**As superfícies com curvatura média 1
em H^3 e seu parentesco com as
superfícies mínimas em R^3**

Barbara Corominas Valério

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientadora: **Prof^a Dr^a Célia Contin Góes**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, agosto de 1999-

As superfícies com curvatura média 1
em H^3 e seu parentesco com as
superfícies mínimas em R^3

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Barbara Corominas Valério
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 1999.

Banca examinadora:

- Prof^ª Dr^ª Célia Contin Góes (Orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Sá Earp - PUC-RJ
- Prof. Dr. Eric Toubiana - UNIV. PARIS VII

*À minha mãe, Dolores,
e ao meu pai, Diamilton (in memoriam).*

Abstract

The Hiperbolic Gauss map of constant mean curvature one surfaces in hiperbolic space is defined as a holomorphic map. Bryant [B] showed that an analogue of the Weierstrass type representation holds for this surfaces. This work intends to study same examples of this surfaces, using an alternative model showed by [GG].

Resumo

A aplicação de Gauss Hiperbólica das superfícies com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico é definida como uma aplicação holomorfa, assim como a aplicação de Gauss das superfícies mínimas do espaço euclidiano. Bryant [B] propôs para tais superfícies uma representação tipo representação de Weierstrass. Este trabalho se propõe a estudar alguns exemplos de superfícies com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ através de um modelo alternativo proposto por [GG].

Sumário

Introdução	v
1 Imersões em Espaços Hiperbólicos	1
1.1 Introdução	1
1.2 Aplicação de Gauss Hiperbólica	2
1.3 A Curvatura Média e a Curvatura Gaussiana de uma Imersão no Espaço Hiperbólico	5
1.4 Imersões com Aplicação de Gauss Hiperbólica Conforme	7
1.5 Imersões com Aplicação de Gauss Hiperbólica Holomorfa	14
1.5.1 Um Teorema de Representação	14
1.5.2 Condição de Compatibilidade	19
1.5.3 Curvatura Total	22
1.5.4 Primeira e Segunda Formas Fundamentais	22
1.5.5 Equação de Gauss e Mainardi - Codazzi da Imersão	24
2 Relação Entre as Superfícies com $H = 1$ no Espaço Hiperbólico e as Superfícies com $H = 0$ no Espaço Euclidiano	26
2.1 Superfícies Primas	27

2.2	Simetrias	31
3	Prima do Catenóide	35
3.1	Construção da Superfície	35
3.2	Propriedades da Superfície	39
3.2.1	Curvatura Total	39
3.2.2	Primeira e Segunda Formas Fundamentais	40
3.2.3	Uma Superfície de Rotação	41
3.3	Estudo das Simetrias	45
3.3.1	As Primas do Catenóide	45
3.3.2	Isometrias	46
4	Prima da Superfície de Enneper	49
4.1	Construção da Superfície	49
4.2	Propriedades da Superfície	51
4.2.1	Curvatura Total	51
4.2.2	Primeira e Segunda Formas Fundamentais	52
4.3	Estudo das Simetrias	55
4.3.1	As Primas da Superfície de Enneper	55
4.3.2	Isometrias	57
5	Prima da Superfície de Bonnet	59
5.1	Construção da Superfície	59
5.2	Propriedades da Superfície	60
5.2.1	Curvatura Total	60

5.2.2	Primeira e Segunda Formas Fundamentais	61
5.3	Estudo das Simetrias	64
5.3.1	As primas da Superfície de Bonnet	64
5.3.2	Isometrias	65
6	Superfícies Associadas às Primas do Catenóide e a Prima do Helicóide	68
6.1	Construção das Superfícies	69
6.2	Propriedades da Superfície	69
6.2.1	Curvatura Total	69
6.2.2	Primeira e Segunda Formas Fundamentais	70
6.3	Superfícies Mínimas Associadas ao Catenóide e suas Primas	71
6.3.1	As Primas do Helicóide	73
6.3.2	As Primas do Catenóide	74
6.4	Superfícies Mínimas Associadas à Enneper e suas Primas	77
	Referências Bibliográficas	80

Lista de Figuras

3.1	<i>Curvas geratrizes de superfícies de rotação com $H = 1$ no modelo do semi espaço superior: (a) $\alpha > 0$; e (b) $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. Em ambos os casos tomamos $A = B$.</i>	43
3.2	<i>Superfície de rotação não mergulhada, com $\alpha = 0.49$, no modelo do semi espaço superior.</i>	44
3.3	<i>Superfície de rotação mergulhada, com $\alpha = -0.1$, no modelo do semi espaço superior.</i>	44
4.1	<i>Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (4.5), com $\rho = A = B = 1$, $u \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ e $v \in [-\frac{8\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}]$.</i>	54
4.2	<i>Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (4.5), com $\rho = A = B = 1$, e u e v pertencentes a outros intervalos.</i>	55
5.1	<i>Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (5.1), com $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{2}$.</i>	62
5.2	<i>Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (5.1), com $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{2}$ e utilizando a isometria T.</i>	64
5.3	<i>Superfície de Bonnet mínima em $\mathbb{R}^3$.</i>	66

Introdução

Estudando as superfícies com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico, verifica-se que a aplicação de Gauss Hiperbólica pode ser definida como uma aplicação holomorfa tal como a aplicação de Gauss das superfícies mínimas do espaço Euclidiano. Robert L. Bryant [B], um dos pioneiros no estudo dessas superfícies no espaço hiperbólico, propôs uma representação para tais superfícies, tipo representação de Weierstrass existente na teoria das superfícies mínimas. Umehara e Yamada ([UY-1], [UY-2]), seguindo as idéias de Bryant, fizeram novas contribuições, em particular, explicitaram uma ferramenta para a construção de tais superfícies. Em meu trabalho de dissertação, estudo um modelo de representação via uma proposta alternativa desenvolvida em “A Weierstrass type representation for surfaces in hiperbolic space with mean curvature one” por Célia C. Góes e M. Elisa E. L. Galvão [GG].

O objetivo deste trabalho é estudar os vários exemplos existentes de superfícies em espaços hiperbólicos com curvatura média constante 1 utilizando a representação em [GG], verificando suas características geométricas e analisando, especialmente, sua relação de isometria e uma relação mais forte, envolvendo a segunda forma fundamental, com as superfícies mínimas no espaço euclidiano, segundo Eric Toubiana e Ricardo Sá Earp [ET].

No capítulo 1, apresentamos o modelo de representação (Teorema (1.2)) para as superfícies com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ utilizando, em sua construção, a aplicação de Gauss Hiperbólica conforme dada por

Definição 1.1 A aplicação de Gauss hiperbólica da imersão isométrica $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é a aplicação

$$\begin{aligned} n : M &\longrightarrow \partial D \\ p &\longrightarrow \varphi(X(p)) + t\varphi_*(N(p)) \end{aligned}$$

onde $t > 0$ e $n(p) \in \partial D$ [GG].

Os principais teoremas do capítulo 1 são:

Teorema 1.1 Seja $n : M \longrightarrow \partial D$ a aplicação de Gauss hiperbólica da superfície $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$, com n não constante. A aplicação $n : M \longrightarrow \partial D$ é conforme se, e somente se, a imersão X tem $H = 1$ (neste caso n preserva a orientação) ou X é totalmente umbílica (neste caso n reverte a orientação) [B].

Teorema 1.2 Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão não umbílica com $H = 1$ e $n(z) = \left(1, \frac{2Re\ h}{|h|^2+1}, \frac{2Im\ h}{|h|^2+1}, \frac{|h|^2-1}{|h|^2+1}\right)$ sua aplicação de Gauss hiperbólica. Denotando $X(z) = (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z))$, as funções reais $\phi_1(z) = x_0(z) + x_3(z)$ e $\phi_2(z) = x_0(z) - x_3(z)$ e a função complexa $\phi_3(z) = x_1(z) + ix_2(z)$ satisfazem,

$$\begin{cases} \phi_1\phi_2 = 1 + |\phi_3|^2 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = h \frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \end{cases}$$

Reciprocamente, dada uma função holomorfa não constante $h : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, duas funções reais ϕ_1 e ϕ_2 (com $\phi_2 > 0$) e uma função complexa ϕ_3 satisfazendo (1.23), no domínio U simplesmente conexo então,

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, Re\ \phi_3, Im\ \phi_3, \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

define uma imersão conforme em $\mathbb{H}^3$ com $H = 1$ e a aplicação de Gauss hiperbólica n é dada por h , como acima [GG].

Utilizando o teorema de representação, fornecemos expressões para a primeira e segunda formas fundamentais e para as equações de Gauss e Mainardi - Codazzi da imersão. Essas expressões são usadas no segundo capítulo onde estudamos algumas

das relações que podem ser estabelecidas entre as superfícies com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico e as superfícies mínimas no espaço euclidiano.

Mais especificamente, no capítulo 2 estabelecemos claramente quando duas superfícies são chamadas primas entre si, ou seja, dada uma superfície mínima no espaço euclidiano e denotando por ds^2 e $\tilde{\Pi}$ a primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente, temos que ds^2 e $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$ satisfazem as equações de Gauss e Mainardi - Codazzi em $\mathbb{H}^3$, isto é, definem uma imersão isométrica em $\mathbb{H}^3$, com $H = 1$, [ET]. As superfícies que assim se relacionam, são chamadas **primas entre si**.

Ainda no capítulo 2 mostramos que linhas de curvatura plana em superfícies mínimas correspondem a linhas de curvatura plana na superfície prima hiperbólica e, como consequência, se uma superfície mínima admite planos de simetria sua prima também admitirá, segundo [ET].

Nos quatro capítulos seguintes estudamos os exemplos existentes, onde nos três primeiros, exibimos os planos de simetria das superfícies construídas, segundo Barbara Nelli e Maria Elisa E. L. Galvão [GN] e [ET].

Mais precisamente, no capítulo 3 construímos as primas dos Catenóides apresentando uma técnica, baseada no teorema (1.2), e utilizando - a na construção desta superfície.

No capítulo 4 apresentamos uma nova técnica, ainda baseada no teorema (1.2), e que será utilizada nos demais capítulos. Neste capítulo, construímos as primas da Superfície de Enneper e no capítulo 5, as primas da Superfície de Bonnet.

No Capítulo 6 construímos as primas das superfícies mínimas isométricas associadas do Catenóide e, em particular, o Helicoide e o Catenóide. No segundo caso, abrangemos superfícies que não são cobertas no capítulo 3.

Construímos ainda, no capítulo 6, as primas das superfícies mínimas isométricas à Superfície de Enneper.

Para a compreensão do trabalho desenvolvido são necessários conhecimentos básicos

sobre Geometria Riemanniana e sobre a teoria e geometria do espaço hiperbólico. Esses assuntos podem se encontrados em [C] e [Su], respectivamente. Sobre a teoria do espaço hiperbólico destacamos uma proposição, por ser usada algumas vezes neste trabalho, sobre as superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^3$ e cuja demonstração também pode ser encontrada em [Su].

Proposição *As subvariedades umbílicas de $\mathbb{H}^3(c)$ são obtidas tomando - se intersecções de $\mathbb{H}^3(c)$ com subespaços afins de $\mathbb{L}^{n+1}$, portanto são esferas geodésicas, horoesferas ou superfícies equidistantes, além das superfícies totalmente geodésicas.*

Agradeço à minha orientadora, prof^a Célia C. Góes, pela dedicação e paciência com que me orientou. Sua experiência e seus questionamentos me ensinaram a pensar Matemática de uma nova forma.

A todos os professores do grupo de geometria, muito obrigado pelas inúmeras vezes que se dispuseram a ouvir minhas dúvidas. Em especial, quero agradecer à professora Rosa M. B. Chaves pelo constante incentivo, apoio e carinho e, principalmente, por sempre acreditar em mim desde o tempo da graduação. Agradeço também a todos os professores do IME, que de uma forma ou outra, me ensinaram algo e, em particular, à professora Maria Ignez Diniz e à professora Roseli Fernandez.

Aos meus pais, que sempre fizeram tudo por mim e, em particular, à minha mãe e amiga, a qual nunca poderei retribuir tudo o que fez e continua fazendo por mim. A minha yaya Pepita, aos meus irmãos, Montserrat e Artur, e ao meu cunhado Rogério, muito obrigado pelo apoio. Aos meus sobrinhos Natália, Lucas e Paloma, um beijo.

Agradeço à minha amiga Simone, e aos amigos de graduação Marcelo e Gisele pela torcida. Ao meu namorado e amigo Gilberto, obrigado pela enorme paciência, compreensão e pelos fins de semana que não nos vimos.

Agradeço a todos os amigos da pós, principalmente ao Jorge, Zé, Irene, Sidinei,

Regina, Major, Cecília, Samuel, Raul e Armando pela dicas, sugestões de livros, questionamentos, em como mexer no Latex e sobretudo pelo companherismo.

Por fim, agradeço a Deus por minha vida e pela coragem de continuar lutando, mesmo nos momentos mais difíceis.

Capítulo 1

Imersões em Espaços Hiperbólicos

Neste capítulo construiremos um modelo de representação para as superfícies com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, do tipo da representação de Weierstrass existente na teoria das superfícies mínimas. Utilizaremos na construção desse modelo, subseção 1.4.1, a aplicação de Gauss Hiperbólica, que será definida e discutida nas seções 1.1 e 1.3. Na seção 1.4 discutiremos, em função do Teorema de Representação (1.2), algumas propriedades geométricas das superfícies.

1.1 Introdução

Consideremos o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4$, isto é, o par $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ onde

$$\mathbb{R}^4 = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$$

e

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + \sum_{j=1}^{j=3} x_jy_j.$$

O modelo de Minkovsky para o espaço hiperbólico é a subvariedade

$$\mathbb{H}^3(-1) = \{x \in \mathbb{L}^4 / \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Em $\mathbb{H}^3$ consideraremos a orientação induzida de $\mathbb{L}^4$, isto é, $v_1, v_2, v_3 \in T_p \mathbb{H}^3$ formam uma base positiva se, e somente se, (p, v_1, v_2, v_3) é uma base positiva para $\mathbb{L}^4$.

Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann, M , no espaço hiperbólico e seja N um campo unitário normal ao longo de X , de tal modo que, em coordenadas isotérmicas, $z = u + iv$, $(X(p), \frac{1}{\lambda} X_u, \frac{1}{\lambda} X_v, N(p))$ é uma base positiva para $T_p \mathbb{L}^4$, onde $\|X_u\| = \|X_v\| = \lambda$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Consideremos a aplicação bijetora,

$$\varphi : \mathbb{H}^3 \longrightarrow D \tag{1.1}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right),$$

onde $D = \{(y_0, y_1, y_2, y_3) / y_0 = 1 \text{ e } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1\}$. (Note que ∂D pode ser identificado com a esfera S^2).

Lembramos que, considerando em D a métrica induzida de $\mathbb{H}^3$ por φ^{-1} , teremos uma isometria entre $\mathbb{H}^3$ e o modelo de Klein (D).

1.2 Aplicação de Gauss Hiperbólica

Definição 1.1 *A aplicação de Gauss hiperbólica da imersão isométrica $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é a aplicação*

$$\begin{aligned} n : M &\longrightarrow \partial D \\ p &\longrightarrow \varphi(X(p)) + t\varphi_*(N(p)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $t > 0$ e $n(p) \in \partial D$.

Lema 1.1 *Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão isométrica, $N(p)$ o vetor normal unitário em $p \in M$ e n definido como em (1.2), então*

$$n = \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N). \quad (1.3)$$

Demonstração: Pela isometria $\varphi : \mathbb{H}^3 \longrightarrow D$, definida em (1.1), temos $\varphi_* : T_{\bar{p}}\mathbb{H}^3 \longrightarrow T_{\varphi(\bar{p})}D$, onde $\bar{p} = X(p)$ e $p \in M$.

Seja $\alpha(t) \in \mathbb{H}^3$, $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$, uma curva em $\mathbb{H}^3$ tal que $\alpha(0) = X(p)$ e $\alpha'(0) = N(p) \in T_{\bar{p}}\mathbb{H}^3$.

Denotando $X(p) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $N = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ temos,

$$\begin{aligned} \varphi_*(N(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \right) \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{x_0}(0, N_1, N_2, N_3) - \frac{N_0}{x_0^2}(0, x_1, x_2, x_3) \\ &= -\frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{N}{x_0}. \end{aligned}$$

Como $n(p) = \varphi(X(p)) + t\varphi_*(N(p))$ pertence ao cone $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ para todo $p \in M$, temos que

$$\langle n, n \rangle = 0.$$

Por outro lado,

$$n = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \right) + t \left(-\frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{1}{x_0}N \right)$$

ou seja,

$$n = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{tN_0}{x_0^2} \right) X + \frac{t}{x_0}N.$$

Logo,

$$\langle n, n \rangle = \frac{t^2}{x_0^2} - \frac{(x_0 - tN_0)^2}{x_0^4} = 0$$

e portanto,

$$t = \frac{-N_0x_0 \pm x_0^2}{x_0^2 - N_0^2}$$

o que implica

$$t = \frac{x_0}{x_0 + N_0} \quad \text{ou} \quad t = \frac{-x_0}{x_0 - N_0}$$

Como $\varphi_*(N)$ é um vetor paralelo ao plano $x_0 = 0$ (isto é, um vetor “space like”), temos

$$\langle \varphi_*(N), \varphi_*(N) \rangle > 0.$$

Logo,

$$\langle \varphi_*(N), \varphi_*(N) \rangle = \frac{x_0^2 - N_0^2}{x_0^4} > 0$$

e portanto $x_0 > |N_0|$, isto é, $x_0 - N_0 > 0$ e $x_0 + N_0 > 0$. Assim,

$$\frac{x_0}{x_0 + N_0} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{-x_0}{x_0 - N_0} < 0.$$

Substituindo $t > 0$ em $n(p)$, temos

$$n = \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N).$$

■

Observação : Como o vetor $X + N$ também pertence ao cone, existe uma função $\zeta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$\zeta(p)n(p) = X(p) + N(p), \quad \forall p \in U$$

ou seja,

$$\zeta(p) = -\langle X + N, e_0 \rangle = x_0 + N_0$$

onde $e_0 = (1, 0, 0, 0)$. Por outro lado

$$\zeta \langle n, X \rangle = -1 \quad \implies \quad \zeta = \frac{-1}{\langle n, X \rangle}$$

e

$$x_0 + N_0 = \frac{-1}{\langle n, X \rangle}. \tag{1.4}$$

Assim,

$$N = -\frac{1}{\langle n, X \rangle}n - X. \tag{1.5}$$

1.3 A Curvatura Média e a Curvatura Gaussiana de uma Imersão no Espaço Hiperbólico

Denotando por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi Civita de $\mathbb{H}^3$ e M respectivamente, temos que os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão isométrica X são calculados por

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \langle \nabla_{e_i} e_j, N \rangle = -\langle e_j, \nabla_{e_i} N \rangle = \\ &= \langle A^N e_i, e_j \rangle, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

onde $e_1 = \frac{1}{\lambda} X_u$ e $e_2 = \frac{1}{\lambda} X_v$.

