Tipo de Representação e

Quiver Ordinário

do Bimódulo DA

Cristian Patricio Novoa Bustos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **ÁLGEBRA**
Orientador: **Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CAPES*

-São Paulo, maio de 1999-

Tipo de Representação e
Quiver Ordinário
do Bimódulo DA

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Cristian Patricio Novoa Bustos
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, maio de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos - IME - USP
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Paulo Brumatti - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Ivan Shestakov - UNI. NOVOSIBIRSK

a memória do Presidente Salvador Allende

*El pueblo debe defenderse, pero no sacrificarse. El pueblo no debe dejarse arrasar, ni
acribillar; pero tampoco puede humillarse.*

*Trabajadores de mi patria: tengo fe en Chile y su destino. Superarán otros hombres este
momento gris y amargo, donde la traición pretende imponerse. Sigan ustedes sabiendo
que, mucho más temprano que tarde, de nuevo se abrirán las grandes alamedas por
donde pase el hombre libre, para construir una sociedad mejor.*

*!Viva Chile! !Viva el pueblo! !Vivan los trabajadores! Estas son mis últimas palabras y
tengo la certeza que mi sacrificio no será en vano. Tengo la certeza de que, por lo
menos, será una lección de moral que castigará la felonía, la cobardía y la traición.*

Salvador Allende.

Resumo

Seja $A \cong kQ/I$ uma k -álgebra conexa, básica de dimensão finita sobre o corpo algebricamente fechado k . Então neste trabalho mostramos principalmente a estreita relação entre o tipo de representação da álgebra A onde A é livre de $\tilde{A}_n$ e o tipo de representação das álgebras dadas pela extensão trivial $T(A)$ e $\bar{A}$, numa primeira parte, depois mostramos o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$, a partir do quiver ordinário da álgebra A , no caso em que a álgebra A é livre de $\tilde{A}_n$.

Abstract

Let $A \cong kQ/I$ be connected basic finite-dimensional k -algebra over an algebraically closed field k . In the first part of this we establish close relations between the representation type of algebra A , free of $\tilde{A}_n$, and the representation type of algebras given by trivial extensions $T(A)$ and $\bar{A}$. Further we provide a construction of the ordinary quiver of algebra $\bar{A}$ from the ordinary quiver of algebra A in the case case when A is free of $\tilde{A}_n$.

Agradecimentos

A participação das pessoas neste trabalho foram de fundamental importância, como a comunidade Chilena integrada por Juan, Raul, e o grande Ivo, entre outros, a comunidade Argentina, e claro aos meus colegas de moradia como meus grandes amigos Marcel, Paulo, Rogerio etc...

Não posso deixar de agradecer a Sonia pelo estímulo e interesse mostrado em minhas contas, a Gladys, cuja paciência em ouvir, tornou menos difícil este trabalho.

Quero deixar registrado o meu agradecimento a Jose Antonio de la Peña, pelo convite ao Mexico e as sugestões feitas para o melhoramento deste trabalho.

Muito obrigado Hector por todos os seus conselhos, e a minha Universidade, Universidade Católica de Goiás, que apostou em mim.

Patricia, muito obrigado por estar ao meu lado em todos estes momentos tão importante da minha vida.

Muito obrigado mãe e pai por me dar esta oportunidade.

Sumário

introdução	1
Introdução	1
1 CATEGORIAS VECTORESPACIAIS E ÁLGEBRAS INCLINADAS	8
1.1 Preliminares	8
1.2 Categorias Vectorespaciais	10
1.3 Álgebras de dimensão finita e Quiver com relações	17
1.4 Correspondência entre módulos e representações	20
1.5 Seqüências e componentes de Auslander-Reiten	26
1.6 Álgebras inclinadas	36
2 SOBRE O TIPO DA REPRESENTAÇÃO DO BIMÓDULO DA	43
2.1 Álgebra repetitiva $\hat{A}$	44
2.2 Álgebras $T(A)$ e $\overline{A}$	48
2.3 Cobertura Universal de $T(A)$	56
2.4 Categorias Derivadas	60
2.5 Tipo de representação de $T(A)$ e de $\overline{A}$	64
3 QUIVER ORDINÁRIO DA ÁLGEBRA $\overline{A}$	79
3.1 Quiver ordinário da álgebra $\overline{A}$	80

3.2 $\overline{A}$ como extensão por ponto	93
Referências Bibliográficas	99

Introdução

Neste trabalho A denotará uma k -álgebra de dimensão finita, básica e conexa sobre um corpo algebricamente fechado k . Denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria de módulos de dimensão finita à direita, e por $\text{Ind}A$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$ formada pelos representantes das classes de isomorfismos dos módulos indecomponíveis.

Um dos problemas mais importantes em teoria de representações de álgebras é estudar a categoria de módulos $\text{mod}A$, tendo como um dos objetivos, obter uma classificação de todos os módulos indecomponíveis. Por exemplo se $\text{Ind}A$ admite somente um número finito de indecomponíveis diremos que A é de tipo representação finito.

Um resultado muito importante da teoria de representações de álgebras é dado por Drozd [D] em 1972, onde ele mostra que toda álgebra é de tipo manso ou tipo selvagem mas não ambas, estes conceitos serão dados no capítulo 1 (ver definição 1.2.6 e 1.2.7).

Em 1983, Hughes e Waschbüsch (ver [HW]) introduziram a álgebra repetitiva de uma álgebra A , tendo como objetivo estudar as álgebras auto-injetivas de tipo representação finito, definida como:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & A & & & \\ & DA & A & & \\ & & DA & A & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

onde $DA := \text{Hom}_k(A, k)$ e a soma é a soma usual de matrizes e a multiplicação é induzida pela ação de DA como segue:

$$DA \otimes DA \rightarrow 0, \quad DA \otimes A \rightarrow DA, \quad A \otimes DA \rightarrow DA.$$

Um elemento de $\hat{A}$ é dado por $(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $a_i \in A$ e $f_i \in DA \forall i \in \mathbb{Z}$, logo temos que a soma é dada por:

$$(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}} + (b_i, g_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (a_i + b_i, f_i + g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

onde $a_i, b_i \in A$ e $f_i, g_i \in DA \forall i \in \mathbb{Z}$, e o produto é definido como segue:

$$(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cdot (b_i, g_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (a_i b_i, a_{i+1} g_i + f_i b_i)_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Pode-se ver que $\hat{A}$ é uma k -álgebra de dimensão infinita sobre k , sem unidade e auto-injetiva.

Por outro lado, a extensão trivial da álgebra A é definida como:

- $T(A) = A \ltimes DA$

que também é uma álgebra auto-injetiva, cuja estrutura aditiva é dada por $A \oplus DA$ e sua estrutura multiplicativa é dada por:

- Sejam $(a, f), (b, g) \in T(A)$ onde $a, b \in A, f, g \in D(A)$, então

$$(a, f) \cdot (b, g) = (ab, ag + fb)$$

Com esta estrutura, a álgebra $T(A)$ é isomorfa a álgebra de matrizes da forma:

$$T(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ f & a \end{pmatrix} : a \in A, f \in DA \right\}$$

Claramente $T(A)$ é uma sub-álgebra de

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ f & b \end{pmatrix} : a, b \in A, f \in DA \right\}$$

Não é difícil de ver que a álgebra $\bar{A}$ é um quociente de $\hat{A}$. Então, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{A} & & \\ & F \swarrow & & \searrow & \\ T(A) & & \hookrightarrow & & \bar{A} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & A & & \end{array}$$

Onde o F dado no diagrama anterior é o funtor cobertura de Galois induzido pelo grupo cíclico infinito $G = \langle \nu \rangle$ agindo em $\hat{A}$, onde

$$\nu(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (a_{i+1}, f_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \quad \forall (a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \hat{A}$$

Diremos que uma categoria $\mathcal{K}$ é uma k -categoria se seus conjuntos de morfismos formam k -espaços vetoriais e a composição é bilinear. Como estamos considerando A uma k -álgebra básica com unidade e de dimensão finita sobre k , sejam $e_1, \dots, e_n$ idempotentes primitivos e ortogonais dois a dois de A , tais que $1_A = e_1 + \dots + e_n$. Seja $\mathcal{A}_A$ a k -categoria que tem $\{1, \dots, n\}$ como objetos e espaços de morfismos $Hom_{\mathcal{A}_A}(i, j) = e_i A e_j$ onde a composição é dada pela multiplicação de A .

Cada módulo de $mod A$ pode ser identificado com um funtor da k -categoria $\mathcal{A}_A$ em $mod k$, desta forma a k -álgebra A pode ser identificada com a k -categoria $\mathcal{A}_A$.

Seja G um grupo de automorfismos de uma álgebra A , então o funtor F é definido como segue:

Definição Um funtor $F : \tilde{A} \rightarrow A$ que é determinado pela ação do grupo G , é chamado de funtor cobertura de Galois se F satisfaz:

- G é um grupo de automorfismos agindo livremente sobre $\tilde{A}$.
- $F \circ g = F \quad \forall g \in G$.
- F é denso, e G age transitivamente sobre $F^{-1}(a)$ para qualquer objeto $a \in A$.
- As aplicações naturais dadas por:

$$\bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(x, y) \rightarrow A(F(x), a) \quad \text{e} \quad \bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(y, x) \rightarrow A(a, F(x))$$

são bijetivas $\forall x \in \tilde{A} \quad \text{e} \quad a \in A$

Agora ao funtor $F : \tilde{A} \rightarrow A$, podemos associar outros dois funtores, chamados de **pull-up** $F_* : Mod A \rightarrow Mod \tilde{A}$, onde $Mod A$ denota os módulos localmente de dimensão finita, e F_* é definido por

$$F_*(M) = M \circ F, \forall M \in Mod A$$

$$(F_*(M)(\tilde{x}) = M(F(\tilde{x}))).$$

O funtor F_* admite um funtor esquerdo adjunto F^λ , chamado de funtor **push-down** onde $F^\lambda : Mod \tilde{A} \rightarrow Mod A$ está definido por:

1. $F^\lambda \tilde{A}(x, -) = A(F(x), -)$
2. O funtor F^λ comuta com limites diretos (Logo com Cokernel e somas diretas finitas).

Mas, como o grupo G age livremente em $Ind \tilde{A}$, temos que o funtor F^λ induz uma injeção do conjunto de órbitas de $Ind \tilde{A}$ em $Ind A$.

Denotemos por $Ind_1 A$ a subcategoria plena de $Ind A$ formada pelos objetos isomorfos a $F^\lambda(M)$ para algum $M \in Ind \tilde{A}$, e por $Ind_2 A$ a subcategoria plena dos $Ind A$ que não estão em $Ind_1 A$.

Definição Seja G um grupo de automorfismos de A . Uma categoria A é chamada de G -densa, ou simplesmente densa, se $Ind A/G = Ind_1 A/G$.

No capítulo 2 temos como objetivo principal estudar o seguinte problema:

- Dada uma álgebra A , onde é conhecido o tipo de representação de A . Então que podemos dizer do tipo de representação da álgebra $\bar{A}$ e da extensão trivial $T(A)$??.

Este problema tem sido muito estudado por Assem e Skowroński desde 1985 e, em 1993 eles conseguem a seguinte caracterização dado no seguinte Teorema (ver [AS2]):

Teorema 1 Seja A uma k -álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\hat{A}$ é mansa densa.
2. $\hat{A}$ é mansa e localmente de suporte finito.
3. Existe uma álgebra B a qual é de tipo Dynkin, ou inclinada de tipo de representação infinito, Euclidiana ou tubular, tal que $\hat{A} \cong \hat{B}$.
4. Existe uma álgebra C que é hereditária Dynkin, ou Euclidiana ou canônica tubular, tal que A e C são inclinante-coinclinante equivalentes.
5. $\underline{mod}\hat{A}$ é de ciclo finito.
6. Existe uma álgebra C a qual é ou hereditária Dynkin, ou Euclidiana, ou canônica tubular tal que $\underline{mod}\hat{A} \cong \underline{mod}\hat{C}$.

Uma ferramenta muito usada por Assem e Skowroński na prova do teorema anterior é a categoria derivada de uma álgebra A , que denotamos por $\mathcal{D}^b(A)$, que é uma categoria construída a partir dos complexos limitados definida na categoria abeliana $mod A$.

Recordemos que uma álgebra A é dita hereditária se todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo. As álgebras hereditárias estão totalmente estudadas e classificadas, segundo seu tipo de representação.

Por exemplo, é conhecido que as álgebras hereditárias de tipo representação finito são da forma $A \cong kQ$ onde o quiver Q tem como grafo subjacente um grafo de tipo Dynkin, dado pela seguinte figura:

Figura 1: Onde n indica o número de vértices

As álgebras hereditárias de tipo representação mansa são da forma $A \cong kQ$ onde o quiver Q tem como grafo subjacente um grafo de tipo Euclidiano, dado pela seguinte figura:

Figura 2: Onde o n indica que existem $n + 1$ vértices

Usando o trasladado de Auslander-Reiten $\tau_A = DTr$ e $\tau_A^- = TrD$, podemos definir o quiver de Auslander Reiten Γ_A como sendo um quiver de translação, onde os vértices são os objetos de $IndA$ e o número de flechas entre dois vértices $X, Y \in \Gamma_A$ é dado por $e = \dim_k Irr(M, M')$, onde $Irr(M, M') = rad(M, M')/rad^2(M, M')$.

Seja X um módulo de Γ_A , então a τ_A -órbita de X é o conjunto da forma $\tau_A^m X$, $m \in \mathbb{Z}$. Diremos que o módulo X é periódico se $\tau_A^m X \cong X$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Uma componente $\mathcal{C}$ de Γ_A é uma componente conexa de Γ_A . Então temos:

- A componente $\mathcal{C}$ é pósprojétiva se $\mathcal{C}$ não contém ciclos orientados e cada módulo de $\mathcal{C}$ está contido numa órbita de um módulo projetivo, que denotaremos por $\mathcal{P}$.
- A componente $\mathcal{C}$ é regular se não contém módulos projetivos nem módulos injetivos, que denotaremos por $\mathcal{R}$.
- A componente $\mathcal{C}$ é preinjetiva se $\mathcal{C}$ não contém ciclos orientados e cada módulo de $\mathcal{C}$ está contido numa órbita de um módulo injetivo, que denotaremos por $\mathcal{I}$.
- A componente $\mathcal{C}$ é um tubo se $\mathcal{C}$ não tem flechas múltiplas, e $\mathcal{C}$ contém um circuito orientado.

A descrição em componentes conexas das álgebras hereditárias Euclidianas pode ser vista na seguinte figura:

Figura 3:

Diremos que uma álgebra $A \cong kQ/I$ é livre de $\tilde{A}_n$ se A não admite nenhuma subcategoria plena que seja isomorfa a uma álgebra kQ' , onde o grafo subjacente a Q' seja $\tilde{A}_n$.

Definição Diremos que um módulo $T \in \text{mod}A$, é inclinante (ou tilting) se:

1. $\text{pd}T \leq 1$
2. $\text{Ext}^1(T, T) = 0$
3. O número de somandos indecomponíveis não isomorfos do módulo T é igual ao número de classes de isomorfia de módulos simples em $\text{mod}A$.

Consideremos a álgebra $\text{End}_A T = B$. Então a álgebra B é chamada de inclinada se o módulo T é inclinado, onde A é uma álgebra hereditária. Diremos que a álgebra inclinada B é mansa disfarçada se a álgebra A é de tipo Euclidiana e o módulo inclinado T é pósprojetivo.

Então estendemos o teorema de Assem e Skowroński no seguinte Teorema:

Teorema 2 Seja A mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$, e seja $M \in \text{Ind}A$ tal que $B = A[M]$ é mansa. Então $T(B)$ e $\bar{B}$ são mansas se e somente se o módulo M é regular.

Onde a álgebra $A[M]$ é chamada de extensão por um ponto definida como:

$$A[M] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & k \end{pmatrix}$$

Na prova deste resultado, dada na seção 2.5, mostramos a equivalência entre as extensões triviais da álgebra $A = \tilde{D}_n[M]$, onde $M \in \text{Ind}\tilde{D}_n$ e tem comprimento regular 2 em um tubo de posto $n - 2$ chamada de 2-tubular, e as álgebras Clannish introduzidas por Crawley-Boevey (ver [C-B]) definidas a seguir:

Definição Seja Q um quiver e seja Sp o subconjunto dos laços no quiver Q . Seja $R = Z \cup \{q_b(b)/b \in Sp\}$ um conjunto de relações do quiver Q , dado pelo conjunto Z que é um conjunto das relações zero e $q_b(b) = 0$, para cada laço $b \in Sp$, onde q_b é um polinômio quadrático. Vamos supor que nenhuma relação zero começa ou termina num laço especial, ou envolve o quadrado do laço especial. A álgebra $A \cong kQ/R$ é chamada de Clannish se satisfaz as seguintes condições:

1. No máximo saem duas flechas, ou chegam duas flechas a qualquer vértice.
2. Para cada flecha ordinária (sem ser laço) a , existe no máximo uma flecha c onde $ca \notin Z$.
3. Para cada flecha ordinária (sem ser laço) a , existe no máximo uma flecha b onde $ab \notin Z$.

Não é muito difícil de mostrar que toda álgebra 2-tubular tem categoria de módulos repetitiva equivalente a categoria de módulos repetitiva da álgebra definida pelo seguinte quiver:

Figura 4:

Então o quiver ordinário da álgebra $\hat{A}$ é dado por:

Figura 5:

Logo, a extensão trivial tem o seguinte quiver ordinário:

Figura 6:

Então mostramos que a categoria de módulos definida pelo quiver anterior é equivalente a categoria de módulos definido pelo seguinte quiver:

as linhas tracejadas são relações zero

Figura 7:

A partir da definição de álgebra Clannish, verifica-se que o quiver dado pela figura anterior define uma álgebra Clannish.

Vejamos novamente o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \widehat{A} & & \\
 & F \swarrow & & \searrow & \\
 T(A) & & \hookrightarrow & & \bar{A} \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

No capítulo 3, temos como objetivo principal estudar o seguinte problema:

- Seja $A \cong kQ/I$. Então como descrever o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$ a partir do quiver que define a álgebra A .

Então, damos na seção 3.1, uma solução parcial para este problema com a hipóteses da álgebra A ser livre de $\tilde{A}_n$ no seguinte Teorema:

Teorema 3 Seja $A \cong kQ/I$ livre de $\tilde{A}_n$. Então $\bar{A} \cong k\bar{Q}/\bar{I}$, onde $\bar{Q}$ e $\bar{I}$ são dados por:

1. $(\bar{Q})_0 = (Q_A)_0 \dot{\cup} (Q_{A'})_0$
2. $(\bar{Q})_1$ é dado por:
 - as flechas de $(Q_A)_1$
 - as flechas de $(Q_{A'})_1$
 - Se existe um caminho maximal de $i' \rightarrow j'$, então existe uma flecha ligando as duas cópias do Quiver da álgebra A do vértice j' até i .
3. Relações:
 - relações dadas pelo Quiver Q_A , ou I_A
 - relações dadas pelo Quiver $Q_{A'}$, ou $I_{A'}$
 - relações dadas pelo $\dim_k(e_i A' e_j)$, entre os vértices i e j .

Agora uma consequência importante do resultado anterior é dado no seguinte Teorema:

Teorema 4 Seja $A = kQ/I$, mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$. Então, a álgebra $\overline{A}$ é da forma $A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$ onde cada módulo M_{w_i} é $A_i = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_{i-1}}]$ -injetoivo ($i = 1, \dots, n$).

Antes de enunciar o próximo resultado consideremos a Cohomologia de Hochschild de uma álgebra pois queremos mostrar que se temos uma k -álgebra A com o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild nula então a álgebra $\overline{A}$ também tem o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild nula.

Seja A uma k -álgebra, e seja X um $A - A$ bimódulo. Denotaremos por $\otimes^n A$ o produto tensorial de n cópias de A , $A \otimes_k \cdots \otimes_k A$. Então, $Hom_k(\otimes^n A, X)$ é o espaço das aplicações multilineares de A^n em X .

Consideremos as funções

$$d_i^n : Hom_k(\otimes^n A, X) \longrightarrow Hom_k(\otimes^{n+1} A, X)$$

definidas por:

$$d_i^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \begin{cases} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) & \text{para } i = 0 \\ f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1} & \text{para } i = n + 1 \end{cases}$$

Finalmente

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n : Hom_k(\otimes^n A, X) \longrightarrow Hom_k(\otimes^{n+1} A, X)$$

é uma função linear.

Definição Seja A uma k -álgebra. Chamaremos de n -ésima cohomologia de Hochschild de A com coeficientes em X , à n -ésima cohomologia do complexo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{d^0} Hom_k(A, X) \xrightarrow{d^1} Hom_k(\otimes^2 A, X) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

$$H^n(A, X) = \ker d^n / \text{Im} d^{n-1}.$$

Se $X = A$, então temos a n -ésima Cohomologia de Hochschild de A , que denotaremos por $H^n(A)$.

Teorema 5 Seja $A = kQ/I$ uma k -álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$ tal que $H^1(A) = 0$. Então o grupo de Cohomologia de Hochschild $H^1(\bar{A}) = 0$.

O seguinte resultado é mostrado por Happel e Ringel (ver [HR]).

Teorema 6 Seja P um módulo projetivo indecomponível. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) O módulo P é dirigido.
- (b) O $radP$ é dirigido.
- (c) Cada somando direto do $radP$ é dirigido.

A partir do teorema anterior, temos o seguinte corolário do Teorema 4.

Corolário Seja A uma k -álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$. Então, as componentes do quiver de Auslander-Reiten $\Gamma_{\bar{A}}$ da álgebra $\bar{A}$, são dirigidas ou tubos estáveis.

Pv. Pelo Teorema 4, temos que a álgebra $\bar{A}$ é da seguinte forma:

$$\bar{A} = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$$

Seja $A_1 = A[M_{w_0}]$. Do teorema 4, segue que $radP_{w_0} = M_{w_0}$ é injetivo e dirigido. Portanto pelo teorema 6, temos que o módulo projetivo P_{w_0} é dirigido. Logo, a nova componente é dirigida. Agora basta repetir o argumento anterior.

Estes resultados são mostrados com mais detalhes no capítulo 3.

Capítulo 1

CATEGORIAS

VECTORESPACIAIS E

ÁLGEBRAS INCLINADAS

1.1 Preliminares

Neste trabalho, salvo indicação do contrário, A denotará uma álgebra sobre um corpo k algebricamente fechado, associativa, básica, conexa, com unidade, e de dimensão finita.

Denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos finitamente gerados à direita, e por $\text{Ind}A$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$, cujos objetos são os representantes das classes de isomorfismo dos A -módulos à direita indecomponíveis.

Um dos problemas básicos da teoria de representações de álgebras é determinar o **tipo de representação** da k -álgebra A . Este estudo está relacionado com o “tamanho” de $\text{Ind}A$. Assim, diremos que a k -álgebra A é de **tipo de representação finito** se $\text{Ind}A$ tem somente um número finito de objetos não isomorfos, caso contrário, diremos que a k -álgebra A é de **tipo de representação infinito**. Neste caso A pode ser de **tipo manso** ou **selvagem** (ver definição 1.2.6 e definição 1.2.7)

Duas conjecturas da década de 40, conhecidas como **conjeturas de Brauer-Thrall**, deram um grande impulso ao desenvolvimento da teoria de representações de álgebras. A primeira conjectura de Brauer-Thrall, hoje teorema de Rojter, é a seguinte:

(BT-I) Se A é de tipo representação infinito, então existem módulos indecomponíveis de k -dimensão arbitrariamente grande.

A segunda conjectura de Brauer-Thrall, também conhecida como teorema de Nazarova-Rojter, é a seguinte:

(BT-II) Se A é de tipo representação infinito, então existe um subconjunto infinito $\{d_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada i existem infinitos módulos indecomponíveis de dimensão d_i .

Com relação às origens destas conjecturas, Ringel (ver [R2]) menciona uma conversa de Maurice Auslander com R. Brauer, onde Brauer afirmava que estas conjecturas eram problemas de alunos de pós-graduação. Como não existe nenhum trabalho publicado por Brauer e Thrall que trate deles, este problema não parece ter sido de grande interesse para eles.

Existe um abstract do Bulletin da American Mathematical Society de 1941 (ver [BR]), no qual se faz referência a um trabalho de Brauer sobre representações indecomponíveis de álgebras, onde são estudadas as álgebras A de dimensão finita que admitem uma quantidade infinita de módulos indecomponíveis dois a dois não isomorfos.

Em 1947 Thrall faz referência a esse mesmo trabalho de Brauer (nunca publicado) em um outro abstract (ver [TH]) e menciona as três condições dadas por este último para que uma k -álgebra seja uma álgebra ADHIR (Algebras with dimensional highth indecomposable representations). Com o trabalho anterior Thrall caracteriza as álgebras de radical quadrado zero de tipo representação finito. Nove anos mais tarde, em 1956 Yoshii (ver [YO]), publica um trabalho fazendo só o uso de matrizes, dando uma classificação das álgebras de radical quadrado zero de tipo de representação finito onde ele comenta que: "No último outono o professor Brauer me informou que o professor Thrall, obteve os mesmos resultados, mas seus trabalhos não estão publicados".

As conjecturas de Brauer-Thrall aparecem enunciados publicamente pela primeira vez no trabalho de Jans [JA], onde também são definidos os tipos de representação finito, limitado e estritamente não limitado.

Em 1972 Gabriel publica (ver [G]) uma classificação das álgebras de tipo de representação finito com radical quadrado zero, mostrando também que a classificação feita por Yoshii estava incorreta.

Na prova da primeira conjectura de Brauer e Thrall, dada por Rojter (ver [RO]), usam-se técnicas de categorias vectorospaciais que têm sido de grande importância no estudo de outros problemas como por exemplo os analisados em [GL]. Na primeira parte deste capítulo damos as definições básicas das categorias vectorospaciais que serão usadas no decorrer do texto. A seguir, nas seções 1.3 e 1.4 estabelecemos a correspondência entre quiver ordinários e álgebras de dimensão finita, que serão de muita utilidade no capítulo 3. Na seção 1.5 e 1.6 caracterizamos as álgebras inclinadas, cuja teoria é muito conhecida (ver [R]), e nosso principal resultado no capítulo 2 esta baseado nestas álgebras.

