A álgebra de multiplicações
de uma álgebra de Bernstein

Lucia Satie Ikemoto Murakami

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da FAPESP

P junho de 1999 -

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Lucia Satie Ikemoto Murakami
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 20 de agosto de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Cristian Mallol Comandari - Univ. de La Frontera - Chile
- Prof. Dr. Ivan Shestakov - Univ. Novosibirski - Russia

*à memória de
Nario Murakami*

Agradecimentos

Ao Ricardo, pela presença indispensável em minha vida e às minhas famílias pelo apoio constante, em especial às “mamães”, d. Sumika e d. Fumiye.

Ao meu “irmão-matemático” Juaci, pela companhia sempre bem humorada nesses anos de doutorado, que fez com que nossos estudos tenham sido bastante agradáveis, e ao Juan Carlos, pelas sugestões fundamentais em vários episódios durante a elaboração deste trabalho.

Aos amigos Jair e Henrique, pela companhia diária e pela disposição em me ajudar sempre que precisei.

Agradeço também a todos os amigos que conheci no IME, entre eles: Major, Roseli, Thierry, Pablo, Marcela, Vitor, Sonti, Rolo, Caputi, Fábio “Beleza”, Ana Cláudia, Alan, Márcio, Osmar, Claus, Ayumi, Rodolfo, Ivo e Avelino.

Aos meus professores, com quem aprendi a maior parte do que sei hoje. Entre os funcionários, gostaria de destacar: Joel, Carlão, Jair, Zé, Sueli, Rosária, Joelma, Vera, Justina, Marcelo e Pinho, que sempre me receberam com muita disposição.

Finalmente, um agradecimento muito especial ao meu orientador, amigo e conselheiro Roberto Costa, que sempre fez o possível e o impossível para estar presente de modo ativo em todos os momentos importantes da minha vida acadêmica.

Abstract

We investigate some relations between a Bernstein algebra A and its multiplication algebra $M(A)$. Using properties of these algebras, normal and exceptional algebras and algebras with nilpotent kernel are characterized. We also study properties of Bernstein algebras preserved by isomorphisms of their multiplication algebras and compare the automorphism groups of A and $M(A)$. We analyze the variation of the dimension of $M(A)$ for each Bernstein algebra A of fixed type and try to determine the maximum rank of elements of $M(A)$.

Resumo

Investigamos algumas relações entre uma álgebra de Bernstein A e sua álgebra de multiplicações $M(A)$. Através de propriedades dessa álgebra, caracterizamos as álgebras normais, excepcionais e com núcleo nilpotente. Também estudamos propriedades das álgebras de Bernstein que são preservadas por isomorfismos de suas álgebras de multiplicações e comparamos os grupos de automorfismos de A e $M(A)$. Analisamos a variação da dimensão de $M(A)$ para cada álgebra de Bernstein A de tipo fixado e procuramos determinar o posto máximo dos elementos de $M(A)$.

Sumário

Introdução	3
0 Preliminares	6
0.1 Álgebras básicas	6
0.2 Álgebras de Bernstein	7
0.2.1 Álgebras de Bernstein Jordan	9
0.2.2 Álgebras de Bernstein excepcionais associadas a grafos	10
0.3 Join de álgebras básicas e decomponibilidade	11
0.4 Álgebras associativas de dimensão finita	12
1 A álgebra de multiplicações	13
1.1 Propriedades gerais e notações	13
1.2 A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein	15
1.3 Decomposição de Peirce	16
1.4 $M(A)$ nas álgebras normais	23
1.5 Relações entre $M(A)$ e $M(\overline{A})$	24
2 Propriedades de elementos de $M(A)$	26
2.1 Idempotentes da álgebra de multiplicações	26
2.1.1 Álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente	27
2.1.2 Álgebras de Bernstein arbitrárias	31
2.2 Sobre o invariante $\rho(A)$	33
3 Dimensão de $M(A)$	39
3.1 Alguns casos particulares	39
3.2 A dimensão máxima de $M(A)$	41
3.2.1 A dimensão máxima de $M(A)$ nas álgebras excepcionais	42

3.2.2	Dimensão máxima de $M(A)$ no caso geral	45
4	Isomorfismos	53
4.1	Sobre isomorfismos não bários	53
4.2	Propriedades preservadas por isomorfismos	54
4.3	Caracteres de $M(A)$	61
4.3.1	Ideais de $M(A)$	61
4.3.2	Sobre a existência de outros caracteres	65
4.4	Automorfismos de $M(A)$	67
5	Outras álgebras associadas a $M(A)$	73
5.1	A álgebra de multiplicações reduzida	73
5.1.1	Ideais de $M_0(A)$	74
5.1.2	Decomponibilidade nas álgebras de multiplicações	75
5.2	A álgebra de multiplicações com unidade	78
5.3	O problema inverso	80
5.3.1	$M(A)$ nas álgebras de Bernstein excepcionais	81
	Referências Bibliográficas	83
	Índice de Símbolos	86
	Índice Remissivo	87

Introdução

As álgebras de Bernstein surgiram como formulação algébrica de um problema sobre genética de populações proposto por S. Bernstein em 1923, que consiste em descrever todos os operadores de evolução que estacionam na segunda geração. Foram definidas independentemente por P. Holgate e Y. Lyubich e, atualmente, diversos autores dedicam-se ao estudo dessas álgebras.

Álgebras que satisfazem as condições do Problema de Bernstein formam uma classe de álgebras de Bernstein, que possuem uma base estocástica. O próprio Bernstein classificou tais álgebras com dimensão menor ou igual a 3 e também descreveu alguns casos particulares em dimensão 4. O problema nos casos regular e excepcional foi resolvido por Lyubich. Finalmente, a classificação dessas álgebras, no caso geral, foi feita por J.C. Gutiérrez em [26]. Soluções parciais podem ser encontradas em [22], [24] e [25].

O problema de classificação das álgebras de Bernstein, contudo, tem se mostrado bastante complexo. Em busca de informações a respeito da estrutura dessas álgebras, tem-se feito diversos tipos de abordagens. Citamos algumas delas. É conhecido que essas álgebras possuem idempotentes e, para cada idempotente, a álgebra tem uma decomposição, cujos subespaços têm dimensão invariante sob mudança de idempotentes. Subespaços obtidos a partir de somas e produtos dos subespaços da decomposição citada levam o nome de p -subespaços. O problema de decidir sobre a invariância ou a invariância da dimensão de certos p -subespaços, quando mudamos o idempotente, tem sido estudado por vários autores. Recentemente, J. Picanço, em sua tese de doutorado (veja [37]), obteve resultados relevantes nessa direção.

As identidades satisfeitas pelas álgebras de Bernstein também foram investigadas. L. Peresi e I. Correa buscaram as identidades minimais (veja [8]). R. Costa e R. Baeza trabalharam com outro tipo de identidades em [4], [5], [6] e [12], conhecidas como identidades shape. Usando representações do grupo simétrico, J. Bernad provou em [7] que as álgebras de Bernstein não possuem uma base de identidades finita.

Também foram consideradas outras estruturas algébricas no estudo das álgebras de Bernstein. Por exemplo, a álgebra de derivações de uma álgebra de Bernstein foi analisada por C. Martínez e S. González, em [20], [21] e [35] e por M.T. Alcalde, C. Burgueño, C. Mallol e R. Varro, em [1].

Embora as álgebras de Bernstein não formem uma variedade de álgebras, foi possível introduzir o conceito de superálgebra de Bernstein. Um trabalho sobre esse assunto foi desenvolvido por M.C. López-Díaz, em sua tese de doutorado. Em [23] pode ser encontrada uma classificação dos supermódulos de Bernstein irredutíveis.

Já R. Costa, H. Guzzo e A. Grishkov, em [13] e [16], encontraram conexões entre grafos e álgebras de Bernstein excepcionais.

Podemos estudar, ainda, outra estrutura algébrica: dada uma álgebra A arbitrária, sua álgebra de multiplicações $M(A)$, que é a subálgebra de $\text{End } A$ gerada por $\{L_x, R_x : x \in A\}$, é associativa e, em geral, não comutativa.

O objetivo deste trabalho é estudar a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein, apresentar relações entre A e $M(A)$, investigando como a estrutura de A influencia a estrutura de $M(A)$ e vice versa. Este estudo foi iniciado por R. Costa e A. Suazo, em [14].

No Capítulo 0 reunimos os conceitos básicos para a compreensão do restante do trabalho. A definição, notações e algumas propriedades gerais das álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein são apresentadas no Capítulo 1. Veremos que essas álgebras são bárias, possuem idempotentes e faremos a decomposição de Peirce de $M(A)$. Já começarão a surgir as primeiras conexões entre A e $M(A)$, provenientes dos subespaços da decomposição de Peirce de $M(A)$. Classificamos as álgebras de Bernstein que têm nulo algum desses subespaços. É possível descrever completamente a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein normal. Isso será feito na Seção 1.4. Ainda nesse capítulo, estabelecemos algumas relações entre $M(A)$ e $M(\overline{A})$, onde $\overline{A} = A/I$ e I é um ideal bário de A .

O Capítulo 2 é dividido em duas partes. Na primeira, estudamos os idempotentes de $M(A)$. O principal resultado da seção caracteriza as álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através do posto dos idempotentes de $M(A)$. Também descrevemos propriedades dos idempotentes de $M(A)$, para uma álgebra de Bernstein arbitrária A . Com a descrição dos idempotentes, provamos que $M(A)$, em geral, é uma álgebra sem unidade; mais ainda, não contém nenhum elemento inversível de $\text{End } A$. Na segunda parte do capítulo, investigamos o posto máximo dos elementos de $M(A)$.

Dadas duas álgebras de Bernstein de mesma dimensão, nem sempre suas respectivas álgebras de multiplicações têm mesma dimensão. Mais ainda, álgebras de mesmo tipo

podem ter álgebras de multiplicações com dimensões diferentes. No Capítulo 3 tratamos da variação da dimensão de $M(A)$, onde A é Bernstein de tipo fixado. Em vários casos, conseguimos estabelecer as dimensões mínima e máxima que $M(A)$ pode assumir. Também mostramos que as álgebras normais e as que satisfazem $UV + U^2V = 0$ têm dimensão de $M(A)$ bem determinada.

Os isomorfismos são abordados no Capítulo 4. Provamos que todo isomorfismo entre álgebras de multiplicações é bárico, onde a função peso é a considerada desde o início do trabalho. A existência de outros caracteres também é investigada. Apresentamos algumas propriedades das álgebras de Bernstein que são preservadas por isomorfismos entre suas álgebras de multiplicações. Na última seção do capítulo, analisamos o grupo dos automorfismos de $M(A)$, descrevendo alguns de seus subgrupos e fazendo uma comparação com o grupo dos automorfismos de A .

Outras duas estruturas algébricas associadas a $M(A)$ são introduzidas no Capítulo 5. A álgebra de multiplicações reduzida $M_0(A)$, que é um ideal de codimensão no máximo 1 de $M(A)$, e a álgebra com unidade $M_1(A)$. A primeira delas tem a propriedade de preservar a decomponibilidade da álgebra de Bernstein, isto é, se A é decomponível então $M_0(A)$ também é decomponível. O mesmo não ocorre com $M(A)$. A álgebra de multiplicações com unidade será tratada aqui, pois em alguns contextos sobre álgebras de multiplicações, essas álgebras são consideradas com unidade. Faremos um pequeno estudo a respeito dos idempotentes nessas álgebras. Encerraremos o trabalho considerando brevemente o problema inverso, que consiste em determinar as álgebras associativas que podem ser álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein. Trabalhamos apenas na classe das álgebras excepcionais, onde a solução é mais simples.

Capítulo 0

Preliminares

Reuniremos neste capítulo os conceitos básicos necessários para a leitura dos capítulos seguintes. Os resultados aqui serão apenas citados e as respectivas demonstrações poderão ser encontradas nas referências mencionadas ao longo das seções. Em todo este trabalho, F será um corpo de característica diferente de 2 e de 3.

0.1 Álgebras báricas

Seja A uma álgebra sobre F de dimensão arbitrária, não necessariamente associativa ou comutativa. Uma função $\omega : A \rightarrow F$ é um *character* de A se ω é um homomorfismo não nulo de álgebras. Nem toda álgebra possui caracteres; por exemplo, as álgebras nil não admitem tais homomorfismos. A estrutura interna de cada álgebra determina a quantidade de caracteres que a álgebra possui:

Proposição 0.1 *A correspondência $\omega \mapsto \ker \omega$ é uma bijeção entre o conjunto dos caracteres de uma álgebra A e o conjunto dos ideais bilaterais de A de codimensão 1 não contendo A^2 .*

A dimensão da álgebra também limita o número de caracteres:

Proposição 0.2 *Se $\dim A = n < \infty$ então o número de caracteres distintos de A é no máximo n .*

Cada character determina uma álgebra bárica, de acordo com a seguinte definição: um par (A, ω) é uma *álgebra bárica* sobre F se A é uma álgebra (não necessariamente comutativa ou associativa) sobre F e ω é um character de A .

Se (A, ω) é uma álgebra bária, dizemos que ω é a *função peso* de A e, dado $x \in A$, $\omega(x)$ é o *peso* de x . Um *homomorfismo bário* de (A_1, ω_1) em (A_2, ω_2) é definido como sendo um homomorfismo de A_1 em A_2 que preserva o peso dos elementos, ou seja, um homomorfismo $f: A_1 \rightarrow A_2$ é bário se $\omega_2 \circ f = \omega_1$. Analogamente, definimos monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos báricos. As *subálgebras báricas* de (A, ω) são as subálgebras de A não contidas em $\ker \omega$ e os *ideais báricos* de (A, ω) são os ideais de A contidos em $\ker \omega$. Esses conceitos podem ser encontrados em [34], assim como as demonstrações das proposições citadas anteriormente. A mesma referência serve para a maioria dos temas abordados na próxima seção.

0.2 Álgebras de Bernstein

Uma álgebra bária comutativa (A, ω) é denominada *álgebra de Bernstein* se todo elemento $x \in A$ verifica a identidade

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2. \quad (1)$$

Observação 0.1 Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, então ω é o único caracter de A , já que os elementos de $\ker \omega$ verificam $(x^2)^2 = 0$. Dessa maneira, não há ambigüidade ao omitirmos o homomorfismo ω e nos referirmos apenas à álgebra de Bernstein A .

É conhecido que álgebras de Bernstein têm idempotentes, isto é, elementos $e \in A$, não nulos, tais que $e^2 = e$. Para cada idempotente $e \in A$, a álgebra tem decomposição

$$A = Fe \oplus U_e \oplus V_e, \quad (2)$$

onde $U_e = \{x \in \ker \omega : 2ex = x\}$ e $V_e = \{x \in \ker \omega : ex = 0\}$. A decomposição dada em (2) é denominada *decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e* . Valem as seguintes inclusões

$$U_e^2 \subseteq V_e; \quad V_e^2 \subseteq U_e; \quad U_e V_e \subseteq U_e, \quad (3)$$

bem como as identidades

$$u^3 = (u^2)^2 = (uv)^2 = u(uv) = uv^2 = 0, \quad (4)$$

para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$.

As identidades

$$u_1^2 u_2 = -2u_1(u_1 u_2); \quad u_1(u_2 u_3) + u_2(u_3 u_1) + u_3(u_1 u_2) = 0; \quad (5)$$

$$(u_1u_2)u_2^2 = 0; (u_1u_2)(u_3u_4) + (u_1u_3)(u_2u_4) = 0; \quad (6)$$

$$(uv_1)(uv_2) = 0; (u_1v)(u_2v) = 0; (u_1v_1)(u_2v_2) + (u_1v_2)(u_2v_1) = 0; \quad (7)$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0; u(v_1v_2) = 0, \quad (8)$$

que são as linearizações das identidades dadas em (4), também são verificadas em todas as álgebras de Bernstein. A segunda identidade de (5) é denominada *identidade de Jacobi*.

O conjunto dos idempotentes não nulos, denotado por $\text{Ip}(A)$, é formado pelos elementos da forma x^2 , onde $\omega(x) = 1$. Decompondo cada idempotente de acordo com a decomposição dada em (2), prova-se que $\text{Ip}(A) = \{e + u + u^2 : u \in U_e\}$. Se $f = e + u_0 + u_0^2$ é outro idempotente de A , temos que $U_f = \{u + 2u_0u : u \in U_e\}$ e $V_f = \{v - 2u_0v - 2u_0^2v : v \in V_e\}$. Além disso, $\sigma: U_e \rightarrow U_f$ e $\tau: V_e \rightarrow V_f$ dadas por $\sigma(u) = u + 2u_0u$ e $\tau(v) = v - 2u_0v - 2u_0^2v$, para todo $u \in U$ e $v \in V$, são isomorfismos lineares. O par $(1 + \dim U_e, \dim V_e)$, que independe do idempotente $e \in \text{Ip}(A)$, é denominado *tipo* de A . A álgebra de tipo $(1 + r, 0)$ é denominada *álgebra gamética para herança mendeliana simples com r alelos*.

Observação 0.2 Quando estiver claro no contexto qual o idempotente usado na decomposição de Peirce de A , omitiremos o índice dos subespaços, escrevendo apenas U e V .

Uma álgebra A é dita *nuclear* se $A^2 = A$. Dada uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, usando as relações em (3), obtemos que $A^2 = Fe \oplus U \oplus U^2$. Assim, A^2 é uma álgebra nuclear, qualquer que seja a álgebra de Bernstein A . Além disso, $A = Fe \oplus U \oplus V$ é nuclear se e somente se $V = U^2$. Lembramos que uma álgebra A , não necessariamente associativa, é *nilpotente* se existe um inteiro positivo n tal que qualquer produto de pelo menos n elementos de A é nulo. O menor inteiro que verifica essa propriedade é denominado *índice de nilpotência* de A . Para álgebras de Bernstein nucleares temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [27]:

Teorema 0.1 (Teorema de Grishkov) *Toda álgebra de Bernstein nuclear de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

Os subespaços $U_eV_e + V_e^2$ e U_e^2 têm dimensões invariantes sob mudança de idempotentes. Assim, as condições $U_eV_e + V_e^2 = 0$ e $U_e^2 = 0$ independem do idempotente escolhido. Álgebras de Bernstein que satisfazem $U_eV_e + V_e^2 = 0$ são denominadas *álgebras normais* e aquelas que verificam $U_e^2 = 0$ são chamadas *álgebras excepcionais*.

Proposição 0.3 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r \leq 1$ ou $s \leq 1$ então A é normal ou excepcional. Em particular, toda álgebra de Bernstein de dimensão menor ou igual a 4 é normal ou excepcional.*

Se (A, ω) é uma álgebra bária e $I \subseteq A$ é um ideal bário, $\bar{\omega}: A/I \rightarrow F$ dada por $\bar{\omega}(\bar{a}) = \omega(a)$, para todo $\bar{a} \in \bar{A}$, está bem definida e é um homomorfismo, pois $I \subseteq \ker \omega$. Além disso, se $\omega(a) \neq 0$ então $\bar{\omega}(\bar{a}) \neq 0$. Assim, $(A/I, \bar{\omega})$ é uma álgebra bária que, naturalmente, chama-se *álgebra quociente* de A por I .

Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, se $I \subseteq A$ é um ideal bário então $\bar{A} = A/I$ é ainda uma álgebra de Bernstein e a decomposição de Peirce de $\bar{A}$, com relação ao idempotente $\bar{e} = e + I$, é $\bar{A} = F\bar{e} \oplus \bar{U} \oplus \bar{V}$, onde $\bar{U} = \{\bar{u} = u + I : u \in U\}$ e $\bar{V} = \{\bar{v} = v + I : v \in V\}$. Observa-se que, devido ao idempotente e , todo ideal bário $I \subseteq A$ tem decomposição $I = (I \cap U) \oplus (I \cap V)$.

Para álgebras não associativas em geral, nem sempre produto de ideais é um ideal. O mesmo ocorre com as álgebras de Bernstein. Em [36], os autores fazem um estudo sobre produto de ideais em uma álgebra de Bernstein A e provam, entre outros fatos, que as potências principais do ideal N são ideais de A . Tais potências são definidas, recursivamente, da seguinte maneira: $N^1 = N$ e $N^{k+1} = N^k N$, para $k \geq 1$.

0.2.1 Álgebras de Bernstein Jordan

Uma subclasse importante das álgebras de Bernstein são as *álgebras de Bernstein Jordan*. Recebem este nome as álgebras de Bernstein que também são álgebras de Jordan, ou seja, além de (1), seus elementos satisfazem a identidade $x(x^2y) = x^2(xy)$. Existem várias caracterizações para essas álgebras que são bastante úteis.

Teorema 0.2 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. São equivalentes:*

- (i) A é de Jordan;
- (ii) existe $e \in \text{Ip}(A)$ tal que $V_e^2 = 0$ e $v(vU_e) = 0$, para todo $v \in V_e$;
- (iii) para todo $e \in \text{Ip}(A)$, temos $V_e^2 = 0$ e $v(vU_e) = 0$, qualquer que seja $v \in V_e$;
- (iv) $V_e^2 = 0$, para todo $e \in \text{Ip}(A)$;
- (v) os elementos de A verificam a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$;

(vi) A é de potências associativas.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9] e em [33].

As álgebras de Bernstein Jordan aparecem como imagem homomorfa de álgebras de Bernstein, de acordo com o que segue. Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein arbitrária. O conjunto $L = \{u \in U_e : uU_e = 0\}$ é um ideal de A . Prova-se que

$$L = \bigcap_{e \in \text{Ip}(A)} U_e.$$

Portanto, L não depende do idempotente. Além disso, usando as linearizações das identidades dadas em (4), verifica-se que, para todo $u \in U$ e $v \in V$, os elementos $(uv)v$ e v^2 estão em L . Dessa maneira, pelo teorema anterior, o quociente A/L é uma álgebra de Bernstein Jordan.

O Teorema 4.3 de [39] diz que toda álgebra de Jordan nil de dimensão finita sobre um corpo de característica distinta de 2 é nilpotente. Dessa maneira, temos:

Teorema 0.3 *Toda álgebra de Bernstein Jordan de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

Esse resultado será bastante usado no trabalho.

0.2.2 Álgebras de Bernstein excepcionais associadas a grafos

Seja $G = (X(G), E(G))$ um grafo simples sem loops, onde $X(G) = \{x_1, \dots, x_r\}$ denota o conjunto de vértices e $E(G) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, o conjunto das arestas de G . O grau de $x \in X(G)$, denotado por ∂x , é o número de arestas de G que incidem em x . Para cada $\alpha_k \in E(G)$, denotamos α_k por v_{ij} , se α_k é uma aresta ligando os vértices x_i e x_j . Assim, $v_{ij} = v_{ji}$, pelo fato de G ser simples.

Sejam U e V os F -espaços vetoriais gerados livremente por $X(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Seja e um símbolo e $A(G)$ o espaço vetorial

$$A(G) = Fe \oplus U \oplus V \tag{9}$$

munido da seguinte multiplicação comutativa:

$$e^2 = e; \quad ex_i = \frac{1}{2}x_i \quad (i = 1, \dots, r); \quad x_i v_{ij} = x_j, \text{ para cada } v_{ij} \in E(G);$$

outros produtos nulos.

Com essa operação, $A(G)$ é uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, s)$. Observamos que e é um idempotente de peso 1 e a decomposição (9) é a decomposição de Peirce de $A(G)$ relativa ao idempotente e . Dizemos que $A(G)$ é a *álgebra de Bernstein associada ao grafo G* . Essas álgebras foram definidas e estudadas em [13]. O processo descrito acima nos permite construir exemplos de álgebras de Bernstein excepcionais a partir de grafos. É claro que grafos isomorfos dão origem a álgebras isomorfas. A recíproca também é verdadeira, embora não seja evidente. A demonstração deste fato está feita em [16].

0.3 Join de álgebras báricas e decomponibilidade

O conceito de decomponibilidade de uma álgebra bárica foi introduzida e estudada em [10] e [11]. Paralelamente, em [9], o mesmo foi feito para álgebras de Bernstein.

Uma álgebra bárica (A, ω) com idempotente de peso 1 é *decomponível* se existem ideais bilaterais não triviais N_1 e N_2 de A tais que $\ker \omega = N_1 \oplus N_2$. Caso contrário, A é *indecomponível*. Existe um método para obter álgebras decomponíveis, através do join de álgebras báricas. Dadas duas álgebras báricas (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) com idempotentes e_1 e e_2 , respectivamente, o *join* de (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) é a subálgebra de $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1; a_2 \in A_2\}$ formada por elementos de mesmo peso: $\omega_1(a_1) = \omega_2(a_2)$. Essa subálgebra é, na categoria das álgebras báricas, o produto direto de (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) . Essa álgebra é denotada por $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ e o idempotente (e_1, e_2) , por $e_1 \vee e_2$.

Álgebras báricas que verificam as condições de cadeia, como definidas em [10], em particular, as de dimensão finita, satisfazem o Teorema de Krull Schmidt para álgebras báricas, que garante uma decomposição (única, a menos de isomorfismos) da álgebra como join de um número finito de álgebras báricas indecomponíveis. Em [11], os autores provam que as álgebras de Bernstein formam uma *subclasse fechada* de álgebras báricas, isto é, $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ é de Bernstein se e somente se (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são de Bernstein. Assim, pelo Teorema de Krull Schmidt, toda álgebra de Bernstein de dimensão finita é join de um número finito de álgebras de Bernstein indecomponíveis. Portanto, as álgebras de Bernstein indecomponíveis exercem um papel importante na teoria. Entretanto, nossa experiência tem mostrado que o cálculo de álgebras de Bernstein indecomponíveis é complexo. Por exemplo, cada grafo conexo simples dá origem a uma álgebra de Bernstein indecomponível, conforme provado em [13].

0.4 Álgebras associativas de dimensão finita

Usaremos neste trabalho, alguns resultados básicos da teoria das álgebras associativas de dimensão finita que serão citados a seguir. Todas as álgebras consideradas nesta seção serão associativas.

Em relação à existência de idempotentes, temos:

Teorema 0.4 ([2], Teorema 8) *Toda álgebra de dimensão finita não nilpotente possui um elemento idempotente.*

Seja A uma álgebra. Para todo idempotente $e \in A$, temos uma decomposição da álgebra em soma de subespaços $A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$, onde

$$A_{ij} = \{x_{ij} \in A : ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}\},$$

para $i, j = 0, 1$. Essa decomposição é denominada *decomposição de Peirce da álgebra associativa A relativa ao idempotente e* . Se a álgebra A tem unidade então $A_{ij} = e_i A e_j$, onde $e_1 = e$ e $e_0 = 1 - e$. Observamos que os subespaços da decomposição de Peirce satisfazem $A_{ij}A_{kl} \subseteq \delta_{jk}A_{il}$, para $i, j, k, l = 0, 1$. Em particular, A_{11} e A_{00} são subálgebras de A .

Outro conceito importante é o de radical. Denotado por $J(A)$, o *radical de Jacobson* de A é a intersecção de todos os seus ideais à direita maximais. O radical de A tem a propriedade de que $A/J(A)$ é uma álgebra semisimples e $J(A/J(A)) = 0$. No caso das álgebras de dimensão finita, temos os seguintes resultados:

Proposição 0.4 ([18], Corolário 3.1.8) *O radical de uma álgebra de dimensão finita é a intersecção de todos os seus ideais (bilaterais) maximais.*

Usando o Teorema 1.3.1 de [28], que diz que o radical de um anel artiniano é nilpotente e sabendo que $J(A)$ contém todos os ideais nil de A , temos:

Proposição 0.5 *O radical de uma álgebra de dimensão finita A é um ideal nilpotente que contém todos os ideais nilpotentes de A .*

Observação 0.3 Devido aos resultados acima, temos que todo ideal nil numa álgebra de dimensão finita é nilpotente.

Capítulo 1

A álgebra de multiplicações

Dada uma álgebra arbitrária A sobre o corpo F , denotamos por $\text{End}(A)$ a álgebra (associativa) dos operadores lineares de A . Para cada $x \in A$, as aplicações $L_x: A \rightarrow A$ e $R_x: A \rightarrow A$ definidas por $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, para todo $a \in A$, são elementos de $\text{End}(A)$. A subálgebra de $\text{End}(A)$ gerada por $\{L_x, R_x : x \in A\}$ é denominada *álgebra de multiplicações* de A e é denotada por $M(A)$. Sejam $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ e $F[X]$ a álgebra associativa livre não comutativa gerada por X sobre o corpo F . Denotando por $XF[X]$ o ideal de $F[X]$ gerado pelo conjunto X , temos que

$$M(A) = \{p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k}) : p \in XF[X], S_{x_i} = L_{x_i} \text{ ou } R_{x_i}; x_i \in A\}.$$

O estudo das álgebras de multiplicações de álgebras não associativas tem sido feito por diversos autores. Em [3], [19], [29] e [38], encontram-se resultados gerais obtidos para essas álgebras.

1.1 Propriedades gerais e notações

Seja A uma álgebra sobre F . Dado um subconjunto $S \subseteq A$, o subespaço de A gerado por S é denotado por $\langle S \rangle$ e o ideal de A gerado por S é $\widehat{S}$. Para cada subálgebra B de A , B^* é a subálgebra de $M(A)$ gerada pelo conjunto $\{L_x, R_x : x \in B\}$. Se $\mathcal{I}$ é um subconjunto de $M(A)$ e S é um subconjunto de A , $\mathcal{I}(S)$ representa o subespaço de A gerado por $\{\tau(a) : \tau \in \mathcal{I}, a \in S\}$. Relacionamos ideais de A e $M(A)$ da seguinte maneira: dado um ideal I de A , o conjunto $(I : A) = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A) \subseteq I\}$ é um ideal de $M(A)$. Observe que o ideal $\widehat{I}^*$ está contido em $(I : A)$. Por outro lado, para cada ideal $\mathcal{J} \subseteq M(A)$, o subespaço $\mathcal{J}(A)$ é ideal de A .

Os dois próximos resultados nos serão úteis ao longo do trabalho (veja [19, Lema 2.4]):

Proposição 1.1 *Sejam A e B álgebras sobre F e $\varphi: A \rightarrow B$ um epimorfismo. Então φ induz um epimorfismo $\varphi': M(A) \rightarrow M(B)$ que satisfaz $\varphi'(L_a) = L_{\varphi(a)}$ e $\varphi'(R_a) = R_{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varphi': M(A) \rightarrow M(B)$ dada por

$$\varphi'\left(p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k})\right) = p(S_{\varphi(x_1)}, \dots, S_{\varphi(x_k)}),$$

para todo $p \in XF[X]$ e $x_i \in A$. Temos que φ' está bem definida: seja $\Phi = p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k})$ um elemento em $M(A)$ que representa o operador nulo. Vamos mostrar que o operador $p(S_{\varphi(x_1)}, \dots, S_{\varphi(x_k)})$ é nulo. Para todo $b \in A$, seja $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$. Então $\varphi'(\Phi)(b) = \varphi'(\Phi)(\varphi(a)) = p(S_{\varphi(x_1)}, \dots, S_{\varphi(x_k)})(\varphi(a)) = \varphi(p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k})(a)) = \varphi(\Phi(a)) = 0$. Portanto, $\varphi'(\Phi) = 0$. A sobrejetividade de φ' é garantida pela sobrejetividade de φ . $\square$

Proposição 1.2 *Para todo ideal $I \subseteq A$, tem-se $M(A/I) \cong M(A)/(I : A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\pi: A \rightarrow A/I$ a projeção canônica. Pela proposição anterior, existe um epimorfismo $\Pi: M(A) \rightarrow M(A/I)$. Temos ainda que $\sigma \in \ker \Pi$ se e somente se $\text{Im } \sigma \subseteq I$, ou seja, $\ker \Pi = (I : A)$. Assim, $M(A)/(I : A) \cong M(A/I)$. $\square$

No caso particular em que a álgebra é o próprio corpo F , temos $F \cong \text{End}(F) \cong M(F)$. De fato, o homomorfismo $\alpha \in F \mapsto L_\alpha \in M(F) \subseteq \text{End}(F)$ tem como inversa a aplicação $f \in \text{End } F \mapsto f(1) \in F$. Dessa maneira, temos:

Proposição 1.3 *Dada uma álgebra bária (A, ω) sobre o corpo F , existe (pelo menos) um homomorfismo não nulo de $M(A)$ em F .*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $\omega: A \rightarrow F$ é um homomorfismo sobrejetor. Assim, pela Proposição 1.1, existe um epimorfismo $\hat{\omega}: M(A) \rightarrow M(F)$ tal que $\hat{\omega}(L_x) = L_{\omega(x)}$ e $\hat{\omega}(R_x) = R_{\omega(x)}$, para todo $x \in A$. Usando o isomorfismo $M(F) \cong F$, obtemos que a função $\tilde{\omega}: M(A) \rightarrow F$ dada por $\tilde{\omega}(L_x) = \omega(x) = \tilde{\omega}(R_x)$ está bem definida e é um epimorfismo. $\square$

A proposição anterior nos diz que a álgebra de multiplicações de uma álgebra bária é uma álgebra bária. Diremos que o homomorfismo $\tilde{\omega}$ obtido na proposição anterior é a *função peso* de $M(A)$ induzida por ω . Veremos agora como se relacionam $\ker \omega$ e $\ker \tilde{\omega}$, quando A é uma álgebra comutativa.