Portanto,

$$\nabla_{e_1} N = -h_{11}e_1 - h_{12}e_2 \implies$$

$$\implies \frac{1}{\lambda} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} N = \frac{1}{\lambda} \left(-h_{11} \frac{\partial}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Então,

$$N_u = -h_{11}X_u - h_{12}X_v. \quad (1.6)$$

e analogamente,

$$N_v = -h_{12}X_u - h_{22}X_v. \quad (1.7)$$

O vetor curvatura média em relação a normal N é dado por

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}(\text{traço} A^N)N \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \langle A^N e_i, e_i \rangle N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})N \\
&= H N
\end{aligned}$$

onde denotamos $H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$.

A curvatura Gaussiana é dada pela equação de Gauss

$$\begin{aligned}
K &= \det A^N - 1 \\
&= h_{11}h_{22} - h_{12}^2 - 1.
\end{aligned}$$

Observe que se X é superfície totalmente umbílica, então

$$h_{12} = 0 \quad \text{e} \quad h_{11} = h_{22} = c$$

logo, se X é superfície totalmente umbílica com $H = 1$ temos

$$h_{11} = 1 \quad \text{e} \quad K = 0$$

isto é, X é uma horoesfera.

A seguir procuramos estabelecer expressões para a curvatura média e a curvatura Gaussiana em parâmetros isotérmicos, u e v . Seja $z = u + iv$

$$X_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(X_{uu} + X_{vv}) \implies$$

$$\begin{aligned}
\implies \langle X_{\bar{z}z}, N \rangle &= \frac{1}{4}(\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle) \\
&= -\frac{1}{4}(\langle X_u, N_u \rangle + \langle X_v, N_v \rangle) \\
&= \frac{\lambda^2}{4}(h_{11} + h_{22})
\end{aligned}$$

Então a curvatura média, em parâmetros isotérmicos é dada por

$$H = -\frac{2}{\lambda^2} \langle X_z, N_{\bar{z}} \rangle. \quad (1.8)$$

Temos ainda

$$X_{zz} = \frac{1}{4}(X_{uu} - X_{vv} - 2iX_{uv}) \implies$$

$$\implies \langle X_{zz}, N \rangle = \frac{\lambda^2}{4}(h_{11} - h_{22} - 2ih_{12}). \quad (1.9)$$

Então, a curvatura Gaussiana, em parâmetros isotérmicos, é dada por

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{h_{11} + h_{22}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left((h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2 \right) - 1 \\ &= \frac{4}{\lambda^4} (\langle X_{z\bar{z}}, N \rangle^2 - \langle X_{zz}, N \rangle \langle X_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle) - 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Em parâmetros isotérmicos, segue ainda,

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} \langle X_u - iX_v, X_u + iX_v \rangle = \frac{\lambda^2}{2}$$

então

$$\langle X_z, (X + N)_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2} (1 - H). \quad (1.11)$$

Assim é imediato ver que

$$H = 1 \iff \langle X_{\bar{z}z}, N \rangle = \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle$$

ou ainda, observando que

$$\begin{aligned} \langle X_z, n_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle X_z, \frac{1}{x_0 + N_0} (X_{\bar{z}} + N_{\bar{z}}) + \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)_{\bar{z}} (X + N) \right\rangle \\ &= \left\langle X_z, \frac{1}{x_0 + N_0} (X + N)_{\bar{z}} \right\rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{2(x_0 + N_0)} (1 - H) \end{aligned}$$

temos

$$H = 1 \iff \langle X_z, n_{\bar{z}} \rangle = 0 \quad (1.12)$$

1.4 Imersões com Aplicação de Gauss Hiperbólica Conforme

Para cada $(u, v) \in U$, (u, v) parâmetros isotérmicos de M , temos duas bases de

$\mathbb{L}^4$: a base positiva $\{X(p), \frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v, N\}$, onde p é o ponto de M correspondente a (u, v) e M é orientada por N , e a base $\{e_0, n_u, n_v, e_0 - n\}$, que em princípio pode ser uma base positiva de $\mathbb{L}^4$ ou não.

Diremos que n preserva orientação se, e somente se, ambas as bases são positivas de $\mathbb{L}^4$, o que ocorre se, e somente se, $\{n_u, n_v\}$ é base positiva de $T_{n(p)}S^2$ (relativa à

normal interna, $e_0 - n$).

Definindo $h(u, v) = \pi(n(u, v))$, onde π é a projeção estereográfica da bola $\partial D \approx S^2$ contida em $\mathbb{R}^3 \equiv \{x_0 = 1\}$ sobre $\mathbb{C} \equiv \{x_0 = 1, x_3 = 0\}$ temos

$$n(z) = \left(1, \frac{2\operatorname{Re} h}{|h|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} h}{|h|^2 + 1}, \frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1}\right)$$

Observamos que $\{e_0, n_u, n_v, e_0 - n\}$ é base positiva de $\mathbb{L}^4$ se, e somente se, h preserva orientação de $\mathbb{C}$ (já que π^{-1} induz a orientação positiva em $\mathbb{C}$, se S^2 está orientada com a normal interna, $e_0 - n$).

Então, supondo n conforme (isto é, h conforme), temos que n preserva orientação (isto é, n é holomorfa) se, e somente se, h preserva orientação, isto é, h é analítica.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{n} & \partial D \\ \uparrow & & \downarrow \\ U \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \end{array}$$

Teorema 1.1 *Seja $n : M \rightarrow \partial D$ a aplicação de Gauss hiperbólica da superfície $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$, com n não constante. A aplicação $n : M \rightarrow \partial D$ é conforme se, e somente se, a imersão X tem $H = 1$ (neste caso n preserva a orientação) ou X é totalmente umbílica (neste caso n reverte a orientação).*

Demonstração: Usando (1.3), (1.6) e (1.7), temos que

$$n_u = \left(\frac{1}{x_0 + N_0}\right)_u (X + N) + \frac{1}{x_0 + N_0} (X_u(1 - h_{11}) - h_{12}X_v)$$

e

$$n_v = \left(\frac{1}{x_0 + N_0}\right)_v (X + N) + \frac{1}{x_0 + N_0} (X_v(1 - h_{22}) - h_{12}X_u)$$

Então,

$$\|n_u\|^2 = \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (h_{12}^2 + (1 - h_{11})^2),$$

$$\|n_v\|^2 = \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (h_{12}^2 + (1 - h_{22})^2)$$

e

$$\langle n_u, n_v \rangle = \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (-h_{12})(2 - h_{11} - h_{22})$$

Podemos observar que

1. $\langle n_u, n_v \rangle = 0$ se $H = 1$ ou se X é uma imersão totalmente umbílica.
2. $\|n_u\|^2 = \|n_v\|^2$ se X é imersão totalmente umbílica ou se $H = 1$. A igualdade é imediata no primeiro caso e no segundo basta verificar que $h_{11} = 2 - h_{22} \implies (1 - h_{11})^2 = (1 - h_{22})^2$.
3. $\|n_u\| = \|n_v\| = 0 \iff H = 1$ e X é imersão totalmente umbílica.

Neste último caso a aplicação de Gauss hiperbólica n é constante e temos uma hoesfera, pois $K = 0$.

Considerando o vetor,

$$n_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)_{\bar{z}} (X + N) + \frac{1}{x_0 + N_0} (X_{\bar{z}} + N_{\bar{z}}) \quad (1.13)$$

temos,

$$\langle n_{\bar{z}}, n_{\bar{z}} \rangle = \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)^2 \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle + 2 \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)^2 \langle X_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle + \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)^2 \langle N_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle.$$

Usando (1.6) e (1.7) obtemos

$$N_z = - \left(\frac{h_{11} + h_{22}}{2} \right) X_z - \frac{1}{2} [(h_{11} - h_{22}) - 2ih_{12}] X_{\bar{z}} \quad (1.14)$$

$$N_{\bar{z}} = - \left(\frac{h_{11} + h_{22}}{2} \right) X_{\bar{z}} - \frac{1}{2} [(h_{11} - h_{22}) + 2ih_{12}] X_z \quad (1.15)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\langle n_{\bar{z}}, n_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)^2 \lambda^2 (-h_{11} - 2ih_{12} + h_{22}) + \\
&+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x_0 + N_0} \right)^2 \lambda^2 (h_{11}^2 + h_{12}^2 + 2i(h_{11}h_{12} + h_{12}h_{22}) - h_{12}^2 - h_{22}^2) \\
&= \frac{\lambda^2}{2(x_0 + N_0)^2} (H - 1)[(h_{11} - h_{22}) + 2ih_{12}].
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Do fato de,

$$n(z) = \left(1, \frac{2Re\ h}{|h|^2 + 1}, \frac{2Im\ h}{|h|^2 + 1}, \frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1} \right) \tag{1.17}$$

temos também

$$n_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)_{\bar{z}} \hat{n} + \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right) \hat{n}_{\bar{z}} \tag{1.18}$$

onde,

$$\hat{n} = (|h|^2 + 1, h + \bar{h}, -i(h - \bar{h}), |h|^2 - 1)$$

e

$$\hat{n}_{\bar{z}} = h_{\bar{z}}(\bar{h}, 1, -i, \bar{h}) + \bar{h}_{\bar{z}}(h, 1, i, h)$$

Refazendo as contas, usando agora (1.18), temos

$$\langle n_{\bar{z}}, n_{\bar{z}} \rangle = \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)^2 (4h_{\bar{z}}\bar{h}_{\bar{z}}). \tag{1.19}$$

Concluimos de (1.16) e (1.19) que,

$$\frac{4h_{\bar{z}}\bar{h}_{\bar{z}}}{(|h|^2 + 1)^2} = \frac{\lambda^2}{2(x_0 + N_0)^2} (H - 1)[(h_{11} - h_{22}) + 2ih_{12}].$$

Então

$$\begin{aligned}
h_{\bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{h}_{\bar{z}} = 0 &\iff 4h_{\bar{z}}\bar{h}_{\bar{z}} = 0 \\
&\iff H = 1 \quad \text{ou} \quad X \text{ é imersão totalmente umbílica}
\end{aligned}$$

Logo, n é conforme se, e somente se, $H = 1$ ou X é imersão umbílica.

Em ambos os casos ($H = 1$ ou X é imersão totalmente umbílica) a métrica induzida por n em M é dada por

$$\begin{aligned}\langle dn, dn \rangle &= \langle n_z dz + n_{\bar{z}} d\bar{z}, n_z dz + n_{\bar{z}} d\bar{z} \rangle \\ &= \langle n_z, n_z \rangle dz dz + 2\langle n_z, n_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 + \langle n_{\bar{z}}, n_{\bar{z}} \rangle d\bar{z} d\bar{z}\end{aligned}$$

mas em qualquer caso vale

$$\begin{aligned}\langle n_{\bar{z}}, n_{\bar{z}} \rangle &= 0 \\ \langle n_z, n_z \rangle &= \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (h_{11}^2 - 2h_{11} + 2h_{22} - h_{22}^2) = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle n_z, n_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (2 + 2h_{12}^2 - 2(h_{11} + h_{22}) + h_{11}^2 + h_{22}^2) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} [(h_{11} - 1)^2 + (h_{22} - 1)^2 + 2h_{12}^2] \geq 0\end{aligned}$$

Logo, se n não é constante (caso em que teríamos $H = 1$ e X é imersão totalmente umbílica, simultaneamente) $\langle dn, dn \rangle$ se anula apenas em pontos isolados e

$$\begin{aligned}\langle dn, dn \rangle &= 2\langle n_z, n_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (2 + 2h_{12}^2 - 2(h_{11} + h_{22}) + h_{11}^2 + h_{22}^2) |dz|^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (2H(H - 1) - K) |dz|^2.\end{aligned}$$

Quando $H = 1$ temos,

$$\langle dn, dn \rangle = \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} (-K) |dz|^2$$

donde concluímos que $-K > 0$ fora dos pontos onde $dn = 0$.

Por fim, considerando $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ e $n : M \rightarrow \partial D \subset \mathbb{L}^4$, onde a imersão X é distinta da horoesfera, fora dos pontos onde $dn = 0$ comparemos as bases $\{X(p), \frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v, N\}$ e $\{e_0, n_u, n_v, e_0 - n\}$ de $\mathbb{L}^4$. Observamos que

$$e_0 = x_0 X + \frac{1}{\lambda} \langle X_u, e_0 \rangle \frac{1}{\lambda} X_u + \frac{1}{\lambda} \langle X_v, e_0 \rangle \frac{1}{\lambda} X_v - N_o N$$

$$\begin{aligned}
n_u &= \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_u (X + N) + \frac{\lambda}{x_0 + N_0} ((1 - h_{11})X_u - h_{12}X_v) \\
n_v &= \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_v (X + N) + \frac{\lambda}{x_0 + N_0} (-h_{12}X_u + (1 - h_{22})X_v) \\
e_0 - n &= x_0 X + \frac{1}{\lambda} \langle X_u, e_0 \rangle \frac{1}{\lambda} X_u + \frac{1}{\lambda} \langle X_v, e_0 \rangle \frac{1}{\lambda} X_v - N_0 N - \frac{1}{x_0 + N_0} (X + N)
\end{aligned}$$

Então a matriz que relaciona as duas bases de $\mathbb{L}^4$ é

$$\begin{bmatrix}
x_0 & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_u & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_v & x_0 - \frac{1}{x_0 + N_0} \\
\frac{1}{\lambda} \langle X_u, e_0 \rangle & \frac{\lambda(1-h_{11})}{x_0 + N_0} & \frac{-\lambda h_{12}}{x_0 + N_0} & \frac{1}{\lambda} \langle X_u, e_0 \rangle \\
\frac{1}{\lambda} \langle X_v, e_0 \rangle & \frac{-\lambda h_{12}}{x_0 + N_0} & \frac{\lambda(1-h_{22})}{x_0 + N_0} & \frac{1}{\lambda} \langle X_v, e_0 \rangle \\
-N_0 & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_u & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_v & -N_0 - \frac{1}{x_0 + N_0}
\end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix}
x_0 & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_u & \left(\frac{1}{x_0 + n_0} \right)_v & -\frac{1}{x_0 + N_0} \\
\frac{1}{\lambda} \langle X_u, e_0 \rangle & \frac{\lambda(1-h_{11})}{x_0 + N_0} & \frac{-\lambda h_{12}}{x_0 + N_0} & 0 \\
\frac{1}{\lambda} \langle X_v, e_0 \rangle & \frac{-\lambda h_{12}}{x_0 + N_0} & \frac{\lambda(1-h_{22})}{x_0 + N_0} & 0 \\
-(x_0 + N_0) & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = \\
&= -\frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} [(1 - h_{11})(1 - h_{22}) - h_{12}^2] \\
&= \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} [-K + 2(H - 1)]. \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Logo, se $H = 1$ o determinante é positivo e portanto n preserva orientação, isto é, n é holomorfa ($h_{\bar{z}} = 0$). Caso X seja imersão totalmente umbílica, o determinante é negativo e portanto n inverte a orientação, isto é, n é antiholomorfa ($h_z = 0$). ■

Observação: Usando (1.18) e

$$n_z = \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)_z \tilde{n} + \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right) \tilde{n}_z, \tag{1.21}$$

onde,

$$\tilde{n}_z = h_z(\bar{h}, 1, -i, \bar{h}) + \bar{h}_z(h, 1, i, h),$$

temos,

$$\begin{aligned}
\langle n_{\bar{z}}, n_z \rangle &= \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)_{\bar{z}} \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right) \langle \tilde{n}, \tilde{n}_z \rangle + \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)^2 \langle \tilde{n}_{\bar{z}}, \tilde{n}_z \rangle \\
&= \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)_{\bar{z}} \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right) [-(|h|^2 + 1)(h_z \bar{h} + \bar{h}_z h) + \\
&+ (h + \bar{h})(h_z + \bar{h}_z) - i(h - \bar{h})i(\bar{h}_z - h_z) + (|h|^2 - 1)(h_z \bar{h} + \bar{h}_z h)] + \\
&+ \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)^2 [(h_{\bar{z}} + \bar{h}_{\bar{z}})(h_z + \bar{h}_z) + i(\bar{h}_{\bar{z}} - h_{\bar{z}})i(\bar{h}_z - h_z)] \\
&= 2 \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)^2 (h_{\bar{z}} \bar{h}_z + \bar{h}_{\bar{z}} h_z) \\
&= 2 \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)^2 (|h_{\bar{z}}|^2 + |h_z|^2)
\end{aligned}$$

Logo, quando $H = 1$ temos

$$\langle dn, dn \rangle = 2 \langle n_z, n_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 = \frac{4|h_z|^2}{(|h|^2 + 1)^2} |dz|^2 = -K \frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} |dz|^2$$

portanto,

$$-K = \frac{4|h_z|^2}{(|h|^2 + 1)^2} \left(\frac{\lambda^2}{(x_0 + N_0)^2} \right)^{-1}. \quad (1.22)$$

1.5 Imersões com Aplicação de Gauss Hiperbólica Holomorfa

1.5.1 Um Teorema de Representação

Trabalhando com aplicação de Gauss hiperbólica holomorfa, isto é, com uma superfície de curvatura média constante igual a 1, temos um teorema de representação

local similar à representação de Weierstrass para superfícies mínimas no espaço Euclidiano.