1.2 Categorias Vectorospaciais

A seguir definimos as categorias vectorospaciais, e mostramos a relação destas categorias com as categorias de módulos de álgebras que são extensões por um ponto.

Definição 1.2.1 *Uma categoria K é uma k -categoria se para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}K$, $\text{Hom}_K(X, Y)$ tem estrutura de k -espaço vetorial de dimensão finita e a composição é bilinear.*

Definição 1.2.2 *Uma k -categoria K é dita localmente de dimensão finita se:*

- *Para cada $x \in \text{Obj}K$ a álgebra de endomorfismos $K(x, x)$ é local.*
- *Dados dois objetos diferentes de K não são isomorfos.*

- Para qualquer $x, y \in K$, o espaço de morfismos $K(x, y)$ tem k -dimensão finita.

Definição 1.2.3 Uma k -categoria K localmente de dimensão finita é dita localmente limitada se para $x \in K$ existe só um número finito de $y \in K$ tal que $K(x, y) \neq 0$ ou $K(y, x) \neq 0$.

Definição 1.2.4 Uma k -categoria K , é k -aditiva se admite somas diretas finitas se a composição $\text{Hom}_K(X, Y) \times \text{Hom}_K(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_K(X, Z)$ é bilinear $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}K$.

Observação 1 Sejam $X_1, X_2 \in \text{Obj}K$, denotaremos por $X_1 \oplus X_2$ a soma direta de X_1 e X_2 . Seja $X \in \text{Obj}K$ não nulo, diremos que X é indecomponível se não se pode ter $X \cong X_1 \oplus X_2$, onde $X_1 \neq 0$ ou $X_2 \neq 0$.

Definição 1.2.5 [R] Uma k -categoria aditiva K , será chamada de categoria de Krull-Schmidt se todo idempotente cinde (isto é, se $e = e^2 \in \text{Hom}_K(X, X)$, então existe $\phi : Y \rightarrow X$ e $\alpha : X \rightarrow Y$ onde $\phi\alpha = e$ e $\alpha\phi = 1_Y$)

É muito conhecido que em uma categoria de Krull-Schmidt vale o seguinte teorema de unicidade para a decomposição em soma direta.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Krull-Schmidt)

Seja K uma k -categoria de Krull-Schmidt, e sejam $X_i, Y_j \in \text{Obj}K$, indecomponíveis em K , com $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t$, tal que $\bigoplus_{i=1}^s X_i \cong \bigoplus_{j=1}^t Y_j$. Então $s = t$, e existe uma permutação ϕ de $\{1, \dots, s\}$ tal que $X_i \cong Y_{\phi(i)} \forall i$

Definição 1.2.6 Uma categoria vetorespacial sobre um corpo k é um par $(K, [])$, onde K é uma k -categoria de Krull-Schmidt e $[]$ é um funtor fiel da categoria K na categoria $\text{mod}k$.

Costuma-se chamar objetos da categoria vetorespacial aos espaços vetoriais $[X]$ onde $X \in \text{Obj}K$. Os morfismos entre dois objetos $[X]$ e $[Y]$ são as aplicações lineares $[f]$

onde $f \in K(X, Y)$. Como o funtor $[]$ é fiel, podemos pensar $K(X, Y)$ como um sub-espaço de $Hom_k([X], [Y])$.

Um exemplo de categoria vetorespacial muito conhecido é o seguinte:

Exemplo 1.2.1 *Seja K uma k -categoria de Krull-Schmidt, $M \in Obj K$ e consideremos o funtor $Hom_K(M, -) : K \rightarrow K$. Então a categoria vetorespacial que tem como objetos os espaços vetoriais $Hom_K(M, X)$, onde $X \in Obj K$ e os morfismos são dados por $Hom(M, f) : Hom(M, X) \rightarrow Hom(M, Y)$ onde $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo de K e o funtor $[]$ é a inclusão canônica, será denotada por $Hom(M, K)$.*

Definição 1.2.7 *Dada uma categoria vetorespacial $(K, [])$, definimos a categoria de sub-espaços $\mathcal{U}(K)$ como*

$$Obj(\mathcal{U}(K)) = \{(X, U, \varphi) / X \in Obj K, U \in mod k \text{ e } \varphi : U \rightarrow [X], k\text{-linear}\}$$

Quanto aos morfismos, se (X, U, φ) e $(X', U', \varphi') \in Obj(\mathcal{U}(K))$ onde $X, X' \in Obj K$ e $U, U' \in mod k$, então os morfismo entre estes dois objetos é dado por um par (α, β) , onde $\beta : X \rightarrow X'$ é um morfismo da categoria K e $\alpha : U \rightarrow U'$ é um aplicação k -linear tal que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & [X] \\ \downarrow \alpha & \circlearrowleft & \downarrow [\beta] \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & [X'] \end{array}$$

Mostremos que todo objeto indecomponível de $\mathcal{U}(K)$ é isomorfo a uma tripla do tipo (X, U, φ) onde φ é injetora ou a tripla $(0, k, 0)$.

Seja $(X, U, \varphi) \in Obj(\mathcal{U}(K))$ indecomponível. Se X não é nulo, e como K é uma k -categoria, então temos que $[X]$ é um k espaço vetorial de dimensão finita. Logo consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\varphi} & [X] \\
\downarrow \alpha & \circlearrowleft & \downarrow [\beta] \\
U & \xrightarrow{\varphi} & [X]
\end{array}$$

tal que $\varphi\alpha = [](\beta)\varphi$. Seja $U = U' \oplus \ker\varphi$ e $\varphi|_{U'} = \varphi'$. Então é fácil ver que:

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\varphi} & [X] \\
\cong \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \cong \\
U' \oplus \ker\varphi & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & [X] \oplus 0
\end{array}$$

onde $(X, U, \varphi) \cong (X, U', \varphi') \oplus (0, \ker\varphi, 0)$, e $\ker\varphi \cong (0, k, 0)^{\dim_k \ker\varphi}$ com φ' injetora. Mas como (X, U, φ) é indecomponível, temos que (X, U, φ) é da forma (X, U', φ') pois X é não nulo. Então nos podemos limitar a tomar $\mathcal{U}(K)$ como segue:

$$\text{Obj}(\mathcal{U}(K)) = \{(X, U, \varphi) / X \in \text{Obj}K, U \in \text{mod}k \text{ e } \varphi : U \rightarrow [X], k\text{-linear injetora}\}$$

pois já conhecemos uma classe de indecomponíveis, a saber a classe determinada por $(0, k, 0)$.

Definição 1.2.8 Diremos que a k -categoria de Krull-Schmidt K , imersa numa categoria $\text{mod}A$ de módulos é de tipo manso (ou simplesmente manso) se para cada vetor dimensão $v \in \mathbb{N}^{Q_0}$, existe um número finito de $k[t] - A$ -bimódulos $M_1, \dots, M_s$ tais que:

- i) M_i é um $k[t]$ -módulo à esquerda livre e finitamente gerado à direita.
- ii) Para cada $X \in \text{Ind}A$, com $\dim X = v$, existe um índice i , tal que $X \cong (k[t]/(t - \lambda)) \otimes_{k[t]} M_i$ para algum $i \in \{1, \dots, s\}$ e $\lambda \in k$

Obviamente, toda álgebra de tipo de representação finito é de tipo manso.

Definição 1.2.9 Diremos que a k -álgebra A é de tipo de representação selvagem, se existe M , um $k < x, y > -A$ -bimódulo, livre de posto finito sobre $k < x, y >$, e o funtor:

$$F := - \otimes_{k < x, y >} M : \text{mod } k < x, y > \longrightarrow \text{mod } A$$

é tal que $F(X) \cong F(Y)$ então $X \cong Y$ para todo $X, Y \in \text{mod } k < x, y >$.

As definições anteriores, do tipo de representação, podem ser estendidas para uma k -categoria K . A seguir damos as noções do tipo de representação para categorias vectoriais.

Definição 1.2.10 Seja $(K, [])$ uma categoria vectorial. Diremos que:

- 1) $(K, [])$ é de tipo representação finita se $\mathcal{U}(K)$ é de tipo representação finito.
- 2) $(K, [])$ é de tipo representação selvagem se $\mathcal{U}(K)$ é de tipo representação selvagem.
- 3) $(K, [])$ é de tipo representação manso, se $\mathcal{U}(K)$ é de tipo representação manso.

Vejamos alguns resultados interessantes com relação ao tipo de representação para categorias Schurian, que definimos a seguir.

Definição 1.2.11 Uma k -categoria K é chamada Schurian se para todo $X \in \text{Obj } K$, com X indecomponível, $\text{End}(X)$ é um anel com divisão.

Com relação ao tipo de representação de uma categoria Schurian temos o seguinte lema.

Lema 1.2.1 ([R2] pag. 201) Seja $(K, [])$ uma categoria vectorial Schurian. Então temos:

- 1) Se $(K, [])$ é de tipo representação finito então, $\dim_k[X] \leq 1$, para todo $X \in \text{Ind}$.
- 2) Se $(K, [])$ é de tipo representação manso, então $\dim_k[X] \leq 2$, para todo $X \in \text{Ind}$.

Se $K = A\text{-mod}$, diz-se que A é de tipo de representação manso ou, simplesmente mansa. Em 1972 aproximadamente, Drozd (ver [D]) conseguiu estabelecer uma dicotomia na teoria de representações de álgebras, com o seguinte teorema.

Teorema 1.2.2 *Seja A uma k -álgebra. Então a k -álgebra A é de tipo de representação manso ou selvagem mas não ambos.*

A partir da seguinte definição estabeleceremos a relação das representações do bimódulo com as categorias vectoriais.

Definição 1.2.12 *Seja ${}_T M_S$ um bimódulo, onde S e T são anéis. A categoria $\mathcal{M}({}_T M_S)$ das representações do bimódulo ${}_T M_S$, tem como objetos as triplas $(X, U, \varphi : U \otimes M \rightarrow X)$, onde $X \in \text{mod} S$, $U \in \text{mod} T$. Um morfismo do objeto (X, U, φ) no objeto (X', U', φ') onde $X, X' \in \text{mod} S$, e $U, U' \in \text{mod} T$, é dado por um par de morfismos (α, β) onde $\alpha : U \rightarrow U'$ e $\beta : X \rightarrow X'$ são tais que o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} U \otimes M & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow \alpha \otimes 1_M & \circlearrowleft & \downarrow \beta \\ U' \otimes M & \xrightarrow{\varphi'} & X' \end{array}$$

isto é, $\beta \circ \varphi = \varphi' \circ (\alpha \otimes 1_M)$

Definição 1.2.13 *Seja A uma k -álgebra e $M \in \text{mod} A$. Chamaremos extensão de A por um ponto no módulo M à k -álgebra definida por:*

$$A[M] \cong \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

onde as operações de soma e multiplicação são as usuais entre matrizes.

É bem conhecido (ver [R2] pag.207) que os módulos sobre $A[M]$ podem ser identificados com as triplas (X, U, φ) onde $X \in \text{mod} A$ e $U \in \text{mod} k$ e $\varphi : X \otimes M \rightarrow U$ é um morfismo k -linear. Pela definição de $A[M]$, um $A[M]$ -módulo à direita é dado por um par (X, U) onde $X \in \text{mod} A$ e $U \in \text{mod} k$ e a ação fica determinada como segue:

$$\begin{pmatrix} X & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA & X \cdot M + Uk \end{pmatrix}$$

aqui, $X \cdot M$ é a imagem de $\varphi : X \otimes_k M \rightarrow U$. Assim, $\varphi(x \otimes m)$ é denotado xm (Muitas vezes a definição anterior é dada em função da adjunta da aplicação anterior φ , dada pelo seguinte isomorfismo

$$\text{Hom}(X, \text{Hom}_A(M, U)) \cong \text{Hom}(X \otimes_k M, U).$$

Definição 1.2.14 *Seja A uma k -álgebra e $M \in \text{Ind}A$.*

1) Denotaremos por $\text{Hom}(M_A, \mathcal{M}_A)$ à categoria vectorial onde $\mathcal{M}_A = \text{mod}A$, e o funtor $[]$ é inclusão canônica de $\text{Hom}(M_A, \mathcal{M}_A) \rightarrow \text{mod}k$.

2) Denotaremos por $r(M_A)$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$, dada pelos objetos $X \in \text{mod}A$ tal que $\text{Hom}_A(M, X) = 0$.

No seguinte lema, fica estabelecida a estreita relação entre a categoria de módulos de uma extensão por um ponto e uma categoria vectorial, como tínhamos enunciado no começo desta seção.

Lema 1.2.2 (*[R2] pag. 207*)

A subcategoria plena de $\mathcal{M}({}_kM_A)$ das representações do bimódulo ${}_kM_A$, sem somandos diretos da forma $(Y, 0, 0)$, onde $Y \in r(M_A)$ é equivalente à categoria $\mathcal{U}(\text{Hom}(M_A, \mathcal{M}({}_kM_A)))$.

A partir deste lema, temos que o tipo de representação da k -álgebra $A[M]$, depende do tipo de representação de $r(M)$ e de $\mathcal{U}(\text{Hom}(M, \text{mod}A))$. Antes de fechar esta seção, vejamos algumas propriedades da k -álgebra $A[M]$. Consideremos a k -álgebra A com dimensão global finita. Os resultados a seguir visam dar um entendimento maior das extensões por ponto.

Proposição 1.2.1 (*ver pag. 59 de [ARS]*) *Seja A uma k -álgebra e ${}_kM_A$ um bimódulo não nulo. Então, $\text{gldim}A[M] = \max\{\text{gldim}A, \text{pd}M_A + 1\}$.*

Também temos o seguinte lema:

Lema 1.2.3 *Seja A uma k -álgebra e $M \in \text{mod} A$. A categoria $\text{mod} A$ é uma subcategoria plena de $\text{mod} A[M]$.*

Então é fácil ver que vale o seguinte lema:

Lema 1.2.4 *[GL] Sejam $X, Y \in \text{mod} A$, então vale :*

$$\text{Ext}_{A[M]}^n((X, 0, 0), (Y, 0, 0)) \cong \text{Ext}_A^n(X, Y)$$

Os lemas 1.2.3 e o lema 1.2.4 mostram a importância da categoria $\text{mod} A$ na categoria $\text{mod} A[M]$.

1.3 Álgebras de dimensão finita e Quiver com relações

Seja A uma k -álgebra conexa, básica de dimensão finita, mostraremos nesta seção que podemos associar a ela um “quiver” univocamente determinado.

Definição 1.3.1 *Um quiver Q é dado por dois conjuntos Q_0 e Q_1 e um par de funções $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$. Os elementos do conjunto Q_0 são chamados de **vértices** do quiver Q , e os elementos do conjunto Q_1 são chamados de **flechas** do quiver Q . Dada uma flecha $\alpha \in Q$, $s(\alpha)$ chama-se de *vértice inicial* da flecha α e, o vértice $e(\alpha)$ é o *vértice final* da flecha α . Usaremos a notação $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$.*

Um **caminho** γ de comprimento n , que denotaremos por $l(\gamma) = n$, em Q é uma seqüência $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Q_1$ tal que para $1 \leq i \leq n-1$, $e(\alpha_{i+1}) = s(\alpha_i)$. Diz-se que o vértice inicial de α_n (final de α_1) é o vértice inicial $s(\gamma)$ (final $e(\gamma)$) do caminho γ . Além disso, para cada vértice $a \in Q_0$ é introduzido um novo objeto que o

denotaremos por ϵ_a , chamado de caminho trivial, para o qual se estabelece que a é seu vértice inicial e seu vértice final, aqui $l(\epsilon_a) = 0$ por definição. No caso em que γ não é um caminho trivial mas $s(\gamma) = e(\gamma)$, dizemos que o caminho γ é um circuito orientado, ou um ciclo orientado. Os ciclos de comprimento 1, são chamados de laços.

Seja Q um quiver, então a k -álgebra de caminhos, que denotaremos por kQ , é o k -espaço vetorial com base nos caminhos de Q , incluindo os caminhos triviais, com a multiplicação definida na base, como segue: Sejam $\gamma_1 = \alpha_n \cdots \alpha_1$ e $\gamma_2 = \beta_m \cdots \beta_1$ dois caminhos do quiver Q , então temos

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1 & \text{se } e(\gamma_1) = s(\gamma_2) \\ 0 & \text{se } e(\gamma_1) \neq s(\gamma_2) \end{cases}$$

Seja J o ideal de kQ gerado pelas flechas do quiver Q . Se o quiver Q for finito, então a álgebra de caminhos kQ tem unidade e diremos que um ideal I de kQ é admissível se existir um $n > 0$ tal que $J^n \subseteq I \subseteq J^2$.

Seja $A \cong P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ a decomposição da k -álgebra A em A -módulos indecomponíveis á direita onde $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$. No caso em que $r_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$, então a k -álgebra A é chamada de básica. As álgebras básicas são mais “fáceis” de trabalhar que as não básicas. Como o principal objetivo da teoria de representações de álgebras é estudar as correspondentes categorias de módulos, o seguinte teorema nos permite restringir o estudo às categorias de módulos sobre álgebras básicas.

Teorema 1.3.1 *Seja A uma k -álgebra. Então existe uma k -álgebra básica B , que é única salvo isomorfismo, tal que as categorias $\text{mod}A$ e $\text{mod}B$ são equivalentes.*

Isto é, no fundo, uma consequência do teorema de Morita. Para uma discussão mais detalhada ver [JM]. De agora em diante a nossa k -álgebra A será considerada como sendo

básica ou seja vale o seguinte $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t$ onde os P_i 's são dois a dois não isomorfos.

E temos que $1 = \sum_{i=1}^t e_i$ onde os elementos $e_1, \dots, e_t$ têm as seguintes propriedades:

- 1) para cada i , e_i é um idempotente, isto é, $e_i^2 = e_i$.
- 2) O conjunto $\{e_i\}_{i=1}^t$ é um conjunto ortogonal, ou seja $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$.
- 3) Para cada i , e_i é primitivo, ou seja, se $e_i = e' + e''$ onde e' e e'' são idempotentes ortogonais, então $e' = 0$ ou $e'' = 0$.

Um conjunto $\{e_1, \dots, e_t\} \subset A$ com as propriedades acima, é chamado um sistema completo (pois $1 = \sum_{i=1}^t e_i$) de idempotentes ortogonais primitivos de A . Neste caso temos que a k -álgebra A se decompõe como $A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_t A$ onde t indica o número de projetivos indecomponíveis, não isomorfos.

Agora, dada uma k -álgebra A básica definamos o quiver ordinário associado a ela. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos da álgebra A . Portanto, temos que $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, onde $e_i A = P_i \not\cong P_j = e_j A$ para $i \neq j$. Então, o quiver ordinário da k -álgebra A , que denotaremos por Q_A , é definido pelos vértices $(Q_A)_0 = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, determinando que o número de flechas que começam no vértice ϵ_i e terminam no vértice ϵ_j é dado por:

$$\dim_k e_i (\text{rad} A / \text{rad} A^2) e_j$$

Podemos observar que se a k -álgebra A é indecomponível, então o quiver Q associado a ela é conexo. A seguir daremos a definição de um quiver com relações.

Definição 1.3.2 1) Uma relação ρ em Q é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos eles com os mesmos vértices iniciais e finais.

2) Um conjunto E contido num ideal admissível R é um sistema de relações de R se E é um conjunto gerador de R e todo elemento de E é uma relação.

Definição 1.3.3 Um quiver com relações, é um par (Q, R) , onde Q é um quiver e R é um sistema de relações (um conjunto de elementos de kQ) que geram um ideal admissível I de kQ . A álgebra do quiver com relações (Q, R) é a álgebra kQ/I .

Fazendo abuso de notação consideremos o ideal admissível I do teorema anterior como sendo o sistema de relações R . Agora, com as definições anteriores estamos em condições de enunciar o seguinte teorema de Gabriel.

Teorema 1.3.2 *Toda k -álgebra A de dimensão finita, básica é isomorfa à álgebra de um quiver com relações (Q, R) .*

Tendo em vista o teorema anterior, a partir de agora consideraremos a álgebra A da forma kQ/I .

1.4 Correspondência entre módulos e representações

Na seção anterior estabelecemos a relação entre k -álgebras e quivers com relações dada pelo teorema de Gabriel. Agora daremos uma descrição dos módulos, em termos do quiver ordinário associado a álgebra A .

Seja (Q, R) um quiver com relações. Uma representação do quiver Q é um par $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ onde para cada $i \in Q_0$, V_i é um k -espaço vetorial de dimensão finita e para cada $\alpha \in Q_1$, com $s(\alpha) = i, e(\alpha) = j$, $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ é uma transformação linear.

Diremos que $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (f_\beta)_{\beta \in Q_1})$ é uma sub-representação de $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ se é uma representação, W_i é um sub-espaço vetorial de V_i para cada i , e f_β é a restrição de $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ ao sub-espaço W_i de V_i .

Seja o caminho $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ não trivial tal que $s(\gamma) = i$ e $e(\gamma) = j$, então podemos definir $V(\gamma)$, como a transformação linear de V_i a V_j dada pela composição de $f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_1}$. Se tivermos uma combinação linear de caminhos $\varphi = \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} \gamma$, então $V(\varphi) := \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} V(\gamma)$. Logo, o anterior pode ser estendido para toda a álgebra kQ por linearidade. Então temos a seguinte definição.

Definição 1.4.1 1) Dizemos que a representação V satisfaz uma relação δ se $V(\delta) = 0$ e que satisfaz o sistema de relações R se satisfaz cada relação $\delta \in R$.

2) Uma representação de (Q, R) é uma representação de Q que satisfaz as relações de R .

Sejam $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$, duas representações de Q , um morfismo $\varphi : V \rightarrow W$ é definido por uma família de transformações lineares $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$ tal que para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \varphi_i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

ou seja, $\varphi_j f_\alpha = g_\alpha \varphi_i$.

O conjunto dos morfismos entre V e W é denotado por $\text{Hom}_{(Q,R)}(V, W)$. Notemos também que para cada par de representações V e W , $\text{Hom}_{(Q,R)}(V, W)$ é um k -espaço vetorial, onde a soma de morfismos é definida componente a componente. Logo, $\text{mod}(Q, R)$ denotará a categoria que tem como objetos as representações do quiver Q , e como morfismos os morfismos entre as representações, pode-se ver facilmente que a categoria $\text{mod}(Q, R)$ é uma k -categoria. O seguinte teorema estabelece a equivalência entre a k -categoria $\text{mod}A$ e a k -categoria $\text{mod}(Q, R)$.

Teorema 1.4.1 [CO] *Seja A uma k -álgebra básica e indecomponível. Então, as k -categorias $\text{mod}(Q, R)$ e $\text{mod}A$ são equivalentes.*

Seja $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ uma representação, então o espaço vetorial subjacente ao A -módulo V é dado por $\coprod_i V_i$. Recordemos que pelo teorema de Gabriel 1.3.2, temos que a k -álgebra $A \cong kQ/R$, para algum quiver com relações (Q, R) .

A partir do teorema anterior, estamos interessados em dar uma descrição na linguagem de representações, dos módulos indecomponíveis projetivos, injetivos e simples. Mas antes vejamos as seguintes definições.

Definição 1.4.2 *Seja A uma k -álgebra. A k -álgebra oposta de A , que denotaremos por A^{op} , é tal que:*

- 1) *Como k -espaço vetorial $A \cong_k A^{op}$.*
- 2) *A multiplicação em A^{op} é dada por $a * b := ba$ para todo $a, b \in A^{op}$, onde ba é o produto em A .*

O teorema 1.4.2 e proposição 1.4.1 a seguir caracterizam o funtor dualidade, para depois fazer a descrição dos módulos injetivos.

Definição 1.4.3 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Diremos que o funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma dualidade se o funtor $\bar{F} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência.*

Teorema 1.4.2 *Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre duas categorias é uma dualidade se e somente se o funtor F é fiel, pleno e denso.*

Proposição 1.4.1 *Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor dualidade entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.*

- 1) *Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo se e somente se $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ é um epimorfismo em $\mathcal{D}$.*
- 2) *Um objeto C em $\mathcal{C}$ é projetivo (injetivo) se e somente se, $F(C)$ é injetivo (projetivo) em $\mathcal{D}$.*

O funtor $F : \text{mod } k \rightarrow \text{mod } k$, definido por $F(X) = \text{Hom}_k(X, k)$, onde X é um k -espaço vetorial de dimensão finita é um exemplo de dualidade.

Vejamos agora a descrição das representações simples, e projetivas. Para as representações injetivas faremos uso da proposição 1.4.1.

Para cada vértice $i \in Q_0$, definamos a representação $S_i = ((S_j)_i, f_\alpha)$ em (Q, R) -mod da seguinte maneira:

$$(S_i)_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ k & \text{se } i = j \end{cases}$$

e $f_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in Q_1$. S_i satisfaz todas as relações de R , e para $i' \neq i$ temos que $S_{i'} \not\cong S_i$, pois basta observar que $\dim_k(S_i)_j = 1 \neq \dim_k(S_{i'})_j = 0$. Claramente S_i não possui nenhuma sub-representação não trivial, logo a representação S_i é simples. Pela correspondência dada pelo teorema 1.4.1 (ver detalhes em [CO]) temos que a representação S_i corresponde-se com um módulo simples em $\text{mod}A$. Portanto, as representações simples em $\text{mod}(Q, R)$ estão em correspondência biunívoca com os vértices $i \in Q_0$.

Seja $A \cong kQ/I$ e $A \cong \bar{e}_1 A \oplus \cdots \oplus \bar{e}_n A$, onde os módulos $\bar{e}_i A$ são módulos projetivos indecomponíveis, e como estamos considerando que a k -álgebra é básica temos que $\bar{e}_i A \not\cong \bar{e}_j A$ se $i \neq j$. Seja então $P_i = \bar{e}_i A \in \text{Ind}A$ projetivo. Pela equivalência dada no teorema 1.4.1, temos que a representação em $\text{mod}(Q, R)$ associada ao projetivo P_i é dada por $P_i = ((P_i)_j, f_\alpha)$. Logo, $(P_i)_j = \bar{e}_i A \bar{e}_j = e_i k Q e_j / \langle e_i R e_j \rangle$ e se temos uma flecha $\alpha : j \rightarrow s$ então $f_\alpha : e_i k Q e_j / e_i R e_j \rightarrow e_i Q e_s / e_i R e_s$ é dada por $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \alpha \bar{\gamma}$, quando γ é um caminho de i até j . Veja que se $R = 0$, então temos que $(P_i)_j = e_i k Q e_j$, que é o k -espaço vetorial definido por todos caminhos dirigidos do vértice i até o vértice j . Se existem relações do entre o vértice i e o vértice j , então $\dim_k(P_i)_j < \#\text{caminhos dirigidos de } i \text{ até } j$.

