**Superfícies de Delaunay
no Espaço Hiperbólico**

Regina Célia Nostre Marques

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Geometria

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, março de 1999-

A Marília, Caio,

Júlia e Leonardo.

Superfícies de Delaunay no Espaço Hiperbólico

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Regina Célia Nostre Marques
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, março de 1999.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (Presidente) -
IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME-USP
- Prof. Dr. Renato Pedrosa IMECC - UNICAMP

Agradecimentos

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e aos meus irmãos.

A Rosa, pela sua amizade e por confiar em mim desde a graduação, mostrando-me os caminhos da Geometria.

Aos professores Antonio Carlos Asperti, Célia Contin Góes e Maria Elisa Lopes Galvão.

Aos amigos, em especial ao Raul, Bárbara, Zé, Irene, Jorge, Sidney, Fernando, Walquíria, Paulo, Samuel.

Ao Armando, que com suas críticas construtivas contribuiu para a realização desta dissertação.

Resumo

Em 1841 Delaunay provou que se rolamos uma cônica sobre uma reta num plano e em seguida rotacionamos, em torno desta reta, a curva descrita por um dos focos desta cônica, obtemos uma superfície com curvatura média constante. Nesta dissertação estudamos o mesmo problema no espaço hiperbólico, com base nos trabalhos de [CD], [B], [H], [S] e [CA].

Abstract

In 1841 Delaunay proved that if one rolls a conic section on a line in a plane and then rotates about the line the trace of a focus, one obtains a constant mean curvature surface of revolution in $\mathbb{R}^3$. Here we study the same problem in the hyperbolic space based in works due to [CD], [B], [H], [S] e [CA].

Sumário

Introdução	4
1 Considerações Básicas sobre a Geometria Hiperbólica	5
1.1 Variedade Riemanniana	5
1.2 O Espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4$	6
1.3 A Conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^4$	6
1.4 Geodésicas de $\mathbb{L}^4$	7
1.5 Isometrias de $\mathbb{L}^4$	8
1.6 O Espaço Hiperbólico	9
1.7 Isometrias de $\mathbb{H}^3(-1)$	11
1.8 Outros Modelos da Geometria Hiperbólica	12
1.8.1 Isometria entre $\mathbb{R}_+^3$ e $\mathbb{H}^3(-1)$	13
1.9 A Geometria do Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$	14

1.10	Trigonometria Hiperbólica	20
1.10.1	Triângulos Hiperbólicos	22
1.10.2	Triângulos Assintóticos	30
1.10.3	Quadriláteros Hiperbólicos	31
2	Superfícies Rotacionais com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$	38
2.1	Coordenadas Cilíndricas no Espaço Hiperbólico	39
2.2	A Família de Bour de uma Superfície de Rotação	40
2.3	Coeficientes da Segunda Forma Fundamental de uma Superfície de Rotação em $\mathbb{H}^3$	46
2.4	Superfícies de Rotação com H Constante	51
2.4.1	$H > 1$	51
2.4.2	$H = 1$	56
2.4.3	$0 \leq H < 1$	61
3	Uma Generalização do Teorema de Delaunay para Superfícies com H Constante em $\mathbb{H}^3$	72
3.1	Movimento Plano sobre o Plano Hiperbólico	73
3.1.1	Teoria Geral	73

3.2	Rolamento sem Deslizar	80
3.3	A EDO Reduzida de uma Superfície de Rotação com H Constante em $\mathbb{H}^3$.	85
3.4	A Generalização do Teorema de Delaunay em $\mathbb{H}^3$	93
3.5	As Curvas de Equação $\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}$	105

Referências Bibliográficas

133

Introdução

O objetivo desta dissertação é fazer, no espaço hiperbólico, o mesmo estudo feito por Delaunay no espaço euclidiano.

No primeiro capítulo damos os modelos para a Geometria Hiperbólica e os conceitos básicos desta geometria, como suas geodésicas, seus círculos, suas curvas equidistantes e seus horociclos. Isto é feito através de [CD] e [SU]. Também fazemos o estudo da trigonometria hiperbólica, através de [R].

No segundo capítulo estudamos as superfícies rotacionais esféricas com curvatura média constante no espaço hiperbólico, caracterizando-as pelas suas curvas geratrizes. Este estudo é feito através de [B].

No terceiro capítulo este mesmo estudo é realizado com outro enfoque: as curvas geratrizes são vistas como curvas descritas por um dos focos de cônicas quando as fazemos rolar, sem deslizar, sobre uma geodésica. Este estudo é feito através de [H], de [S] e de [CA]. Este capítulo tem como objetivo principal a demonstração do teorema de Delaunay no espaço hiperbólico que afirma que se rolamos uma cônica sobre uma geodésica e observamos a curva descrita por um de seus focos, a superfície gerada pela rotação desta curva em torno da geodésica tem curvatura média constante.