Teorema 1.2 *Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão não umbílica com $H = 1$ e $n(z) = \left(1, \frac{2\operatorname{Re} h}{|h|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} h}{|h|^2+1}, \frac{|h|^2-1}{|h|^2+1}\right)$ sua aplicação de Gauss hiperbólica. Denotando $X(z) = (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z))$, as funções reais $\phi_1(z) = x_0(z) + x_3(z)$ e $\phi_2(z) = x_0(z) - x_3(z)$ e a função complexa $\phi_3(z) = x_1(z) + ix_2(z)$ satisfazem,*

$$\begin{cases} \phi_1\phi_2 = 1 + |\phi_3|^2 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = h \frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \end{cases} \quad (1.23)$$

Reciprocamente, dada uma função holomorfa não constante $h : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, duas funções reais ϕ_1 e ϕ_2 (com $\phi_1 > 0$ e $\phi_2 > 0$) e uma função complexa ϕ_3 satisfazendo (1.23), no domínio U simplesmente conexo então,

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \quad (1.24)$$

define uma imersão conforme em $\mathbb{H}^3$ com $H = 1$ e a aplicação de Gauss hiperbólica n é dada por h , como acima.

Demonstração: Mostraremos que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 satisfazem (1.23), sabendo que X é uma imersão não umbílica com $H = 1$ e n a aplicação de Gauss hiperbólica. Observemos que,

$$\begin{aligned} X(z) &= (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \in \mathbb{H}^3 \\ \iff -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= -1 \\ \iff \phi_1\phi_2 &= 1 + |\phi_3|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $x_0 \geq 1$, temos pelo menos uma das desigualdades,

$$x_0 - x_3 \geq 1 > 0 \quad \text{ou} \quad x_0 + x_3 \geq 1 > 0$$

Portanto, como $\phi_1\phi_2 = x_0^2 - x_3^2 > 0$ temos

$$\phi_1 = x_0 + x_3 > 0 \quad \text{e} \quad \phi_2 = x_0 - x_3 > 0$$

isto é, ϕ_1 e ϕ_2 positivas é condição necessária para que a superfície X de $\mathbb{L}^4$ esteja em $\mathbb{H}^3$.

Da definição de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 podemos escrever,

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

e portanto,

$$X_z = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} \phi_3), \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Im} \phi_3), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \right). \quad (1.25)$$

Então,

$$\langle X_z, n \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} \phi_3), \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Im} \phi_3), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \right), \right. \\ &\quad \left. \left(1, \frac{2\operatorname{Re} h}{|h|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} h}{|h|^2 + 1}, \frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1} \right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) + \frac{2}{|h|^2 + 1} \left(\operatorname{Re} h \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} \phi_3) \right) + \\ &\quad + \frac{2}{|h|^2 + 1} \left(\operatorname{Im} h \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Im} \phi_3) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1} \right) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \left(-1 + \frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \left(-1 - \frac{|h|^2 - 1}{|h|^2 + 1} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{|h|^2 + 1} \left(\operatorname{Re} h \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \right) + i \operatorname{Im} h \left(\frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|h|^2 + 1} \left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - |h|^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} + \bar{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle X_z, n \rangle = 0 \iff \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + |h|^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \bar{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0 \quad (1.26)$$

Por (1.12), temos que $H = 1$ se, e somente se, $\langle X_z, n_{\bar{z}} \rangle = 0$. Por (1.18) podemos escrever

$$\langle X_z, n_{\bar{z}} \rangle = \left\langle X_z, \left(\frac{1}{|h|^2 + 1} \right)_{\bar{z}} \hat{n} \right\rangle + \left\langle X_z, \frac{1}{|h|^2 + 1} \hat{n}_{\bar{z}} \right\rangle$$

mas observamos que,

$$\left(\frac{1}{|h|^2 + 1}\right)_{\bar{z}} \tilde{n} = \left(\frac{1}{|h|^2 + 1}\right)_{\bar{z}} (|h|^2 + 1)n,$$

e portanto,

$$\left\langle X_z, \left(\frac{1}{|h|^2 + 1}\right)_{\bar{z}} \tilde{n} \right\rangle = 0.$$

Então

$$H = 1 \iff \langle X_z, n_{\bar{z}} \rangle = \langle X_z, \tilde{n}_{\bar{z}} \rangle = 0.$$

Como $H = 1$ temos h holomorfa. Logo,

$$h_{\bar{z}} = 0 \text{ e } \tilde{n}_{\bar{z}} = \bar{h}_{\bar{z}}(h, 1, i, h).$$

Como X é uma aplicação não umbílica, temos h não constante, ou seja, $h_z \neq 0$. Logo,

$$H = 1 \iff \langle X_z, (h, 1, i, h) \rangle = 0$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle X_z, (h, 1, i, h) \rangle &= \\ &= -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \right) + \frac{i}{2} \left(i \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - i \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \\ &= -h \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

portanto,

$$\langle X_z, (h, 1, i, h) \rangle = 0 \iff h \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \iff \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z}. \quad (1.27)$$

Substituindo (1.27) em (1.26) concluimos que

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z}.$$

Reciprocamente, dadas uma função holomorfa e não constante, $h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, funções reais ϕ_1 e ϕ_2 com $\phi_2 > 0$ e ϕ_3 uma função complexa, satisfazendo (1.23) em um aberto simplesmente conexo U , consideremos a aplicação em $\mathbb{H}^3$ definida por

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right).$$

Usando (1.23) e (1.25) podemos reescrever,

$$\begin{aligned} X_z &= \left[\frac{1}{2} \left(h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{Re} \phi_3), \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{Im} \phi_3), \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} (h, 1, i, h) + \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \left(\frac{1}{h}, 1, -i, -\frac{1}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

Então temos,

$$\langle X_z, X_z \rangle = \frac{1}{4} \left(-4 \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} + 4 \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) = 0$$

e como, por outro lado,

$$\langle X_z, X_z \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle X_u, X_u \rangle - 2i \langle X_u, X_v \rangle - \langle X_v, X_v \rangle \right)$$

concluimos que u e v são parâmetros isotérmicos, isto é, X é uma imersão conforme.

Consideremos $\hat{n}(z) = \left(1, \frac{2\operatorname{Re} h}{|h|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} h}{|h|^2+1}, \frac{|h|^2-1}{|h|^2+1} \right)$, onde h é a função holomorfa dada, e o vetor $N = -\frac{1}{\langle \hat{n}, X \rangle} \hat{n} - X$. Observando que

$$\langle X, X \rangle = -1 \quad \text{e} \quad \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = \langle X_z, \hat{n} \rangle = 0$$

segue que N é vetor unitário, tangente a $\mathbb{H}^3$ ao longo de X , isto é, $\langle X, N \rangle = 0$, e é normal a X , $\left(\langle X_z, N \rangle = 0 \text{ e } \langle X_{\bar{z}}, N \rangle = 0 \right)$.

Usando (1.11) segue que $H = 1$, e por (1.20) concluimos que a base $\{X(p), \frac{1}{\lambda} X_u, \frac{1}{\lambda} X_v, N\}$ será positiva se, e somente se, a base $\{e_0, n_u, n_v, e_0 - n\}$ for positiva. Mas o determinante da matriz que relaciona a base $\{e_0, n_u, n_v, e_0 - n\}$ à base canônica de $\mathbb{L}^4$ é igual a

$$\frac{1}{(|h|^2 + 1)^3} \begin{vmatrix} h_z + \bar{h}_{\bar{z}} & i(h_z - \bar{h}_{\bar{z}}) & -(h + \bar{h}) \\ i(-h_z + \bar{h}_{\bar{z}}) & h_z + \bar{h}_{\bar{z}} & -i(\bar{h} - h) \\ \bar{h}h_z + h\bar{h}_{\bar{z}} & i(\bar{h}h_z - h\bar{h}_{\bar{z}}) & -(|h|^2 + 1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(|h|^2 + 1)^3} \begin{vmatrix} h_z & -i\bar{h}_{\bar{z}} & -(h + \bar{h}) \\ -ih_z & \bar{h}_{\bar{z}} & -i(\bar{h} - h) \\ \bar{h}h_z & -ih\bar{h}_{\bar{z}} & -(|h|^2 + 1) \end{vmatrix} \\
&= \frac{2 |h_z|^2}{(|h|^2 + 1)^3} \begin{vmatrix} 1 & -i & -(h + \bar{h}) \\ -i & 1 & -i(\bar{h} - h) \\ \bar{h} & -ih & -(|h|^2 + 1) \end{vmatrix} \\
&= \frac{4 |h_z|^2 (|h|^2 + 1)}{(|h|^2 + 1)^3} > 0
\end{aligned}$$

fora dos pontos isolados onde $h_z = 0$. Logo $n = \hat{n}$. Observe que h é não constante, o que implica que n não é constante e portanto X é imersão não umbílica. ■

1.5.2 Condição de Compatibilidade

A condição de compatibilidade para as duas equações diferenciais parciais em (1.23) é a mesma e dada por

$$\text{Im} \{h \Delta \bar{\phi}_3\} = 0,$$

$$\text{onde } \Delta \bar{\phi}_3 = 4 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_3}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_3}{\partial v^2}.$$

Isso decorre do fato de cada equação diferencial em (1.23) ser da forma $\frac{\partial \phi}{\partial z} = F(z)$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial u} = 2F_1(u, v) \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} = -2F_2(u, v) \end{cases} \quad (1.28)$$

onde $z = u + iv$ e $F(z) = F_1(u, v) + iF_2(u, v)$.

Observando que

$$\begin{cases} 2\frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \\ -2\frac{\partial F_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \end{cases}$$

temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{\partial F_2}{\partial u} \iff \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right\} = 0$$

é a condição de integrabilidade para o sistema (1.28). Assim para o sistema (1.23), teremos

1. A condição de compatibilidade para $\frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ é $\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right\} = 0$, onde $F(z) = h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z}$

Mas,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{h \Delta \bar{\phi}_3}{4}.$$

Logo,

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right\} = 0 \iff \operatorname{Im} \{ h \Delta \bar{\phi}_3 \} = 0$$

2. Analogamente, a condição de compatibilidade para $\frac{\partial \phi_2}{\partial z}$ é $\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right\} = 0$, onde agora $F(z) = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z}$

Mas,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\Delta \phi_3}{4h}.$$

Logo,

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right\} = 0 \iff \operatorname{Im} \left\{ \frac{\Delta \phi_3}{h} \right\} = 0 \iff \operatorname{Im} \{ h \Delta \bar{\phi}_3 \} = 0$$

Verificada a condição de compatibilidade para o sistema (1.23), temos

$$\phi_1 = \int_{z_0}^z d\phi_1 = \int_{z_0}^z \frac{\partial \phi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} dv$$

mas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial z} dz &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} - i \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right) (du + i dv) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} dv \right) + i \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} dv - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} du \right) \right]\end{aligned}$$

logo,

$$\phi_1 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dz = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} dz. \quad (1.29)$$

Analogamente temos,

$$\phi_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} dz. \quad (1.30)$$

Usando (1.29) e (1.30), podemos reescrever (1.24) como

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) dz, \operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) dz \right)$$

Observação: Para construirmos superfícies com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ basta, pelo teorema (1.2), achar funções ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e h que sejam solução do sistema (1.23). Na realidade, é suficiente encontrar ϕ_3 e h que satisfaçam a condição de compatibilidade e verificar a primeira equação do sistema. Como queremos que X seja imersão não umbílica não nos interessa tomar ϕ_3 como sendo uma função analítica. De fato, seja ϕ_3 uma função analítica, como

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \implies \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{z}} = \bar{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} = 0,$$

então ϕ_1 é constante. Além disso, ϕ_1 é constante diferente de zero já que $\phi_1 \phi_2 = 1 + |\phi_3|^2$. Sendo $\phi_1 = k$ ($k \neq 0$), temos que X é imersão umbílica, pois

$$X \subset \{(x_0, x_1, x_2, x_3)/x_0 + x_3 = k\} = A,$$

onde A é a equação de um hiperplano que corta $\mathbb{H}^3$. Dependendo de como é a intersecção de A com $\mathbb{H}^3$ podemos ter uma esfera geodésica, uma horoesfera ou uma superfície equidistante, além das superfícies totalmente geodésicas. Em nosso caso temos a horoesfera pois $H = 1$. Raciocínio análogo pode ser feito tomando-se ϕ_3 uma função antianalítica ($\bar{\phi}_3$ é analítica), só que neste caso ϕ_2 será constante.

1.5.3 Curvatura Total

Usando (1.17), (1.24), a primeira equação de (1.23) e o fato de ϕ_2 ser real, temos

$$\begin{aligned}
 \langle n, X \rangle &= -\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) + \frac{1}{|h|^2 + 1} \left[2 \operatorname{Re} h \operatorname{Re} \phi_3 + 2 \operatorname{Im} h \operatorname{Im} \phi_3 + \right. \\
 &\quad \left. + (|h|^2 - 1) \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{-|h|^2 \phi_2 - \phi_1 + h \bar{\phi}_3 + \bar{h} \phi_3}{|h|^2 + 1} \\
 &= -\frac{1 + |\phi_3 - h \phi_2|^2}{\phi_2(|h|^2 + 1)}. \tag{1.31}
 \end{aligned}$$

Como a curvatura total da imersão é dada por

$$c = \int_M K dA,$$

onde $dA = \lambda^2 du \wedge dv$, temos por (1.4), (1.22) e (1.31)

$$\begin{aligned}
 c = \int_M K dA &= - \int_M \frac{4|h_z|^2}{(|h|^2 + 1)^2} \frac{(x_0 + N_0)^2}{\lambda^2} dA \\
 &= - \int_M \frac{4|h_z|^2}{(|h|^2 + 1)^2} \frac{\phi_2^2(|h|^2 + 1)^2}{(1 + |\phi_3 - h \phi_2|^2)^2} \frac{1}{\lambda^2} dA \\
 &= - \int_M \frac{4|\frac{\partial}{\partial z}(\phi_3 - h \phi_2)|^2}{(1 + |\phi_3 - h \phi_2|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
 &= - \int_M \frac{4|h_z|^2}{(\phi_1 + |h|^2 \phi_2 - \bar{h} \phi_3 - h \bar{\phi}_3)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}
 \end{aligned}$$

1.5.4 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

A métrica

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2|dz|^2 \tag{1.32}$$

é tal que, $\lambda^2 = 2\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle$.

Como $X(z)$ é real,

$$X_{\bar{z}} = \overline{X_z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\bar{h}}, 1, i, -\frac{1}{\bar{h}} \right) + \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} (\bar{h}, 1, -i, \bar{h}) \right],$$

e temos,

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) - R\epsilon \left(\frac{\bar{h}}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right).$$

Portanto

$$\lambda^2 = \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right|^2 - 2R\epsilon \left(\frac{\bar{h}}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right). \quad (1.33)$$

Segue ainda de (1.23) e (1.33)

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right|^2 - \frac{\bar{h}}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} - \frac{h}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \\ &= \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} \right|^2 + |h|^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}} - \bar{h} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} - h \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} - h \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \bar{h} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\phi}_3 - \bar{h} \phi_2) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Denotando por Π a segunda forma fundamental da imersão $X : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$, temos

$$\Pi = \lambda^2 (h_{11} du^2 + 2h_{12} dudv + h_{22} dv^2)$$

e observando que

$$\begin{cases} du = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dv = \frac{i(d\bar{z} - dz)}{2} \end{cases}$$

segue

$$\begin{aligned} \Pi &= \lambda^2 \left[h_{11} \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right)^2 + 2ih_{12} \left(\frac{d\bar{z}^2 - dz^2}{4} \right) - h_{22} \left(\frac{d\bar{z} - dz}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4} [dz^2 (h_{11} - 2ih_{12} - h_{22}) + d\bar{z}^2 (h_{11} + 2ih_{12} - h_{22}) + 2dzd\bar{z} (h_{11} + h_{22})]. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle X_z, N \rangle = 0 &\implies \langle X_{zz}, N \rangle = -\langle X_z, N_z \rangle, \\ \langle X_z, N_z \rangle &= \frac{\lambda^2}{4}(-h_{11} + 2ih_{12} + h_{22})\end{aligned}$$

e $H = 1$, temos

$$\begin{aligned}\Pi &= \langle X_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle d\bar{z}^2 + \langle X_{zz}, N \rangle dz^2 + \lambda^2 dz d\bar{z} \\ &= 2Re \{ \langle X_{zz}, N \rangle dz^2 \} + \lambda^2 dz d\bar{z}\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (1.5) e (1.21), temos

$$\begin{aligned}\langle X_z, N_z \rangle &= - \left(\frac{1}{\langle n, X \rangle} \right)_z \langle X_z, n \rangle - \frac{1}{\langle n, X \rangle} \langle X_z, n_z \rangle - \langle X_z, X_z \rangle \\ &= - \frac{1}{\langle n, X \rangle} \frac{1}{|h|^2 + 1} \langle X_z, \tilde{n}_z \rangle \\ &= - \frac{1}{\langle n, X \rangle} \frac{1}{|h|^2 + 1} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi_3}{\partial z} \left(\frac{-2(h_z \bar{h} + \bar{h}_z h)}{h} + 2\bar{h}_z \right) + \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} (2h_z) \right] \\ &= \frac{\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \left[\frac{\partial \phi_3}{\partial z} \left(\frac{-h_z \bar{h}}{h} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} h_z \right]\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \left(2Re \left\{ \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z} \left(\frac{h_z \bar{h}}{h} \right) - \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} h_z \right) dz^2 \right\} \right) + \lambda^2 dz d\bar{z} \\ &= \frac{\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \left(-2Re \left\{ \bar{h}_{\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi_3 - h\phi_2) \right) d\bar{z}^2 \right\} \right) + \lambda^2 |dz|^2 \quad (1.35)\end{aligned}$$

1.5.5 Equação de Gauss e Mainardi - Codazzi da Imersão

Observamos finalmente, para uso futuro, que definindo

$$\psi = \frac{1}{2}[(h_{11} - h_{22}) - 2ih_{12}] \quad (1.36)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \langle X_{zz}, N \rangle \quad (1.37)$$

segue de (1.14) e (1.15)

$$N_z = -HX_z - \psi X_{\bar{z}} \quad (1.38)$$

$$N_{\bar{z}} = -HX_{\bar{z}} - \bar{\psi} X_z \quad (1.39)$$

e portanto a equação de Gauss (1.10), se reescreve como

$$K = H^2 - |\psi|^2 - 1. \quad (1.40)$$

Observação: É bem conhecida a forma de **Hopf** dada por $\Psi = \psi \lambda^2 dz^2$ [H].