Dado que temos caracterizado as representações projetivas indecomponíveis, usaremos as propriedades da dualidade dadas na proposição 1.4.1, para caracterizar as representações injetivas indecomponíveis. Mas antes definimos a noção de quiver oposto.

Para um quiver Q com conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$ denotemos por Q^{op} o quiver tendo o mesmo conjunto de vértices, e para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j \in Q$ uma flecha $\alpha^{op} : j \rightarrow i$ em Q^{op} . Para um caminho $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ em Q , seja $p^{op} = \alpha_1^{op} \cdots \alpha_n^{op}$ em Q^{op} . Seja δ uma relação, denotemos por δ^{op} a relação induzida por δ em Q^{op} . Assim, definimos $(Q, R)^{op} = (Q^{op}, R^{op})$.

Consideremos agora o funtor dualidade $D : \text{mod}(Q, R) \rightarrow \text{mod}(Q, R)^{op}$ definido por $D(X) = \text{Hom}_k(X, k)$. Seja $V = \coprod V_i \in \text{mod}(Q, R)$, e denotemos por DV a representação em $\text{mod}(Q^{op}, R^{op})$. Esta representação pode ser descrita da seguinte maneira:

O k -espaço vetorial DV é dado por $D(\coprod_{i \in Q_0} V_i) = \text{Hom}_k(\coprod_{i \in Q_0} V_i, k) = \coprod \text{Hom}_k(V_i, k) = \coprod DV_i$.

Para cada vértice i o espaço vetorial $(DV)_i$ é $e_i^{op} DV = D(e_i V) = DV_i = \text{Hom}_k(V_i, k)$, onde estamos identificando $e_i V$ com V_i . Isto dá uma descrição do espaço vetorial da representação dual como espaço dual em cada vértice.

A seguir, consideremos a flecha $\alpha : i \rightarrow j$ e a transformação linear $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$. Aplicando dualidade, temos a seguinte transformação linear $Df_\alpha : DV_j \rightarrow DV_i$ definida por $Df_\alpha(t)(v) = t(f_\alpha(v))$ onde $t \in DV_j$ e $v \in V_i$. Seja $Df_{\alpha^{op}} = Df_\alpha$. Logo, temos que se $V \in \text{mod}(Q, R)$ então $DV \in \text{mod}(Q^{op}, R^{op})$.

Dado que até agora sabemos identificar os módulos projetivos indecomponíveis, com a sua representação indecomponível em $\text{mod}(Q, R)$, consideremos $P_1^*, \dots, P_n^*$ os projetivos indecomponíveis em $\text{mod}(Q, R)^{op}$. Então, os injetivos indecomponíveis estão dados por $D(P_1^*), \dots, D(P_n^*)$, pela proposição 1.4.1. Então, aplicando o funtor dualidade D as representações projetivas P_i^* e considerando $I_i = ((I_i)_j, f_\alpha) := D(P_i^*)$, temos que

$$(I_i)_j \cong_k (e_j^{op} k Q^{op} e_i^{op}) / (e_j^{op} R^{op} e_i^{op}) \cong_k (e_i k Q e_j / e_i R e_j)$$

Logo, $(I_i)_j$ tem estrutura de k -espaço vetorial, dada pelos caminhos do vértice j até o vértice i . Se $R \neq 0$, então $\dim_k(I_i)_j < \#$ de caminhos de j até i . Se $\alpha : j \rightarrow s$, então $f_\alpha : e_i k Q e_j / e_i R e_j \rightarrow e_i k Q e_s / e_i R e_s$ é dada por $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \gamma'$ se existe um caminho γ' do vértice i até o vértice j , tal que $\gamma = \gamma' \alpha$ e zero no resto.

Seja V uma representação de (Q, R) , então o radical $rV = U$, é a representação U , que é gerado pelas flechas, e temos que $U_i = \sum_{e(\alpha)=i} f_\alpha(V(s(\alpha)))$, que é o sub-espaço gerado pelas imagens das transformações f_α em V_i . Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$, seja $f'_\alpha = f_\alpha|_{U_i}$ a transformação de U_i com imagem em U_j . O socle $\text{soc} V = W = (W_i, f_\alpha^a$ da representação

V é definida por $W_i = \bigcap_{s(\alpha)=i} \text{Ker } f_\alpha$, formada pelos elementos que são levados no zero para toda f_α saindo de V_i . Claramente $f_\alpha(W(i)) = 0$ para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ e temos que $f_\alpha = 0$.

Como ilustração dos conceitos anteriores consideremos o seguinte exemplo

Exemplo 1.4.1 Consideremos o seguinte quiver:

$$1 \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \cdot 2$$

Então, Q^{op} é o quiver dado por

$$1 \cdot \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha^{op}} \\ \xleftarrow{\beta^{op}} \end{array} \cdot 2$$

Seja V a representação $k \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{a} \end{array} \cdot k$ de Q , onde V_1 tem como k -base $\{u\}$, V_2 tem como k -base $\{v\}$, $f_\alpha(u) = v$ e $f_\beta(u) = av$, onde $a \in k$. Sejam $\{u^*\}$ e $\{v^*\}$ as bases duais de $DV_1 = V_1^*$ e de $DV_2 = V_2^*$ respectivamente. Logo, temos que $Df_{\alpha^{op}}(v^*)(u) = v^*(f_\alpha(u)) = v^*(v) = 1$, onde $Df_{\alpha^{op}}(v^*) = u^*$ e portanto $Df_{\alpha^{op}} = f_\alpha^*$. Por outro lado temos que $Df_{\beta^{op}}(v^*)(u) = v^*(f_\beta(u)) = v^*(av) = a$ implicando que $Df_{\beta^{op}}(v^*) = au^*$. Portanto, DV tem como representação o quiver $k \cdot \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xleftarrow{a} \end{array} \cdot k$ de Q^{op} .

O módulo projetivo P_1 tem como k -base $\{e_1, \alpha, \beta\}$, que corresponde a representação

$$k \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xrightarrow{f_\beta} \end{array} \cdot k \amalg k$$

onde $f_\alpha(b) = (b, 0)$ e $f_\beta(b) = (0, b)$ para todo $b \in k$. O módulo projetivo P_2 tem como k -base e_2 que corresponde ao quiver $0 \cdot \xrightarrow{\quad} \cdot k$. Agora, o Q^{op} -módulo projetivo P_1^* corresponde a representação $k \cdot \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \cdot 0$ de Q^{op} e P_2^* corresponde a representação de $k \amalg k \cdot \begin{array}{c} \xleftarrow{g_{\alpha^{op}}} \\ \xleftarrow{g_{\beta^{op}}} \end{array} \cdot k$, onde $g_{\alpha^{op}}(c) = (c, 0)$ e $g_{\beta^{op}}(c) = (0, c)$ para todo $c \in k$.

Logo, o módulo injetivo $I_1 = DP_1^*$ corresponde a $k \cdot \xrightarrow{\quad} \cdot 0$ e $I_2 = DP_2^*$ corresponde a

$$k \amalg k \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xrightarrow{f_\beta} \end{array} \cdot k$$

onde $f_\alpha(b, c) = b$ e $f_\beta(b, c) = c$ para todo $b, c \in k$.

Seja V a representação de

$$k \amalg k \amalg k \xrightarrow[f_\beta]{f_\alpha} \cdot k \amalg k$$

onde $f_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $f_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com relação a base canônica de $k \amalg k \amalg k$ e de $k \amalg k$. Fazendo um pequeno cálculo pode-se ver que DV é a representação de

$$k \amalg k \amalg k \xrightarrow[(Df)_{\beta^{op}}]{(Df)_{\alpha^{op}}} \cdot k \amalg k$$

onde $D(nk)$ é identificado com nk através da base dual, $(Df)_{\alpha^{op}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $(Df)_{\beta^{op}} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ com relação as bases duais.}$$

1.5 Seqüências e componentes de Auslander-Reiten

Definição 1.5.1 Uma seqüência exata curta em $\text{mod} A$ que não cinde

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

é uma seqüência de Auslander-Reiten (ARS) se:

1) Os módulos N e M são indecomponíveis.

2) Para todo morfismo $h : X \longrightarrow M, X \in \text{mod} A$, que não seja um epimorfismo que cinde (que não é seção), existe morfismo $\bar{h} : X \longrightarrow E$ tal que $g\bar{h} = h$.

2') Para todo morfismo $h : N \longrightarrow X, X \in \text{mod} A$, que não seja um monomorfismo que cinde (que não é retração), existe $\bar{h} : E \longrightarrow X$ tal que $\bar{h}f = h$.

Observação 1 *Note que as sentenças 1) e 2) da definição anterior são equivalentes as sentenças 1) e 2') da definição anterior.*

A partir da definição anterior, estamos interessados em saber quando estas seqüências existem, e se existem quando são únicas (salvo isomorfismo). O seguinte teorema dá um critério de existência e unicidade de estas seqüências.

Teorema 1.5.1 *Sejam A uma k -álgebra e $M \in \text{mod} A$ indecomponível.*

1) Se M não for projetivo, então existe uma única (salvo isomorfismo) seqüência de Auslander Reiten terminando em

$$M: 0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

2) Se M não for injetivo, então existe uma única seqüência de AR começando em

$$M: 0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Estudaremos brevemente os morfismos que definem as seqüências de Auslander-Reiten.

Definição 1.5.2 *Seja M um módulo indecomponível.*

1) Um morfismo $g : E \longrightarrow M$ é um morfismo poço em M se:

i) g não é um epimorfismo que cinde.

ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $gh = g$, h é um automorfismo.

iii) para todo $h : X \longrightarrow M$ que não seja um epimorfismo que cinde, existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$.

2) Um morfismo $f : M \longrightarrow E$ é um morfismo fonte em M se :

i) f não é um monomorfismo que cinde.

ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $hf = f$, h é automorfismo.

iii) para todo $h : M \longrightarrow X$ que não seja um monomorfismo que cinde, existe $h' : E \longrightarrow E$ tal que $h'f = h$.

Seja $M \in \text{Ind} A$. Se o módulo M não for projetivo, temos que existe uma seqüência de Auslander-Reiten:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde o módulo N também é indecomponível. Como as seqüências de Auslander-Reiten estão univocamente determinadas (salvo isomorfismo), temos que existe um único módulo indecomponível N , que o denotaremos por $N = \tau M$ e é chamado de **transladado de Auslander-Reiten**.

Agora, se o módulo $M \in \text{Ind}A$ não for injetivo, sabemos que existe uma única seqüência de Auslander-Reiten começando no módulo M , a saber:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

onde o único módulo N será denotado por $\tau^{-1}M$ e é chamado de **transladado inverso de Auslander-Reiten de M** .

Observação 2 1) Por conveniência às vezes escreveremos $\tau P = 0$ para P um módulo projetivo e $\tau^{-1}I = 0$ para I um módulo injetivo.

2) Note-se que $M \in \text{ind}A$ não é projetivo, então $\tau^{-1}(\tau M) \cong M$.

3) Note-se que $M \in \text{ind}A$ não é injetivo, então $\tau(\tau^{-1}M) \cong M$.

Sejam $X, Y \in \text{ind}A$, o módulo X está na τ -órbita do módulo Y , se existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que o módulo $\tau^n X$ é isomorfo ao módulo Y e diremos que o módulo X é τ -periódico se existe um $n > 0$ tal que $\tau^n X$ é isomorfo ao módulo X .

Proposição 1.5.1 Seja $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ uma ARS. Então,

a) f é uma fonte e qualquer outra fonte em N é isomorfa a f .

b) g é um poço e qualquer outro poço em M é isomorfo a g .

Vejamos agora a situação particular em que o módulo M é um módulo projetivo ou injetivo.

Proposição 1.5.2 1) Se P é um módulo projetivo indecomponível não simples então o morfismo inclusão $i : \text{rad}P \longrightarrow P$ é um poço e qualquer outro poço em P é isomorfo a i .

2) Se I é um módulo injetivo indecomponível não simples então a projeção natural $\pi : I \longrightarrow I/\text{soc}I$ é uma fonte e qualquer outra fonte em I é isomorfa a π .

A seguir damos algumas outras propriedades dos morfismos das *ARS* .

Definição 1.5.3 *Um morfismo que não cinde $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ com $X, Y \in \text{mod} A$ é irreduzível se para cada decomposição do morfismo $f = gh$, g é um epimorfismo que cinde ou h é um monomorfismo que cinde.*

Notemos que a partir da definição anterior, qualquer morfismo irreduzível f é um epimorfismo ou um monomorfismo. Na seguinte proposição estabelecemos a relação entre morfismos irreduzíveis e morfismos poço e fonte.

Proposição 1.5.3 *Seja $M \in \text{Ind} A$.*

- 1) *Um morfismo $h : M \rightarrow X$ é irreduzível, se e somente se, existe um morfismo $h' : M \rightarrow X'$ tal que o par (h, h') é uma fonte em M .*
- 2) *Um morfismo $h : X \rightarrow M$ é irreduzível, se e somente se, existe um morfismo $h' : X' \rightarrow M$ tal que o par (h, h') é um poço em M .*

A partir dos conceitos anteriores associaremos à k -álgebra A um quiver Γ_A , onde os vértices e as flechas representarão, respectivamente, as classes de isomorfismo dos módulos indecomponíveis e os morfismos irreduzíveis entre eles. Γ_A será chamado de **Quiver de Auslander-Reiten** da k -álgebra A .

Definição 1.5.4 *O quiver de Auslander-Reiten da k -álgebra A é definido da seguinte forma:*

- 1) *Os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismo de $\text{ind} A$, que denotaremos por $[M]$ para cada $M \in \text{ind} A$.*
- 2) *O número de flechas do vértice $[M]$ para o vértice $[M']$ é dado por $e = \dim_k \text{Irr}(M, M')$, onde $\text{Irr}(M, M') = \text{rad}(M, M') / \text{rad}^2(M, M')$. Se o número $e > 1$, diremos que existe uma flecha múltipla de $[M]$ em $[M']$.*

Observação 3 [R]

1) O quiver Γ_A não tem laços, pois toda aplicação irredutível é monomorfismo ou epimorfismo, mas não isomorfismo.

2) Γ_A é um quiver localmente finito, isto é, para cada vértice $[M] \in \Gamma_A$, existe somente um número finito de flechas chegando ou saindo do vértice $[M]$.

3) Seja $M \in \text{ind}A$, não projetivo, então o número de flechas que saem do vértice $[\tau M]$ é igual ao número de flechas que chegam no vértice $[M]$.

O quiver Γ_A decompõe-se em componentes conexas, e interessam em particular os seguintes tipos que damos a seguir.

Definição 1.5.5 Uma componente conexa $\mathcal{C}$ do quiver de Auslander-Reiten Γ_A é chamada de pós-projetiva se:

- 1) Todo módulo de $\mathcal{C}$ está numa τ -órbita de um módulo projetivo.
- 2) Nenhum módulo de $\mathcal{C}$ está num circuito orientado.

Dualmente temos que uma componente conexa $\mathcal{C}$ é pré-injetiva se:

- 1') Todo módulo de $\mathcal{C}$ está numa τ -órbita de um módulo injetivo.
- 2') Nenhum módulo de $\mathcal{C}$ está num circuito orientado.

Sem entrar em detalhes anotamos que a componente conexa $\mathcal{C}$ é chamada de um tubo se:

- 1'') A componente $\mathcal{C}$ não tem flechas múltiplas.
- 2'') A componente $\mathcal{C}$ contém um circuito orientado.
- 3'') A realização geométrica da componente $\mathcal{C}$ (o espaço topológico onde $\mathcal{C}$ pode ser “realizada” naturalmente) é dada por $|\mathcal{C}| = S^1 \times \mathbb{R}_0^+$, onde S^1 é o círculo unitário e $\mathbb{R}_0^+$ é o conjunto dos reais não negativos.

Se a componente conexa $\mathcal{C}$ é um tubo, o conjunto $S^1 \times \{0\}$ é chamado da boca do tubo, e um tubo é chamado de estável (ou regular, ver abaixo) se ele não contém módulos projetivos nem módulos injetivos. Dado um tubo estável $\mathcal{C}$, existe um $n \in \mathbb{N}$, tal que

para todo módulo M em $\mathcal{C}$, temos que $\tau^n M = M$. O número $n \in \mathbb{N}$ anterior é chamado posto do tubo estável que é da forma $\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}A_\infty/(n)$ onde A_∞ é o A_n dada na figura 1.1, com $n = \infty$ pag. 32). Um tubo é dito homogêneo se seu posto é 1.

Definição 1.5.6 *Seja A uma k -álgebra. Um ciclo em $\text{mod}A$ é uma seqüência*

$$M = M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \longrightarrow M_r = M$$

de não isomorfismos não nulos entre módulos indecomponíveis de $\text{mod}A$. Este ciclo é dito finito se os morfismos $f_i \notin \text{rad}^\infty(\text{mod}A) \ \forall i = 0, \dots, r-1$. A álgebra A será de ciclo finito se todo ciclo em $\text{mod}A$ é finito.

Em [R] mostra-se que, freqüentemente, o quiver de Auslander-Reiten Γ_A admite uma família tubular $\mathcal{T}$, isto é, existe um conjunto $\mathcal{T} = \{T(\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}\}$ onde cada $T(\lambda)$ é um tubo que é uma componente conexa de Γ_A e onde $\lambda \neq \lambda'$ implica que $T(\lambda)$ é diferente de $T(\lambda')$. A família tubular será chamada estável se $T(\lambda)$ é um tubo estável $\forall \lambda \in I$. Recordemos, que a partir da definição 1.5.5 o quiver Γ_A é uma primeira aproximação da sub-categoria plena $\text{Ind}A$. Logo, as componentes descritas na definição 1.5.6 podem ser vistas como sub-categorias plenas de $\text{mod}A$.

Definição 1.5.7 *Uma família tubular $\mathcal{T}$ em $\text{mod}A$ é dita separante se existem duas sub-categorias $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ plenas de $\text{mod}A$ tal que:*

- 1) $\mathcal{T}$ é standard, isto é, os únicos caminhos não nulos são os caminhos seccionais.
- 2) $\text{Hom}_A(\mathcal{I}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_A(\mathcal{I}, \mathcal{T}) = \text{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{P}) = 0$.
- 3) Todo morfismo de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{I}$ se fatora através de $T(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$

$$\mathcal{P} \bigvee \mathcal{T} \bigvee \mathcal{I}$$

Seja $\mathcal{T}$ uma família de tubos estáveis em $\text{mod}A$. Para cada $\lambda \in I$ denotaremos por n_λ o posto do tubo $T(\lambda)$. A função $n_* : I \longrightarrow \mathbb{N}_1$ será chamada o tipo da família $\mathcal{T}$. Fundamentalmente estamos interessados no caso manso, no qual, como pode-se ver no

trabalho de Crawley-Boevey ([C-B1]) quase todos os tubos da família $\mathcal{T}$ são homogêneos e logo podemos escolher um subconjunto I' finito de I tal que $n_\lambda \neq 1$ implica que $\lambda \in I'$. Então, temos que o subconjunto $I' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$, onde os λ_s são dois a dois diferentes denotemos n_{λ_s} por n_s , e chamamos de tipo tubular da álgebra A a $(n_1, \dots, n_t)$.

Definição 1.5.8 *Seja $\mathcal{T}$ em $\text{mod} A$ uma família tubular separante. Então para $X \in \mathcal{T}^{(\lambda)}$ existe um caminho seccional (isto é, não existe $i = 3, \dots, m$ tal que $\tau X_i \cong X_{i-2}$)*

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_m = X$$

onde X_1 está na boca do tubo $\mathcal{T}^{(\lambda)}$, e chamaremos a m de comprimento regular de X .

A seguir, apresentamos uma família de álgebras, chamadas álgebras hereditárias, cujo tipo de representação está completamente entendida (ver [R]).

Definição 1.5.9 *Uma k -álgebra A é chamada de hereditária, se todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo.*

Para as álgebras hereditárias existe uma classificação completa, segundo seu tipo de representação (finito ou infinito) via quivers ordinários. Por exemplo, o seguinte teorema dado por Gabriel, caracteriza as de tipo de representação finito.

Teorema 1.5.2 (Gabriel) *Seja A uma k -álgebra hereditária, básica e conexa e indecomponível. Então, a k -álgebra A é de tipo de representação finito se e somente se A é isomorfa a álgebra de caminhos de um quiver cujo grafo subjacente é um diagrama de Dynkin, que são os grafos descritos na figura 1.1.*

Depois de forma totalmente independente, Nazárova, Donovan e Freislich mostraram o seguinte teorema para álgebras hereditárias de tipo manso.

Figura 1.1: Onde n indica o número de vértices

Teorema 1.5.3 *Seja A uma k -álgebra hereditária, básica e conexa. Então A é de tipo de representação infinito manso se e somente se A é a álgebra de caminho de um quiver cujo grafo subjacente é um diagrama de Dynkin estendido ou Euclideano (ver figura 1.2).*

Nos dois casos acima, também é conhecido o quiver de Auslander-Reiten destas álgebras. Daremos a seguir um teorema que caracteriza o quiver de Auslander-Reiten no caso de álgebras hereditárias de tipo de representação infinito, manso.

Teorema 1.5.4 *[R] Seja A uma k -álgebra hereditária mansa de tipo infinito. Então, Γ_A consiste das seguintes componentes. Uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}$ contendo todos os módulos projetivos, uma componente pré-injetiva $\mathcal{I}$ contendo todos os módulos injetivos, e uma família tubular estável separante $\mathcal{T}$, tal que $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{I})$ verificam as propriedades da definição 1.5.8.*

Figura 1.2: Onde $n + 1$ indica o número de vértices

Observação 4 1) No teorema anterior os tubos de $\mathcal{T}$ são regulares e ortogonais dois a dois, isto é, $\text{Hom}_A(X, Y) = \text{Hom}_A(Y, X) = 0$ para todo $X \in T(\lambda)$ e $Y \in T(\beta)$ onde $\lambda \neq \beta$. O conjunto de parâmetros I pode ser identificado com a reta projetiva de k .

2) Quase todos os tubos de $\mathcal{T}$ são homogêneos.

Assim, se a álgebra A é hereditária de tipo infinito manso, o quiver de Auslander-Reiten Γ_A é como na figura 1.3:

Para finalizar esta seção anotamos que os grafos de Dynkin, dados na figura 1.1, e os grafos Euclidianos dados na figura 1.2, tem associada uma estrela definida da seguinte maneira:

Figura 1.3:

Consideremos uma função $r : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$. Então a estrela T_r é a união disjunta de ramos onde estes ramos estão indexados por Λ , e o ramo indexado por $\lambda \in \Lambda$ tem comprimento $r(\lambda)$. Cada um destes ramos será identificado com o grafo Dynkin $A_{r(\lambda)}$. O centro da estrela T_r é dada pela identificação de um dos pontos extremos de cada um dos ramos. Se $\Lambda = \{1, \dots, s\}$, denotaremos por $T_{r(1), \dots, r(s)}$ no lugar de T_r e se $r(\lambda) = 1$, para algum $\lambda \in \Lambda$, então o ramo não aparece na notação da estrela. Para $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ temos as seguintes igualdades, dadas pela tabela abaixo, no caso em que a estrela é dado pelo grafo Dynkin e Euclidiano:

<u>Grafo Dynkin</u>	<u>Grafo Euclidean</u>
$T_n = A_n$	
$T_{n_1, n_2} = A_{n_1 + n_2 - 1}$	
$T_{n-2, 2, 2} = D_n$	$T_{2, 2, 2, 2} = \widetilde{D}_4$
$T_{3, 3, 2} = E_6$	$T_{3, 3, 3} = \widetilde{E}_6$
$T_{4, 3, 2} = E_7$	$T_{4, 4, 2} = \widetilde{E}_7$
$T_{5, 3, 2} = E_8$	$T_{6, 3, 2} = \widetilde{E}_8$

1.6 Álgebras inclinadas

Quando a categoria de módulos sobre uma determinada k -álgebra A torna-se muito difícil de estudar diretamente, algumas vezes é conveniente substituir A por uma outra álgebra mais simples B e reduzir o estudo da categoria de módulos $\text{mod}A$ ao estudo da categoria de módulos $\text{mod}B$, como no teorema de Morita. Baseada nesta idéia surgiu a teoria inclinante, que consiste em utilizar certos módulos especiais T chamados módulos inclinantes, de forma que a k -álgebra $B = \text{End}_A(T)$ tem uma categoria de módulos $\text{mod}B$ muito próxima da categoria de módulos $\text{mod}A$. Tais módulos são caracterizados na seguinte definição.

Definição 1.6.1 *Um módulo T é chamado inclinante se satisfaz as seguintes condições:*

$$(T1) \text{ } \text{pd}T_A \leq 1$$

$$(T2) \text{ } \text{Ext}_A^1(T_A, T_A) = 0$$

$$(T3) \text{ } \text{Existe uma seqüência exata curta}$$

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T'_A \longrightarrow T''_A \longrightarrow 0$$

onde $T'_A, T''_A \in \text{add}T_A$.

Nesta definição, $\text{add}T_A$ é a subcategoria plena definida pelos módulos que são soma direta de somandos diretos do módulo T_A . Diremos que o módulo T da definição anterior é inclinante parcial se T só satisfaz as condições (T1) e (T2) da definição. O nome parcial é devido ao seguinte lema.

Lema 1.6.1 *(Bongartz) Seja T um módulo inclinante parcial, então existe um módulo X tal que $T \oplus X$ é um módulo inclinante.*

Para alguns efeitos práticos, verificar a condição (T3) da definição anterior é muito complicado. A seguinte proposição resolve este problema algumas vezes.