Notação: Seja $N = \ker \omega$. Denotaremos o ideal $\widehat{N^*}$ por $\tilde{N}$.

Corolário *Sejam (A, ω) uma álgebra bária e $N = \ker \omega$. Se $\tilde{\omega}$ é a função peso de $M(A)$ induzida por ω então $\ker \tilde{\omega} = (N : A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 1.2, temos que $M(A)/(N : A) \cong M(A/N) \cong F \cong M(A)/\ker \tilde{\omega}$. Além disso, $\ker \tilde{\omega} \subseteq (N : A)$. De fato, seja $\sigma = p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k}) \in \ker \tilde{\omega}$. Para qualquer $x \in A$, temos $\omega(\sigma(x)) = \omega(p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k})(x)) = p(S_{\omega(x_1)}, \dots, S_{\omega(x_k)})\omega(x) = \tilde{\omega}(p(S_{x_1}, \dots, S_{x_k}))\omega(x) = 0$. Logo, $\ker \tilde{\omega} = (N : A)$. $\square$

Seja (A, ω) uma álgebra bária comutativa. Dessa maneira, $M(A)$ é a álgebra gerada por $\{L_x : x \in A\}$. Se $c \in A$ é um elemento de peso 1, usando a decomposição $A = Fc \oplus N$, temos que, para todo $x \in A$, existe $y \in N$ tal que $L_x = \omega(x)L_c + L_y$. Logo,

$$L_{x_1} \dots L_{x_k} = \omega(x_1) \dots \omega(x_k)L_c^k + \theta, \text{ onde } \theta \in \tilde{N}. \quad (1.1)$$

Como os elementos de $M(A)$ são somas de operadores da forma (1.1), obtemos a seguinte decomposição:

$$M(A) = \langle L_c, L_c^2, \dots, L_c^k, \dots \rangle + \tilde{N}, \quad (1.2)$$

ou ainda, mudando os geradores do subespaço gerado pelos L_c^k ,

$$M(A) = FL_c + \langle L_c^2 - L_c, \dots, L_c^k - L_c, \dots \rangle + \tilde{N}. \quad (1.3)$$

Temos que $L_c \notin (N : A)$ e $\langle L_c^2 - L_c, \dots, L_c^k - L_c, \dots \rangle + \tilde{N} \subseteq (N : A)$ é um subespaço de codimensão no máximo 1. Portanto, obtemos que

$$(N : A) = \langle L_c^2 - L_c, \dots, L_c^k - L_c, \dots \rangle + \tilde{N}. \quad (1.4)$$

1.2 A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein

Vários métodos têm sido usados para que possamos conhecer melhor as álgebras de Bernstein. Um deles é o estudo de $M(A)$ quando A é Bernstein. Esse estudo foi iniciado por R. Costa e A. Suazo, em [14]. Em [15] encontram-se outros resultados a respeito dessas álgebras. Muitos dos resultados obtidos nesses dois artigos serão usados neste trabalho. Eles serão citados de acordo com a necessidade. Algumas demonstrações foram modificadas e, portanto, serão feitas aqui. As demais, serão omitidas.

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$ relativa ao idempotente $e \in A$. A linearização da identidade (1) nos fornece uma relação de dependência linear das potências do operador L_e :

Lema 1.1 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Então, para todo idempotente $e \in A$, tem-se $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: A primeira linearização de (1) é

$$2(xy)x^2 - \omega(xy)x^2 - \omega(x)^2xy = 0.$$

Fazendo $x = e$, obtemos $2e(ey) - \omega(y)e - ey = 0$, para todo $y \in A$. Substituindo y por ye : $2e(e(ey)) - \omega(y)e - e(ey) = 0$. Subtraindo da equação anterior, resulta que $2e(e(ey)) - 3e(ey) + ey = 0$, ou seja, $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$. $\square$

Em grande parte deste trabalho, vamos considerar a álgebra básica $(M(A), \tilde{\omega})$, onde A é Bernstein e $\tilde{\omega}$ é a função peso induzida por ω . A existência de outros caracteres de $M(A)$ será tratada na Seção 4.3.2.

Pelo Lema 1.1, temos que a subálgebra gerada por L_e tem dimensão 2. Além disso, os operadores $2L_e^2 - L_e$, de peso 1, e $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ são idempotentes, pois são projeções sobre os subespaços Fe e U , respectivamente. Por (1.4), temos a seguinte decomposição para $M(A)$:

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus (N : A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus (F(4L_e - 4L_e^2) + \tilde{N}). \quad (1.5)$$

Veremos adiante que nem sempre vale $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$, pois o idempotente $4L_e - 4L_e^2$ pode pertencer a $\tilde{N}$. O Corolário da Proposição 2.6, no Capítulo 2, identificará em quais álgebras isso pode ocorrer.

1.3 Decomposição de Peirce

A partir dos idempotentes encontrados na seção anterior, faremos a decomposição de Peirce de $M(A)$. O próximo lema nos fornece algumas propriedades de decomposições de subálgebras de operadores lineares obtidas por projeções, que serão usadas para dar uma descrição geométrica dos subespaços da decomposição de Peirce de $M(A)$.

Lema 1.2 *Dados um espaço vetorial W e uma subálgebra S de $\text{End } W$, temos:*

(i) Se $\theta \in \text{End } W$ é um idempotente tal que $S\theta \subseteq S$ então $\Phi_1: S \rightarrow S$ dada por $\Phi_1(\sigma) = \sigma\theta$, para todo $\sigma \in S$, é uma projeção e

$$\text{Im } \Phi_1 = \{\sigma \in S : \sigma\theta = \sigma\} = \{\sigma \in S : \sigma(\ker \theta) = 0\};$$

$$\ker \Phi_1 = \{\sigma \in S : \sigma\theta = 0\} = \{\sigma \in S : \sigma(\text{Im } \theta) = 0\}.$$

Além disso, $\text{Im } \Phi_1$ e $\ker \Phi_1$ são ideais à esquerda de S .

(ii) Se $\theta \in \text{End } W$ é um idempotente tal que $\theta S \subseteq S$ então $\Phi_2: S \rightarrow S$ dada por $\Phi_2(\sigma) = \theta\sigma$, para todo $\sigma \in S$, é uma projeção e

$$\text{Im } \Phi_2 = \{\sigma \in S : \theta\sigma = \sigma\} = \{\sigma \in S : \sigma(W) \subseteq \text{Im } \theta\};$$

$$\ker \Phi_2 = \{\sigma \in S : \theta\sigma = 0\} = \{\sigma \in S : \sigma(W) \subseteq \ker \theta\}.$$

Além disso, $\text{Im } \Phi_2$ e $\ker \Phi_2$ são ideais à direita de S .

DEMONSTRAÇÃO: Se $\theta \in \text{End } W$ é idempotente então $W = \ker \theta \oplus \text{Im } \theta$ e, como $\text{End } W$ é uma álgebra associativa, Φ_1 e Φ_2 são projeções. Pela decomposição de W , um elemento $\sigma \in S$ verifica $\sigma\theta = \sigma$ se e somente se, para quaisquer $x \in \ker \theta$ e $y \in \text{Im } \theta$, $\sigma\theta(x + y) = \sigma(x + y)$, ou seja, $\sigma(y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ e, portanto, $\sigma(x) = 0$. Dessa maneira, $\text{Im } \Phi_1 = \{\sigma \in S : \sigma\theta = \sigma\} = \{\sigma \in S : \sigma(\ker \theta) = 0\}$. Observamos, ainda, que se $\sigma \in \text{Im } \Phi_1$ e $\tau \in S$ então $(\tau\sigma)(\ker \theta) = \tau(\sigma(\ker \theta)) = 0$ e, portanto, $\text{Im } \Phi_1$ é ideal à esquerda de S . De modo análogo, verificam-se as outras afirmações. $\square$

Usaremos o lema anterior no ideal $(N : A)$ para obter a primeira decomposição de Peirce de $M(A)$.

Proposição 1.4 Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, sua álgebra de multiplicações tem a seguinte decomposição

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}, \quad (1.6)$$

onde $\tilde{U} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = \sigma\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(N) = 0\}$ e $\tilde{V} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = 0\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(e) = 0\}$. Além disso, valem as seguintes relações:

$$\tilde{U}^2 = 0; \tilde{U}\tilde{V} = 0; \tilde{V}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}; \tilde{V}^2 \subseteq \tilde{V}. \quad (1.7)$$

Em particular, $\tilde{U}$ é ideal bilateral de $M(A)$ de quadrado nulo e $\tilde{V}$ é ideal à esquerda de $M(A)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que $2L_e^2 - L_e$ é a projeção sobre Fe com núcleo N e usar o Lema 1.2 (i) na subálgebra $(N : A)$. Observamos que $(N : A)(2L_e^2 - L_e) \subseteq (N : A)$, pois $(N : A)$ é ideal de $M(A)$. Os subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ são, respectivamente, a imagem e o núcleo de Φ_1 . Como os elementos de $(N : A)$ têm imagem contida em N , obtemos $\tilde{U}(N : A) = 0$, ou seja, $\tilde{U}^2 = 0$ e $\tilde{U}\tilde{V} = 0$. As inclusões $\tilde{V}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$ e $\tilde{V}^2 \subseteq \tilde{V}$ valem pelo fato de $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ serem ideais à esquerda de $(N : A)$. $\square$

Observação 1.1 A decomposição dada em (1.6) depende do idempotente $e \in \text{Ip}(A)$ fixado. Quando houver no contexto mais de um idempotente envolvido, colocaremos índices nos subespaços de $M(A)$, escrevendo $\tilde{U}_e$ e $\tilde{V}_e$, indicando qual é o idempotente usado naquela decomposição.

Observação 1.2 Os subespaços da decomposição (1.6) coincidem, respectivamente, com os subespaços $M(A)_{11}$, $M(A)_{10}$ e $M(A)_{00}$ da decomposição de Peirce de $M(A)$ associada ao idempotente $2L_e^2 - L_e$. Observamos também que $M(A)_{01} = 0$.

Observação 1.3 Como $\tilde{U} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(N) = 0\}$ não depende do idempotente $e \in A$, esse subespaço é invariante sob mudança de idempotentes em A . Em particular, $\dim \tilde{U}$ e $\dim \tilde{V}$ também são invariantes. O subespaço $\tilde{V}$, no entanto, apesar de ter dimensão invariante, comporta-se de maneira diferente sob mudança de idempotentes:

Proposição 1.5 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U}_e \oplus \tilde{V}_e$ sua álgebra de multiplicações. Então $\bigcap_{e \in \text{Ip}(A)} \tilde{V}_e = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A^2) = 0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja σ um elemento na intersecção dos $\tilde{V}_e$, $e \in \text{Ip}(A)$. Para cada $u \in U_e$, temos que $\sigma(e + u + u^2) = 0$, pois $\sigma \in \tilde{V}_f$, onde $f = e + u + u^2$. Como $\sigma(e) = 0$, resulta que $\sigma(u + u^2) = 0$. Tomando agora o elemento $-u \in U_e$, obtemos também que $\sigma(-u + u^2) = 0$, ou seja, $\sigma(u) = 0 = \sigma(u^2)$, para todo $u \in U_e$. Portanto, $\sigma(A^2) = \sigma(Fe \oplus U_e \oplus U_e^2) = 0$. Reciprocamente, se $\sigma(A^2) = 0$ então $\sigma(e + u + u^2) = 0$, para todo $u \in U$, o que implica que $\sigma \in \bigcap_{e \in \text{Ip}(A)} \tilde{V}_e$. $\square$

Corolário *Se A é uma álgebra de Bernstein nuclear então $\bigcap_{e \in \text{Ip}(A)} \tilde{V}_e = 0$.* $\square$

Vimos na Proposição 1.4 que os operadores em $\tilde{U}$ têm posto ≤ 1 , pois só dependem do valor que assumem no idempotente e . Como os elementos de $M(A)$ têm imagem contida

em A^2 e os elementos de $\tilde{U}$ têm imagem em N , resulta que se $\sigma \in \tilde{U}$ então $\text{Im } \sigma = \langle \sigma(e) \rangle \subseteq A^2 \cap N = U \oplus U^2$. A próxima proposição mostra que todo elemento de $U \oplus U^2$ é imagem de e por algum operador em $\tilde{U}$; em outras palavras, para cada $x \in U \oplus U^2$, o operador linear $\psi_x \in \text{End}(A)$ definido por $\psi_x(e) = x$ e $\psi_x(N) = 0$ é um elemento de $M(A)$.

Proposição 1.6 *Para toda álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, temos que $\tilde{U} = \{\psi_x : x \in U \oplus U^2\}$, onde $\psi_x(e) = x$ e $\psi_x(N) = 0$. Além disso, a aplicação $\Psi: U \oplus U^2 \rightarrow \tilde{U}$ dada por $x \mapsto \psi_x$ é um isomorfismo de espaços vetoriais e, em particular, $\dim \tilde{U} = \dim U + \dim U^2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Em [14], prova-se que

$$\psi_u = 2L_e L_u + 2L_u L_e - L_u$$

$$\psi_{ux} = 2L_{ux} L_e + L_u L_x + L_x L_u,$$

para todo $u, x \in U$. □

Obtemos, assim, uma descrição completa dos elementos de $\tilde{U}$. Por outro lado, a estrutura do subespaço $\tilde{V}$ é mais complicada. Em compensação, reflete muitas propriedades da álgebra de Bernstein A , como veremos ao longo do trabalho.

Já vimos que $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ é idempotente, pois é projeção sobre o subespaço U , com núcleo $Fe \oplus V$. Observamos que $4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{V}$, pois $(4L_e - 4L_e^2)(e) = 0$. Assim, temos uma nova decomposição de Peirce, agora restrita à subálgebra $\tilde{V}$, relativa a esse idempotente: $\tilde{V} = \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$, onde

$$\tilde{V}_{ij} = \{\sigma_{ij} \in \tilde{V} : \sigma_{ij}(4L_e - 4L_e^2) = j\sigma_{ij} \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma_{ij} = i\sigma_{ij}\}. \quad (1.8)$$

Observamos que os elementos de $\tilde{V}$ podem ser considerados como operadores lineares de N , já que $\sigma(e) = 0$ e $\text{Im } \sigma \subseteq N$, para todo $\sigma \in \tilde{V}$. Assim, combinando as partes (i) e (ii) do Lema 1.2, para $\tilde{V}$ (identificada como subálgebra de $\text{End } N$) e $4L_e - 4L_e^2$, obtemos:

Proposição 1.7 *Seja $\sigma \in \tilde{V}$. Então*

$$\begin{aligned} \sigma \in \tilde{V}_{11} &\Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0; \\ \sigma \in \tilde{V}_{10} &\Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq U; \\ \sigma \in \tilde{V}_{01} &\Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq V \text{ e } \sigma(V) = 0; \\ \sigma \in \tilde{V}_{00} &\Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq V. \end{aligned}$$

□

Também para essa decomposição obtemos a invariância da dimensão dos subespaços, sob mudança de idempotentes em A . A demonstração desse fato encontra-se em [14]. Lembremos que, para todo $i, j, k, l \in \{0, 1\}$, vale

$$\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}. \quad (1.9)$$

A decomposição

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00} \quad (1.10)$$

é denominada *decomposição de Peirce completa* de $M(A)$ relativa ao idempotente e . Se $x = \alpha e + u + v$ é um elemento de A então a decomposição de L_x com respeito a (1.10) é

$$L_x = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}\psi_u + [L_x]_{11} + [L_x]_{10} + [L_x]_{01} + [L_x]_{00}, \quad (1.11)$$

onde

$$[L_x]_{11} = \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_vL_e; \quad (1.12)$$

$$[L_x]_{10} = (2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u) + (L_v - 2L_vL_e); \quad (1.13)$$

$$[L_x]_{01} = L_u - 2L_eL_u; \quad (1.14)$$

$$[L_x]_{00} = 0. \quad (1.15)$$

Para constatar a igualdade em (1.11), basta calcular ambos os lados em elementos genéricos de A . As parcelas $\alpha(2L_e^2 - L_e)$ e $\frac{1}{2}\psi_u$ estão, respectivamente, em $F(2L_e^2 - L_e)$ e $\tilde{U}$. A verificação de que $[L_x]_{ij} \in \tilde{V}_{ij}$, para $i, j = 0, 1$, pode ser feita usando a Proposição 1.7: cada $[L_x]_{ij} \in \tilde{V}$ pois esses operadores se anulam em e . Para $u' \in U$ e $v' \in V$, temos: $[L_x]_{11}(u') = \frac{1}{2}\alpha u' + u'v \in U$ e $[L_x]_{11}(v') = 0$; $[L_x]_{10}(u') = 0$ e $[L_x]_{10}(v') = uv' + vv' \in U$; $[L_x]_{01}(u') = uu' \in V$ e $[L_x]_{01}(v') = 0$. Assim, $[L_x]_{11} \in \tilde{V}_{11}$, $[L_x]_{10} \in \tilde{V}_{10}$ e $[L_x]_{01} \in \tilde{V}_{01}$.

Observação 1.4 Os elementos de $\tilde{N}^k$ têm imagem contida em N^k e se $\sigma \in \tilde{N}^k \cap \tilde{V}$ então $\text{Im } \sigma \subseteq N^{k+1}$, para todo $k \geq 1$. De fato, como N^k é ideal, para todo $k \geq 1$, e os elementos de $\tilde{N}^k$ são somas de operadores da forma $L_{x_1} \dots L_{x_t}$, com pelo menos k índices em N , temos que a imagem desses operadores está em N^k . No caso em que σ está em $\tilde{V}$, temos que $\sigma(e) = 0$, ou seja, um elemento da imagem de σ é da forma $\sigma(x)$, onde $x \in N$. Assim, os operadores em $\tilde{N}^k \cap \tilde{V}$ têm imagem contida em N^{k+1} .

A partir da decomposição dos operadores L_x e das relações dadas em (1.9), podemos verificar que $\tilde{V}_{10}$ e $\tilde{V}_{01}$ são subespaços contidos em $\tilde{N}$ e $\tilde{V}_{00} = \tilde{V}_{01}\tilde{V}_{10}$ está contido em $\tilde{N}^2$. Além disso, temos

$$\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + (\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}). \quad (1.16)$$

Como $N^2 = (UV + V^2) \oplus U^2$ e $N^3 = (U^3 + (UV)V + V^3 + U^2V) \oplus U(UV)$, usando a observação anterior, podemos melhorar o enunciado da Proposição 1.7 do seguinte modo: para todo elemento $\sigma \in \tilde{V}$, tem-se:

$$\sigma \in \tilde{V}_{11} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0; \quad (1.17)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{11} \cap \tilde{N} \Rightarrow \sigma(U) \subseteq UV + V^2 \text{ e } \sigma(V) = 0; \quad (1.18)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{10} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq UV + V^2; \quad (1.19)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{01} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U^2 \text{ e } \sigma(V) = 0; \quad (1.20)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{00} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq U(UV). \quad (1.21)$$

Dessa maneira, obtemos o seguinte resultado, que classifica as álgebras de Bernstein nas quais algum dos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ é nulo:

Teorema 1.1 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e $M(A)$ sua álgebra de multiplicações com decomposição de Peirce (1.10). Então*

- (i) $\tilde{V}_{10} = 0$ se e somente se A é normal, isto é, $UV + V^2 = 0$;
- (ii) $\tilde{V}_{01} = 0$ se e somente se A é excepcional, isto é, $U^2 = 0$;
- (iii) $\tilde{V}_{00} = 0$ se e somente se $U(UV) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

- (i) Se A é normal então, por (1.19), $\tilde{V}_{10} = 0$. Por outro lado, se A não é normal, existem $u \in U$ e $v \in V$ tais que $uv \neq 0$ ou existe $v_1 \in V$ tal que $v_1^2 \neq 0$. No primeiro caso, o operador $\sigma = 2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u \in \tilde{V}_{10}$ é não nulo, pois $\sigma(v) = uv \neq 0$. No segundo, $\tau = L_{v_1} - 2L_{v_1} L_e \in \tilde{V}_{10}$ é não nulo, já que $\tau(v_1) = v_1^2 \neq 0$.
- (ii) Suponha que A é excepcional. De (1.20) resulta que $\tilde{V}_{01} = 0$. Se A não é excepcional, existe $u \in U$ com $u^2 \neq 0$ e, assim, o operador $\theta = L_u - 2L_e L_u \in \tilde{V}_{01}$ é não nulo, pois $\theta(u) = u^2 \neq 0$.
- (iii) Temos que $\tilde{V}_{00} = 0$ se $U(UV) = 0$, devido a (1.21) e se existem $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ com $u_1(u_2v) \neq 0$ então $\sigma = (L_{u_1} - 2L_e L_{u_1})(2L_e L_{u_2} - \frac{1}{2}\psi_{u_2}) \in \tilde{V}_{00}$ verifica $\sigma(v) = u_1(u_2v) \neq 0$. Assim, $\tilde{V}_{00} = 0$ se e somente se $U(UV) = 0$. $\square$

Observação 1.5 Ressaltamos que as condições dadas nos itens (i), (ii) e (iii) do teorema anterior não dependem do idempotente $e \in A$, pois todos os subespaços citados têm dimensão invariante. A demonstração de que o subespaço $U(UV)$ tem dimensão invariante encontra-se em [15] e outras considerações e resultados sobre subespaços de dimensão invariante em álgebras de Bernstein podem ser encontrados em [17].

Quando $U \neq 0$, o operador $4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{V}_{11}$ é não nulo. Portanto, o subespaço $\tilde{V}_{11}$ é não nulo. No Capítulo 3, faremos um estudo das álgebras onde a dimensão de $\tilde{V}_{11}$ é mínima.

Descreveremos, a seguir, o anulador de $M(A)$. Denotamos por $\text{ann}M(A)_L$ e $\text{ann}M(A)_R$, os anuladores à esquerda e à direita de $M(A)$, respectivamente.

Proposição 1.8 *Sejam A uma álgebra de Bernstein e $M(A)$ sua álgebra de multiplicações. Então $\text{ann}M(A)_R = (\text{ann}A : A)$ e $\text{ann}M(A)_L = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A^2) = 0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\sigma \in (\text{ann}A : A)$ e $\tau \in M(A)$. Temos que $\tau\sigma(x) = \tau(\sigma(x)) = 0$, pois $\sigma(x) \in \text{ann}A$, para todo $x \in A$. Logo, $\sigma \in \text{ann}M(A)_R$. Por outro lado, se $\sigma \notin (\text{ann}A : A)$ então existem $x, y \in A$ tais que $\sigma(x)y \neq 0$. Daí $L_y\sigma \neq 0$, pois $(L_y\sigma)(x) = y\sigma(x) \neq 0$. Ou seja, $\sigma \notin \text{ann}_R M(A)$. Portanto, $\text{ann}M(A)_R = (\text{ann}A : A)$.

Seja agora $\sigma \in \text{ann}M(A)_L$. Então $\sigma(2L_e^2 - L_e) = 0$ e $\sigma\psi_x = 0$, para todo $x \in U \oplus U^2$. Dessa maneira, $\sigma(e) = 0 = \sigma(x)$, para todo $x \in U \oplus U^2$. Assim, $\sigma(A^2) = 0$. Além disso, como todo $\sigma \in M(A)$ tem imagem contida em A^2 , resulta que $\theta\tau = 0$, para todo $\theta \in \{\sigma \in M(A) : \sigma(A^2) = 0\}$ e qualquer $\tau \in M(A)$. Portanto, $\text{ann}M(A)_L = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A^2) = 0\}$. $\square$

Como $\text{ann}M(A) = \text{ann}M(A)_R \cap \text{ann}M(A)_L$, temos:

Corolário 1 *Se A é nuclear ou $\text{ann}A = 0$ então $\text{ann}M(A) = 0$.* $\square$

Observação 1.6 Usando a caracterização dos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ dada na Proposição 1.7, resulta que $\text{ann}M(A)_R \subseteq \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$ e $\text{ann}M(A)_L \subseteq \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{00}$. Assim, $\text{ann}M(A) \subseteq \tilde{V}_{00}$.

Em vista da observação anterior e da parte (iii) do Teorema 1.1, temos:

Corolário 2 *Se A é uma álgebra de Bernstein com $U(UV) = 0$ então $\text{ann}M(A) = 0$.* $\square$

1.4 $M(A)$ nas álgebras normais

Através do Teorema 1.1 pudemos caracterizar as álgebras normais pela dimensão do subespaço $\tilde{V}_{10}$ da decomposição de Peirce de $M(A)$. O Corolário da Proposição 1.9 a seguir descreve os elementos de $M(A)$, para estas álgebras.

Lema 1.3 *O conjunto $\{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$ é um subespaço vetorial de $\tilde{V}_{01}$ e sua dimensão coincide com a dimensão de U/L . Em particular, a dimensão desse subespaço é um invariante de A e $\dim \tilde{V}_{01} \geq \dim U - \dim L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Considere a aplicação linear $u \in U \mapsto L_u - 2L_e L_u \in \tilde{V}_{01}$. Pela Proposição 1.7, $L_u - 2L_e L_u = 0$ se e somente se $(L_u - 2L_e L_u)(U) = 0$. Assim, o núcleo da aplicação dada é $L = \{u \in U : uU = 0\}$. Dessa maneira, a imagem dessa aplicação, que é o conjunto $\{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$, tem dimensão igual a $\dim U/L$. $\square$

Lema 1.4 *Para todo $u \in U$ e $v \in V$, vale*

$$2(L_u - 2L_e L_u)(L_v L_e) + (L_{uv} - 2L_e L_{uv}) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: Observamos, inicialmente, que $L_u - 2L_e L_u \in \tilde{V}_{01}$ e $2L_v L_e \in \tilde{V}_{11}$. Dessa maneira, a composta desses operadores é um elemento de $\tilde{V}_{01}$. Portanto, basta calcular o valor desse operador em elementos de U ; e, para $u' \in U$, temos $(L_u - 2L_e L_u)(2L_v L_e)(u') = u(u'v) = -u'(uv) = -(L_{uv} - 2L_e L_{uv})(u')$. Consequentemente, $2(L_u - 2L_e L_u)(L_v L_e) + (L_{uv} - 2L_e L_{uv}) = 0$. $\square$

Podemos agora descrever o subespaço $\tilde{V}_{01}$ na classe de álgebras de Bernstein que satisfazem $U(UV) = 0$.

Proposição 1.9 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein com $U(UV) = 0$ então $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$ e, portanto, $\dim \tilde{V}_{01} = \dim U - \dim L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta mostrar que, para todo $k \geq 1$ e $x_1, \dots, x_k \in A$, a componente $[L_{x_1} \dots L_{x_k}]_{01}$ é um elemento do subespaço $W = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$. Provaremos por indução em k . Se $k = 1$, o resultado vale por (1.14). Suponha agora que $[L_{x_1} \dots L_{x_{k-1}}]_{01} \in W$ e seja $x_k = \alpha_k e + u_k + v_k \in A$. Pelas relações dadas em (1.7) e (1.9) e devido ao fato que $\tilde{V}_{00} = 0$, obtemos que $[L_{x_1} \dots L_{x_k}]_{01} = [L_{x_1} \dots L_{x_{k-1}}]_{01}[L_{x_k}]_{11}$. Se $u \in U$ é tal que $[L_{x_1} \dots L_{x_{k-1}}]_{01} = L_u - 2L_e L_u$ então, pelo lema anterior, temos que $[L_{x_1} \dots L_{x_k}]_{01} = (L_u - 2L_e L_u)(\frac{1}{2}\alpha_k(4L_e - 4L_e^2) + 2L_{v_k} L_e) = \frac{1}{2}\alpha_k(L_u - 2L_e L_u) - (L_{uv_k} - 2L_e L_{uv_k}) \in W$. $\square$

Corolário Se A é uma álgebra de Bernstein normal então $M(A)$ tem a seguinte decomposição:

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}. \quad (1.22)$$

DEMONSTRAÇÃO: Por (1.18), temos que $\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N} = 0$. Assim, de (1.16), resulta que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2)$. Do Teorema 1.1 segue que $\tilde{V}_{10} = \tilde{V}_{00} = 0$ e, pela Proposição 1.9, $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$. $\square$

1.5 Relações entre $M(A)$ e $M(\bar{A})$

Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e I um ideal bárico de A , ou seja, $I \subseteq N = U \oplus V$. Desse modo, a álgebra quociente $\bar{A} = A/I$ é Bernstein, $\bar{A} = F\bar{e} \oplus \bar{U} \oplus \bar{V}$, onde $\bar{e} = e + I$, $\bar{U} = \{u + I : u \in U\}$ e $\bar{V} = \{v + I : v \in V\}$. Considerando a projeção canônica de A em $\bar{A}$, temos, pela Proposição 1.1, um epimorfismo π de $M(A)$ em $M(\bar{A})$ tal que $\pi(L_x) = L_{\bar{x}}$, para todo $x \in A$. Observamos que se $\sigma \in M(A)$ então $\pi(\sigma) = \bar{\sigma}$, onde $\bar{\sigma}(a + I) = \sigma(a) + I$.

A álgebra $M(\bar{A})$ tem decomposição de Peirce

$$M(\bar{A}) = F(2L_{\bar{e}}^2 - L_{\bar{e}}) \oplus \tilde{\bar{U}} \oplus \tilde{\bar{V}} = F(2L_{\bar{e}}^2 - L_{\bar{e}}) \oplus \tilde{\bar{U}} \oplus \tilde{\bar{V}}_{11} \oplus \tilde{\bar{V}}_{10} \oplus \tilde{\bar{V}}_{01} \oplus \tilde{\bar{V}}_{00}$$

Pela caracterização dos subespaços dessa decomposição dada nas Proposições 1.4 e 1.7, temos $\pi(\tilde{U}) = \tilde{\bar{U}}$; $\pi(\tilde{V}_{ij}) = \tilde{\bar{V}}_{ij}$, para $i, j = 0, 1$. Por exemplo, $\sigma \in \tilde{U} \Rightarrow \sigma(N) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(\bar{N}) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma} \in \tilde{\bar{U}}$.

Em geral, a dimensão dos subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{V}_{ij}$ de $M(A)$ é maior que a dimensão de suas imagens em $M(\bar{A})$ sob a projeção π . Veremos em que casos π preserva a dimensão de algum desses subespaços.

Proposição 1.10 (i) Se o ideal I está contido em U então $\dim \tilde{\bar{V}}_{01} = \dim \tilde{V}_{01}$ e $\dim \tilde{\bar{V}}_{00} = \dim \tilde{V}_{00}$.

(ii) Se o ideal I está contido em V então $\dim \tilde{\bar{V}}_{11} = \dim \tilde{V}_{11}$ e $\dim \tilde{\bar{V}}_{10} = \dim \tilde{V}_{10}$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Basta mostrar que a restrição de π a esses subespaços é injetora, pois já temos que $\pi(\tilde{V}_{ij}) = \tilde{\bar{V}}_{ij}$. Se $\bar{\sigma} = 0$ então $\sigma(A) \subseteq I \subseteq U$, mas se $\sigma \in \tilde{V}_{01}$ (ou $\sigma \in \tilde{V}_{00}$) então $\sigma(A) = \sigma(U) \subseteq V$ (respectivamente, $\sigma(A) = \sigma(V) \subseteq V$). Assim $\sigma(A) \subseteq U \cap V = 0$, ou seja, $\sigma = 0$. Portanto, $\pi|_{\tilde{V}_{01}}$ e $\pi|_{\tilde{V}_{00}}$ são injetoras e, conseqüentemente, $\dim \tilde{\bar{V}}_{01} = \dim \tilde{V}_{01}$ e $\dim \tilde{\bar{V}}_{00} = \dim \tilde{V}_{00}$. A demonstração de (ii) é análoga. $\square$

Observação 1.7 $I \subseteq U$ é ideal de A se e somente se $I \subseteq L$ e $I \subseteq V$ é ideal de A se e somente se $I \subseteq \text{ann}A$. De fato, se $I \subseteq U$ é ideal então de $U^2 \subseteq V$, resulta que $IU = 0$, ou seja, $I \subseteq L$. Do mesmo modo, se $I \subseteq V$ é ideal então, de $UV + V^2 \subseteq U$ e $eV = 0$, temos que $I \subseteq \text{ann}A$.

