $y \in Y$. $\square$

TEOREMA 7.38. *Toda ação parcial contínua de um grupo localmente compacto sobre uma C^* -álgebra possui ação envolvente a menos de equivalência Morita. Mais exatamente, temos o seguinte. Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial contínua do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra A , e seja B o fibrado de Fell associado a α . Sejam E_t^c e γ_t definidos acima. Tem-se:*

1. *Para todo t , $\gamma_t : E_{t^{-1}}^c \rightarrow E_t^c$ é uma isometria, que se estende por continuidade a um isomorfismo $\gamma_t : E_{t^{-1}} \rightarrow E_t$ de C^* -anéis ternários.*
2. *$\gamma = (\{E_t\}_{t \in G}, \{\gamma_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial contínua de G sobre E .*
3. *$\gamma^r = \alpha$, e $\gamma^l = \tilde{\alpha}|_I$, onde $\tilde{\alpha}$ é a ação natural de G sobre $\mathbb{K}(B)$. Toda ação parcial contínua de um grupo localmente compacto sobre uma C^* -álgebra possui ação envolvente a menos de equivalência Morita*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\xi, \eta \in C_c(B)$. Identificando A com a fibra de B_α sobre a unidade, e o núcleo $k \in \mathbb{K}_c(B)$ com $k' : G \times G \rightarrow A$ tal que $k(r, s) = (rs^{-1}, k'(r, s))$, temos as equações:

$$(13) \quad \langle \xi, \eta \rangle_t(r, s) = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(\xi'(r))\alpha_{s^{-1}}(\eta'(s)))$$

$$(14) \quad \langle \xi, \eta \rangle_r = \int_G \alpha_{r^{-1}}(\xi'(r)^* \eta'(r)) dr$$

Pela equação (14), se $\xi, \eta \in E_{t^{-1}}^c$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_t(\xi), \gamma_t(\eta) \rangle_r &= \int_G \alpha_{r^{-1}}(\gamma_t'(\xi')(r)^* \gamma_t'(\eta')(r)) dr \\ &= \int_G \alpha_{r^{-1}}(\Delta(t)^{1/2} \xi'(rt)^* \Delta(t)^{1/2} \eta'(rt)) dr \\ &= \int_G \Delta(t^{-1}) \Delta(t) \alpha_{ts^{-1}}(\xi'(s)^* \eta'(s)) ds \\ &= \int_G \alpha_t \alpha_{s^{-1}}(\xi'(s)^* \eta'(s)) ds \\ &= \alpha_t(\langle \xi, \eta \rangle_r), \end{aligned}$$

onde fizemos a mudança $s = rt$ na terceira igualdade. Isto mostra que γ_t é uma isometria, e portanto se estende a uma isometria bijetiva $\gamma_t : E_{t-1} \rightarrow E_t$, tal que $\langle \gamma_t(\xi), \gamma_t(\eta) \rangle_r = \alpha_t(\langle \xi, \eta \rangle_r)$, $\forall \xi, \eta \in E$. Por outro lado, se $\xi \in E_{t-1}^c$, e $a \in D_{t-1}$, temos que $\xi a(r) = (r, \xi'(r))(e, a) = (r, \alpha_r(\alpha_{r-1}(\xi'(r))a))$. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \gamma_t(\xi a)(r) &= (r, \Delta(t)^{1/2} \alpha_{rt}(\alpha_{rt-1}(\xi'(rt))a)) \\ &= (r, \Delta(t)^{1/2} \alpha_{rt}(\alpha_{t-1r-1}(\xi'(rt))\alpha_{t-1}(\alpha_t(a)))) \\ &= (r, \Delta(t)^{1/2} \alpha_r(\alpha_{r-1}(\xi'(rt))\alpha_t(a))) \\ &= (r, \Delta(t)^{1/2} \xi'(rt))(e, \alpha_t(a)) \\ &= \gamma_t(\xi)\alpha_t(a)(r). \end{aligned}$$

Portanto γ_t é um isomorfismo de C^* -anéis ternários, e $Z_t(\gamma_t) = \alpha_t$, o que prova 1.

Vejamos que γ é uma ação parcial: claramente temos que $E_e = E$ e $\gamma_e = id_E$. Suponhamos agora que $\xi \in E_{t-1}^c$, é tal que $\gamma_t(\xi) \in E_{s-1}^c$. Então:

$$\begin{aligned} \gamma_s \gamma_t(\xi) \Big|_r &= (r, \Delta(s)^{1/2} (\gamma_t'(\xi'))(rs)) \\ &= (r, \Delta(s)^{1/2} \Delta(t)^{1/2} \xi'(rst)) \\ &= (r, \Delta(st)^{1/2} \xi'(rst)) \\ &= \gamma_{st}(\xi) \Big|_r. \end{aligned}$$

Assim, γ_{st} é uma extensão de $\gamma_s \gamma_t$, e portanto γ é uma ação parcial sobre E . Logo, 2. está provado, a menos da continuidade de γ , que provaremos depois.

Como $Z_t(E_t) = D_t$ por 1.23, do cálculo que mostrou que cada γ_t é uma isometria segue também que $\gamma^r = \alpha$, o que demonstra a primeira metade de 3. Vejamos que $\gamma^l = \tilde{\alpha} \Big|_E$. Se $\xi, \eta \in E_{t-1}^c$, pela equação (13) temos:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_t(\xi), \gamma_t(\eta) \rangle_t(r, s) &= \alpha_r(\alpha_{r-1}(\gamma_t'(\xi'))(r)\alpha_{s-1}(\gamma_t'(\eta'))(s))) \\ &= \alpha_r(\alpha_{r-1}(\Delta(t)^{1/2} \xi'(rt))\alpha_{s-1}(\Delta(t)^{1/2} \eta'(st))) \\ &= \Delta(t)\alpha_{rt}(\alpha_{rt-1}(\xi'(rt))\alpha_{st-1}(\eta'(st))) \\ &= \Delta(t)\langle \xi, \eta \rangle_t(rt, st) \\ &= \tilde{\alpha}_t(\langle \xi, \eta \rangle_t)(r, s) \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{\alpha}_t$ é uma extensão de $Z_t(\gamma_t)$, $\forall t \in G$. Pela Proposição 7.36, tem-se $Z_t(E_t) = I_t$, $\forall t \in G$, donde concluímos que $\gamma^l = \tilde{\alpha} \Big|_E$, e 3. está provado.

Só falta provar que γ é contínua, porque assim 2. estará demonstrado, e 2. e 3. implicam que $\tilde{\alpha}$ é uma ação envolvente a menos de equivalência Morita de α .

Temos que mostrar que se ξ_i é uma rede em E que converge a ξ , com $\xi_i \in E_{t-1}$, $\xi \in E_{t-1}$, então $\gamma_t(\xi_i) \rightarrow \gamma_t(\xi)$. Dado $\epsilon > 0$, vamos mostrar que existe i_0 tal que $\|\gamma_t(\xi_i) - \gamma_t(\xi)\| < \epsilon$, $\forall i \geq i_0$.

Pelo teorema de Cohen-Hewitt, existem $\xi' \in E_{t-1}$, $a \in D_{t-1}$, tais que $\xi = \xi'a$, e podemos supor que $a \neq 0$. Como E_{t-1}^c é denso em E_{t-1} , existe $\eta \in E_{t-1}^c$ tal que $\|\xi' - \eta\| < \epsilon/4\|a\|$. Portanto,

$$(15) \quad \|\xi - \eta a\| \leq \epsilon/4$$

Como a família $\{D_r\}_{r \in G}$ é contínua, existe $d \in C_c(G, A)$ tal que $d(t^{-1}) = a$. Definamos então $\eta_s = \eta d(s^{-1})$. Em particular, $\eta_t = \eta a$. Notar que $\eta_s \in E_{t-1}^c \cap E_{s-1}^c$, porque $\eta \in E_{t-1}^c$, e $d(s^{-1}) \in D_{s-1}$, $\forall s \in G$. Como a ação de A sobre E é contínua, e como d é contínua, temos que $\eta_s \rightarrow \eta_t$ em E . Portanto, existe i_1 tal que $\forall i \geq i_1$ se tem :

$$(16) \quad \|\xi - \eta_t\| \leq \epsilon/4$$

(Na verdade, temos ainda que $\eta_s \rightarrow \eta_t$ na topologia do limite indutivo, porque $\|\eta_s(r) - \eta_t(r)\| = \|\eta(r)d(s^{-1}) - \eta(r)d(t^{-1})\| \leq \|\eta\|_\infty \|d(s^{-1}) - d(t^{-1})\|$).

Seja $\eta(r) = (r, \eta'(r))$. Como $\eta_s = \eta d(s^{-1})$ deve ser: $(r, \eta'_s(r)) = (r, \eta'(r))(e, d(s^{-1})) = (r, \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(\eta'(r)d(s^{-1}))))$. Logo, $\gamma_s \eta_s(r) = (r, \gamma'_s \eta'_s(r)) = (r, \Delta(s)^{1/2} \alpha_{r,s}(\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(\eta'(rs)d(s^{-1}))))$. Portanto, a função $G \times G \rightarrow A$ tal que $(s, r) \mapsto \gamma'_s \eta'_s(r)$ é contínua e de suporte compacto. Aplicando o Lema 7.37, temos que a função $G \rightarrow C_0(A)$ tal que $s \mapsto \gamma'_s \eta'_s$ é contínua. Logo, $\|\gamma_s \eta_s - \gamma_t \eta_t\|_\infty \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow t$. Então temos também que $\|\gamma_s \eta_s - \gamma_t \eta_t\| \rightarrow 0$ se $s \rightarrow t$. Assim, existe i_2 tal que $\forall i \geq i_2$ tem-se que:

$$(17) \quad \|\gamma_t, \eta_t, - \gamma_t \eta_t\| \leq \epsilon/4$$

Por último, como $\xi_i \rightarrow \xi$, existe i_3 tal que $\forall i \geq i_3$ se tem:

$$(18) \quad \|\xi_i - \xi\| < \epsilon/4$$

Seja $i_0 \geq i_1, i_2, i_3$. Como cada γ_s é uma isometria, se $i \geq i_0$, por (15), (16), (17) e (18) tem-se:

$$\begin{aligned} \|\gamma_t, (\xi_i) - \gamma_t(\xi)\| &\leq \|\gamma_t, (\xi_i) - \gamma_t, (\eta_t)\| + \|\gamma_t, (\eta_t) - \gamma_t(\eta_t)\| + \|\gamma_t(\eta_t) - \gamma_t(\xi)\| \\ &\leq \|\xi_i - \eta_t\| + \epsilon/4 + \|\eta_t - \xi\| \\ &\leq \|\xi_i - \xi\| + \|\xi - \eta_t\| + \epsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Isto demonstra que γ é uma ação parcial contínua, o que encerra a prova. $\square$

7.4. Sobre a unicidade da ação envolvente a menos de equivalência Morita

O objetivo desta seção é mostrar que, a menos de equivalência Morita, a ação envolvente a menos de equivalência Morita é única. Isto é provado na Proposição 7.41. Se $\mathcal{C}_M$ é a categoria de C^* -álgebras com os bimódulos de equivalência Morita como morfismos, a Proposição 7.41 junto com o Teorema 7.38 podem ser enunciados assim: para toda ação parcial contínua de um grupo localmente compacto sobre uma C^* -álgebra existe uma única ação envolvente em $\mathcal{C}_M$.

TEOREMA 7.39. *Sejam $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , $\mathcal{E} = (E_t)_{t \in G}$ um ideal à direita de $\mathcal{B}$, e $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$ um subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ contido em $\mathcal{E}$. Definamos $\mathbb{K}_c(\mathcal{E}) = \{k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B}) : k(r, s) \in E_{rs^{-1}}, \forall r, s \in G\}$, e seja $\mathbb{K}_r(\mathcal{E})$ o fecho de $\mathbb{K}_c(\mathcal{E})$ dentro de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Suponhamos que $\mathcal{AE} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{EE}^* \subseteq \mathcal{A}$. Então temos:*

1. $\mathbb{K}_c(\mathcal{A})\mathbb{K}_c(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{K}_c(\mathcal{E})$, e $\mathbb{K}_r(\mathcal{A})\mathbb{K}_r(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{K}_r(\mathcal{E})$
2. $\mathbb{K}_c(\mathcal{E})\mathbb{K}_c(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}_c(\mathcal{E})$, e $\mathbb{K}_r(\mathcal{E})\mathbb{K}_r(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}_r(\mathcal{E})$.
3. $\mathbb{K}_c(\mathcal{E})\mathbb{K}_c(\mathcal{E})^* \subseteq \mathbb{K}_c(\mathcal{A})$, e $\mathbb{K}_r(\mathcal{E})\mathbb{K}_r(\mathcal{E})^* = \mathbb{K}_r(\mathcal{A})$. Em particular, $\mathbb{K}_r(\mathcal{A})$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $\mathbb{K}(\mathcal{B})$.
4. Suponhamos que para cada $t \in G$ tem-se que $(\text{span } \mathcal{E}^* \mathcal{E}) \cap B_t$ é denso em B_t . Então o fecho de $\text{span } \mathbb{K}_c(\mathcal{E})^* \mathbb{K}_c(\mathcal{E})$ em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo é $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, e $\overline{\text{span}} \mathbb{K}_r(\mathcal{E})^* \mathbb{K}_r(\mathcal{E}) = \mathbb{K}(\mathcal{B})$. Em particular, $\mathbb{K}_r(\mathcal{A})$ e $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ são equivalentes Morita.