A equação de Mainardi - Codazzi é obtida da igualdade

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} X_{z\bar{z}}, N \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} X_{zz}, N \right\rangle$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle X_{z\bar{z}}, N \rangle - \langle X_{z\bar{z}}, N_z \rangle = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle X_{zz}, N \rangle - \langle X_{zz}, N_{\bar{z}} \rangle.$$

Usando (1.8), (1.37), (1.38), (1.39) e observando

$$\langle X_z, X_z \rangle = 0 \implies \langle X_{z\bar{z}}, X_z \rangle = \langle X_{zz}, X_z \rangle = 0$$

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \implies \langle X_{zz}, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda^2)$$

segue que a equação de Mainardi - Codazzi pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\lambda^2 H}{2} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\lambda^2 \psi}{2} + \frac{H}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda^2)$$

ou seja,

$$\lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda^2 \psi) \quad (1.41)$$

Capítulo 2

Relação Entre as Superfícies com $H = 1$ no Espaço Hiperbólico e as Superfícies com $H = 0$ no Espaço Euclidiano

Neste capítulo estudaremos algumas das relações que podem ser estabelecidas entre as superfícies com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico e as superfícies mínimas no espaço euclidiano. Na seção 3.1 mostraremos que dada uma superfície com $H = 1$ em $\mathbb{H}^3$ existe uma superfície mínima isométrica (localmente) a ela em $\mathbb{R}^3$, cuja segunda forma fundamental difere da segunda forma fundamental da superfície dada, pela primeira forma. Tais superfícies serão chamadas primas entre si. Na seção 3.2 mostraremos algumas das relações existentes entre as simetrias de uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$ e as simetrias de sua prima em $\mathbb{H}^3$.

2.1 Superfícies Primas

Seja U um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{C}$. Seja g uma função meromorfa em U e η uma forma diferencial analítica, definida sobre U , tal que qualquer ponto p_0 de U é um polo de ordem m de g se, e somente se, p_0 é um zero de ordem $2m$ de η . Então, pelo teorema de Representação de Weierstrass, g e η determinam uma imersão mínima conforme $\tilde{X} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{X}(z) = Re \left\{ \int_c \left(\frac{1}{2} (1 - g^2) \eta, \frac{1}{2} i(1 + g^2) \eta, g \eta \right) \right\}$$

onde c é um caminho arbitrário ligando um ponto fixado z_0 de U , ao ponto $z = u + iv$ de U .

Considerando em $M = \tilde{X}(U)$ a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$, $\tilde{X}$ induz em U a métrica

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

onde

$$\lambda^2 = \left[\frac{(1 + |g|^2)|f|}{2} \right]^2$$

e a segunda forma fundamental da imersão $\tilde{X}$ é

$$\tilde{\Pi} = -Re\{fg' dz^2\}$$

onde $\eta = f dz$. Ver [Os].

Dada a forma quadrática $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$ podemos verificar que ds^2 e Π satisfazem as equações de Gauss e Mainardi - Codazzi em $\mathbb{H}^3$, dadas respectivamente em (1.40) e (1.41). De fato, seja B a forma bilinear simétrica dada por $B(w, w) = \Pi(w)$, $w \in \chi(M)$ cujos coeficientes são

$$h_{11} = B(e_1, e_1) = \Pi(e_1)$$

$$h_{22} = B(e_2, e_2) = \Pi(e_2)$$

$$h_{12} = B(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(\Pi(e_1 + e_2) - \Pi(e_1) - \Pi(e_2))$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base ortonormal dada por

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ e_2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{i}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Observando que

$$\begin{aligned} |dz|^2(e_1) &= |dz|^2(e_2) = \frac{1}{\lambda^2} \\ (dz)^2(e_1) &= -(dz)^2(e_2) = \frac{1}{\lambda^2} \\ (dz)^2(e_1 + e_2) &= \frac{2i}{\lambda^2} \\ |dz|^2(e_1 + e_2) &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

segue

$$\begin{cases} h_{11} = -\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Re}\{fg'\} + 1 \\ h_{22} = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Re}\{fg'\} + 1 \\ h_{12} = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Im}\{fg'\} \end{cases}$$

A partir da forma B dada, definindo as funções

$$H = \frac{1}{2} \text{ traço de } B \quad \text{e} \quad K = \det B - 1$$

temos

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) = 1$$

e

$$\begin{aligned} K &= h_{11}h_{22} - h_{12}^2 - 1 \\ &= -\frac{1}{\lambda^4} |fg'|^2. \end{aligned}$$

Tomando

$$\psi = \frac{1}{2}[(h_{11} - h_{22}) - 2ih_{12}]$$

dado em (1.36), temos

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \frac{1}{4}[(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2] \\ &= \frac{1}{\lambda^4} |fg'|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|\psi|^2 = -K$. Logo Π satisfaz a equação de Gauss com $H = 1$.

A equação de Mainardi - Codazzi

$$\frac{\partial(\lambda^2\psi)}{\partial\bar{z}} = \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z}$$

para $H = 1$, é satisfeita se $\lambda^2\psi$ é holomorfa. Mas,

$$\begin{aligned}\lambda^2\psi &= \frac{\lambda^2}{2}[(h_{11} - h_{22}) - 2ih_{12}] \\ &= -fg'\end{aligned}$$

isto é, $\lambda^2\psi$ é holomorfa e portanto Π satisfaz Mainardi - Codazzi.

Logo existe uma imersão isométrica $X : U \longrightarrow \mathbb{H}^3$ cuja métrica induzida em U é ds^2 e a segunda forma fundamental é Π . Além disso, X possui curvatura média constante 1.

Reciprocamente, dado $X : U \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão conforme com curvatura média constante 1 e denotando por ds^2 sua métrica e por Π sua segunda forma fundamental dados respectivamente por (1.32) e (1.35), e pondo $\tilde{\Pi} = \Pi - ds^2$, temos que as formas ds^2 e $\tilde{\Pi}$ satisfazem as equações de Gauss e Mainardi - Codazzi em $\mathbb{R}^3$. De fato, seja $\tilde{B}$ a forma bilinear simétrica $\tilde{B}(w, w) = \tilde{\Pi}(w)$, $w \in \lambda(X(U))$ cujos coeficiente são

$$\begin{aligned}h_{11} &= \tilde{B}(e_1, e_1) = \tilde{\Pi}(e_1) \\ h_{22} &= \tilde{B}(e_2, e_2) = \tilde{\Pi}(e_2) \\ h_{12} &= \tilde{B}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(\tilde{\Pi}(e_1 + e_2) - \tilde{\Pi}(e_1) - \tilde{\Pi}(e_2))\end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base ortonormal dada em (2.1).

Denotando

$$\rho(z) = \frac{\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \quad \text{e} \quad \tau(z) = \bar{h}\bar{z} \frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\phi_3 - h\phi_2)$$

e observando

$$\begin{aligned}(d\bar{z})^2(e_1) &= -(d\bar{z})^2(e_2) = \frac{1}{\lambda^2} \\ (d\bar{z})^2(e_1 + e_2) &= \frac{-2i}{\lambda^2}\end{aligned}$$

segue

$$\begin{cases} h_{11} = -\frac{2\rho(z)}{\lambda^2} \operatorname{Re}\{\tau(z)\} \\ h_{22} = \frac{2\rho(z)}{\lambda^2} \operatorname{Re}\{\tau(z)\} \\ h_{12} = -\frac{2\rho(z)}{\lambda^2} \operatorname{Im}\{\tau(z)\} \end{cases}$$

Definindo agora

$$H = \frac{1}{2} \text{ traço de } \tilde{B} \quad \text{e} \quad K = \det \tilde{B}$$

temos

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) = 0$$

e

$$\begin{aligned} K &= h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \\ &= -\frac{4\rho^2(z)}{\lambda^4} |\tau(z)|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$|\psi|^2 = \frac{4\rho^2(z)}{\lambda^4} |\tau(z)|^2.$$

Portanto, $K = -|\psi|^2$. Logo $\tilde{\Pi}$ satisfaz a equação de Gauss com $H = 0$.

Para provarmos que a equação de Mainardi - Codazzi é satisfeita basta mostrar novamente, que $\lambda^2\psi$ é holomorfa. Mas

$$\begin{aligned} \lambda^2\psi &= \frac{\lambda^2}{2} \left[-\frac{4\rho(z)}{\lambda^2} \operatorname{Re}\{\tau(z)\} + \frac{4i\rho(z)}{\lambda^2} \operatorname{Im}\{\tau(z)\} \right] \\ &= -2\rho(z)\bar{\tau}(z) \end{aligned}$$

Logo

$$\lambda^2\psi \text{ é holomorfa} \iff \rho(z)_{\bar{z}} \bar{\tau}(z) + \rho(z) \bar{\tau}(z)_{\bar{z}} = 0$$

Usando (1.23) e observando que $h_{z\bar{z}} = 0$ temos

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\bar{z}} &= h_z \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\bar{\phi}_3 - \bar{h}\phi_2) \\ &= -h_z \bar{h}_{\bar{z}} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\bar{z}} &= \frac{\bar{h}_{\bar{z}}(\phi_3 - h\phi_2)}{(\phi_1 - \bar{h}\phi_3 - h\bar{\phi}_3 + |h|^2\phi_2)^2} \\
&= \frac{\bar{h}_{\bar{z}}(\phi_3 - h\phi_2)\phi_2^2}{(1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2)^2}
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\rho_{\bar{z}} \bar{\tau} + \rho \bar{\tau}_{\bar{z}} &= \frac{|h_z|^2\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \left[\frac{\phi_2(\phi_3 - h\phi_2) \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\phi}_3 - \bar{h}\phi_2)}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \right] \\
&= \frac{|h_z|^2\phi_2}{1 + |\phi_3 - h\phi_2|^2} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial z}(|\phi_3|^2) - h\phi_2 \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}}{\phi_1 - \bar{h}\phi_3 - h\bar{\phi}_3 + |h|^2\phi_2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\lambda^2\psi) = 0$ e portanto $\tilde{\Pi}$ satisfaz Mainardi - Codazzi.

Assim existe uma imersão mínima conforme $\tilde{X} : U \longrightarrow \mathbb{H}^3$ cuja métrica induzida em U é ds^2 e a segunda forma fundamental é $\tilde{\Pi}$. Além disso, $\tilde{X}$ possui $H = 0$.

Diremos que as imersões $\tilde{X}$ e X , isto é, que as superfícies $\tilde{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$ e $X(U) \subset \mathbb{H}^3$, são superfícies primas. Ver [La].

2.2 Simetrias

Lema 2.1 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície do $\mathbb{H}^3$, e $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M = X(U)$ uma geodésica de M que é uma linha de curvatura. Então α é uma curva plana, isto é, $\alpha(I) \subset \pi$ onde π é uma superfície totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3$ e M é ortogonal a π ao longo de α .*

Demonstração: Tomemos α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja $n(t)$ um campo unitário normal ao longo de α , isto é, $\langle n, \alpha' \rangle = 0$ e tal que $\langle n, N \rangle = 0$ onde N é o campo normal a M . Consideremos os campos de

vetores $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ em $\mathbb{L}^4$ e denotemos por $\overline{\nabla}$ e $\langle, \rangle$ a conexão de Levi-Civita e a métrica de $\mathbb{L}^4$ respectivamente.

Podemos considerar, a menos de uma isometria do $\mathbb{L}^4$, que

$$\alpha(0) = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha'(0) = (0, 1, 0, 0) \quad \text{e} \quad n(0) = (0, 0, 0, 1).$$

Como n é campo de vetor unitário ao longo de α , isto é, $\langle n, n \rangle = 1$ temos

$$\langle \overline{\nabla}_{\alpha'} n, n \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Sabemos ainda que $\langle \alpha', n \rangle = 0$, então

$$\langle \overline{\nabla}_{\alpha'} n, \alpha' \rangle = -\langle n, \overline{\nabla}_{\alpha'} \alpha' \rangle = 0, \quad (2.3)$$

onde a última igualdade se deve ao fato de α ser geodésica em M e n ser um campo tangente em M . Além disso, como α é linha de curvatura $(-\langle \overline{\nabla}_{\alpha'} N \rangle)^T = \mu \alpha'$ onde $(\)^T$ denota a projeção tangente em $\mathbb{H}^3$) temos

$$\langle \overline{\nabla}_{\alpha'} n, N \rangle = -\langle n, \overline{\nabla}_{\alpha'} N \rangle = \langle n, \mu \alpha' \rangle = 0 \quad (2.4)$$

e

$$\langle \overline{\nabla}_{\alpha'} n, \alpha \rangle = -\langle n, \alpha' \rangle = 0. \quad (2.5)$$

De (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) concluímos que

$$\overline{\nabla}_{\alpha'} n = 0$$

e portanto

$$n'(t) = 0 \quad \forall t.$$

Então,

$$n'_1 = n'_2 = n'_3 = n'_4 = 0.$$

Observamos que $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ e $n_4 = 1$ é solução e satisfaz às condições iniciais. Então, pela unicidade de solução, temos $n = e_4 \quad \forall t$. Como $\langle n, \alpha' \rangle = 0$

$$\alpha'_4 = 0 \implies \alpha_4(t) = 0, \quad \forall t.$$

Logo α está contida na superfície totalmente geodésica $\{x_4 = 0\}$.

Além disso, M é ortogonal a essa superfície totalmente geodésica ao longo de α .

■

Lema 2.2 *Tomemos $\widetilde{M}$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$ e M uma superfície do $\mathbb{H}^3$. Seja $F : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma isometria (local) tal que ds^2 e $\Pi = \widetilde{\Pi} + ds^2$, são respectivamente a primeira e segunda forma fundamentais em M , definidas como na seção (2.1). Então $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$ é uma linha de curvatura em $\widetilde{M}$ se, e somente se, $F(\alpha)$ é linha de curvatura em M .*

Demonstração: Denotemos por ∇^1 e ∇^2 as conexões de Levi-Civita em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$ respectivamente.

Suponhamos que α seja uma linha de curvatura em $\widetilde{M}$, isto é, $\langle A^{\widetilde{N}}\alpha', n \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ onde $\{\alpha', n\}$ é base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\widetilde{M}$ e seja $\widetilde{N}$ campo unitário normal a $\widetilde{M}$, ou seja

$$\langle \nabla_{\alpha'}^1 \widetilde{N}, n \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Logo, para mostrarmos que $F(\alpha)$ é linha de curvatura em M , basta verificar que

$$\langle \nabla_{dF(\alpha')}^2 N, dF(n) \rangle_{\mathbb{H}^3} = 0,$$

onde N é campo unitário normal a M .

Observando que $\Pi(v) = \langle B(v, v), N \rangle_{\mathbb{H}^3} = \langle A^N v, v \rangle_{\mathbb{H}^3}$, segue

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{dF(\alpha')}^2 N, dF(n) \rangle_{\mathbb{H}^3} &= \langle B(dF(\alpha'), dF(n)), N \rangle_{\mathbb{H}^3} \\ &= \frac{1}{2}(\Pi(dF(\alpha' + n)) - \Pi(dF(\alpha')) - \Pi(dF(n))) \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{\Pi}(\alpha' + n) - \widetilde{\Pi}(\alpha') - \widetilde{\Pi}(n)) \\ &= \langle \widetilde{B}(\alpha', n), \widetilde{N} \rangle_{\mathbb{H}^3} \\ &= \langle \nabla_{\alpha'}^1 \widetilde{N}, n \rangle_{\mathbb{H}^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $F(\alpha)$ é linha de curvatura em M .

Analogamente, prova - se que vale também a recíproca. ■

Proposição 2.1 *Seja $\tilde{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima não planar onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simplesmente conexo. Seja $\tilde{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma simetria, ortogonal em relação a um plano, tal que $\tilde{R}(\tilde{X}(U)) = \tilde{X}(U)$. Então a superfície prima de $\tilde{X}$ com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, é invariante sob uma simetria ortogonal em relação a um plano geodésico do $\mathbb{H}^3$.*

Demonstração: Denotemos por $X : U \rightarrow \mathbb{H}^3$ a superfície prima de $\tilde{X}$. Consideremos U com a métrica ds^2 e $S : U \rightarrow U$ a isometria induzida por $\tilde{R}$.

Sabemos que a intersecção entre o plano de simetria de $\tilde{R}$ e $\tilde{X}(U)$ é uma geodésica e uma linha de curvatura de $\tilde{X}(U)$. Seja γ a imagem de tal curva por $\tilde{X}^{-1}$. Então $\tilde{X}(\gamma(t))$ é geodésica e linha de curvatura.

Como isometrias levam geodésicas em geodésicas. $X(\gamma)$ também será uma geodésica em $X(U)$. Além disso, pelo lema (2.2), como $\tilde{X}(U)$ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ e $X(U)$ é a prima de $\tilde{X}$ com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, então $X(\gamma)$ também será uma linha de curvatura em $X(U)$.

Logo, pelo lema (2.1), $X(\gamma)$ pertence a um plano geodésico de $\mathbb{H}^3$ e a superfície $X(U)$ intercepta esse plano ortogonalmente.