Proposição 1.6.1 *Seja $T = T_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus T_t^{m_t}$, onde $T_i \in \text{ind}A$ para todo $i = 1, \dots, t$, e $T_i \not\cong T_j$ para $i \neq j$. Então, T_A é um módulo inclinante se e somente se o módulo T_A é um módulo inclinante parcial e satisfaz*

(T3') t é igual ao número de A -módulos simples não isomorfos.

Assim como temos definido módulo inclinante em termos da dimensão projetiva, podemos definir um módulo co-inclinante em termos da dimensão injetiva da seguinte forma.

Definição 1.6.2 *Um módulo T é chamado um módulo coinclinante se satisfaz as seguintes condições:*

(T1) $\text{id}T \leq 1$.*

(T2) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$.

(T3') O número de somandos indecomponíveis não isomorfos de T é igual ao número de simples de A .

A seguir apresentamos os resultados mais relevantes desta teoria. Para um estudo aprofundado ver [R] e [A2].

Definição 1.6.3 *O par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é chamado teoria de torção em $\text{mod}A$ se:*

- 1) Se $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$ e $N \in \mathcal{F}$.*
- 2) Se $\text{Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$, então temos que $M \in \mathcal{T}$.*
- 3) Se $\text{Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0$, então temos que $N \in \mathcal{F}$.*

A classe $\mathcal{T}$ é chamada classe de torção, e a classe $\mathcal{F}$ é chamada de classe livre de torção. Claramente o par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é uma teoria de torção se e somente se o par $(D\mathcal{F}, D\mathcal{T})$ é uma teoria de torção em $\text{mod}A^{op}$. Dado um módulo inclinante T , podemos construir uma teoria de torção onde a classe $\mathcal{T}$ e a classe $\mathcal{F}$ são dadas como segue:

$$\mathcal{T}(T) = \text{Gen}(T_A) = \{M | \exists \phi : T^n \longrightarrow M \text{ epi}\} = \{M | \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{F}(T) = \text{Cogen}(\tau T) = \{N | \exists \phi : N \longrightarrow (\tau T)^m \text{mono}\} = \{N | \text{Hom}_A(T, N) = 0\}$$

Dizemos que uma teoria de torção cinde se todo módulo indecomponível é um módulo de torção ou um módulo livre de torção. Seja $B = \text{End}_A T$, então como mencionamos antes, estamos interessados em comparar a categoria $\text{mod} A$ e a categoria $\text{mod} B$, para isto usaremos o par de funtores adjuntos $\text{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$. O seguinte teorema dado por Brenner e Butler estabelece esta comparação fazendo uso das seguintes subcategorias plenas:

$$\mathcal{Y}(T) = \{N | \text{Tor}_1^B(N, T) = 0\}$$

$$\mathcal{X}(T) = \{N | N \otimes_B T = 0\}$$

Teorema 1.6.1 (Brenner-Butler) *Seja T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}_A T$. Então:*

- 1) ${}_B T$ é um módulo inclinante e $A \cong \text{End}_B T$.
- 2) Os funtores $\text{Hom}_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ induzem equivalências inversas entre as subcategorias plenas $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$ enquanto os funtores $\text{Ext}_A^1(T, -)$ e $\text{Tor}_1^B(-, T)$ induzem equivalências inversas entre as subcategorias plenas $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$.

Corolário 1 *Temos que $D\mathcal{X}(T) = \mathcal{F}({}_B T)$ e $D\mathcal{Y}(T) = \mathcal{T}({}_B T)$. Em particular, o par $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ é uma teoria de torção em $\text{mod} B$.*

Definição 1.6.4 *A tripla (B, T, A) é chamada tripla inclinante se T é um A -módulo inclinante e $B \cong \text{End}_A T$.*

Definição 1.6.5 *Seja (B, T, A) uma tripla inclinante. Então o módulo T é chamado de separante (respectivamente, separador) se a teoria de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ cinde em $\text{mod} A$ (respectivamente, a teoria de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde em $\text{mod} B$).*

Um critério muito prático para decidir quando um módulo T inclinante é separante, separador ou nenhum dele é dado no seguinte teorema.

Teorema 1.6.2 *Seja (B, T, A) uma tripla inclinante.*

- 1) T é separante se e somente se para cada $X_B \in \mathcal{X}(T)$, $pd X_B = 1$.
- 2) T é separador se e somente se para cada $M_A \in \mathcal{F}(T)$, $id M_A = 1$

Corolário 1 *Seja A uma k -álgebra hereditária, então todo A -módulo inclinante é separador.*

Definição 1.6.6 *Seja Q um quiver sem circuitos orientados. Uma k -álgebra A é chamada k -álgebra inclinada de tipo Q se existe um módulo inclinante T_B sobre a k -álgebra hereditária $B = kQ$ tal que $A = End_B T$.*

Um resultado muito importante, com relação a álgebras inclinadas é dado pelo seguinte teorema, devido a Happel, onde módulos inclinantes parciais induzem álgebras inclinadas.

Teorema 1.6.3 *Seja B uma álgebra hereditária, e T_B um módulo inclinante parcial. Então, $A = End_B T$ é uma álgebra inclinada.*

A partir dos resultados anteriores sabemos como construir uma álgebra inclinada a partir de uma k -álgebra hereditária. Agora, como podemos saber se dada uma k -álgebra A ela é ou não inclinada? Antes de trabalhar esta questão vejamos a seguinte definição.

Definição 1.6.7 *Uma classe $\mathcal{S}$ de A -módulos indecomponíveis não isomorfos é chamada uma fatia completa no quiver de Auslander-Reiten Γ_A se satisfaz:*

CS1) $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um módulo sincero (ou seja, $Hom_A(P, U) \neq 0$ para todo módulo projetivo).

CS2) Se $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ é uma seqüência de morfismos não isomorfismos em $mod A$ com $M_0, M_n \in \mathcal{S}$, então $M_i \in \mathcal{S}$ para todo $0 < i < n$.

CS3) Se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma seqüência de Auslander-Reiten então só um deles, L ou N , está em $\mathcal{S}$, ou se um somando indecomponível de M está em $\mathcal{S}$, então ou L ou N está em $\mathcal{S}$.

Não é difícil provar que se $\mathcal{S}$ é uma fatia completa, então o módulo $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um módulo inclinante separante (também co-inclinante), chamado módulo da fatia $\mathcal{S}$. O seguinte teorema, dado por Ringel (ver [R]), mostra que o anel de endomorfismos do módulo da fatia completa é sempre hereditário.

Teorema 1.6.4 [R] *Se a k -álgebra B é hereditária e T_B é um módulo inclinante onde $A \cong \text{End}_B T$, então a classe de todos os A -módulos indecomponíveis da forma $\text{Hom}_B(T, I)$, onde I_B é um injetivo indecomponível, é uma fatia completa de $\text{mod} A$. Reciprocamente, se $\mathcal{S}$ é uma fatia completa em $\text{mod} A$, então $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um módulo inclinante com $B = \text{End} U_A$ hereditária e então $\mathcal{S}$ é isomorfa a uma fatia completa da forma anterior.*

Iterando o processo anterior um número finito de vezes, obtemos uma família maior de álgebras que podem ser estudadas a partir de uma álgebra já conhecida. Logo, temos a seguinte definição.

Definição 1.6.8 *Sejam A e B duas k -álgebras. Então, A e B são chamadas de Inclinante-Co-inclinantemente equivalentes se existe uma seqüência de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = B$ e módulos inclinantes ou co-inclinantes $T_{A_i}^i \in \text{mod} A_i$, $0 \leq i \leq m$ tais que $A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T^i$ para cada i .*

Definição 1.6.9 *Seja Q um quiver finito sem circuitos orientados. Uma álgebra A é chamada inclinada iterada de tipo Q se existe uma seqüência de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = kQ$ e uma seqüência de módulos inclinantes separantes $T_{A_i}^i$ para cada i tal que $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_{i-1}$.*

A modo de exemplificação dos resultados anteriores, estudaremos a seguir as álgebras disfarçadas. Antes consideremos Q um quiver euclideano e $B = kQ$ que é uma k -álgebra hereditária de tipo de representação mansa.

É sabido que se T é um módulo inclinante da álgebra B , então não pode ser regular. Portanto, todo módulo inclinante deve conter um somando pós-projetivo ou pré-injetivo. Logo, temos a menos de dualidade, as seguintes possibilidades para cada módulo inclinante:

- 1) T_B é pós-projetivo
- 2) $T_B = T_1 \oplus T_2$ onde $T_1 \neq 0$ pós-projetivo e $T_2 \neq 0$ regular
- 3) $T_B = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ com $T_1 \neq 0$ pós-projetivo, $T_2 \neq 0$ regular e $T_3 \neq 0$ pré-injetivo.

Em [R2] é mostrado que a álgebra inclinada $A \cong \text{End}T_B$ é de tipo de representação finita se e somente se o módulo inclinante T é de tipo 3). Se a k -álgebra $A \cong \text{End}T_B$, onde o módulo inclinante T é de tipo 1), então a álgebra A é chamada mansa disfarçada. Por outro lado, se a álgebra $B = kQ$ é hereditária de tipo de representação infinita selvagem, então a k -álgebra A é chamada disfarçada selvagem. O teorema a seguir dá uma caracterização do quiver de Auslander-Reiten para uma álgebra disfarçada mansa.

Teorema 1.6.5 ([A2] pag. 68) *Uma k -álgebra A é disfarçada se e somente se existem duas componentes diferentes no quiver de Auslander-Reiten Γ_A , contendo uma fatia completa.*

Uma família muito estudada por Ringel (ver [R]), são as álgebras Tubulares, mas a definição que daremos aqui desta família é um caso particular da estudada por Ringel, que será suficiente para as nossas pretensões.

Definição 1.6.10 ([R])

Seja a extensão $A = A_0[M]$, onde A_0 é mansa disfarçada e $M \in \text{Ind}A_0$. Diremos que a álgebra A é tubular doméstica (tubular) se seu tipo de extensão $T_{(n_1, \dots, n_r)}$ é Dynkin (Euclidiano).

Uma família de álgebras que estudaremos no final do capítulo 2 são as álgebras 2-tubulares cuja definição damos a seguir.

Definição 1.6.11 (*[P]*)

Seja a extensão $A = A_0[M]$, onde A_0 é mansa disfarçada e $M \in \text{Ind}A_0$ na boca de um tubo no quiver de Auslander-Reiten Γ_{A_0} . Diremos que a álgebra A é 2-tubular se a álgebra A_0 é de tipo $\tilde{D}_m$, e o módulo M tem comprimento regular 2 num tubo de posto $m - 2$.

Consideremos a k -álgebra A hereditária mansa T , um módulo inclinante pós-projetivo e $B = \text{End}_A T$. Então, o tipo tubular de B é por definição o tipo tubular de A . Logo, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.6.6 *Seja B uma álgebra conexa mansa disfarçada com tipo tubular $(n_1, \dots, n_r)$. Então, B tem uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}$ contendo todos os módulos projetivos, uma componente pré-injetiva $\mathcal{I}$ contendo todos os módulos injetivos e uma $IP_1(k)$ -família tubular estável separante $\mathcal{T}$ de tipo $(n_1, \dots, n_r)$, separando $\mathcal{P}$ de $\mathcal{I}$. Desta forma temos todos os módulos indecomponíveis sobre B .*

Os módulos na família tubular separante $\mathcal{T}$ do teorema anterior são os módulos regulares, isto é, aqueles módulos que não estão nem na componente pós-projetiva nem na componente pré-injetiva e, aqueles que estão na boca dos tubos são chamados simples regulares. Vale que no caso em que o tipo tubular da álgebra B é $(n_1, \dots, n_r)$ o número de vértices de B é dado por $2 + \sum_{i=1}^r (n_i - 1)$.

Capítulo 2

SOBRE O TIPO DA REPRESENTAÇÃO DO BIMÓDULO DA

Em 1983 Hughes e Waschbusch (ver [HW]), introduziram pela primeira vez a álgebra repetitiva de uma álgebra A , que denotaremos por $\widehat{A}$ (ver definição 2.1.1). Esta álgebra tem-se mostrado muito útil no estudo das álgebras autoinjetivas, como mostra o próprio trabalho de Hughes e Waschbusch citado acima. Na seção 2.1 fazemos um estudo detalhado da estrutura de k -álgebra de $\widehat{A}$, e ressaltamos que é uma álgebra de dimensão infinita e sem unidade, que caracterizando os módulos projetivos indecomponíveis de dimensão finita, mostramos que a álgebra repetitiva $\widehat{A}$ é autoinjetiva. Na seção 2.2, estudamos a estrutura de k -álgebra da extensão trivial $T(A) = A \ltimes DA$ da álgebra A pelo seu cogenerador minimal $DA = \text{Hom}_k(A, k)$ e da álgebra $\bar{A}$, que é a álgebra de matrizes definida por:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix}$$

Pelo visto no capítulo 1, na seção 1.2, temos que a álgebra $\bar{A}$ corresponde a categoria das representações do bimódulo DA . Aqui estudaremos a k -álgebra $\bar{A}$ como um quociente da álgebra $\hat{A}$. Na seção 2.3 damos as definições básicas de cobertura de Galois, introduzidas por Gabriel, para mostrar que a álgebra repetitiva $\hat{A}$ é uma cobertura de Galois da extensão trivial $T(A)$. Finalmente, na seção 2.5 no Teorema 2.5.6 estudaremos o tipo de representação da extensão trivial $T(A)$ e da álgebra $\bar{A}$, no caso em que a álgebra A é livre de $\tilde{A}_n$, isto é, a álgebra A não admite nenhuma subcategoria plena que seja isomorfa a uma álgebra kQ , onde o grafo subjacente a Q seja $\tilde{A}_n$. Além disso no teorema 2.5.6 estendemos o resultado de Assem e Skowroński, para o caso em que o funtor F_λ associado ao funtor de cobertura $F : \hat{A} \rightarrow T(A)$ não é denso, enunciado no teorema 2.5.2.

2.1 Álgebra repetitiva $\hat{A}$

Nesta seção mostramos as propriedades básicas da álgebra repetitiva $\hat{A}$ e estabelecemos fundamentalmente que esta álgebra $\hat{A}$ é autoinjétil, este resultado é citado mas não é provado (ver [HW]).

Definição 2.1.1 *Seja A uma k -álgebra. Chamaremos álgebra repetitiva da álgebra A , e a denotaremos por $\hat{A}$, a k -álgebra de matrizes de dimensão infinita, sem unidade e localmente de dimensão finita, definida por:*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A & & \\ & & DA & A & \\ & & & DA & A \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

onde só um número finito de entradas é não nulo, a soma corresponde a soma usual de

matrizes e a multiplicação é induzida pela ação de $DA = \text{Hom}_k(A, k)$

$$DA \otimes DA \rightarrow 0, \quad DA \otimes A \rightarrow DA, \quad A \otimes DA \rightarrow DA.$$

Observação 1 1) Sejam $a', a'' \in A$ e $\varphi \in DA$, então a ação no bimódulo DA está dado por: $(a'\varphi a'')(a) = \varphi(a''aa')$

2) A k -álgebra $\hat{A}$ tem estrutura de k -espaço vetorial dado por:

$$\hat{A} = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} DA \right).$$

O índice i é considerado com relação as colunas da matriz que definem a álgebra $\hat{A}$, logo um elemento qualquer de $\hat{A}$ é dado por $(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde $a_i \in A$ e $f_i \in DA$ para todo índice $i \in \mathbb{Z}$, sendo não nulo somente um número finito deles. Logo, a multiplicação é dada por:

$$(a_i, f_i)_i \cdot (b_i, g_i)_i = (a_i b_i, a_{i+1} g_i + f_i b_i)_i$$

Em muitas ocasiões é conveniente pensar a k -álgebra A como uma k -categoria como definido em 1.2.1. Vejamos como é associada à álgebra A a estrutura de k -categoria. Como A é uma k -álgebra de dimensão finita sobre o corpo algebricamente fechado k , temos que existe um conjunto finito e completo de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_x / x \in I\}$. Então, a k -categoria $\mathcal{A}$, tem como objetos os elementos de I , ou seja $\text{Obj } \mathcal{A} = I$.

Vejamos agora os morfismos de $\mathcal{A}$. Sejam $x, y \in \text{Obj } \mathcal{A}$, então temos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y) := \text{Hom}_A(Ae_x, Ae_y) \cong e_x Ae_y$$

O isomorfismo anterior é dado por $\forall f \in \text{Hom}_A(Ae_x, Ae_y)$ associa $f(e_x)$ e usaremos este isomorfismo como identificação. A composição dos morfismos é induzida pela multiplicação da álgebra A . Isto é, sejam $x, y, z \in \text{Obj } \mathcal{A}$, $f_a := e_x a e_y \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ para algum $a \in A$, e $f_b := e_y b e_z \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(y, z)$ para algum $b \in A$. Então, $f_a \circ f_b = e_x a e_y e_y b e_z =$

$e_x a e_y b e_z$, onde o produto $a e_y b$ é o produto de A . Pode-se ver por exemplo que a unidade de $Hom_A(x, x)$ é dada por f_{e_x} .

Consideremos agora a k -estrutura categórica de $\hat{\mathcal{A}}$ associada à k -álgebra $\hat{A}$, dada da seguinte forma. $Obj \hat{\mathcal{A}} = I \times \mathbb{Z}$, onde I é o conjunto de índices que definem o conjunto de idempotentes da álgebra A . Logo, um objeto qualquer de $\hat{\mathcal{A}}$ é dado pelo par (x, n) , onde $x \in I$, $n \in \mathbb{Z}$, e será denotado por $x < n >$.

Os morfismos da categoria $\hat{\mathcal{A}}$, são da seguinte forma: Sejam $x < n >, y < m > \in Obj \hat{\mathcal{A}}$

$$(*) Hom_{\hat{\mathcal{A}}}(x < n >, y < m >) := \begin{cases} e_x A e_y & \text{se } n = m \\ Hom_k(e_y A e_x, k) & \text{se } m = n + 1 \\ 0 & \text{se } m \neq n, n + 1 \end{cases}$$

Sejam $x < n >, y < m >, z < r > \in Obj \hat{\mathcal{A}}$. Então, a composição é dada pelas três situações seguintes:

1) Se $n = m = r$, então a composição é dada pela multiplicação em A , isto é, sejam $f_a := e_x a e_y$, $f_b := e_y b e_z$ para alguns $a, b \in A$, logo $f_a \circ f_b = e_x a e_y b e_z$, que é determinado pelo produto de A .

2) Se $m = n + 1$, $m = r$, então a composição, definida por (*), é dada por: Seja $\varphi \in Hom_k(e_y A e_x, k)$ e seja $f_a := e_y a e_z \in e_y A e_z$, para algum $a \in A$. Então $\varphi \circ f_a \in Hom_k(e_z A e_x, k)$ é definida por:

$$(\varphi \circ f_a)(e_z b e_x) = \varphi(e_y a e_z e_z b e_x).$$

3) Se $m = n$, $r = m + 1$, onde a composição definida por (*), é dada por: Seja $f_a \in Hom_{\hat{\mathcal{A}}}(x < n >, y < n >)$, logo $f_a := e_x a e_y$, para algum $a \in A$, e seja $f_b \in Hom_{\hat{\mathcal{A}}}(y < m >, z < m + 1 >)$. Como φ é um funcional de $e_z A e_y$ em k , temos que a composta é dada por

$$(f_a \circ \varphi)(e_z b e_x) = \varphi(e_z b e_x e_x a e_y) \in Hom_k(e_z A e_x, k)$$

Um $\widehat{A}$ -módulo M , finitamente gerado, é dado a menos de isomorfismo, pela família $M = (M_i, f_i)_i$ onde $M_i \in \text{mod} A$ para todo índice $i \in \mathbb{Z}$ com somente um número finito deles não nulo e os morfismos f_i são tais que $f_i : M_i \otimes_A DA \rightarrow M_{i-1}$ e $f_{i-1}(f_i \otimes DA) = 0$. Se considerarmos $\oplus M_i$ com a estrutura de k -espaço vetorial e $(a_i, \varphi_i)_i$ um elemento qualquer de $\widehat{A}$, temos que a ação à direita da álgebra $\widehat{A}$ no módulo M é dada como segue:

$$(m_i)_i(a_i, \varphi_i)_i = (m_i a_i + m_{i+1} \varphi_i)_i = (m_i a_i + f_{i+1}(m_{i+1} \otimes \varphi_i))_i$$

Por outro lado, vejamos que dado um $\widehat{A}$ -módulo finitamente gerado M ele tem a forma anterior, salvo isomorfismo. Para isto basta considerar $1_j = (\delta_{ij}, 0)_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, e 1_j dada como sendo a unidade da álgebra A na posição (j, j) da matriz que define a álgebra $\widehat{A}$. Logo, temos que a decomposição do $\widehat{A}$ -módulo M é dada por $M_j = M 1_j$, onde cada M_j tem estrutura de A -módulo e os A -morfismos estão dados pela ação da álgebra $\widehat{A}$ em $M = \bigoplus_j M 1_j = \bigoplus_j M_j$ como se queria.

Sejam $M = (M_i, f_i^M)_i, N = (N_i, f_i^N)_i$ dois $\widehat{A}$ -módulos, então o morfismo $f : M \rightarrow N$ é dado pela família de morfismos $(\alpha_i)_i$, onde o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_i \otimes DA & \xrightarrow{f_i^M} & M_{i-1} \\ \alpha_i \otimes 1_D \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_{i-1} \\ N_i \otimes DA & \xrightarrow{f_i^N} & N_{i-1} \end{array}$$

isto é,

$$f_i^N(\alpha_i \otimes 1_D) = \alpha_{i-1}(f_i^M) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Denotaremos por $\text{Mod} \widehat{A}$, a categoria de todos os $\widehat{A}$ -módulos $M = (M_i, f_i)_i$ tais que os A -módulos M_i são de dimensão finita, para todo i . Denotemos por $\text{mod} \widehat{A}$ a subcategoria plena de $\text{Mod} \widehat{A}$, formada pelos módulos $M = (M_i, f_i)_i$ tais que $\bigoplus_i M_i$ é de dimensão finita. Observemos que o automorfismo $\nu((a_i, f_i)_i) = (a_{i-1}, f_{i-1})_i$ de $\widehat{A}$, induz um automorfismo em $\text{Mod} \widehat{A}$ e $\text{mod} \widehat{A}$ dado por

$$\nu(M) = \nu((M_i, f_i)_i) = (M_{i-1}, f_{i-1})_i$$

Como estamos considerando que a k -álgebra A é de dimensão finita, o conjunto $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um sistema completo de idempotentes primitivos e ortogonais da álgebra A . Logo, o conjunto $\{e_{(i,n)} : 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais primitivos da álgebra $\hat{A}$. Cada $\hat{A}$ -módulo projetivo indecomponível P , pode ser identificado com $e_{(i,n)}\hat{A} = P_{(i,n)}$. Desta forma, os módulos $P_{(i,n)}$ formam um sistema completo de classes de isomorfismo dos módulos projetivos indecomponíveis da álgebra $\hat{A}$. Além disso observe que, o módulo projetivo indecomponível $P_{(i,n)}$ tem a seguinte forma:

$$P_{(i,n)_j} = \begin{cases} P_A(i) & j = n \\ Q_A(i) & j = n + 1 \\ 0 & j \neq n, n + 1 \end{cases}$$

e $f_i : P_A(i) \otimes DA \rightarrow Q_A(i)$ é um isomorfismo natural, onde $P_A(i)$ é o i -ésimo A -módulo projetivo indecomponível e $Q_A(i)$ é o i -ésimo A -módulo injetivo indecomponível. O seguinte teorema é enunciado e provado em [HW].

Teorema 2.1.1 *Seja A uma k -álgebra. Então, $\hat{A}$ é uma k -álgebra auto-injetiva.*

2.2 Álgebras $T(A)$ e $\bar{A}$

Nesta seção estabelecemos as definições e propriedades básicas sobre as álgebras dadas pela extensão trivial $T(A)$ e $\bar{A}$ e mostramos as relações existentes entre elas e com a álgebra $\hat{A}$.

Definição 2.2.1 *Seja A uma k -álgebra. Chamaremos extensão trivial da álgebra A pelo seu cogerador injetivo minimal DA , à k -álgebra $T(A) = A \ltimes DA$, com estrutura aditiva dada pela soma vetorial de $A \oplus DA$ e sua estrutura multiplicativa dada por: Sejam $(a, f), (b, g) \in T(A)$, onde $a, b \in A$, e $f, g \in DA$*

$$(a, f) \cdot (b, g) = (ab, fb + ag)$$

O lema a seguir dá uma caracterização das álgebras dadas por extensões triviais. Este resultado é provado em [H].

Lema 2.2.1 *A álgebra $T(A)$ é autoinjetiva.*

Pv Recordemos que toda álgebra simétrica é auto-injetiva. Então, consideremos o morfismo $H : T(A) \rightarrow DT(A)$ definido por:

$$H(a, f)(b, g) := f(b) + g(a)$$

e mostremos que este morfismo é um $T(A) - T(A)^{op}$ -isomorfismo. Como $T(A) \cong_k DT(A)$ como k -espaços vetoriais, basta mostrar que o morfismo H é injetor. Para isto calculemos $\ker H$, que é dado por:

$$\ker H = \{(a, f) \in T(A) \mid H(a, f) = 0\}$$

Seja $(a, f) \in \ker H$, logo temos que $H(a, f)(b, g) = f(b) + g(a) = 0$ para todo par $(b, g) \in T(A)$. Se considerarmos $a = b$ fixo, segue-se que $H(a, f)(b, g) = f(a) + g(a) = 0$ para toda $g \in DA$, então $a = 0$. Portanto, temos que $f(b) = 0$ para todo $b \in A$ e logo $f = 0$.

A partir do cálculo anterior concluímos que o morfismo H é injetor, logo a álgebra $T(A)$ é simétrica e conseqüentemente $T(A)$ é auto-injetiva, como queríamos.

Estudemos agora a k -álgebra $\bar{A}$.

Definição 2.2.2 *Seja A uma k -álgebra. Chamaremos $\bar{A}$, a k -álgebra definida por:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix}$$

onde a soma e o produto correspondem a soma e o produto usual de matrizes.