Além disso, $\mathbb{K}_r(\mathcal{E})$ é invariante pela ação natural de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$; na hipótese de 4. acima, as ações naturais de G sobre $\mathbb{K}_r(\mathcal{A})$ e $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ são equivalentes Morita.

DEMONSTRAÇÃO. Pelos comentários finais na subseção 7.2.2, sabemos que $\mathbb{K}_r(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{B})$.

Sejam $a \in \mathbb{K}_c(\mathcal{A})$, $\xi, \eta \in \mathbb{K}_c(\mathcal{E})$, $b \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $r, s \in G$. Então:

1. $a * \xi(r, s) = \int_G a(r, t) \xi(t, s) dt \in A_{rt^{-1}} E_{ts^{-1}} \subseteq \mathcal{E} \cap B_{rs^{-1}} = E_{rs^{-1}}$. Portanto, $\mathbb{K}_c(\mathcal{A})\mathbb{K}_c(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{K}_c(\mathcal{E})$, donde segue também, tomando fechos, que $\mathbb{K}_r(\mathcal{A})\mathbb{K}_r(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{K}_r(\mathcal{E})$

2. $\xi * b(r, s) = \int_G \xi(r, t)b(t, s)dt \in E_{rt^{-1}}B_{ts^{-1}} \subseteq \mathcal{E} \cap B_{rs^{-1}} = E_{rs^{-1}}$, o que prova a primeira afirmação de 2.; de novo, a segunda é uma consequência da primeira.
3. $\xi * \eta^*(r, s) = \int_G \xi(r, t)\eta(s, t)^*dt \in E_{rt^{-1}}E_{ts^{-1}} \subseteq \mathcal{A} \cap B_{rs^{-1}}$. Portanto, $\mathbb{k}_c(\mathcal{E})\mathbb{k}_c(\mathcal{E})^* \subseteq \mathbb{k}_c(\mathcal{A})$ e $\mathbb{k}_r(\mathcal{E})\mathbb{k}_r(\mathcal{E})^* \subseteq \mathbb{k}_r(\mathcal{A})$. A igualdade segue do teorema de Cohen-Hewitt e da inclusão $\mathbb{k}_r(\mathcal{A})\mathbb{k}_r(\mathcal{A})^* \subseteq \mathbb{k}_r(\mathcal{E})\mathbb{k}_r(\mathcal{E})^*$.
4. Seja $F = \text{span } \mathbb{k}_c(\mathcal{E})^*\mathbb{k}_c(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{k}_c(\mathcal{B})$. Queremos ver que o fecho de F na topologia do limite indutivo é todo $\mathbb{k}_c(\mathcal{B})$. Para isso, usaremos mais uma vez o Lema 3.14. Seja $\Theta = C_c(G) \odot C_c(G)$, subálgebra densa de $C_c(G \times G)$. Se $\varphi, \psi \in C_c(G)$, $\xi, \eta \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$, então:

$$\begin{aligned} (\varphi \odot \psi)\xi^* * \eta(r, s) &= \int_G \varphi(r)\psi(s)\xi(t, r)^*\eta(t, s)dt \\ &= \int_G ((\bar{\varphi}\xi)(t, r))^*(\psi\eta)(t, s)dt \\ &= (\bar{\varphi}\xi)^* * (\psi\eta)(r, s). \end{aligned}$$

onde $\varphi\xi(r, s) = \varphi(r)\xi(r, s)$. Como $\varphi\xi \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$, $\forall \varphi \in C_c(G)$, $\xi \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$, vemos que $\Theta F \subseteq F$.

Seja agora $a \in B_{rs^{-1}}$ tal que $a = b^*c$, com $b \in E_{tr^{-1}}$ e $c \in E_{ts^{-1}}$, para algum $t \in G$. Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E}) = C_c(\mathcal{E}_\nu)$ tais que $\xi(t, r) = b$, $\eta(t, s) = c$, de forma que $\xi(t, r)^*\eta(t, s) = b^*c = a$. Sejam $\mathcal{V}$ uma base de vizinhanças da identidade de G , e $(f_V)_{V \in \mathcal{V}}$ uma identidade aproximada de $L^1(G)$ como a considerada no Lema 6.2. Para cada $V \in \mathcal{V}$ consideremos $\eta_V^t \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$ tal que $\eta_V^t(r, s) = f_V(t^{-1}r)\eta(r, s)$. A função $G \rightarrow B_{rs^{-1}}$ tal que $u \rightarrow \xi(u, r)^*\eta(u, s)$ é contínua de suporte compacto. Portanto, por 6.1, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança V_ϵ da identidade em G tal que se $t^{-1}u \in V_\epsilon$, então tem-se que $\|\xi(u, r)^*\eta(u, s) - \xi(t, r)^*\eta(t, s)\| < \epsilon$. Assim, se $V \supseteq V_\epsilon$:

$$\begin{aligned} \|\xi^* * \eta_V^t(r, s) - a\| &= \left\| \int_G f_V(t^{-1}u)[\xi(u, r)^*\eta(u, s) - \xi(t, r)^*\eta(t, s)]du \right\| \\ &\leq \int_{tV} f_V(t^{-1}u)\|\xi(u, r)^*\eta(u, s) - \xi(t, r)^*\eta(t, s)\|du \\ &< \int_G f_V(t^{-1}u)\epsilon du \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Como por hipótese sabemos que $B_{rs^{-1}} = \overline{\text{span}\{E_{ur^{-1}}^*E_{us^{-1}} : u \in G\}}$, concluímos então que $\text{span } \mathbb{k}_c(\mathcal{E})^*\mathbb{k}_c(\mathcal{E}) \cap B_{rs^{-1}}$ é denso em $B_{rs^{-1}}$, $\forall r, s \in G$, e portanto $\text{span } \mathbb{k}_c(\mathcal{E})^*\mathbb{k}_c(\mathcal{E})$ é denso em $\mathbb{k}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo. Isto, junto com 3., prova que $\mathbb{k}_r(\mathcal{A})$ e $\mathbb{k}_r(\mathcal{B})$ são equivalentes Morita.

Sejam β a ação natural de G sobre $\mathbb{k}(\mathcal{B})$, e $k \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$, $t \in G$. Então, $\beta_t(k)|_{(r, s)} = \Delta(t)k(rt, st) \in E_{rt(st)^{-1}} = E_{sr^{-1}}$, e portanto $k \in \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$. Segue que $\beta_t(\mathbb{k}_c(\mathcal{E})) = \mathbb{k}_c(\mathcal{E})$, e portanto que $\beta_t(\mathbb{k}_r(\mathcal{E})) = \mathbb{k}_r(\mathcal{E})$. Isto prova as afirmações finais do teorema. $\square$

COROLÁRIO 7.40. *Sejam α e β ações parciais contínuas equivalentes Morita do grupo localmente compacto G , com fibrados de Fell associados $\mathcal{B}_\alpha$ e $\mathcal{B}_\beta$ respectivamente. Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ as ações naturais de G sobre $\mathbb{k}_r(\mathcal{B}_\alpha)$ e $\mathbb{k}_r(\mathcal{B}_\beta)$. Então $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são equivalentes Morita; em particular, $\mathbb{k}_r(\mathcal{B}_\alpha)$ e $\mathbb{k}_r(\mathcal{B}_\beta)$ são equivalentes Morita.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que α e β são equivalentes Morita através de certa ação parcial γ . Pela transitividade da equivalência Morita de ações parciais, podemos substituir β pela ação parcial vinculante de γ (página 138). Na demonstração da Proposição 7.11, construímos um ideal direito $\mathcal{E}$

de $\mathcal{B}_\beta$ tal que $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}_\beta$ satisfazem as hipóteses do Teorema 7.39 (com $\mathcal{B}_\alpha$ em lugar de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_\beta$ em lugar de $\mathcal{B}$), incluindo a hipótese 4. Agora o resultado decorre de aplicar 7.39. $\square$

PROPOSIÇÃO 7.41. *A ação envolvente a menos de equivalência Morita é única, a menos de equivalência Morita.*

DEMONSTRAÇÃO. Como a equivalência Morita de ações parciais é transitiva, pelo Corolário 7.40 acima basta provar que, se (β, B) é uma ação envolvente da ação parcial (α, A) e $\tilde{\alpha}$ é a ação natural sobre $\mathbb{K}_r(A)$, onde A é o fibrado de Fell associado a α , então β e $\tilde{\alpha}$ são equivalentes Morita.

Agora, sejam $\mathcal{B}$ o fibrado de Fell associado à ação envolvente β , e $\tilde{\beta}$ a ação natural de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Consideremos o ideal direito $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}$ construído na demonstração do Teorema 6.6, ou seja, $\mathcal{E} = \{(t, x) \in \mathcal{B} : x \in A, \forall t \in G\}$. Estamos então nas hipóteses do Teorema 7.39, donde segue que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são equivalentes Morita. Mas, como $\mathcal{B}$ é um fibrado saturado, temos por 7.20 que $\mathbb{K}(\mathcal{B}) = I$, e portanto $\tilde{\beta} \stackrel{M}{\sim} \beta$ por 7.38 2. e 3. Como a equivalência Morita de ações parciais é transitiva, concluímos que $\tilde{\alpha} \stackrel{M}{\sim} \beta$. $\square$

7.5. Ações envolventes e produtos cruzados por coações

Relacionamos abaixo o trabalho feito na Seção 2 com os produtos cruzados por coações. Concretamente, provamos que $\mathbb{K}(B)$ é o produto cruzado reduzido de $C_r^*(B)$ pela coação dual, e que a ação natural β sobre $\mathbb{K}(B)$ é a ação dual de G sobre $C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} G$. As seguintes são boas referências sobre coações e produtos cruzados por coações: [42], [45], [46], e [5].

Se G é um grupo localmente compacto abeliano que atua sobre uma C^* -álgebra A através de uma ação α , existe uma ação $\tilde{\alpha}$ do grupo dual $\hat{G}$ sobre o produto cruzado $A \rtimes_{\alpha} G$, e o Teorema de Takai afirma que: $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\tilde{\alpha}} \hat{G} \cong A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$, através de um isomorfismo que leva a ação bidual $\tilde{\alpha}$ sobre $A \rtimes_{\alpha} G \rtimes_{\tilde{\alpha}} \hat{G}$ na ação $\alpha \otimes \text{Ad}(\rho)$ sobre $A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ onde $\rho_t(\xi)|_r = \rho(rt)$, $\forall \xi \in L^2(G)$.

A partir do resultado de Takai, tentou-se achar versões não comutativas do mesmo teorema. O conceito de coação surge de buscar um substituto para a ação dual sobre um produto cruzado por um grupo, quando este não é abeliano ou, melhor ainda, simplesmente do fato de “dualizar” o conceito de ação. A partir do caso abeliano, e via a transformada de Fourier, descobrimos quais são as propriedades que uma tal coação deve ter. O fato das C^* -álgebras não terem em geral elemento unidade (por exemplo $C_r^*(G)$ se G não é discreto) implica certas dificuldades técnicas, e somos obrigados a considerar as seguintes C^* -álgebras, um pouco artificiais: se A e B são C^* -álgebras, definimos $\tilde{M}(A \otimes_{\min} B) := \{m \in M(A \otimes_{\min} B) : m(1 \otimes B) + (1 \otimes B)m \subseteq A \otimes_{\min} B\}$. Por exemplo, $\tilde{M}(A \otimes_{\min} C_0(G)) \cong C_b(G, A)$. A primeira coisa a ser dualizada é o produto sobre G . Seja $w_G : L^2(G \times G) \rightarrow L^2(G \times G)$ tal que $w_G(\xi)|_{(r,s)} = \xi(r, r^{-1}s)$; w_G é um operador unitário, com adjunto $w_G^*(\xi)|_{(r,s)} = \xi(r, rs)$. A multiplicação sobre G deve ser substituída por uma *comultiplicação* δ_G sobre $C_r^*(G)$, dada por $\delta_G : C_r^*(G) \rightarrow \tilde{M}(C_r^*(G) \otimes_{\min} C_r^*(G))$ tal que $\delta_G(x) = w_G(x \otimes 1)w_G^*$, $\forall x \in C_r^*(G)$ (notar que $C_r^*(G) \subseteq B(L^2(G))$ por definição).