Portanto $X(U)$ é simétrica em relação a tal plano, pois $X(S(U)) = X(U)$ e isometria preserva ortogonalidade e geodésicas. ■

Capítulo 3

Prima do Catenóide

Utilizando o teorema de representação para superfícies com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico, teorema (1.2), e o resultado da seção 2.1, construiremos neste capítulo a prima do Catenóide mínimo do espaço euclidiano. Na seção 3.1 faremos a construção da superfície no espaço hiperbólico e suas características geométricas serão estudadas na seção 3.2. Na seção 3.3 estudaremos seus planos de simetria a partir das propriedades análogas de sua prima mínima.

3.1 Construção da Superfície

Dada uma função analítica h e usando o que foi feito na observação da subseção (1.5.1), procuremos soluções para ϕ_3 da forma

$$\phi_3 = h(z)F(|z|^2)$$

onde F é uma função diferenciável a valores reais.

Sabemos pela subseção 1.5.2, que a condição de compatibilidade para as duas

equações diferenciais parciais em (1.23) é $Im \{ \bar{h} \Delta \phi_3 \} = 0$, mas

$$\bar{h} \Delta \phi_3 = 4 \left(h_z \bar{h} F'(|z|^2) z + |h|^2 |z|^2 F''(|z|^2) + |h|^2 F'(|z|^2) \right),$$

e portanto

$$Im \{ \bar{h} \Delta \phi_3 \} = 0 \iff Im \{ \bar{h} h_z z \} = 0.$$

Logo a condição de compatibilidade é satisfeita por todas as funções $h(z) = z^\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Consideremos, então

$$\begin{aligned} h(z) &= z \\ \phi_3(z) &= h(z) F_\alpha(|z|^2) \end{aligned}$$

onde $F_\alpha(t) = t^\alpha$ e $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Usando (1.29) e (1.30), determinemos as funções ϕ_1 e ϕ_2 .

- $\phi_1 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} dz$

Chamando

$$G(z) = z \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial z} = \bar{z} \alpha |z|^{2\alpha},$$

temos,

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z G(z) dz &= \int_0^1 G(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \alpha |z|^{2\alpha+2} \int_0^1 t^{2\alpha+1} dt \\ &= \frac{\alpha}{2\alpha+2} |z|^{2\alpha+2} \end{aligned}$$

onde $\gamma(t) = tz, t \in [0, 1]$. Portanto,

$$\phi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} |z|^{2\alpha+2}, \quad \text{com } \alpha+1 \neq 0 \quad (3.1)$$

- $\phi_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} dz$

Chamando

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \bar{z}|z|^{2\alpha-2}(1+\alpha),$$

temos,

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \tilde{G}(z) dz &= \int_0^1 \tilde{G}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= |z|^{2\alpha}(1+\alpha) \int_0^1 t^{2\alpha-1} dt \\ &= \frac{1+\alpha}{2\alpha} |z|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_2 = \frac{1+\alpha}{\alpha} |z|^{2\alpha}, \quad \text{com } \alpha \neq 0 \quad (3.2)$$

No entanto, ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 tomados dessa forma não satisfazem a primeira equação do sistema, pois

$$\phi_1 \phi_2 = |z|^{4\alpha+2} \quad \text{e} \quad 1 + |\phi_3|^2 = 1 + |z|^{4\alpha+2}$$

Tomemos então, uma combinação linear dessas soluções, isto é, seja

$$\begin{aligned} h(z) &= z \\ \phi_3(z) &= h(z)[AF_\alpha(|z|^2) + BF_\beta(|z|^2)] \end{aligned}$$

onde $F_\alpha(t) = t^\alpha$, $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Temos então,

$$\phi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} A |z|^{2\alpha+2} + \frac{\beta}{\beta+1} B |z|^{2\beta+2} \quad (3.3)$$

e

$$\phi_2 = \frac{1+\alpha}{\alpha} A |z|^{2\alpha} + \frac{1+\beta}{\beta} B |z|^{2\beta}. \quad (3.4)$$

Verificando novamente a primeira equação do sistema (1.23) temos

$$\phi_1 \phi_2 = A^2 |z|^{4\alpha+2} + \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta(\alpha+1)} AB |z|^{2\alpha+2\beta+2} + \frac{\beta(\alpha+1)}{\alpha(\beta+1)} AB |z|^{2\alpha+2\beta+2} + B^2 |z|^{4\beta+2}$$

e

$$1 + |\phi_3|^2 = 1 + A^2 |z|^{4\alpha+2} + 2AB |z|^{2\alpha+2\beta+2} + B^2 |z|^{4\beta+2}.$$

Assim devemos ter,

$$AB|z|^{2\alpha+2\beta+2} \left(\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta(\alpha+1)} + \frac{\beta(\alpha+1)}{\alpha(\beta+1)} - 2 \right) = 1$$

ou seja,

$$AB|z|^{2\alpha+2\beta+2} (\alpha^2(\beta+1)^2 + \beta^2(\alpha+1)^2 - 2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)) = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1).$$

Como essa igualdade deve valer para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos restrições para A, B, α e β , isto é

$$2\alpha + 2\beta + 2 = 0 \quad \text{e} \quad AB \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} \right)^2 = 1. \quad (3.5)$$

Usando (3.3), (3.4) e (3.5) teremos então

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} A |z|^{2\alpha+2} + \frac{\alpha+1}{\alpha} B |z|^{-2\alpha} \\ \phi_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha} A |z|^{2\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+1} B |z|^{-2\alpha-2} \\ \phi_3 = z[A|z|^{2\alpha} + B|z|^{-2\alpha-2}] \end{cases} \quad (3.6)$$

que definem, pelo teorema (1.2), uma imersão

$$X : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

conforme em $\mathbb{H}^3$, com $H = 1$, onde

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right).$$

Observações 3.1

1. Se escolhermos, em (3.6), valores $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 \geq -\frac{1}{2}$ e um par (A, B) de constantes ou se escolhermos $\alpha = -1 - \alpha_0$ (simétrico de α_0 em relação a $-\frac{1}{2}$) e o par de constantes (B, A) , obteremos a mesma superfície. Logo, consideraremos apenas os valores $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.
2. Concluimos de (3.5), que A e B possuem o mesmo sinal. Como ϕ_1 e ϕ_2 devem ser positivos temos: se escolhermos A e B positivos então $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ é positivo e, portanto $\alpha > 0$; se escolhermos A e B negativos então $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ é negativo e, portanto $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$.

3.2 Propriedades da Superfície

3.2.1 Curvatura Total

Pela subseção 1.5.3, a curvatura total da superfície encontrada é

$$\begin{aligned}
 c &= - \int_M \frac{4|h_z|^2}{(\phi_1 + |h|^2\phi_2 - \bar{h}\phi_3 - h\bar{\phi}_3)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
 &= - \int_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} \frac{4\alpha^2(\alpha+1)^2|z|^{4\alpha}}{(A|z|^{4\alpha+2} + B)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
 &= - \int_r \int_0^{2\pi} \frac{4\alpha^2(\alpha+1)^2 r^{4\alpha}}{(Ar^{4\alpha+2} + B)^2} r \, dr d\theta \\
 &= -8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2 \int_r \frac{r^{4\alpha+1}}{(Ar^{4\alpha+2} + B)^2} dr
 \end{aligned}$$

Como o cálculo da curvatura total depende de α , temos duas situações.

- Se $4\alpha + 2 = 0$,

$$\begin{aligned}
 c &= -8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2 \int_r \frac{r^{-1}}{(A+B)^2} dr \\
 &= -8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_\epsilon^R \frac{r^{-1}}{(A+B)^2} dr \\
 &= -\frac{8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2}{(A+B)^2} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(\log r \Big|_\epsilon^R \right) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

- $4\alpha + 2 > 0$,

$$\begin{aligned}
 c &= -8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_\epsilon^R \frac{r^{4\alpha+1}}{(Ar^{4\alpha+2} + B)^2} dr \\
 &= -8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\left(\frac{-1}{Ar^{4\alpha+2} + B} - \frac{1}{A(4\alpha+2)} \right) \Big|_\epsilon^R \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8\pi\alpha^2(\alpha+1)^2}{A(4\alpha+2)} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{AR^{4\alpha+2} + B} - \frac{1}{A\epsilon^{4\alpha+2} + B} \right) \\
&= \frac{-4\pi\alpha^2(\alpha+1)^2}{AB(2\alpha+1)} \\
&= -4\pi(2\alpha+1).
\end{aligned}$$

Como nos interessa trabalhar apenas com superfícies que possuem curvatura total finita teremos que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

3.2.2 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

Como ϕ_3 é da forma $\phi_3 = h(z)F(|z|^2)$, usando (1.33) teremos que

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \left[\left(\frac{\partial h}{\partial z} F(|z|^2) + h F'(|z|^2) \bar{z} \right) \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} F(|z|^2) + \bar{h} F'(|z|^2) z \right) + \right. \\
&\quad + \left(h F'(|z|^2) z \right) \left(\bar{h} F'(|z|^2) \bar{z} \right) - \\
&\quad \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{h}}{h} \left(h F'(|z|^2) z \right) \left(\frac{\partial h}{\partial z} F(|z|^2) + h F'(|z|^2) \bar{z} \right) \right) \right] \\
&= |h_z|^2 F^2(|z|^2).
\end{aligned}$$

Assim $\lambda^2 = A^2|z|^{4\alpha} + B^2|z|^{4\beta} + 2AB|z|^{2\alpha+2\beta}$ e portanto

$$ds^2 = (A|z|^{2\alpha} + B|z|^{-2\alpha-2})^2 |dz|^2. \quad (3.7)$$

De (3.7) verificamos que a superfície é completa. De fato, tomemos $\gamma(t) = z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ uma curva divergente em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então, ,

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|^2 &= ds^2(\gamma'(t)) \\
&= (Ar(t)^{2\alpha} + Br(t)^{-2\alpha-2})^2 |r'(t)e^{i\theta(t)} + i\theta'(t)r(t)e^{i\theta(t)}|^2 \\
&\geq (Ar(t)^{2\alpha} + Br(t)^{-2\alpha-2})^2 |r'(t)|^2
\end{aligned}$$

logo,

$$L(\gamma(t)) \geq \lim_{t \rightarrow a} \int_{t_0}^t |Ar(t)^{2\alpha} + Br(t)^{-2\alpha-2}| |r'(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lim_{t \rightarrow a} \left| \int_{t_0}^t (Ar(t)^{2\alpha} + Br(t)^{-2\alpha-2})r'(t)dt \right| \\
&= \lim_{r \rightarrow a} \left| \int_{r_0}^r Ar^{2\alpha} + Br^{-2\alpha-2}dr \right|.
\end{aligned}$$

Como $2\alpha + 1 > 0$, então $L(\gamma(t)) \rightarrow \infty$, quando $a = \infty$ ou $a = 0$, e portanto a superfície é completa.

Usando (1.35) temos a segunda forma fundamenta, Π , dada por

$$\begin{aligned}
\Pi &= \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{A|z|^{2\alpha+2} + B|z|^{-2\alpha}} \right) (2Re \{ z^2(A|z|^{2\alpha-2} + B|z|^{-2\alpha-4})d\bar{z}^2 \}) + \lambda^2|dz|^2 \\
&= 2Re \left\{ \frac{\alpha(\alpha+1)z^2}{|z|^4} d\bar{z}^2 \right\} + \lambda^2|dz|^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2.3 Uma Superfície de Rotação

Para entendermos melhor a superfície encontrada, façamos a mudança $z = re^{i\theta}$. Logo podemos reescrever (3.6) como:

$$\begin{cases} \phi_1(r, \theta) = \frac{\alpha}{\alpha+1} Ar^{2\alpha+2} + \frac{\alpha+1}{\alpha} Br^{-2\alpha} = f_1(r) \\ \phi_2(r, \theta) = \frac{\alpha+1}{\alpha} Ar^{2\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+1} Br^{-2\alpha-2} = f_2(r) \\ \phi_3(r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)[Ar^{2\alpha} + Br^{-2\alpha-2}] = f_3(r)e^{i\theta} \end{cases}$$

Teremos então,

$$X(r, \theta) = \left(\frac{f_1 + f_2}{2}, f_3 \cos\theta, f_3 \sin\theta, \frac{f_1 - f_2}{2} \right),$$

ou ainda

$$X(r, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(r) \\ c_1(r) \\ 0 \\ c_3(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0(r) \\ c_1(r) \cos\theta \\ c_1(r) \sin\theta \\ c_3(r) \end{bmatrix}$$

onde

$$c_0(r) = \frac{f_1 + f_2}{2}, c_1(r) = f_3 \text{ e } c_3(r) = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

Logo X será uma superfície de rotação esférica cuja curva geratriz é $C(r) = (c_0(r), c_1(r), 0, c_3(r))$ com $C(r) \subset \mathbb{H}^3 \cap P^3$ e $P^3 = [\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_3]$.

Passando para o modelo do semi espaço superior ($\mathbb{R}_+^3$) e considerando a isometria entre os modelos

$$F : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_+^3$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{x_0 - x_3}(x_1, x_2, 1)$$

temos

$$F(X(r, \theta)) = \frac{1}{f_2}(f_3 \cos \theta, f_3 \sin \theta, 1) \quad (3.9)$$

Assim $F(X(r, \theta))$ é a superfície de rotação gerada pela curva $\tilde{c}(r) = \frac{1}{f_2}(f_3, 0, 1)$ em torno do eixo do z . É imediato verificar que $F(C(r)) = \tilde{c}(r)$.

Analisemos o comportamento de $\tilde{c}(r)$ em dois casos,

$$-\frac{1}{2} < \alpha < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \alpha$$

Denotando $\frac{\alpha+1}{\alpha} = \varepsilon$ e pondo $\tilde{c}(r) = (x(r), 0, z(r))$ temos

$$z(r) = \frac{1}{\varepsilon A r^{2\alpha} + \varepsilon^{-1} B r^{-2\alpha-2}} = \frac{r^{2\alpha+2}}{\varepsilon A r^{4\alpha+2} + \varepsilon^{-1} B}$$

$$x(r) = \frac{A r^{2\alpha+1} + B r^{-2\alpha-1}}{\varepsilon A r^{2\alpha} + \varepsilon^{-1} B r^{-2\alpha-2}} = \frac{A r^{4\alpha+3} + B r}{\varepsilon A r^{4\alpha+2} + \varepsilon^{-1} B}$$

então,

1. Para $0 < \alpha$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} z(r) = 0$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x(r) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} x(r) = 0$$

2. Para $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z(r) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} z(r) = 0$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x(r) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} x(r) = 0$$

Algumas curvas geratrizes $\tilde{c}(r)$, com $A = B$, são mostradas na figura (3.1) (a) e (3.1) (b) no plano $\{y = 0\}$.

Figura 3.1: Curvas geratrizes de superfícies de rotação com $H = 1$ no modelo do semi espaço superior: (a) $\alpha > 0$; e (b) $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. Em ambos os casos tomamos $A = B$.

As curvas correspondentes a $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ nunca se interceptam, e portanto geram superfícies mergulhadas, enquanto que as curvas correspondentes a $0 < \alpha$ possuem uma auto intersecção e portanto geram apenas superfícies não mergulhadas.

Figura 3.2: *Superfície de rotação não mergulhada, com $\alpha = 0.49$, no modelo do semi espaço superior.*

Figura 3.3: *Superfície de rotação mergulhada, com $\alpha = -0.1$, no modelo do semi espaço superior.*

3.3 Estudo das Simetrias

3.3.1 As Primas do Catenóide

Para estudarmos os planos de simetria da superfície em (3.6), determinemos inicialmente a superfície mínima que é prima da superfície X .

A representação de Weierstrass do Catenóide mínimo, no espaço euclidiano, é dada por

$$g(w) = \mu e^w \text{ e } \eta = f(w)dw = \nu e^{-w}dw \quad (3.10)$$

onde μ e ν são constantes reais, e podemos supor, a menos de uma mudança de orientação, que μ é constante real positiva. Segue ainda

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\nu |e^{-w}| + \mu^2 \nu |e^w|)^2 |dw|^2 \quad (3.11)$$

e

$$\tilde{\Pi} = -Re\{\mu \nu dw^2\}. \quad (3.12)$$

Consideremos a superfície definida em (3.6) com a mudança de variável

$$z = e^{\frac{1}{2\alpha+1}w}.$$

Então, podemos reescrever (3.7) e (3.8), respectivamente, como

$$ds^2 = (2\alpha + 1)^{-2}(A |e^w| + B |e^{-w}|)^2 |dw|^2 \quad (3.13)$$

e

$$\Pi = 2Re\left\{\frac{\alpha(\alpha + 1)}{(2\alpha + 1)^2} d\bar{w}^2\right\} + ds^2. \quad (3.14)$$

Podemos concluir, de (3.11) e (3.13), que dada uma superfície de rotação esférica com curvatura média constante 1 no espaço hiperbólico, isto é, dados A, B e α e

escolhendo ν e μ tais que

$$\nu = \frac{-2B}{2\alpha + 1} \quad \text{e} \quad \mu = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

a superfície hiperbólica de rotação dada será isométrica ao Catenóide mínimo dado em (3.10). Observamos

$$1 + 2\mu\nu = \frac{1}{(2\alpha + 1)^2} > 0$$

Além disso por (3.12) e (3.14), observamos que as segundas formas fundamentais das superfícies satisfazem $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$ e, portanto concluímos que o Catenóide mínimo será a superfície prima da superfície de rotação hiperbólica dada.

Reciprocamente, dada uma superfície mínima definida por (3.10), isto é, dados μ e ν , com $1 + 2\mu\nu > 0$, sua prima será uma superfície de rotação, dada por (3.6), com a mudança de variável $z = e^{\frac{1}{2\alpha+1}w}$, tal que

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + 2\mu\nu}}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

e

$$A = \frac{-\mu^2\nu(2\alpha + 1)}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{-\nu(2\alpha + 1)}{2}$$

Observação: Para valores de μ e ν tais que $1 + 2\mu\nu \leq 0$, as superfícies mínimas dadas por (3.10) não terão suas primas definidas por (3.6). Ver seção 6.3.2.