Proposição 1.11 *As dimensões de $\tilde{U}$ e $\tilde{\bar{U}}$ são iguais se e somente se $I \subseteq \text{ann}A$ e $I \cap U^2 = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que $\dim \tilde{U} = \dim U + \dim U^2$ e $\dim \tilde{\bar{U}} = \dim \bar{U} + \dim \bar{U}^2$. Se $I \not\subseteq \text{ann}A$ então, pela observação anterior, $I \cap U \neq 0$ e, assim, $\dim \tilde{U} < \dim U$; se existe $0 \neq y \in I \cap U^2$ então $\psi_y \neq 0$ e $\bar{\psi}_y = 0$, ou seja, $\pi|_{\tilde{U}}$ não é injetora. Logo, se $\dim \tilde{\bar{U}} = \dim \tilde{U}$ então $I \cap U^2 = 0$ e $I \subseteq \text{ann}A$.

Reciprocamente, se $I \subseteq \text{ann}A$ e $I \cap U^2 = 0$ então $I \cap A^2 = 0$. Seja $\sigma \in M(A)$, $\sigma \neq 0$ e $x \in A$ tal que $\sigma(x) \neq 0$. Como $\sigma(x) \in A^2$, temos que $\sigma(x) \notin I$. Portanto $\bar{\sigma} \neq 0$ e, assim, π é injetora. $\square$

Observação 1.8 Se I é um ideal de A tal que $I \cap A^2 = 0$ então $(I : A) = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A) \subseteq I\} = 0$, pois a imagem dos elementos de $M(A)$ está contido em A^2 . Dessa maneira, pela Proposição 1.2, temos que $M(A/I) \cong M(A)/(I : A) \cong M(A)$. É claro que se $M(A/I) \cong M(A)$ então $\dim \tilde{U} = \dim \tilde{\bar{U}}$. Assim, $\dim \tilde{U} = \dim \tilde{\bar{U}}$ se e somente se $\dim M(A) = \dim M(\bar{A})$.

Observação 1.9 Devido à observação anterior, podemos supor que $\text{ann}A \subseteq U^2$, sempre que necessário, pois a parte do anulador de A que não está em U^2 não interfere na álgebra de multiplicações de A . Essa consideração será útil no estudo dos automorfismos de $M(A)$ e também no estudo da decomponibilidade de $M(A)$.

Capítulo 2

Propriedades de elementos de $M(A)$

Neste capítulo estudaremos propriedades de certos elementos diferenciados da álgebra de multiplicações. Os idempotentes, por exemplo, são elementos importantes da álgebra. Na primeira parte do capítulo, apresentamos algumas características desses elementos e estabelecemos um critério para decidir sobre a nilpotência do núcleo da álgebra de Bernstein através dos idempotentes de $M(A)$. Provamos também que não existem elementos inversíveis em $M(A)$, a não ser em casos triviais. Na segunda parte do capítulo, investigamos então o posto máximo dos elementos da álgebra de multiplicações.

Em [14] já existe uma caracterização das álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente por meio de alguma propriedade de sua álgebra de multiplicações:

Proposição 2.1 ([14], **Proposição 1.9**) *Seja $A = Fe \oplus N$ uma álgebra de Bernstein. Então N é nilpotente se e somente se $\tilde{N}$ é nilpotente.*

2.1 Idempotentes da álgebra de multiplicações

Os idempotentes exercem um papel importante na teoria, mas sua descrição, em geral, não é simples. Tentaremos relacionar algumas características desses elementos que serão úteis no estudo das álgebras de multiplicações. Inicialmente, veremos como se comporta a decomposição de Peirce dos idempotentes.

Proposição 2.2 (i) *Um elemento $\sigma \in M(A)$ é idempotente de peso 1 se e somente se $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta$, com $\theta \in \tilde{V}$ idempotente e $x \in \ker \theta \cap (U \oplus U^2)$.*

(ii) *Um elemento $\sigma \in (N : A)$ é idempotente se e somente se $\sigma = \psi_x + \theta$, onde $\theta \in \tilde{V}$ é idempotente e $x \in \text{Im } \theta$.*

DEMONSTRAÇÃO:

- (i) Escrevendo $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta$, com $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in \tilde{V}$, temos que σ é idempotente se e somente se $2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta\psi_x + \theta^2 = 2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta$. Como $\theta\psi_x$ é um elemento de $\tilde{U}$, a igualdade anterior é equivalente a $\theta\psi_x = 0$ e $\theta^2 = \theta$. Assim, σ é idempotente se e somente se $\theta^2 = \theta$ e $\theta(x) = 0$, onde $x \in U \oplus U^2$, ou seja, se e somente se $\theta \in \tilde{V}$ é idempotente e $x \in \ker \theta \cap (U \oplus U^2)$.
- (ii) A demonstração é análoga ao caso anterior. Basta decompor $\sigma = \psi_x + \theta$ e calcular σ^2 , para obter que $\sigma = \psi_x + \theta$ é idempotente se e somente se θ é idempotente e $x \in \text{Im } \theta \cap (U \oplus U^2)$. Como $\text{Im } \theta \in U \oplus U^2$, sempre que $\theta \in \tilde{V}$, temos que $\sigma = \psi_x + \theta$ é idempotente se e somente se θ é idempotente e $x \in \text{Im } \theta$. $\square$

Pela proposição anterior, a descrição dos idempotentes de $M(A)$ se restringe à descrição dos idempotentes em $\tilde{V}$. Como $\tilde{V} = F(4L_e - 4L_e^2) + (\tilde{N} \cap \tilde{V})$, temos que os elementos em $\tilde{V}$ são da forma $\alpha(4L_e - 4L_e^2) + \theta$, onde $\alpha \in F$ e $\theta \in \tilde{N} \cap \tilde{V}$.

2.1.1 Álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente

Nesta seção, nosso objetivo é encontrar um critério para identificar as álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através do posto dos idempotentes do núcleo de $M(A)$.

Lema 2.1 *Se A é uma álgebra de Bernstein com núcleo nilpotente então os idempotentes não nulos em $\tilde{V}$ são da forma $4L_e - 4L_e^2 + \theta$, com $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sigma = \alpha(4L_e - 4L_e^2) + \theta \in \tilde{V}$ um idempotente, com $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$. Temos que $\sigma^2 = \alpha^2(4L_e - 4L_e^2) + \alpha(4L_e - 4L_e^2)\theta + \alpha\theta(4L_e - 4L_e^2) + \theta^2$. Como N é nilpotente, temos, pela Proposição 2.1, que $\tilde{N}$ é nilpotente, assim, $4L_e - 4L_e^2 \notin \tilde{N}$ e, portanto, $\tilde{V} = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus (\tilde{V} \cap \tilde{N})$. Logo, $\sigma^2 = \sigma$ implica que $\alpha^2 = \alpha$, ou seja, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Se $\alpha = 0$, temos que $\sigma = \theta \in \tilde{N}$; daí, $\sigma = 0$, pois $\tilde{N}$ é nilpotente. Dessa maneira, se σ é idempotente não nulo, devemos ter $\alpha = 1$. $\square$

Observação 2.1 Se trocarmos a hipótese N nilpotente por $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$, teremos que todo idempotente em $(N : A)$ é da forma $\alpha(4L_e - 4L_e^2) + \theta$, onde $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$ e $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$.

Observação 2.2 Se V é um espaço vetorial, $V = V_1 \oplus V_2$ e $W \subseteq V$ é um subespaço com $\dim W > \dim V_1$ então $V_2 \cap W \neq 0$. De fato, se $\dim W = n$ então existem $x_1, \dots, x_n \in V_1$,

$y_1, \dots, y_n \in V_2$ tais que $\{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de W . Como $\dim V_1 < n$, o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente dependente. Portanto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. Temos então $0 \neq \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in V_2 \cap W$.

Agora podemos caracterizar os idempotentes de $\tilde{V}$, quanto ao posto, quando N é nilpotente. Dado um operador $\sigma \in M(A)$, denotaremos por $\text{rk}(\sigma)$ o posto de σ .

Proposição 2.3 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com núcleo nilpotente então os idempotentes em $\tilde{V}$ são operadores lineares de posto r .*

DEMONSTRAÇÃO: Lembramos que os elementos de $\tilde{V}$ podem ser considerados como operadores de N . Pelo Lema 2.1, $\sigma = 4L_e - 4L_e^2 + \theta$, com $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$. Se $\text{rk}(\sigma) > r$ então, pela observação anterior, existe $v \in \text{Im}(\sigma) \cap V$, $v \neq 0$. Temos então $v = \sigma(v) = (4L_e - 4L_e^2 + \theta)(v) = \theta(v)$, absurdo, pois $\theta \in \tilde{N}$ é nilpotente. Por outro lado, se $\text{rk}(\sigma) < r$ então $\dim(\ker \sigma) > s$. Novamente pela observação anterior, existe $u \in U \cap \ker \sigma$, $u \neq 0$. Assim, $0 = \sigma(u) = (4L_e - 4L_e^2 + \theta)(u) = u + \theta(u)$ e, portanto, θ possui autovalor -1 , contrariando a nilpotência de θ . Dessa maneira, concluímos que $\text{rk}(\sigma) = r$, ou seja, todo idempotente em $(N : A)$ tem posto r . $\square$

Corolário *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com núcleo nilpotente então*

- (i) *os idempotentes de $M(A)$ de peso 1 têm posto 1 ou $1 + r$;*
- (ii) *os idempotentes de $(N : A)$ têm posto r .*

DEMONSTRAÇÃO: Se σ é idempotente de peso 1 então, pela Proposição 2.2 (i), $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta$, onde $\theta \in \tilde{V}$ é idempotente e $x \in \ker \theta$. Se $\theta = 0$ então $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \psi_x$ tem posto 1. Se $\theta \neq 0$ então, pela proposição anterior, $\text{rk}(\theta) = r$ e, conseqüentemente, $\text{rk}(\sigma) = 1 + r$. No caso em que σ é um idempotente em $(N : A)$, temos, pela Proposição 2.2 (ii), que $\sigma = \psi_x + \theta$, com $x \in \text{Im} \theta$ e $\theta^2 = \theta$. Assim, $\text{rk}(\sigma) = \text{rk}(\theta) = r$. $\square$

Para cada idempotente $e_0 \in A$, temos que $4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2 \in (N : A)$ tem posto r , pois esse operador é projeção sobre o subespaço U_{e_0} . Assim, sua componente no subespaço $\tilde{V}$ também tem posto r . No entanto, observa-se que, em geral, esses operadores não são os únicos idempotentes de $\tilde{V}$, embora todos os idempotentes desse subespaço tenham posto r . O próximo exemplo ilustra esse fato.

Exemplo 2.1 Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein de tipo $(6, 3)$ tendo $\{u_1, \dots, u_5\}$ uma base de U , $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V e os seguintes produtos:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3
u_1	v_3	v_2		$-v_1$		u_5		
u_2	v_2		v_1					
u_3		v_1					$-u_5$	
u_4	$-v_1$							$2u_5$
u_5								
v_1	u_5							
v_2			$-u_5$					
v_3				$2u_5$				

Esta álgebra é nuclear, portanto, tem núcleo nilpotente. O operador $\sigma = 4L_e - 4L_e^2 + 2L_e L_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}$ é idempotente com $\text{Im } \sigma = U$ e $\ker \sigma = \{v - u_1 v : v \in V\} = \langle v_1 - u_5, v_2, v_3 \rangle$. Se σ fosse a restrição a N de algum operador da forma $4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2$, com $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ então, de $\text{Im } \sigma = U$, resulta $U = U_{e_0} = \{u + 2u u_0 : u \in U\}$, ou seja, $u_0 \in L = F u_5$. Dessa maneira, temos $V_{e_0} = \{v - 2(u_0 + u_0^2)v : v \in V\} = \{v - 2\lambda u_5 v : v \in V\} = V \neq \ker \sigma$. Portanto, σ não pode ser restrição a N de um operador da forma $4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2$, para $e_0 \in A$ idempotente.

A próxima proposição mostra que esse resultado é verdadeiro para algumas classes de álgebras.

Proposição 2.4 *Se A é uma álgebra de Bernstein normal então todo idempotente de $\tilde{V}$ é restrição a N de algum operador da forma $4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2$, para algum idempotente $e_0 \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como A é normal, $V_e = V_f$, para quaisquer idempotentes $e, f \in A$. Além disso, de (1.22), $\tilde{V} = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$. Assim, o conjunto dos idempotentes de $\tilde{V}$ é $\{4L_e - 4L_e^2 + L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$. Para cada $u' \in U$, tomando $\sigma = 4L_e - 4L_e^2 + L_{u'} - 2L_e L_{u'}$, resulta que $\text{Im } \sigma = \{u + u' u : u \in U\} = U_{e_0}$, onde $e_0 = e + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{4}u'^2$ e $\ker \omega = V = V_{e_0}$. Assim, $\sigma = (4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2)|_N$. $\square$

A classe das álgebras de Bernstein que verificam $U(UV) = 0$ contém as álgebras normais. Já nessa classe um pouco maior, não vale o resultado da Proposição 2.4. O próprio Exemplo 2.1 ilustra esse fato. No entanto, será possível mostrar que os idempotentes de posto r , nesse caso, são projeções sobre algum subespaço U_{e_0} , embora não coincidam, necessariamente, com o operador $4L_{e_0} - 4L_{e_0}^2$.

Proposição 2.5 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein satisfazendo $U(UV) = 0$. Então os idempotentes de $\tilde{V}$ têm imagem contida em U_{e_0} , para algum idempotente $e_0 \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO: Quando $U(UV) = 0$, temos do Teorema 1.1 e da Proposição 1.9 que $\tilde{V}_{00} = 0$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\}$. Seja $\sigma = 4L_e - 4L_e^2 + \theta_{11} + \theta_{10} + \theta_{01}$ um idempotente em $\tilde{V}$, onde $\theta_{ij} \in \tilde{V}_{ij}$. Então, de (1.8) e (1.9), temos

$$\begin{cases} \theta_{11}^2 + \theta_{11} + \theta_{10}\theta_{01} = 0 \\ \theta_{11}\theta_{10} = 0 \\ \theta_{01}\theta_{11} = 0 \\ \theta_{01}\theta_{10} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Seja $u' \in U$ tal que $\theta_{01} = L_{u'} - 2L_e L_{u'}$. Então $\theta_{01}(u) = uu'$, para todo $u \in U$. Mostraremos que $\text{Im } \theta \subseteq U_{e_0}$, onde $e_0 = e + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{4}u'^2$: das relações em (2.1), temos $\sigma(u + v) = u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + u_0u = u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + u_0u + \theta_{01}\theta_{11}(u) + \theta_{01}\theta_{10}(v) = u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + u_0(u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v)) \in U_{e_0}$. $\square$

Assim, usando o Corolário da Proposição 2.3 e a proposição anterior, temos:

Corolário *Se A é uma álgebra de Bernstein com núcleo nilpotente e $U(UV) = 0$ então todo idempotente em $(N : A)$ é projeção sobre o subespaço U_{e_0} , para algum idempotente $e_0 \in A$.* $\square$

Para caracterizar as álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente pelos idempotentes de sua álgebra de multiplicações, será necessário descrever os idempotentes em $\tilde{N}$.

Proposição 2.6 *Se $\sigma \in \tilde{N}$ é um idempotente então $\text{Im } \sigma \subseteq L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\bar{A} = A/L$ e $\pi: M(A) \rightarrow M(\bar{A})$ o epimorfismo dado por $\pi(L_x) = L_{\bar{x}}$, onde $\bar{x} = x + L$. Temos que $\pi(\sigma) = \bar{\sigma} \in \pi(\tilde{N}) = \tilde{\bar{N}}$. Como $\bar{A}$ é uma álgebra de Bernstein Jordan, temos que $\bar{N}$ é nilpotente. Assim, $\tilde{\bar{N}}$ também é nilpotente. Dessa maneira, $\bar{\sigma} = 0$, ou seja, $\sigma(x) \in L$, para todo $x \in A$. $\square$

Corolário *Se $4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{N}$ então A é excepcional.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $\text{Im}(4L_e - 4L_e^2) = U$. Pela proposição anterior, $\text{Im}(4L_e - 4L_e^2) \subseteq L$. Assim, $U = L$ e, portanto, A é excepcional. $\square$

Segue daí que, para álgebras não excepcionais, temos

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}. \quad (2.2)$$

Observamos, no entanto, que existem álgebras excepcionais com $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$, por exemplo, álgebras excepcionais com núcleo nilpotente.

Com os resultados obtidos nas Proposições 2.3 e 2.6, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja A uma álgebra de Bernstein não excepcional de tipo $(1+r, s)$. Então o núcleo de A é nilpotente se e somente se os idempotentes do núcleo de $M(A)$ têm posto r .*

DEMONSTRAÇÃO: Se A tem núcleo nilpotente então, pelo Corolário da Proposição 2.3, temos que os idempotentes de $(N : A)$ têm posto r . Por outro lado, se N não é nilpotente, pela Proposição 2.1, $\tilde{N}$ também não é nilpotente. Sendo uma álgebra associativa de dimensão finita não nilpotente, $\tilde{N}$ possui idempotentes. Pela Proposição 2.6, os idempotentes de $\tilde{N}$ têm imagem contida em L . Como A não é excepcional, L está propriamente contido em U e, portanto, existem idempotentes em $\tilde{N} \subseteq (N : A)$ que têm posto estritamente menor que r . $\square$

Outras características dos idempotentes de $M(A)$ para uma álgebra de Bernstein A arbitrária serão apresentadas na próxima seção.

2.1.2 Álgebras de Bernstein arbitrárias

Vimos na seção anterior que existem idempotentes em $\tilde{N}$, quando A não tem núcleo nilpotente. Também vimos uma característica dos idempotentes contidos em $\tilde{N}$, na Proposição 2.6. A partir dela, podemos obter mais informações sobre esses idempotentes:

Proposição 2.7 *Um elemento $\sigma \in \tilde{N}$ é idempotente se e somente se $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10}$, onde $\sigma_{11} \in \tilde{V}_{11}$ é idempotente e $\sigma_{10} \in \tilde{V}_{10}$ é um elemento cuja imagem está contida na imagem de σ_{11} .*

DEMONSTRAÇÃO: Se $\sigma \in \tilde{N}$ é um idempotente então, pela Proposição 2.6, sua imagem está contida em L . Assim, $\sigma \in \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10}$. Decompondo $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10}$, de $\sigma^2 = \sigma$, obtemos $\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{10} = \sigma_{11} + \sigma_{10}$, ou seja, $\sigma_{11}^2 = \sigma_{11}$ e $\sigma_{11}\sigma_{10} = \sigma_{10}$. Portanto, σ é idempotente se e somente se σ_{11} é idempotente e $\text{Im}(\sigma_{10}) \subseteq \text{Im}(\sigma_{11})$. $\square$

O Teorema 2.1 caracteriza as álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através dos idempotentes da sua álgebra de multiplicações. No caso geral, para álgebras de Bernstein arbitrárias, também temos informações sobre o posto dos idempotentes de $M(A)$, conforme mostram os próximos resultados.

Lema 2.2 *Para toda álgebra de Bernstein, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $N^k \subseteq L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar a álgebra $\bar{A} = A/L$. Essa álgebra é Bernstein Jordan e, pelo Teorema 0.3, seu núcleo é nilpotente. Portanto, existe $k \geq 0$ tal que $\bar{N}^k = 0$, ou seja, $N^k \subseteq L$. $\square$

Lema 2.3 *Para todo $\sigma \in M(A)$ e $v \in V$, $v \neq 0$, tem-se $\sigma(v) \neq v$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sigma \in M(A)$ um elemento arbitrário e seja $v \in V$ com $\sigma(v) = v$. Lembrando que $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) + \tilde{N}$ e decompondo $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(4L_e - 4L_e^2) + \theta$, com $\theta \in \tilde{N}$, temos que $v = \sigma(v) = \theta(v)$, ou seja, $v = \theta^k(v)$, para todo $k \geq 1$. Combinando os resultados do Lema 2.2 e da Observação 1.4, obtemos $v = \theta^k(v) \in N^{k+1} \subseteq L$, para algum $k \geq 1$, ou seja, $v \in V \cap L = \{0\}$. Portanto, não existe $v \in V$, $v \neq 0$, com $\sigma(v) = v$, para qualquer $\sigma \in M(A)$. $\square$

Proposição 2.8 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ então os idempotentes de $(N : A)$ têm posto menor ou igual a r .*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 2.2 (ii), basta provar a proposição para idempotentes de $\tilde{V}$, que podem ser considerados operadores lineares de N . Supondo que existe $\sigma \in \tilde{V}$ idempotente de posto maior que r , temos, pela Observação 2.2, que existe $v \in V \cap \text{Im } \sigma$, $v \neq 0$, o que é uma contradição, pelo lema anterior. Dessa maneira, fica provado que todo idempotente em $(N : A)$ tem posto menor ou igual a r . $\square$

Corolário 1 *Os idempotentes de $M(A)$ têm posto menor ou igual a $1 + r$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se σ é um idempotente em $(N : A)$ então $\text{rk}(\sigma) \leq r$, pela proposição anterior. Se σ é um idempotente de peso 1, pela Proposição 2.2 (i), $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \psi_x + \theta$, onde $\theta \in \tilde{V}$ é idempotente e $x \in \ker \theta \cap (U \oplus U^2)$. Assim, usando novamente a proposição anterior, $\text{rk}(\sigma) = 1 + \text{rk}(\theta) \leq 1 + r$. $\square$

Corolário 2 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $s > 0$ então $M(A)$ não contém a unidade.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo corolário anterior, os idempotentes de $M(A)$ têm posto menor ou igual a $1 + r$. Assim, a identidade em A , que é um idempotente de posto $1 + r + s$, não pode ser um elemento de $M(A)$. $\square$

Muitas das propriedades provadas nesta seção serão usadas no restante do trabalho. Ainda não temos a descrição de todos os idempotentes de $M(A)$. Continuamos na busca de outras informações a respeito desses elementos, com o objetivo de conhecer melhor a estrutura de $M(A)$.

2.2 Sobre o invariante $\rho(A)$

Vimos na seção anterior que o operador identidade em A não é um elemento de $M(A)$, quando A tem tipo $(1+r, s)$, com $s \neq 0$. Veremos a seguir que, para essas álgebras, nenhum outro elemento inversível de $\text{End}(A)$ está em $M(A)$. Esta seção está destinada ao estudo do posto máximo dos elementos de $M(A)$.

Proposição 2.9 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com $s \geq 1$. Então $M(A)$ não contém elementos inversíveis de $\text{End}(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que existe $\sigma \in M(A)$ inversível e seja $\Phi : M(A) \rightarrow M(A)$ definida por $\Phi(\theta) = \theta\sigma$, para $\theta \in M(A)$. Esse operador linear é injetor, pois se $\theta\sigma = \theta'\sigma$ então $\theta = \theta\sigma\sigma^{-1} = \theta'\sigma\sigma^{-1} = \theta'$. Logo, é também sobrejetor, ou seja, existe $\theta \in M(A)$ tal que $\theta\sigma = \sigma$. Compondo mais uma vez com σ^{-1} , temos que $\theta = \text{id}_A$, a identidade em A , contradição, pois a identidade em A não está em $M(A)$, se $s \geq 1$. Conseqüentemente, $M(A)$ não tem elementos inversíveis. $\square$

Este resultado mostra, em particular, que em toda álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com $s \geq 1$, todo elemento é um divisor de zero. Quando $s = 0$, ou seja, A tem tipo $(1+r, 0)$, o operador L_e é inversível. A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, 0)$ já foi descrita em [14]. Assim, suporemos sempre $s \geq 1$.

Para cada álgebra de Bernstein A , podemos definir o invariante

$$\rho(A) = \max\{\text{rk}(\sigma) : \sigma \in M(A)\}.$$

Pela proposição anterior, temos que $\rho(A) < \dim A$, para A de tipo $(1+r, s)$ com $s \geq 1$. Se A tem tipo $(1+r, s)$ então $\rho(A) \geq 1+r$, pois o operador L_e tem posto $1+r$. Logo,

$$1+r \leq \rho(A) \leq s+r.$$

Cálculo de $\rho(A)$ em alguns casos particulares

1. No caso em que A é excepcional de tipo $(1 + r, s)$, temos $\rho(A) = 1 + r$. De fato, se $\sigma \in M(A)$ então $\sigma(A) \subseteq A^2$ e A^2 tem dimensão $1 + r$. Assim, $\text{rk}(\sigma) \leq r + 1$ e, portanto, $\rho(A) = 1 + r$.
2. Quando A é normal, também vale $\rho(A) = 1 + r$. Para provar isso, usaremos a decomposição de Peirce de $M(A)$ obtida no Teorema 1.1. Seja $\sigma \in M(A)$. Como $\tilde{V}_{10} = \tilde{V}_{00} = 0$, temos que $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta_{11} + \theta_{01}$, onde $\alpha \in F$, $x \in U \oplus U^2$ e $\theta_{ij} \in \tilde{V}_{ij}$. Logo, $\sigma(v) = 0$, para todo $v \in V$, ou seja, $\sigma(Fe \oplus U)$ gera a imagem de σ e, portanto, $\dim \text{Im}(\sigma) \leq 1 + r$. Assim, $\rho(A) = 1 + r$.

Observamos que se A é normal ou excepcional então $U(UV) = 0$. Isto sugere uma ligação entre o fato de ρ ser mínimo e as álgebras onde este subespaço $U(UV)$ é mínimo. Mais especificamente, temos:

Proposição 2.10 *Para uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1 + r, s)$, temos $\rho(A) = 1 + r$ se e somente se $U(UV) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $U(UV) = 0$. Desse modo, temos que $UV \subseteq L$. Logo, se $v \in V$ e $x \in A$ então $xv \in UV + V^2 \subseteq L$. Se J é um subespaço de U complementar a L , ou seja, $U = L \oplus J$, então, para todo $\sigma \in M(A)$, tem-se $\sigma(N) \subseteq L + \sigma(J)$. Isso se prova observando que $\sigma(u), \sigma(v) \in L$, se $u \in L$ e $v \in V$, pois L é ideal. Assim, $\text{Im} \sigma = \sigma(Fe) + \sigma(N) \subseteq \sigma(Fe) + L + \sigma(J)$ tem dimensão menor ou igual a $1 + r$. Logo $\rho(A) = 1 + r$. Reciprocamente, se $U(UV) \neq 0$ existem $u_1, u_2 \in U$ e $v_1 \in V$ tais que $u_1(u_2v_1) \neq 0$. Seja $\sigma = L_e + 2L_{u_1}L_eL_{u_2}$. Temos $\sigma(e) = e + \frac{1}{2}u_1u_2$, $\sigma(u) = \frac{1}{2}u$, $\sigma(v) = u_1(u_2v)$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, se $\{x_1, \dots, x_r\}$ é base de U então o conjunto $\{\sigma(e), \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r), \sigma(v_1)\}$ é linearmente independente, ou seja, $\text{rk}(\sigma) \geq r + 2$. Logo, $\rho(A) \geq r + 2$. $\square$

O próximo exemplo exhibe uma álgebra de Bernstein A de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = r + 2$.

Exemplo 2.2 Seja A a álgebra comutativa de base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ cuja tabela de multiplicação em relação a essa base é dada por

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2
u_1				$-v_2$	u_3	
u_2			v_2		u_4	
u_3		v_2				
u_4	$-v_2$					
v_1	u_3	u_4				
v_2						

Com a função ω definida por $\omega(e) = 1$ e nula nos outros elementos da base dada, A é Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, onde U é gerado por $\{u_1, \dots, u_4\}$ e V , por $\{v_1, v_2\}$. Logo, A é de tipo $(5, 2)$ e $U(UV) \neq 0$, pois $u_1(u_2v_1) = -v_2 \neq 0$. Assim, pelo resultado anterior, temos $\rho(A) \geq r + 2 = 6$. Por outro lado, $\rho(A) \leq r + s = 6$, o que implica $\rho(A) = 6 = r + 2$.

Podemos obter exemplos de álgebras de Bernstein A' de tipo $(1 + r, 2)$, tais que $\rho(A') = r + 2$, para $r > 4$. Basta fazer o join da álgebra A com a álgebra gamética de tipo $(1 + (r - 4), 0)$.

A seguir, veremos qual a dimensão mínima de A para que possamos ter $U(UV) \neq 0$.

Lema 2.4 *Se A é Bernstein e existem $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1(u_2v) \neq 0$ então $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ e $\{v, u_1(u_2v)\}$ são conjuntos linearmente independentes.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$ tais que $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \beta_1u_1v + \beta_2u_2v = 0$. Multiplicando por u_2v e usando as identidades em (4), obtemos $\alpha_1u_1(u_2v) = 0$. Como $u_1(u_2v) \neq 0$, resulta que $\alpha_1 = 0$. Analogamente, multiplicando por u_1v , concluímos que $\alpha_2 = 0$. Agora, multiplicando $\beta_1u_1v + \beta_2u_2v = 0$ por u_1 , obtemos $\beta_2u_1(u_2v) = 0$, ou seja, $\beta_2 = 0$ e, portanto, temos também que $\beta_1 = 0$. Assim, $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ é linearmente independente. Vamos mostrar que $\{v, u_1(u_2v)\}$ também é linearmente independente. Suponha que existe $\lambda \in F$ tal que $v = \lambda u_1(u_2v)$. Isso significa que v é um elemento fixo por $\sigma = \lambda L_{u_1} L_{u_2}$, isto é, $\sigma(v) = v$, contrariando o Lema 2.3. Logo, $\{v, u_1(u_2v)\}$ é um conjunto linearmente independente. $\square$

Corolário *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein com $U(UV) \neq 0$ então $\dim U \geq 4$ e $\dim V \geq 2$.* $\square$

Dessa maneira, o Exemplo 2.2 exhibe uma álgebra A de menor dimensão que satisfaz $\rho(A) > r + 1$.

Se a álgebra A verifica $U(UV) = 0$ e, portanto, $\rho(A) = r+1$, temos que cada idempotente $e \in A$ é um elemento que verifica a igualdade: $\text{rk}(L_e) = \rho(A)$. Uma pergunta que se coloca é saber se para uma álgebra de Bernstein arbitrária A , existe um elemento $x \in A$ com essa propriedade. A resposta aparece como corolário da próxima proposição.

Proposição 2.11 *Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1+r, s)$, tem-se $\text{rk}(L_x) \leq r+1$, para todo $x \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x = \alpha e + u_0 + v_0$ com $\alpha \in F$, $u_0 \in U$ e $v_0 \in V$ e seja $I = \text{ann}_U(u_0, u_0v_0) = \{u \in U : uu_0 = 0 = u(u_0v_0)\}$. Esse conjunto é um subespaço vetorial de U e dados $u \in I$, $v \in V$, temos $L_x(u), L_x(v) \in I$:

$$\begin{aligned} L_x(u)u_0 &= (\frac{\alpha}{2}u + uv_0)u_0 = u_0(uv_0) = -u(u_0v_0) = 0; \\ L_x(u)(u_0v_0) &= (uv_0)(u_0v_0) = 0, \text{ pela linearização de } (uv)^2 = 0; \\ L_x(v)u_0 &= (u_0v + vv_0)u_0 = 0; \\ L_x(v)(u_0v_0) &= (u_0v)(u_0v_0) = 0, \text{ novamente, linearizando } (uv)^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, se J é um subespaço de U complementar a I , isto é, $U = I \oplus J$, temos $L_x(A) = L_x(Fe) + L_x(I) + L_x(J) + L_x(V) \subseteq L_x(Fe) + I + L_x(J)$ tem dimensão no máximo $1+r$. Portanto, $\text{rk}(L_x) \leq 1+r$. $\square$

Corolário *Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, existe um elemento $x \in A$ tal que $\rho(A) = \text{rk}(L_x)$ se e somente se $U(UV) = 0$ e, nesse caso, $x = e$ verifica essa propriedade.* $\square$

Prosseguimos no estudo de $\rho(A)$, agora para álgebras com $U(UV) \neq 0$.