DEFINIÇÃO 7.42. Uma coação de um grupo localmente compacto G sobre uma C^* -álgebra A é um homomorfismo injetivo $\delta : A \rightarrow \tilde{M}(A \otimes_{\min} C_r^*(G))$ tal que para toda unidade aproximada $(e_i)_{i \in I}$ de A tem-se que $\delta(e_i)$ converge estritamente a 1 em $\tilde{M}(A \otimes_{\min} C_r^*(G))$, e tal que

$$(\delta \otimes id)\delta = (id \otimes \delta_G)\delta.$$

Em particular, δ_G é uma coação de G sobre $C_r^*(G)$.

Se G é abeliano, as ações de G se correspondem bijectivamente com as coações de G , via a fórmula:

$$\left(\alpha : G \times A \longrightarrow A \right) \longmapsto \left(\delta : A \longrightarrow \tilde{M}\left(A \bigotimes_{\min} C_r^*(G)\right) \right),$$

com $\delta = (id \odot Ad(\mathfrak{F}^*))\delta'$, onde $\mathfrak{F} : L^2(G) \longrightarrow L^2(\dot{G})$ é a transformada de Fourier: $\mathfrak{F}\xi|_x = \int_G \overline{\langle t, x \rangle} \xi(t) dt$, $\xi \in L^2(G)$, e $x \in \dot{G}$; a aplicação $\delta' : A \longrightarrow \tilde{M}(A \bigotimes_{\min} C_0(\dot{G})) \cong C_b(\dot{G}, A)$ é dada por $\delta'(a)|_x = \alpha_x(a)$. Esta correspondência permite traduzir a definição de produto cruzado reduzido por uma ação para o caso de uma coação. Temos assim:

DEFINIÇÃO 7.43. Seja $\delta : A \longrightarrow \tilde{M}(A \bigotimes_{\min} C_r^*(G))$ uma coação do grupo localmente compacto G sobre a C^* -álgebra A . O produto cruzado reduzido $A \rtimes_{\delta, r} G$ de A pela coação δ é:

$$A \rtimes_{\delta, r} G := \{ \delta(a)(1 \otimes \varphi) : a \in A, \varphi \in C_0(G) \} \subseteq M\left(A \bigotimes_{\min} \mathcal{K}\right),$$

onde $\varphi \in C_0(G)$ age por multiplicação sobre $L^2(G)$.

Se δ é uma coação de G sobre A , então existe uma ação natural $\hat{\delta}$ de G sobre $A \rtimes_{\delta, r} G$. Esta ação é chamada ação dual de G sobre $A \rtimes_{\delta, r} G$, e está caracterizada pelo fato de satisfazer:

$$(19) \quad \hat{\delta}_t(\delta(a)(1 \otimes \varphi)) = \delta(a)(1 \otimes \varphi_t)$$

onde, se $\varphi \in C_0(G)$, então $\varphi_t(s) = \varphi(st)$, $\forall s \in G$.

Consideremos agora um fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ sobre o grupo localmente compacto G , e seja $\mathcal{B}_G$ o fibrado do grupo G (2.13). Temos assim o fibrado de Fell $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G$ sobre $G \times G$, cuja C^* -álgebra reduzida é naturalmente isomorfa a $C_r^*(\mathcal{B}) \bigotimes_{\min} C_r^*(G)$ pela Proposição 3.20. Também temos que $L^2(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G) \cong L^2(\mathcal{B}) \otimes L^2(G)$ (3.18). Seja $w_{\mathcal{B}} : L^2(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G) \longrightarrow L^2(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G)$ tal que $w_{\mathcal{B}}(\xi)|_{(r, s)} = \xi(r, r^{-1}s)$. Então $w_{\mathcal{B}}$ é um operador adjuntável, e de fato unitário, com adjunto $w_{\mathcal{B}}^*$ tal que $w_{\mathcal{B}}(\xi)|_{(r, s)} = \xi(r, rs)$. Podemos considerar agora a aplicação $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{B})) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G))$ tal que $x \longmapsto w_{\mathcal{B}}(x \odot 1)w_{\mathcal{B}}^*$.

DEFINIÇÃO 7.44. A restrição da aplicação acima a $C_r^*(\mathcal{B})$ é uma coação

$$\delta_{\mathcal{B}} : C_r^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \tilde{M}\left(C_r^*(\mathcal{B}) \bigotimes_{\min} C_r^*(G)\right),$$

chamada coação dual de G sobre $C_r^*(\mathcal{B})$.

Suponhamos que $f \in C_c(\mathcal{B})$, $\xi \in C_c(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{B})$, e $x \in C_c(G) \subseteq L^2(G)$. Então temos:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B}}(\Lambda_f)(\xi \otimes x)|_{(r,s)} &= w_{\mathcal{B}}(\Lambda_f \otimes 1)w_{\mathcal{B}}^*(\xi \otimes x)|_{(r,s)} \\ &= (\Lambda_f \otimes 1)w_{\mathcal{B}}^*(\xi \otimes x)|_{(r,r^{-1}s)} \\ &= \int_G (\Lambda_{f(t)} \otimes 1)w_{\mathcal{B}}^*(\xi \otimes x)|_{(t^{-1}r,r^{-1}s)} dt \\ &= \int_G (\Lambda_{f(t)} \otimes 1)(\xi \otimes x)|_{(t^{-1}r,t^{-1}s)} dt \\ &= \int_G f(t)\xi(t^{-1}r) \otimes x(t^{-1}s) dt \\ &= \int_G (\Lambda_{f(t)} \otimes \lambda_t)(\xi \otimes x)|_{(r,s)} dt, \end{aligned}$$

donde segue que δ é uma representação de $C_r^*(\mathcal{B})$ que fatoriza a representação de $C^*(\mathcal{B})$ integrada da representação de $\mathcal{B}$ dada por $b_t \mapsto \Lambda_{b_t} \otimes \lambda_t \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}) \otimes L^2(G))$. Portanto, supondo que $\pi : C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow B(H)$ é uma representação fiel, então $\delta_{\mathcal{B}}(\Lambda_f) = \pi_{\lambda}$, onde π_{λ} é a representação integrada da representação $\mathcal{B} \rightarrow B(L^2(G, H))$ tal que $b_t \mapsto \lambda_t \otimes \pi(b_t)$.

A seguir vemos que $(\beta, \mathbb{K}(\mathcal{B}))$ e $(\delta_{\mathcal{B}}, C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta_{\mathcal{B}}, r} G)$ são C^* -sistemas dinâmicos isomorfos.

PROPOSIÇÃO 7.45. *Sejam $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in G}$ um fibrado de Fell sobre o grupo localmente compacto G , δ a coação dual de G sobre $C_r^*(\mathcal{B})$, δ a ação dual sobre $C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} G$ e β a ação natural de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Então existe um isomorfismo $\sigma : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} G$ tal que $\sigma \beta_t = \delta_t \sigma$, $\forall t \in G$.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, sem perder generalidade, que $C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq B(H)$ não degeneradamente, para certo espaço de Hilbert H . Portanto, $\mathcal{B} \subseteq B(H)$ também, e $C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} G \subseteq B(L^2(G, H))$.

Por outro lado, por 7.21, a inclusão $\mathcal{B} \hookrightarrow B(H)$ define uma representação fiel $\sigma : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \rightarrow B(L^2(G, H))$ tal que, se $k \in \mathbb{K}_c(\mathcal{B})$, $x \in L^2(G, H)$, então $\sigma(k)|_r = \int_G k(r, s)x(s)ds$.

Agora, se $f \in C_c(\mathcal{B})$, $\varphi \in C_c(G) \subseteq C_0(G)$, e se $\xi \in C_c(G) \subseteq L^2(G)$, $h \in H$, temos:

$$\begin{aligned} \delta(f)(1 \otimes \varphi)(\xi \otimes h)|_r &= \int_G \lambda_s(\varphi\xi)(r)f(s)hds \\ &= \int_G \varphi(s^{-1}r)\xi(s^{-1}r)f(s)hds \\ &= \int_G \varphi(t^{-1})\xi(t^{-1})f(rt)hdt \quad (\text{onde se fez } t = r^{-1}s) \\ &= \int_G \Delta(s)^{-1}\varphi(s)\xi(s)f(rs^{-1})hds \quad (\text{onde se fez } s = t^{-1}) \\ &= \sigma(k_{\varphi, f})(\xi \otimes h)|_r, \end{aligned}$$

onde $k_{\varphi, f}(r, s) = \Delta(s)^{-1}\varphi(s)f(rs^{-1})$. Portanto, $\sigma(k_{\varphi, f}) = \delta(f)(1 \otimes \varphi)$, o que mostra que $\sigma(\mathbb{K}(\mathcal{B})) \supseteq C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} G$. Para provar que a inclusão acima é de fato uma igualdade, basta mostrar que $F := \text{span}\{k_{\varphi, f} : \varphi \in C_c(G), f \in C_c(\mathcal{B})\}$ é denso em $\mathbb{K}_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo. Para isto usaremos o Lema 3.14. Dadas $\phi, \psi \in C_c(G)$, seja $\phi \diamond \psi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi \diamond \psi(r, s) = \phi(s)\psi(rs^{-1})$. É claro que $\phi \diamond \psi$ é contínua e de suporte compacto. Seja $\Theta := \text{span } \psi_1 \diamond \psi_2 : \psi_1, \psi_2 \in C_c(G)$. Então Θ é denso em $C_0(G \times G)$ pelo teorema de Stone–Weierstrass; em particular, Θ é um subespaço denso

em $C_c(G \times G)$ na topologia do limite indutivo. Vejamos que $\Theta F \subseteq F$: se $\psi_1 \diamond \psi_2 \in \Theta$, $k_{\varphi, f} \in F$, temos:

$$(\psi_1 \diamond \psi_2)k_{\varphi, f}(r, s) = \Delta(s)^{-1}\psi_1(s)\psi_2(rs^{-1})\varphi(s)f(rs^{-1}) = k_{\psi_1\varphi, \psi_2 f}(r, s).$$

Por último, é claro que $F(r, s) = B_{rs^{-1}}$, $\forall r, s \in G$. Isto mostra que F é denso em $\mathbb{K}(B)$, e portanto que $\sigma : \mathbb{K}(B) \longrightarrow C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} G$ é um isomorfismo. Por último, se $t \in G$ temos, por um lado:

$$\sigma^{-1}(\delta_t(\delta(f)(1 \otimes \varphi)) = k_{\varphi_t, f}.$$

Por outro lado:

$$\beta_t(k_{\varphi, f})|_{(r, s)} = \Delta(t)k_{\varphi, f}(rt, st) = \Delta(t)\Delta(st)^{-1}\varphi(st)f(rs^{-1}) = \Delta(s)^{-1}\varphi_t(s)f(rs^{-1}) = k_{\varphi_t, f}|_{(r, s)},$$

e portanto $\sigma\beta_t(k_{\varphi, f}) = \delta_t\sigma(k_{\varphi, f})$, e como F é denso em $\mathbb{K}(B)$, concluímos que $\sigma\beta_t = \delta_t\sigma$. $\square$

OBSERVAÇÃO 7.46. Como $\mathbb{K}(B)$ é isomorfa a $C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} G$, podemos aplicar os Corolários 7.32 e 7.33 ao produto cruzado $C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} G$. Em particular, temos que $C_r^*(B) \rtimes_{\delta, r} \hat{G}$ é nuclear, liminal, ou postliminal, se e somente se B_ϵ é nuclear, liminal, ou postliminal respectivamente. Isto já era conhecido para grupos discretos ([53] e [49]). Não temos notícia de nenhum resultado anterior ao nosso no caso contínuo.