Um $\bar{A}$ -módulo M é dado pela tripla $M = (M_1, M_2, \varphi)$, onde $M_1, M_2 \in \text{mod} A$ e o morfismo φ A -linear é dado por $\varphi : M_2 \otimes_A DA \rightarrow M_1 \quad \forall M_1, M_2 \in \text{mod} A$ e a ação de $\bar{A}$ no

módulo M é dada por:

$$(m_1, m_2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ f & b \end{pmatrix} = (m_1a + \varphi(m_2 \otimes f), m_2b)$$

Sejam $M = (M_1, M_2, \varphi_M)$ e $N = (N_1, N_2, \varphi_N)$ dois $\bar{A}$ -módulos. Então, o morfismo entre dois $\bar{A}$ -módulos $M = (M_1, M_2, \varphi_M)$ e $N = (N_1, N_2, \varphi_N)$ é dado pelo par (α_1, α_2) de A -morfismos tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_2 \otimes DA & \xrightarrow{\varphi_M} & M_1 \\ \alpha_2 \otimes 1_D \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_1 \\ N_2 \otimes DA & \xrightarrow{\varphi_N} & N_1 \end{array}$$

de onde temos que $\varphi_N(\alpha_2 \otimes 1_D) = \alpha_1 \varphi_M$.

Lema 2.2.2 A aplicação $p^t : \hat{A} \rightarrow A^t$, onde

$$A^t = \begin{pmatrix} A & & & & \\ DA & A & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & A & \\ 0 & & & DA & A \end{pmatrix}$$

definida por : $p^t(x) = exe$, (onde $e = e_{oo} + \dots + e_{tt}$ e e_{ii} é a matriz 1 na posição ii e zero no resto da matriz) é um epimorfismo de k -álgebras.

Observação 1 1) Observamos que o morfismo anterior induz um funtor fiel e pleno $\mathcal{F} : \text{mod} A^t \rightarrow \text{mod} \hat{A}$, induzida pela inclusão.

2) Também temos o funtor $\mathcal{G} : \text{mod} \hat{A} \rightarrow \text{mod} A^t$ que é o funtor restrição dos escalares.

3) Para $t=1$, a parte 1 nos define um funtor fiel pleno de $\text{mod} \bar{A}$ em $\text{mod} \hat{A}$.

Lema 2.2.3 *Existem módulos projetivo-injetivo na k -álgebra $\bar{A}$.*

Pv: Pelo lema 2.2.2 temos que a k -álgebra A^t é um quociente da k -álgebra $\hat{A}$. Consideremos o módulo na k -álgebra $\bar{A}$ dado pela tripla $\bar{P} = (P, Q, \varphi)$, onde P é um módulo projetivo indecomponível em $\text{mod}A$ não nulo e Q é um A -módulo injetivo indecomponível não nulo com $\varphi : P \otimes_A DA \rightarrow Q$ um isomorfismo. Mostraremos que o módulo definido anteriormente é um módulo projetivo-injetivo.

1) Vejamos que $\bar{P}$ é projetivo. Sejam $\bar{M} = (M_2, M_1, \varphi_M)$, $\bar{N} = (N_2, N_1, \varphi_N)$ módulos indecomponíveis não nulos de $\text{mod}\bar{A}$, e seja $f = (f_2, f_1)$ um epimorfismo entre $\bar{M}$ e $\bar{N}$. Consideremos $\bar{\alpha} = (\alpha_2, \alpha_1)$ um morfismo qualquer do módulo $\bar{P}$ no módulo $\bar{N}$. Portanto, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P \otimes_A DA & & \xrightarrow{\varphi} & & Q \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 \alpha_2 \otimes 1_D \downarrow & & M_2 \otimes_A DA \xrightarrow{\varphi_M} M_1 & & \downarrow \alpha_1 \\
 & \swarrow f_2 \otimes 1_D & & \searrow & \\
 N_2 \otimes_A DA & & \xrightarrow{\varphi_N} & & N_1
 \end{array}$$

A partir do diagrama anterior, pode-se construir os morfismos $\bar{f}_2 : M_2 \rightarrow N_2$ e $\bar{\alpha}_2 : P \rightarrow N_2$ em $\text{mod}A$, a partir da existência dos morfismos f e $\bar{\alpha}$. Mas como o módulo P é um módulo projetivo, temos que existe um morfismo $h_2 : P \rightarrow M_2$ tal que $\bar{f}_2 h_2 = \bar{\alpha}_2$. Por outro lado, sabemos que o morfismo φ é um isomorfismo, então podemos considerar o morfismo $h_1 : Q \rightarrow M_1$ definido por $h_1 = \varphi_M h_2 \varphi^{-1}$ o qual verifica que $f_1 h_1 = f_1 \varphi_M h_2 \varphi^{-1}$ (1). Mas sabemos que $f_1 \varphi_M = \varphi_N f_2$, pela definição de morfismo, e substituindo em (1) temos que

$$f_1 h_1 = \varphi_N f_2 h_2 \varphi^{-1} = \varphi_N \alpha_2 \varphi^{-1} = \alpha_1$$

Portanto, temos provado que o módulo $\bar{P}$ é um módulo projetivo.

2) Vejamos que $\bar{P}$ é injetivo. Mantendo a notação anterior, consideremos $f : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ um monomorfismo. Logo, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P \otimes_A DA & & \xrightarrow{\varphi} & & Q \\
 \alpha_2 \otimes 1_D \uparrow & h_2 \swarrow & & \nearrow h_1 & \uparrow \alpha_1 \\
 & M_2 \otimes_A DA & \xrightarrow{\varphi_M} & M_1 & \\
 & \swarrow f_2 \otimes 1_D & & \searrow & \\
 N_2 \otimes_A DA & & \xrightarrow{\varphi_N} & & N_1
 \end{array}$$

Como o módulo Q é injetivo, temos que existe o morfismo $h_1 : N_1 \rightarrow Q$ tal que $\alpha_1 f_1 = h_1$ (2). Consideremos agora o morfismo $h_2 = \varphi^{-1} h_1 \varphi_M : M_2 \otimes_A DA \rightarrow P \otimes_A DA$, pois φ é um isomorfismo. Calculemos então:

$$\begin{aligned}
 h_2 &= \varphi^{-1} h_1 \varphi_M \\
 &= \varphi^{-1} \alpha_1 f_1 \varphi_M \\
 &= \varphi^{-1} \alpha_1 \varphi_N f_2 \otimes 1_D \\
 &= \varphi^{-1} \varphi \alpha_2 \otimes 1_D f_2 \otimes 1_D \\
 &= \alpha_2 \otimes 1_D f_2 \otimes 1_D
 \end{aligned}$$

Por (2), segue-se que o módulo $\bar{P}$ é injetivo.

Definição 2.2.3 *Seja A uma k -álgebra e seja $r = \text{Rad}A$ o radical de Jacobson da álgebra A . Dizemos que a k -álgebra A tem índice de nilpotência n , se $r^{n-1} \neq 0$ mas $r^n = 0$.*

O seguinte resultado tem sido melhorado pelo professor Eduardo Marcos em comunicação privada, mostrando que o radical da álgebra $\bar{A}$ é $n + 1$ se a álgebra A tem índice de nilpotência n .

Lema 2.2.4 *Seja A uma k -álgebra com índice de nilpotência $n > 0$, então a k -álgebra $\bar{A}$ tem índice de nilpotência menor ou igual a $2n$.*

Pv: Como $r = \text{Rad } A$, $\bar{r} = \text{Rad } \bar{A} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ DA & r \end{pmatrix}$

Logo, temos que: $\bar{r}^n = \begin{pmatrix} r^n & 0 \\ DAr^{n-1} + rDAr^{n-2} \dots + r^{n-1}DA & r^n \end{pmatrix}$

Como sabemos que o índice de nilpotência da k -álgebra A é n , segue-se que $r^n = 0$.

Portanto, a igualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{r}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ DAr^{n-1} + rDAr^{n-2} \dots + r^{n-1}DA & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$\bar{r}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (DAr^{n-1} + rDAr^{n-2} \dots + r^{n-1}DA)r & 0 \end{pmatrix},$$

onde a expressão anterior depende somente do termo :

$$DAr^{n-1} + rDAr^{n-2} \dots + r^{n-1}DA$$

que será zero se multiplicarmos por r^n , isto é:

$$\bar{r}^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (DAr^{n-1} + rDAr^{n-2} \dots + r^{n-1}DA)r^n & 0 \end{pmatrix}$$

que é zero. Logo, o índice de nilpotência da k -álgebra $\bar{A}$ é menor ou igual a $2n$.

Nos lemas 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 mostra-se a estreita relação entre as álgebra $\hat{A}$ e a álgebra $\bar{A}$, no lema a seguir mostramos a relação entre a álgebra dada pela extensão trivial $T(A)$ e a álgebra $\bar{A}$.

Lema 2.2.5 *A extensão trivial $T(A)$ é uma k -sub-álgebra da k -álgebra $\bar{A}$.*

Pv: Recordemos que a partir da definição 2.2.1 a estrutura de k -álgebra da extensão $T(A)$ é dada pela soma, induzida por $A \oplus DA$ como k -espaço vetoriais e o produto definido por:

$$(a, q) \cdot (b, f) = (ab, af + qb).$$

Com esta estrutura, a álgebra $T(A)$ é isomorfa a álgebra de matrizes da forma: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ f & a \end{pmatrix}$ que é claramente uma sub-álgebra de que definem $\bar{A}$. Portanto, temos que $T(A)$ é uma sub-álgebra de $\bar{A}$.

Observação 2 *A inclusão $T(A) \subset \bar{A}$ define o seguinte funtor restrição.*

$$\begin{aligned} F : \quad \text{mod} \bar{A} &\longrightarrow \text{mod} T(A) \\ (U, V, \phi) &\longrightarrow M \end{aligned}$$

onde M tem estrutura de A -módulo dada por $U \oplus V$ e $(u, v)q = (0, \phi(u \otimes q))$.

A ação sobre os $\bar{A}$ -morfismos é dada por

$$F(f) := g \oplus h : U \oplus V \longrightarrow U' \oplus V'$$

onde $f := (g, h) : (U, V, \phi) \longrightarrow (U', V', \phi')$ é um $\bar{A}$ -morfismo, tal que $h\phi = \phi'(g \otimes 1)$, é um funtor (restrição).

Os dois lemas a seguir estão provados em [R2], mas para efeito de completude daremos a prova.

Lema 2.2.6 (*[R2] pag. 211*)

Seja S a álgebra de caminhos do quiver Δ e M_S um S -módulo.

1) *Se $\text{Hom}(M_S, \mathcal{M}_S)$ é uma categoria de tipo finito, então o módulo M_S é pre-injetivo.*

2) *Se $\text{Hom}(M_S, \mathcal{M}_S)$ é de tipo de representação manso, então o quiver Δ é de tipo de representação finito ou o módulo M_S não tem somandos diretos não nulos pós-projetivos.*

Pv. Vamos supor que $M \in \text{Ind}S$. Se o módulo M não é pós-projetivo, então temos que $\tau^m \tau^{-m} M \cong M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\text{Hom}(\tau^{-m} M, I) \neq 0$ para algum módulo injetivo I . Portanto,

$$\text{Hom}(M, \tau^m I) \cong \text{Hom}(\tau^m \tau^{-m} M, \tau^m I) \cong \text{Hom}(\tau^{-m} M, I) \neq 0$$

Logo, $\text{Hom}(M, \mathcal{M}_S)$ tem uma quantidade infinita de objetos. Se M é posprojetivo, então $M = \tau^{-m} P_r$. Se o quiver Δ não é de tipo de representação finita e o módulo injetivo I é indecomponível, sabemos que $\text{Hom}(P_r, \tau^n I) = \dim(\tau^n I)_r$ não é limitada quando $n \rightarrow \infty$, logo a dimensão de

$$\text{Hom}(M, \tau^n I) = \text{Hom}(\tau^{-m} P_r, \tau^n I) \cong \text{Hom}(P_r, \tau^{n+m} I)$$

não é limitada. Para que $\text{Hom}(M, \mathcal{M}_S)$ seja de tipo de representação manso, temos que para cada $X_S \in \text{Ind}S$, com $\text{End}X_S = k$, então $\dim \text{Hom}(M_S, X_S) \leq 2$, pelo lema 1.2.1.

Lema 2.2.7 *Seja $\mathcal{C}$ uma k -álgebra mansa disfarçada e $B = \mathcal{C}[M]$, com $M \in \text{Ind}\mathcal{C}$ e B uma k -álgebra mansa, então o módulo indecomponível M não é pos-projetivo.*

Pv Veja que pelo lema 1.2.2 B é mansa se e somente se a categoria vector espacial $\mu(kM_A)$ é mansa. Então vamos supor que o módulo M é pos-projetivo, isto é, $M = \tau^{-m} P_r$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Agora, como Δ não é de tipo de representação finita (Δ é euclidiano) existe um injetivo indecomponível I tal que $\{\dim \text{Hom}(P_r, \tau^n I) : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado, portanto a dimensão de

$$\text{Hom}(M, \tau^n I) \cong \text{Hom}(\tau^{-m} P_r, \tau^n I) \cong \text{Hom}(P_r, \tau^{m+n} I)$$

não é limitada, logo pelo lema 1.2.1, a álgebra B não pode ser de tipo de representação manso.

2.3 Cobertura Universal de $T(A)$

Nesta seção enunciamos as definições e propriedades básicas (sem demonstração) de cobertura universal, e mostramos que a extensão trivial $T(A)$ tem como cobertura universal a álgebra repetitiva $\widehat{A}$. Isto será de muita utilidade na seção seguinte.

As técnicas de cobertura em teoria de representações foram introduzidas e desenvolvidas em álgebras de tipo de representação finito por Gabriel [G1], e também por Green [GR] mas com uma formulação diferente.

Definição 2.3.1 *Um funtor $F : \tilde{A} : \longrightarrow A$ entre duas k -categorias, é um funtor cobertura se as funções induzidas :*

$$\bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(x, y) \longrightarrow A(F(x), a) \quad e \quad \bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(y, x) \longrightarrow A(a, F(x)) \quad \text{são bijetivas } \forall x \in \tilde{A} \text{ e } a \in A$$

Denotemos por (Q, I) um quiver com relações, como dado no capítulo 1, e por $x^+(x^-)$ o conjunto de vértices tal que existe uma flecha $\alpha : x \longrightarrow y$ ($\alpha : y \longrightarrow x$). Recordemos que se A é uma k -categoria localmente limitada, então A é equivalente a uma categoria da forma kQ/I .

Denotemos por $MODA$ a categoria de todos os A -módulos, por $ModA$ a categoria dos módulos localmente de dimensão finita (aqueles módulos M tais que $\dim_k M(x)$ é finita para qualquer vértice $x \in Q_0$).

Dizemos que um grupo G age livremente sobre a álgebra A se $g(x) = x$ ($g(\alpha) = \alpha$) para algum vértice x (para alguma flecha α), então $g = 1$. Agora, o grupo G age em A , então age em $MODA$ por translação, isto é, para cada $M \in MODA$ definimos $M^g = M \circ g$. Por G_M denotaremos o estabilizador do módulo M , dado por $G_M = \{g \in G / M^g \cong M\}$.

Definição 2.3.2 Um grupo G de automorfismos do quiver (Q, I) é um grupo de automorfismos do quiver Q o qual preserva o ideal I . O grupo é chamado de admissível se para cada vértice $x \in Q_0$, a G -órbita de x contém no máximo um vértice de x^+ e um de x^- .

Dado um grupo admissível G de (Q, I) -automorfismos, podemos definir o quiver de órbitas Q/G . Seja $\pi : Q \rightarrow Q/G$ o morfismo natural e denotemos por $\bar{I} = \pi(I)$ o ideal de Q/G induzido pelo ideal I . Então, vale o seguinte lema.

Lema 2.3.1 O quiver $(Q/G, \bar{I})$ é um quiver com relações. O morfismo natural $\pi : (Q, I) \rightarrow (Q/G, \bar{I})$ é um morfismo sobrejetor de quiver com relações tal que para qualquer $x \in Q_0$ a função induzida $x^+ \rightarrow \pi(x)^+$ e $x^- \rightarrow \pi(x)^-$ é bijetora.

Definição 2.3.3 Um morfismo entre quivers com relações $f : (\Delta, J) \rightarrow (Q, I)$ é um cobertura se existe um grupo admissível G do quiver (Δ, J) , onde G é tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & (\Delta, J) & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ (\Delta/G, \bar{J}) & \cong & (Q, I) \end{array}$$

Pelo lema 2.3.1, temos que existe um levantamento de caminhos. Para o caso das relações consideremos a seguinte definição.

Definição 2.3.4 Seja (Q, I) um quiver com relações. Uma relação $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \in I(x, y)$, com $\lambda_i \neq 0 \in k$ e μ_i um caminho dirigido do vértice x até o vértice y , é uma relação minimal se $n \geq 2$ e para qualquer subconjunto próprio K não vazio de $\{1, \dots, n\}$, $\sum_{i \in K} \lambda_i \mu_i \notin I(x, y)$.

Proposição 2.3.1 Seja $f : (\Delta, J) \rightarrow (Q, I)$ um morfismo cobertura, definido pela ação do grupo G . Seja $\rho \in I(x, y)$ uma relação minimal e seja $\bar{x} \in \Delta_0$ com $f(\bar{x}) = x$. Então, existe $\bar{y} \in \Delta_0$ e $\bar{\rho} \in J(\bar{x}, \bar{y})$ onde $f(\bar{\rho}) = \rho$.

A proposição anterior estabelece o levantamento para as relações minimais, e como consequência o levantamento para as relações, visto que uma relação é uma combinação de relações minimais.

Proposição 2.3.2 *Existe uma cobertura universal de (Q, I) . Isto é, existe uma função cobertura $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ onde $\tilde{Q}$ é conexo, tal que para qualquer outra função cobertura $f : (\bar{Q}, \bar{I}) \rightarrow (Q, I)$ existe uma outra função cobertura $\pi' : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{I})$ tal que $f \circ \pi' = \pi$. Se $\tilde{x} \in \tilde{Q}_0$ e $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ são tais que $\pi(\tilde{x}) = f(\bar{x})$ então π' pode ser escolhido de maneira única de forma que $\pi'(\tilde{x}) = \bar{x}$.*

Definição 2.3.5 *Um funtor $F : \tilde{A} \rightarrow A$ que é determinado pela ação do grupo G , é chamado de funtor cobertura de Galois se F satisfaz:*

- i) G é um grupo de automorfismos agindo livremente sobre $\tilde{A}$.
- ii) $F \circ g = F \quad \forall g \in G$.
- iii) F é denso, e G age transitivamente sobre $F^{-1}(a)$ para qualquer objeto $a \in A$.
- iv) F é um funtor cobertura isto é

$$\bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(x, y) \rightarrow A(F(x), a) \quad \text{e} \quad \bigoplus_{F(y)=a} \tilde{A}(y, x) \rightarrow A(a, F(x)) \quad \text{são bijetivas} \quad \forall x \in \tilde{A} \quad \text{e} \quad a \in A$$

Agora ao funtor $F : \tilde{A} \rightarrow A$, podemos associar outros dois funtores, chamados de **pull-up** $F^* : Mod A \rightarrow Mod \tilde{A}$, definido por $F^*(M) = M \circ F, \forall M \in Mod A$ ($F^*(M)(\tilde{x}) = M(F(\tilde{x}))$). O funtor F^* admite um funtor esquerdo adjunto F_λ , chamado de funtor **push-down** onde $F_\lambda : Mod \tilde{A} \rightarrow Mod A$ está definido por:

- i) $F_\lambda \tilde{A}(x, -) = A(F(x), -)$
- ii) O funtor F_λ comuta com limites diretos (Logo com Cokernel e somas diretas finitas).

Mas, como o grupo G age livremente sobre as classes de isomorfismo de $Ind \tilde{A}$, temos que o funtor F_λ induz uma injeção do conjunto de órbitas de $Ind \tilde{A}$ nas classes de isomorfismo em $Ind A$.

Denotaremos por $Ind_1 A$ a subcategoria plena de $ind A$ formada pelos objetos isomorfos a $F_\lambda(M)$ para algum $M \in ind \tilde{A}$, e por $Ind_2 A$ a subcategoria plena dos $ind A$ que não estão em $Ind_1 A$.

Definição 2.3.6 *Uma categoria A é chamada de G -densa, ou simplesmente de densa, se $Ind A/G = Ind_1 A/G$.*

O seguinte Teorema é enunciado em muitos trabalhos, por exemplo [HW], mas não é feita a sua prova.

Teorema 2.3.1 *Seja A uma k -álgebra. Então, a k -álgebra $\hat{A}$ é cobertura de $T(A)$.*

Pv. Consideremos $\nu((a_i, f_i)_i) = (a_{i-1}, f_{i-1})_i$ o automorfismo de $\hat{A}$ e seja $G = \langle \nu \rangle$ o grupo cíclico infinito gerado pelo automorfismo ν . Fazendo uso da definição 2.3.4, temos que o grupo $G = \langle \nu \rangle$ age livremente sobre $\hat{A}$, pois é fácil verificar que o único elemento do grupo G que deixa fixo um elemento de $\hat{A}$ é a identidade de G . Além disso, temos que o grupo G age transitivamente sobre $F^{-1}(a) \forall a \in \hat{A}$ e pela própria construção do funtor $F : \hat{A} \rightarrow \hat{A}/\nu$ ele é uma cobertura. Portanto, o funtor F é uma cobertura de Galois.

Mostremos agora que $\hat{A}/G$ é isomorfo como álgebra à extensão trivial $T(A)$. Para isto basta definir quem é o representante para cada classe de $\hat{A}/G$. Seja $(a_i, f_i)_i \in \hat{A}$ então o representante da classe $\overline{(a_i, f_i)_i}$ em $\hat{A}/G$ é $(\sum_i a_i, \sum_i f_i)$, observe que esta identificação está bem definida pois, para qualquer elemento da órbita corresponde o mesmo elemento $(\sum_i a_i, \sum_i f_i)$. Portanto temos que $\hat{A}/G = \langle (a, f)/a \in A, f \in DA \rangle$, que é claramente isomorfa a extensão trivial $T(A)$.

2.4 Categorias Derivadas

Nesta seção introduzimos as noções básicas de categorias derivadas. Para um estudo mais aprofundado ver [H].

Definição 2.4.1 Um complexo diferencial $\mathcal{C}$ em $\text{mod } A$ é dado pela família $(C^i, d_C^i)_i$ formada pelos A -módulos C^i e morfismos $d_C^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ tais que $d_C^{i+1}d_C^i = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Um morfismo de complexos diferenciais $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma família $(f^i)_i$ de A -morfismos $f^i : C^i \rightarrow D^i$ tais que $f^{i+1}d_C^i = d_D^i f^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Um morfismo de complexos $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é homotópico a zero, se existe uma família $(h^i)_i$ de A -morfismos $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ tais que $f^i = d_D^{i-1}h^i + h^{i+1}d_C^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dois morfismos $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são homotópicos se $f - g$ é homotópico a zero, o conjunto das aplicações homotópicas a zero o denotaremos por $\mathcal{H}(A)$. Diremos que um complexo $\mathcal{C}$ é limitado se $C^i \neq 0$ só para um número finito de índices $i \in \mathbb{Z}$.

Denotaremos por $\mathcal{K}(A)$ ($\mathcal{K}^b(A)$) à categoria cujos objetos são os complexos diferenciais (complexos diferenciais limitados) onde o espaço de morfismos é dado pelas classes de homotopia de morfismos.

Definição 2.4.2 Seja $\mathcal{C} \in \mathcal{K}^b(A)$. A i -ésima cohomologia do complexo $\mathcal{C}$ é definida por

$$H^i(\mathcal{C}) = \ker d_C^{i+1} / \text{Im } d_C^i$$

Um morfismo $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induz uma família de funções

$$H^i : H^i(\mathcal{C}) \rightarrow H^i(\mathcal{D}) \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

Se $H^i(f)$ é um isomorfismo para todo índice $i \in \mathbb{Z}$, diremos que f é um quase-isomorfismo. No lema a seguir damos algumas propriedades dos quase-isomorfismos.

Lema 2.4.1 Seja $\Sigma = \{f/f \text{ é um quase-isomorfismo}\}$. Então,

$$a) 1_{A'} \in \Sigma, \ \forall A' \in \mathcal{H}(A).$$

b) $\forall s \in \sum$ e $f, g \in \text{Hom}(\text{mod} A)$ temos que existe $t \in \sum$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ s \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow t \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

c) dada $f : \mathcal{A} = (A^i, d_A^i)_i \rightarrow \mathcal{B} = (B^i, d_B^i)_i$ um morfismo de $\mathcal{H}(A)$. Então existe $s \in \sum$ tal que $sf = 0$ se e somente se existe $t \in \sum$ tal que $ft = 0$

Dado $\mathcal{C} \in \mathcal{K}^b(A)$, consideremos a categoria $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, dada pelos objetos da forma (X, s) onde $X \in \mathcal{K}^b(A)$ e $s : X \rightarrow \mathcal{C}$ é um quase-isomorfismo. A aplicação $f : (X, s) \rightarrow (X', s')$ é um morfismo $f : X \rightarrow X'$ tal que $s'f = s$.

Definição 2.4.3 Chamaremos categoria derivada de $\text{mod} A$, que denotaremos por $\mathcal{D}^b(A)$, à categoria que tem como objetos os complexos diferenciais limitados e como morfismos entre dois complexos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é o grupo

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \{[fs^{-1}] / f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(A)}(X, \mathcal{D}), (X, s) \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}}\}$$

onde $[fs^{-1}]$ denota a classe de equivalência definida por $(s, f) \cong (t, g)$ se e somente se, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & s \swarrow & \downarrow & \searrow f & \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{r} & X'' & \xrightarrow{h} & \mathcal{D} \\ & t \swarrow & \uparrow & \nearrow g & \\ & & X' & & \end{array}$$

e a composição de $(fs^{-1}) \circ (gt^{-1})$ é dada por:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X'' & & \\
 & u \swarrow & & \searrow h & \\
 & X & & X' & \\
 s \swarrow & & \searrow f & & t \swarrow \quad \searrow g \\
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} & & \mathcal{E}
 \end{array}$$

Logo, temos que $(fs^{-1}) \circ (gt^{-1}) = (su)^{-1} \circ (gh)$, onde $u \in \Sigma$.