Lema 2.5 *Em qualquer álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, o subespaço $I = (UV + L) \oplus U(UV)$ é um ideal de A .*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x + y + z \in I$, com $x \in UV$, $y \in L$ e $z \in U(UV)$ e $\alpha e + u + v \in A$. Como $ux \in U(UV)$, $vx, uz \in UV$ e $(\alpha e + u + v)y, vz \in L$, temos que $(\alpha e + u + v)(x + y + z) \in (UV + L) \oplus U(UV)$. $\square$

Observação 2.3 O ideal I dado no lema anterior é a soma do ideal gerado por $UV + V^2$ e L . Assim, I é um ideal invariante por mudança de idempotentes. Lembramos que o ideal gerado por $UV + V^2$ é também o ideal gerado pelos elementos $x^2y - \omega(x)xy$, onde $x, y \in A$, ou seja, é invariante. A busca de ideais expressos em função de U e V e eventualmente outros ideais de A , é uma questão central na teoria. Alguns resultados sobre esse assunto podem ser encontrados em [37].

O próximo resultado estabelece um limitante superior para $\rho(A)$, dependendo do subespaço $U(UV)$. Novamente observamos que a dimensão deste subespaço é invariante sob mudança de idempotentes em A .

Proposição 2.12 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$, com $\dim U(UV) = t$. Então $\rho(A) \leq 1 + r + t$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{u_1, \dots, u_t, u_{t+1}, \dots, u_r\}$ base de U , onde $\{u_1, \dots, u_t\}$ é uma base de $L + UV$. Considere o ideal I do lema anterior. Basta mostrar que, para todo $\sigma \in M(A)$, $\sigma(A) \subseteq \langle \sigma(e), \sigma(u_{t+1}), \dots, \sigma(u_r) \rangle + I$. Se $v \in V$ então $Av \in UV + L \subseteq I$. Como I é um ideal, temos $\sigma(v) \in I$. Do mesmo modo, $\sigma(UV + L) \subseteq I$. Portanto, $\sigma(A) \subseteq \langle \sigma(e), \sigma(u_{t+1}), \dots, \sigma(u_r) \rangle + I$. $\square$

Corolário *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ e o subespaço $U(UV)$ tem dimensão 1 então $\rho(A) = r + 2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Já sabemos que se $U(UV) \neq 0$ então $\rho(A) \geq r + 2$. A proposição anterior nos fornece a desigualdade contrária. Portanto, $\rho(A) = r + 2$. $\square$

Observação 2.4 A estimativa dada na Proposição 2.12 não piora a condição já conhecida, pois $\dim U(UV) < s$. De fato, se $U(UV) = V \neq 0$ então A é nuclear e, portanto, tem núcleo nilpotente. Além disso, de $V = U^2$ e $V = U(UV)$, resulta que $0 \neq U^2 = U^4$, contrariando a nilpotência de N .

Podemos estabelecer outro limitante para $\rho(A)$. Seja W um subespaço de V complementar ao anulador de A . Assim, $A = Fe \oplus U \oplus W \oplus \text{ann}A$. Para todo $\sigma \in M(A)$, temos que $\text{ann}A \subseteq \ker \sigma$. Portanto,

$$\rho(A) \leq 1 + r + s - \dim \text{ann}A. \quad (2.3)$$

Essa limitação pode ser útil nos casos onde o anulador de A é não nulo.

A seguir, um exemplo de uma álgebra onde $\dim U(UV) = 2$ e $\rho(A) = r + 2$, como contra-exemplo para a recíproca do corolário anterior.

Exemplo 2.3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein de tipo $(9, 3)$, tendo $\{u_1, \dots, u_8\}$ como base de U , $\{v_1, v_2, v_3\}$ como base de V e os seguintes produtos:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	v_1	v_2	v_3
u_1				$-v_2$					u_3		
u_2			v_2						u_4		
u_3		v_2									
u_4	$-v_2$										
u_5								$-v_3$	u_7		
u_6							v_3		u_8		
u_7							v_3				
u_8					$-v_3$						
v_1	u_3	u_4			u_7	u_8					
v_2											
v_3											

Temos $U(UV) = \langle v_2, v_3 \rangle$, portanto, tem dimensão 2. Além disso, por (2.3), $\text{rk}(\sigma) \leq 1 + r + s - 2 = 10 = r + 2$. Pelo fato de $U(UV)$ ser não nulo, resulta que $\rho(A) = r + 2$.

Obtemos, na Proposição 2.12 e em (2.3), dois limitantes para $\rho(A)$. O primeiro deles depende do subespaço $U(UV)$ e o segundo, de $\text{ann}A$. À primeira vista, esses subespaços parecem não ter relação, já que existem exemplos onde eles coincidem e, em outro extremo, onde a intersecção entre eles é nula. Os três exemplos deste capítulo ilustram esse fato.

Ainda existem muitas questões sobre o invariante $\rho(A)$. Não sabemos, por exemplo, se dados $r, s \geq 1$ e p tal que $r + 1 \leq p \leq r + s$, existe uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$. Também desconhecemos se é possível melhorar a limitação superior de $\rho(A)$ dada na Proposição 2.12, para cada tipo fixado.

Capítulo 3

Dimensão de $M(A)$

Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1 + r, s)$, não é possível determinar a dimensão de $M(A)$ apenas em função de r e s , pois álgebras de mesmo tipo não têm, necessariamente, álgebras de multiplicações com a mesma dimensão. Tentaremos estabelecer, neste capítulo, alguns limitantes para a dimensão de $M(A)$, sendo A uma álgebra de Bernstein de tipo fixado.

Observamos inicialmente que, nos casos onde $r = 0$ ou $s = 0$, a dimensão da álgebra de multiplicações está bem determinada, pois existe apenas uma álgebra de Bernstein de cada um desses tipos. Em [14], prova-se que se $r = 0$ então $M(A) \cong F$ e, assim, $\dim M(A) = 1$. No caso em que $s = 0$, foi provado também em [14] que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U_e\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$; portanto, $\dim M(A) = 1 + \dim A$. Na próxima seção, veremos exemplos de subclasses de álgebras que também podem ser caracterizadas pela dimensão de sua álgebra de multiplicações.

3.1 Alguns casos particulares

Com o resultado obtido na Proposição 1.9 a respeito das álgebras normais, temos outra caracterização para essas álgebras, agora por meio da dimensão de suas álgebras de multiplicações:

Proposição 3.1 *São equivalentes:*

1. A é normal;
2. $\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 - \dim L$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Corolário da Proposição 1.9, concluímos que se A é normal então $\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 - \dim L$. Reciprocamente, se A é uma álgebra de Bernstein tal que $\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 - \dim L$, teremos $\dim \tilde{V} = 1 + \dim U - \dim L$. Como $\dim \tilde{V}_{11} \geq 1$, pois $0 \neq 4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{V}_{11}$, e $\dim \tilde{V}_{01} \geq \dim U - \dim L$ resulta que $\dim \tilde{V}_{10} = 0$, ou seja, A é normal. $\square$

Podemos determinar a dimensão da álgebra de multiplicações de uma subclasse um pouco maior do que as normais:

Proposição 3.2 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein que verifica $UV + U^2V = 0$. Então $\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 + \dim V - \dim L - \dim(\text{ann}A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos, inicialmente, como é um elemento $\sigma \in M(A)$: em geral temos, para $x = \alpha e + u + v \in A$, $L_x = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}\psi_u + (\frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_vL_e) + ((2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u) + (L_v - 2L_vL_e)) + (L_u - 2L_eL_u)$. Como $UV = 0$, resulta que $L_vL_e = 0$, para todo $v \in V$ e $2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u = 0$, para todo $u \in U$. Assim, a componente $[L_x]$ do operador L_x em $\tilde{V}$ é

$$[L_x] = \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + (L_v - 2L_vL_e) + (L_u - 2L_eL_u).$$

Seja $x_1 = \alpha_1 e + u_1 + v_1 \in A$. Temos $(L_v - 2L_vL_e)(L_{u_1} - 2L_eL_{u_1})(u') = v(uu') = 0$, para todo $u' \in U$ e $\tilde{V}_{00} = 0$, pois $U(UV) = 0$. Portanto,

$$[L_x L_{x_1}] = \frac{1}{4}\alpha\alpha_1(4L_e - 4L_e^2) + \frac{1}{2}\alpha(L_{v_1} - 2L_{v_1}L_e) + \frac{1}{2}\alpha_1(L_u - 2L_eL_u)$$

Por indução em k , prova-se que, para todo $x_1, \dots, x_k \in A$, $[L_{x_1} \dots L_{x_k}]$ tem a forma acima. Assim, para qualquer $\sigma \in M(A)$,

$$\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \beta(4L_e - 4L_e^2) + (L_v - 2L_vL_e) + (L_u - 2L_eL_u)$$

Observamos ainda que a aplicação $v \in V \mapsto L_v - 2L_vL_e \in \tilde{V}_{10}$ é linear e $L_v - 2L_vL_e = 0$ se e somente se $vv' = 0$, para todo $v' \in V$. Como $UV = 0$, o núcleo dessa aplicação é exatamente $\text{ann}A$. Assim, $\dim \tilde{V}_{10} = \dim\{L_v - 2L_vL_e : v \in V\} = \dim V - \dim(\text{ann}A)$. Além disso, $\dim \tilde{V}_{01} = \dim U - \dim L$, pois $U(UV) = 0$. Logo, $\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 + \dim V - \dim L - \dim(\text{ann}A)$. $\square$

Para as álgebras que verificam $UV + U^2V = 0$ temos que $\dim \tilde{V}_{11} = 1$ é mínima. O próximo resultado classifica essas álgebras:

Proposição 3.3 *Uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ verifica $\dim \tilde{V}_{11} = 1$ se e somente se A é uma álgebra excepcional com $uv = \lambda_v u$, onde $\lambda_v \in F$, para todo $u \in U$ e $v \in V$, ou A satisfaz $UV + U^2V = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $x = \alpha e + u + v \in A$, as componentes de L_x em $\tilde{V}_{11}$, $\tilde{V}_{10}$ e $\tilde{V}_{01}$ são, respectivamente, $\frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_v L_e$, $(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) + (L_v - 2L_v L_e)$ e $(L_u - 2L_e L_u)$. Se $\dim \tilde{V}_{11} = 1$ então, para todo $v \in V$, existe $\lambda_v \in F$ tal que $2L_v L_e = \lambda_v(4L_e - 4L_e^2)$. Calculando nos elementos de U , obtemos $uv = \lambda_v u$, para todo $u \in U$. Se algum dos λ_v é não nulo, temos, para todo $u \in U$, $0 = u(uv) = \lambda_v u^2$; logo, $u^2 = 0$. Assim, a álgebra é excepcional. Suponha que a álgebra A é não excepcional. Desse modo, $\lambda_v = 0$, para todo $v \in V$, ou seja, $UV = 0$. Para $u \in U$ e $v \in V$, o operador $(L_v - 2L_v L_e)(L_u - 2L_e L_u)$ está em $\tilde{V}_{11}$. Portanto, existe $\lambda_{(u,v)} \in F$ tal que $(L_v - 2L_v L_e)(L_u - 2L_e L_u) = \lambda_{(u,v)}(4L_e - 4L_e^2)$. Se calculamos em $u_1 \in U$: $(u_1 u)v = \lambda_{(u,v)} u_1$. Como supomos que A é não excepcional, $\lambda_{(u,v)} = 0$, para todo par (u, v) , pois se $\lambda_{(u_0, v_0)} \neq 0$ então, para todo $u \in U$, $u^2 = \lambda_{(u_0, v_0)}^{-1} u((u u_0)v_0) \in UV^2 = 0$. Logo, $U^2V = 0$. Assim, se $\tilde{V}_{11}$ é unidimensional então $UV + U^2V = 0$ ou A é excepcional e, neste último caso, o operador L_v restrito ao subespaço U é múltiplo da identidade, para todo $v \in V$.

Reciprocamente, se $UV + U^2V = 0$, vimos que $\dim \tilde{V}_{11} = 1$. Se A é excepcional com a propriedade que $uv = \lambda_v u$, para todo $u \in U$ e $v \in V$, então, dado $x = \alpha e + u + v \in A$, a componente em $\tilde{V}$ de L_x é

$$[L_x] = (\frac{1}{2}\alpha + \lambda_v)(4L_e - 4L_e^2) + (2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) + (L_v - 2L_v L_e)$$

Por indução em k , verifica-se que $[L_{x_1} \dots L_{x_k}]$ tem a forma acima, onde $x_1, \dots, x_k$ são elementos arbitrários de A . Como os elementos de $M(A)$ são somas de operadores desse tipo, temos que a dimensão de $\tilde{V}_{11}$ é 1. $\square$

3.2 A dimensão máxima de $M(A)$

Em [15], os autores estimam a dimensão mínima para $M(A)$, quando $r \geq 1$: $\dim M(A) \geq r + 2$ e $\dim M(A) = r + 2$ se e somente se $N^2 = 0$. Neste caso, $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$. Estudaremos agora, alguns limitantes superiores para a dimensão de $M(A)$.

3.2.1 A dimensão máxima de $M(A)$ nas álgebras excepcionais

Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, s)$. Já vimos que os subespaços $\tilde{V}_{01}$ e $\tilde{V}_{00}$ da decomposição de Peirce de $M(A)$ são nulos. Assim,

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10}.$$

Temos que $\dim \tilde{U} = \dim(U \oplus U^2) = r$ e, pela caracterização dos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ dada na Proposição 1.7, os elementos de $\tilde{V}_{11}$ podem ser identificados como operadores em $\text{End}(U)$ e os de $\tilde{V}_{10}$, como transformações lineares de $\text{Hom}(V, U)$. Dessa maneira, $\dim \tilde{V}_{11} \leq r^2$ e $\dim \tilde{V}_{10} \leq rs$. Obtemos, então, um limitante superior para a dimensão da álgebra de multiplicações de uma álgebra excepcional:

$$\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs.$$

Veremos que, para $s \geq 2$, existem álgebras excepcionais cuja dimensão da álgebra de multiplicações atinge esse valor. O mesmo não ocorre para álgebras de tipo $(1 + r, 1)$.

Proposição 3.4 *Se $A = Fe \oplus U \oplus Fv$ é uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, 1)$ então $\dim M(A) \leq 3r + 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Levando em conta a decomposição dos operadores L_x , $x \in A$, dada em (1.11) e a relação $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$, concluímos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + \langle L_v L_e, (L_v L_e)^2, \dots \rangle$. Identificando os elementos de $\tilde{V}_{11}$ como operadores em $\text{End}(U)$, seja $m(x)$ o polinômio minimal de $T = L_v L_e$. Pelo Teorema de Hamilton-Cayley, $m(T) = 0$. Assim, se l é o grau de $m(x)$ então $l \leq r$ e $\{T^l, T^{l-1}, \dots, T, id_U\}$ é linearmente dependente e, para todo $m < l$, $\{T^m, T^{m-1}, \dots, T, id_U\}$ é um conjunto linearmente independente. Observando que id_U está em correspondência com o operador $4L_e - 4L_e^2$, obtemos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + \langle T, T^2, \dots, T^k, \dots \rangle$ tem dimensão l . Assim, $\dim M(A) \leq 1 + r + l + r \leq 1 + 3r$. $\square$

O próximo exemplo mostra que existem álgebras excepcionais de tipo $(1 + r, 1)$, cuja álgebra de multiplicações tem dimensão $1 + 3r$.

Exemplo 3.1 Seja $A = Fe \oplus U \oplus Fv$ a álgebra de Bernstein excepcional que, em relação à base $\{u_1, \dots, u_r, v\}$ do núcleo, tem a seguinte tábua de multiplicação:

	u_1	u_2	$\dots$	u_{r-1}	u_r	v
u_1						u_2
u_2						u_3
$\vdots$						$\vdots$
u_{r-1}						u_r
u_r						u_1
v	u_2	u_3	$\dots$	u_r	u_1	

Temos que $2L_v L_e = L_v$, $\{L_v, L_v^2, \dots, L_v^r\}$ é linearmente independente e $L_v^r = 4L_e - 4L_e^2$. Assim, $\tilde{V}_{11} = \langle L_v, L_v^2, \dots, L_v^r \rangle$ tem dimensão r . Além disso, $\{2L_e L_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}, \dots, 2L_e L_{u_r} - \frac{1}{2}\psi_{u_r}\} \subseteq \tilde{V}_{10}$ é um subconjunto linearmente independente. Portanto, $\tilde{V}_{10}$ tem dimensão r . Dessa maneira, $\dim M(A) = 1 + 3r$.

Para estudar o caso em que $s \geq 2$, usaremos o seguinte resultado:

Lema 3.1 *Para todo $n \geq 2$, a subálgebra de $M_n(F)$ gerada por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincide com $M_n(F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que a matriz elementar E_{ij} é obtida fazendo $A^{n-i} B A^{j-1}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Essas matrizes aparecem no artigo [32]. $\square$

Proposição 3.5 *Para todo $r \geq 1$ e $s \geq 2$, existe álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, s)$ com $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: A prova será feita exibindo exemplos para cada tipo.

- (i) Se $r = 1$, considere a álgebra excepcional $A = Fe \oplus Fu \oplus V$, com $\{v_1, \dots, v_s\}$ base de V e a seguinte tábua de multiplicação no núcleo:

	u	v_1	$\dots$	v_s
u				
v_1		u		
$\vdots$			$\ddots$	
v_s				u

Temos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2)$ pois $\dim \tilde{V}_{11} \leq r^2 = 1$ e $\{L_{v_1}, \dots, L_{v_s}\}$ é um subconjunto linearmente independente de $\tilde{V}_{10}$. Assim, $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs = 3 + s$.

- (ii) Se $r \geq 2$, seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein excepcional cuja tábua de multiplicação, em relação às bases $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V , é:

	u_1	u_2	$\dots$	u_r		v_1	v_2	$\dots$	v_s
u_1						u_r	u_r		
u_2						u_1			
$\vdots$						$\vdots$			
u_r						u_{r-1}			
v_1	u_r	u_1	$\dots$	u_{r-1}		u_1			
v_2	u_r						u_1		
$\vdots$								$\ddots$	
v_s									u_1

Novamente considerando os elementos de $\tilde{V}_{11}$ como operadores de $\text{End}(U)$, temos que as matrizes dos operadores $2L_{v_1}L_e$ e $2L_{v_2}L_e$, em relação à base $\{u_1, \dots, u_r\}$, coincidem, respectivamente, com as matrizes A e B do Lema 3.1. Assim, a subálgebra de $\tilde{V}_{11}$ gerada por $\{L_{v_1}L_e, L_{v_2}L_e\}$ coincide com $\tilde{V}_{11}$. Portanto, $\dim \tilde{V}_{11} = r^2$.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $i \in \{1, \dots, r\}$, como $\tilde{V}_{11} \cong \text{End}(U)$, seja $\sigma \in \tilde{V}_{11}$ tal que $\sigma(u_1) = u_i$ e $\sigma(u_k) = 0$, para todo $k \neq i$. Então $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e) \in \tilde{V}_{10}$ e $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e)(v_j) = u_i$ e $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e)(v_l) = 0$, se $l \neq j$. Dessa maneira, $\text{Hom}(V, U) \subseteq \tilde{V}_{10}$, ou seja, $\tilde{V}_{10} = \text{Hom}(V, U)$ tem dimensão rs . Conseqüentemente, $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

Veremos outros exemplos de álgebras de Bernstein excepcionais cuja dimensão da álgebra de multiplicações é máxima.

Considere G um grafo conexo, simples e sem loops, com pelo menos 3 vértices e $A = A(G)$ a álgebra associada a G . Como G é conexo, existe um caminho τ ligando u_i a u_j , $\tau = v_{i_1 i_2}, v_{i_2 i_3}, \dots, v_{i_{k-1} i_k}$, onde $i_1 = i$ e $i_k = j$. Denotaremos τ por $[i = i_1, i_2, \dots, i_k = j]$.

Proposição 3.6 *A dimensão da álgebra $M(A(G))$ é $1 + r + r^2 + rs$, onde $(1 + r, s)$ é o tipo de $A(G)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos, inicialmente, que $\dim V_{11} = r^2$. Para isso, basta mostrar que, para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$ o operador $\sigma_{ij} \in \text{End}(U)$ dado por $\sigma(u_i) = u_j$ e $\sigma(u_k) = 0$, para $k \neq i$, é um elemento de $\tilde{V}_{11}$.

(1) Supondo que $i \neq j$, temos:

- (a) Se u_i e u_j não são adjacentes, seja $\tau = [i = i_1, \dots, i_t = j]$ um caminho de comprimento mínimo ligando u_i a u_j . Como os vértices não são adjacentes, $t \geq 3$ e, pelo fato do caminho ter comprimento mínimo, $i_1, \dots, i_t$ são todos distintos (isto é, o caminho não tem ciclos). Dessa maneira, temos $\sigma_{ij} = L_{v_{i_t i_{t-1}}} \dots L_{v_{i_2 i_3}} L_{v_{i_1 i_2}} \in \tilde{V}_{11}$.
- (b) Se u_i e u_j são adjacentes, isto é, existe a aresta v_{ij} , como G é conexo e tem pelo menos 3 vértices, temos que $\partial u_i > 1$ ou $\partial u_j > 1$. Se $\partial u_i > 1$ então existe v_{jk} com $k \neq i$ e $\sigma_{ij} = L_{v_{ij}} - L_{v_{ij}} L_{v_{jk}}^2 \in \tilde{V}_{11}$. Se $\partial u_j > 1$ então existe v_{ik} com $k \neq j$. Daí o operador σ_{ij} pode ser representado por $L_{v_{ij}} L_{v_{ik}}^2$.

(2) Se $i = j$, seja $k \in \{1, \dots, r\}$, $k \neq i$. Pela parte anterior, $\sigma_{ik}, \sigma_{ki} \in \tilde{V}_{11}$. Dessa maneira, $\sigma_{11} = \sigma_{ik} \sigma_{ki} \in \tilde{V}_{11}$.

Assim, provamos que $\tilde{V}_{11}$ tem dimensão r^2 . Para provar que $\dim \tilde{V}_{10} = rs$, basta observar que, para todo $k \in \{1, \dots, r\}$ e $v_{ij} \in E(G)$, tem-se que $\sigma_{ki} L_{u_j}(v_{ij}) = u_k$ e $\sigma_{ki} L_{u_j}(v_{lt}) = 0$, se $\{l, t\} \neq \{i, j\}$. $\square$

A proposição anterior mostra que álgebras de Bernstein associadas a grafos com mesmo número de vértices e de arestas têm álgebras de multiplicações isomorfas. Por outro lado, foi provado por R. Costa e A. Grishkov, em [16], que álgebras associadas a grafos são isomorfas se e somente se os respectivos grafos são isomorfos. Dessa maneira, podemos obter exemplos de álgebras de Bernstein não isomorfas cujas álgebras de multiplicações são isomorfas, a partir de grafos conexos não isomorfos com mesmo número de vértices e arestas.

3.2.2 Dimensão máxima de $M(A)$ no caso geral

A questão a ser estudada é a seguinte: “Fixados inteiros positivos r e s , qual é a dimensão máxima que assume $M(A)$ quando A tem tipo $(1 + r, s)$?” Na seção anterior, pudemos responder essa pergunta na subclasse das álgebras excepcionais. Ainda não temos uma resposta completa para o caso geral. Apresentamos nesta seção os resultados obtidos até o momento. Vejamos o que acontece nas álgebras normais.

Vimos no Corolário 2 da Proposição 1.9 que se A é uma álgebra normal, então

$$\dim M(A) = 2 + 2 \dim U + \dim U^2 - \dim L.$$

Dessa maneira, fixados $r, s \geq 1$, a dimensão máxima de uma álgebra de Bernstein normal de tipo $(1+r, s)$ é atingida em álgebras com $\dim U^2$ máxima e $\dim L$ mínima. Sempre é possível obter exemplos de álgebras normais com $L = 0$. E, pelo fato da álgebra ser comutativa, o subespaço U^2 é gerado pelos produtos $\{u_i u_j : 1 \leq i \leq j \leq r\}$, onde $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base de U . Assim, $\dim U^2 \leq \frac{1}{2}r(r+1)$. Além disso, U^2 está contido em V . Portanto, para álgebras de Bernstein normais de tipo $(1+r, s)$, temos

$$\dim M(A) \leq 2 + 2r + t, \text{ onde } t = \min\{\frac{1}{2}r(r+1), s\}. \quad (3.1)$$

Em particular, se $r = 1$ então $\dim M(A) \leq 2 + 2 + 1 = 5$. Para o caso em que $s = 1$, temos que $\dim M(A) \leq 2 + 2r + 1 = 2r + 3$. Observe que, para cada um desses casos, existe uma álgebra normal com essa dimensão.

Dessa maneira, podemos estimar a dimensão máxima de $M(A)$ para A de tipo $(1+r, s)$ com $r = 1$ ou $s = 1$.

Proposição 3.7 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein.*

1. *Se A é de tipo $(2, 1)$ então a dimensão máxima de $M(A)$ é 5;*
2. *Para A de tipo $(1+r, 1)$ e $r > 1$, a dimensão máxima de $M(A)$ é $3r + 1$;*
3. *Se A tem tipo $(2, s)$ com $s > 1$ então a dimensão máxima de $M(A)$ é $3 + s$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 0.3, as álgebras relacionadas no enunciado acima são normais ou excepcionais, pois $r \leq 1$ ou $s \leq 1$. Assim, basta comparar a dimensão máxima de $M(A)$ nessas duas classes de álgebras, para cada tipo fixado. Esses limitantes foram dados nas Proposições 3.4 e 3.5 e em (3.1). $\square$

Observamos que, no contexto da Proposição 3.7, exceto nas álgebras de tipo $(2, 1)$, a álgebra que dá a dimensão máxima é excepcional. Isso se deve ao fato que nessas álgebras existem exemplos onde os subespaços $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$ coincidem (a menos de isomorfismos) com $\text{End}(U)$ e $\text{Hom}(V, U)$, respectivamente. O mesmo não ocorre nas álgebras não excepcionais, conforme mostra a proposição a seguir. Porém, nas álgebras excepcionais, os subespaços $\tilde{V}_{01}$ e $\tilde{V}_{00}$ são nulos. Portanto, não é possível afirmar, de imediato, que as álgebras excepcionais são aquelas onde a dimensão de sua álgebra de multiplicações é máxima, para um tipo fixado.

Proposição 3.8 ([34], Teorema 3.4.22) *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein não excepcional então o subespaço $UV + V^2$ está propriamente contido em U .*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $UV + V^2 = U$. Como A é não excepcional, $L \neq U$. Assim, a álgebra quociente $\bar{A} = A/L$ tem $\bar{U} \neq 0$. Considerando a projeção canônica $\pi: A \rightarrow \bar{A}$, obtemos

$$\bar{U}\bar{V} + \bar{V}^2 = \pi(UV + V^2) = \pi(U) = \bar{U} \neq 0. \quad (3.2)$$

Como $\bar{A}$ é Bernstein Jordan, $\bar{V}^2 = 0$, ou seja, $\bar{U}\bar{V} + \bar{V}^2 = \bar{U}\bar{V}$. Dessa maneira, de (3.2), segue que $0 \neq \bar{U} = \bar{U}\bar{V} = (\bar{U}\bar{V})\bar{V} = \dots$, contradição, pois $\bar{V}$ é nilpotente, pelo Teorema 0.3. Portanto, $UV + V^2 \neq U$ se A não é excepcional. $\square$

Corolário *Se A é uma álgebra não excepcional de tipo $(1 + r, s)$ com $r > 1$ então os subespaços $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$ estão contidos propriamente (a menos de isomorfismos) em $\text{End}(U)$ e $\text{Hom}(V, U)$, respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelas inclusões dadas em (1.18) e (1.19), temos que os elementos dos subespaços $\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}$ e $\tilde{V}_{10}$ têm imagem contida em $UV + V^2$. Pela Proposição anterior, a dimensão de $UV + V^2$ é menor ou igual a $r - 1$. Assim, $\dim \tilde{V}_{11} \cap \tilde{N} \leq r(r - 1)$ e $\dim \tilde{V}_{10} \leq s(r - 1) < s^2$. Como $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus (\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N})$, resulta que $\tilde{V}_{11}$ tem dimensão menor ou igual a $1 + r(r - 1) < r^2$, se $r > 1$. $\square$

A seguir, exibiremos outras circunstâncias nas quais a dimensão máxima de $M(A)$ pode ser dada por uma álgebra excepcional, ou seja, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$, onde $(1 + r, s)$ é o tipo de A .

Estudaremos, inicialmente, a classe das álgebras que têm $\tilde{V}_{00} = 0$.

Proposição 3.9 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r > 1$ e $U(UV) = 0$ então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vimos no Teorema 1.1 que $U(UV) = 0$ se e somente se $\tilde{V}_{11} = 0$. E, pela Proposição 1.9, a dimensão do subespaço $\tilde{V}_{01}$ é $\dim U - \dim L$. Podemos supor que A é não excepcional, pois para estas álgebras já vale o resultado. De $U(UV) = 0$ resulta que $UV + V^2 \subseteq L$. Assim, se $k = \dim L$, temos que $\dim \tilde{V}_{11} \leq 1 + rk$ e $\dim \tilde{V}_{10} \leq sk$, já que os elementos de $\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}$ e $\tilde{V}_{10}$ têm imagem contida em $UV + V^2$, de acordo com (1.18) e (1.19). Portanto, $\dim M(A) = \dim (F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01}) \leq 1 + r + s + 1 + rk + sk + r - k = 1 + r + r(k + 1) + s(k + 1) - (k - 1)$. Se $k \neq 0$ então

$\dim M(A) \leq 1 + r + r(k+1) + s(k+1) \leq 1 + r + r^2 + rs$, pois $k < r$. Se $k = 0$ então $\dim M(A) = 1 + r + r + s + 1 < 1 + r + r^2 + rs$, pois $r > 1$. $\square$

Dessa maneira, obtemos a dimensão máxima para álgebras de multiplicações de álgebras de tipo $(1+r, s)$, com $r \leq 3$ ou $s \leq 1$, pois, pelo Lema 2.4, álgebras com estes tipos têm $U(UV) = 0$ e, portanto, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.

Passamos agora a outra classe de álgebras. Para obter a limitação proposta, usaremos um resultado conhecido na teoria das álgebras de Lie.

O Teorema de Lie diz que toda álgebra de Lie de transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo de característica zero algebricamente fechado que é solúvel pode ter as matrizes de seus elementos tomados simultaneamente triangularizados (veja [31, pág 50]). Com uma demonstração análoga, temos o seguinte resultado:

Lema 3.2 *Sejam W um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo arbitrário e $A \subseteq \text{End } W$ uma subálgebra nilpotente. Então existe uma base B de W tal que a matriz de todo operador de A , escrita na base B , é triangular inferior. Em particular, $\dim A \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja k o índice de nilpotência de A . Temos

$$0 = A^k(W) \subsetneq A^{k-1}(W) \subsetneq \dots \subsetneq A(W) \subsetneq W.$$

Seja $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}$ uma base de W tal que $B_{k-1} \cup \dots \cup B_{k-t}$ é base de $A^{k-t}(W)$, para $1 \leq t \leq k-1$. Então, para todo $\sigma \in A$, $[\sigma]_B$ é uma matriz triangular inferior. $\square$

Com a ajuda desse lema, podemos estabelecer uma nova classe de álgebras de Bernstein cuja dimensão máxima da álgebra de multiplicações pode ser dada por uma álgebra excepcional, para cada tipo fixado.

Proposição 3.10 *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $r > s$ e núcleo nilpotente. Então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$ e, pelo Teorema 2.1, $\tilde{N}$ é nilpotente. Como $\tilde{N} \subseteq \text{End } A$ e $r > s$, temos, pelo lema anterior, $\dim \tilde{N} \leq \frac{1}{2}(1+r+s)(r+s) < r^2 + rs + r$. Portanto, $\dim M(A) < 2 + r + r^2 + rs$, ou seja, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

Com este resultado, fica faltando analisar a dimensão máxima das álgebras com $s \geq r$ ou N não nilpotente, com $r \geq 4$ ou $s \geq 2$. Estudaremos agora os casos em que $r = 4$ ou

$s = 2$, tratando das álgebras que verificam $\dim U(UV) = 1$. Para isso, descreveremos com mais detalhe alguns subespaços da decomposição de Peirce de $M(A)$, para uma álgebra de Bernstein Jordan.