Também obtemos que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão nas condições do Teorema 7.39, então $C_r^*(\mathcal{A}) \rtimes_{\delta, r} \hat{G}$ é uma sub- C^* -álgebra hereditária de $C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} \hat{G}$; se também a hipótese do ponto 4. de 7.39 é satisfeita, então $(C_r^*(\mathcal{A}) \rtimes_{\delta, r} \hat{G}, \delta)$ e $(C_r^*(\mathcal{B}) \rtimes_{\delta, r} \hat{G}, \delta)$ são sistemas dinâmicos equivalentes Morita. Em particular, se (α, A) e (β, B) são ações parciais equivalentes Morita, então $(A \rtimes_{\alpha, r} G \rtimes_{\delta, r} \hat{G}, \delta)$ e $(B \rtimes_{\beta, r} G \rtimes_{\delta, r} \hat{G}, \delta)$ são equivalentes Morita.

7.6. Algumas aplicações

No que segue, α é uma ação parcial contínua de um grupo localmente compacto sobre uma C^* -álgebra A , β é uma ação sobre a C^* -álgebra B , e $I \triangleleft B$ é tal que $[\beta(I)] = B$, e α é equivalente Morita com $\beta|_I$; em outras palavras, β é uma ação envolvente de α a menos de equivalência Morita. Em particular, B poderia ser $\mathbb{K}_r(B_\alpha)$, e β poderia ser $\tilde{\alpha}$, a ação natural de G sobre $\mathbb{K}_r(B_\alpha)$.

PROPOSIÇÃO 7.47. *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade ideal. Então A tem a propriedade $\mathcal{P}$ se e somente se B tem a propriedade $\mathcal{P}$. Em particular, B é nuclear, liminal, postliminal, se e somente se A é respectivamente nuclear, liminal, postliminal.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{P}$ é invariante por equivalência Morita, A tem $\mathcal{P}$ se e somente se I tem a propriedade $\mathcal{P}$. Agora, B tem um ideal máximo que tem a propriedade $\mathcal{P}$. Este ideal deve conter todos os ideais $\beta_t(I)$, pois todos eles, sendo isomorfos a I , têm a propriedade $\mathcal{P}$. Mas, o menor ideal que contém todos os ideais $\beta_t(I)$ é a própria C^* -álgebra B . $\square$

PROPOSIÇÃO 7.48. *Suponhamos que $\mathcal{C}$ é uma classe de C^* -álgebras fechada por ideais, extensões, quocientes, limites indutivos e equivalência Morita. Então $A \in \mathcal{C} \iff B \in \mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $A \overset{M}{\sim} I$, temos que $A \in \mathcal{C} \iff I \in \mathcal{C}$. Agora, como β é a ação envolvente de $\beta|_I$, por 5.19 temos que $I \in \mathcal{C} \iff B \in \mathcal{C}$. Assim, $A \in \mathcal{C} \iff B \in \mathcal{C}$. $\square$

Lembrar que se γ é uma ação parcial sobre uma C^* -álgebra C , então ela define ações parciais $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$ sobre $\hat{C}$ e $\text{Prim}(C)$ respectivamente (5.14 e 5.13), e que se γ é uma ação global contínua, então $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$ são ações contínuas também (5.12).

COROLÁRIO 7.49. *Tem-se que (β, B) é a ação envolvente de (α, A) , e $(\tilde{\beta}, \text{Prim}(B))$ é a ação envolvente de $(\tilde{\alpha}, \text{Prim}(A))$. Em particular, α e $\tilde{\alpha}$ são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO. $\beta|_I$ tem ação envolvente β , e portanto é contínua. Como, α e $\beta|_I$ são equivalentes Morita, a Proposição 7.5 implica que $\widehat{\beta|_I}$ e $\hat{\alpha}$ são ações parciais isomorfas através de um homeomorfismo, e portanto α é contínua e tem ação envolvente (β, B) . O mesmo argumento prova que $(\tilde{\beta}, \text{Prim}(B))$ é a ação envolvente de $\tilde{\alpha}$. $\square$

COROLÁRIO 7.50. *Se $\text{Prim}(A)$ é compacto e, existe um subgrupo aberto H de G tal que a restrição de α a H é uma ação global. Se G é conexo, α é uma ação global. Em particular, isto vale se A tem unidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\text{Prim}(B)$ é homeomorfo a $\text{Prim}(A)$, que é compacto, e β é uma ação envolvente de $\beta|_I$, o Corolário 5.18 mostra que $\beta|_I$ é uma ação global; como α e $\beta|_I$ são equivalentes Morita, α também deve ser uma ação global (7.7). $\square$

Parte III

Produtos Cruzados Parciais e C^* -álgebras de Grupóides

Introdução à Parte III

Nesta última parte consideraremos brevemente a relação entre as ações parciais contínuas sobre espaços topológicos e os grupóides topológicos, e também entre as suas respectivas C^* -álgebras associadas. Dada uma ação parcial contínua α , do grupo localmente compacto G sobre o espaço topológico localmente compacto de Hausdorff X , veremos que α induz uma ação parcial contínua σ de G sobre $C_0(X)$. Veremos também que α tem naturalmente associado um grupóide localmente compacto $\mathcal{G}_\alpha$, com um sistema de Haar à esquerda canônico. Provaremos então que $C_0(X) \rtimes_\sigma G = C^*(\mathcal{G}_\alpha)$.

Os grupóides, estruturas mais gerais que os grupos, foram introduzidos em meados da primeira metade deste século para estudar formas quadráticas, e mais tarde, já com estruturas topológicas ou diferenciais, foram utilizados como ferramentas úteis em geometria, topologia diferencial, geometria algébrica, análise, e topologia algébrica. Aplicações importantes dos grupóides, bem atuais, incluem a geometria diferencial e a geometria diferencial não comutativa de Connes. No primeiro caso, vale a pena ler o artigo expositivo [66] de A. Weinstein, que contém também exemplos relativos a outras áreas. No segundo caso, a referência fundamental é [15]. Neste livro, Connes usa os grupóides para estudar unificadamente as álgebras de operadores, as folhações e a teoria do índice.

Em 1980 foi publicada a monografia de Renault sobre C^* -álgebras de grupóides ([58]), que continua sendo hoje a referência mais importante sobre este assunto. Os principais exemplos de grupóides considerados nesta monografia são os grupóides associados a ações contínuas sobre espaços topológicos, os grupóides aproximadamente finitos, e os grupóides de Cuntz. As C^* -álgebras dos primeiros são os produtos cruzados correspondentes às ações; as C^* -álgebras dos segundos são as C^* -álgebras aproximadamente finitas, e dos terceiros as C^* -álgebras de Cuntz.

Nesta parte, generalizamos a construção do grupóide correspondente a uma ação global ao caso de uma ação parcial. Como as C^* -álgebras de Cuntz e as C^* -álgebras aproximadamente finitas são produtos cruzados por ações parciais ([25], [31]), da nossa construção segue que temos grupóides cujas C^* -álgebras são, respectivamente, as álgebras de Cuntz e as álgebras aproximadamente finitas. Uma tarefa que continuaria naturalmente o presente trabalho, seria comparar os grupóides construídos por Renault com os que decorrem da nossa construção. De fato, já sabemos que os grupóides aproximadamente finitos de Renault são isomorfos aos grupóides associados às ações parciais que definem as C^* -álgebras aproximadamente finitas (segundo [25]). Não incluímos este resultado neste trabalho.

Além dos exemplos mencionados, segue do Teorema 8.7 que outras C^* -álgebras conhecidas são C^* -álgebras de grupóides: as álgebras de Bunce–Deddens (devido a [24]), as álgebras de Cuntz–Krieger para matrizes infinitas (por [31]), as C^* -álgebras parciais de grupos discretos (por [26]), e de grupos discretos com relações (por [32]).

A Parte III é a menos desenvolvida da tese, e a consideramos apenas como o início de uma interação, esperamos que frutífera, entre as teorias de ações parciais e de grupóides.

CAPÍTULO 8

Grupóide Associado a uma Ação Parcial

Mostraremos, no presente capítulo, que o produto cruzado de uma C^* -álgebra comutativa por uma ação parcial contínua de um grupo localmente compacto, pode ser obtido como a C^* -álgebra seccional de um grupóide que se associa naturalmente à ação parcial do grupo sobre o espectro da álgebra pela ação parcial dada.

Na primeira seção estudamos a relação entre famílias $\{D_t\}_{t \in G}$ de ideais de $C_0(X)$ e certos subconjuntos abertos de $G \times X$, e vemos que σ é uma ação parcial contínua sobre $C_0(X)$ se e somente se σ é uma ação parcial contínua de G sobre X , onde σ é a ação parcial fornecida por 5.14.

Na segunda seção construímos o grupóide associado a uma ação parcial contínua sobre um espaço topológico localmente compacto, e na terceira apresentamos um sistema de Haar à esquerda para o grupóide.

Por último, na quarta seção demonstramos o resultado principal anunciado no primeiro parágrafo.

8.1. Ações parciais sobre X e ações parciais sobre $C_0(X)$

Nesta seção inicial, mostramos que existe uma bijeção natural entre as famílias contínuas de ideais em $C_0(X)$, indexadas num grupo localmente compacto G , e certos subconjuntos abertos de $G \times X$. Também vemos que uma ação parcial σ sobre $C_0(X)$ é contínua se e somente se σ é uma ação parcial contínua sobre X , onde σ é a ação parcial fornecida por 5.14. Isto justifica a noção de ação parcial contínua introduzida no Capítulo 4.

Sejam X um espaço topológico localmente compacto, e $\alpha = (\{\alpha_t\}_{t \in G}, \{X_t\}_{t \in G})$ tal que cada X_t é um aberto de X , e $\alpha_t : X_{t^{-1}} \rightarrow X_t$ é um homeomorfismo, $\forall t$. Sejam $D = \{(t, x) \in G \times X : t \in G, x \in X_t\}$, $D^{-1} = \{(t, x) \in G \times X : t \in G, x \in X_{t^{-1}}\}$, e $\alpha : D^{-1} \rightarrow D$ tal que $\alpha(t, x) = (t, \alpha_t(x))$. Sobre D^{-1} e D consideramos a topologia relativa herdada da topologia produto de $G \times X$.

Seja agora $A = C_0(X)$. A partir de α , construímos a família $\sigma = (\{\sigma_t\}_{t \in G}, \{D_t\}_{t \in G})$, onde $D_t = C_0(X_t)$, e $\sigma : D_{t^{-1}} \rightarrow D_t$ está dado por $\sigma(f) = f\alpha_{t^{-1}}$, $\forall f \in D_{t^{-1}}$. Sejam, também, $B = \{(t, f) \in G \times A : t \in G, f \in D_t\}$, $B^{-1} = \{(t, f) \in G \times A : t \in G, f \in D_{t^{-1}}\}$, e $\sigma : B^{-1} \rightarrow B$ tal que $\sigma(t, f) = (t, \sigma_t(f))$. Sobre B^{-1} e B consideramos as topologias relativas herdadas da topologia produto sobre $G \times A$.

PROPOSIÇÃO 8.1. *Sejam α e σ como acima, e consideremos os seguintes subespaços de $C_0(G, A)$: $C_0(B) = \{f \in C_0(G, A) : f(t) \in D_t, \forall t \in G\}$, e $C_0(B^{-1}) = \{f \in C_0(G, A) : f(t) \in D_{t^{-1}}, \forall t \in G\}$. Então temos:*

1. $C_0(B)$ e $C_0(B^{-1})$ são ideais de $C_0(G, A)$.
2. As condições seguintes são equivalentes:
 - (a) A família $\{D_t\}_{t \in G}$ é contínua.
 - (b) B é um fibrado de Banach.
 - (c) Para todo $t \in G$ tem-se que $D_t = \{a(t) : a \in C_0(B)\}$.
 - (d) O espectro de $C_0(B)$ é igual a D .
 - (e) D é aberto.

DEMONSTRAÇÃO. Como cada D_t é um ideal de A , é claro que B e B^{-1} são ideais de $C_0(G, A)$. As equivalências entre 2.(a), 2.(b) e 2.(c) seguem de 3.2 e 3.3 de [27].

(c) $\implies$ (d) Como $C_0(B)$ é um ideal de $C_0(G, A) \cong C_0(G \times X)$, $\widehat{C_0(B)}$ é o aberto de $G \times X$ formado pelos pontos $(t, x) \in G \times X$ tais que existe $f \in C_0(B)$ tal que $f(t)|_x \neq 0$. Suponhamos que $(t, x) \in D$. Então existe $d \in D_t$ tal que $d(x) \neq 0$. Como B é um fibrado de Banach sobre G , localmente compacto, existe uma seção contínua $F : G \rightarrow B$ tal que $F(t) = (t, d)$. Seja $f : G \rightarrow A$ tal que $F(s) = (s, f(s))$. Então f é contínua, e $f \in C_0(B)$. Como $f(t)|_x = d(x) \neq 0$, vemos que

$(t, x) \in \widehat{C_0(\mathcal{B})}$, donde segue que $D \subseteq \widehat{C_0(\mathcal{B})}$. Suponhamos agora que $(t, x) \notin D$. Então $d(x) = 0$. $\forall d \in D_t$, donde segue que $f(t)|_x = 0$, $\forall f \in C_0(\mathcal{B})$. Assim, concluimos que $\widehat{C_0(\mathcal{B})} = D$.