Observemos que temos um automorfismo $T : \mathcal{K}^b(A) \rightarrow \mathcal{K}^b(A)$ dado por $T(X) = (X^{i+1}, d_X^{i+1})_i$, para qualquer complexo $X = (X^i, d_X^i)_i$. Para cada morfismo $f : \mathcal{D} = (D^i, d_D^i)_i \rightarrow \mathcal{E} = (E^i, d_E^i)_i$ em $\mathcal{K}^b(A)$ temos o cone, que denotaremos por C_f , que é o complexo associado ao morfismo f , onde $C_f^i = E^{i-1} \oplus D^i$ e

$$d_{C_f}^i = \begin{pmatrix} d_E^{i-1} & (-1)^i f^i \\ 0 & d_D^i \end{pmatrix} : E^{i-1} \oplus D^i \rightarrow E^i \oplus D^{i+1}$$

Com as funções dadas pela inclusão α_f e a projeção ω_f temos a seguinte sequência exata

$$C_f \xrightarrow{\alpha_f} D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\omega_f} TC_f$$

O conjunto $\mathcal{T}$ das sextuplas $(C, D, E, \alpha, f, \omega)$ com $C, D, E \in \mathcal{K}^b(A)$ e os morfismos $\alpha : C \rightarrow D$, $f : D \rightarrow E$ e $\omega : E \rightarrow TC$ tal que existe um isomorfismo $\rho : C \rightarrow C_f$ onde $\alpha_f \rho = \alpha$ e $(T\rho)\omega = \omega_f$, é chamado de conjunto triângulos.

Consideremos o funtor quociente $\pi : \mathcal{K}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$. Então, existe um automorfismo $\bar{T} : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$ tal que $\bar{T}\pi = \pi T$. Seja $\bar{\mathcal{T}}$ o conjunto de sextuplas $s = (X, Y, Z, x, y, z) \in \mathcal{D}^b(A)$ tal que existe um triângulo $t \in \mathcal{T}$, onde s é isomorfo a $\pi(t)$. Então, diremos que $(\mathcal{D}^b(A), \bar{\mathcal{T}}, \bar{T})$ é uma categoria triangulada. E escreveremos $x[1]$ para $\bar{T}(x)$.

Seja $A \cong kQ/I$ uma k -álgebra triangular, e i um poço no seu quiver ordinário, e e_i o idempotente primitivo correspondente ao poço i . Consideremos a extensão por um posto

$$A[I(i)] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I(i) & k \end{pmatrix}$$

O quiver ordinário da álgebra $A[I(i)]$ contém o quiver ordinário da álgebra A como sub-quiver pleno, que é uma fonte correspondente ao novo idempotente.

Definição 2.4.4 (*[A2] pag. 54*) *Seja $A \cong kQ/I$ uma k -álgebra triangular. A reflexão de A no poço i é o quociente de $A[I(i)]$ pelo ideal bilateral gerado pelo idempotente e_i , isto é:*

$$S_i^+ A = A[I(i)] / \langle e_i \rangle$$

Dualmente, se consideramos o vértice j como sendo uma fonte, podemos definir $S_j^- A$ na fonte j . O seguinte resultado é dado por Tachicawa e Wakamatsu.

Proposição 2.4.1 (*[TW]*) *Seja $A \cong kQ/I$ uma k -álgebra triangular e i um poço (j uma fonte) no quiver ordinário de A . Então A e $S_i^+ A$ (A e $S_j^- A$) são inclinante-coinclinante equivalentes.*

O teorema a seguir foi primeiro mostrado por Happel em [H], para o caso em que a k -álgebra tem dimensão global finita, mas esta restrição é eliminada em [CPS].

Teorema 2.4.1 *Sejam A e B duas k -álgebras inclinante-coinclinantes equivalentes, então $D^b(A) \cong D^b(B)$ como categorias triangulares.*

Será que vale a recíproca do teorema 2.4.1? Happel, em [H] prova uma recíproca, no caso em que o quiver Q é Dynkin, e em [H1] no caso em que Q é um quiver Euclidiano. O caso geral foi provado em [HRS].

Teorema 2.4.2 *Seja Q um quiver finito, conexo e sem circuitos orientados e A uma k -álgebra. Então, são equivalentes:*

- 1) A é inclinada iterada de tipo Q
- 2) A é inclinante-coinclinante equivalente a kQ
- 3) $D^b(A) \cong_t D^b(kQ)$, a notação anterior indica equivalência como categorias triângulares.

2.5 Tipo de representação de $T(A)$ e de $\bar{A}$

Estudaremos o tipo de representação da extensão trivial $T(A)$ e da álgebra $\bar{A}$, no caso em que a k -álgebra A é extensão por um ponto de uma álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$ ou seja o quiver ordinário Q não admite nenhum $\tilde{A}_n$ como subquiver(a álgebra A não admite nenhuma subcategoria plena que seja isomorfa a uma álgebra kQ , onde o grafo subjacente a Q seja $\tilde{A}_n$.. Mas antes vejamos o seguinte.

Seguindo Ringel [R], diremos que a álgebra canônica de tipo $(2,2,2,2)$ é uma álgebra da forma $A \cong kQ/I$ onde Q é dado pela figura 2.1:

Figura 2.1:

e relações dadas por $\alpha'\alpha + \delta'\delta + \beta'\beta + \gamma'\gamma = 0$, $\alpha'\alpha + \lambda\beta'\beta + \delta'\delta = 0$, para algum $\lambda \in k - \{0, 1\}$. Uma álgebra canônica de tipo (p, q, r) , $p \leq q \leq r$ é dada pela figura 2.2: limitado por $\alpha_1 \cdots \alpha_p + \beta_1 \cdots \beta_q + \gamma_1 \cdots \gamma_r = 0$. As álgebras canônicas de tipo $(2, 2, 2, 2)$ ou (p, q, r) com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ são mansas (ver [R]). Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$, ou seja se

Figura 2.2:

(p, q, r) é igual a $(2, 2, r)$ com $(r \geq 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$ então a álgebra é chamada de doméstica. As álgebras inclinadas dos tipos $\widetilde{D}_{r+2}$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$ são canônicas de tipo $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ ou $(2, 2, 2, 2)$ respectivamente e são chamadas de canônicas tubulares.

No trabalho de Ringel e Happel (ver [HR]), mostra-se a estreita relação das categorias derivadas entre as álgebras tubulares (ver definição 1.6.10) e as canônicas tubulares como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.5.1 [HR] *Seja A uma k -álgebra. Se A é uma álgebra tubular, então existe uma álgebra canônica tubular $\mathcal{C}$ tal que*

$$\mathcal{D}^b(A) \cong_t \mathcal{D}^b(\mathcal{C})$$

A partir do teorema anterior, o problema de estudar a categoria $\text{mod } \widehat{A}$, onde A é uma álgebra de tipo tubular se reduz a estudar a categoria $\text{mod } \widehat{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é uma álgebra canônica tubular. Neste trabalho, Ringel e Happel dão uma descrição completa do quiver ordinário da álgebra canônica $\widehat{\mathcal{C}}$ e do seu quiver de Auslander-Reiten $\Gamma_{\widehat{\mathcal{C}}}$.

Consideremos agora as seguintes definições:

Definição 2.5.1 [DSK] *Diremos que a k -álgebra A é localmente de suporte finito, se para cada módulo indecomponível projetivo P , o conjunto de classes de isomorfismo de módulos projetivos indecomponíveis P' , tal que existe um número finito de módulos indecomponíveis M , onde $\text{Hom}_A(P, M) \neq 0$ e $\text{Hom}_A(P', M) \neq 0$ é finito.*

Em particular, em [LDS] é mostrado que $\widehat{A}$ é localmente de suporte finito se e somente se, a $gldim A$ é **strong** e finita, isto é, os complexos da categoria derivada tem comprimento limitado. Assem e Skowroński em [AS1] apresentam uma classificação destas álgebras que daremos a seguir da seguinte definição.

Definição 2.5.2 *A k -álgebra $\widehat{A}$ é chamada de (ν_A) -exaustiva, quando o funtor push-down $F_\lambda : \text{mod}\widehat{A} \rightarrow \text{mod}T(A)$ associado ao funtor cobertura $F : \widehat{A} \rightarrow T(A)$ é denso.*

Em [LDS] mostra-se que se a k -álgebra A é localmente de suporte finito, então A é exaustiva. Agora, o seguinte teorema dado em [AS2], estabelece uma classificação das álgebras repetitivas $\widehat{A}$, que são localmente de suporte finito.

Teorema 2.5.2 *(Teorema B em [AS2])*

Seja A uma k -álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\widehat{A}$ é mansa exaustiva.*
- ii) $\widehat{A}$ é mansa e localmente de suporte finito.*
- iii) Existe uma álgebra B a qual é de tipo Dynkin, ou inclinada de tipo de representação infinito, Euclidiana ou tubular, tal que $\widehat{A} \cong \widehat{B}$.*
- iv) Existe uma álgebra C que é hereditária Dynkin, ou Euclidiana ou canônica tubular, tal que A e C são inclinante-coinclinante equivalentes.*
- v) $\text{mod}\widehat{A}$ é de ciclo finito.*
- vi) Existe uma álgebra C a qual é ou hereditária Dynkin, ou Euclidiana, ou canônica tubular tal que $\text{mod}\widehat{A} \cong \text{mod}\widehat{C}$.*

Como consequência do teorema anterior temos os seguintes resultados.

Teorema 2.5.3 *Seja A uma k -álgebra. Se a k -álgebra A é mansa disfarçada, então a extensão trivial $T(A)$ é mansa.*

Pv *Seja A uma k -álgebra mansa disfarçada, de dimensão finita. Pela definição temos que existe uma álgebra hereditária H de tipo Euclidiano, com um módulo inclinante T na*

componente pós-projetiva do quiver de Auslander-Reiten Γ_H , tal que $\text{End}_H T = A$. Então, pelo Teorema 4.10 em [W] temos que $\underline{\text{mod}} \hat{A} \cong \underline{\text{mod}} \hat{H}$. Agora, como H é hereditária de tipo Euclidiano, temos que $\hat{H}$ é mansa e localmente de suporte finito, pelo teorema anterior. Então, pelo Teorema de [LDS] concluímos que $T(A)$ é mansa.

Corolário 1 *Seja A uma k -álgebra. Se A é uma álgebra mansa disfarçada, então a álgebra $\bar{A}$ é mansa.*

Pv Seja A uma álgebra mansa disfarçada, então pelo teorema 2.4.2, temos que $\text{mod} \hat{A}$ é mansa. Logo, pelo lema 2.2.2 a álgebra $\bar{A}$ é um quociente de $\hat{A}$ que é mansa, conseqüentemente temos que $\bar{A}$ é mansa, como queríamos.

Definição 2.5.3 *Diremos que a k -álgebra A é derivadamente mansa se sua categoria derivada $\mathcal{D}^b(A)$ é mansa.*

No lema a seguir damos uma caracterização das álgebras da definição anterior.

Lema 2.5.1 *Seja A uma k -álgebra. Então, A é derivadamente mansa se e somente se $\hat{A}$ é mansa.*

Pv Por [H], temos que $\underline{\text{mod}} \hat{A} \cong \mathcal{D}^b(A)$, onde $\mathcal{D}^b(A)$ é mansa pois A é derivadamente mansa. Logo, por [Kr] temos que $\hat{A}$ é mansa. A recíproca é clara.

No seguinte teorema mostra-se que ser derivadamente mansa é fechada por equivalências triangulares.

Teorema 2.5.4 *Seja A uma k -álgebra derivadamente mansa e B uma k -álgebra tal que $\mathcal{D}^b(B) \cong_t \mathcal{D}^b(A)$ como categorias trianguladas. Então a álgebra B é derivadamente mansa.*

Pv Por [Kr], temos que $\mathcal{D}^b(B)$ é mansa e portanto, pela definição 2.4.3, a álgebra B é derivadamente mansa, como se queria.

Uma ferramenta muito utilizada na caracterização do tipo de representação de uma k -álgebra A , é dada pelas formas quadráticas que daremos a seguir.

Seja $A \cong kQ/I$, onde Q é um quiver finito sem ciclos orientados. Então, consideremos as seguintes formas quadráticas $\chi_A : \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $q_A : \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ definidas por:

$$\begin{aligned}\chi_A(v) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i,j \in Q_0} (-1)^s \text{Ext}_A^s(S_i, S_j) v_i v_j \\ q_A(v) &= \sum_{i \in Q} v_i^2 - \sum_{i \rightarrow j \in Q_1} v_i v_j + \sum_{i,j \in Q_0} r(i, j) v_i v_j\end{aligned}$$

onde $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $r(i, j) = \dim_k e_j(I/(IJ + JI))e_i$, com J o ideal gerado pelas flechas do quiver Q .

A forma quadrática χ_A é chamada forma quadrática de Euler da álgebra A , e q_A é chamada forma quadrática de Tits. Sabe-se que se $\text{gldim} A \leq 2$, então $\chi_A = q_A$. Observemos também que a forma de Euler está baseada na informação homológica e a forma de Tits é combinatória.

O seguinte teorema dado por de la Peña (ver [P]), relaciona álgebras que são extensões por ponto de álgebras mansas disfarçadas com a forma quadrática de esta extensão.

Teorema 2.5.5 [P] *Seja A uma k -álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$, $M \in \text{Ind} A$ regular e seja $B = A[M]$. Então, são equivalentes:*

- 1) B é mansa.
- 2) q_B é debilmente não negativa ($q_B(v) \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{N}^{Q_0}$).
- 3) B é doméstica tubular, tubular ou 2-tubular.

Definição 2.5.4 ([NS]) *Seja A uma álgebra. Diremos que a álgebra A é crítica de crescimento polinômial ou pg-crítica, se ela satisfaz:*

- i) A é da forma

$$B[M] = \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad B[N, t] = \begin{bmatrix} k & & & & \\ & k & & & \\ & & \ddots & & \\ N & 0 & \cdots & k & B \end{bmatrix}$$

onde B é uma álgebra inclinada de representação infinita de tipo $\tilde{D}_n$ com fatia completa na componente pre-injetiva, o módulo indecomponível M (N respectivamente) tem comprimento regular 2 (tem comprimento regular 1), num tubo de Γ_B de posto $n - 2$, e $t + 1$ ($t \geq 2$) é o número de objetos de $B[N, t]$ que não estão em B .

ii) Qualquer sub-categoria própria de A é de crescimento polinômial.

Toda álgebra A 2-tubular, definidas em 1.6.11, é pg-critica. Mas por [P1], temos que se A é uma k -álgebra 2-tubular, então é derivadamente equivalente a uma k -álgebra B , cujo quiver é dada pela família na figura 2.4 :

Figura 2.3:

Onde, na figura 2.3, as linhas pontilhadas indicam relações zero. Na seguinte proposição reduzimos o estudo das famílias anteriores ao estudo de somente uma família.

Proposição 2.5.1 *Cada álgebra descrita na figura 2.3 é derivadamente equivalente a álgebra dada pelo seguinte quiver da figura 2.4.*

Figura 2.4:

Pv Por [HW], sabemos que $(\widehat{S_i^{+-}A}) \cong \widehat{A}$ (para maiores detalhes sobre o uso do funtor reflexão ver [T]), onde i é um poço ou uma fonte. Mostremos que cada uma das famílias dadas na figura 2.3 são inclinante ou coinclinante equivalentes por reflexões a álgebra dada pelo quiver (*) na figura 2.4.

caso a) Aplicar o funtor $S_3^- S_2^- S_1^-$ ao quiver:

Figura 2.5:

caso b) Aplicar o funtor do caso a.

Definição 2.5.5 *Seja Q um quiver e seja Sp o subconjunto dos laços no quiver Q . Seja $R = Z \cup \{q_b(b)/b \in Sp\}$ um conjunto de relações do quiver Q , dado pelo conjunto Z que é um conjunto das relações zero e $q_b(b) = 0$, para cada laço $b \in Sp$, onde q_b é um polinômio quadrático. Vamos supor que nenhuma relação zero começa ou termina num laço especial, ou envolve o quadrado do laço especial. A álgebra $A \cong kQ/R$ é chamada de *Clannish* se satisfaz as seguintes condições:*

- (1) *No máximo saem duas flechas, ou chegam duas flechas a quaisquer vértice.*
- (2) *Para cada flecha ordinária (sem ser laço) a , existe no máximo uma flecha c onde $ca \notin Z$.*
- (2') *Para cada flecha ordinária (sem ser laço) a , existe no máximo uma flecha b onde $ab \notin Z$.*

Lema 2.5.2 *Seja A uma k -álgebra 2-tubular. Então, a categoria $\text{mod}T(A)$ é equivalente à categoria $\text{mod } \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma álgebra Clannish.*

Pv *Seja A uma k -álgebra 2-tubular, então temos que $\mathcal{D}^b(A) \cong_t \mathcal{D}^b(B)$, onde B é uma álgebra dada por uma das famílias da proposição 2.5.1. Em [HW] é mostrado que $\mathcal{D}^b(B) \cong_t \mathcal{D}^b(D)$, onde D é dada pelo quiver da figura 2.6:*

Figura 2.6:

Logo, o quiver ordinário da extensão trivial $T(D)$ é dado pela figura 2.7:

Figura 2.7:

Com relações de comutatividade dadas por:

$$\begin{aligned} u\beta &= x_1x & v\alpha &= x'_1y \\ xx_{n-1} &= \alpha x'_{n-1} & x_2u &= x'_2x'_1 \\ \beta x_{n-1} &= yx'_{n-1} & x_2v &= x_2x_1 \end{aligned}$$

Consideremos agora a seguinte álgebra de Clannish $\mathcal{C}$ dada pelo quiver ordinário da figura 2.8:

onde $q_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = (\varepsilon_i - K_1)(\varepsilon_i - K_2) = 0$ onde $K_1 \neq K_2 \in k^*$, e como relações zero temos: $p_1p_n = p_3p_2 = p_2p_1 = 0$.

Agora, cada módulo $M \in \text{mod}\mathcal{C}$, tem a seguinte forma:

$$M(n_0) = M_{K_1} \oplus M_{K_2}$$

onde cada M_{k_i} é o k -espaço vetorial associado ao autovalor K_i .

Então, podemos definir o funtor $F : \text{mod}T(D) \rightarrow \text{mod}\mathcal{C}$ da seguinte forma: Seja $X \in \text{mod}T(D)$

as linhas tracejadas são relações zero

Figura 2.8:

$$F(X)(i_0) = \begin{cases} X_n \oplus X'_n & \text{se } i = n \\ X_2 \oplus X'_2 & \text{se } i = 2 \\ X_1 \oplus X'_1 & \text{se } i = 1 \\ X_i & \text{se } i \neq \{1, 2, n\} \end{cases}$$

$$F(X)(p_i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} X(x) & X(\beta) \\ -X(\alpha) & -X(y) \end{pmatrix} & \text{se } i = 1 \\ \begin{pmatrix} X(x_1) & X(v) \\ -X(u) & -X(x'_1) \end{pmatrix} & \text{se } i = 2 \\ \begin{pmatrix} X(x_2) \\ -X(x'_2) \end{pmatrix} & \text{se } i = 3 \\ \begin{pmatrix} X(x_{n-1}) & X(x'_{n-1}) \end{pmatrix} & \text{se } i = n \\ X(x_i) & \text{se } i \neq \{1, 2, 3, n\} \end{cases}$$

$$F(X)(\varepsilon_i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} K_1 1_{x_1} & 0 \\ 0 & K_2 1_{x'_1} \end{pmatrix} & \text{se } i = 1 \\ \begin{pmatrix} K_1 1_{x_2} & 0 \\ 0 & K_2 1_{x'_2} \end{pmatrix} & \text{se } i = 2 \\ \begin{pmatrix} K_1 1_{x_n} & 0 \\ 0 & K_2 1_{x'_n} \end{pmatrix} & \text{se } i = n \end{cases}$$

Pode-se verificar facilmente que o anterior define um módulo em $\text{mod}\mathcal{C}$. Definamos agora o funtor $G : \text{mod}\mathcal{C} \rightarrow \text{mod}T(D)$, mas antes analisemos a forma de um módulo em $\text{mod}\mathcal{C}$. Seja $M \in \text{mod}\mathcal{C}$, então temos que:

$$M(i_0) = \begin{cases} M_{K_1} \oplus M_{K_2} & \text{se } i = 1, 2, n \\ M_i & \text{se } i \neq \{1, 2, n\} \end{cases}$$

onde, como antes, os M_{K_i} são os k -espaços vetoriais associados aos autovalores K_i , determinados pela equação

$$q_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = (\varepsilon_i - K_1)(\varepsilon_i - K_2) = 0 \quad \text{onde } i = 1, 2.$$

Logo,

$$p_i = \begin{pmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{pmatrix}$$

onde os $M_{t_j}^i : M_{K_t} = M_t \rightarrow M_{K_j} = M_j \quad t, j = 1, 2$. Assim,

$$p_n = \begin{pmatrix} M_{1n-1}^n & M_{2n-1}^n \end{pmatrix}, p_{n-1} = \begin{pmatrix} M_{n-1n-2} \end{pmatrix} \text{ e } p_3 = \begin{pmatrix} M_{31}^3 \\ M_{32}^3 \end{pmatrix}$$

Então, definamos o funtor G da seguinte forma: Seja $M \in \text{mod}\mathcal{C}$

$$G(M)(x) = \begin{cases} M_2 & \text{se } x = x_i, \quad i = 1, 2, n \\ M_1 & \text{se } x = x'_i, \quad i = 1, 2, n \\ M_j & \text{se } x = x_j, \quad j \neq \{1, 2, n\} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
G(M)(x) & = & M_{22}^1(p_1) & G(M)(x_1) & = & M_{22}^2(p_2) \\
G(M)(\alpha) & = & M_{21}^1(p_1) & G(M)(u) & = & M_{21}^2(p_2) \\
G(M)(\beta) & = & -M_{12}^1(p_1) & G(M)(v) & = & -M_{12}^2(p_2) \\
G(M)(y) & = & -M_{11}^1(p_1) & G(M)(x'_1) & = & -M_{11}^2(p_2) \\
G(M)(x_2) & = & M_{32}^3(p_3) & G(M)(x_{n-1}) & = & -M_{23}^n(p_n) \\
G(M)(x'_2) & = & M_{31}^3(p_3) & G(M)(x'_{n-1}) & = & M_{13}^n(p_3) \\
G(M)(x_i) & = & M_{i \ i+1}(p_i) & \text{se} & j \neq & \{1, 2, 3, n\}
\end{array}$$

Logo, a partir das relações definidas da álgebra Clannish $\mathcal{C}$, verifica-se que o funtor G define um módulo em $modT(D)$. Pela própria construção dos funtores F e G , temos que $F \circ G = 1_{modT(D)}$ e $G \circ F = 1_{mod \mathcal{C}}$. Mas, como a álgebra Clannish é mansa (ver [C-B]), temos que a extensão trivial $T(D)$ é mansa. Como a equivalência derivada induz uma equivalência entre as extensões triviais (ver [HW]), concluímos que a extensão trivial $T(A)$ é mansa.

Observação 1 *O lema anterior pode ser estendido da seguinte forma: Seja A uma k -álgebra dada pela figura 2.9 a seguir:*

com relações de comutatividade dadas pela linha tracejada

Figura 2.9:

Então tanto a extensão trivial $T(A)$ como $\bar{A}$ são mansas.

A seguinte proposição será de muita utilidade na prova do principal resultado deste capítulo.

Proposição 2.5.2 (*[DSK]*) *Seja R uma k -categoria localmente limitada e G um grupo que age livremente em R . Se R/G é de tipo de representação manso, então R também é de tipo de representação manso.*

Pv Vamos supor que R não é de tipo de representação manso. Pelo teorema de Drozd (ver [D]), temos que R é de tipo de representação selvagem. Portanto, existe um funtor $T = - \bigotimes_{A=k\langle x,y \rangle} Q : \text{mod}A \rightarrow \text{Mod}R$ que preserva as classes de isomorfismo entre indecomponíveis e Q é um $A - R$ bimódulo, sendo finitamente gerado à direita, e livre a esquerda. Mostremos que o funtor $F_\lambda \circ T$, também satisfaz as condições do funtor T , onde F_λ é dado na definição 2.3.4. Pela definição do funtor F_λ , temos que Q é um $A - R/G$ -bimódulo finitamente gerado à direita e livre a esquerda. Mostremos que para cada $M \in \text{ind}A$, existe somente um numero finito de módulos $N \in \text{ind}A$ tal que $(F_\lambda \circ T)(M) \cong (F_\lambda \circ T)(N)$. Como sabemos que Q é finitamente gerado, então o suporte de Q é finito. Logo, temos que o conjunto dos $M \in \text{mod}A$, tal que $\text{sup}T(M) = \text{Sup}Q$ é uma subcategoria de tipo finita de R .

Seja então $U \in \text{mod}R$ e $W \in \text{mod}R$ tais que $\text{Sup}U = \text{Sup}W$ e $F_\lambda(U) \cong F_\lambda(W)$. Então temos que W é um somando de $\bigoplus_{g \in S} U^g$, onde $S = \{g \in G/\text{Sup}U^g \text{ e } \text{Sup}W = \text{Sup}U, \text{ tem um objeto em comum}\}$. Portanto, temos que S é finito, desde que o $\text{Sup}U$ é finito e G age livremente em R . Logo, temos somente um número finito de W . Assim, R/G é de tipo representação selvagem, o que dá uma contradição. Portanto, R é de tipo representação manso.

Antes de enunciar e provar o principal teorema deste capítulo, enunciemos dois resultados de Barot (ver [BA] e [BP]).