3.3.2 Isometrias

Considerando $\mathbb{C}$ munido da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\nu |e^{-w}| + \mu^2\nu |e^w|)^2 |dw|^2$$

dada em (3.11), observamos que a transformação $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $I(w) = \bar{w} + 2iv_0$, com $w = u + iv$ e para todo v_0 real, deixa a métrica acima invariante. Assim o conjunto

dos pontos fixos da isometria I ,

$$\Omega = \{(u, v_0), \forall v_0 \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathbb{R}\},$$

é um traço de geodésica.

Usando os dados de Weierstrass do recobrimento universal do Catenóide, segue que sua parametrização local é dada por $\tilde{X}(u, v) = (\tilde{x}_1(u, v), \tilde{x}_2(u, v), \tilde{x}_3(u, v))$ onde

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u, v) = -\frac{\nu}{2}(e^{-u} + \mu^2 e^u) \cos v \\ \tilde{x}_2(u, v) = -\frac{\nu}{2}(e^{-u} + \mu^2 e^u) \sin v \\ \tilde{x}_3(u, v) = u \mu \nu \end{cases}$$

Logo,

$$c(v) = \tilde{X}(0, v) = \left(-\frac{\nu}{2}(1 + \mu^2) \cos v, -\frac{\nu}{2}(1 + \mu^2) \sin v, 0\right)$$

e

$$c_{v_0}(u) = \tilde{X}(u, v_0) = \left(-\frac{\nu}{2}(e^{-u} + \mu^2 e^u) \cos v_0, -\frac{\nu}{2}(e^{-u} + \mu^2 e^u) \sin v_0, u \mu \nu\right)$$

são reparametrizações de geodésicas planas e portanto são linhas de curvatura. Logo o plano $\{\tilde{x}_3 = 0\}$ e o conjunto de planos contendo o eixo z são planos de simetria para a superfície.

Pela proposição (2.1), concluímos que a prima do Catenóide no espaço hiperbólico também possui planos (geodésicos) de simetria. De fato, fazendo novamente a mudança de variável $z = e^{\frac{1}{2\alpha+1}w}$ ($w = u + iv$), (3.6) e (3.7) se reescrevem respectivamente como

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} A e^{\frac{(2\alpha+2)u}{2\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{\alpha} B e^{\frac{-2\alpha u}{2\alpha+1}} \\ \phi_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha} A e^{\frac{2\alpha u}{2\alpha+1}} + \frac{\alpha}{\alpha+1} B e^{\frac{(-2\alpha-2)u}{2\alpha+1}} \\ \phi_3 = e^{\frac{w}{2\alpha+1}} [A e^{\frac{2\alpha u}{2\alpha+1}} + B e^{\frac{(-2\alpha-2)u}{2\alpha+1}}] \end{cases} \quad (3.15)$$

e

$$ds^2 = (2\alpha + 1)^{-2} (A |e^w| + B |e^{-w}|)^2 |dw|^2. \quad (3.16)$$

Assim I também é isometria da métrica dada em (3.16) com Ω o conjunto de seus pontos fixos, e pelo lema (2.2) as curvas no espaço hiperbólico, correspondentes a

linhas de curvatura no espaço euclidiano, também são linhas de curvatura. Portanto pelo lema (2.1) tais curvas são planas e os planos (geodésicos) que as contém cortam a superfície ortogonalmente.

Usando (3.15), analisemos novamente nossa superfície no modelo do semi espaço superior. Temos

$$F(X(u, v)) = \frac{1}{\phi_2} (Re\phi_3, Im\phi_3, 1) = (y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v))$$

onde

$$\begin{aligned} Re \phi_3 &= e^{\frac{u}{2\alpha+1}} \cos\left(\frac{v}{2\alpha+1}\right) [Ae^{\frac{2\alpha u}{2\alpha+1}} + Be^{\frac{(-2\alpha-2)u}{2\alpha+1}}] \\ Im \phi_3 &= e^{\frac{u}{2\alpha+1}} \sin\left(\frac{v}{2\alpha+1}\right) [Ae^{\frac{2\alpha u}{2\alpha+1}} + Be^{\frac{(-2\alpha-2)u}{2\alpha+1}}] \\ \phi_2 &= \frac{\alpha+1}{\alpha} Ae^{\frac{2\alpha u}{2\alpha+1}} + \frac{\alpha}{\alpha+1} Be^{\frac{(-2\alpha-2)u}{2\alpha+1}} \end{aligned}$$

Portanto,

- $F(X(0, v)) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{A(\alpha+1)^2 + B\alpha^2} ((A+B) \cos\left(\frac{v}{2\alpha+1}\right), (A+B) \sin\left(\frac{v}{2\alpha+1}\right), 1)$,
ou seja, está contido no plano totalmente geodésico $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2$ onde

$$R = \frac{\alpha(\alpha+1)\sqrt{(A+B)^2 + 1}}{A(\alpha+1)^2 + B\alpha^2}$$

- $F(X(u, 0))$ está contido no plano totalmente geodésico $\{y_2 = 0\}$
- $F(X(u, v_0))$ está contido no plano geodésico

$$y_1 \sin\left(\frac{v_0}{2\alpha+1}\right) - y_2 \cos\left(\frac{v_0}{2\alpha+1}\right) = 0$$

Capítulo 4

Prima da Superfície de Enneper

Neste capítulo construiremos a prima da Superfície de Enneper (superfície mínima do espaço euclidiano). Na seção 4.1 faremos a construção da superfície utilizando uma segunda técnica e nas seções 4.2 e 4.3 faremos, respectivamente, um estudo das propriedades geométricas e descreveremos os planos geodésicos de simetria da superfície construída.

4.1 Construção da Superfície

Dada uma função analítica h , a condição de compatibilidade para as duas equações diferenciais parciais em (1.23), também é satisfeita tomando-se

$$\phi_3 = F(z)\overline{G}(z)$$

onde F e G são funções holomorfas satisfazendo

$$F'(z) = h(z)G'(z). \tag{4.1}$$

De fato

$$\Delta\phi_3 = 4 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (F' \bar{G}) = 4 F' \bar{G}',$$

e portanto

$$\text{Im}\{\bar{h}\Delta\phi_3\} = 0.$$

Logo as duas últimas equações do sistema (1.23) podem ser integradas onde teremos, respectivamente, por (1.29) e (1.30)

$$\phi_1(z) = 2\text{Re} \int_{z_0}^z h \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \zeta} d\zeta = 2\text{Re} \int_{z_0}^z F'(\zeta) \bar{F}(\zeta) d\zeta$$

$$\implies \phi_1(z) = 2|F(z)|^2$$

$$\phi_2(z) = 2\text{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{h} \frac{\partial \phi_3}{\partial \zeta} d\zeta = 2\text{Re} \int_{z_0}^z G'(\zeta) \bar{G}(\zeta) d\zeta$$

$$\implies \phi_2(z) = 2|G(z)|^2$$

Se tomarmos

$$\phi_1 = 2|F(z)|^2, \quad \phi_2 = 2|G(z)|^2 \quad \text{e} \quad \phi_3 = F(z)\bar{G}(z)$$

a primeira equação do sistema não será satisfeita, pois

$$\phi_1\phi_2 = 4|F(z)|^2|G(z)|^2 \quad \text{e} \quad 1 + |\phi_3|^2 = 1 + 4|F(z)|^2|G(z)|^2.$$

Tomemos duas soluções como as descritas acima, (F_1, G_1) e (F_2, G_2) , e $\phi_3 = AF_1\bar{G}_1 + BF_2\bar{G}_2$. Então,

$$\begin{cases} \phi_1 = A|F_1(z)|^2 + B|F_2(z)|^2 \\ \phi_2 = A|G_1(z)|^2 + B|G_2(z)|^2 \\ \phi_3 = AF_1(z)\bar{G}_1(z) + BF_2(z)\bar{G}_2(z) \end{cases}, \text{ onde } A, B \in \mathbb{R}^* \quad (4.2)$$

Verificando novamente a primeira equação do sistema (1.23) teremos

$$\phi_1\phi_2 = 1 + |\phi_3|^2 \iff AB|\bar{F}_1\bar{G}_2 - \bar{F}_2\bar{G}_1|^2 = 1. \quad (4.3)$$

Escolhendo as funções

$$\begin{aligned} h(z) &= \tanh(\rho z) \\ G'_1(z) &= \cosh(\rho z) \quad , \text{ onde } \rho \in \mathbb{C} \\ G'_2(z) &= z \cosh(\rho z) \end{aligned}$$

teremos por (4.1) que

$$\begin{cases} F_1(z) = \frac{1}{\rho} \cosh(\rho z) \\ F_2(z) = \frac{1}{\rho} \left(z \cosh(\rho z) - \frac{1}{\rho} \sinh(\rho z) \right) \\ G_1(z) = \frac{1}{\rho} \sinh \rho z \\ G_2(z) = \frac{1}{\rho} \left(z \sinh(\rho z) - \frac{1}{\rho} \cosh(\rho z) \right) \end{cases} \quad (4.4)$$

Logo ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 definidas em (4.2) por (4.4), são dadas por

$$\begin{cases} \phi_1 = A \left| \frac{1}{\rho} \cosh(\rho z) \right|^2 + B \left| \frac{\rho z \cosh(\rho z) - \sinh(\rho z)}{\rho^2} \right|^2 \\ \phi_2 = A \left| \frac{1}{\rho} \sinh(\rho z) \right|^2 + B \left| \frac{\rho z \sinh(\rho z) - \cosh(\rho z)}{\rho^2} \right|^2 \\ \phi_3 = (A + B|z|^2) \frac{\cosh(\rho z) \sinh(\bar{\rho} z)}{|\rho|^2} + \frac{B}{|\rho|^4} (\sinh(\rho z) \cosh(\bar{\rho} z) - \rho z |\cosh(\rho z)|^2 - \bar{\rho} z |\sinh(\rho z)|^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

e determinam pelo teorema (1.2), uma imersão conforme

$$X : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

com $H = 1$, onde por (4.3)

$$AB = |\rho|^6. \quad (4.6)$$

Observamos ainda, por (4.6) e pelo fato de ϕ_1 e ϕ_2 serem positivas, que as constantes A e B são positivas.

4.2 Propriedades da Superfície

4.2.1 Curvatura Total

Para calcular a curvatura total da superfície construída, verifiquemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\phi_1 + |h|^2 \phi_2 - \bar{h} \phi_3 - h \bar{\phi}_3 &= A|F_1(z)|^2 + B|F_2(z)|^2 + |h|^2(A|G_1(z)|^2 + \\
&+ B|G_2(z)|^2) - \bar{h}(AF_1(z)\bar{G}_1(z) + BF_2(z)\bar{G}_2(z)) + \\
&- h(A\bar{F}_1(z)G_1(z) + B\bar{F}_2(z)G_2(z)) \\
&= A|F_1(z) - hG_1(z)|^2 + B|F_2(z) - hG_2(z)|^2 \quad (4.7) \\
&= \frac{A + B|z|^2}{|\rho|^2 |\cosh(\rho z)|^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
c &= - \int_M \frac{4|\rho|^4 |\cosh(\rho z)|^4 |h_z|^2}{(A + B|z|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
&= - \int_M \frac{4|\rho|^6}{(A + B|z|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
&= - \int_M \frac{4}{(1 + |w|^2)^2} \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w}, \text{ onde } \sqrt{\frac{B}{A}} z = w \\
&= - \int_r \int_\theta \frac{4r}{(1 + r^2)^2} dr d\theta \\
&= -8\pi \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\left(\frac{-1}{2(1 + r^2)} \right) \Big|_\epsilon^R \right] \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

4.2.2 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

Por (1.34) temos

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi_3 - h\phi_2) \right|^2 \\
&= \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{A\bar{G}_1 + B\bar{G}_2 z}{\rho \cosh(\rho z)} \right) \right|^2 \\
&= \frac{(A + B|z|^2)^2}{|\rho|^2}
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho} |z|^2 \right|^2.$$

Portanto a métrica é dada por

$$ds^2 = \left| \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho} |z|^2 \right|^2 |dz|^2 \quad (4.8)$$

donde podemos concluir que dois valores de ρ com o mesmo módulo geram superfícies isométricas.

Usando (4.8), podemos verificar que a superfície é completa. Tomando $\gamma(t) = z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ uma curva divergente em $\mathbb{C}$, temos

$$\|\gamma'(t)\|^2 = ds^2(\gamma'(t)) = \left| \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho} r^2 \right|^2 |r' + i\theta' r|^2 \geq \left| \frac{A + Br^2}{\rho} \right|^2 |r'|^2.$$

Assim

$$\begin{aligned} L(\gamma(t)) &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left| \frac{A + Br(t)^2}{\rho} \right| |r(t)'| dt \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{t_0}^t \frac{A + Br(t)^2}{\rho} r'(t) dt \right| \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{r_0}^r \frac{A + Br^2}{\rho} dr \right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

e portanto a superfície é completa.

Por (1.35) temos a segunda forma fundamental, Π , dada por

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\frac{|\rho|^2 |\cosh(\rho z)|^2}{A + B|z|^2} \right) \left(-2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{\rho}}{\cosh^2(\bar{\rho} z)} \frac{(A + B|z|^2) \cosh(\bar{\rho} z)}{\rho \cosh(\rho z)} d\bar{z}^2 \right\} \right) + \lambda^2 |dz|^2 \\ &= -2 \operatorname{Re} \{ \bar{\rho}^2 d\bar{z}^2 \} + \lambda^2 |dz|^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para desenharmos a superfície encontrada passemos para o modelo do semi espaço superior. Assim

$$F(X(z)) = \frac{1}{\phi_2} (\operatorname{Re} \phi_3, \operatorname{Im} \phi_3, 1)$$

onde ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 são dadas por (4.5). Considerando $z = u + iv$ e $\rho = 1$, podemos reescrever as funções ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 que determinam a superfície como

$$\begin{aligned}\phi_2 &= (A + B) \sinh^2 u + (A - B) \sin^2 v + B[1 + (u^2 + v^2)(\sinh^2 u + \sin^2 v) - \\ &\quad - u \sinh(2u) + v \sin(2v)] \\ \operatorname{Re} \phi_3 &= (A + B(u^2 + v^2 + 1)) \sinh u \cosh u - Bu(2 \sinh^2 u + 1) \\ \operatorname{Im} \phi_3 &= -[(A + B(u^2 + v^2 - 1)) \cos v \sin v + Bv(2 \cos^2 v - 1)]\end{aligned}\tag{4.10}$$

Usando (4.10) e tomando $A = B = 1$, temos na figura (4.1) o desenho, no modelo do semi espaço superior, da superfície construída.

Figura 4.1: Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (4.5), com $\rho = A = B = 1$, $u \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ e $v \in [-\frac{8\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}]$.

Nas figuras abaixo, temos a mesma superfície da figura (4.1), porém analisando o que ocorre na vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$, o que não foi feito anteriormente. A única diferença entre as figuras abaixo é a variação dos parâmetros u e v .

Figura 4.2: Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (4.5), com $\rho = A = B = 1$. u e v pertencentes a outros intervalos.

4.3 Estudo das Simetrias

4.3.1 As Primas da Superfície de Enneper

Determinemos a superfície mínima, prima da superfície definida em (4.5) para em seguida estudar seus planos de simetria.

A representação de Weierstrass da superfície mínima de Enneper, do espaço euclidiano, é dada por

$$g(z) = \mu z \quad \text{e} \quad \eta = f(z)dz = \nu dz \quad (4.11)$$

onde μ e ν são constantes reais e podemos supor, a menos de uma mudança de orientação, μ constante real positiva. Assim temos

$$ds^2 = \frac{1}{4}[\nu(1 + \mu^2 |z|^2)]^2 |dz|^2 \quad (4.12)$$

e

$$\tilde{\Pi} = -\operatorname{Re}\{\mu \nu dz^2\} \quad (4.13)$$

Analisando (4.8) e (4.12), concluímos que dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (4.5), isto é, dados A, B e ρ e escolhendo μ e ν tais que

$$|\nu| = \frac{2A}{|\rho|} \quad \text{e} \quad \mu = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

tal superfície será isométrica à superfície mínima de Enneper.

Para que essas superfícies sejam primas, devemos ter $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$. Então por (4.9) e (4.13) temos

$$\begin{cases} 2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \nu \mu \\ \rho_1 \rho_2 = 0 \end{cases}$$

onde $\rho = \rho_1 + i\rho_2$. Da segunda equação temos

$$\rho_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \rho_2 = 0$$

donde segue

$$\rho_2 = 0 \implies \rho_1^2 = \frac{\mu \nu}{2}$$

ou

$$\rho_1 = 0 \implies \rho_2^2 = -\frac{\mu \nu}{2}$$

Portanto, dados A, B e ρ a prima da superfície definida por (4.5) será a superfície mínima de Enneper definida por (4.11) tal que

$$\begin{cases} \nu = \frac{2A}{\rho} & \mu = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \text{se } \rho \in \mathbb{R} \\ \nu = \frac{-2A}{|\rho|} & \mu = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \text{se } \rho \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Observação: Dados A, B e $\rho_0 \in \mathbb{C}$ e como ds^2 depende apenas de $|\rho|$ temos uma família de superfícies dadas por (4.5) isométricas entre si, correspondentes às constantes A, B e $\rho = |\rho_0|e^{i\theta}$. Estas superfícies são todas isométricas à Superfície de Enneper porém apenas aquelas com $\rho \in \mathbb{R}$ ou $\rho \in i\mathbb{R}$ serão primas. As demais superfícies dadas por (4.5) e correspondentes a $\rho \in \mathbb{C}$, com $\rho_1 \neq 0$ e $\rho_2 \neq 0$, serão as primas da família associada à Superfície de Enneper. Ver seção 6.4.