(d) $\Rightarrow$ (e) É claro, porque $\widehat{C_0(\mathcal{B})}$ é um aberto de $G \times X$.

(e) $\Rightarrow$ (a) Se V é um aberto de A , definamos $G_V = \{s \in G : V \cap D_s \neq \emptyset\}$. Queremos ver que G_V é aberto, para todo V aberto em A . Se (V_i) é uma coleção de abertos em A cuja união é V , então é claro que $G_V = \bigcup_i G_{V_i}$. Portanto, basta provar que G_U é aberto para toda bola aberta U em A . Sejam $a \in A$, $\epsilon > 0$, e $U = B(a, \epsilon)$. Se G_U é vazio, não há nada a provar. Suponhamos, então, que existe $t \in G_U$, e seja $d \in U \cap D_t$. Existe um compacto $K \subseteq X_t$, tal que, $\forall y \notin K$, tem-se que:

$$(20) \quad |d(y)| < \epsilon - \|d - a\|$$

Por outro lado, existe uma vizinhança compacta V de t , tal que $V \times K \subseteq D$: como D é aberto, para cada $x \in K$, existem uma vizinhança U_x de x e uma vizinhança compacta V_x de t tais que $V_x \times U_x \subseteq D$; como K é compacto, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$, e portanto basta tomar $V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$. Agora, como $V \times K$ é um compacto incluído no aberto D , existe uma função contínua $g : G \times X \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$(21) \quad g(s, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (s, y) \in V \times K \\ 0 & \text{se } (s, y) \notin D \end{cases}$$

Seja agora $f : G \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(s, y) = d(y)g(s, y)$, e para cada $s \in G$ consideremos $d_s : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $d_s(y) = f(s, y)$. Como $\text{supp}(g) \subseteq D$, temos que $\text{supp}(d_s) \subseteq X_s$, $\forall s \in G$, e portanto $d_s \in D_s$, $\forall s \in G$.

Por outro lado, se $s \in V$:

$$|d_s(y) - d(y)| = |d(y)g(s, y) - d(y)| = |d(y)| (1 - g(s, y)) < \epsilon - \|d - a\|,$$

onde a última desigualdade se deve ao fato de que, se $y \in K$, então $g(s, y) = 1$ por (21), enquanto que, se $y \notin K$, $d(y) < \epsilon - \|d - a\|$ por (20). Segue então que:

$$\|d_s - a\| \leq \|d_s - d\| + \|d - a\| < \epsilon.$$

Assim, $d_s \in D_s \cap B(a, \epsilon)$, $\forall s \in V$, e portanto $t \in V \subseteq G_U$, donde segue que G_U é aberto. $\square$

OBSERVAÇÃO 8.2. Como a inversão no grupo G é contínua, é claro que a família $\{D_t\}_{t \in G}$ é contínua se e somente se a família $\{D_{t^{-1}}\}_{t \in G}$ é contínua, donde segue que as condições equivalentes enumeradas em 8.1 são também equivalentes às três seguintes: (f) a família $\{D_{t^{-1}}\}_{t \in G}$ é contínua; (g) $\mathcal{B}^{-1}$ é um fibrado de Banach. (h) O espectro de $C_0(\mathcal{B}^{-1})$ é igual a D^{-1} ; (i) D^{-1} é aberto.

PROPOSIÇÃO 8.3. Nas condições de 8.1, temos:

1. Se a família $\{D_t\}_{t \in G}$ é contínua, as três propriedades abaixo são equivalentes:
 - (a) $\sigma : \mathcal{B}^{-1} \rightarrow \mathcal{B}$ é um isomorfismo de fibrados de Banach.
 - (b) $\sigma : C_0(\mathcal{B}^{-1}) \rightarrow C_0(\mathcal{B})$ tal que $\sigma(d)|_t = \sigma(d(t))$ é um isomorfismo de C^* -álgebras.
 - (c) $\alpha : D^{-1} \rightarrow D$ é um homeomorfismo.
2. σ é uma ação parcial contínua sobre A se e somente se α é uma ação parcial contínua sobre X .

DEMONSTRAÇÃO. Que 1.(a) implica 1.(b) é claro, porque $C_0(\mathcal{B})$ e $C_0(\mathcal{B}^{-1})$ se identificam naturalmente com as C^* -álgebras seccionais de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^{-1}$ respectivamente. Para ver que 1.(b) implica 1.(c), notemos que, como $\sigma : C_0(\mathcal{B}^{-1}) \rightarrow C_0(\mathcal{B})$ é um isomorfismo, existe um único homeomorfismo

$\hat{\sigma} : \widehat{C_0(\mathcal{B}^{-1})} \rightarrow \widehat{C_0(\mathcal{B})}$ tal que $\sigma(f) = f\hat{\sigma}^{-1}$, $\forall f \in C_0(\mathcal{B}^{-1})$. Pela própria definição de σ , temos que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C_0(\mathcal{B}^{-1})} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \widehat{C_0(\mathcal{B})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{-1} & \xrightarrow{\alpha} & D \end{array}$$

onde as homeomorfismos verticais são os obtidos através das identificações naturais dos espectros $\widehat{C_0(\mathcal{B}^{-1})}$ e $\widehat{C_0(\mathcal{B})}$ com D^{-1} e D respectivamente, segundo 8.1 e 8.2. Portanto, α é um homeomorfismo.

1.(c) $\Rightarrow$ 1.(a) Temos que ver que se $(t_i, d_i) \rightarrow (t, d)$ em $\mathcal{B}^{-1}$, então $(t_i, \sigma_{t_i}(d_i)) \rightarrow (t, \sigma_t(d))$. Como $t_i \rightarrow t$, isto é equivalente a mostrar que $\sigma_{t_i}(d_i) \rightarrow \sigma_t(d)$ uniformemente sobre X , sabendo que $d_i \rightarrow d$ uniformemente sobre X .

Como $d \in C_0(X_{t^{-1}})$ e $\alpha_{t^{-1}} : X_t \rightarrow X_{t^{-1}}$ é um homeomorfismo, e como $d_i \rightarrow d$ uniformemente sobre X , dado $\epsilon > 0$ existem $K \subseteq X_t$ e i_0 tal que $\forall i \geq i_0$ e $\forall y \notin K$ tem-se que:

$$(22) \quad \max\{|d(y)|, |d_i(y)|\} < \epsilon/2$$

Como já vimos na demonstração da Proposição 8.1, existe uma vizinhança compacta V de t tal que $V \times K \subseteq D$. Agora, a função $d\alpha^{-1}$ é contínua sobre $V \times K$, e portanto, usando o Lema 7.37, a função $V \rightarrow C(K)$ tal que $s \rightarrow d_s$ é contínua, onde $d_s(x) = d(\alpha^{-1}(x))$, $\forall x \in K$.

Seja $x \in X$. Se $x \notin K$, e $i \geq i_0$, por 22 temos:

$$|\sigma_{t_i}(d_i)(x) - \sigma_t(d)(x)| = |d_i(\alpha_{t_i^{-1}}(x)) - d(\alpha_{t^{-1}}(x))| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Como $d_s \rightarrow d_t$ em $C(K)$ quando $s \rightarrow t$, existe i_1 tal que $\|d_t - d_i\| < \epsilon/2$, $\forall i \geq i_1$. Por outro lado, como $d_i \rightarrow d$, existe i_2 tal que $\|d_i - d\| < \epsilon/2$, $\forall i \geq i_2$. Então, se $i \geq i_1, i_2$ e $x \in K$:

$$\begin{aligned} |\sigma_{t_i}(d_i)(x) - \sigma_t(d)(x)| &= |d_i(\alpha_{t_i^{-1}}(x)) - d(\alpha_{t^{-1}}(x))| \\ &\leq |d_i(\alpha_{t_i^{-1}}(x)) - d(\alpha_{t_i^{-1}}(x))| + |d(\alpha_{t_i^{-1}}(x)) - d(\alpha_{t^{-1}}(x))| \\ &\leq \|d_i - d\| + |d_t(x) - d_t(x)| \\ &\leq \epsilon/2 + \|d_t - d_i\| < \epsilon \end{aligned}$$

Segue que, se $i \geq i_0, i_1, i_2$, então $\|\sigma_{t_i}(d_i) - \sigma_t(d)\| < \epsilon$.

Para provar 2., é necessário provar que σ é uma ação parcial se e somente se α é uma ação parcial. Se σ é uma ação parcial, por 5.14 tem-se que $\hat{\sigma}$ é uma ação parcial. Como, pela definição de σ , $\hat{\sigma} = \alpha$, vemos que α é uma ação parcial. Inversamente, suponhamos que α é uma ação parcial. Como $X_e = X$, temos que $D_e = A$. Suponhamos que $d \in D_{s^{-1}}$ é tal que $\sigma_s(d) \in D_{t^{-1}}$, de forma que podemos calcular $\sigma_t(\sigma_s(d))$. Significa que podemos fazer as composições $d\alpha_{s^{-1}}\alpha_{t^{-1}}$. Como α_{ts} é uma extensão de $\alpha_t\alpha_s$, temos que $\alpha_{ts^{-1}}(x) = \alpha_{s^{-1}}\alpha_{t^{-1}}(x)$, para todo x onde possa fazer o segundo cálculo. Portanto, $d\alpha_{s^{-1}}\alpha_{t^{-1}} = d\alpha_{ts^{-1}}$, donde segue que $\sigma_t(\sigma_s(d)) = \sigma_{ts}(d)$, e portanto σ_{ts} é uma extensão de $\sigma_t\sigma_s$. Logo, σ é uma ação parcial. $\square$

8.2. Grupóide associado a uma ação parcial

Podemos associar um grupóide a uma ação parcial sobre um espaço topológico. Pensado como categoria, este grupóide tem X como conjunto de objetos, e os morfismos de y a x correspondem aos elementos t de G tais que $\alpha_t(y) = x$. Desta seção em diante usaremos a letra α para denotar uma ação parcial como também à função $\alpha : D^{-1} \rightarrow X$ tal que $\alpha(t, x) = \alpha_t(x)$; notar que o significado de α na seção anterior era formalmente diferente.

A definição mais curta de grupóide é a seguinte: um *grupóide* é uma categoria pequena com inversos. Que a categoria seja pequena significa que a classe de objetos é um conjunto; que seja uma categoria com inversos significa que todo morfismo é um isomorfismo. Assim, por exemplo, um grupo é um grupóide com apenas um objeto. Embora seja esta a definição mais simples e, achamos, a mais sugestiva, não é a definição mais comum, especialmente no caso em que se considere uma topologia sobre o grupóide. A definição de grupóide em [58] (I-1.1), é a seguinte: um grupóide é um conjunto $\mathcal{G}$ junto com um produto $(x, y) \mapsto xy$ definido sobre um subconjunto $\mathcal{G}^{(2)} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, chamado conjunto dos pares componíveis, e uma inversão $x \mapsto x^{-1}$, que é uma bijeção em $\mathcal{G}$, e tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $(x^{-1})^{-1} = x, \forall x \in \mathcal{G}$.
2. Se $(x, y), (y, z) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $(xy, z), (x, yz) \in \mathcal{G}^{(2)}$, e $(xy)z = x(yz)$.
3. $(x^{-1}, x) \in \mathcal{G}^{(2)}, \forall x \in \mathcal{G}$, e se $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $x^{-1}(xy) = y$.
4. $(x, x^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}, \forall x \in \mathcal{G}$, e se $(z, x) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $(zx)x^{-1} = z$.

Naturalmente, as duas definições dadas são equivalentes. Se $x \in \mathcal{G}$, o *domínio* de x é $x^{-1}x$, e o “*range*” é xx^{-1} . Temos definidas assim duas aplicações $d, r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, com a mesma imagem, $\mathcal{G}^{(0)}$, chamada espaço das unidades de $\mathcal{G}$. No contexto de categorias, o espaço das unidades não é outra coisa que o conjunto dos objetos.