Proposição 2.5.3 [BA] *Seja A uma k -álgebra tubular ou 2-tubular. Então,*

- 1) *A dimensão global de A é dois.*
- 2) *A forma quadrática χ_A não é negativa e o posto de χ_A é dois.*
- 3) *Existe um vetor $v \in \text{rad}\chi_A$ sincero.*

Lema 2.5.3 [BP] *Seja A uma k -álgebra tal que $\mathcal{D}^b(A) \cong_t \mathcal{D}^b(C)$, onde C é uma álgebra canônica tubular e $M \in \text{Ind}A$ tal que, $\chi_{A[M]}$ não é negativa. Então, existe uma álgebra hereditária $\mathcal{H}$ e $N \in \text{Ind}\mathcal{H}$ regular tal que à equivalência dada por $\mathcal{D}^b(A) \cong_t \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ pode ser estendida a uma equivalência $\mathcal{D}^b(A[M]) \cong_t \mathcal{D}^b(\mathcal{H}[N])$.*

Teorema 2.5.6 *Seja A uma k -álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$ e $M \in \text{ind}A$ tal que $A[M] = B$ é mansa. Então, a extensão trivial $T(B)$ e $\bar{B}$ são álgebras mansas se e somente se o módulo M é regular.*

Pv $\Rightarrow$) Como a k -álgebra B é mansa, pelo lema 2.2.8 temos que o módulo M é regular ou pre-injetivo. Então, vamos supor que M é pre-injetivo. É conhecido que $\widehat{A[M]} \cong \widehat{[M]A}$ (ver teorema 3.2.1), de onde temos que $[M]A$ é uma coextensão por um módulo pre-injetivo de uma álgebra mansa disfarçada, então pelo dual do lema 2.2.8, temos que $[M]A$ é de tipo selvagem e portanto $\widehat{A[M]}$ é selvagem. Mas, como $T(B)$ é mansa temos, a partir da proposição 2.5.2, que $\widehat{A[M]}$ é mansa, o que dá uma contradição. Portanto o módulo M é regular.

$\Leftarrow$) Sabemos por [P], que se M é um módulo regular, então a álgebra B é tubular doméstica, tubular (ver definição 1.6.12) ou 2-tubular.

Agora, se a álgebra B é tubular doméstica ou tubular, temos pelo teorema 2.5.2, que $\hat{B}$ é mansa e o funtor F_λ , associado ao funtor cobertura F , é denso. Portanto, tanto a extensão trivial $T(B)$, como a álgebra $\bar{B}$ são mansas.

Se a álgebra B é 2-tubular, segue-se do lema 2.5.2 que a extensão trivial $T(B)$ é mansa. Logo, pela proposição 2.5.2 temos que a álgebra $\hat{B}$ é mansa, e como $\bar{B}$ é um quociente de $\hat{B}$ temos que $\bar{B}$ é mansa.

Corolário 1 *Seja C uma k -álgebra canônica tubular, então a álgebra $\bar{C}$ e a extensão trivial $T(C)$ são de tipo de representação mansa.*

Pv Recordemos que as álgebras canônicas tubulares, podem ser vistas como extensões , de álgebras de tipo Euclidiana por um módulo regular indecomponível M . Logo, usando o teorema anterior, conclui-se que tanto a álgebra $T(A)$ como a álgebra $\bar{A}$ são mansas.

Corolário 2 *Seja $A \cong kQ/I$, onde o quiver Q é uma árvore, tal que o corank $\chi_A \leq 2$. Então, a extensão trivial $T(A)$ e $\bar{A}$ são mansas.*

Pv Sabemos por De la Peña e Barot (ver [BP]) que nas condições do corolário, a álgebra A é tubular domestica, tubular ou 2-tubular. Portanto, o resultado segue diretamente do teorema.

Capítulo 3

QUIVER ORDINÁRIO DA ÁLGEBRA $\bar{A}$

No capítulo anterior, mostramos a estreita relação que existe, em certos casos, entre o tipo de representação da álgebra A e das álgebras $T(A)$ e $\bar{A}$. Neste capítulo estamos interessados em estudar o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$ e sua relação com o quiver ordinário da álgebra A . Consideramos o caso em que a k -álgebra $A \cong kQ/I$ e A é livre de $\tilde{A}_n$.

Na seção 3.1, caracterizamos o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$, quando a álgebra $A \cong kQ/I$, é livre de $\tilde{A}_n$. Na seção 3.2, mostramos algumas consequências da caracterização do quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$. No teorema 3.2.2, provamos que, no caso de a álgebra A ser mansa disfarçada e livre de $\tilde{A}_n$, então a álgebra $\bar{A}$ é uma extensão sucessiva por pontos da álgebra A por módulos injetivos. Como consequência, temos que se H é o grupo de cohomologia de Hochschild da álgebra $\bar{A}$, então $H^1(\bar{A}) = 0$, se $H^1(A) = 0$.

3.1 Quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$

Nesta seção faremos a caracterização do quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$, mas antes consideremos o seguinte lema, que será de muita utilidade na caracterização das relações que definem à álgebra $\bar{A}$, no quiver ordinário $\bar{Q}$.

Lema 3.1.1 *Consideremos o quiver Q , dado pela figura 3.1 abaixo:*

Figura 3.1:

tal que $\dim_k e_1 k Q e_3 = 1$ e fixemos o ideal I_λ , onde $I_\lambda = \langle \alpha_i \beta_i - \lambda_i \alpha_1 \beta_1 / i = 2, \dots, n \rangle$ e os $\lambda_i \neq 0 \in k$. Então, para qualquer outra escolha do ideal $I_\delta = \langle \alpha_i \beta_i - \delta_i \alpha_1 \beta_1 / i = 2, \dots, n \rangle$, onde $\delta_i \in k$, temos que

$$\frac{kQ}{(I_\lambda)} \cong \frac{kQ}{(I_\delta)}$$

como k -álgebras

Pv: Sem perda de generalidade, vamos supor que $\alpha_1 \beta_1 \neq 0$ e que $\alpha_i \beta_i = \lambda_i \alpha_1 \beta_1$ para I_λ .

Então, temos a seguinte aplicação:

$$\psi : kQ \mapsto \frac{kQ}{(I_\lambda)}$$

definida da seguinte maneira:

$$\psi(p) = \begin{cases} \bar{e}_i & \text{se } p = e_i \\ \bar{\alpha}_i & \text{se } p = \alpha_i \\ \frac{\delta_i}{\lambda_i} \bar{\beta}_i & \text{se } p = \beta_i \end{cases}$$

Observemos que não todos os δ_i são nulos. Mostraremos que a aplicação anterior é um epimorfismo. Seja $\bar{p} = \sum a_i \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i$ e consideremos $\psi(\sum b_i \alpha_i \beta_i) = \sum b_i \bar{\alpha}_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} \bar{\beta}_i$ onde $\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i = \lambda_i \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1$ substituindo em $\bar{p}$, temos que:

$$\bar{p} = (\sum a_i \lambda_i) \bar{\lambda}_1 \bar{\beta}_1 = \psi(\sum a_i \lambda_i \alpha_1 \beta_1)$$

Logo, a aplicação anterior é um epimorfismo.

Agora mostramos que $\ker \psi$ é dado pelo ideal I_δ . Analisemos os geradores p . Se $p = \alpha_1 \beta_1$, temos que $\psi(\alpha_1 \beta_1) = \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1$ e se $p = \alpha_i \beta_i$ onde $i \neq 1$ temos que $\psi(\alpha_i \beta_i) = \bar{\alpha}_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} \bar{\beta}_i = \delta_i \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 = \delta_i \psi(\alpha_1 \beta_1)$. Como ψ é um morfismo, temos que $\psi(\alpha_i \beta_i - \delta_i \alpha_1 \beta_1) = 0$ e desta forma obtemos o isomorfismo desejado.

Seja kQ/I , onde Q é um quiver ordinário e I é um ideal admissível de kQ , então um caminho não nulo $p \in kQ/I$ é um caminho, como dado na pagina 15, que não esta no ideal admissível I . Então, consideremos agora a seguinte definição

Definição 3.1.1 *Seja $A \cong kQ/I$. Dizemos que um caminho p de kQ não nulo em kQ/I é maximal, se não existe um caminho q em Q não nulo em kQ/I , que contém p como subcaminho próprio.*

Antes de enunciar o principal resultado deste capítulo, vejamos os conceitos de socle e topo, já enunciados no capítulo 1, mas desde o ponto de vista de representações.

Seja $A \cong kQ/I$ e seja M uma representação. Para cada vértice i de Q , vamos definir por C_i à soma de todos os sub-módulos simples S do módulo M , tal que $S \cong S_i$, onde S_i denota o módulo simples associado ao vértice i . Logo, temos que $\text{Soc} M = \bigoplus_1^n C_i$, onde C_i pode ser nulo para algum vértice i .

De maneira análoga, para cada vértice i de Q , o $\text{top} M$ é o módulo semisimples tal que podemos definir C'_i como sendo a soma de todos seus somandos diretos S' , tais que $S' \cong S_i$. Logo, temos que $\text{top} M \cong \bigoplus_1^n C'_i$, onde C'_i pode ser nulo para algum vértice i .

Proposição 3.1.1 *Seja $A \cong kQ/I$ e seja $M \in \text{mod} A$. Dado um vértice $i \in Q_0$, e $0 \neq v \in M(i)$, consideremos os módulos simples kv ($kv \cong S_i$). Então,*

i) Existe um morfismo não nulo $f : M \rightarrow kv$ se e somente se $kv \cap (\sum_{\gamma} \text{Im} M(\gamma))$ é o subespaço nulo, quando γ percorre o conjunto das flechas de Q_1 que terminam em i ($\text{Im} M(\gamma)$ indica a imagem do k -morfismo $M(\gamma)$)

ii) Existe um morfismo não nulo, $g : kv \hookrightarrow M$, se e somente se, kv é um subespaço de $\bigcap \{\ker M(\gamma) : \gamma \in Q_1\}$, quando γ percorre o conjunto das flechas de Q_1 que começam em i .

No seguinte corolário, caracterizamos os C_i e os C'_i .

Corolário 3 Seja $A \cong kQ/I$ e $M \in \text{mod} A$. Para cada vértice i de Q temos que

i) C'_i é a menos de isomorfismo, um k -espaço vetorial suplementar, em $M(i)$ de $\sum_{\gamma} \{\text{Im} M(\gamma) : \gamma \in Q_1, e(\gamma) = i\}$.

ii) $C_i = \bigcap \{\ker M(\gamma) : \gamma \in Q_1, s(\gamma) = i\}$.

Observação 1 $\text{top} M = \bigoplus C'_i$ (recordemos que o módulo é dado por $M = (V(i), f_{\alpha})_{(i \in Q_0, \alpha \in Q_1)}$. Então, para cada vértice $i \in Q_0$, consideramos todos os f_{α_j} não nulos, tal que estejam associados às flechas chegando no vértice i , tomamos a imagem deles, e fazemos a soma destas imagens. Agora o complementar da soma anterior com relação a $M(i) = V(i)$, é o C'_i .

Observação 2 Recordemos também, que o $\text{top} M = M/\text{rad} M$ (ver capítulo 1). Logo, então pela observação anterior, pode-se concluir que $\text{rad} M(i) = \sum_{\gamma} \{\text{Im} M(\gamma)/e(\gamma) = i\}$

No seguinte exemplo, ilustramos os conceitos anteriores.

Exemplo 3.1.1 Consideremos o quiver Q dado por:

$$3\bullet \xrightarrow{\alpha} 2\bullet \xrightarrow{\beta} 1\bullet$$

e o módulo M dado por:

$$M : k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

Então, temos que

$$C'_1 = M(1) - \text{Im}(\beta) = M(1) - k = \phi$$

$$C'_2 = M(2) - \text{Im}(\alpha) = k - k = \phi$$

$$C'_3 = M(3) - \text{Im}(0) = k - \phi = k$$

Portanto, temos que $\text{top}M = \bigoplus_1^3 C'_i = S_3$

Vejamos agora o socle do módulo anterior. Pela segunda parte do corolário anterior, temos que $C_i = \bigcap \{\ker M(\gamma) : \gamma \in Q_1, s(\gamma) = i\}$, logo calculemos cada um dos C_i .

$$C_1 = \ker(0) = k = S_1$$

$$C_2 = \ker(1_\beta) = \phi$$

$$C_3 = \ker(1_\alpha) = \phi$$

Portanto, temos que $\text{Soc}M = \bigoplus_1^3 C_i = S_1$.

No seguinte teorema caracterizamos o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$. Utilizamos a notação A' para indicar uma cópia de A disjunta com A .

Teorema 3.1.1 *Seja $A \cong kQ/I$ livre de $\tilde{A}_n$. Então $\bar{A} \cong k\bar{Q}/\bar{I}$, onde $\bar{Q}$ e $\bar{I}$ são dados por*

$$i) (\bar{Q})_0 = (Q_A)_0 \dot{\cup} (Q_{A'})_0$$

ii) $(\bar{Q})_1$ é dado por:

a) as flechas de $(Q_A)_1$

b) as flechas de $(Q_{A'})_1$

c) Se existe um caminho maximal de $i' \rightarrow j'$, então existe uma flecha ligando as duas cópias do Quiver da álgebra A do vértice j' até i .

ii) Relações:

a) relações dadas pelo Quiver Q_A , ou I_A

b) relações dadas pelo Quiver $Q_{A'}$, ou $I_{A'}$

c) relações dadas pelo $\dim_k(e_i A' e_j)$, entre os vértices i e j .

Pv:

Para facilitar a notação usaremos as seguintes notações.

$$Hom_A(-, -) = {}_A(-, -) \text{ e } Hom(-, -)_A = (-, -)_A$$

i) Primeiro recordemos que a k -álgebra $\bar{A}$ é dada por:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix}$$

onde A tem n simples. Lembremos que A' é uma cópia disjunta de A . Fixemos um isomorfismo $x \rightarrow x'$ entre A e A' . Desta forma temos que os idempotentes da álgebra $\bar{A}$ são

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \bar{e}_{j'} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{j'} \end{pmatrix}$$

onde $e_{j'} = (e_j)'$.

Estes idempotentes, por abuso de notação, serão identificados com os idempotentes associados das álgebras A e A' , respectivamente.

Sabemos que o número de flechas do vértice i até o vértice j numa álgebra A de dimensão finita, é dado por: (ver [ARS])

$$\dim_k \frac{e_i \text{rad} A e_j}{e_i \text{rad}^2 A e_j}$$

Então, calculemos: $\dim_k \frac{\bar{e}_i \text{rad} \bar{A} \bar{e}_j}{\bar{e}_i \text{rad}^2 \bar{A} \bar{e}_j}$.

$$\text{Sendo } \text{rad} \bar{A} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ DA & r' \end{pmatrix}, \quad \text{rad}^2 \bar{A} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ rDA + DAr' & r'^2 \end{pmatrix}, \quad r = \text{rad} A,$$

$$r' = \text{rad} A', \quad \text{temos que } \frac{\text{rad} \bar{A}}{\text{rad}^2 \bar{A}} = \begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ \frac{DA}{rDA + DAr'} & \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix}.$$

Consideremos as seguintes situações:

1) $i \rightarrow j$

$$\begin{aligned} \dim_k \bar{e}_i \begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ \frac{DA}{rDA+DAr'} & \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_j &= \dim_k \begin{pmatrix} e_i \frac{r}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{e}_j \\ &= \dim_k e_i \frac{r}{r^2} \bar{e}_j = \text{número de flechas em } i \rightarrow j \text{ em } Q_A \end{aligned}$$

2) $i' \rightarrow j'$

$$\begin{aligned} \dim_k \bar{e}_{i'} \begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ \frac{DA}{rDA+DAr'} & \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_{j'} &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} \frac{DA}{rDA+DAr'} & e_{i'} \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_{j'} \\ &= \dim_k e_{i'} \frac{r'}{r'^2} \bar{e}_{j'} = \text{número de flechas de } i' \rightarrow j' \text{ em } Q_{A'} \end{aligned}$$

3) $i \rightarrow j'$

$$\dim_k \bar{e}_i \begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ \frac{DA}{rDA+DAr'} & \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_{j'} = \dim_k \begin{pmatrix} e_i \frac{r}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{e}_{j'} = 0$$

não existe flecha de Q_A em $Q_{A'}$.

Até agora temos que o quiver ordinário de $Q_{\bar{A}}$ é dado por duas cópias do quiver Q_A , e só temos flechas de $Q_{A'}$ em Q_A como veremos a seguir.

4) $i' \rightarrow j$

$$\dim_k \bar{e}_{i'} \begin{pmatrix} \frac{r}{r^2} & 0 \\ \frac{DA}{rDA+DAr'} & \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_j = \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} \frac{DA}{rDA+DAr'} & e_{i'} \frac{r'}{r'^2} \end{pmatrix} \bar{e}_j$$

Logo, temos que calcular:

$$\begin{aligned} \dim_k e_{i'} \frac{DA}{rDA+DAr'} e_j &= \dim_k \frac{e_{i'} DA e_j}{e_{i'} (\text{rad } A) DA e_j + e_{i'} DA (\text{rad } A') e_j} \\ &= \dim_k \frac{e_i DA e_j}{e_i (\text{rad } A) DA e_j + e_i DA (\text{rad } A) e_j} \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da identificação A com A' . Como estamos considerando módulos temos que $A = Ae_1 + \dots + Ae_n$ como decomposição à esquerda e $DA = D(e_1 A) + \dots + D(e_n A)$, como decomposição em injetivos à esquerda. Logo,

$$\begin{aligned}
e_i D A e_j &= e_i (\oplus_t I_t) e_j = e_i (\oplus_t (I_t) * e_j) \\
&= e_i (\oplus_t (e_t A) * e_j) = e_i (\oplus_t e_j e_t A) = e_i I_j = \text{Hom}_A(P_i, I_j)
\end{aligned}$$

Dado que, $DA = I_1^{op} \oplus \dots \oplus I_n^{op}$ à direita, então

$$e_i D A e_j = e_i (\oplus_t I_t^{op} e_j) = (\oplus_t e_i * I_t^{op}) e_j$$

e como, $e_i * I_t^{op} = e_i (D(Ae_t)) = D(Ae_t \cdot e_i) = D(Ae_i) = I_i^{op}$, temos que $e_i D A e_j = I_i^{op} e_j = \text{Hom}(P_j^{op}, I_i^{op})_A$

Por outro lado,

$$e_i r D A e_j = e_i (\oplus_t r I_t) e_j = e_i r I_j = \text{Hom}_A(P_i, r I_j)$$

e

$$e_i D A r e_j = e_i ((\oplus_t I_t^{op} r)) e_j = e_i (\oplus_t r I_t^{op}) e_j = \oplus_t r I_i^{op} e_j = \text{Hom}(P_j^{op}, r I_i^{op})_A$$

Consideremos agora, as seguintes sequencias exatas entre espaços vetoriais

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) \cap (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) \oplus (P_j^{op}, I_i^{op})_A & \rightarrow & \frac{{}_A(P_i, I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A}{{}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A} \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) + (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) + (P_j^{op}, I_i^{op})_A & \rightarrow & \frac{{}_A(P_i, I_j) + (P_j^{op}, r I_i^{op})_A}{{}_A(P_i, r I_j) + (P_j^{op}, r I_i^{op})_A} \rightarrow 0
\end{array}$$

Como ${}_A(P_i, I_j) \cong (P_j^{op}, I_i^{op})_A$, como espaços vetoriais, a última sequência fica da seguinte forma e usando a identificação A com A' temos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) \cap (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) \oplus (P_j^{op}, I_i^{op})_A & \rightarrow & \frac{{}_A(P_i, I_j) \oplus (P_j^{op}, I_i^{op})_A}{{}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A} \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & {}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A & \rightarrow & {}_A(P_i, I_j) & \rightarrow & \frac{{}_A(P_i, I_j)}{{}_A(P_i, r I_j) \oplus (P_j^{op}, r I_i^{op})_A} \rightarrow 0
\end{array}$$

Logo, valem as seguintes igualdades:

- (1) $\dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} + \dim_k (A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A) = \dim_k A(P_i, I_j)$
- (2) $\dim_k T + \dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} = \dim_k \frac{A(P_i, I_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A}$
- (3) $\dim_k T + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A = \dim_k A(P_i, I_j)$

Logo, resta calcular

$$\dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A}$$

A partir da igualdade (1),

$$\dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} = \dim_k A(P_i, I_j) - \dim_k (A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A).$$

Como estamos interessados em calcular a dimensão como espaço vetorial, temos que

$$\dim_k (A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A) = \dim_k A(P_i, rI_j) + \dim_k (P_j^{op}, rI_i^{op})_A - \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A.$$

Substituindo esta última expressão na igualdade anterior temos que

$$\begin{aligned} \dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} &= \dim_k A(P_i, I_j) - \dim_k A(P_i, rI_j) - \dim_k (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \\ &\quad + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \\ &= \dim_k A(P_i, I_j) - \dim_k A(P_i, rI_j) - \dim_k (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \\ &\quad + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \quad (*) \end{aligned}$$

Observemos também que

$$(4) \ D \operatorname{Hom} (P_j^{op}, rI_i^{op})_A = \operatorname{Hom}_A (DrI_i^{op}, I_j) = \operatorname{Hom}_A \left(\frac{P_i}{\operatorname{Soc} P_i}, I_j \right)$$

Por outro lado, temos que

$$0 \rightarrow \operatorname{soc} P_i \rightarrow P_i \rightarrow \frac{P_i}{\operatorname{soc} P_i} \rightarrow 0$$

e aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_A(-, I_j) = {}_A(-, I_j)$ obtemos:

$$0 \rightarrow {}_A \left(\frac{P_i}{\operatorname{soc} P_i}, I_j \right) \rightarrow {}_A (P_i, I_j) \rightarrow {}_A (\operatorname{soc} P_i, I_j) \rightarrow 0$$

De (4) segue que

$$\dim_k D(P_j^{op}, rI_i^{op}) = \dim_k (P_j^{op}, rI_i^{op}) = \dim_k A\left(\frac{P_i}{\text{soc } P_i}, I_j\right) = \dim_k A(P_i, I_j) - \dim_k A(\text{soc } P_i, I_j)$$

que substituindo em (*) temos:

$$\begin{aligned} \dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} &= \dim_k A(P_i, I_j) - \dim_k A(P_i, rI_j) - \dim_k A(P_i, I_j) \\ &\quad + \dim_k A(\text{soc } P_i, I_j) + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \\ &= \dim_k A(\text{soc } P_i, I_j) - \dim_k A(P_i, rI_j) + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \end{aligned} \quad (5)$$

Agora, consideremos a sequencia, dada por

$$0 \rightarrow rI_j \rightarrow I_j \rightarrow \text{top } I_j \rightarrow 0$$

que aplicando $(P_i, -)$ temos a nova seqüência:

$$0 \rightarrow (P_i, rI_j) \rightarrow (P_i, I_j) \rightarrow (P_i, \text{top } I_j) \rightarrow 0$$

Logo, $\dim(P_i, rI_j) = \dim(P_i, I_j) - \dim(P_i, \text{top } I_j)$ e substituindo em (5), temos que

$$\begin{aligned} \dim_k \frac{A(P_i, I_j)}{A(P_i, rI_j) \oplus (P_j^{op}, rI_i^{op})_A} &= \dim_k A(\text{soc } P_i, I_j) \\ &\quad - \dim_k A(P_i, I_j) + \dim_k (P_i, \text{top } I_j)_A \\ &\quad + \dim_k A(P_i, rI_j) \cap (P_j^{op}, rI_i^{op})_A \end{aligned}$$

Agora calcularemos cada um dos somandos do segundo membro da equação anterior, para isto faremos uso da Proposição 3.1.1, e seu corolário. Vamos supor que existe um caminho do vértice i até o vértice j , e o vértice j é ponto final deste caminho.

1) Calculemos $\text{Hom}_A(\text{Soc } P_i, I_j)$. Neste caso estamos considerando módulos a esquerda, então temos que o módulo projetivo P_i associado ao vértice $i \in Q_0$, tem como representação todos os caminhos que chegam no vértice i . Logo, pelo Corolário 3 da proposição 3.1.1, temos que $\text{Soc } P_i = \oplus S_{i_t}$, onde os módulos simples S_{i_t} , são os simples associados aos vértices i_t de onde sai um caminho até o vértice i , e que definem o módulo projetivo P_i .

Agora, o módulo injetivo I_j está definido pelos caminhos que saem do vértice j . Como sabemos que existe um caminho não nulo do vértice i até o vértice j , então nenhum dos vértices $i_t = j$ onde os i_t são dados pelo socle de P_i . Caso contrário teríamos um ciclo, o que contradiz o fato do quiver Q ser livre de $\tilde{A}_n$. Portanto,

$$\text{Hom}_A(\text{Soc}P_i, I_j) = 0$$

e $\dim_k \text{Hom}_A(\text{Soc}P_i, I_j) = 0$.

2) Calculemos $\text{Hom}_A(P_i, I_j)$. Basta observar que $\dim_k \text{Hom}_A(P_i, I_j)$ mede o número de caminhos que existem do vértice j até o vértice i , mas como a álgebra é livre de $\tilde{A}_n$, e temos que existe um caminho do vértice i até o vértice j , então $\dim_k \text{Hom}_A(P_i, I_j) = 0$.

3) Calculemos $\text{Hom}(P_i, \text{top}I_j)_A$. Neste caso, consideramos módulos à direita, então o módulo projetivo P_i , associado ao vértice i , é determinado por todos os caminhos que saem do vértice i , e o módulo injetivo I_j é dado por todos os caminhos que chegam no vértice j . Logo, pelo Corolário 3 da proposição 3.1.1 temos que $\text{top}I_j = \oplus S_{j_t}$, onde os simples S_{j_t} correspondem aos vértices j_t , que são os vértices de partida dos caminhos que terminam no vértice j .

Portanto temos duas situações, $\text{Hom}(P_i, \text{top}I_j)_A = \text{Hom}(P_i, \oplus S_{j_t})_A = 0$ ou 1. Se $\text{Hom}(P_i, \text{top}I_j)_A = 0$ e como existe um caminho do vértice i até o vértice j , então existe um caminho que começa no vértice i_t e passa pelo vértice i até o vértice j . Isto mostra que o caminho do vértice i até o vértice j não é maximal. Por outro lado, se $\text{Hom}(P_i, \text{top}I_j)_A = 1$, então temos que existe um vértice $i_t = i$, ou seja, existe um caminho que começa no vértice i e termina no vértice j . Logo, o caminho é maximal.