Reciprocamente, dada a Superfície de Enneper definida por (4.11), isto é, dados μ e ν , sua prima é uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (4.5) tal que

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu \nu}{2}}$$

e

$$\begin{cases} A = \frac{\rho \nu}{2} & B = \frac{\mu^2 \rho \nu}{2}, & \text{se } \nu > 0 \\ A = \frac{-|\rho| \nu}{2} & B = \frac{-\mu^2 \nu |\rho|}{2}, & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

4.3.2 Isometrias

Considerando $\mathbb{C}$ munido da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{4}[\nu(1 + \mu|z|^2)]^2|dz|^2$$

dada em (4.12), observamos que qualquer rotação em relação a origem de $\mathbb{C}$, é uma isometria para tal métrica. Em particular tomemos as transformações $I_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$I_1(z) = \bar{z} \quad \text{e} \quad I_2(z) = -\bar{z}$$

com $z = u + iv$. Temos que

$$\Omega_1 = \{(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{(0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$$

são os conjuntos dos pontos fixos das isometrias I_1 e I_2 respectivamente, e portanto, são traços de geodésicas de ds^2 .

Usando (4.11), temos que a Superfície de Enneper pode ser localmente parametrizada por $\tilde{X}(u, v) = (\tilde{x}_1(u, v), \tilde{x}_2(u, v), \tilde{x}_3(u, v))$ onde

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u, v) = \frac{\nu}{2} \left(u - \frac{\mu^2 u^3}{3} + \mu^2 u v^2 \right) \\ \tilde{x}_2(u, v) = \frac{\nu}{2} \left(-v - \mu^2 u^2 v + \frac{\mu^2 v^3}{3} \right) \\ \tilde{x}_3(u, v) = \frac{\mu \nu}{2} (u^2 - v^2) \end{cases}$$

Assim as curvas

$$c(u) = \tilde{X}(u, 0) = \frac{\nu}{2} \left(u - \frac{\mu^2 u^3}{3}, 0, \mu u^2 \right)$$

e

$$c(v) = \tilde{X}(0, v) = \frac{\nu}{2} \left(0, -v + \frac{\mu^2 v^3}{3}, \mu v^2 \right)$$

são reparametrizações de geodésicas planas e portanto são linhas de curvatura. Logo os planos $\{\tilde{x}_2 = 0\}$ e $\{\tilde{x}_1 = 0\}$ são planos de simetria ortogonal para a superfície mínima.

Pela proposição (2.1), concluímos que a Prima da Superfície de Enneper também possui planos geodésicos de simetria.

Utilizando (4.10), encontramos os planos geodésicos de simetria para a superfície com $\rho = 1$: o plano $\{y_2 = 0\}$ que contém $F(X(u, 0))$ e o plano $\{y_1 = 0\}$ que contém $F(X(0, v))$.

Capítulo 5

Prima da Superfície de Bonnet

Neste capítulo construiremos a prima da Superfície de Bonnet (superfície mínima do espaço euclidiano) descoberta em 1855 por O. Bonnet [B] e que possui a característica de suas linhas de curvatura serem planas como ocorre no Catenóide e na Superfície de Enneper. Na seção 5.1 faremos a construção da superfície utilizando a mesma técnica do capítulo anterior e nas demais seções faremos um estudo geométrico da superfície construída.

5.1 Construção da Superfície

Utilizando novamente a técnica do capítulo anterior, sejam agora

$$\begin{aligned}h(z) &= \tanh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \\G'_1(z) &= \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \\G'_2(z) &= -\cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \sinh\left(\frac{z}{2}\right)\end{aligned}$$

Segue então, por (4.1)

$$\begin{cases} F_1(z) = \sqrt{3} \cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \cosh(\frac{z}{2}) - \sinh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \sinh(\frac{z}{2}) \\ F_2(z) = \sinh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \cosh(\frac{z}{2}) - \sqrt{3} \cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \sinh(\frac{z}{2}) \\ G_1(z) = \sqrt{3} \sinh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \cosh(\frac{z}{2}) - \cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \sinh(\frac{z}{2}) \\ G_2(z) = \cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \cosh(\frac{z}{2}) - \sqrt{3} \sinh(\frac{\sqrt{3}z}{2}) \sinh(\frac{z}{2}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Logo ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 definidos em (4.2) por (5.1), determinam pelo teorema (1.2), uma imersão conforme em $\mathbb{H}^3$ com $H = 1$, onde por (4.3)

$$AB = \frac{1}{3}. \quad (5.2)$$

Além disso, A e B são positivos pelo fato de ϕ_1 e ϕ_2 o serem.

5.2 Propriedades da Superfície

5.2.1 Curvatura Total

Para determinarmos a curvatura total dessa superfície, calculemos

$$\begin{aligned} \phi_1 + |h|^2 \phi_2 - \bar{h} \phi_3 - h \bar{\phi}_3 &\stackrel{(4.7)}{=} A|F_1(z) - hG_1(z)|^2 + B|F_2(z) - hG_2(z)|^2 \\ &= A \left| \frac{\sqrt{3} \cosh(\frac{z}{2})}{\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})} \right|^2 + B \left| -\frac{\sqrt{3} \sinh(\frac{z}{2})}{\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})} \right|^2 \\ &= \frac{3A|\cosh(\frac{z}{2})|^2 + 3B|\sinh(\frac{z}{2})|^2}{|\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})|^2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} c &= - \int_M \frac{4|\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})|^4 |h_z|^2}{9(A|\cosh(\frac{z}{2})|^2 + B|\sinh(\frac{z}{2})|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= - \int_M \frac{1}{3A^2 |\cosh(\frac{z}{2})|^4 (1 + \frac{B}{A} |\tanh(\frac{z}{2})|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

Em cada aberto $U_0 \subset M$ da forma $U_0 = \{X(z) / z = u + iv, u \in \mathbb{R}, v_0 + 4k\pi \leq v < v_0 + 4(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ temos

$$\begin{aligned} c(U_0) &= - \int_{U_0} \frac{4}{(1+|w|^2)^2} \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w}, \quad \text{com } w = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= - \int_r \int_\theta \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr d\theta \\ &= -8\pi \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\left(\frac{-1}{2(1+r^2)} \right) \Big|_\epsilon^R \right] \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura total de M é $-\infty$.

5.2.2 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

Por (1.34) temos

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi_3 - h\phi_2) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} \cosh(\frac{\sqrt{3}\bar{z}}{2})}{\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})} \left(A \left| \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 + B \left| \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 \right) \right|^2 \\ &= \left(\sqrt{3}A \left| \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{\sqrt{3}A} \left| \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Logo a métrica é dada por

$$ds^2 = \left(\sqrt{3}A \left| \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{\sqrt{3}A} \left| \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 \right)^2 |dz|^2. \quad (5.3)$$

Considerando $\frac{z}{2} = a + ib$ segue

$$\begin{aligned} \sqrt{3}A \left| \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{\sqrt{3}A} \left| \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \right|^2 &\geq \sqrt{3}A \cos^2 b + \frac{1}{\sqrt{3}A} \sin^2 b \\ &\geq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}A}, & \text{se } \sqrt{3}A \geq \frac{1}{\sqrt{3}A} \\ \sqrt{3}A, & \text{se } \sqrt{3}A \leq \frac{1}{\sqrt{3}A} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, por (5.3)

$$||\gamma'(t)||^2 \geq k^2 |r'(t)|^2$$

onde $k = \min \left\{ \sqrt{3}A, \frac{1}{\sqrt{3}A} \right\}$ e $\gamma(t)$ é uma curva divergente em $\mathbb{C}$. Logo

$$L(\gamma(t)) \geq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{R_0}^R k dr \right| = \infty$$

e portanto a superfície é completa.

Por (1.35) temos a segunda forma fundamental. Π , dada por

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\frac{|\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})|^2}{3(A|\cosh(\frac{z}{2})|^2 + B|\sinh(\frac{z}{2})|^2)} \right) \left(- \right. \\ &\quad \left. - 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2 \cosh^2(\frac{\sqrt{3}z}{2})} \frac{\sqrt{3} \cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})(A|\cosh(\frac{z}{2})|^2 + B|\sinh(\frac{z}{2})|^2)}{\cosh(\frac{\sqrt{3}z}{2})} d\bar{z}^2 \right\} \right) + \lambda^2 |dz|^2 \\ &= -\operatorname{Re}\{d\bar{z}^2\} + \lambda^2 |dz|^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Figura 5.1: Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (5.1), com $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{2}$.

Considerando $z = u + iv$ temos as funções ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 que parametrizam a superfície, dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left((A+B) \sinh(\sqrt{3}u) \sinh u - (A-B) \sin(\sqrt{3}v) \sin v \right) \\
&\quad + (A+B) \cosh u (\cosh(\sqrt{3}u) + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}v)) \\
&\quad + (A-B) \cos v (\frac{1}{2} \cosh(\sqrt{3}u) + \cos(\sqrt{3}v)) \\
\phi_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left((A+B) \sinh(\sqrt{3}u) \sinh u + (A-B) \sin(\sqrt{3}v) \sin v \right) \\
&\quad + (A+B) \cosh u (\cosh(\sqrt{3}u) - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}v)) \\
&\quad + (A-B) \cos v (\frac{1}{2} \cosh(\sqrt{3}u) - \cos(\sqrt{3}v)) \\
\operatorname{Re} \phi_3 &= \frac{\sinh(\sqrt{3}u)}{2} \left(2(A+B) \cosh u + (A-B) \cos v \right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{3} \sinh u}{2} \left((A+B) \cosh(\sqrt{3}u) \right) \\
\operatorname{Im} \phi_3 &= -\frac{\sin(\sqrt{3}v)}{2} \left((A+B) \cosh u + 2(A-B) \cos v \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{3} \sin v}{2} \left((A-B) \cos(\sqrt{3}v) \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Usando (5.5) e tomando $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{2}$, temos nas figuras (5.1) (a) e (5.1) (b) o desenho da superfície construída, no modelo do semi espaço superior, onde usamos a isometria F , definida anteriormente. A única diferença entre as duas figuras é a variação dos parâmetros u e v .

A figura abaixo, (5.2), representa a mesma superfície transformada pela isometria do espaço hiperbólico dada por

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{R}_+^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_+^3 \\
T(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{(y_1 + 1)^2 + y_2 + y_3} (1 - y_1 - y_2 - y_3, 2y_2, 2y_3)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Figura 5.2: Superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (5.1), com $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{2}$ e utilizando a isometria T .

5.3 Estudo das Simetrias

5.3.1 As primas da Superfície de Bonnet

A menos de uma isometria do $\mathbb{R}^3$ e de uma mudança de orientação, a superfície mínima de Bonnet pode ser localmente parametrizada por $\tilde{X}(u, v) = (\tilde{x}_1(u, v), \tilde{x}_2(u, v), \tilde{x}_3(u, v))$ onde

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(u, v) = \frac{av + \sin v \cosh u}{\sqrt{1-a^2}} \\ \tilde{x}_2(u, v) = \frac{u + a \cos v \sinh u}{\sqrt{1-a^2}} \\ \tilde{x}_3(u, v) = \cos v \cosh u \end{cases} \quad (5.7)$$

com u, v parâmetros isotérmicos e $0 < a < 1$.

Com a escolha feita em (5.7), temos os dados da representação de Weierstrass

$$g(z) = i\alpha \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \quad \eta = -\frac{2i}{\alpha} \cosh^2\left(\frac{z}{2}\right) dz$$

onde $\alpha = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ e $0 < a < 1$. Então

$$ds^2 = \left(\frac{1}{\alpha} \left| \cosh \left(\frac{z}{2} \right) \right|^2 + \alpha \left| \sinh \left(\frac{z}{2} \right) \right|^2 \right)^2 |dz|^2 \quad (5.8)$$

e

$$\tilde{\Pi} = -Re \{ dz^2 \} \quad (5.9)$$

Analisando (5.3) e (5.8), temos que dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida em (4.2) por (5.1), isto é, dado A ou B e escolhendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3A}}$ teremos uma superfície isométrica à superfície mínima de Bonnet. Portanto por (5.4) e (5.9) essas superfícies são primas.

Reciprocamente, dada uma superfície mínima de Bonnet, isto é, dado α e tomando $A = \frac{1}{\sqrt{3}\alpha}$ sua prima será a superfície definida em (4.2) por (5.1).

5.3.2 Isometrias

Tomando as transformações $I_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ onde

$$I_1(z) = -\bar{z} \quad \text{e} \quad I_2(z) = \bar{z} + 2iy_0, \quad y_0 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

com $z = u + iv$. Verifica-se que I_1 e I_2 são isometrias para a métrica (5.8) e portanto os conjuntos dos pontos fixos

$$\Omega_1 = \{(0, v), v \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \Omega_2(k) = \{(u, k\pi), u \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z}\}$$

das isometrias I_1 e I_2 , respectivamente, são traços de geodésicas.

Na Superfície de Bonnet, usando a parametrização dada em (5.7), temos as curvas

$$c(v) = \tilde{X}(0, v) = \left(\frac{av + \sin v}{\sqrt{1-a^2}}, 0, \cos v \right)$$

contida no plano $\{\hat{x}_2 = 0\}$ e

$$c_k(u) = \tilde{X}(u, k\pi) = \left(\frac{ak\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{u(-1)^k a \sinh u}{\sqrt{1-a^2}}, (-1)^k \cosh u \right)$$

contida no plano $\left\{ \hat{x}_1 = \frac{ak\pi}{\sqrt{1-a^2}} \right\}$. Portanto $c(v)$ e $c_k(u)$ são linhas de curvatura da superfície.

Então os planos $\{\hat{x}_2 = 0\}$ e $\left\{ \hat{x}_1 = \frac{ak\pi}{\sqrt{1-a^2}} \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ cortam a superfície ortogonalmente e são planos de simetria ortogonal. Observamos ainda que, fixado um valor v_0 , temos

$$\tilde{X}(u, v_0 + 2k\pi) = \left(\frac{2ak\pi}{\sqrt{1-a^2}}, 0, 0 \right) + \tilde{X}(u, v_0)$$

isto é, a superfície é periódica com um período de translação (figura (5.3)).

Figura 5.3: Superfície de Bonnet mínima em $\mathbb{R}^3$.

Pela proposição (2.1), segue que a Prima da Superfície de Bonnet também possui planos geodésicos de simetria. Passando para o modelo do semi espaço superior e usando (5.5) temos que as curvas $F(X(0, v))$ e $F(X(u, 0))$ estão contidas nos planos geodésicos

$\{y_1 = 0\}$ e $\{y_2 = 0\}$ respectivamente.

Resta considerar ainda, as curvas da forma $F(X(u, k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Para cada k , essa curva pertence ao plano totalmente geodésico dado por

$$y_1^2 + (y_2 + b_k)^2 + y_3^2 = c_k^2$$

onde

$$b_k = \frac{\cos(\sqrt{3}v)}{\sin(\sqrt{3}v)} \quad \text{e} \quad c_k = \frac{1}{|\sin(\sqrt{3}v)|}$$

De fato, considerando $\beta = \sqrt{3}k\pi$

$$\begin{aligned}
y_1^2 + \left(y_2 + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 + y_3^2 &= \frac{Re^2 \phi_3}{\phi_2^2} + \left(\frac{Im \phi_3}{\phi_2} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 + \frac{1}{\phi_2^2} \\
&= \frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{2 \cos \beta Im \phi_3}{\phi_2 \sin \beta} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \\
&= \frac{1}{\phi_2 \sin^2 \beta} \left[-\cos \beta \sin^2 \beta ((A+B) \cosh u + \right. \\
&\quad + 2(A-B) \cos v) - \frac{\sqrt{3}}{2} (A+B) \sinh(\sqrt{3}u) \sinh u + \\
&\quad + (A+B) \cosh u \cosh(\sqrt{3}u) + \frac{(A-B)}{2} \cos v \cosh(\sqrt{3}u) + \\
&\quad + (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \left(\frac{(A+B)}{2} \cos(\sqrt{3}u) \cosh u + \right. \\
&\quad \left. \left. + (A-B) \cos v \cos(\sqrt{3}u) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sin^2 \beta}
\end{aligned}$$

Observação: A isometria T dada em (5.6), leva os planos geodésicos de isometria

$$y_1^2 + (y_2 + b_k)^2 + y_3^2 = c_k^2$$

nos planos geodésicos

$$y = B_k y$$

onde $B_k = \frac{1}{b_k} = \tan(\sqrt{3} k \pi)$.

Capítulo 6

Superfícies Associadas às Primas do Catenóide e a Prima do Helicoide

Neste capítulo construiremos as primas das superfícies associadas ao Catenóide mínimo. Na seção 6.1 faremos a construção das superfícies associadas em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média constante 1, utilizando a mesma técnica do capítulo 4. Na seção 6.2, faremos um estudo das propriedades geométricas das superfícies, e na seção 6.3, construiremos a prima das superfícies mínimas do espaço euclidiano: Helicoide e Catenóide. No segundo caso, mostraremos que em uma das situações encontradas, a superfície construída é a mesma definida no capítulo 3. Na seção 6.4 construiremos, usando as idéias desenvolvidas nesse capítulo, as primas das superfícies associadas à Enneper.

6.1 Construção das Superfícies

Utilizando novamente a técnica do capítulo 4, sejam

$$\begin{aligned} a &= a_1 + ia_2, \quad a \notin \{-\frac{1}{2}, -1, 0\} \\ h(z) &= \frac{a(a+1)}{2a+1} e^{(2a+1)z} \\ G'_1(z) &= e^{-(1+a)z} \\ G'_2(z) &= e^{-az} \end{aligned}$$

Por (4.1) temos

$$\begin{cases} F_1(z) = \frac{1+a}{2a+1} e^{az} \\ F_2(z) = \frac{a}{2a+1} e^{(1+a)z} \\ G_1(z) = \frac{-1}{1+a} e^{-(1+a)z} \\ G_2(z) = \frac{-1}{a} e^{-az} \end{cases} \quad (6.1)$$

Logo ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 definidos em (4.2) por (6.1), são dadas por

$$\begin{cases} \phi_1 = C \left| \frac{1+a}{2a+1} \right|^2 |e^{az}|^2 + D \left| \frac{a}{2a+1} \right|^2 |e^{(1+a)z}|^2 \\ \phi_2 = C \left| \frac{1}{a+1} \right|^2 |e^{-(1+a)z}|^2 + D \left| \frac{1}{a} \right|^2 |e^{-az}|^2 \\ \phi_3 = -C \frac{1+a}{(2a+1)(1+\bar{a})} e^{az-(1+\bar{a})\bar{z}} - D \frac{a}{\bar{a}(2a+1)} e^{(a+1)z-\bar{a}\bar{z}} \end{cases} \quad (6.2)$$

e determinam pelo teorema (1.2), uma imersão conforme em $\mathbb{H}^3$ com $H = 1$ onde por (4.3)

$$CD = |a(a+1)|^2. \quad (6.3)$$

Além disso, C e D são constantes reais positivas.