O grupóide $\mathcal{G}$ é um *grupóide localmente compacto* se tem uma topologia localmente compacta de Hausdorff, compatível com a estrutura algébrica de $\mathcal{G}$, ou seja:

1. A inversão $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é contínua.
2. O produto $\mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ é contínuo, onde consideramos sobre $\mathcal{G}^{(2)}$ a topologia herdada da topologia produto sobre $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Formalmente, definimos a categoria $\mathcal{G}_\alpha$ assim: a classe de objetos da categoria é o conjunto X . Se $y, x \in X$, definimos:

$$\text{Mor}(y, x) = \{(x, t, y) : t \in A_y, \text{ e } x = \alpha_t(y)\},$$

com a lei de composição seguinte:

$$\text{Mor}(y, x) \times \text{Mor}(z, y) \rightarrow \text{Mor}(z, x)$$

$$((x, r, y), (y, s, z)) \mapsto (x, rs, z).$$

Lembrar que $A_y = \{t \in G : (t, y) \in D^{-1}\}$. Portanto, como α_{rs} é uma extensão de $\alpha_r \alpha_s$, temos que se $s \in A_z$ e $r \in A_{\alpha_s(z)}$, então $rs \in A_z$, e portanto $(x, rs, z) \in \text{Mor}(z, x)$. Sobre cada x temos o morfismo identidade (x, e, x) , que podemos identificar com x . Com efeito: $(x, e, x)(x, t, y) = (x, t, y)$, e $(y, t, x)(x, e, x) = (y, t, x)$. Todo morfismo (x, t, y) é inversível, com inverso $(x, t, y)^{-1} = (y, t^{-1}, x)$, como se verifica imediatamente. Por outro lado, a associatividade da composição de morfismos segue da associatividade da multiplicação no grupo G . Em conclusão, $\mathcal{G}_\alpha$ é uma categoria pequena com inversos, ou seja, um grupóide. A menos que outra ação parcial esteja envolvida, usaremos a notação $\mathcal{G}$ em lugar de $\mathcal{G}_\alpha$. Através da inclusão $\iota : X \rightarrow \mathcal{G}_\alpha$ tal que $x \mapsto (x, e, x)$, consideraremos $X \subseteq \mathcal{G}$. Temos as funções $r : \mathcal{G}_\alpha \rightarrow X$ e $d : \mathcal{G}_\alpha \rightarrow X$ tais que $r(r, t, y) = x$, e $d(x, t, y) = y$. Temos que $r\iota = \text{id}_X = d\iota$.

Notar que $\mathcal{G}$ é o gráfico da ação parcial α , escrito de uma forma não convencional: em lugar de escrever a imagem de (t, x) à direita de (t, x) , a estamos escrevendo à esquerda, e por isso $\mathcal{G}$ está incluído em $X \times G \times X$, e não em $G \times X \times X$. A razão da nossa escolha é que a multiplicação e a inversão no grupóide são facilmente calculáveis desta maneira.

Sobre $\mathcal{G}$ consideramos a topologia herdada da topologia produto sobre $X \times G \times X$. Segue da continuidade de α , que as operações de inversão e produto sobre $\mathcal{G}$ são contínuas.

Temos homeomorfismos $p : \mathcal{G} \rightarrow D$ e $q : \mathcal{G} \rightarrow D^{-1}$, com $p(x, t, y) = (t, x)$, e $q(x, t, y) = (t, y)$. De fato, se bem para manipular a multiplicação e a inversão em $\mathcal{G}$ é melhor pensar em $\mathcal{G}$ como foi

definido, na hora de pensar na C^* -álgebra do grupóide $\mathcal{G}$ será melhor identificar $\mathcal{G}$ com D através de p . Assim, a inversão sobre D transladada de $\mathcal{G}$ fica: $(t, x)^{-1} = (t^{-1}, \alpha_{t^{-1}}(x))$, e se $(r, x), (s, y) \in D$, então $(r, x)(s, y)$ existe se e somente se $\alpha_{r^{-1}}(x) = y$, e neste caso o produto é igual a (rs, x) . Por último, ι, r e d ficam assim: $\iota(x) = (e, x)$, $r(t, x) = x$, e $d(t, x) = \alpha_{t^{-1}}(x)$. Na seguinte seção veremos que a vantagem de transladar a estrutura algébrica de $\mathcal{G}$ a D é que assim conseguimos um sistema de Haar natural para o grupóide.

8.3. Sistema de Haar sobre $\mathcal{G}$

O nosso próximo objetivo é achar um sistema de Haar esquerdo sobre $\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ está identificado com D através da projeção p .

Lembrar que um sistema de Haar à esquerda sobre um grupóide localmente compacto $\mathcal{G}$ ([58], I-2.2) é uma família de medidas $\{\lambda^x : x \in \mathcal{G}^{(0)}\}$ sobre $\mathcal{G}$, tais que:

1. $\text{sup}(\lambda^x) = \mathcal{G}^x = \{y \in \mathcal{G} : r(y) = x\}$
2. Continuidade: se $f \in C_c(\mathcal{G})$, a transformação $\nu_f : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\nu_f(x) = \int_{\mathcal{G}} f(y) d\lambda^x(y)$ é contínua
3. Invariância à esquerda: para toda $f \in C_c(\mathcal{G})$ e para todo $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, tem-se: $\int_{\mathcal{G}} f(xy) d\lambda^{d(x)}(y) = \int_{\mathcal{G}} f(y) d\lambda^{r(x)}(y)$.

Para definir o sistema de Haar que estamos procurando, dado $x \in X$, consideremos a medida λ^x definida nos borelianos de $\mathcal{G}$ como:

$$\lambda^x(B) = \lambda \times \delta_x(B),$$

onde B é qualquer boreliano, λ é a medida de Haar sobre G , e δ_x é a medida de Dirac concentrada no ponto x . Em outras palavras, λ^x é a restrição a D do produto da medida de Haar com a medida concentrada em x . $\lambda^x(B)$ mede o “volume” de morfismos em B que chegam ao objeto x . Notar que, como $\mathcal{G}$ é aberto em $G \times X$, $B \subseteq \mathcal{G}$ é um boreliano de $\mathcal{G}$ se e somente se é um boreliano de $G \times X$.

Sendo $\mathcal{G}$ aberto em $G \times X$, suporemos daqui em diante que toda $f \in C_c(\mathcal{G})$ está definida sobre todo $G \times X$, pondo $f(s, y) = 0$ se $(s, y) \notin \mathcal{G}$.

PROPOSIÇÃO 8.4. *O conjunto $\Lambda = \{\lambda^x : x \in X\}$ é um sistema de Haar sobre $\mathcal{G}$.*

DEMONSTRAÇÃO. • $\text{sup}\lambda^x = \mathcal{G}^x$

Por um lado temos:

$$\mathcal{G}^x = \{(t, y) : r(t, y) = x\} = A_x^{-1} \times \{x\}.$$

Por outro lado, sejam A e B abertos não vazios de G e de X respectivamente, tais que $A \times B \subseteq \mathcal{G}$ (lembrar que $\mathcal{G}$ é aberto em $G \times X$). Temos:

$$\lambda^x(A \times B) = \lambda(A)\delta_x(B) = \chi_B(x)\lambda(A),$$

onde χ_S indica a função característica do conjunto S . Como $\lambda(A) > 0$, então $\lambda^x(A \times B) \neq 0$ se e somente se $x \in B$. Portanto o suporte de λ^x é igual a $\mathcal{G} \cap (G \times \{x\}) = A_x^{-1} \times \{x\}$.

• Continuidade

Seja $f \in C_c(\mathcal{G})$, e seja $\nu_f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\nu_f(x) = \int_{\mathcal{G}^x} f(z) d\lambda^x(z).$$

Calculando:

$$\begin{aligned}\nu_f(x) &= \int_{A_x^{-1} \times \{x\}} f(s, y) d\lambda^x(s, y) \\ &= \int_{\{x\}} \int_{A_x^{-1}} f(s, y) d\lambda(s) d\delta_x(y) \\ &= \int_G \chi_{A_x^{-1}}(s) f(s, x) d\lambda(s).\end{aligned}$$

Se $K = p_1(\text{supp}(f))$, onde $p_1 : G \times X \rightarrow G$ é a projeção na primeira coordenada. Então é claro que:

$$\nu_f(x) = \int_K f(s, x) d\lambda(s).$$

Se $x \in X$, a função $f_x : K \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_x(s) = f(s, x)$ é contínua, e $\xi : X \rightarrow C(K)$ tal que $\xi(x) = f_x$, é contínua pelo lema 7.37. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lambda_K : C(K) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \int_K g(s) \lambda(s)\end{aligned}$$

é um funcional linear contínuo. Como $\nu_f = \lambda_K \circ \xi$, segue que ν_f é contínuo.

• Invariância

Falta mostrar ainda que Λ possui a propriedade fundamental de um sistema de Haar, ou seja, que $\forall f \in C_c(\mathcal{G})$ e $\forall (t, x) \in \mathcal{G}$ tem-se:

$$\int_{\mathcal{G}^{d(t,x)}} f((t, x)(s, y)) d\lambda^{d(t,x)}(s, y) = \int_{\mathcal{G}^{r(t,x)}} f(s, y) d\lambda^{r(t,x)}(s, y).$$

Por um lado, pelo cálculo acima temos:

$$\int_{\mathcal{G}^{r(t,x)}} f(s, y) d\lambda^{r(t,x)}(s, y) = \int_{A_x^{-1}} f(s, x) d\lambda(s).$$

Seja $z = d(t, x) = \alpha_{t^{-1}}(x)$. Temos:

$$\int_{\mathcal{G}^{d(t,x)}} f((t, x)(s, y)) d\lambda^{d(t,x)}(s, y) = \int_{A_x^{-1}} f(x, ts) d\lambda(s) = \int_G \chi_{A_x^{-1}}(t^{-1}s) f(s, x) d\lambda(s).$$

Por 4.18, temos que $A_z = A_x t$, e portanto

$$t^{-1}s \in A_z^{-1} \iff s^{-1}t \in A_x t \iff s^{-1} \in A_x \iff s \in A_x^{-1}.$$

Ou seja que $\chi_{A_x^{-1}}(t^{-1}s) \neq 0 \iff \chi_{A_x^{-1}}(s) \neq 0$.

Segue então que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}^{d(t,x)}} f((t, x)(s, y)) d\lambda^{d(t,x)}(s, y) &= \int_G \chi_{A_x^{-1}}(s) f(s, x) d\lambda(s) \\ &= \int_{A_x^{-1}} f(s, x) d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathcal{G}^{r(t,x)}} f(s, y) d\lambda^{r(t,x)}(s, y),\end{aligned}$$

o que encerra a prova. □

8.4. O Produto Cruzado Parcial e a C^* -álgebra do Grupóide

Nesta seção final, provaremos o resultado principal da Parte III: a C^* -álgebra do grupóide $\mathcal{G}$ associado à uma ação parcial contínua do grupo localmente compacto G sobre o espaço localmente compacto X coincide com o produto cruzado $C_0(X) \rtimes_{\sigma} G$, onde σ é a ação parcial contínua de G sobre $C_0(X)$ induzida por α .

Em [58], Renault desenvolveu a teoria de C^* -álgebras associadas a grupóides. A seguir lembramos a construção da C^* -álgebra associada a um grupóide topológico $\mathcal{G}$ com sistema de Haar Λ .

No espaço vetorial $C_c(\mathcal{G})$ das funções complexas contínuas com suporte compacto definidas em $\mathcal{G}$, são definidas uma operação de involução e um produto que fazem com que este espaço seja uma $*$ -álgebra. Concretamente, se $f, g \in C_c(\mathcal{G})$, $a \in \mathcal{G}$, tem-se:

$$(23) \quad f \star g(a) = \int_{\mathcal{G}^{d(a)}} f(ab)g(b^{-1})d\lambda^{d(a)}(b)$$

$$(24) \quad f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$$

Existem duas normas em $C_c(\mathcal{G})$: se $f \in C_c(\mathcal{G})$, então:

$$\|f\|_{I,r} = \sup_{a \in \mathcal{G}^0} \int_{\mathcal{G}^a} |f(b)|d\lambda^a(b)$$

$$\|f\|_{I,d} = \sup_{a \in \mathcal{G}^0} \int_{\mathcal{G}_a} |f(b)|d\lambda_a(b)$$

onde $\mathcal{G}_a = (\mathcal{G}^a)^{-1}$, e $\lambda_a(B) = \lambda^a(B^{-1})$, $\forall B \subseteq \mathcal{G}$ boreliano.