Lema 3.3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein Jordan. Então*

$$(i) \quad \tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3);$$

$$(ii) \quad \tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x = \alpha e + u + v \in A$, com $\alpha \in F$, $u \in U$ e $v \in V$. Como A é Bernstein Jordan, as componentes de L_x nos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ dadas em (1.12) a (1.15) ficam $[L_x]_{11} = \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_v L_e$, $[L_x]_{10} = 2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u$, $[L_x]_{01} = 2L_u - 2L_e L_u$ e $[L_x]_{00} = 0$. Portanto, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^2)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2)$. Lembrando que $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$, obtemos $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + \{2L_v L_e(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) : u \in U, v \in V\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + \{2(L_u - 2L_e L_u)L_v L_e : u \in U, v \in V\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3)$. Observamos ainda que $2L_v L_e(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) = 2L_e L_{uv} - \frac{1}{2}\psi_{uv}$ e $2(L_u - 2L_e L_u)L_v L_e = L_{uv} - 2L_e L_{uv}$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3)$. $\square$

Lema 3.4 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein tal que $U(UV) = \langle v \rangle$. Então $Uv \subseteq L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $Uv \not\subseteq L$ então existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $u_1(u_2v) \neq 0$. Como $u_1(u_2v) \in U(UV) = \langle v \rangle$, existe $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ tal que $u_1(u_2v) = \lambda v$, o que é uma contradição com o Lema 2.4, que diz que $\{v, u_1(u_2v)\}$ é um conjunto linearmente independente. $\square$

Observação 3.1 *Seja $W \subseteq \text{ann}A$ um subespaço e $V = W \oplus V'$. Então cada $\sigma \in \tilde{V}_{10}$ pode ser considerada como um elemento de $\text{Hom}(V', UV + V^2)$, pois $W \subseteq \ker \sigma$. Do mesmo modo, o subespaço $\tilde{V}_{00}$ está identificado com um subespaço de $\text{Hom}(V', U(UV))$.*

Proposição 3.11 *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $\dim U(UV) = 1$. Então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $U(UV) \neq 0$, temos que $r \geq 4$ e $s \geq 2$. Vamos considerar inicialmente o caso $L = 0$. Seja $\langle v \rangle = U(UV)$. Pelo Lema 3.4, $Uv \subseteq L$. Logo, $Uv = 0$. Temos ainda $Vv \subseteq L = 0$. Portanto, $v \in \text{ann}A$. Seja $V = V' \oplus Fv$. Agora, como

A é Bernstein Jordan, N é nilpotente. Assim, $U \supsetneq UV \supsetneq (UV)V \supsetneq \dots$ é cadeia estritamente decrescente. Em particular, $\dim((UV)V)V \leq r - 3$. Como $U(UV) \subseteq \text{ann} A$, temos que $U(U(UV)) = 0$ e $U^3V = (UU^2)V = (UV)U^2 \subseteq U(U(UV)) = 0$. Dessa maneira, $N^4 \cap U = U(U(UV)) + U^3V + ((UV)V)V = ((UV)V)V$. Pelo Lema 3.3, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$. Os operadores de $\tilde{N}^3 \cap \tilde{V}$ têm imagem contida em N^4 , pela Observação 1.4. Logo, $\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3 \subseteq \text{Hom}(V', ((UV)V)V)$ é um subespaço de dimensão no máximo $(s-1)(r-3)$ e $\{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\}$ tem dimensão limitada por r . A limitação da dimensão do subespaço $\tilde{V}_{10}$, neste caso, fica $r+sr-r-3r+3 = sr-3r+3$. Vamos analisar os outros subespaços. Temos que $\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2 \subseteq \text{Hom}(U, U(UV))$ e $V_{10} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2)$. Portanto, $\dim \tilde{V}_{01} \leq 2r$. O subespaço $\tilde{V}_{00}$ está identificado com um subespaço de $\text{Hom}(V', U(UV))$, ou seja, $\dim \tilde{V}_{00} \leq s - 1$. Usando o Lema 3.2 e lembrando que $\tilde{N} \cap \tilde{V}_{11}$ é uma subálgebra nilpotente de $\text{End } U$, resulta que $\dim(\tilde{N} \cap \tilde{V}_{11}) \leq \frac{1}{2}r(r-1)$. Assim, $\dim M(A) = \dim \left(F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus (\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}) \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00} \right) \leq 1+r+s+1+\frac{1}{2}r(r-1)+sr-3s+3+2r+s-1 = 1+r+r^2+rs - \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{2}r+s-3 \right) \leq 1+r+r^2+rs$, pois $s \geq 2$ e $r \geq 4$. Suponha agora que $L \neq 0$ e seja $k = \dim L$. Temos que $\bar{A} = A/L$ é uma álgebra de tipo $(1+r-k, s)$ satisfazendo $\bar{L} = 0$ e $\bar{U}(\bar{U}\bar{V}) = \langle \bar{v} \rangle$. Assim, pela parte anterior, $\dim M(\bar{A}) \leq 1 + (r-k) + (r-k)^2 + (r-k)s = 1 + r + r^2 + rs - (k + 2rk - k^2 + ks) \leq 1 + r + r^2 + rs - (k + ks - rk)$, pois $k \leq r$ implica $rk - k^2 \geq 0$. Como $(L : A) \subseteq \text{Hom}(A, L)$, resulta que $\dim(L : A) \leq (r+s+1)k$. Usando o fato que $M(A/L) \cong M(A)/(L : A)$ (veja a Proposição 1.2), concluímos que $\dim M(A) = \dim M(A/L) + \dim(L : A) \leq 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

Veremos a seguir que, com a Proposição 3.11, tratamos os casos em que $r = 4$ ou $s = 2$.

Proposição 3.12 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $s \leq 2$ então $\dim U(UV) \leq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Observação 2.4, temos que $U(UV) \neq V$. Assim, $\dim U(UV) < \dim V$. $\square$

Proposição 3.13 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $r \leq 4$ então $\dim U(UV) \leq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Já vimos no Lema 2.4 que se $r \leq 3$ então $U(UV) = 0$. Suponhamos que $r = 4$ e $U(UV) \neq 0$. Sejam $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1(u_2v) \neq 0$. Desse modo, $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ é uma base de U . Além disso, $L = 0$. De fato, seja $u = \gamma_1 u_1 +$

$\gamma_2 u_2 + \gamma_e u_1 v + \gamma_4 u_1 v \in L$, com $\gamma_1, \dots, \gamma_4 \in F$. Multiplicando por $u_1 v$, obtemos $0 = u(u_1 v) = \gamma_2 u_2(u_1 v)$, isto é, $\gamma_2 = 0$. De modo similar, usando o elemento $u_2 v$, temos $\gamma_1 = 0$, ou seja, $u = \gamma_3 u_1 v + \gamma_4 u_2 v$. Multiplicando por u_1 concluímos que $\gamma_4 = 0$ e portanto, também $\gamma_3 = 0$. Assim, $u = 0$. Observando que $u \in \langle u_1 v, u_2 v \rangle$ implica $Uu \subseteq U(UV) = \langle u_1(u_2 v) \rangle$, basta provar que se $w \in V$ então $u_1(u_2 w) \in \langle u_1(u_2 v) \rangle$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in F$ tais que $u_2 w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1 v + \alpha_4 u_2 v$. Da identidade $(u_2 v)(u_2 w) = 0$ segue que $\alpha_1 u_1(u_2 v) = 0$, ou seja, $\alpha_1 = 0$. Portanto, $u_2 w = \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1 v + \alpha_4 u_2 v$. De modo análogo, escrevendo $u_1 w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_e u_1 v + \beta_4 u_2 v$, com $\beta_1, \dots, \beta_4 \in F$, obtemos $\beta_2 = 0$, isto é, $u_1 w = \beta_1 u_1 + \beta_3 u_1 v + \beta_4 u_2 v$. Se $\alpha_2 = 0$ então $u_2 w \in \langle u_1 v, u_2 v \rangle$, o que prova que $u_1(u_2 w)$ é um elemento de $\langle u_1(u_2 v) \rangle$. Analogamente se $\beta_1 = 0$, observando que $u_1(u_2 w) = -u_2(u_1 w)$. Consideraremos então que $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Das identidades $u_2(u_2 w) = 0$ e $(u_2 w)^2 = 0$, obtemos $\alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_2(u_1 v) = 0$ e $\alpha_2^2 u_2^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 u_2(u_1 v) = 0$. Comparando as duas equações, concluímos que $u_2^2 = -\alpha_2^{-1} \alpha_3 u_2(u_1 v) = -2\alpha_2^{-1} \alpha_3 u_2(u_1 v)$, ou seja, $u_2^2 = 0$. Da mesma maneira, usando $u_1(u_1 w) = 0$ e $(u_1 w)^2 = 0$, chegamos que $u_1^2 = 0$. Assim, $u(u_1 u_2) = -\frac{1}{2} u_1^2 u_2 = 0$ e $u_2(u_1 u_2) = -\frac{1}{2} u_2^2 u_1 = 0$ e, usando também o fato que A é Bernstein Jordan, $(u_1 v)(u_1 u_2) = -(u_1(u_1 u_2))v = 0$ e $(u_2 v)(u_1 u_2) = -(u_2(u_1 u_2))v = 0$. Portanto, $u_1 u_2 \in L = 0$. Logo, $U(UV) \subseteq U^2 \subseteq U\langle u_1 v, u_2 v \rangle \subseteq \langle u_1(u_2 v) \rangle$ tem dimensão 1. $\square$

Com os resultados obtidos até o momento, podemos determinar a dimensão máxima de $M(A)$ para todas as álgebras de dimensão menor ou igual a 8 e para as de tipo $(1+r, s)$, com $r \leq 4$ ou $s \leq 2$, além daquelas com $r < s$ e núcleo nilpotente. Todas as álgebras estudadas tem dimensão de $M(A)$ limitada por $1 + r + r^2 + rs$. Nosso objetivo futuro é provar que nas outras classes restantes vale a mesma limitação. Observamos que basta mostrar essa conjectura para álgebras com $s \geq r$ que têm $L = 0$, e o caso geral poderia ser demonstrado com um raciocínio semelhante ao da segunda parte da demonstração da Proposição 3.11.

Na figura a seguir, temos a variação das dimensões das álgebras de multiplicações de álgebras de cada tipo fixado.

(1,0) 1						
(2,0) 3	(1,1) 1					
(3,0) 4	(2,1) 3→5	(1,2) 1				
(4,0) 5	(3,1) 4→7	(2,2) 3→5	(1,3) 1			
(5,0) 6	(4,1) 5→10	(3,2) 4→11	(2,3) 3→6	(1,4) 1		
(6,0) 7	(5,1) 6→13	(4,2) 5→18	(3,3) 4→13	(2,4) 3→7	(1,5) 1	
(7,0) 8	(6,1) 7→19	(5,2) 6→29	(4,3) 5→22	(3,4) 4→15	(2,5) 3→8	(1,6) 1

⋮
⋮
⋮

(n,0) n+1	(n-1,1) n→3n-2	(n-2,2) n-1→1-3n+n ²		(4,n-4) 5→1+3n	(3,n-3) 4→2n+1	(2,n-2) 3→n+1	(1,n-1) 1
--------------	-------------------	------------------------------------	-------	-------------------	-------------------	------------------	--------------

Capítulo 4

Isomorfismos

Neste capítulo, estudaremos propriedades das álgebras de Bernstein que são preservadas por isomorfismos de suas álgebras de multiplicações. Veremos inicialmente que todo isomorfismo entre álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein é bário, considerando $M(A)$ sempre munida da função peso induzida pela função peso de A . Na seção 4.3 discutiremos a existência de outros caracteres da álgebra de multiplicações e os automorfismos de $M(A)$ serão abordados na última seção.

4.1 Sobre isomorfismos não báricos

Vejamos algumas propriedades que têm os isomorfismos entre álgebras báricas.

Lema 4.1 *Se (A, ω) e (A', ω') são álgebras báricas e $\Phi: A \rightarrow A'$ é um isomorfismo tal que $\Phi(\ker \omega) \subseteq \ker \omega'$ então Φ é um isomorfismo bário.*

DEMONSTRAÇÃO: Como Φ é um isomorfismo, temos que $\Phi(\ker \omega)$ tem codimensão 1 em A' . Assim, $\Phi(\ker \omega) \subseteq \ker \omega'$ implica que $\Phi(\ker \omega) = \ker \omega'$. Além disso, se $c \in A$ é tal que $\omega(c) = 1$ então $\omega'(\Phi(c)) = \omega'(\Phi(c^2)) = \omega'(\Phi(c)^2)$, ou seja, $\omega'(\Phi(c)) = 0$ ou 1. Mas $\Phi(c) \notin \ker \omega'$. Portanto, $\omega'(\Phi(c)) = 1$. Pela decomposição $A = Fc \oplus \ker \omega$, concluímos que $\omega' \circ \Phi = \omega$, ou seja, Φ é bário. $\square$

Lema 4.2 *Se (A, ω) e (A', ω') são álgebras báricas e $\Phi: A \rightarrow A'$ é um isomorfismo então existe um caracter ω'_1 de A' tal que Φ é isomorfismo bário entre (A, ω) e (A', ω'_1) .*

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que $\Phi(\ker \omega)$ é um ideal bilateral de codimensão 1 que não contém A'^2 . Assim, $\Phi(\ker \omega)$ é núcleo de algum caracter ω'_1 de A' . Pelo lema anterior, Φ é isomorfismo bário entre (A, ω) e (A', ω'_1) . $\square$

Por este último lema, resulta que se estamos em uma classe onde as álgebras têm um único carater, por exemplo, nas álgebras de Bernstein, isomorfismos implicam isomorfismos báricos. Este não é o caso das álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein. Na Seção 4.3 veremos que, em geral, as álgebras de multiplicações têm 2 caracteres. Mesmo assim, isomorfismos entre essas álgebras implicam isomorfismos báricos, onde $M(A)$ está sempre munida da função peso induzida, como mostra o teorema abaixo.

Lema 4.3 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ e A' são álgebras de Bernstein e $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo tal que $\Phi(2L_e^2 - L_e)$ tem peso 1 então Φ é um isomorfismo bárico.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $(2L_e^2 - L_e)(N : A) = 0$, temos que $\Phi(2L_e^2 - L_e)\Phi((N : A)) = 0$. Em particular, os elementos de $\Phi(2L_e^2 - L_e)\Phi((N : A))$ têm peso nulo. Mas $\Phi(2L_e^2 - L_e)$ tem peso 1, portanto, $\Phi((N : A)) \subseteq (N' : A')$. Pelo Lema 4.1, Φ é isomorfismo bárico. $\square$

Teorema 4.1 *Todo isomorfismo entre álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein é bárico.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que existe $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ isomorfismo não bárico. Seja $e' \in \text{Ip}(A')$ um idempotente arbitrário e $M(A') = F(2L_{e'}^2 - L_{e'}) \oplus \tilde{U}_{e'}' \oplus \tilde{V}_{e'}'$ a decomposição de Peirce de $M(A')$ relativa a esse idempotente. Pelo lema anterior, $\Phi(2L_e^2 - L_e) \in \tilde{U}_{e'}' \oplus \tilde{V}_{e'}'$. Portanto, existem $\psi_{x'} \in \tilde{U}_{e'}'$ e $\theta' \in \tilde{V}_{e'}'$ tais que $\Phi(2L_e^2 - L_e) = \psi_{x'} + \theta'$. Usando o isomorfismo inverso, que também não é bárico, garantimos a existência de $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in \tilde{V}$ tais que $\sigma = \psi_x + \theta = \Phi^{-1}(2L_{e'}^2 - L_{e'})$. Como $\sigma \in (N : A)$, temos que $(2L_e^2 - L_e)\sigma = 0$. Aplicando o isomorfismo Φ , obtemos que $0 = (\psi_{x'} + \theta')(2L_{e'}^2 - L_{e'}) = \psi_{x'}$, ou seja, $\Phi(2L_e^2 - L_e) \in \tilde{V}_{e'}'$. Como esse raciocínio não depende do idempotente $e' \in \text{Ip}(A')$, concluímos que $\Phi(2L_e^2 - L_e) \in \bigcap_{e' \in \text{Ip}(A')} \tilde{V}_{e'}'$. Mas os elementos dessa intersecção se anulam em A'^2 , pela Proposição 1.5. Dessa maneira, $\sigma' = \Phi(2L_e^2 - L_e)$ é uma projeção, cujo núcleo contém $Fe' \oplus U' \oplus U'^2$. Em particular, $\sigma' = \Phi(2L_e^2 - L_e) \in \tilde{V}_{10}' \oplus \tilde{V}_{00}' \subseteq \tilde{N}'$. Pela Proposição 2.7, os idempotentes de $\tilde{N}'$ estão em $\tilde{V}_{11}' \oplus \tilde{V}_{10}'$. Assim, $\sigma \in \tilde{V}_{10}'$, o que é uma contradição, pois em $\tilde{V}_{10}'$ não existem idempotentes não nulos. Portanto, Φ deve ser um isomorfismo bárico. $\square$

4.2 Propriedades preservadas por isomorfismos

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $\mathcal{F}$ um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Consideremos o seguinte problema: “Dada uma propriedade P a respeito dos objetos de $\mathcal{C}$, é verdade que isomorfismos

entre objetos de $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ preservam P via $\mathcal{F}$?” Mais formalmente, dados A e B objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que A tem a propriedade P e $\mathcal{F}(A)$ é isomorfa a $\mathcal{F}(B)$ então B tem a propriedade P ?

Por exemplo, para o funtor “esquecimento” da categoria dos grupos na categoria dos conjuntos, a cardinalidade do grupo é preservada, mas qualquer outra propriedade estrutural, não. Em outro extremo, se $\mathcal{F}$ é o funtor usual da categoria dos grupos abelianos, denotado por Ab , na categoria dos $\mathbb{Z}$ -módulos, temos que isomorfismos entre objetos de $\mathcal{F}(\text{Ab})$ implicam em isomorfismos dos respectivos grupos. Assim, propriedades estruturais dos grupos são preservadas. O mesmo ocorre entre quaisquer outras categorias equivalentes.

Essa questão não se encaixa no nosso contexto, já que $A \rightarrow M(A)$ não dá origem a um funtor da categoria das álgebras de Bernstein na categoria das álgebras associativas: nem sempre é possível definir um homomorfismo de $M(A)$ em $M(A')$ a partir de um homomorfismo básico $\varphi: A \rightarrow A'$. Mas quando $\varphi: A \rightarrow A'$ é um epimorfismo, temos um epimorfismo $\tilde{\varphi}: M(A) \rightarrow M(A')$, de acordo com a Proposição 1.1. Em particular, isomorfismos entre álgebras de Bernstein implicam em isomorfismos de suas respectivas álgebras de multiplicações. A recíproca não é verdadeira, conforme já foi visto anteriormente: álgebras de tipo $(1, s)$ têm álgebras de multiplicações isomorfas a F , para qualquer $s \geq 0$. Além dessas, temos as álgebras de Bernstein associadas a grafos, de acordo com a observação feita no final da Seção 3.2.1. Podemos então considerar o problema acima enunciado, sem o uso da noção de funtores: “Se A e A' são álgebras de Bernstein tais que $M(A)$ e $M(A')$ são isomorfas e A tem a propriedade P então A' também tem a propriedade P ?” Nesta seção, exibiremos algumas das propriedades das álgebras de Bernstein que são preservadas por isomorfismos de suas álgebras de multiplicações.

Vimos na Proposição 2.2 (i) como são os idempotentes de peso 1 em álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein. O próximo resultado mostra como são os idempotentes que podem ser imagem por isomorfismo do operador $2L_e^2 - L_e$.

Proposição 4.1 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ e $A' = Fe' \oplus U' \oplus V'$ álgebras de Bernstein e $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ um isomorfismo. Então $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'}$, para algum $x' \in U' \oplus U'^2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'} + \theta'$. Pela Proposição 2.2 (i), θ é idempotente. Como Φ é um isomorfismo básico, temos que $\Phi((N : A)) = (N' : A')$. Assim, para todo $\sigma' \in (N' : A')$, existe $\sigma \in (N : A)$ tal que $\Phi(\sigma) = \sigma'$, em particular, existe $\theta \in (N : A)$ tal que $\Phi(\theta) = \theta'$. Temos então, $0 = (2L_e^2 - L_e)\theta = \Phi((2L_e^2 - L_e)\theta) = (2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'} + \theta')\theta' = \theta'^2 = \theta'$. Portanto, $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'}$. $\square$

Observação 4.1 Existem, de fato, idempotentes em $M(A')$ que não podem ser imagem de $2L_e^2 - L_e$ por isomorfismos, por exemplo, aqueles da forma $2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'} + 4L_{e'} - 4L_{e'}^2$, com $x' \in U'^2$.

Proposição 4.2 Se A e A' são álgebras de Bernstein e $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo então $\Phi(\tilde{U}) = \tilde{U}'$ e, portanto, A^2 e A'^2 têm mesma dimensão.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ isomorfismo, $A = Fe \oplus U \oplus V$ e $A' = Fe' \oplus U' \oplus V'$. Pela Proposição 4.1, temos que $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x_0}$, onde $x_0 \in U' \oplus U'^2$. Para cada $x \in U \oplus U^2$, temos que $\Phi(\psi_x) \in (N' : A')$, pelo Teorema 4.1 e, além disso, $\Phi(\psi_x) = \Phi(\psi_x(2L_e^2 - L_e)) = \Phi(\psi_x)\Phi(2L_e^2 - L_e) = \Phi(\psi_x)(2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x_0})$. Assim, $\Phi(\psi_x)(N') = \Phi(\psi_x)(2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x_0})(N') = 0$. Dessa maneira, concluímos que $\Phi(\psi_x) \in \tilde{U}'$, ou seja, $\Phi(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U}'$. Portanto, $\dim \tilde{U} \leq \dim \tilde{U}'$. Analogamente, usando Φ^{-1} , obtemos $\dim \tilde{U}' \leq \dim \tilde{U}$. Como $\dim \tilde{U} = \dim U \oplus U^2$ (e $\dim \tilde{U}' = \dim U' \oplus U'^2$), resulta que $\dim A^2 = \dim A'^2$. $\square$

É consequência da proposição anterior que isomorfismos entre álgebras de multiplicações de álgebras excepcionais preservam a dimensão do subespaço U :

Corolário Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ e $A' = Fe' \oplus U' \oplus V'$ álgebras de Bernstein excepcionais tais que $M(A)$ e $M(A')$ são isomorfas. Então $\dim U = \dim U'$ e, portanto, A^2 e A'^2 têm o mesmo tipo. $\square$

Veremos a seguir (Corolário 3 abaixo) que, também nas álgebras normais, o tipo de A^2 é preservado por isomorfismos de álgebras de multiplicações.

Proposição 4.3 Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Então $\{\psi_x : x \in U^2 \cap \text{ann} N\} \subseteq \text{ann}(N : A) \subseteq \{\psi_x : x \in U^2 \cap \text{ann} N\} \oplus \tilde{V}_{00}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in U^2 \cap \text{ann} N$. Como $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) + \tilde{N}$, $(4L_e - 4L_e^2)\psi_x = \psi_x(4L_e - 4L_e^2) = 0$ e $\tilde{N}\psi_x = \psi_x\tilde{N} = 0$, temos a primeira inclusão. Para provar a segunda, seja $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_u + \psi_x + \theta_{11} + \theta_{10} + \theta_{01} + \theta_{00} \in \text{ann}(N : A)$, $u \in U, x \in U^2$. Para todo $y \in U \oplus U^2$, tem-se $0 = \psi_y\sigma = \alpha\psi_y$, ou seja, $\alpha = 0$. Além disso, $0 = \sigma(4L_e - 4L_e^2) = \theta_{11} + \theta_{01}$ e $0 = (4L_e - 4L_e^2)\sigma = \psi_u + \theta_{11} + \theta_{10}$, o que implica que $\sigma \in \{\psi_x : x \in U^2\} \oplus \tilde{V}_{00}$. Seja agora $x \in U^2$ tal que $x \notin \text{ann} N$. Então $xU \neq 0$ ou $xV \neq 0$. Se $xu \neq 0$, para algum $u \in U$, então $L_u\psi_x = \psi_{ux} \neq 0$ e, portanto, $\psi_x \notin \text{ann}(N : A)$. Se $vx \neq 0$, para algum $v \in V$, então $L_v\psi_x = \psi_{vx} \neq 0$. Consequentemente, $\text{ann}(N : A) \subseteq \{\psi_x : x \in U^2 \cap \text{ann} N\} \oplus \tilde{V}_{00}$. $\square$

Corolário 1 Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein com $U(UV) = 0$ então $\text{ann}(N : A) = \{\psi_x : x \in U^2 \cap \text{ann}N\}$. $\square$

Corolário 2 Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein normal então $\text{ann}(N : A) = \{\psi_x : x \in U^2\}$. $\square$

Corolário 3 Se A e A' são álgebras de Bernstein normais tais que $M(A)$ e $M(A')$ são isomorfas então A^2 e A'^2 têm o mesmo tipo.

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que $\text{ann}(N : A)$ é levado em $\text{ann}(N' : A')$ por qualquer isomorfismo (bárico). Pelo Corolário 2, $\text{ann}(N : A)$ tem a dimensão de U^2 nas álgebras normais. Assim, $\dim U^2 = \dim U'^2$. $\square$

O resultado obtido acima também vale para álgebras de Bernstein arbitrárias. Para sua demonstração, usaremos a seguinte proposição:

Proposição 4.4 Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e W um subespaço de V complementar a U^2 , ou seja, $V = U^2 \oplus W$. Se $\sigma \in M(A)$ é tal que $\sigma|_W = 0$ então, para qualquer isomorfismo $\Phi : M(A) \rightarrow M(A')$, tem-se $\text{rk}(\sigma) \leq \text{rk}(\Phi(\sigma))$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta \in M(A)$, com $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in \tilde{V}$. Como $\text{rk}(\alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x) \leq 1$, temos que $\text{rk}(\sigma) = 1 + \text{rk}(\theta)$ ou $\text{rk}(\sigma) = \text{rk}(\theta)$. Se $\text{rk}(\sigma) = 1 + \text{rk}(\theta) = 1 + m$ então, como $\sigma|_W = 0$, existem $x_1, \dots, x_m \in U \oplus U^2$ tal que $\{\sigma(e), \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)\}$ é um conjunto linearmente independente, ou seja, para todo $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in F^{m+1} \setminus \{0\}$, tem-se que $0 \neq \lambda_0\sigma(e) + \lambda_1\sigma(x_1) + \dots + \lambda_m\sigma(x_m) = (\lambda_0\sigma(2L_e^2 - L_e) + \lambda_1\sigma\psi_{x_1} + \dots + \lambda_m\sigma\psi_{x_m})(e)$. Aplicando o isomorfismo Φ e lembrando que $\Phi(\tilde{U}) = \tilde{U}'$ e $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'}$, para algum $x' \in \tilde{U}' \oplus \tilde{U}'^2$, obtemos:

$$\lambda_0\Phi(\sigma)(2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{x'}) + \lambda_1\Phi(\sigma)\psi_{x'_1} + \dots + \lambda_m\Phi(\sigma)\psi_{x'_m} \neq 0,$$

onde $\psi_{x'_i} = \Phi(\psi_{x_i})$. Esse operador está em $F(2L_{e'}^2 - L_{e'}) \oplus \tilde{U}'$. Assim, calculando em e' ,

$$\lambda_0\Phi(\sigma)(e' + x') + \lambda_1\Phi(\sigma)(x'_1) + \dots + \lambda_m\Phi(\sigma)(x'_m) \neq 0,$$

para todo $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in F^{m+1} \setminus \{0\}$, ou seja, $\{\Phi(\sigma)(e' + x'), \Phi(\sigma)(x'_1), \dots, \Phi(\sigma)(x'_m)\}$ é um conjunto linearmente independente. Portanto, $\text{rk}(\sigma) \leq \text{rk}(\Phi(\sigma))$. Se $\text{rk}(\sigma) = \text{rk}(\theta)$, existem $x_1, \dots, x_m \in U \oplus U^2$ tais que $\{\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)\}$ é linearmente independente. A demonstração de que $\text{rk}(\sigma) \leq \text{rk}(\Phi(\sigma))$ é análoga ao caso anterior. $\square$

Corolário 1 Se $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo e A é uma álgebra nuclear então $\text{rk}(\sigma) \leq \text{rk}(\Phi(\sigma))$, para todo $\sigma \in M(A)$. $\square$

Corolário 2 Se $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é isomorfismo e A, A' são álgebras nucleares então $\text{rk}(\sigma) = \text{rk}(\Phi(\sigma))$, para todo $\sigma \in M(A)$, em particular, $\rho(A) = \rho(A')$. $\square$

Proposição 4.5 Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ e $A' = Fe' \oplus U' \oplus V'$ são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas então $\dim U = \dim U'$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\dim U = r$ e $\dim U = r'$. O idempotente $4L_e - 4L_e^2$ tem posto r e $(4L_e - 4L_e^2)|_V = 0$. Pela Proposição 4.4, $\text{rk}(\Phi(4L_e - 4L_e^2)) \geq r$. Por outro lado, o idempotente $\Phi(4L_e - 4L_e^2) \in (N' : A')$ tem posto menor ou igual a r' , pela Proposição 2.8. Assim, $r \leq \text{rk}(\Phi(4L_e - 4L_e^2)) \leq r'$. De modo análogo, usando o isomorfismo inverso, obtemos $r' \leq r$. Assim, $\dim U = r = r' = \dim U'$. $\square$

Corolário 1 Se A e A' são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas então A^2 e A'^2 têm o mesmo tipo.

DEMONSTRAÇÃO: Segue das Proposições 4.2 e 4.5. $\square$

Outro corolário da Proposição anterior diz respeito à imagem do operador $4L_e - 4L_e^2$:

Corolário 2 Se A e A' são álgebras de Bernstein não excepcionais e $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo então $\Phi(4L_e - 4L_e^2) = 4L_{e'} - 4L_{e'}^2 + \theta$, onde $\theta \in \tilde{N}'$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $\sigma' = \Phi(4L_e - 4L_e^2) \in \tilde{N}'$. Pela Proposição 2.6, a imagem de σ' está contida em L' e, portanto, seu posto é estritamente menor que $r' = \dim \tilde{U}'$, já que a álgebra A' não é excepcional. Pela proposição anterior, $r = \dim U = \dim U' = r'$. Portanto, o posto de σ' é estritamente menor que r . Mas, pela Proposição 4.4, $r = \text{rk}(4L_e - 4L_e^2) \leq \text{rk} \Phi(4L_e - 4L_e^2) = \text{rk} \sigma' < r$, o que é uma contradição. Portanto, $\Phi(4L_e - 4L_e^2) \notin \tilde{N}$. Como $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$, temos que $\Phi(4L_e - 4L_e^2)$ tem componente em $F(4L_e - 4L_e^2)$ e essa componente tem coeficiente 1, em vista da Observação 2.1. $\square$

A proposição anterior também estabelece uma subclasse de álgebras de Bernstein preservada por isomorfismos de suas álgebras de multiplicações:

Corolário 3 Se A e A' são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas e A é excepcional então A' também é excepcional.

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Corolário 1 anterior. $\square$

Assim como as álgebras excepcionais, os próximos resultados mostram que as álgebras normais e as álgebras não excepcionais com núcleo nilpotente são classes preservadas por isomorfismos de álgebras de multiplicações.