4) Calculemos $\text{Hom}_A(P_i, rI_j) \cap \text{Hom}(P_j^{op}, rI_i^{op})_A$. Segue da observação 2 e Proposição 3.1.1 que $rI_j = I_j / \text{top}I_j$, onde $\text{top}I_j = S_j$. Portanto, $\text{Hom}_A(P_i, rI_j) = 0$. Caso contrário, teríamos que existe um caminho de um vértice j_t até o vértice i , isto é, temos um ciclo, o que é contradiz, o fato da álgebra ser livre de $\tilde{A}_n$. Portanto,

$$\text{Hom}_A(P_i, rI_j) \cap \text{Hom}(P_j^{op}, rI_i^{op})_A = \phi$$

A partir de 1), 2), 3) e 4) temos que existe uma flecha nova se e somente se o caminho entre o vértice i e o vértice j , for maximal.

Relações:

A seguir mostraremos como são os geradores do ideal $\bar{I}$. Seja $\bar{\alpha} \in \bar{I}$ um gerador de tipo minimal, segundo a definição 2.3.3. Logo, temos que $\bar{\alpha} \in k\bar{Q}$. Estudaremos as seguintes situações:

- 1) $\bar{\alpha} \in kQ_A$. Como $\bar{\alpha}$ é um gerador de tipo minimal, temos que o caminho $\bar{\alpha} : i \rightsquigarrow j$ onde os vértices i e j estão em Q_A , é um gerador minimal do ideal I_A , o que prova a) das relações do enunciado do teorema.
- 2) $\bar{\alpha} \in kQ_{A'}$. Como antes, temos que o caminho $\bar{\alpha} : i' \rightsquigarrow j'$ onde os vértices i' e j' estão em $kQ_{A'}$, é um gerador minimal do ideal $I_{A'}$, como em b).

Até agora temos que o ideal $\bar{I}$, tem como geradores os geradores do ideal I_A , e do ideal $I_{A'}$. Como não existem caminhos do quiver Q_A ao quiver $Q_{A'}$, só resta estudar a seguinte situação

- 3) O caminho $\bar{\alpha} : i' \rightsquigarrow j$, onde o vértice $i' \in Q_{A'}$ e o vértice $j \in Q_A$. Como $\bar{\alpha}$ é um gerador minimal do ideal $\bar{I}$, temos que

$$\begin{aligned} \dim_k e_{i'} \bar{\alpha} e_j &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} DA & e_{i'} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} DA e_j & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que $i \neq j$ não existe um caminho não nulo do vértice j até o vértice i . Mas, observemos que como o quiver Q_A é livre de $\tilde{A}_n$, o caminho $\bar{\alpha}$ contem somente uma flecha nova, que liga os quivers Q_A e $Q_{A'}$. Portanto o caminho $\bar{\alpha}$ tem a seguinte forma

$$\bar{\alpha} = \alpha'_1 \cdots \alpha'_t \beta \alpha_{t+1} \cdots \alpha_s : i' \xrightarrow{\alpha'} u' \xrightarrow{\beta} r \xrightarrow{\alpha} j,$$

onde denotaremos por $\alpha' = \alpha'_1 \cdots \alpha'_t : i' \rightsquigarrow u'$, $\beta : u' \longrightarrow r$, a flecha ligando os dois quivers, e $\alpha = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_s : r \rightsquigarrow j$. Logo, temos que

a) Se α' é um caminho maximal, então β pode ser a flecha associada a este caminho maximal ou não. Se β é a flecha associada ao caminho maximal determinado por α' , temos que $\alpha'\beta \neq 0$. Se $\alpha'\beta\alpha_{t_1} : i' \rightsquigarrow u' \longrightarrow r \xrightarrow{\alpha_{t+1}} r_0$, não é nulo em $k\overline{Q}/\overline{I}$, então temos que $\dim_k \overline{e_{i'}} \overline{A} \overline{e_{r_0}} \neq 0$, pois

$$\begin{aligned} \dim_k \overline{e_{i'}} \overline{A} \overline{e_{r_0}} &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{i'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} DA & e_{r_0} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{i'} DA e_{r_0} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto temos que $\dim_k \overline{e_{i'}} \overline{A} \overline{e_{r_0}} = \dim_k e_{i'} DA e_{r_0} \neq 0$, o que contradiz a maximalidade do caminho α' . Assim, temos que se α' é um caminho maximal e β é sua flecha nova associada, então $\overline{\alpha} = \alpha' \beta \alpha_{t+1}$.

b) Se α' não é um caminho maximal, temos que existem um número finito de caminhos maximais contendo o caminho α' . Sejam $m_1, \dots, m_x$ esses caminhos. Logo, do vértice u' , existem $\beta_1, \dots, \beta_x$ flechas novas ligando os dois quivers, associados aos caminhos maximais $m_1, \dots, m_x$, respectivamente. Como o caminho α' não é um caminho maximal, podemos supor sem perda de generalidade que estes caminhos terminam no vértice u' .

Então, temos um caminho $p_t : u' \xrightarrow{\beta_i} r_t \longrightarrow i$, onde $i = 1, \dots, x$, e cada um dos caminhos $p_t \neq 0$ (ver observação depois do Corolário 3). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dim_k \overline{e_{u'}} \overline{A} \overline{e_i} &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{u'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{u'} DA & e_i A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim_k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{u'} DA e_i & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

e como a álgebra A é livre de $\tilde{A}_n$, temos que $\dim_k e_{u'} D A e_i = \dim_k e_i A e_u = 1$. Logo, estamos nas condições do Lema 3.1.1. Portanto, temos que o caminho $\bar{\alpha}$ é dado pelas relações de comutatividade de $p_1, \dots, p_x$. Por outro lado, temos que o caminho $\bar{\alpha} = \alpha' p_i \alpha_1^*$, onde $\alpha_1^* : u \rightarrow u_1$, se u não for um poço. Caso contrário, temos que $\dim_k e_{u_1} A e_u \neq 0$ conseqüentemente existiria um ciclo orientado, o que é uma contradição.

A partir do teorema anterior, podemos dar a caracterização do quiver ordinário da extensão trivial $T(A) = A \ltimes DA$ definida no capítulo 2, no seguinte Corolário.

Corolário 1 *Seja $A \cong kQ/I$ livre de $\tilde{A}_n$. Então o quiver ordinário de $T(A) = A \ltimes DA$ é dado por $T(A) = \frac{kQ^*}{I^*}$, onde Q^* é dado por:*

- i) $(Q^*)_0 = Q_0$
- ii) $(Q^*)_1 = Q_1 \cup Q_1^*$, onde Q_1 é o conjunto de flechas do quiver da álgebra A e o conjunto Q_1^* flechas novas tal que, existe uma flecha nova entre i e j se existe um caminho maximal u em A de j em i .
- iii) $I^* = I \cup I_0^*$, onde:

$$I_0^* := \{p := x_i \cdots x_j \text{ é caminho máximo e } x_{j,i}^* \text{ flecha nova. Então } p = x_j\}.$$

Pv: Basta fazer a identificação das duas cópias do quiver Q .

Observação 3 *Se algum dos caminhos de comprimento dois, formado por uma flecha nova e uma outra flecha, for zero no quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$, então ao fazer a identificação para obter o quiver ordinário da extensão trivial teríamos um caminho nulo, o que nos leva a uma contradição.*

Mostremos o teorema 3.1.1 no seguinte exemplo

Exemplo 3.1.2 *Consideremos a k -álgebra A dada pelo quiver ordinário da figura 3.2. Onde a linha pontilhada na figura 3.2 indica uma relação zero. Logo, o quiver ordinário da álgebra $\bar{A}$ é dado pelo quiver da figura 3.3.*

Figura 3.2:

As linhas pontilhadas são flechas novas

Figura 3.3:

3.2 $\overline{A}$ como extensão por ponto

Fazendo uso do Teorema 3.1.1, estamos em condições de dar uma construção da k -álgebra $\overline{A}$, como sucessão de extensões por um ponto.

Teorema 3.2.1 *Seja $A = kQ/I$, mansa disfarçada tal que o quiver Q não tem um subquiver de tipo $\tilde{A}_n$. Então, a álgebra $\overline{A}$ da forma $A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$ onde cada módulo M_{w_i} é $A_i = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_{i-1}}]$ -injetivo ($i = 1, \dots, n$).*

Pv: Como a k -álgebra A é mansa disfarçada (ver Ringel [R]) , temos que o quiver de Auslander-Reiten Γ_A , tem componente posprojetiva $\mathcal{P}$, uma família tubular separante $\mathcal{T}$, e uma componente pre-injetiva $\mathcal{I}$. Agora, pelo teorema 2.5.2 temos que a k -álgebra $\overline{A}$ é de tipo de representação manso, então toda sub-álgebra também é de tipo de representação manso. Pelo Teorema 3.1.1, sabemos que o quiver ordinário da k -álgebra $\overline{A}$ é dado por duas cópias do quiver ordinário da k -álgebra A , onde as duas cópias estão ligadas por flechas que estão determinadas pelos caminhos maximais, segundo a definição 3.1.1.

Vamos usar a mesma notação que no teorema 3.1.1. A construção que utilizamos para a demonstração do teorema está baseada em adicionar ao quiver Q um novo vértice, até

completar o quiver Q' .

O primer vértice a ser adicionado é w'_1 (esta notação não tem porque coincidir com a ordenação do quiver original), onde w'_1 é um poço no quiver Q' . Então, consideremos $A_1 = A[M_{w'_1}]$, onde o módulo $M_{w'_1} = \text{rad}P_{w'_1}$ e $P_{w'_1}$ é o projetivo associado ao novo vértice w'_1 , como na figura 3.4 abaixo.

Figura 3.4:

Recordemos que o número de flechas saindo do vértice w'_1 , é dado pelo número de caminhos maximais chegando em w'_1 , no quiver Q' . Mostremos que, o módulo $M_{w'_1}$ é um módulo injetivo em A . Por [P], temos que o módulo $M_{w'_1}$ é regular ou preinjetivo, pois já sabemos que a k -álgebra A_1 é mansa.

Seguindo [ARS], a representação do módulo projetivo $P_{w'_1}$ é dada por todos os caminhos que saem do vértice w'_1 , que neste caso, cada uma das flechas novas saindo do vértice w'_1 , começa no vértice a_{w_i} , do quiver Q , e de cada um destas vértices temos um caminho maximal até o vértice w_1 (lembre que o quiver Q é igual ao quiver Q'), pelo teorema 3.1.1, logo o $\text{rad}P_{w'_1} = M_{w'_1}$ tem sua representação dada por todos os caminhos que começam em algum dos vértices a_{w_i} e terminam em w_1 , que é a representação do módulo injetivo associado ao vértice w_1 no quiver Q . Portanto, temos que o módulo $M_{w'_1}$ é um módulo injetivo indecomponível na k -álgebra A . Então, temos um estiramento finito da componente injetiva $\mathcal{I}$, do quiver de Auslander-Reiten Γ_A , ou temos uma nova componente pre-injetiva como na figura 3.5 (ver [N1]).

Figura 3.5:

Consideremos o quiver $Q_1 = Q \cup (w_{1'})$ e adicionemos o vértice $w_{2'}$ ao quiver Q_1 , e o vértice $w_{2'}$ é um um poço do sub-quiver $Q'_1 = Q' - (w'_1)$. Então, temos duas situações:

1.- $P_{w_{1'}} \subset P_{w_{2'}}$. Neste caso, existe uma flecha do vértice $w_{2'}$ até $w_{1'}$ (o Quiver Q' não tem flechas múltiplas), e claramente o vértice $w_{2'}$ no quiver Q' não é um poço, e não tem flechas saindo pois ele é um poço no quiver Q'_1 . Então, $radP_{w_{2'}} = M_{w_{2'}}$ tem como representação, por [ARS], os caminhos que passam pelo vértice $w_{1'}$ até o vértice w_2 no quiver Q . Agora, pelo Teorema 3.1.1, temos que o número de caminhos do vértice $w_{2'}$ só chegam até o vértice w_2 . Logo, o módulo $M_{w_{2'}}$ tem como representação os caminhos que chegam no vértice w_2 que é o módulo injetivo I_{w_2} . Este módulo injetivo não pode estar na componente $\infty\mathcal{I}\infty$, pois por Gladys [GL], a extensão seria de tipo selvagem. Então, como antes podemos ter um estiramento de tipo finito da componente injetiva $\infty\mathcal{I}_1$, ou uma nova componente injetiva dada por duas componentes

$$\infty\mathcal{I}_2\infty \cup \infty\mathcal{I}_2.$$

2.- $P_{w_{1'}} \not\subset P_{w_{2'}}$. Neste caso procedemos como no caso de $P_{w_{1'}}$ e continuamos desta forma até completar o quiver $\overline{Q}$, dado pelo Teorema 3.1.1. Portanto, temos que $\overline{A} = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$ e os módulos M_{w_i} são injetivos na k -álgebra $A_i = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_{i-1}}]$, com $i = 1, \dots, n$ como queríamos.

Antes de enunciar o próximo resultado consideremos a seguinte definição.

Definição 3.2.1 [DP] Seja $x \in Q_0$, denotaremos por A^x a sub-categoria plena de A cujos vértices são os $y \in Q_0$, onde $y \not\leq x$ (não existe caminho do vértice y até o vértice x).

Observação 1 1) Na definição anterior estamos considerando a k -álgebra $A \cong kQ/I$, como uma k -categoria, como visto no Capítulo 2.

2) Veja que o quiver Q^x de A^x é um subquiver convexo do quiver Q .

3) Um A -módulo projetivo $P_x = e_x A$, tem radical $\text{rad} P_x$, o qual é um A^x -módulo.

4) Denotaremos por $\text{rad} P_x = \bigoplus_{i=1}^n R_i^x$ a decomposição em indecomponíveis do radical de P_x .

Teorema 3.2.2 [DP] Seja $A \cong kQ/I$ uma k -álgebra tal que o quiver Q não tem circuitos orientados. Então, o quiver de Auslander-Reiten Γ_A , tem uma componente posprojetiva se e somente se, para cada vértice $x \in Q_0$ uma das condições seguintes é válida:

(1x) Existe uma componente posprojetiva $\mathcal{P}$ de Γ_{A^x} , tal que os somandos R_i^x não estão na componente posprojetiva $\mathcal{P}$.

(2x) Para cada $1 \leq i \leq n_x$, o conjunto de predecessores $\{\psi \in \Gamma_{A^x} : \psi \leq R_i^x\}$ de R_i^x em mod_{A^x} é finito e formado por módulos dirigidos. Se x é fonte, então $\text{rad} P_x$ é dirigido em mod_{A^x} .

Temos então, o seguinte corolário do Teorema 3.2.1.

Corolário 1 Seja $A = \frac{kQ}{I}$ uma k -álgebra de tipo mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$. Então, não todos os módulos projetivos de $\bar{A}$ estão na mesma componente conexa de $\bar{A}$.

Pv: Sabemos por [DP], Corolário 1.6, que se todos os módulos projetivos estão numa só componente posprojetiva, então para cada $x \in Q_0$ vale que $\text{rad } P_x = \bigoplus_i^m R_i^x$ e para cada $1 \leq i \leq n$, o conjunto de predecessores, $\{\psi \in \Gamma_{A^x} : \psi \leq R_i^x\}$, de R_i^x em mod_{A^x} é finito e formado por módulos dirigidos.

Suponhamos que todos os módulos projetivos de $\bar{A}$ estão na mesma componente conexa. Mas, pelo teorema 3.1.1, sabemos que $\bar{A} = A[M_{w_n}] \cdots [M_{w_1}]$, onde $M_{w_0} = \text{rad } P_{w_0}$ está na componente pré-injetiva de Γ_A e como A é de tipo mansa disfarçada, temos que o número de predecessores de M_{w_0} em Γ_A não é finito. Logo, não todos os projetivos estão na mesma componente conexa.

A seguir introduziremos a definição de Cohomologia de Hochschild de uma álgebra, para mostrar que se temos uma k -álgebra A com cohomologia de Hochschild nula então a álgebra $\bar{A}$ tem cohomologia de Hochschild nula.

Seja A uma k -álgebra, e seja X um $A - A$ bimódulo. Denotaremos por $\otimes^n A$ o produto tensorial de n cópias de A , $A \otimes_k \cdots \otimes_k A$. Então, $\text{Hom}_k(\otimes^n A, X)$ é o espaço das aplicações multilineares de A^n em X .

Consideremos as funções $d_i^n : \text{Hom}_k(\otimes^n A, X) \rightarrow \text{Hom}_k(\otimes^{n+1} A, X)$ definidas por

$$\begin{aligned} d_i^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \\ &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \quad \text{para } i = 0 \\ &= f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1} \quad \text{para } i = n + 1 \end{aligned}$$

Finalmente $d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n : \text{Hom}_k(\otimes^n A, X) \rightarrow \text{Hom}_k(\otimes^{n+1} A, X)$ é uma função linear.

Definição 3.2.2 *Seja A uma k -álgebra. Chamaremos de n -ésima cohomologia de Hochschild de A com coeficientes em X , à n -ésima cohomologia do complexo*

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{d^0} \text{Hom}_k(A, X) \xrightarrow{d^1} \text{Hom}_k(\otimes^2 A, X) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

$$H^n(A, X) = \ker d^n / \text{Im } d^{n-1}.$$

Teorema 3.2.3 *Seja $A = kQ/I$ uma k -álgebra mansa disfarçada e livre de $\tilde{A}_n$ tal que $H^1(A) = 0$. Então o grupo de Cohomologia de Hochschild $H^1(\bar{A}) = 0$.*

Pv: Como a k -álgebra A é livre de $\tilde{A}_n$, temos pelo Teorema 3.2.1, que a k -álgebra $\bar{A}$ é da forma $A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$. Agora por Happel [H] temos a seguinte sequencia para extensões

por um ponto, $A_1 = A[M]$

$$0 \longrightarrow H^0(A_1) \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow \frac{End M}{k} \longrightarrow H^1(A_1) \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow \\ Ext_A^1(M, M) \longrightarrow H^2(A_1) \longrightarrow H^2(A) \longrightarrow Ext_A^2(M, M) \longrightarrow \dots$$

Então, usando o Teorema 3.2.1, temos que $A_1 = A[M_{w_1}]$, onde M_{w_1} é um módulo injetivo na k -álgebra A . Logo,

$$0 \longrightarrow H^0(A_1) \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow \frac{k}{k} \longrightarrow H^1(A_1) = 0 \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow Ext_A^1(M, M) = 0 \dots$$

e, como $\bar{A} = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$, aplicando de forma sucessiva o raciocínio anterior temos o Teorema.

O seguinte resultado é mostrado por Happel e Ringel (ver [HR1]) .

Teorema 3.2.4 (Teorema 1 em [HR1])

Seja P um módulo projetivo indecomponível. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) *O módulo P é dirigido.*
- (b) *O $rad P$ é dirigido.*
- (c) *Cada somando direto do $rad P$ é dirigido.*

A partir do teorema anterior, temos o seguinte corolário do Teorema 3.2.1.

Corolário 1 *Seja A uma k -álgebra mansa disfarçada livre de $\tilde{A}_n$. Então, as componentes do quiver de Auslander-Reiten $\Gamma_{\bar{A}}$ da álgebra $\bar{A}$, são dirigidas ou tubos estáveis.*

Pv. Pelo Teorema 3.2.1, temos que a álgebra $\bar{A}$ é da seguinte forma:

$$\bar{A} = A[M_{w_0}] \cdots [M_{w_n}]$$

Seja $A_1 = A[M_{w_0}]$. Da demonstração do teorema 3.2.1, segue que $rad P_{w_0} = M_{w_0}$ é injetivo e dirigido. Portanto pelo teorema 3.2.4 temos que o módulo projetivo P_{w_0} é dirigido. Logo, a nova componente é dirigida. Este processo pode ser repetido um número finito de vezes, logo temos o corolário.

Referências Bibliográficas

- [A1] I. Assem. *Tilted Algebras of type A_n . Communications in Algebra*, (19);2121-2139, 1982.
- [A2] I. Assem. *Torsion theories induced by tilting modules. Canadian Journal of Mathematics*, 36(5);899-913, 1984.
- [AS1] I. Assem and A. Skowroński. *Algebras with cycle-finite derived categories. Math. Ann.*,280; 441-463, 1988.
- [AS2] I. Assem and A. Skowroński. *On tame repetitive algebra. Fundamenta Mathematicae*. 142.1; 59-84, 1993.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 36, 1995.
- [BA] M. Barot. *Representation-finite derived tubular algebras. Preprint. México. 1996.*
- [BP] M. Barot and J. A. de la Peña. *Derived tubular strongly simply connected algebras. To appear in Proceeding Am. Math. Soc.*
- [BR] R. Brauer. *On the indecomposable representations of algebras. Bull. Amer. Math. Soc.* 47, abstract 334, 684. 1941.
- [B] S. Brenner. *The almost split sequence starting with a simple module. Arch. Math.* Vol. 62; 203-206 ,1994.

- [C-B1] W. W. Crawley-Boevey. *On tame algebras and boces. Proc. London Math. Soc.* (3)50, 451-483. 1988.
- [C-B] W. W. Crawley-Boevey. *Funtorial filtrations II: Clans and the Gelfand problem. J. London Math. Soc.* 40, 9-30, 1989.
- [CPS] E. Cline, B. Parshall and L. Scott. *Derived categories and Morita theory. J. Algebra*, (104):397-409, 1986.
- [CO] F. Coelho. *Uma introdução à teoria de representações. XII Escola de Álgebra. Diamantina Brasil.* 1992.
- [DSK] P. Dowbor, A. Skowroński. *On the representation type of locally bounded categories. Tsukuba J. Math.* 10-1; 63-72. 1986.
- [DP] P. Draxler and J. A. de la Peña. *On the existence of postprojective components in the Auslander-Reiten quiver of an algebra. Tsukuba J. Math.* Vol. 20 (2), 457-469. 1996.
- [D] J. A. Drozd. *Representations of commutative algebras. Funkc. Anal. Prilozen* 6(4); 41-43. 1972. *Engl. Transl. Func. Anal. Appl.* 6; 186-288. 1972.
- [G] P. Gabriel. *Unzerlegbare darstellungen I. Manuscripta Math.* 6; 71-103. 1972.
- [GR] E. L. Green. *Graphs with relations, coverings and group-graded algebra. Trans. Amer. Math. Soc.* 279; 297-310. 1983.
- [G1] P. Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831(Springer, Berlin 1980), 1-71.*
- [G2] P. Gabriel. *The universal cover of representation-finite algebra. Proc. ICRA II (Puebla 1980), Lectures Notes in Mathematics 903 (Springer, Berlin 1981).*

- [GL] A. Gladys Chalom. *Extensões por um ponto de Álgebras inclinadas mansas. Tese de doutorado IME. USP. 1998.*
- [H1] D. Happel. *Iterated tilted algebras of affine type. Comm. Algebra, (15):29-45,1987.*
- [H] D. Happel. *On the derived categories of finite-dimensional algebras. Comment. Math. Helv.,62; 339-389,1987.*
- [HRS] D. Happel, J. Rickard and A. Schofield. *Piecewise hereditary algebras. Bull London Math. Soc.,(20): 23-28, 1988.*
- [HR] D. Happel and C. M. Ringel. *The derived category of a tubular algebra. Lecture Notes in Math. Springer,1177; 156-180.1986.*
- [HR1] D. Happel and C. M. Ringel. *Directing Projective Modules. Arch. Math. 60; 237-246. 1993.*
- [HW] D. Hughes and J. Waschbusch. *Trivial extension of tilted algebras. Proc. London Math. Soc. 46;347-364.1983.*
- [JA] J. P. Jans. *On the indecomposable representations of algebras. Annals Math. 66; 418-429. 1957.*
- [JM] A.R. Jones and H. Merklen. *Representações de álgebras: métodos diagramáticos. Publicações do IME-USP, São Paulo, 1984.*
- [Kr] H. Krause. *Stable module categories and their representation type. Preprint Bielefeld. 1996.*
- [K] O. Kerner. *Tilting wild algebras. J. London Math. Soc.(2) 39, 29-47.(1989)*
- [LDS] H. Lenzing, P. Dowbor and A. Skowroński. *Galois covering of algebras by locally support-finite categories, Proceeding Lectures Notes in Math. 1171, Springer 1986.*

- [N1] C. Novoa-Bustos. *Quiver de Auslander-Reiten e forma quadrática homológica da algebra $\overline{A}$, em preparação.*
- [NS] R. Norenberg and A. Skowroński. *Tame minimal non-polinomial growth strongly connected algebras. Proc. ICRA VII. CMS-AMS conference Proceeding Vol. 18; 519-538, 1996.*
- [P1] J.A. de la Peña. *Algebras whose derived category is tame. Proceedings AMS-conference, Seattle 1997, in press*
- [P] J.A. de la Peña. *On the representation type of one point extension of tame concealed algebras. Manuscripta Math., 61; 183-194. 1988*
- [R] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms, Lectures Notes in Math. 1099, Springer, 1984.*
- [R1] C. M. Ringel. *Report on the Brauer-Thrall conjectures, in Representation Theory I, Proceedings Lectures Notes in Math. 831, Springer 1980.*
- [R2] C. M. Ringel. *Tame algebras, on algorithms for solving vector space problems II, Proceedings Lecture Notes in Math. 831, Springer 1980.*
- [RO] A. V. Rojter. *The unboundedness of the dimension of the indecomposable representations of algebras that have a finite number of indecomposable representations. Izv. Acad. Nauk SSR, 32; 1275-1282. 1968.*
- [TH] R. M. Thrall. *On algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 53. Abstract 22; 49. 1947.*
- [T] S. Trepode. *A conjectura de Roldán para álgebras inclinadas iteradas de tipo euclidiano. Tese de doutorado IME USP. 1995.*
- [S] A. Skowroński. *On algebras of finite strong global dimension. Bull. Polish. Acad. Sci., 35; 359-547. 1987.*

- [YO] T. Yoshii. *On algebras of bounded representation type. Osaka Math. J.* *, 51-105. 1956.
- [TW] H. Tachikawa, T. Wakamatsu. *Applications of reflection functors for self-injective algebras. J. Algebra*, 109; 138-165, 1987.
- [W] T. Wakamatsu. *Stable equivalence between universal covers of trivial extension self-injective algebras. Tsukuba J. Math.*, 9; 299-316, 1985.