6.2 Propriedades da Superfície

6.2.1 Curvatura Total

Para determinarmos a curvatura total dessa superfície, calculemos

$$\begin{aligned}\phi_1 + |h|^2 \phi_2 - \bar{h} \phi_3 - h \bar{\phi}_3 &\stackrel{(4.7)}{=} C|F_1(z) - hG_1(z)|^2 + D|F_2(z) - hG_2(z)|^2 \\ &= C|e^{az}|^2 + D|e^{(1+a)z}|^2.\end{aligned}$$

Então,

$$c = - \int_M \frac{4|a(1+a)|^2 |e^{(1+2a)z}|^2}{|e^{az}|^4 (C + D|e^z|^2)^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

Em cada aberto $V_0 \subset M$ da forma $V_0 = \{X(z) / z = u + iv, u \in \mathbb{R}, v_0 + 2k\pi i \leq v < v_0 + 2(k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ temos

$$\begin{aligned}c(U_0) &= - \int_{V_0} \frac{4|a(1+a)|^2}{C D (1 + |w|^2)^2} \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w}, \quad \text{com } w = \sqrt{\frac{B}{A}} e^z \\ &= - \int_r \int_\theta \frac{4r}{(1 + r^2)^2} dr d\theta \\ &= -2\pi \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\left(\frac{-2}{1 + r^2} \right) \Big|_\epsilon^R \right] \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Portanto, a curvatura total de M é $-\infty$.

6.2.2 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

Por (1.34) temos

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi_3 - h\phi_2) \right|^2 \\ &= |C e^{az - (1+\bar{a})\bar{z}} + D e^{(a+1)z - \bar{a}\bar{z}}|^2 \\ &= C^2 |e^{az - (1+\bar{a})\bar{z}}|^2 + 2CD + D^2 |e^{(a+1)z - \bar{a}\bar{z}}|^2.\end{aligned}$$

Logo a métrica pode ser expressa como

$$ds^2 = (C|e^{-z}| + D|e^z|)^2 |dz|^2. \quad (6.4)$$

Usando (6.4), temos que a superfície é completa. De fato, seja $\gamma(t) = \zeta(t)$, com $t \in [c, \infty)$, uma curva divergente em $\mathbb{C}$ tal que $z(c) = z_0$. Então,

$$\begin{aligned} L(\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (C |e^{-\zeta(t)}| + D |e^{\zeta(t)}|) |\zeta'(t)| dt \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{t_0}^t D e^{\zeta(t)} \zeta'(t) dt \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{t_0}^t D e^{\zeta} d\zeta \right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Por (1.35) temos a segunda forma fundamental, Π , dada por

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{|e^{az}|^2 (C + D|e^z|^2)} \left[-2\operatorname{Re} \left\{ \bar{a}(1 + \bar{a})(C e^{az + \bar{a}\bar{z}} + D e^{(a+1)z + (\bar{a}+1)\bar{z}}) d\bar{z}^2 \right\} \right] + \lambda^2 |dz|^2 \\ &= -2\operatorname{Re} \{ \bar{a}(1 + \bar{a}) d\bar{z}^2 \} + \lambda^2 |dz|^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.3 Superfícies Mínimas Associadas ao Catenóide e suas Primas

Consideremos a representação de Weierstrass da família de superfícies isométricas mínimas determinadas por

$$g(z) = \nu e^z \quad \eta = \mu e^{i\theta} e^{-z} dz \quad \theta \in [0, \pi[\quad (6.6)$$

onde ν e μ são constantes reais, e podemos supor, a menos de uma mudança de orientação que ν é constante real positiva. Para $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos determinados,

respectivamente, o Catenóide e o Helicoide e para todo $\theta \in [0, \pi[$ a métrica é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\mu|e^{-z}| + \nu^2 \mu|e^z|)^2 |dz|^2 \quad (6.7)$$

isto é, (g, η) definem uma família de superfícies mínimas isométricas, chamadas associadas do Catenóide [La]. Segue ainda

$$\tilde{\Pi} = -Re\{e^{i\theta} \mu \nu dz^2\} \quad (6.8)$$

De (6.4) e (6.7) temos que dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (6.2), isto é, dados C, D e a e escolhendo μ e ν tais que

$$|\mu| = 2C \quad \text{e} \quad \nu = \sqrt{\frac{D}{C}} \quad (6.9)$$

teremos que tal superfície será isométrica à família de superfícies definidas em (6.6), com a escolha feita em (6.9).

Para que essas superfícies sejam primas, isto é, para que a relação $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$ seja satisfeita, temos por (6.5) e (6.8)

$$\begin{cases} \mu \nu \cos \theta = 2(a_1 + a_1^2 - a_2^2) \\ \mu \nu \sin \theta = 2(2a_1 a_2 + a_2) \end{cases} \quad (6.10)$$

ou seja

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2 Re \{ \frac{a(a+1)}{\mu \nu} \}}{\frac{a(a+1)}{\mu \nu}} \\ \sin \theta = \frac{2 Im \{ \frac{a(a+1)}{\mu \nu} \}}{\frac{a(a+1)}{\mu \nu}} \end{cases} \quad (6.11)$$

isto é,

$$e^{i\theta} = \pm \frac{a(a+1)}{|a(a+1)|}$$

Logo, dada uma superfície definida por (6.2), isto é, dados C, D e a , sua prima será uma superfície pertencente à família de superfícies isométricas mínimas definidas em (6.6) com

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \frac{a(a+1)}{|a(a+1)|} & \text{se } Im(a(a+1)) \geq 0 \\ \text{ou} \\ e^{i\theta} = -\frac{a(a+1)}{|a(a+1)|} & \text{se } Im(a(a+1)) < 0 \end{cases}$$

Para o primeiro caso teremos

$$\mu = 2C \quad \text{e} \quad \nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$$

e no segundo caso,

$$\mu = -2C \quad \text{e} \quad \nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$$

Observemos que

$$a \neq -\frac{1}{2} \implies a(a+1) \neq -\frac{1}{4}$$

e portanto por (6.11)

$$\mu \nu \neq -\frac{1}{2} \quad \text{se} \quad \theta = 0$$

Reciprocamente, dada uma superfície definida por (6.6), isto é, dados μ , ν e θ , com $\mu \nu \neq -\frac{1}{2}$ se $\theta = 0$, sua prima será uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por (6.2), com

$$C = \frac{|\mu|}{2} \quad D = \frac{\nu^2 |\mu|}{2} \quad \text{e} \quad a(a+1) = \frac{\mu \nu e^{i\theta}}{2}$$

o que implica $a \notin \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$ e

$$a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 2\mu \nu e^{i\theta}}}{2}.$$

Portanto, as superfícies construídas em (6.2) são primas das superfícies da família associada ao Catenóide.

6.3.1 As Primas do Helicoide

Por (6.10) temos que uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, definida por (6.2), será prima do Helicoide (quando $\theta = \frac{\pi}{2}$) se a relação

$$\begin{cases} a_1 + a_1^2 - a_2^2 = 0 \\ 2(2a_1a_2 + a_2) = \mu \nu \end{cases}$$

for satisfeita, com $|\mu| = 2C$ e $\nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$.

Da primeira igualdade segue

$$a_2 = \pm \sqrt{a_1(a_1 + 1)}, \text{ com } a_1 \geq 0 \text{ ou } a_1 \leq -1$$

Portanto, as superfícies da família (6.2) com a da forma $a = a_1 + ia_2$ onde

$$a_2 = \pm \sqrt{a_1(a_1 + 1)}, \text{ e } a_1 > 0 \text{ ou } a_1 < -1$$

serão as primas do helicóide.

Mais precisamente, temos as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned} a_1 > 0 & \quad \text{e} \quad a = a_1 + i\sqrt{a_1(a_1 + 1)} \\ a_1 < -1 & \quad \text{e} \quad a = a_1 - i\sqrt{a_1(a_1 + 1)} \\ a_1 > 0 & \quad \text{e} \quad a = a_1 - i\sqrt{a_1(a_1 + 1)} \\ a_1 < -1 & \quad \text{e} \quad a = a_1 + i\sqrt{a_1(a_1 + 1)} \end{aligned}$$

Observando que $\mu\nu = 2a_2(2a_1 + 1)$, concluímos que os helicóides correspondentes são dados por $\nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$ e $\mu = 2C$, nos dois primeiros casos, e $\mu = -2C$ nos dois últimos.

6.3.2 As Primas do Catenóide

Analisando (6.10), agora para $\theta = 0$, temos que uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, definida por (6.2), será prima do Catenóide se a relação

$$\begin{cases} 2(a_1 + a_1^2 - a_2^2) = \mu\nu \\ 2a_1a_2 + a_2 = 0 \end{cases}$$

for satisfeita, com $|\mu| = 2C$ e $\nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$.

Da segunda equação temos

$$a_2 = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

Portanto, as superfícies da família (6.2), com

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{1}{2} + ia_2, \quad \text{com} \quad a_2 \neq 0$$

serão as primas do Catenóide.

Mais precisamente, temos

$$\begin{cases} \mu \nu = 2a(a+1) & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mu \nu = -\frac{4a_2^2+1}{2} & \text{se } a \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

ou seja,

$$\text{se } a \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \mu = 2C & \nu = \sqrt{\frac{D}{C}} & \text{se } a > 0 \quad \text{ou} \quad a < -1 \\ \text{e} \\ \mu = -2C & \nu = \sqrt{\frac{D}{C}} & \text{se } -1 < a < 0 \end{cases}$$

e

$$\text{se } a \in \mathbb{C} \implies \mu = -2C \quad \text{e} \quad \nu = \sqrt{\frac{D}{C}}$$

Observamos que para qualquer a , sempre temos no primeiro caso que

$$2\mu \nu + 1 > 0$$

e no segundo caso que

$$2\mu \nu + 1 < 0.$$

Observação: Para valores de $a \in \mathbb{R}$, as superfícies obtidas com valores simétricos em relação a $-\frac{1}{2}$ são iguais, a menos de uma isometria de $\mathbb{H}^3$, mudando o parâmetro z por $-z$. Basta considerar portanto, apenas os valores de a , tais que, $a > -\frac{1}{2}$.

As Primas do Catenóide do Capítulo 3

Verifiquemos agora, que as superfícies descritas por (6.2) para $a \in \mathbb{R}$ de fato coincidem com as superfícies dadas no capítulo 3. Neste caso (6.2), (6.4) e (6.5) se reescrevem, respectivamente, como

$$\begin{cases} \phi_1 = C \left(\frac{1+a}{2a+1} \right)^2 |e^z|^{2a} + D \left(\frac{a}{2a+1} \right)^2 |e^z|^{2(a+1)} \\ \phi_2 = C \left(\frac{1}{a+1} \right)^2 |e^z|^{-2(1+a)} + D \left(\frac{1}{a} \right)^2 |e^z|^{-2a} \\ \phi_3 = -C \frac{1}{2a+1} e^{a(z-\bar{z})-\bar{z}} - D \frac{1}{2a+1} e^{a(z-\bar{z})+z} \end{cases} \quad (6.12)$$

$$ds^2 = (C|e^{-z}| + D|e^z|)^2 |dz|^2 \quad (6.13)$$

e

$$\Pi = -2\operatorname{Re}\{a(1+a)d\bar{z}^2\} + \lambda^2 |dz|^2 \quad (6.14)$$

onde $h(z) = \frac{a(a+1)}{2a+1} e^{(2a+1)z}$ e $a \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}\}$

Comparando a métrica obtida em (3.13) com (6.13), temos que as superfícies definidas por (3.6) e (6.2) são isométricas se, e somente se,

$$D = \frac{|A|}{2\alpha + 1} \quad \text{e} \quad C = \frac{|B|}{2\alpha + 1}$$

além disso, por (3.14) e (6.14) temos

$$\frac{\alpha(\alpha + 1)}{(2\alpha + 1)^2} = -a(a + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2a + 1 = \pm \frac{1}{2\alpha + 1}$$

e como basta considerar $a > -\frac{1}{2}$ e $\alpha > -\frac{1}{2}$

$$2a + 1 = \frac{1}{2\alpha + 1}$$

e portanto

$$a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < \alpha < 0$$

ou

$$-\frac{1}{2} < a < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0$$

Então, dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (3.6), isto é, dados A, B e α existem C, D e a tais que

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha + 1}$$

e

$$\begin{cases} D = \frac{A}{2\alpha+1} & C = \frac{B}{2\alpha+1}, & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{ou} \\ D = \frac{-A}{2\alpha+1} & C = \frac{-B}{2\alpha+1}, & \text{se } -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \end{cases}$$

que determinam, por (6.2), a mesma superfície em $\mathbb{H}^3$.

Reciprocamente, dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (6.2), isto é, dados C, D e a existem A, B e α tais que

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2a + 1}$$

e

$$\begin{cases} A = D (2\alpha + 1) & B = C (2\alpha + 1), & \text{se } -\frac{1}{2} < a < 0 \\ \text{ou} \\ A = -D (2\alpha + 1) & B = -C (2\alpha + 1), & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

que determinam, por (3.6), a mesma superfície em $\mathbb{H}^3$.

6.4 Superfícies Mínimas Associadas à Enneper e suas Primas

Usando os resultados obtidos no capítulo 4, onde determinamos as primas da Superfície de Enneper, construiremos as primas das superfícies mínimas associadas à Enneper.

Consideremos a representação de Weierstrass da família associada à Superfície de Enneper

$$g(z) = \mu z \quad \eta = \nu e^{i\theta} dz \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad (6.15)$$

onde ν e μ são constantes reais positivas, e para $\theta = 0$, temos determinada a Superfície de Enneper.

Para todo $\theta \in [0, 2\pi[$ temos

$$ds^2 = \frac{1}{4}[\nu (1 + \mu^2 |z|^2)]^2 |dz|^2 \quad (6.16)$$

e

$$\tilde{\Pi} = -Re\{\mu \nu e^{i\theta} dz^2\} \quad (6.17)$$

Analisando (4.8) e (6.16), concluimos que dada uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$ definida por (4.5), isto é, dados A, B e ρ e escolhendo μ e ν tais que

$$\nu = \frac{2A}{|\rho|} \quad e \quad \mu = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad (6.18)$$

teremos que tal superfície será isométrica à família de superfícies definidas em (6.15), com a escolha feita em (6.18).

Para que essas superfícies sejam primas, isto é, para que a relação $\Pi = \tilde{\Pi} + ds^2$ seja satisfeita, temos por (4.9) e (6.17)

$$\begin{cases} \mu \nu \cos \theta = 2(\rho_1^2 - \rho_2^2) \\ \mu \nu \sin \theta = 4\rho_1\rho_2 \end{cases} \quad (6.19)$$

ou seja

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{Re\{\rho^2\}}{|\rho^2|} \\ \sin \theta = \frac{Im\{\rho^2\}}{|\rho^2|} \end{cases} \quad (6.20)$$

Logo, dada uma superfície definida por (4.5), isto é, dados A, B e ρ , sua prima será uma superfície pertencente à família de superfícies isométricas mínimas definidas em (6.15) com

$$\nu = \frac{2A}{|\rho|} \quad \mu = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad e \quad e^{i\theta} = \frac{\rho}{\bar{\rho}}$$

Reciprocamente, dada uma superfície definida por (6.15), isto é, dados μ, ν e θ , sua prima será uma superfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^3$, dada por

(4.5), com

$$A = \frac{|\rho| \nu}{2} \quad B = \frac{\mu^2 \nu |\rho|}{2} \quad \text{e} \quad \rho^2 = \frac{\mu \nu e^{i\theta}}{2}$$

Observação: Sabemos que todas as superfícies mínimas associadas à Superfície de Enneper são iguais, a menos de uma rotação em $\mathbb{R}^3$, à própria Superfície de Enneper. Logo, todas as superfícies dadas por (4.5) são primas da Superfície de Enneper.

Referências Bibliográficas

- [B] BRYANT, R. L. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Astérisque*, 155 (1987), (exposé XVI), p.321 - 347.
- [C] do CARMO, MANFREDO P., *Geometria Riemanniana*.
- [DHKW] DIERKES U., HILDERBRANT S., KUSTER A. WOHLRAB O., *Minimal Surfaces I*.
- [ET] EARP. R. S., TOUBIANA, E. Remarks on the geometry of constante mean curvature one surfaces in hyperbolic space, preprint, 1996.
- [GG] GALVÃO, M. ELISA E. L., GÓES, CÉLIA C., A Weierstrass type representation for surfaces in hyperbolic space with mean curvature one, To appear in *Note di Matematica*, Lecce Univ (Italy).
- [GN] GALVÃO, M. ELISA E. L., NELLI, B., Mean curvature one surfaces in hiperbolic space with planar curvature lines, Preprint.
- [H] HOPF, H., *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, 1000, Springer Verlag, 1983.
- [La] LAWSON B., Complete minimal surfaces in S^3 , *Annals of Math.*, 92, (1970), p.335-374
- [N] NITSCHKE, J. C. C. *Lectures on Minimal Surfaces*, Vol I, Cambridge Un. Press, 1989.

- [Os] OSSERMAN, R., A survey of minimal surfaces, Van Nostrand, N.Y., 1969
New edition, Dover 1986.
- [Su] SUZUKI, CRISTINA de A., Hipersuperfícies de rotação em espaços de
curvatura constante. Dissertação de Mestrado, IME-USP (1989).
- [UY-1] UMEHARA, M., YAMADA, K., Complete surfaces of constant mean
curvature-1 in the hyperbolic 3-space, Annals of Math., 137, (1993), p.611-
638.
- [UY-2] UMERAHA, M., YAMADA, K., Surfaces of constant mean curvature c in
 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ with prescribed Gauss map, Math. Ann., 304, (1996), p.203-224.