Lema 4.4 *Sejam $(A, \omega), (A', \omega')$ álgebras báricas não necessariamente comutativas, $\Phi: A \rightarrow A'$ isomorfismo bárico e $x_0 \in \text{ann}(\ker \omega')$. A aplicação linear $f_{x_0}: A \rightarrow A'$ definida por $f_{x_0}(x) = \Phi(x) + \omega(x)x_0$ é isomorfismo se e somente se $x_0 = \Phi(e)x_0 + x_0\Phi(e)$, para algum idempotente $e \in A$ de peso 1.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $e \in A$ um idempotente de peso 1 e $x \in A$. Então $x = \omega(x)e + n$, onde $n \in \ker \omega$ e $\Phi(x)x_0 = \Phi(\omega(x)e + n)x_0 = \omega(x)\Phi(e)x_0$. Do mesmo modo, $x_0\Phi(x) = \omega(x)x_0\Phi(e)$. Assim, se $x, y \in A$, temos $f_{x_0}(xy) = \Phi(xy) + \omega(xy)x_0$ e $f_{x_0}(x)f_{x_0}(y) = (\Phi(x) + \omega(x)x_0)(\Phi(y) + \omega(y)x_0) = \Phi(x)\Phi(y) + \omega(y)\omega(x)\Phi(e)x_0 + \omega(x)\omega(y)x_0\Phi(e) = \Phi(xy) + \omega(xy)(\Phi(e)x_0 + x_0\Phi(e))$. Portanto, $f_{x_0}(xy) = f_{x_0}(x)f_{x_0}(y)$ se e somente se $x_0 = \Phi(e)x_0 + x_0\Phi(e)$. $\square$

Observação 4.2 No caso em que as álgebras são de Bernstein, x_0 deve ser um elemento de $U \cap \text{ann} \ker \omega'$. Para álgebras de multiplicações de álgebras de Bernstein, é suficiente que $x_0 \in \tilde{U} \cap \text{ann}(N : A)$, ou seja, $x_0 \in \{\psi_x : x \in U'^2 \cap \text{ann} N'\}$.

Proposição 4.6 *Se A e A' são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas, $e \in A$ idempotente não nulo e A' é uma álgebra normal então existe isomorfismo $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ com $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'}$, para algum idempotente $e' \in A'$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.1, $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_x$, onde $x \in U' \oplus U'^2$. Se $x = u + v$, com $u \in U$ e $v \in U'^2$, substituímos Φ por $f_{\psi_{u^2-v}}$. Observe que o operador ψ_{u^2-v} está em $\tilde{U} \cap \text{ann}(N : A)$. Temos então $f_{\psi_{u^2-v}}(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{u+v} + \psi_{u^2-v} = 2L_{e'}^2 - L_{e'} + \psi_{u+u^2} = 2L_{e'_0}^2 - L_{e'_0}$, onde $e'_0 = e' + u + u^2$. $\square$

Proposição 4.7 *Se A e A' são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas e A' é uma álgebra normal então A também é normal.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$ e $M(A') = F(2L_{e'}^2 - L_{e'}) \oplus \tilde{U}' \oplus F(4L_{e'} - 4L_{e'}^2) \oplus \{L_u - 2L_e L_u : u \in U'\}$. Vamos provar que $\tilde{V}_{10} = 0$. Pelo corolário anterior, podemos supor que $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo tal que

$\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e'}^2 - L_{e'}$. Assim, Φ preserva a primeira decomposição de Peirce, ou seja, $\Phi(\tilde{U}) = \tilde{U}'$ e $\Phi(\tilde{V}) = \tilde{V}'$. Seja $\sigma \in \tilde{V}_{10}$. Como $\sigma^2 = 0$, temos que $\Phi(\sigma) \in \tilde{V}' \cap \tilde{N}' = \tilde{V}'_{01}$. Assim, $\Phi(\sigma) = \Phi((4L_e - 4L_e^2)\sigma) = \Phi(4L_e - 4L_e^2)\Phi(\sigma) \in (\tilde{V}'_{11} \oplus \tilde{V}'_{01})\tilde{V}'_{01} = 0$. Portanto, $\sigma = 0$. Segue do Teorema 1.1, que A é uma álgebra normal. $\square$

Observação 4.3 Mesmo assim, álgebras de Bernstein normais com mesmo tipo e nucleares com álgebras de multiplicações isomorfas podem não ser isomorfas, como mostra o próximo exemplo, obtido por J.C. Gutiérrez F.:

Exemplo 4.1 Sejam $A = \langle e, u_1, u_2, v \rangle$ e $A' = \langle e', u'_1, u'_2, v' \rangle$ com as seguintes tábuas de multiplicação:

	u_1	u_2	v		u'_1	u'_2	v'
u_1	v			u'_1		v'	
u_2		v		u'_2	v'		
v				v'			

Temos que A e A' são normais e nucleares, têm mesmo tipo, têm álgebras de multiplicações isomorfas mas não são isomorfas se consideradas como álgebras sobre o corpo dos números reais.

Proposição 4.8 Se A e A' são álgebras de Bernstein com álgebras de multiplicações isomorfas, N é nilpotente e A não é excepcional então N' também é nilpotente.

DEMONSTRAÇÃO: Se A é não excepcional, pelo Corolário 3 da Proposição 4.5, A' também é não excepcional. Assim, $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$ e $(N' : A') = F(4L_{e'} - 4L_{e'}^2) \oplus \tilde{N}'$, por (2.2). Seja $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ um isomorfismo. Como $\tilde{N}$ é nilpotente, $\Phi(N) \subseteq \tilde{N}'$. Pela codimensão desses subespaços, temos que $\Phi(\tilde{N}) = \tilde{N}'$. Portanto, $\tilde{N}'$ também é nilpotente. $\square$

A hipótese de que A não é excepcional na proposição anterior é necessária, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 4.2 Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein excepcional cuja tábua de multiplicação em relação às bases $\{u_1, u_2\}$ de U e $\{v_1, v_2\}$ de V é

	u_1	u_2	v_1	v_2
u_1				
u_2				
v_1			u_1	u_2
v_2			u_2	

Temos que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \langle \psi_{u_1}, \psi_{u_2} \rangle \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \langle L_{v_1}, L_{v_2} \rangle$ e $\tilde{N} = \langle L_{v_1}, L_{v_2} \rangle$ é nilpotente.

Considere agora a álgebra $A' = F_{e'} \oplus U' \oplus V'$ com a multiplicação dada por

	u'_1	u'_2	v'_1	v'_2
u'_1			u'_1	
u'_2			u'_2	
v'_1	u'_1	u'_2		
v'_2				

onde $\{u'_1, u'_2\}$ e $\{v'_1, v'_2\}$ são bases de U e V , respectivamente. Observamos que $M(A') = F(2L_{e'}^2 - L_{e'}) \oplus \langle \psi_{u'_1}, \psi_{u'_2} \rangle \oplus F(4L_{e'} - 4L_{e'}^2) \oplus \langle 2L_e L_{u'_1} - \frac{1}{2}\psi_{u'_1}, 2L_{e'} L_{u'_2} - \frac{1}{2}\psi_{u'_2} \rangle$ é isomorfa a $M(A)$, sob a aplicação $L_e \mapsto L_{e'}$, $\psi_{u_i} \mapsto \psi_{u'_i}$; $L_{v_i} \mapsto 2L_e L_{u'_i} - \frac{1}{2}\psi_{u'_i}$, $i = 1, 2$, mas $\tilde{N}' = F(L_{v'_1}) \oplus \tilde{V}'_{10} = F(4L_{e'} - 4L_{e'}^2) \oplus \tilde{V}'_{10}$ não é nilpotente.

É claro que a propriedade de ser nuclear não é preservada por isomorfismos de álgebras de multiplicações, já que a álgebra A' obtida fazendo o join de uma álgebra de Bernstein A com a álgebra de tipo $(1, s)$ tem a álgebra de multiplicações isomorfa a $M(A)$. Podemos tomar A nuclear e $s \geq 1$ e teremos A' não nuclear com $M(A) \cong M(A')$. Uma problema ainda não resolvido é decidir se $M(A) \cong M(A')$ e A nuclear implicam que A' é o join de uma álgebra nuclear com uma álgebra de tipo $(1, s)$. Outra questão que ainda está sendo estudada é verificar se a propriedade de ser Jordan é preservada por isomorfismos de álgebras de multiplicações. Estes são dois dos problemas que dão seqüência ao estudo feito até aqui.

4.3 Caracteres de $M(A)$

Nesta seção faremos um estudo sobre a existência de outros caracteres de $M(A)$. Sabemos que a quantidade de caracteres de uma álgebra está associada ao número de ideais de codimensão 1 que não contém o quadrado da álgebra, de acordo com a Proposição 0.1. Estudaremos primeiramente os ideais de $M(A)$ para então discutir a existência de outros caracteres nessas álgebras.

4.3.1 Ideais de $M(A)$

Inicialmente, veremos como é a decomposição de Peirce dos ideais de $M(A)$.

Lema 4.5 *Seja $S \subseteq A$ um subconjunto não vazio.*

1. Se $\mathcal{I} \subseteq M(A)$ é um ideal à esquerda de $M(A)$ então o subespaço $\mathcal{I}(S)$ gerado pelo conjunto $\{\sigma(x) : \sigma \in \mathcal{I}, x \in S\}$ é um ideal de A .
2. Se $\mathcal{I} \subseteq (N : A)$ é um subespaço que verifica $\tilde{V}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ então $\mathcal{I}(S)$ é ideal de A .

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de $M(A)$. Para todo $a \in A$, $x \in S$ e $\sigma \in \mathcal{I}$, temos que $a\sigma(x) = (L_a\sigma)(x) \in \mathcal{I}(S)$, portanto, $\mathcal{I}(S)$ é um ideal de A .
2. Suponha que $\mathcal{I}$ é um subespaço que verifica $\tilde{V}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Para todo $u \in U$, $v \in V$, $x \in S$ e $\sigma \in \mathcal{I}$, temos que $e\sigma(x) = (\frac{1}{2}(4L_e - 4L_e^2)\sigma)(x)$, pois $\sigma(x) \in N$; $u\sigma(x) = ((L_u - \frac{1}{2}\psi_u)\sigma)(x)$, também porque $\sigma(x) \in N$, e $v\sigma(x) = L_v\sigma(x)$. Portanto, $\mathcal{I}(S)$ é ideal de A . $\square$

Observação 4.4 Se S é um ideal de A então $\mathcal{I}(S) \subseteq S$, para todo subconjunto $\mathcal{I} \subseteq M(A)$.

A próxima proposição descreve os ideais de $M(A)$.

Proposição 4.9 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}$ sua álgebra de multiplicações. Então*

1. $\mathcal{I} \subseteq (N : A)$ é um ideal de $M(A)$ se e somente se

$$\mathcal{I} = \{\psi_x : x \in I\} \oplus \mathcal{J},$$

onde $\mathcal{J}$ é um ideal de $\tilde{V}$ e I é um ideal de A satisfazendo $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I \subseteq U \oplus U^2$.

2. $\mathcal{I}$ é um ideal de $M(A)$ não contido em $(N : A)$ se e somente se $\mathcal{I} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal de $\tilde{V}$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja $\mathcal{J}$ um ideal de $\tilde{V}$. Pelo lema anterior, $\mathcal{J}(U \oplus U^2)$ é um ideal de A . Além disso, $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq U \oplus U^2$. Seja I um ideal de A tal que $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I \subseteq U \oplus U^2$. Então $\mathcal{I} = \{\psi_x : x \in I\} \oplus \mathcal{J}$ é um ideal de $M(A)$. De fato, já temos que $(2L_e^2 - L_e)\mathcal{I} = 0$; $\mathcal{I}(2L_e^2 - L_e) = \{\psi_x : x \in I\} \subseteq \mathcal{I}$; $\tilde{U}\mathcal{I} = 0$ e $\mathcal{I}\tilde{V} = \mathcal{J}\tilde{V} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Falta mostrar que $\mathcal{I}\tilde{U} \subseteq \mathcal{I}$ e $\tilde{V}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Observamos que $\mathcal{I}\tilde{U} = \mathcal{J}\tilde{U}$ e, dados $\sigma \in \mathcal{J}$ e $\psi_x \in \tilde{U}$, temos que $\sigma\psi_y = \psi_{\sigma(y)}$, com $\sigma(y) \in \mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I$. Assim, $\mathcal{I}\tilde{U} \subseteq \mathcal{I}$. Sejam agora $\tau \in \tilde{V}$

e $x \in I$. Pela Observação 4.4, $\tilde{V}(I) \subseteq I$. Portanto, $\tau(x) \in I$ e, conseqüentemente, $\tau\psi_x = \psi_{\tau(x)} \in \{\psi_x : x \in I\} \subseteq \mathcal{I}$. Logo, $\mathcal{I}$ é ideal de $M(A)$. Reciprocamente, seja $\mathcal{I}$ um ideal de $M(A)$ contido em $(N : A)$. Como $\mathcal{I}(2L_e^2 - L_e) = \mathcal{I} \cap \tilde{U}$, temos que $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I} \cap \tilde{V})$ e, pelas relações de inclusão dadas em (1.7), $\mathcal{I} \cap \tilde{V}$ é um ideal de $\tilde{V}$. Observamos, ainda, que $\mathcal{I} \cap \tilde{U} = \{\sigma(2L_e^2 - L_e) : \sigma \in \mathcal{I}\} = \{\psi_{\sigma(e)} : \sigma \in \mathcal{I}\} = \{\psi_x : x \in \mathcal{I}(e)\}$ e, além disso, $\mathcal{I}(e)$ contém $(\mathcal{I} \cap \tilde{V})(U \oplus U^2)$, pois dados $\sigma \in \mathcal{I} \cap \tilde{V}$ e $x \in U \oplus U^2$, temos que $\sigma\psi_x \in \mathcal{I}$ e, portanto, $\sigma(x) = \sigma\psi_x(e) \in \mathcal{I}(e)$. Logo, $\mathcal{I}$ é da forma $\mathcal{I} = \{\psi_x : x \in I\} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal de $\tilde{V}$ e $I = \mathcal{I}(e)$ contém $\mathcal{J}(U \oplus U^2)$ e está contido em $U \oplus U^2$.

2. Seja $\mathcal{I} \subseteq M(A)$ um ideal tal que $2L_e^2 - L_e \in \mathcal{I}$. Então $\tilde{U} = \tilde{U}(2L_e^2 - L_e) \subseteq \mathcal{I}$. Portanto, $\mathcal{I} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \tilde{V}$ é ideal de $\tilde{V}$. Além disso, para todo $\mathcal{J} \subseteq \tilde{V}$ ideal de $\tilde{V}$, o conjunto $\mathcal{I} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \mathcal{J}$ é um ideal de $M(A)$. $\square$

De acordo com a proposição anterior, para conhecer os ideais de $M(A)$, é necessário descrever os ideais de $\tilde{V}$ e os ideais de A contidos em $U \oplus U^2$.

A seguir, estudaremos propriedades dos ideais maximais de $M(A)$.

Em [14, Teorema 2], os autores provam que se A é uma álgebra de Bernstein com núcleo nilpotente então $M(A)$ tem exatamente dois ideais maximais, ambos de codimensão 1. São eles $(N : A)$ e $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$.

Lembramos que $(N : A)$ é sempre um ideal de $M(A)$ de codimensão 1, qualquer que seja a álgebra de Bernstein A . Se A é não excepcional, também temos que $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ é ideal de $M(A)$ de codimensão 1; portanto, neste caso, $M(A)$ tem pelo menos 2 ideais maximais. Vamos agora estudar a existência de outros ideais maximais em $M(A)$, quando A é uma álgebra de Bernstein não excepcional com núcleo não nilpotente.

Proposição 4.10 *As subálgebras $\tilde{V}_{00}$ e $\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01}$ de $M(A)$ são nilpotentes, qualquer que seja a álgebra de Bernstein A .*

DEMONSTRAÇÃO: Como $\tilde{V}_{00} \subseteq \tilde{N}$ e os elementos de $\tilde{V}_{00}$ têm imagem contida em V , temos que $\tilde{V}_{00}$ não possui idempotentes, já que, pela Proposição 2.6, os idempotentes em $\tilde{N}$ têm imagem contida em $L \subseteq U$. Assim, por ser uma álgebra associativa de dimensão finita sem idempotentes, existe $k \geq 1$ tal que $\tilde{V}_{00}^k = 0$. Além disso, temos que $(\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01})^{k+1} = \tilde{V}_{10}(\tilde{V}_{01}\tilde{V}_{10})^k\tilde{V}_{01} = \tilde{V}_{10}\tilde{V}_{00}^k\tilde{V}_{01} = 0$. Portanto, $\tilde{V}_{00}$ e $\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01}$ são subálgebras nilpotentes. $\square$

Com o resultado da proposição anterior, teremos condições de determinar um ideal que está contido em qualquer ideal maximal de $M(A)$.

Proposição 4.11 *Para toda álgebra de Bernstein A , o conjunto $\mathcal{I} = \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$ é um ideal nilpotente de $M(A)$. Em particular, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, para todo ideal maximal $\mathcal{M}$ de $M(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Tendo em vista que $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$, observa-se facilmente que $\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$ é um ideal de $\tilde{V}$. Portanto, pela Proposição 4.9, temos que $\mathcal{I} = \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$ é ideal de $M(A)$. Para mostrar que $\mathcal{I}$ é nilpotente, basta verificar que $\mathcal{I}$ não tem idempotentes não nulos, já que $\mathcal{I}$ é uma álgebra associativa de dimensão finita. Como $\mathcal{I} \subseteq \tilde{N}$, temos, pela Proposição 2.7, que todo idempotente de $\mathcal{I}$ é da forma $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10}$, onde $\sigma_{11} \in \mathcal{I} \cap \tilde{V}_{11}$ é idempotente e $\sigma_{10} \in \tilde{V}_{10}$ é um elemento cuja imagem está contida na imagem de σ_{11} . Vimos na Proposição 4.10 que $\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01} = \mathcal{I} \cap \tilde{V}_{11}$ é uma subálgebra nilpotente, assim, $\sigma_{11} = 0$ e, conseqüentemente, $\sigma = 0$. Logo, $\mathcal{I}$ é um ideal nilpotente de $M(A)$. Pela Proposição 0.5, $\mathcal{I}$ está contido no radical de $M(A)$ e, pela Proposição 0.4, isso implica que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, para todo ideal maximal $\mathcal{M}$ de $M(A)$. $\square$

Proposição 4.12 *Se A é uma álgebra de Bernstein não excepcional com núcleo não nilpotente então $M(A)$ possui um ideal maximal $\mathcal{M}$ contendo $2L_e^2 - L_e$ mas não contendo $4L_e - 4L_e^2$. Além disso, $\mathcal{M}$ possui um elemento da forma $4L_e - 4L_e^2 + \theta_0$, onde θ_0 é um operador em $(L : A)$ que pertence à subálgebra gerada por $\{L_v L_e : v \in V\}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $(N : A)$ e $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ fossem os únicos ideais maximais, teríamos que $\tilde{N} = (N : A) \cap \left(F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N} \right)$ é o radical de $M(A)$. Mas $\tilde{N}$ não é nilpotente, pela Proposição 2.1. Assim, o radical de $M(A)$ não seria nilpotente, contrariando a Proposição 0.5. Portanto, existe em $M(A)$ um ideal maximal $\mathcal{M}$ distinto de $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ e de $(N : A)$. Temos que $2L_e^2 - L_e \in \mathcal{M}$, pois, caso contrário, $\mathcal{M} \subseteq (N : A)$, o que implicaria que $\mathcal{M} = (N : A)$. Além disso, se tivéssemos também que $4L_e - 4L_e^2 \in \mathcal{M}$, resultaria que $M(A) = M(A) \left(F(2L_e^2 - L_e) \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \right) M(A) \subseteq \mathcal{M}$ e, assim, $\mathcal{M}$ não seria ideal maximal. Pela Proposição 4.9, temos que $\mathcal{M} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus U \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal (maximal) de $\tilde{V}$. Como $\mathcal{M} \neq F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$, temos que $\mathcal{J} \not\subseteq \tilde{N}$ e, como $4L_e - 4L_e^2 \notin \mathcal{J}$, temos que existe $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$, $\theta \notin \mathcal{J}$ tal que $4L_e - 4L_e^2 + \theta \in \mathcal{J}$. Pela proposição anterior, o operador θ pode ser tomado na subálgebra gerada por $\{L_v L_e : v \in V\}$ já que $\tilde{V}_{10}\tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00} \subseteq \mathcal{J}$. Agora $\theta + \theta^2 = \theta(4L_e - 4L_e^2 + \theta) \in \mathcal{J}$. Subtraindo de $4L_e - 4L_e^2 + \theta$, resulta que $4L_e - 4L_e^2 - \theta^2 \in \mathcal{J}$. Repetimos o processo com os novos elementos obtidos: $\theta^2 + \theta^3 = \theta(\theta + \theta^2) \in \mathcal{J}$ e $4L_e - 4L_e^2 + \theta^3 = 4L_e - 4L_e^2 - \theta^2 + \theta^2 + \theta^3 \in \mathcal{J}$. Dessa maneira, concluímos que, para todo inteiro $k \geq 1$, vale $4L_e - 4L_e^2 + (-1)^k \theta^k \in \mathcal{J}$.

Como $\theta \in \tilde{N}$, pelo Lema 2.2, temos que existe $k_0 \geq 1$ tal que $\theta_0 = (-1)^{k_0} \theta^{k_0} \in (L : A)$. Assim, obtemos o resultado desejado. $\square$

4.3.2 Sobre a existência de outros caracteres

Para qualquer álgebra de Bernstein A , sabemos que $M(A)$ é bária: existe homomorfismo $\tilde{\omega}: M(A) \rightarrow F$ tal que $\tilde{\omega}(L_x) = \omega(x)$, para todo $x \in A$. Nosso objetivo, nesta seção, é decidir sobre a existência de outros caracteres de $M(A)$.

Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Temos $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$. Assim, se $\hat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo então $\hat{\omega}(L_e) = 0, 1$ ou $\frac{1}{2}$.

Proposição 4.13 *Se $\hat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo com $\hat{\omega}(L_e) = 0$ então $\hat{\omega} = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $u \in U$, tem-se $\hat{\omega}(L_u) = 0$, pois $L_u^3 = 0$. Além disso, se $v \in V$, então $L_v = 2L_e L_v$ e, portanto, $\hat{\omega}(L_v) = 2\hat{\omega}(L_e)\hat{\omega}(L_v) = 0$. Assim, $\hat{\omega}(L_x) = 0$, para todo $x \in A$, ou seja, $\hat{\omega} = 0$. $\square$

Assim, devemos ter $\hat{\omega}(L_e) = 1$ ou $\frac{1}{2}$, se $\hat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo não nulo. Podemos garantir a unicidade do homomorfismo no caso em que $\hat{\omega}(L_e) = 1$.

Proposição 4.14 *Se $\hat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo com $\hat{\omega}(L_e) = 1$ então $\hat{\omega}$ é a função peso de $M(A)$ induzida por w .*

DEMONSTRAÇÃO: Basta provar que $\ker \hat{\omega} = (N : A)$, ou ainda, que $(N : A) \subseteq \ker \hat{\omega}$, pois ambos os ideais têm codimensão 1. Se $\sigma \in (N : A)$ então $(2L_e^2 - L_e)\sigma = 0$. Assim, $0 = \hat{\omega}((2L_e^2 - L_e)\sigma) = \hat{\omega}(2L_e^2 - L_e)\hat{\omega}(\sigma) = \hat{\omega}(\sigma)$. Portanto, $(N : A) \subseteq \ker \hat{\omega}$. $\square$

O seguinte exemplo mostra que nem sempre existe homomorfismo de $M(A)$ em F que assume valor $\frac{1}{2}$ em L_e .

Exemplo 4.3 Seja $A = \langle e, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \rangle$ a álgebra comutativa com os seguintes produtos:

	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3
u_1			u_1	u_2	
u_2			u_2		u_1
v_1	u_1	u_2			
v_2	u_2				
v_3		u_1			

Essa álgebra é de Bernstein e $L_{v_1} = 4L_e - 4L_e^2$. Suponha que $\widehat{\omega}$ é um homomorfismo de $M(A)$ em F tal que $\widehat{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$. Assim, o idempotente $4L_e - 4L_e^2$ tem peso 1. Observamos que $L_{v_2}L_{v_3}$ é a projeção sobre o subespaço Fu_2 e $L_{v_3}L_{v_2}$ é a projeção sobre o subespaço Fu_1 . Assim, esses operadores têm peso 0 ou 1. Como $\widehat{\omega}(L_{v_2}L_{v_3}) = \widehat{\omega}(L_{v_3}L_{v_2})$ e $L_{v_2}L_{v_3} + L_{v_3}L_{v_2} = L_{v_1}$ é idempotente, resulta que cada uma dessas projeções tem peso 0. Assim, $\widehat{\omega}(L_{v_1}) = 0$, o que é uma contradição. Portanto, para essa álgebra de Bernstein, não existe homomorfismo $\widehat{\omega}$ de $M(A)$ em F tal que $\widehat{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$.

Observamos que, no exemplo anterior, o idempotente $4L_e - 4L_e^2$ é um elemento de $\widetilde{N}$. Se $4L_e - 4L_e^2 \notin \widetilde{N}$, temos que $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{N}$ é um ideal de codimensão 1 que não contém $M(A)^2$, pois $4L_e - 4L_e^2 \notin F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{N}$. Portanto, neste caso, existe um homomorfismo $\widehat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ tal que $\widehat{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$, pois $2L_e^2 - L_e \in \ker \widehat{\omega}$ implica que $\widehat{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$. Já vimos que se $4L_e - 4L_e^2 \in \widetilde{N}$ então A é uma álgebra excepcional. Dessa maneira, temos:

Proposição 4.15 *Se A é uma álgebra de Bernstein não excepcional então existe homomorfismo $\widehat{\omega}: M(A) \rightarrow F$ tal que $\widehat{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$.* $\square$

A unicidade desse homomorfismo não pode ser garantida, em geral, e os próximos exemplos ilustram esse fato.

Observação 4.5 Se $\pi_1, \dots, \pi_k \in \text{End}(A)$ são projeções, duas a duas ortogonais, então a subálgebra gerada por $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ coincide com o subespaço gerado por esse mesmo conjunto.

Exemplo 4.4 Seja $k \geq 1$ e considere a álgebra $Fe \oplus \langle u_1, \dots, u_k \rangle \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, cujos produtos são:

	u_1	$\dots$	u_k	v_1	$\dots$	v_k
u_1				u_1		
$\vdots$					$\ddots$	
u_k						u_k
v_1	u_1					
$\vdots$					$\ddots$	
v_k			u_k			

Essa álgebra é Bernstein excepcional e sua álgebra de multiplicações tem decomposição

$$F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus \langle L_{v_1}, \dots, L_{v_k} \rangle \oplus \widetilde{V}_{10}.$$

Para cada $i = 1, \dots, k$, o subespaço $I_k = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \langle L_{v_1}, \dots, \hat{L}_{v_i}, \dots, L_{v_k} \rangle \oplus \tilde{V}_{10}$ é um ideal bilateral de codimensão 1.

Em álgebras não excepcionais também podemos encontrar exemplos onde existem mais de dois homomorfismos não nulos de $M(A)$ em F . Quando a álgebra A não é excepcional, sua álgebra de multiplicações tem pelo menos dois ideais de codimensão 1 que não contém $M(A)^2$, a saber, $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ e $(N : A)$.

Exemplo 4.5 Seja $A = Fe \oplus \langle u_1, u_2 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle$ a álgebra cuja multiplicação é dada por:

	u_1	u_2	v_1	v_2
u_1	v_1			
u_2				u_2
v_1				
v_2		u_2		

Essa álgebra não é excepcional e sua álgebra de multiplicações tem decomposição

$$F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \cong F(4L_e - 4L_e^2) \oplus F(L_{v_2}L_e) \oplus F(2L_eL_{u_2} - \tfrac{1}{2}\psi_{u_2}) \oplus F(L_{u_1} - 2L_eL_{u_1}).$$

Verifica-se que $I = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \langle 4L_e - 4L_e^2 - L_{v_2}L_e \rangle \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01}$ é ideal de codimensão 1, assim, $M(A)$ possui pelo menos 3 caracteres.

Observamos que o terceiro ideal de codimensão 1 do exemplo anterior tem a propriedade descrita na Proposição 4.12.

4.4 Automorfismos de $M(A)$

Sejam A uma álgebra de Bernstein e $\varphi \in \text{Aut } A$. Pela Proposição 1.1, φ induz um automorfismo $\widehat{\varphi}$ de $M(A)$. Assim, temos uma aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda: \text{Aut } A &\longrightarrow \text{Aut } M(A) \\ \varphi &\longmapsto \widehat{\varphi} \end{aligned}$$

Observamos que Λ é um homomorfismo de grupos. De fato, para todo $x \in A$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut } A$, temos que

$$\Lambda(\varphi_1\varphi_2)(L_x) = \widehat{\varphi_1\varphi_2}(L_x) = L_{\varphi_1\varphi_2(x)} = \widehat{\varphi_1}L_{\varphi_2(x)} = \widehat{\varphi_1}\widehat{\varphi_2}(L_x) = \Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2)(L_x).$$

Além disso, $\Lambda(\text{id}_A) = \text{id}_{M(A)}$. Dessa maneira, provamos que Λ é homomorfismo. Nem sempre Λ é injetora. Calcularemos, a seguir, o núcleo de Λ .

Seja $\varphi \in \text{Aut } A$ tal que $\widehat{\varphi} = \text{id}_{M(A)}$. Temos então que $\widehat{\varphi}(L_x) = L_{\varphi(x)} = L_x$, para todo $x \in A$, ou seja, $\varphi \in \ker \Lambda$ se e somente se $\varphi(x) - x \in \text{ann } A$, para todo $x \in A$. Como $\varphi \in \text{Aut } A$, $\varphi(e)$ é um idempotente de A . Portanto, existe $u_0 \in U$ tal que $\varphi(e) = e + u_0 + u_0^2$ e de $\varphi(e) - e \in \text{ann } A$, resulta que $u_0 + u_0^2 \in \text{ann } A \subseteq V$, ou seja, $u_0 = 0$, o que implica $u_0^2 = 0$ e $\varphi(e) = e$. Para os elementos $u \in U$, temos que $u = 2eu$. Logo, $\varphi(u) = 2\varphi(e)\varphi(u) = 2e\varphi(u)$. Assim, $\varphi(u) \in U$. Novamente usando $\varphi(u) - u \in \text{ann } A$, obtemos que $\varphi(u) = u$. Dados $u_1, u_2 \in U$, temos então $\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2) = u_1 u_2$. Conseqüentemente,

$$\varphi(x) = x, \text{ para todo } x \in A^2. \quad (4.1)$$

Decompondo $V = U^2 \oplus W$, para cada $w \in W$, temos que $\varphi(w) - w = z_w \in \text{ann } A$. Portanto,

$$\varphi(w) = w + z_w, \text{ onde } z_w \in \text{ann } A. \quad (4.2)$$

Veremos agora que um operador linear de A que verifica (4.1) e (4.2) é um automorfismo de A . Podemos supor, em vista da Observação 1.9, que $\text{ann } A \subseteq U^2$.

Seja $A = Fe \oplus U \oplus U^2 \oplus W$ uma álgebra de Bernstein. Se $\{w_1, \dots, w_t\}$ é uma base de W e $\{z_1, \dots, z_t\} \subseteq \text{ann } A$ então $\sigma: A \rightarrow A$ definida por $\sigma(a) = a$, para todo $a \in A^2$, e $\sigma(w_i) = w_i + z_i$, para $i = 1, \dots, t$, é um automorfismo de A . De fato, σ é linear e, como $\text{ann } A \subseteq U^2$, σ é bijetora, pois, para todo i , $w_i = \sigma(w_i - z_i)$. Dados $x = a + w$ e $y = b + w'$ elementos de A , com $a, b \in A^2$ e $w, w' \in W$, temos que $\sigma(xy) = xy$, pois $xy \in A^2$. Como $\sigma(w) = w + z_w$ e $\sigma(w') = w' + z_{w'}$, onde $z_w, z_{w'} \in \text{ann } A$, resulta que $\sigma(x)\sigma(y) = (x + z_w)(y + z_{w'}) = xy = \sigma(xy)$. Denotando esse operador σ por $\sigma_{(z_1, \dots, z_t)}$, temos, para toda t -upla $(z_1, \dots, z_t)$ de elementos de $\text{ann } A$, que $\sigma_{(z_1, \dots, z_t)} \in \ker \Lambda$. Portanto, fixada uma base $\{w_1, \dots, w_t\}$ de W ,

$$\ker \Lambda = \{\sigma_{(z_1, \dots, z_t)} : z_1, \dots, z_t \in \text{ann } A\}.$$

Dessa maneira, obtemos duas situações onde Λ é injetora:

Proposição 4.16 *Se A é uma álgebra de Bernstein nuclear ou $\text{ann } A = 0$ então $\text{Aut } M(A)$ possui um subgrupo isomorfo a $\text{Aut } A$.* $\square$

A proposição anterior mostra que, em muitos casos, Λ é injetora. Por outro lado, veremos que Λ não é sobrejetora, o que revela a existência, em $M(A)$, de uma quantidade maior de automorfismos do que em A .

Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}$ sua álgebra de multiplicações. Lembramos que $\tilde{U} = \{\psi_x : x \in U \oplus U^2\}$. Para cada $x_0 \in U \oplus U^2$, definimos

$$\begin{aligned}\Gamma_{x_0}: \quad M(A) &\longrightarrow M(A) \\ 2L_e^2 - L_e &\longmapsto 2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0} \\ \psi_x &\longmapsto \psi_x \\ \theta &\longmapsto \theta - \theta\psi_{x_0}\end{aligned}$$

para todo $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in \tilde{V}$. Temos que Γ_{x_0} é linear bijetora. Além disso, $\Gamma_{x_0}(\sigma\tau) = \Gamma_{x_0}(\sigma)\Gamma_{x_0}(\tau)$, para todo $\sigma, \tau \in M(A)$. De fato, decompondo $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta_1$ e $\tau = \beta(2L_e^2 - L_e) + \psi_y + \theta_2$, com $\psi_x, \psi_y \in \tilde{U}$ e $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{V}$, temos $\sigma\tau = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \beta\psi_x + \theta_1\psi_y + \theta_1\theta_2$. Assim, $\Gamma_{x_0}(\sigma\tau) = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \alpha\beta\psi_{x_0} + \beta\psi_x + \theta_1\psi_y + \theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\psi_{x_0}$ e $\Gamma_{x_0}(\sigma)\Gamma_{x_0}(\tau) = \left(\alpha(2L_e^2 - L_e) + \alpha\psi_{x_0} + \psi_x - \theta_1\psi_{x_0} + \theta_1\right) \left(\beta(2L_e^2 - L_e) + \beta\psi_{x_0} + \psi_y - \theta_2\psi_{x_0} + \theta_2\right) = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \alpha\beta\psi_{x_0} + \beta\psi_x - \beta\theta_1\psi_{x_0} + \beta\theta_1\psi_{x_0} + \theta_1\psi_y - \theta_1\theta_2\psi_{x_0} + \theta_1\theta_2 = \Gamma_{x_0}(\sigma\tau)$. Portanto, Γ_{x_0} é um automorfismo de $M(A)$. Dessa maneira, temos definida uma aplicação

$$\begin{aligned}\Gamma: \quad U \oplus U^2 &\longrightarrow \text{Aut } M(A) \\ x &\longmapsto \Gamma_x\end{aligned}$$

Observe que Γ é um homomorfismo do grupo aditivo $U \oplus U^2$ no grupo $\text{Aut } M(A)$: o elemento neutro $0 \in U \oplus U^2$ tem como imagem o operador identidade em $M(A)$ e, dados $x_0, y_0 \in U \oplus U^2$, temos que $\Gamma_{x_0+y_0} = \Gamma_{x_0}\Gamma_{y_0}$, pois $\Gamma_{x_0}\Gamma_{y_0}(2L_e^2 - L_e) = \Gamma_{x_0}(2L_e^2 - L_e) + \psi_{x_0} + \psi_{y_0} = 2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0+y_0} = \Gamma_{x_0+y_0}(2L_e^2 - L_e)$; $\Gamma_{x_0}\Gamma_{y_0}(\psi_x) = \psi_x = \Gamma_{x_0+y_0}(\psi_x)$, para todo $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\Gamma_{x_0}\Gamma_{y_0}(\theta) = \Gamma_{x_0}(\theta - \theta\psi_{y_0}) = \theta - \theta\psi_{x_0} - \theta\psi_{y_0} = \theta - \theta\psi_{x_0+y_0} = \Gamma_{x_0+y_0}(\theta)$, para todo $\theta \in \tilde{V}$. Temos ainda que Γ é injetora, pois se $\Gamma_x = \text{id}_M(A)$ então, em particular, $2L_e^2 - L_e = 2L_e^2 - L_e + \psi_x$, ou seja, $\psi_x = 0$, o que implica $x = 0$.

Proposição 4.17 *Para toda álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, o grupo $\text{Aut } M(A)$ possui um subgrupo normal abeliano isomorfo ao subgrupo aditivo $U \oplus U^2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo que foi feito acima, resta provar apenas que $\Gamma(U \oplus U^2)$ é normal. Sejam $\Gamma_{x_0} \in \Gamma(U \oplus U^2)$ e $\Phi \in \text{Aut } M(A)$. A Proposição 4.2 diz que $\Phi(\tilde{U}) = \tilde{U}$. Assim, existe $y_0 \in U \oplus U^2$ tal que $\Phi(\psi_{y_0}) = \psi_{x_0}$. Provaremos que $\Phi^{-1}\Gamma_{x_0}\Phi = \Gamma_{y_0}$. Pela Proposição 4.1, temos que $\Phi(2L_e^2 - L_e) = 2L_e^2 - L_e + \psi_{y_0}$, para algum $y \in U \oplus U^2$. Dessa maneira, $(\Phi^{-1}\Gamma_{x_0}\Phi)(2L_e^2 - L_e) = \Phi^{-1}\Gamma_{x_0}(\Phi(2L_e^2 - L_e)) = \Phi^{-1}\Gamma_{x_0}(2L_e^2 - L_e + \psi_{y_0}) = \Phi^{-1}(2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0} + \psi_{y_0}) = 2L_e^2 - L_e + \psi_{y_0} = \Gamma_{y_0}(2L_e^2 - L_e)$. Para $\psi_x \in \tilde{U}$, temos que $\Phi(\psi_x) \in \tilde{U}$. Portanto, $\Gamma_{x_0}(\Phi(\psi_x)) = \Phi(\psi_x)$, ou seja, $(\Phi^{-1}\Gamma_{x_0}\Phi)(\psi_x) = \Phi^{-1}\Phi(\psi_x) = \psi_x = \Gamma_{y_0}(\psi_x)$. Se $\theta \in \tilde{V}$ e $\Phi(\theta) = \psi_z + \theta'$ então

$(\Phi^{-1}\Gamma_{x_0}\Phi)(\theta) = \Phi^{-1}\Gamma_{x_0}(\psi_z + \theta') = \Phi^{-1}(\psi_z + \theta' - \theta'\psi_{x_0}) = \Phi^{-1}(\psi_z + \theta' - \psi_z\psi_{x_0} - \theta'\psi_{x_0}) = \Phi^{-1}(\psi_z + \theta' - (\psi_z + \theta')\psi_{x_0}) = \theta - \theta\psi_{y_0} = \Gamma_{y_0}(\theta)$. Logo, $\Phi^{-1}\Gamma_{x_0}\Phi = \Gamma_{y_0} \in \Gamma(U \oplus U^2)$ e, portanto, $\Gamma(U \oplus U^2)$ é um subgrupo normal de $\text{Aut } M(A)$. $\square$

Vamos agora comparar os subgrupos $\Lambda(\text{Aut } A)$ e $\Gamma(U \oplus U^2)$ de $\text{Aut } M(A)$.

Proposição 4.18 *Com as notações anteriores, temos que $\Lambda(\text{Aut } A) \cap \Gamma(U \oplus U^2)$ é um subgrupo contido em $\Gamma(L)$, onde $L = \{u \in U : uU = 0\}$. Além disso, se A é uma álgebra de Bernstein nuclear então $\Lambda(\text{Aut } A) \cap \Gamma(U \oplus U^2) = \Gamma(L)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Dados $u, x \in U$, temos que $\psi_u = 2L_eL_u + 2L_uL_e - L_u$ e $\psi_{ux} = 2L_{ux}L_e + L_uL_x + L_xL_u$ (veja na página 19). Lembramos também que se $\varphi \in \text{Aut } A$ e $\varphi(e) = f$ então $\varphi(U_e) = U_f$ e $\varphi(V_e) = V_f$. Assim,

$$\widehat{\varphi}(\psi_x) = 2L_{\varphi(e)}L_{\varphi(u)} + 2L_{\varphi(u)}L_{\varphi(e)} - L_{\varphi(u)} = \psi_{\varphi(u)} \text{ e}$$

$$\widehat{\varphi}(\psi_{ux}) = 2L_{\varphi(u)\varphi(x)}L_{\varphi(e)} + L_{\varphi(u)}L_{\varphi(x)} + L_{\varphi(x)}L_{\varphi(u)} = \psi_{\varphi(u)\varphi(x)} = \psi_{\varphi(ux)}.$$

Seja $\Gamma_{x_0} \in \Lambda(\text{Aut } A) \cap \Gamma(U \oplus U^2)$. Então existe $\varphi \in \text{Aut } A$ tal que $\Gamma_{x_0} = \widehat{\varphi}$. Como $\Gamma_{x_0}(\psi_x) = \psi_x$, para todo $x \in U \oplus U^2$, temos que $\psi_{\varphi(x)} = \widehat{\varphi}(\psi_x) = \psi_x$, ou seja, $\varphi(x) = x$, para todo $x \in U \oplus U^2$. Se $\varphi(e) = e_0 = e + u_0 + u_0^2$ então $U = \varphi(U) = U_{e_0} = \{u + 2u_0u : u \in U\}$. Portanto, $2u_0u = 0$, para todo $u \in U$, isto é, $u_0 \in L$. Calculando $\widehat{\varphi}$ em $2L_e^2 - L_e$, obtemos $\widehat{\varphi}(2L_e^2 - L_e) = 2L_{e_0}^2 - L_{e_0} = 2L_e^2 - L_e + \psi_{u_0}$. Por outro lado, $\Gamma_{x_0}(2L_e^2 - L_e) = 2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0}$. Dessa maneira, concluímos que $x_0 = u_0 \in L$. Logo, $\Lambda(\text{Aut } A) \cap \Gamma(U \oplus U^2) \subseteq \Gamma(L)$.

Suponha agora que A é nuclear. Vamos provar que cada Γ_{u_0} , com $u_0 \in L$, é um elemento de $\Lambda(\text{Aut } A)$. Sejam $u_0 \in L$ e $\varphi_{u_0}: A \rightarrow A$ definida por $\varphi_{u_0}(e) = e + u_0$, $\varphi_{u_0}(u) = u$ e $\varphi_{u_0}(v) = v$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Temos que φ_{u_0} é linear bijetora e, para $x = \alpha e + u_1 + v_1$, $y = \beta e + u_2 + v_2$, temos $xy = (\alpha e + u_1 + v_1)(\beta e + u_2 + v_2) = \alpha\beta e + \frac{1}{2}(\alpha u_2 + \beta u_1) + u_1v_2 + u_2v_1 + v_1v_2 + u_1u_2$. Assim, $\varphi_{u_0}(xy) = xy + \alpha\beta u_0$ e, como A é nuclear, os elementos de L estão no anulador de L . Logo, $\varphi_{u_0}(x)\varphi_{u_0}(y) = (x + \alpha u_0)(y + \beta u_0) = xy + \frac{1}{2}\alpha\beta u_0 + \frac{1}{2}\alpha\beta u_0 = xy + \alpha\beta u_0 = \varphi_{u_0}(xy)$. Portanto, φ_{u_0} é um automorfismo. Vamos mostrar que $\Lambda(\varphi_{u_0}) = \Gamma_{u_0}$. Novamente, usando que os elementos de L estão no anulador de N , temos $L_{u_0} = \frac{1}{2}\psi_{u_0}$ e $L_x\psi_{u_0} = 0$, para todo $x \in N$. Temos então $\Gamma_{u_0}(L_e) = \Gamma_{u_0}(2L_e^2 - L_e + \frac{1}{2}(4L_e - 4L_e^2)) = 2L_e^2 - L_e + \psi_{u_0} + \frac{1}{2}(4L_e - 4L_e^2) - \frac{1}{2}\psi_{u_0} = L_e + \frac{1}{2}\psi_{u_0} = L_e + L_{u_0} = \widehat{\varphi_{u_0}}(L_e)$. Para $u \in U$, $\Gamma_{u_0}(L_u) = \Gamma_{u_0}(\frac{1}{2}\psi_u + L_u - \frac{1}{2}\psi_u) = \frac{1}{2}\psi_u + L_u - \frac{1}{2}\psi_u - (L_u - \frac{1}{2}\psi_u)\psi_{u_0} = L_u = \widehat{\varphi_{u_0}}(L_u)$ e se $v \in V$, temos $\Gamma_{u_0}(L_v) = L_v - L_v\psi_{u_0} = L_v = \widehat{\varphi_{u_0}}(L_v)$. Portanto, $\Gamma_{u_0} = \Lambda(\varphi_{u_0})$ e, conseqüentemente, $\Lambda(\text{Aut } A) \cap \Gamma(U \oplus U^2) = \Gamma(L)$. $\square$

No caso das álgebras nucleares, provamos então que $\text{Aut } M(A)$ possui um subgrupo isomorfo a $\text{Aut } A$ e, além disso, cada automorfismo Γ_x , com $x \in U \oplus U^2$ e $x \notin L$, não está nesse subgrupo. Portanto, a aplicação Λ definida na página 67 está “longe” de ser sobrejetora.

Usando elementos do anulador à esquerda de $M(A)$, obtemos outros automorfismos de $M(A)$.

Proposição 4.19 *Para cada elemento $\sigma_0 \in \text{ann } M(A)_L$, a aplicação $\Phi_{\sigma_0}: M(A) \rightarrow M(A)$ definida por $\Phi_{\sigma_0}(2L_e^2 - L_e) = 2L_e^2 - L_e$, $\Phi_{\sigma_0}(\psi_x) = \psi_x$ e $\Phi_{\sigma_0}(\theta) = \theta - \theta\sigma_0$, para todo $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in \tilde{V}$ é um automorfismo de $M(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Lembramos que $\sigma_0 \in \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{00}$. Vamos provar que Φ_{σ_0} é bijetora. Seja $\theta \in M(A)$ tal que $\Phi_{\sigma_0}(\theta) = 0$. Pela definição de Φ_{σ_0} , temos que $\theta \in \tilde{V}$ e como $\tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{00}$ é um ideal à esquerda de $M(A)$, temos que $\theta = \theta\sigma_0 \in \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{00}$. Decompomos $\theta = \theta_{10} + \theta_{00}$ e $\sigma_0 = \sigma_{10} + \sigma_{00}$. Assim, $\theta\sigma_0 = \theta$ se e somente se $\theta_{10}\sigma_{00} + \theta_{00}\sigma_{00} = \theta_{10} + \theta_{00}$, ou seja, $\theta_{10} = \theta_{10}\sigma_{00}$ e $\theta_{00} = \theta_{00}\sigma_{00}$. Assim, $\theta_{10} = \theta_{10}\sigma_{00}^k$ e $\theta_{00} = \theta_{00}\sigma_{00}^k$, para todo $k \geq 1$. Pela Proposição 4.10, $\tilde{V}_{00}$ é uma subálgebra nilpotente de $M(A)$. Assim, $\theta_{10} = \theta_{00} = 0$. Dessa maneira, Φ_{σ_0} é um operador linear injetor e, portanto, bijetor. Além disso, para $\tau_1 = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta_1$ e $\tau_2 = \beta(2L_e^2 - L_e) + \psi_y + \theta_2$, com $\psi_x, \psi_y \in \tilde{U}$ e $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{V}$, temos $\tau_1\tau_2 = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \beta\psi_x + \theta_1\psi_y + \theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\sigma_0$. Calculando separadamente, $\Phi_{\sigma_0}(\tau_1) = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta_1 - \theta_1\sigma_0$ e $\Phi_{\sigma_0}(\tau_2) = \beta(2L_e^2 - L_e) + \psi_y + \theta_2 - \theta_2\sigma_0$. Portanto, $\Phi_{\sigma_0}(\tau_1)\Phi_{\sigma_0}(\tau_2) = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \beta\psi_x + (\theta_1 - \theta_1\sigma_0)\psi_y + (\theta_1 - \theta_1\sigma_0)(\theta_2 - \theta_2\sigma_0) = \alpha\beta(2L_e^2 - L_e) + \beta\psi_x + \theta_1\psi_y + \theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\sigma_0 = \Phi_{\sigma_0}(\tau_1\tau_2)$. Logo, Φ_{σ_0} é um automorfismo de $M(A)$. $\square$

Vimos na Proposição 4.2 que se $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo então $\Phi(\tilde{U}) = \tilde{U}'$. Com os automorfismos descritos nas proposições anteriores, temos:

Corolário *Sejam A e A' duas álgebras de Bernstein não excepcionais. Se $\Phi: M(A') \rightarrow M(A)$ é um isomorfismo tal que, para todo $u' \in U'$, $\Phi(\psi_{u'}) = \psi_u$, com $u \in U$ e, para todo $v' \in U'^2$, $\Phi(\psi_{v'}) = \psi_v$, com $v \in U^2$, então existe isomorfismo entre $M(A')$ e $M(A)$ que preserva a decomposição de Peirce.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta mostrar que existe um isomorfismo $\Phi': M(A') \rightarrow M(A)$ tal que $\Phi'(L_{e'}) = (L_e)$, pois, dessa maneira, teremos $\Phi'(2L_{e'}^2 - L_{e'}) = 2L_e^2 - L_e$ e $\Phi'(4L_{e'}^2 - 4L_{e'}^2) = 4L_e - 4L_e^2$. Se $\Phi(2L_{e'}^2 - L_{e'}) \neq 2L_e^2 - L_e$ então, pela Proposição 4.1, existe $\psi_{x_0} \in \tilde{U}$ tal que $\Phi(2L_{e'}^2 - L_{e'}) = 2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0}$. Consideramos, então, o isomorfismo $\Phi_0: M(A') \rightarrow M(A)$ definido como $\Phi_0 = \Gamma_{-x_0}\Phi$, onde Γ_{-x_0} é o automorfismo de $M(A)$ definido na página

69. Temos que Φ_0 verifica $\Phi_0(2L_e^2 - L_{e'}) = \Gamma_{-x_0}(2L_e^2 - L_e + \psi_{x_0}) = 2L_e^2 - L_e$. Assim, Φ_0 é um isomorfismo que preserva a primeira decomposição de Peirce de $M(A')$, isto é, $\Phi_0(\tilde{V}') = \tilde{V}$. Se $\Phi_0(4L_{e'} - 4L_e^2) = 4L_e - L_e^2$ então Φ_0 é o isomorfismo procurado. Caso contrário, como $\Phi(\tilde{V}') = \Phi(V)$, existe $\theta \in \tilde{V} \cap \tilde{N}$ tal que $\Phi_0(4L_{e'} - 4L_e^2) = 4L_e - L_e^2 + \theta$, pelo Corolário 2 da Proposição 4.5. Temos então $\psi_u = \Phi_0(\psi_{u'}) = \Phi_0(4L_{e'} - 4L_e^2)\Phi_0(\psi_{u'}) = (4L_e - 4L_e^2 + \theta)\psi_u = \psi_u + \theta\psi_u$, ou seja, $\theta(u) = 0$, para todo $u \in U$. Além disso, $0 = \Phi_0((4L_{e'} - 4L_e^2)\psi_{v'}) = (4L_e - 4L_e^2 + \theta)\psi_v = \theta\psi_v$ e, portanto, $\theta(v) = 0$, para todo $v \in U^2$. Assim, $\theta \in \text{ann}M(A)_L = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A^2) = 0\}$. Decompondo $\theta = \theta_{10} + \theta_{00}$, como $\Phi_0(4L_{e'} - 4L_e^2)$ é idempotente, devemos ter $4L_e - 4L_e^2 + \theta_{10} + \theta_{00} = (4L_e - 4L_e^2 + \theta_{10} + \theta_{00})^2 = 4L_e - 4L_e^2 + \theta_{10} + \theta_{10}\theta_{00} + \theta_{00}^2$. Em particular, $\theta_{00}^2 = \theta_{00}$. Como $\tilde{V}_{00}$ é subálgebra nilpotente, resulta que $\theta_{00} = 0$. Portanto, $\Phi_0(4L_{e'} - 4L_e^2) = 4L_e - 4L_e^2 + \theta$, onde $\theta \in \text{ann}M(A)_L \cap \tilde{V}_{10}$. Tomando $\Phi' = \Phi_\theta\Phi_0$, onde Φ_θ é o automorfismo definido na Proposição anterior, obtemos $\Phi'(2L_{e'}^2 - L_{e'}) = \Phi_\theta(2L_e^2 - L_e) = 2L_e^2 - L_e$ e $\Phi'(4L_{e'} - 4L_e^2) = \Phi_\theta(4L_e - 4L_e^2 + \theta) = 4L_e - 4L_e^2 + \theta - (4L_e - 4L_e^2)\theta - \theta^2 = 4L_e - 4L_e^2$, pois $(4L_e - 4L_e^2)\theta = \theta$ e $\theta^2 = 0$. Assim, $\Phi(L_{e'}) = \Phi(2L_{e'}^2 - L_{e'} + \frac{1}{2}4L_{e'} - 4L_e^2) = 2L_e^2 - L_e + \frac{1}{2}4L_e - 4L_e^2 = L_e$. Portanto, Φ' preserva a decomposição de Peirce completa de $M(A)$, isto é, $\Phi'(\tilde{U}') = \tilde{U}$ e $\Phi'(\tilde{V}'_{ij}) = \tilde{V}_{ij}$, para $i, j = 0, 1$. $\square$

Esses novos isomorfismos podem ser úteis para encontrar propriedades de álgebras de Bernstein preservadas por isomorfismos de álgebras de multiplicações, já que eles preservam a decomposição de Peirce completa de $M(A)$. Por exemplo, poderíamos usar esses isomorfismos para provar (novamente) que álgebras normais e excepcionais são classes preservadas por isomorfismos de álgebras de multiplicações, pois essas classes são caracterizadas por ser nulo, algum dos subespaços da decomposição de Peirce de $M(A)$.

Capítulo 5

Outras álgebras associadas a $M(A)$

Nos capítulos anteriores, vimos algumas conexões entre álgebras de Bernstein e suas álgebras de multiplicações. Como era de se esperar, nem todas as características de uma álgebra de Bernstein A se refletem em $M(A)$. Na Seção 5.1.2, veremos que, embora a decomponibilidade seja uma propriedade não preservada pela álgebra de multiplicações, ela será herdada por uma de suas subálgebras. Estudaremos também a álgebra de multiplicações com unidade. Veremos que nessas álgebras o comportamento dos idempotentes não é tão satisfatório quanto o dos idempotentes de $M(A)$ para decidir sobre a nilpotência do núcleo da álgebra de Bernstein. Na última seção do capítulo, trataremos um pouco sobre o problema inverso. A questão é decidir como são as álgebras associativas que podem ser álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein. Esse problema, no caso geral, parece ser complexo. Estudaremos apenas o caso das álgebras excepcionais.

5.1 A álgebra de multiplicações reduzida

Seja $A = Fe \oplus N$ uma álgebra de Bernstein. Em [14], define-se a *álgebra de multiplicações reduzida* de A como sendo

$$M_0(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}.$$

Apesar do idempotente $e \in A$ estar envolvido na definição de $M_0(A)$, esta subálgebra é invariante sob mudança de idempotentes, como mostra o próximo lema.

Lema 5.1 *Para quaisquer idempotentes $e, f \in Ip(A)$, tem-se*

$$F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N} = F(2L_f^2 - L_f) \oplus \tilde{N}.$$

Conseqüentemente, $M_0(A)$ não depende do idempotente fixado.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam e, f idempotentes e $u \in U_e$ tal que $f = e + u + u^2$. Como $2L_f^2 - L_f = 2L_e^2 - L_e + \psi_{u+u^2}$, resulta que $2L_f^2 - L_f \in F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$. Assim, $F(2L_f^2 - L_f) \oplus \tilde{N} \subseteq F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$. Por simetria, a outra inclusão também é válida. Portanto, $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N} = F(2L_f^2 - L_f) \oplus \tilde{N}$. $\square$

A álgebra de multiplicações reduzida é um ideal de $M(A)$ e, em geral, tem codimensão 1. Quando o operador $4L_e - 4L_e^2$ está em $\tilde{N}$, as álgebras $M(A)$ e $M_0(A)$ coincidem. Observamos que isso pode acontecer apenas nas álgebras excepcionais, como foi visto no Corolário da Proposição 2.6.

5.1.1 Ideais de $M_0(A)$

Como foi feito na Seção 4.3.1, faremos aqui um estudo dos ideais de $M_0(A)$.

Lema 5.2 *Seja $S \subseteq A$ um subconjunto não vazio. Se $\mathcal{I} \subseteq \tilde{N}$ é um subespaço tal que $(\tilde{V} \cap \tilde{N})\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ então $\mathcal{I}(S)$ é um ideal de N que contém $(\mathcal{I}(S) \cap U)N$ e $(\mathcal{I}(S) \cap V)N$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{I} \subseteq \tilde{N}$ um subespaço com $(\tilde{V} \cap \tilde{N})\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Para cada $\sigma \in \mathcal{I}$, $x \in S$, $u \in U$ e $v \in V$, temos que $u\sigma(x) = ((L_u - \frac{1}{2}\psi_u)\sigma)(x)$, pois $\sigma(x) \in N$, e $v\sigma(x) = (L_v\sigma)(x)$ são elementos de $\mathcal{I}(S)$. Portanto, $\mathcal{I}(S)$ é um ideal de N . Para provar que $\mathcal{I}(S)$ contém $(\mathcal{I}(S) \cap U)N$ e $(\mathcal{I}(S) \cap V)N$, dados $\sigma(x) = u_0 + v_0 \in \mathcal{I}(S)$ e $u \in U$, $v \in V$, arbitrários, devemos mostrar que u_0u, u_0v, v_0u e v_0v são elementos de $\mathcal{I}(S)$. Como

$$\begin{aligned} u_0u &= (L_u - 2L_eL_u)(u_0) = (L_u - 2L_eL_u)(\sigma(x)); \\ u_0v &= (2L_vL_e)(u_0) = (2L_vL_e)(\sigma(x)); \\ v_0u &= (2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u)(v_0) = (2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u)(\sigma(x)); \\ v_0v &= (L_v - 2L_vL_e)(v_0) = (L_v - 2L_vL_e)(\sigma(x)), \end{aligned}$$

temos o resultado desejado. $\square$

Proposição 5.1 *Seja $A = Fe \oplus N$ uma álgebra de Bernstein e $M_0(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ sua álgebra de multiplicações reduzida.*

- (i) *Um subespaço $\mathcal{I} \subseteq \tilde{N}$ é ideal de $M_0(A)$ se e somente se $\mathcal{I} = \{\psi_x : x \in I\} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$ e I é um ideal de N que contém $(I \cap U)N$ e $(I \cap V)N$ e verifica $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I \subseteq U \oplus U^2$.*
- (ii) *$\mathcal{I}$ é um ideal de $M_0(A)$ não contido em $\tilde{N}$ se e somente se $\mathcal{I} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$.*

DEMONSTRAÇÃO:

- (i) Seja $\mathcal{J}$ um ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$. Como $U \oplus U^2$ é ideal de A , temos que $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq U \oplus U^2$. Seja I um ideal de N que contém $(I \cap U)N$ e $(I \cap V)N$ e satisfaz $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I \subseteq U \oplus U^2$. Então $\mathcal{I} = \{\psi_x : x \in I\} \oplus \mathcal{J}$ é um ideal de $M_0(A)$ contido em $\tilde{N}$. De fato, temos que $(2L_e^2 - L_e)\mathcal{I} = 0$, $\mathcal{I}(2L_e^2 - L_e) = \{\psi_x : x \in I\} \subseteq \mathcal{I}$, $\tilde{U}\mathcal{I} \subseteq \tilde{U}\tilde{N} = 0$ e $\mathcal{I}(\tilde{V} \cap \tilde{N}) = \mathcal{J}(\tilde{V} \cap \tilde{N}) \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Resta mostrar que $\mathcal{I}\tilde{U} \subseteq \mathcal{I}$ e $(\tilde{V} \cap \tilde{N})\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Para todo $\sigma \in \mathcal{J}$ e $\psi_u \in \tilde{U}$, vale que $\sigma\psi_y = \psi_{\sigma(y)}$. Como $\sigma(y) \in \mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq I$, resulta que $\sigma\psi_y \in \{\psi_x : x \in I\} \subseteq \mathcal{I}$. Portanto, $\mathcal{I}\tilde{U} = \mathcal{J}\tilde{U} \subseteq \mathcal{I}$. Observando que o conjunto $\{2L_vL_e, L_v - 2L_vL_e, L_u - 2L_eL_u, 2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U, v \in V\}$ gera a subálgebra $\tilde{V} \cap \tilde{N}$ e I sendo um ideal de N que contém $(I \cap U)N$ e $(I \cap V)N$, temos que $(\tilde{V} \cap \tilde{N})\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$: por exemplo, se $y = u_0 + v_0 \in I$ então $2L_vL_e\psi_y = \psi_{u_0v} \in \{\psi_x : x \in I\}$. De maneira análoga, prova-se para os demais geradores de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$. Assim, $\mathcal{I}$ é um ideal de $M_0(A)$. Reciprocamente, dado um ideal $\mathcal{I}$ de $M_0(A)$ contido em $\tilde{N}$, temos que $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I} \cap \tilde{V})$, pois $\mathcal{I} \cap \tilde{U} = \mathcal{I}(2L_e^2 - L_e) \subseteq \mathcal{I}$. E, pelas relações (1.7), $\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \tilde{V}$ é um ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$. Além disso, $\mathcal{I} \cap \tilde{U} = \mathcal{I}(2L_e^2 - L_e) = \{\sigma(2L_e^2 - L_e) : \sigma \in \mathcal{I}\} = \{\psi_x : x \in \mathcal{I}(e)\}$. Pelo Lema anterior, $I = \mathcal{I}(e)$ é um ideal de N que contém $(I \cap U)N$ e $(I \cap V)N$ e, para todo $\sigma \in \mathcal{J}$ e $x \in U \oplus U^2$, temos que $\sigma(x) = \sigma\psi_x(e) \in \mathcal{I}(e)$, ou seja, $\mathcal{J}(U \oplus U^2) \subseteq \mathcal{I}(e) \subseteq U \oplus U^2$.
- (ii) É claro que se $\mathcal{J}$ é ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$ então $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \mathcal{J}$ é ideal de $M_0(A)$. Reciprocamente, se $\mathcal{I} \subseteq M_0(A)$ é um ideal não contido em $\tilde{N}$ e $\sigma = 2L_e^2 - L_e + \theta \in \mathcal{I}$ então $\tilde{U} = \tilde{U}\sigma \subseteq \mathcal{I}$ e $2L_e^2 - L_e = (2L_e^2 - L_e)\sigma \in \mathcal{I}$. Portanto, $\mathcal{I} = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus (\mathcal{I} \cap \tilde{V})$, onde $\mathcal{I} \cap \tilde{V}$ é ideal de $\tilde{V} \cap \tilde{N}$. $\square$

5.1.2 Decomponibilidade nas álgebras de multiplicações

Veremos nesta seção como se relacionam a decomponibilidade entre uma álgebra de Bernstein A e as álgebras $M(A)$ e $M_0(A)$. O primeiro resultado compara decomposições de ideais de uma álgebra e de sua álgebra de multiplicações. Dado um ideal $I \subseteq A$ lembramos que $\hat{I}^*$ denota o ideal de $M(A)$ gerado por $\{L_x : x \in I\}$.

Lema 5.3 *Dada uma álgebra arbitrária A e dados I, I_1, I_2 ideais de A com $I = I_1 \oplus I_2$, temos que $\hat{I}^* = \hat{I}_1^* \oplus \hat{I}_2^*$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $\hat{I}^* \subseteq (I_i : A)$, para $i = 1, 2$, e $(I_1 : A) \cap (I_2 : A) = 0$, resulta que $\hat{I}_1^* \cap \hat{I}_2^* = 0$. Além disso, de $I_i \subseteq I$, temos que $\hat{I}_i^* \subseteq \hat{I}^*$, para $i = 1, 2$. Portanto, $\hat{I}_1^* \oplus \hat{I}_2^* \subseteq \hat{I}^*$.