Finalmente, se

$$\|f\|_I = \sup\{\|f\|_{I,r}, \|f\|_{I,d}\},$$

então $\|\cdot\|_I$ é uma $*$ -norma em $C_c(\mathcal{G})$. $C^*(\mathcal{G})$ é definida como a C^* -álgebra envolvente do completamento da $*$ -álgebra $(C_c(\mathcal{G}), \|\cdot\|_I)$. Pela Proposição 1.11 de [58] (pág. 58), $C^*(\mathcal{G})$ é um completamento de $C_c(\mathcal{G})$ com respeito à norma de $C^*(\mathcal{G})$; ou seja: podemos supor que $C_c(\mathcal{G}) \subseteq C^*(\mathcal{G})$.

Sobre $C_c(\mathcal{G})$ existe uma topologia importante, diferente da correspondente à norma $\|\cdot\|_I$. Trata-se da topologia do limite indutivo, definida pela família $\{C(K)\}_K$, onde K varia entre os subconjuntos compactos de $\mathcal{G}$. Denotaremos esta topologia por $\tau_{\mathcal{G}}$. Por [58], II-1.22, se $\pi : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow B(H)$ é uma representação contínua nas topologias $\tau_{\mathcal{G}}$ de $C_c(\mathcal{G})$ e WOT de $B(H)$, então $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_I$, e portanto se estende por continuidade a $C^*(\mathcal{G})$.

Vejamos como ficam as operações e as normas no caso de um grupóide que provém de uma ação parcial. Sejam $f, g \in C_c(\mathcal{G})$, $(t, x) \in \mathcal{G}$, e seja $z = d(t, x) = \alpha_{t^{-1}}(x)$. Então:

$$\begin{aligned} f \star g(t, x) &= \int_{\mathcal{G}^{d(t,x)}} f((t, x)(s, y))g((s, y)^{-1})d\lambda^{d(t,x)}(s, y) \\ &= \int_{A_z^{-1}} f(x, ts)g(s^{-1}, \alpha_{s^{-1}}\alpha_{t^{-1}}(x))d\lambda(s) \\ &= \int_G \chi_{A_z t^{-1}}(s)f(ts, x)g((ts)^{-1}t, \alpha_{ts}^{-1}(x))d\lambda(s) \\ &= \int_G \chi_{A_z^{-1}}(t^{-1}s)f(s, x)g(s^{-1}t, \alpha_s^{-1}(x))d\lambda(s) \\ &= \int_{A_x^{-1}} f(s, x)g(s^{-1}t, \alpha_{s^{-1}}(x))d\lambda(s) \end{aligned}$$

$$f^*(t, x) = \overline{f(t^{-1}, \alpha_{t^{-1}}(x))}.$$

$$\begin{aligned}\|f\|_{I,r} &= \sup_{x \in X} \int_{A_x^{-1}} |f(s, x)| d\lambda(s) \\ \|f\|_{I,d} &= \sup_{x \in X} \int_{A_x^{-1}} |f(s^{-1}, \alpha_{s^{-1}}(x))| d\lambda(s)\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{B}$ o fibrado de Banach definido no começo do capítulo. Lembrar que $\mathcal{B}$ é um fibrado de Fell com as operações (2.15):

$$(t, d_t)(s, d_s) = (ts, \sigma_t(\sigma_{t^{-1}}(d_t)d_s)) \quad \text{e} \quad (t, d_t)^* = (t^{-1}, \sigma_{t^{-1}}(d_t^*)).$$

PROPOSIÇÃO 8.5. *Seja $\phi : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow C_c(\mathcal{B})$ tal que $\phi(f) = f$ com $f : G \rightarrow \mathcal{B}$ dada por:*

$$\hat{f}(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}} f_t)$$

onde

$$f_t : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ é dada por: } f_t(x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in G \times X$$

Então ϕ é um $*$ -morfismo injetivo. Se em $C_c(\mathcal{G})$ e em $C_c(\mathcal{B})$ se colocam as topologias $\tau_{\mathcal{G}}$ e τ dos respectivos limites indutivos, então ϕ é contínua com imagem densa.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que $\hat{f}$ é realmente um elemento de $C_c(\mathcal{B})$: a função $G \rightarrow C_0(A)$ tal que $t \mapsto f_t$ é contínua pelo Lema 7.37, já que f tem suporte compacto; como a função modular é contínua e positiva, vemos que $t \mapsto \sqrt{\Delta(t^{-1})} f_t$ é contínua. Finalmente, $\text{supp}(\hat{f}_t) \subseteq X_t$, porque $\text{supp}(f) \subseteq \mathcal{G}$, e portanto $\sqrt{\Delta(t^{-1})} f_t \in D_t$.

É claro também que ϕ é linear, e $\phi(f) = 0$ implica $f = 0$, de modo que ϕ é injetiva.

Vejamos agora que $\phi(f * b) = \phi(f) * \phi(g)$, e que $\phi(f^*) = \phi(f)^*$, $\forall a, b \in C_c(\mathcal{G})$. Se $h = f * g$, então:

$$h(t, x) = \int_{A_x^{-1}} f(s, x) g(s^{-1}t, \alpha_{s^{-1}}(x)) d\lambda(s)$$

Portanto:

$$h_t(x) = \int_{A_x^{-1}} f_s(x) g_{s^{-1}t}(\alpha_{s^{-1}}(x)) d\lambda(s) = \int_G \sigma_s(\sigma_{s^{-1}}(f_s) g_{s^{-1}t})(x) d\lambda(s).$$

Em outras palavras:

$$\hat{h}(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}} \int_G \sigma_s(\sigma_{s^{-1}}(f_s) g_{s^{-1}t})(x) d\lambda(s) \right)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}f * g(t) &= \left(\int_G \sigma_s(t, \sigma_{s^{-1}}(\frac{1}{\sqrt{\Delta(s)}} f_s) \frac{1}{\sqrt{\Delta(s^{-1}t)}} g_{s^{-1}t}) \right) \\ &= \left(t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}} \int_G \sigma_s(\sigma_{s^{-1}}(f_s) g_{s^{-1}t}) d\lambda(s) \right)\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$.

Com respeito à involução:

$$\begin{aligned} (\hat{f})^*(t) &= \Delta(t^{-1})f(t^{-1})^* = \Delta(t^{-1})\left(t, \sigma_t\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta(t^{-1})}}\overline{f_{t^{-1}}}\right)\right) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}}\overline{\sigma_t(f_{t^{-1}})}\right) \\ (\widehat{f^*})(t) &= \left(t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}}f_t^*\right) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}}\overline{\sigma_t(f_{t^{-1}})}\right) \end{aligned}$$

Então $(\hat{f})^* = \widehat{(f^*)}$.

Vejam agora que ϕ é contínua. Seja $\iota : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow C_c(\mathcal{B})$ tal que $\iota(f)|_t = (t, f(t))$. Notemos que para todo subconjunto compacto K de $\mathcal{G}$ o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_c(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\phi} & C_c(\mathcal{B}) \\ \uparrow & \nearrow \phi_K & \uparrow \times \Delta^{-1/2} \\ C_c(K) & \xrightarrow{\iota|_{C(K)}} & C_{p_1(K)}(\mathcal{B}) \end{array}$$

Basta ver que cada ϕ_K é contínua. Mas ϕ_K é a restrição a um subconjunto da inclusão $C_c(K) \hookrightarrow C_c(\mathcal{B})$, que é contínua, multiplicada por uma função contínua e limitada: $\Delta|_{p_1(K)}$. Segue então que ϕ é contínua.

Falta provar ainda que $\phi(C_c(\mathcal{G}))$ é denso em $C_c(\mathcal{B})$. Como $\phi(C_c(\mathcal{G})) = \iota(C_c(\mathcal{G}))$, temos que ver que $\iota(C_c(\mathcal{G}))$ é denso em $C_c(\mathcal{B})$ na topologia do limite indutivo. É claro que $\iota(C_c(\mathcal{G}))$ é um sub- $C(\mathcal{G})$ -módulo de $C_c(\mathcal{B})$, e portanto basta, por 14.6 de [37], mostrar que $\{(t, f_t) : f \in C_c(\mathcal{G})\}$ é denso em $B_t = \{t\} \times D_t = \{t\} \times C_0(X_t)$. Ou seja, temos que ver que $\{f_t : f \in C_c(\mathcal{G})\}$ é denso em D_t , $\forall t \in \mathcal{G}$. Seja $a \in C_c(X_t)$; como $\{t\} \times \text{sup}(a) \subseteq \mathcal{G}$ é compacto, existe uma vizinhança V de $\{t\} \times \text{sup}(a)$ tal que $\overline{V} \subseteq \mathcal{G}$, e $\overline{V}$ é compacto. Pelo lema de Urysohn, existe $g \in C_c(\mathcal{G})$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(t, x) = 1, \forall x \in \{t\} \times \text{sup}(a)$, e $g(s, x) = 0$ se $(s, x) \notin V$. Finalmente, definamos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(s, x) = 0$ se $(s, x) \notin V$, $f(s, x) = a(x)g(s, x)$ se $(s, x) \in V$. Assim, $f \in C_c(\mathcal{G})$ e $f_t = a$. Portanto, $\{f_t : f \in C_c(\mathcal{G})\} = C_c(X_t)$, que é denso em D_t . $\square$

LEMA 8.6. *Seja $K \subseteq \mathcal{G}$ um subconjunto compacto e simétrico (i.e. $K = K^{-1}$). Então, para cada $f \in C_c(\mathcal{G})$ tal que $\text{sup}(\phi(f)) \subseteq K$, tem-se:*

$$\|f\|_I \leq \sqrt{\|\Delta\|_K} \|\phi(f)\|_1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in C_c(\mathcal{G})$ nestas condições. Então:

$$\|\phi(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_{\mathcal{G}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\Delta(t)}} f_t \right\| d\lambda(t) \geq \frac{1}{\sqrt{\|\Delta\|_K}} \int_K \|f_t\| d\lambda(t).$$

Portanto $\|\hat{f}\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\|\Delta\|_K}} \|f\|_{I,r}$. Como $\|f\|_1 = \|(\hat{f})^*\|_1 = \|(\widehat{f^*})\|_1$, e como $\|f\|_{I,r} = \|f^*\|_{I,d}$, teremos também: $\|\hat{f}\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\|\Delta\|_{K^{-1}}}} \|f\|_{I,d}$. Mas $K = K^{-1}$, donde segue o resultado. $\square$

TEOREMA 8.7. *Sejam $R_{\mathcal{G}}$ a família de representações de $C_c(\mathcal{G})$ que são $(\tau_{\mathcal{G}}, WOT)$ -contínuas, e R a família de representações de $C_c(\mathcal{B})$ que são (τ, WOT) contínuas, onde τ é a topologia do limite indutivo sobre $C_c(\mathcal{B})$. Então:*

1. A correspondência $R \rightarrow R_{\mathcal{G}}$ dada por $\pi \mapsto \pi \circ \phi$ é uma bijeção.
2. ϕ se estende a um isomorfismo de C^* -álgebras $C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{B})$.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que se $\pi \in R$, então $\tilde{\pi} = \pi \circ \phi \in R_{\mathcal{G}}$, pois ϕ é $(\tau_{\mathcal{G}}, \tau)$ -contínua. Além disso, se $\pi \circ \phi = \pi' \circ \phi$, então $\pi = \pi'$ em $C_c(\mathcal{G})$, que é τ -denso em $C_c(\mathcal{B})$, e portanto $\pi = \pi'$.

Temos que provar agora que para toda $\tilde{\pi} \in R_{\mathcal{G}}$, existe $\pi \in R$ tal que $\tilde{\pi} = \pi \circ \phi$. Dada $\tilde{\pi} : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow B(H)$, tal que $\tilde{\pi} \in R_{\mathcal{G}}$, seja $\pi : \phi(C_c(\mathcal{G})) \rightarrow B(H)$ definida por $\pi(\phi(f')) = \tilde{\pi}(f')$. Notemos que $\phi(C_c(\mathcal{G})) \cap C_K(\mathcal{B}) = C_c(\mathcal{G}) \cap C_K(\mathcal{B})$ é $\|\cdot\|_{\infty}$ -denso em $C_K(\mathcal{B})$. Portanto, se $f = \phi(f')$, $f' \in C_c(\mathcal{G})$:

$$\|\pi(f)\| = \|\pi(\phi(f'))\| = \|\tilde{\pi}(f')\| \leq \|f'\|_1,$$

onde a última desigualdade deve-se a II-1.22 de [58]. Mas, pelo lema 8.6, temos que:

$$\|f'\|_1 \leq \sqrt{\|\Delta\|_K} \|\phi(f')\|_1 = \sqrt{\|\Delta\|_K} \|f\|_1 \leq \sqrt{\|\Delta\|_K} \lambda(K) \|f\|_{\infty}.$$

Então π restrita a $C_K(\mathcal{B}) \cap C_c(\mathcal{G})$ se estende de maneira única a um operador linear limitado π_K em $C_K(\mathcal{B})$. É claro também que se $g \in C_K(\mathcal{B})$ e $g \in C_{K'}(\mathcal{B})$, então $\pi_K(g) = \pi_{K'}(g)$. Assim, obtemos uma aplicação linear e τ -contínua que preserva a involução $\pi : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow B(H)$.