Para a outra inclusão, seja $\sigma \in \widehat{I}^*$ um monômio arbitrário. Pela definição de $\widehat{I}^*$, existe $x \in I$ tal que $\sigma = \sigma_1 L_x \sigma_2$, onde $\sigma_i \in M(A) \cup \{\text{id}_A\}$. Decompondo $x = x_1 + x_2$, com $x_i \in I_i$, obtemos que $\sigma = \sigma_1 L_{x_1} \sigma_2 + \sigma_1 L_{x_2} \sigma_2 \in \widehat{I}_1^* \oplus \widehat{I}_2^*$. Assim, $\widehat{I}^* = \widehat{I}_1^* \oplus \widehat{I}_2^*$. $\square$

Proposição 5.2 *Dadas duas álgebras de Bernstein A_1 e A_2 , temos que*

$$M_0(A_1 \vee A_2) \cong M_0(A_1) \vee M_0(A_2).$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $A_1 = Fe_1 \oplus N_1$, $A_2 = Fe_2 \oplus N_2$, $A = A_1 \vee A_2$, $N = N_1 \oplus N_2$ e $e = e_1 \vee e_2$. Pelo lema anterior,

$$M_0(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus N = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widehat{N}_1^* \oplus \widehat{N}_2^*.$$

As aplicações $\alpha e + n_1 + n_2 \in A \mapsto \alpha e_i + n_i \in A_i$, para $i = 1, 2$, são epimorfismos. Logo, pela Proposição 1.1, existem epimorfismos Φ_i de $M(A)$ em $M(A_i)$ tais que $\Phi_i(L_{\alpha e + n_1 + n_2}) = L_{\alpha e_i + n_i}$, para $i = 1, 2$. Um elemento de $\widehat{N}_1^*$ é soma de operadores da forma $L_{x_1} \dots L_{x_k}$, com algum $x_i \in N_1$. Assim, $\sigma \Big|_{N_2} = 0$. Dessa maneira, $L_{x_1} \dots L_{x_k} = L_{\pi(x_1)} \dots L_{\pi(x_k)}$, onde π é a projeção de $Fe \oplus N_1 \oplus N_2$ em $Fe \oplus N_1$. Por outro lado, cada operador L_y , com $y \in Fe \oplus N_1$ está em correspondência com um operador $L_{y'}$ em $A_1 = Fe_1 \oplus N_1$. Essa correspondência é biunívoca e, portanto, $\Phi_1 \Big|_{\widehat{N}_1^*} : \widehat{N}_1^* \rightarrow \widetilde{N}_1$ é um isomorfismo. Do mesmo modo, $\Phi_2 \Big|_{\widehat{N}_2^*} : \widehat{N}_2^* \rightarrow \widetilde{N}_2$ é isomorfismo. Definimos

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_1 \times \Phi_2: M(A) &\rightarrow M(A_1) \times M(A_2) \\ \sigma &\mapsto (\Phi_1(\sigma), \Phi_2(\sigma)) \end{aligned}$$

Temos que Φ é um homomorfismo e a restrição de Φ a $M_0(A)$ é um isomorfismo entre $M_0(A)$ e $M_0(A_1) \vee M_0(A_2)$. De fato, $\Phi(M_0(A)) = M_0(A_1) \vee M_0(A_2)$, pois $\Phi(2L_e^2 - L_e) = (2L_{e_1}^2 - L_{e_1}, 2L_{e_2}^2 - L_{e_2})$, $\Phi(\widehat{N}_1^*) = (\widetilde{N}_1, 0)$ e $\Phi(\widehat{N}_2^*) = (0, \widetilde{N}_2)$. A injetividade é consequência da injetividade de $\Phi_i \Big|_{\widehat{N}_i^*} : \widehat{N}_i^* \rightarrow \widetilde{N}_i$, $i = 1, 2$. Portanto, $M_0(A_1 \vee A_2) \cong M_0(A_1) \vee M_0(A_2)$. $\square$

O próximo exemplo mostra que o resultado acima não é válido para as álgebras de multiplicações, isto é, em geral, $M(A_1 \vee A_2) \not\cong M(A_1) \vee M(A_2)$. Lembramos que se $A = Fe \oplus U$ é a álgebra de tipo $(1+r, 0)$ então $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$ tem dimensão $2+r$.

Exemplo 5.1 Seja $A = Fe \oplus Fu$ a álgebra de tipo $(2, 0)$. O join $A \vee A$ é a álgebra de tipo $(3, 0)$. Temos que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus F\psi_x \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$ tem dimensão 3. Portanto, a álgebra $M(A) \vee M(A)$ tem dimensão 5. Mas a álgebra de multiplicações da álgebra de tipo $(3, 0)$ tem dimensão 4. Portanto, $M(A) \vee M(A) \not\cong M(A \vee A)$.

Lema 5.4 *Seja A uma álgebra de Bernstein. São equivalentes:*

- (i) A é de tipo $(1, s)$, para algum $s \geq 0$;
- (ii) $M(A) \cong F$;
- (iii) $M_0(A) \cong F$.

DEMONSTRAÇÃO: A parte (i) $\Rightarrow$ (ii) já foi comentada, no início do Capítulo 3 (a demonstração está feita em [14]) e a implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) é clara. Para ver que (iii) $\Rightarrow$ (i), basta observar que se A tem tipo $(1 + r, s)$, com $r \geq 1$ então $\tilde{N} \neq 0$, pois os elementos ψ_u , com $u \in U$, estão nesse ideal. Dessa maneira, $M_0(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ tem dimensão maior que 1. Portanto, $M_0(A) \cong F$ implica que A é de tipo $(1, s)$, para algum $s \geq 0$. $\square$

Proposição 5.3 *Se A é uma álgebra de Bernstein decomponível que admite uma decomposição $A = A_1 \vee A_2$, onde cada A_i tem tipo $(1 + r_i, s_i)$, com $r_i \geq 1$, então $M_0(A)$ também é decomponível.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 5.2, $M_0(A) = M_0(A_1 \vee A_2) \cong M_0(A_1) \vee M_0(A_2)$. Como A_i tem tipo $(1 + r_i, s_i)$, com $r_i \geq 1$, resulta que $M_0(A_i) \not\cong F$, pelo lema anterior. Dessa maneira, $M_0(A_1) \vee M_0(A_2)$ é uma decomposição não trivial de $M_0(A)$, o que mostra que esta álgebra é decomponível. $\square$

Um exemplo análogo ao 5.1 mostra que a proposição anterior também não é verdadeira para $M(A)$.

Exemplo 5.2 Sejam $r \geq 2$ e A a álgebra de tipo $(1 + r, 0)$. Essa álgebra satisfaz as condições da Proposição 5.3, pois ela é join das álgebras de tipo $(1 + p, 0)$ e $(1 + r - p, 0)$, para qualquer $1 \leq p < r$. No entanto, $M(A)$ é indecomponível: suponha que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são ideais de $M(A)$ tais que $(N : A) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$. Em particular, $4L_e - 4L_e^2 = \sigma_1 + \sigma_2$, com $\sigma_i \in \mathcal{I}_i \subseteq (N : A)$. Como $(N : A) = \{\psi_x : x \in U\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$, existem $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ tais que $\sigma_i = \psi_{u_i} + \alpha_i(4L_e - 4L_e^2)$. Temos que $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$, pois $\sigma_1 + \sigma_2 = 4L_e - 4L_e^2$. Assim, podemos supor que $\alpha_1 \neq 0$. Logo, para todo $u \in U$, $\psi_u = (4L_e - 4L_e^2)\psi_u = \alpha_1^{-1}\sigma_1\psi_u \in \mathcal{I}_1$ e $4L_e - 4L_e^2 = \alpha_1^{-1}\sigma_1(4L_e - 4L_e^2) \in \mathcal{I}_1$, ou seja, $(N : A) \subseteq \mathcal{I}_1$. Portanto, $\mathcal{I}_2 = 0$ e, conseqüentemente, $M(A)$ é indecomponível.

Observação 5.1 O exemplo anterior, combinado com a Proposição 5.3, também mostra que a decomponibilidade de $M_0(A)$ não implica na decomponibilidade de $M(A)$.

Veremos a seguir que a recíproca da Proposição 5.3 não é verdadeira, isto é, a álgebra $M_0(A)$ pode ser decomponível, mesmo que A não seja.

Exemplo 5.3 Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein cuja tabela de multiplicações em $U \oplus V$ é

	u_1	u_2	v_1	v_2
u_1	v_1			
u_2				
v_1				u_2
v_2			u_2	u_2

Vamos mostrar que A é indecomponível. Seja $I \subseteq N$ um ideal não nulo de A . Temos que $I = (I \cap U) \oplus (I \cap V)$. Se $I \subseteq U$ então devemos ter $I \subseteq L$, pois os ideais de A contidos em U estão em L , já que $U^2 \subseteq V$. Como $L = \langle u_2 \rangle$ e I é não nulo, resulta que $I = Fu_2$, ou seja, $u_2 \in I$. Suponha agora que $I \not\subseteq U$, isto é, $I \cap V \neq 0$ e seja $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in I$ um elemento não nulo. Se $\alpha_2 \neq 0$ então $u_2 = \alpha_2^{-1} v v_1 \in I$. Se $\alpha_2 = 0$ então $v_1 \in I$ e, nesse caso, $u_2 = v_1 v_2 \in I$. Portanto, se $I \subseteq N$ é um ideal não nulo, temos que $u_2 \in I$, ou seja, quaisquer dois ideais de A contidos em N têm intersecção não nula. Consequentemente, A é indecomponível. Provaremos agora que $M_0(A)$ é decomponível. Observamos inicialmente que FL_{v_1} é um ideal de $M(A)$. De fato, como $L_{v_1}(A^2) = 0$, temos que $L_{v_1} \in \text{ann}_L M(A)$, pela Proposição 1.8. Portanto, $L_{v_1}M(A) = 0 \subseteq FL_{v_1}$. Por outro lado, $\text{Im}(L_{v_1}) = \langle u_2 \rangle = \text{ann}_N N$, ou seja, $L_x L_{v_1} = 0$, para todo $x \in N$. Também temos que $L_e L_{v_1} = \frac{1}{2} L_{v_1} \in FL_{v_1}$. Assim, FL_{v_1} é ideal de $M(A)$. Seja $\mathcal{I}$ o ideal de $M(A)$ gerado por $\{L_{u_1}, L_{u_2}, L_{v_2}\}$. Temos que

$$FL_{v_1} + \mathcal{I} = \tilde{N}. \quad (5.1)$$

Através de cálculos, obtemos que $\mathcal{I} = \langle \psi_{u_1}, \psi_{u_2}, \psi_{v_1} = 2L_{u_1}^2 \rangle \oplus \langle L_{v_2} L_{u_1} \rangle \oplus \langle L_{v_2} \rangle \oplus \langle L_{u_1} - \frac{1}{2} \psi_{u_1} \rangle$, onde os somandos estão, respectivamente, em $\tilde{U}$, $\tilde{V}_{11}$, $\tilde{V}_{10}$ e $\tilde{V}_{01}$. O operador L_{v_1} , que é um elemento de $\tilde{V}_{10}$, não está em $\mathcal{I}$, pois $\mathcal{I} \cap \tilde{V}_{10} = \langle L_{v_2} \rangle$. Portanto, a soma em (5.1) é direta, ou seja, $M_0(A)$ é decomponível.

5.2 A álgebra de multiplicações com unidade

Alguns autores consideram a álgebra de multiplicações com unidade de uma álgebra não associativa arbitrária A ; veja, por exemplo, [19] e [38]. Denotaremos por $M_1(A)$ tal álgebra, que é a subálgebra de $\text{End } A$ gerada por $M(A)$ e id_A . No caso das álgebras de

Bernstein, vimos que, exceto no caso trivial em que o tipo da álgebra é $(1 + r, s)$, a álgebra de multiplicações não possui unidade (Corolário 2 da Proposição 2.8). Dessa maneira, $M_1(A) = \langle \text{id}_A \rangle \oplus M(A)$ e, portanto, $M(A)$ é um ideal (bilateral) de $M_1(A)$ de codimensão 1.

Fixada uma decomposição de Peirce de A , $A = Fe \oplus U \oplus V$, sabemos que as projeções sobre Fe e U estão em $M(A)$. Denotando por π_V a projeção sobre o subespaço V que tem como núcleo o subespaço $Fe \oplus U$, temos que

$$M_1(A) = M(A) \oplus \langle \pi_V \rangle.$$

A decomposição de Peirce completa de $M_1(A)$ relativa ao idempotente e fica:

$$M_1(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus (\tilde{V}_{00} \oplus \langle \pi_V \rangle).$$

Se $\Phi: M(A) \rightarrow M(A')$ é um isomorfismo então $M_1(A)$ e $M_1(A')$ também são isomorfas, via $\alpha \text{id}_A + \sigma \mapsto \alpha \text{id}_{A'} + \Phi(\sigma)$, para todo $\alpha \in F$ e $\sigma \in M(A)$. Portanto, isomorfismos entre álgebras de multiplicações implicam em isomorfismos entre as álgebras de multiplicações com unidade das álgebras correspondentes. A recíproca é um problema que ainda está sendo estudado. Observamos ainda que os ideais de $M(A)$ são também ideais de $M_1(A)$.

No Teorema 2.1 vimos uma caracterização das álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através dos idempotentes de $M(A)$. Para $M_1(A)$ temos um resultado análogo em uma das direções:

Proposição 5.4 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com núcleo nilpotente então os idempotentes do núcleo de $M_1(A)$ têm posto r , s ou $r + s$. No último caso, o idempotente é id_N .*

DEMONSTRAÇÃO: Como N é nilpotente, temos que $\tilde{N}$ também é nilpotente, pela Proposição 2.1. Portanto, o núcleo de $M_1(A)$ tem decomposição

$$F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N} \oplus F\pi_V. \quad (5.2)$$

Seja $\sigma = \psi_x + \alpha(4L_e - 4L_e^2) + \theta + \beta\pi_V$ um idempotente, com $\psi_x \in \tilde{U}$ e $\theta \in (\tilde{N} \cap \tilde{V})$. Pela decomposição dada em (5.2), temos duas possibilidades para α e β : $\alpha = 0$ ou 1 e $\beta = 0$ ou 1 . Se $\beta = 0$ então $\sigma \in (N : A)$; logo, $\text{rk}(\sigma) = r$, pela Proposição 2.3. No caso em que $\beta = 1$ e $\alpha = 1$, temos que $\sigma = \pi_N + \psi_x + \theta$. A condição $\sigma^2 = \sigma$ implica que $\theta^2 = -\theta$. Como $\tilde{N}$ é nilpotente, resulta que $\theta = 0$ e, assim, $\sigma = \pi_N$ tem posto $r + s$. Resta analisar o caso em

que $\beta = 1$ e $\alpha = 0$, ou seja, quando $\sigma = \pi_V + \theta$, onde $\theta \in \tilde{N}$. A prova de que $\text{rk}(\sigma) = s$ é análoga à demonstração da Proposição 2.3: Se $\text{rk}(\sigma) < s$ então, pela Observação 2.2, existe $v \in V \cap \ker \sigma$, $v \neq 0$, isto é, existe $v \in V$ não nulo tal que $0 + \sigma(v) = v + \theta(v)$, o que implica que θ tem autovalor -1 , contrariando a nilpotência de θ . Por outro lado, se $\text{rk}(\sigma) > s$ então, novamente pela Observação 2.2, existe $u \in U \cap \text{Im } \sigma$, não nulo; ou seja, existe $u \in U$, $u \neq 0$, tal que $u = \sigma(u) = \theta(u)$, contrariando mais uma vez a nilpotência de θ . Portanto, o idempotente σ , neste caso, tem posto s . $\square$

Ao contrário do que acontece para as álgebras de multiplicações (sem unidade), a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, mesmo para o caso das álgebras não excepcionais, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 5.4 Sejam $k \geq 2$ um inteiro e A a álgebra de Bernstein de tipo $(1 + 2k, k)$ cuja tabela de multiplicações do núcleo é dada por

	u_1	$\dots$	u_k	u_{k+1}	$\dots$	u_{2k}	v_1	$\dots$	v_k
u_1							u_1		
$\vdots$							$\vdots$		
u_k							u_k		
u_{k+1}							v_2		
$\vdots$									
u_{2k}									
v_1	u_1	$\dots$	u_k						
$\vdots$									
v_k									

Essa álgebra é não excepcional, pois $u_{k+1}^2 = v_2 \neq 0$. Temos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus FL_{v_1}$. Assim, os idempotentes de $\tilde{V}_{11}$ são $4L_e - 4L_e^2$, L_{v_1} e $4L_e - 4L_e^2 - L_{v_1}$, que têm posto $2k$, k e k , respectivamente. Portanto, os idempotentes de $(N : A)$ têm posto $2k$ ou k . O idempotente π_V tem posto k . Assim, se $\sigma \in (N : A) \oplus \pi_V$ é idempotente então σ tem posto k , $2k$ ou $3k$, ou seja, s , r ou $r + s$. Contudo, o núcleo de A não é nilpotente pois, por exemplo, $L_{v_1}^n(u_1) = u_1 \neq 0$, para todo $n \geq 1$.

5.3 O problema inverso

Como foi comentado no início do capítulo, o problema de determinar quais são as álgebras associativas que podem ser álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein parece

ser bastante complexo. Pouco foi feito nesse sentido, até o momento. Nesta seção, descreveremos as álgebras associativas que são $M(A)$ de uma álgebra de Bernstein excepcional A .

5.3.1 $M(A)$ nas álgebras de Bernstein excepcionais

Seja A uma álgebra de Bernstein excepcional. Vimos no Capítulo 1 que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U\} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10}$, onde $\tilde{V}_{11}$ pode ser identificada com uma subálgebra de $\text{End } U$ e $\tilde{V}_{10}$ com um subespaço de $\text{Hom}(V, U)$. Vimos também na Seção 3.2.1 que existem álgebras excepcionais com $\tilde{V}_{11} \cong \text{End } U$ e $\tilde{V}_{10} \cong \text{Hom}(V, U)$. Dados U e V espaços vetoriais de dimensões r e s , respectivamente, veremos como são as subálgebras de $\text{End } U$ e os subespaços de $\text{Hom}(V, U)$ que podem aparecer, respectivamente, como $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$ de álgebra de multiplicações de álgebras excepcionais de tipo $(1 + r, s)$.

Lema 5.5 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein excepcional, $\{u_1, \dots, u_r\}$ uma base de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ uma base de V . Então o subespaço $\tilde{V}_{11}$ é a subálgebra de $M(A)$ gerada por $\{4L_e - 4L_e^2, L_{v_i}L_e : i = 1, \dots, s\}$ e $\tilde{V}_{10}$ é o produto dos subespaços $\tilde{V}_{11}$ e $\langle 2L_eL_{u_i} - \frac{1}{2}\psi_{u_i}, L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e : i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s \rangle$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta lembrar que $\tilde{V} = \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10}$ e que $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$. $\square$

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões r e s , respectivamente. Se W_1 é uma subálgebra com unidade de $\text{End } U$ e W_2 , um subespaço de $\text{Hom}(V, U)$, nem sempre existe uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\tilde{V}_{11} \cong W_1$ e $\tilde{V}_{10} \cong W_2$. Basta tomar W_1 e W_2 que não satisfazem $W_1W_2 \subseteq W_2$. Esta condição é necessária, já que $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$ verificam $\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{10} \subseteq \tilde{V}_{10}$. Mesmo assim, essa restrição não determina os possíveis subespaços $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$. Por exemplo, $W_2 = 0$ satisfaz $W_1W_2 \subseteq W_2$, qualquer que seja $W_1 \subseteq \text{End } U$. Uma álgebra de Bernstein com $\tilde{V}_{10} = 0$ é normal, pelo Teorema 1.1. Assim, verifica $UV + V^2 = 0$, além de U^2 . Portanto, a suposta álgebra deve satisfazer $N^2 = 0$ e, pelo que foi visto no início da Seção 3.2, $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2)$. Dessa maneira, $W_1 \neq \langle \text{id}_U \rangle$ e $W_2 = 0$ são subespaços que não aparecem, respectivamente, como $\tilde{V}_{11}$ e $\tilde{V}_{10}$ de álgebra de multiplicações de álgebra de Bernstein excepcional.

Suponha agora que W_1 é uma subálgebra arbitrária (com unidade) de $\text{End } U$. Se existem $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in W_1$ tais que $\{\text{id}_U, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ geram W_1 como álgebra então existe álgebra excepcional de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\tilde{V}_{11} \cong W_1$. De fato, fixadas bases $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V e dado um espaço vetorial unidimensional Fe , definimos no espaço $A = Fe \oplus U \oplus V$ a seguinte multiplicação comutativa:

$e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$; $u_iv_j = \sigma_j(u_i)$; para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$ e outros produtos nulos.

A álgebra assim obtida é Bernstein excepcional e, para todo $j = 1, \dots, s$, temos uma identificação entre os operadores $2L_{v_j}L_e$ e σ_j . Pelo Lema 5.5, $\tilde{V}_{11}$ é a subálgebra gerada por $\{4L_e - 4L_e^2, 2L_{v_j}L_e, j = 1, \dots, s\}$, ou seja, $\tilde{V}_{11} \cong W_1$.

Fixada a subálgebra W_1 , o exemplo acima determina uma possível álgebra de Bernstein excepcional que verifica $\tilde{V}_{11} \cong W_1$. Existem, em geral, diversas álgebras excepcionais com $\tilde{V}_{11} \cong W_1$ e, para cada uma dessas, existem outros subespaços W_2 de $\text{Hom}(V, U)$ que aparecem como $\tilde{V}_{10}$ de $M(A)$. A construção a seguir, determinará esses possíveis subespaços.

Inicialmente, fixamos as bases $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V . Dados $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in W_1$ tais que $\{\text{id}_U, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ gera W_1 e dados $x_{kl} \in U$, $1 \leq k \leq l \leq s$, elementos arbitrários, sejam $\tau_1, \dots, \tau_r, \theta_1, \dots, \theta_s \in \text{Hom}(V, U)$ definidas por $\tau_i(v_j) = \sigma_j(u_i)$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$ e $\theta_k(v_l) = \theta_l(v_k) = x_{kl}$, $1 \leq k \leq l \leq s$. Tomamos como W_2 o espaço vetorial $W_1\langle\tau_1, \dots, \tau_r, \theta_1, \dots, \theta_s\rangle$. Dessa maneira, existe uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1+r, s)$ cuja álgebra de multiplicações tem $\tilde{V}_{11} \cong W_1$ e $\tilde{V}_{10} \cong W_2$: definimos no espaço vetorial $A = Fe \oplus U \oplus V$ a seguinte tábua de multiplicações comutativa:

$$e^2 = e; eu_i = \frac{1}{2}u_i; u_iv_j = \sigma_j(u_i); v_jv_k = \theta_j(v_k); \text{ para } i = 1, \dots, r \text{ e } j, k = 1, \dots, s \\ \text{e outros produtos nulos.}$$

Observamos que a multiplicação é, de fato, comutativa, pois $\theta_j(v_k) = \theta_k(v_j)$. Com as devidas identificações, temos $2L_eL_{v_j} = \sigma_j$; $2L_eL_{u_i} - \frac{1}{2}\psi_{u_i} = \tau_i$ e $L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e = \theta_j$, para todo $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$. Pelo Lema 5.5, temos $\tilde{V}_{11} = \langle 4L_e - 4L_e^2, 2L_eL_{v_j} : j = 1, \dots, s \rangle$ e $\tilde{V}_{10} = \tilde{V}_{11}\langle 2L_eL_{u_i} - \frac{1}{2}\psi_{u_i}, L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e : i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s \rangle$. Portanto, $\tilde{V}_{11} \cong W_1$ e $\tilde{V}_{10} \cong W_2$.

Reciprocamente, se A é uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1+r, s)$ então existem $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in \tilde{V}_{11}$ e $\tau_1, \dots, \tau_r, \theta_1, \dots, \theta_s \in \tilde{V}_{10}$ tais que $\{\text{id}_U, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ gera a subálgebra $\tilde{V}_{11}$, $\tilde{V}_{10} = \tilde{V}_{11}\langle\tau_1, \dots, \tau_r, \theta_1, \dots, \theta_s\rangle$ e, para bases convenientes $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V , tem-se $\tau_i(v_j) = \sigma_j(u_i)$ e $\tau_j(v_k) = \tau_k(v_j)$, para todo $i = 1, \dots, r$ e $j, k = 1, \dots, s$. De fato, se $\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\{v_1, \dots, v_s\}$ são bases arbitrárias de U e V , respectivamente, tomando $\sigma_j = 2L_{v_j}L_e$, $\tau_i = 2L_eL_{u_i} - \frac{1}{2}\psi_{u_i}$, $\theta_k = L_{v_k} - 2L_{v_k}L_e$, para $i = 1, \dots, r$ e $j, k = 1, \dots, s$, temos as propriedades desejadas.

Descrevemos, assim, como são as álgebras associativas que podem ser álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein excepcional.

Referências Bibliográficas

- [1] Alcalde, M.T.; Burgueño, C.; Mallol, C.; Varro R.: *Dérivations dans les algèbres de Bernstein*, Journal of Algebra **183**, 826-836 (1996).
- [2] Albert, A.A.: *Structure of Algebras*, Am. Math. Soc, Colloquium Publications vol XXIV (1939).
- [3] Albert, A.A.: *The radical of a nonassociative algebra*, Bull Amer. Math. Soc. **48**, 891-897 (1942).
- [4] Baeza-Vega, R.; Costa, R.: *Shape identities in genetic algebras. II*, Alg. Groups and Geom. **11** (4). 379-395 (1994)
- [5] Baeza-Vega, R.; Costa, R.: *Bernstein algebras of level at most 5*, Nova J. Math. Game Theory Algebra **6** (4) 193-209 (1997).
- [6] Baeza-Vega, R.; Correa, I.; Costa, R.; Peresi, L. A. *Shape identities in Bernstein algebras*, Comm. Algebra **25** (8), 2659-2679 (1997).
- [7] Bernad, J.; González, S.; Martínez, C.; Iltyakov, A.: *Polynomial identities of Bernstein algebras of small dimension*, J. Algebra **207** (2), 664-681 (1998).
- [8] Correa, I; Peresi, L.A.: *Minimal identities of Bernstein algebras*, Alg. Groups and Geom. **11** (2) 181-199 (1994).
- [9] Cortes, T. and Montaner, F.: *On the structure of Bernstein algebras* (preprint).
- [10] Costa, R. and Guzzo Jr., H.: *Indecomposable baric algebras*, Linear Alg. and Its Appl. **183**, 223-236 (1993).
- [11] Costa, R. and Guzzo Jr., H.: *Indecomposable baric algebras. II*, Linear Alg. and Its Appl. **196**, 233-242 (1993).

- [12] Costa, R.: *Shape identities in genetic algebras*, Linear Alg. and its Appl. **214**, 119-131, (1995).
- [13] Costa, R. and Guzzo Jr., H.: *A class of exceptional Bernstein algebras associated to graphs*, Comm. Alg. **25** (7), 2129-2139 (1997).
- [14] Costa, R. and Suazo, A.: *The multiplication algebra of a Bernstein algebra: basic results*, Comm. Alg. **24** (5), 1809-1821 (1996).
- [15] Costa, R.; Ikemoto, L.S. and Suazo, A.: *On the multiplication algebra of a Bernstein algebra*, Comm. in Alg. **26** (11), 3727-3736 (1998).
- [16] Costa, R.; Grishkov, A.N.: *Graphs and nonassociative algebras*, Journal of Math. Science (aceito para publicação)
- [17] Costa, R.; Picanço, J.: *Invariance of dimension of p -subspaces in Bernstein algebras*, Comm. Alg. (aceito para publicação)
- [18] Drozd, Y.A. and Kirichenko, V.: *Finite dimensional algebras*, Springer-Verlag (1993).
- [19] Finston, D.R.: *On multiplication algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **293** (2), 807-818 (1986).
- [20] González, S.: *Inner derivations of Bernstein algebras*, Linear Alg. and its Appl. **170**, 206-210 (1992).
- [21] González, S.; Martínez, C.: *Bernstein algebras with zero derivation algebra*, Linear Alg. and its Appl. **191**, 235-244 (1993).
- [22] González, S.; Gutiérrez, J.C.; Martínez, C.: *The Bernstein problem in dimension 5*, J. Algebra **177** (3), 676-697 (1995).
- [23] González, S.; López-Díaz, M.C.; Martínez, C.; Shestakov, I.P.: *Bernstein superalgebras and supermodules*, J. Algebra **212** (1), 119-131 (1999).
- [24] Gutiérrez, J.C.: *Structure of Bernstein populations of type $(3, n - 3)$* , Linear Alg. and its Appl. **269** 17-32 (1998).
- [25] Gutiérrez, J.C.: *The Bernstein problem in dimension 6*, J. Algebra **185** (2), 420-439 (1996).

- [26] Gutiérrez, J.C.: *Solution of the Bernstein problem in the non-regular case* (preprint).
- [27] Grishkov, A.N.: *On the genetic property of Bernstein algebras*, Soviet Math. Dokl. **35** (3), 489-492 (1987).
- [28] Herstein, I.N.: *Noncommutative rings*, The Carus Math. Monographs, 15 (1968).
- [29] Jacobson, N.: *A note on non associative algebras*, Duke Math. J. **3**, 544-548 (1937).
- [30] Jacobson, N.: *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1980).
- [31] Jacobson, N.: *Lie Algebras*, Wiley (Interscience), New York (1962).
- [32] Krupnik, N.: *Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field*, Comm. Algebra **20** (11), 3251-3257 (1992).
- [33] Lyubich, Yu. I.: *Bernstein algebras* (em russo), Uspekhi Mat. Nauk **32** (6), 261-263 (1977).
- [34] Lyubich, Yu. I.: *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics **22**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [35] Martínez, C.: *Inner derivations in a Jordan-Bernstein algebra*, Nova Sci. Publ., N.Y. 217-228 (1992).
- [36] Micali, A and Ouattara, M.: *Structure des Algèbres de Bernstein*, Linear Alg. and Appl. **218**, 77-88 (1995).
- [37] Picanço da Silva, Juaci: *Invariância em p -subespaços em algumas álgebras báricas*, Tese de Doutorado, IME-USP (1999).
- [38] Pritchard, F.L.: *Ideals in the multiplication algebra of a non-associative K -algebra*, Comm. Algebra **21** (12), 4541-4559 (1993).
- [39] Schafer, R.D.: *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press (1966).
- [40] Zhevlakov, K.A., Slinko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov, A.I.: *Rings That Are Nearly Associative*, Academic Press (1982).

Índice de Símbolos

(A, ω) , 7	$\widehat{S}$, 13
U_e , 7	$(I : A)$, 13
V_e , 7	$\mathcal{J}(S)$, 13
$\text{Ip}(A)$, 8	$\widetilde{N}$, 15
L , 10	$\widetilde{U}$, 17
$X(G)$, 10	$\widetilde{V}$, 17
$E(G)$, 10	ψ_x , 19
$A(G)$, 10	$\widetilde{V}_{ij}$, 19
∂x , 10	$\text{ann}M(A)_L$, 22
$\text{End}(A)$, 13	$\text{ann}M(A)_R$, 22
L_x , 13	$\text{ann}M(A)$, 22
R_x , 13	$\text{rk}(\sigma)$, 28
$M(A)$, 13	$\rho(A)$, 33
$F[X]$, 13	$[i = i_1, i_2, \dots, i_k = j]$, 44
$XF[X]$, 13	$M_0(A)$, 73
B^* , 13	$M_1(A)$, 79

Índice Remissivo

álgebra

- bárica, 6
 - decomponível. 11
 - indecomponível. 11
- de multiplicações
 - reduzida, 73
- de Bernstein, 7
 - associada a um grafo, 11, 44
- de Bernstein Jordan, 9
- de multiplicações. 13
 - com unidade. 78
- excepcional, 8
- gamética, 8
- nilpotente, 8
- normal, 8
- nuclear, 8
- quociente, 9
- índice de nilpotência. 8
- anulador de $M(A)$. 22
- character, 6, 65–67
- Decomposição de Peirce
 - completa de $M(A)$, 20
 - da álgebra associativa A , 12
 - da álgebra de Bernstein A , 7
 - de $M(A)$, 18
- função peso, 7

induzida, 14

grau de um vértice, 10

homomorfismo bárico, 7

ideal bárico, 7

idempotente, 8

identidade de Jacobi, 8

join

de álgebras báricas, 11

peso de um elemento, 7

radical de Jacobson, 12

subálgebra bárica, 7

subclasse fechada, 11

Teorema

de Grishkov, 8

tipo, 8