Vejamos que π preserva o produto. Sejam $f, g \in C_c(\mathcal{B})$. Então existe $K \subseteq G$ compacto tal que $f, g \in C_K(\mathcal{B})$. Dado $\epsilon > 0$, existem $f', g' \in C_c(\mathcal{G})$, com $p_1(\text{sup}(f')) \cup p_1(\text{sup}(g')) \subseteq K$, tais que $\|f - \phi(f')\|_K + \|g - \phi(g')\|_K < \epsilon$. Notemos que, se $\tilde{f}, \tilde{g} \in C_K(\mathcal{B})$, então $\tilde{f} * \tilde{g} \in C_{K^2}(\mathcal{B})$. Temos então:

$$\begin{aligned} \|\pi(f * g) - \pi(f)\pi(g)\| &= \|\pi(f * g) - \tilde{\pi}(f' * g') + \tilde{\pi}(f')\tilde{\pi}(g') - \pi(f)\pi(g)\| \\ &\leq \|\pi(f * g) - \pi(\phi(f'))\pi(\phi(g'))\| + \|\pi(\phi(f'))\pi(\phi(g')) - \pi(f)\pi(g)\| \\ &\leq \sqrt{\|\Delta\|_{K^2}} \lambda(K^2) \|f * g - \phi(f')\phi(g')\|_{K^2} + \|\pi(\phi(f'))\pi(\phi(g')) - \pi(f)\pi(g)\| \end{aligned}$$

Agora, por um lado:

$$\begin{aligned} \|\pi(\phi(f'))\pi(\phi(g')) - \pi(f)\pi(g)\| &= \|\pi(\phi(f'))(\pi(\phi(g')) - \pi(g)) + (\pi(\phi(f')) - \pi(f))\pi(g)\| \\ &\leq \|\pi(\phi(f'))\| \sqrt{\|\Delta\|_K} \lambda(K) \|\phi(g') - g\|_K \\ &\quad + \|\pi(g)\| \sqrt{\|\Delta\|_K} \lambda(K) \|\phi(f') - f\|_K \\ &\leq 2M \|\Delta\|_K \lambda(K)^2 \epsilon \end{aligned}$$

onde $M = \max\{\|f\|_K, \|g\|_K, \|\phi(f')\|_K, \|\phi(g')\|_K\}$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \|f * g - \phi(f')\phi(g')\|_{K^2} &= \|f * (g - \phi(g')) + (f - \phi(f')) * \phi(g')\|_{K^2} \\ &\leq \epsilon \left(\int_K |f(s)| ds + \int_K |\phi(g')(s)| ds \right) \\ &\leq 2M \lambda(K) \epsilon \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$\|\pi(f * g) - \pi(f)\pi(g)\| \leq 2M \lambda(K) (1 + \|\Delta\|_K \lambda(K)) \epsilon \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$. Agora, pela definição de π , temos que $\tilde{\pi} = \pi \circ \phi$.

Para provar 2., notemos, por um lado, que $C^*(\mathcal{G})$ é o completamento de $C_c(\mathcal{G})$ com respeito à norma $\|\cdot\| : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f'\| = \sup\{\|\pi(f')\| : \pi \in R_{\mathcal{G}}\}$; por outro lado, por [37], VIII-13.8, temos que $C^*(\mathcal{B})$ é o completamento de $\phi(C_c(\mathcal{G}))$ com respeito à norma: $\|\cdot\| : C_c(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \in R\}$. Segue, portanto, que $\|f'\| = \|\phi(f')\|$, $\forall f' \in C_c(\mathcal{G})$, e então ϕ se estende por continuidade a um isomorfismo de $C^*(\mathcal{G})$ sobre $C^*(\mathcal{B})$. $\square$

Bibliografia

- [1] B. Abadie, R. Exel, *Deformation Quantization via Fell bundles*, preprint, 1997.
- [2] F. Abadie – Vicens, *Descripción de las C^* -álgebras aproximadamente finitas como productos cruzados*. Tesis de Maestría, 1995. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
- [3] F. Abadie – Vicens, *Tensor Products of Fell Bundles Over Discrete Groups*, preprint (funct-an/9712006), 1997.
- [4] C. Anantharaman-Delaroche, *Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité*, Math. Ann. **279** (1987), no. 2, 303-329.
- [5] S. Baaĵ, G. Skandalis, *C^* -algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante*, K-Theory **2** (1989), 683-721.
- [6] S. Baaĵ, G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés des C^* -algèbres*, Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure, 4e série, **26** (1993), 425-488.
- [7] W. Beer, *On Morita equivalence of nuclear C^* -algebras*, J. Pure Appl. Math. **26** (1982), 249-267.
- [8] O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972) 195-234.
- [9] L. G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^* -algebras*, Pacific Journal Math. **71** (1977) 335-348.
- [10] L. G. Brown, P. Green and M. A. Rieffel, *Stable isomorphism and strong Morita Equivalence of C^* -algebras*, Pacific J. Math. **71** (1977) 349-363.
- [11] L. G. Brown, J. A. Mingo, N. T. Shen, *Quasi-Multipliers and Embeddings of Hilbert C^* -bimodules*, Canad. J. Math. **46** (1994), no. 6, 1150-1174.
- [12] J. W. Bunce, J. A. Deddens, *C^* -algebras generated by weighted shifts*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1973), 257-271.
- [13] J. W. Bunce, J. A. Deddens, *A family of simple C^* -algebras related to weighted shifts*, J. Funct. Anal. **19** (1975), 13-24.
- [14] F. Combes, *Crossed products and Morita equivalence*, Proc. London Math. Soc. (3) **49** (1984), 289-306.
- [15] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc., New York, 1994.
- [16] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173-185.
- [17] J. Cuntz and W. Krieger, *A Class of C^* -Algebras and Topological Markov Chains*, Invent. Math. **56** (1980), 251-268.
- [18] R. Curto, P. Muhly, D. Williams, *Cross products of strongly Morita equivalent C^* -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **90**(4):528-530, April 1984.
- [19] K. R. Davidson, *C^* -algebras by Example*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Society, 1996.
- [20] M. Dokuchaev, R. Exel, P. Piccione, *Partial representations and partial group algebras*, preprint, USP, 1998.
- [21] S. Doplicher, D. Kastler, D. W. Robinson, *Covariance algebras in field theory and statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **3** (1966), 1-28.
- [22] E. Effros, F. Hahn, *Locally compact transformation groups and C^* -algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **75** (1967).
- [23] R. Exel, *Circle Actions on C^* -algebras. Partial Automorphisms and a Generalized Pimsner-Voiculescu Exact Sequence*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 361-401.
- [24] R. Exel, *The Bunce-Deddens Algebras and Crossed Products by Partial Automorphisms*, Bol. Soc. Bras. Mat. (1994).
- [25] R. Exel, *Approximately finite C^* -algebras and Partial Automorphisms*, Math. Scand. **77** (1) (1995),
- [26] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), No. 12, 3481-3494.
- [27] R. Exel, *Twisted Partial Actions. A Classification of Regular C^* -Algebraic Bundles*, Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 417-443.
- [28] R. Exel, *Amenability for Fell Bundles*, J. Reine Angew. Math. **492** (1997), 41-43.
- [29] R. Exel, *Partial representations and amenable Fell bundles over free groups*, preprint, Universidade de São Paulo, 1997.
- [30] R. Exel, *A Note on the Representation Theory of Fell Bundles*, preprint, math.OA/9904013, 1999.
- [31] R. Exel, M. Laca, *Cuntz-Krieger Algebras for Infinite Matrices*, preprint, funct-an 9712008, 1997.
- [32] R. Exel, M. Laca, J. Quigg, *Partial Dynamical Systems and C^* -algebras generated by Partial Isometries*, preprint, funct-an 9712007, 1997.

- [33] R. Exel, C. K. Ng, *Approximation property of C^* -algebraic Bundles*, preprint, math. OA/9906070.
- [34] J. M. G. Fell, *An extension of Mackey's method to Banach $*$ -algebraic bundles*, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **90**, 1969.
- [35] J. M. G. Fell, *Banach $*$ -algebraic bundles and induced representations*, *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, Nice, 1970, Tome 2. 383-388, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [36] J. M. G. Fell, *Induced representations and Banach $*$ -algebraic bundles*, *Lecture Notes in Math.* **582**, Springer-Verlag, 1977.
- [37] J. M. Fell, R. S. Doran, *Representations of $*$ -algebras, locally compact groups, and Banach $*$ -algebraic bundles*, *Pure and Applied Mathematics* vol. **125** and **126**, Academic Press, 1988.
- [38] J. Glimm, *Families of induced representations*, *Pacific J. Math.* **12**, 1962, 885-911.
- [39] M. W. Hirsh, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [40] S. Imai, H. Takai, *On a duality for crossed products by a locally compact group*, *J. Math. Soc. Japan*, **30** (1978), 495-504.
- [41] G. G. Kasparov, *Hilbert C^* -modules: theorems of Stinespring and Voiculescu*, *J. Operator Theory* **4** (1980) 133-150.
- [42] Y. Katayama, *Takesaki's duality for a nondegenerate coaction*, *Math. Scand.* **55** (1985) 141-151.
- [43] E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules. A toolkit for operator algebraists.*, London Mathematical Society, Lecture Note Series **210**, Cambridge University Press, 1995.
- [44] E. M. Landesman, B. Russo, *The second dual of a C^* -ternary ring*, *Canad. Math. Bull.* **26**(2) (1983), 241-246.
- [45] M. B. Landstad, *Duality theory for covariant systems*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **248** (1979), 223-267.
- [46] M. B. Landstad, J. Phillips, I. Raeburn, C. E. Sutherland, *Representations of crossed products by coactions and principal bundles*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1987) 747-784.
- [47] K. Maclanahan, *K -theory for partial crossed products by discrete groups*, *J. Funct. Anal.* **130** (1995), 77-117.
- [48] C. K. Ng, *C^* -exactness and crossed products by actions and coactions*, *J. London Math. Soc.* (2), **51** (1995), 321-330.
- [49] C. K. Ng, *Discrete coactions on C^* -algebras*, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **60** (1996), 118-127.
- [50] C. K. Ng, *Reduced cross-sectional C^* -algebras of C^* -algebraic bundles and coactions*, preprint, 1996.
- [51] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, *J. Operator Theory* **27** (1992), 17-52.
- [52] G. K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
- [53] J. C. Quigg, *Discrete C^* -coactions and C^* -algebraic bundles*, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **60** (1996), 204-221.
- [54] J. C. Quigg, *Crossed product duality for partial C^* -automorphisms*, preprint, 1996.
- [55] J. C. Quigg, I. Raeburn, *Characterizations of crossed products by partial actions*, *J. Operator Theory* **37** (1997), No. 2, 311-340.
- [56] I. Raeburn, *On crossed products by coactions and their representation theory*, *Proc. London Math. Soc.* (3) **64** (1992), 625-652.
- [57] I. Raeburn, D. P. Williams, *Morita Equivalence and Continuous-Trace C^* -algebras*, *Math. Surveys and Monographs*, Volume 60, Amer. Math. Society, 1998.
- [58] Jean Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, *Lecture Notes in Math.* **793** (1980), Springer-Verlag.
- [59] M. A. Rieffel, *Induced Representations of C^* -algebras*, *Advances in Math.* **13** (1974) 176-257.
- [60] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, GTM **42**, Springer-Verlag, 1977.
- [61] H. Takai, *On a duality for crossed products of C^* -algebras*, *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 25-39.
- [62] T. Tsurumaru, *Crossed products of operators algebras*, *Tôhoku. Math. J.* **10**, 1958, 355-365.
- [63] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM, Springer-Verlag, 1983.
- [64] S. Wassermann, *Exact C^* -algebras and Related Topics*, *Lecture Notes Series* **19**, Seoul National University, 1994.
- [65] N. E. Wegge-Olsen, *K -Theory and C^* -algebras*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford-New York-Tokyo, 1993.
- [66] A. Weinstein, *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry*, preprint 1996.
- [67] G. Zeller-Meyer, *Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes*, *J. Math. Pures Appl.* **47** (1968), 101-239.
- [68] H. H. Zettl, *A characterization of ternary rings of operators*, *Adv. in Math.* **48** (1983), 117-143.