Capítulo 1

Considerações Básicas sobre a Geometria Hiperbólica

1.1 Variedade Riemanniana

Definição 1.1. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Definição 1.2. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica, positiva definida, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte*

sentido: se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\varphi(x_1, \dots, x_n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\varphi_q(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U . As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

1.2 O Espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4$

Consideremos sobre $\mathbb{R}^4$ a métrica de Lorentz

$$g_{-1}(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

com $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$. Observamos que ela é uma forma bilinear, simétrica e não-degenerada de índice 1 sobre $\mathbb{R}^4$.

Denotaremos por $\mathbb{L}^4$ o par $(\mathbb{R}^4, g_{-1})$, que chamaremos espaço de Lorentz.

1.3 A Conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^4$

Definição 1.3. Sejam $V, W \in \chi(\mathbb{L}^4)$ (conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em $\mathbb{L}^4$) e $f \in \mathcal{F}(\mathbb{L}^4)$ (anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\mathbb{L}^4$). Definimos o colchete $[V, W] \in \chi(\mathbb{L}^4)$ pela expressão

$$[V, W](f) = V(W[f]) - W(V[f])$$

sendo $V[f] = \sum_{i=1}^4 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f$, a derivada de f na direção de $V = \sum_{i=1}^4 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definição 1.4. Uma conexão afim ∇ em $\mathbb{L}^4$ é uma aplicação $\nabla : \chi(\mathbb{L}^4) \times \chi(\mathbb{L}^4)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{L}^4)$ e $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{L}^4)$.

Teorema 1.1. Existe uma única conexão afim ∇ em $\mathbb{L}^4$ tal que:

1. $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$, para todo $X, Y \in \chi(\mathbb{L}^4)$
2. $Xg_{-1}(Y, Z) = g_{-1}(\nabla_XY, Z) + g_{-1}(Y, \nabla_XZ)$, para todo $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{L}^4)$.

∇ é denominada conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^4$.

Demonstração. Ver [C1].

□

1.4 Geodésicas de $\mathbb{L}^4$

Definição 1.5. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$ uma curva de $\mathbb{L}^4$. Dizemos que γ é uma geodésica de $\mathbb{L}^4$ se, e somente se, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.

Não é difícil verificar que as geodésicas de $\mathbb{L}^4$ são retas que estão definidas para todo parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\mathbb{L}^4$ é uma variedade geodesicamente completa.

Definição 1.6. *Uma subvariedade M de $\mathbb{L}^4$ é totalmente geodésica se toda geodésica de M é geodésica de $\mathbb{L}^4$. Equivalentemente, uma subvariedade é totalmente geodésica se toda geodésica de $\mathbb{L}^4$, tangente a esta subvariedade em um ponto, está totalmente contida nesta subvariedade.*

1.5 Isometrias de $\mathbb{L}^4$

Definimos por $O_1(4)$ o conjunto dos operadores lineares inversíveis $O : \mathbb{L}^4 \rightarrow \mathbb{L}^4$, tais que

$$g_{-1}(O(u), O(v)) = g_{-1}(u, v), \forall u, v \in \mathbb{L}^4.$$

Um elemento $O \in O_1(4)$ será chamado de transformação ortogonal de $\mathbb{L}^4$. $O_1(4)$ assim definido é um grupo relativamente à composição dos operadores.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $O \in O_1(4)$
2. O leva base ortonormal $\{e_i\}$ em uma base ortonormal $\{O(e_i)\}$, com $g_{-1}(e_{i_0}, e_{i_0}) = g_{-1}(O(e_{i_0}), O(e_{i_0})) = -1$, para algum $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demonstração. Ver [SU]

□

1.6 O Espaço Hiperbólico

Tomemos a hipersuperfície de $\mathbb{L}^4$

$$\mathbb{H}^3(-1) = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 / g_{-1}(x, x) = -1, x_0 > 0\},$$

que é uma subvariedade de dimensão 3 de $\mathbb{L}^4$, denominada **espaço hiperbólico de dimensão 3**.

Tomemos a parametrização de $\mathbb{H}^3(-1)$ dada pela projeção

$$\begin{aligned} x : \mathbb{H}^3(-1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Sua inversa x^{-1} é uma carta para $\mathbb{H}^3(-1)$

$$\begin{aligned} x^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{H}^3(-1) \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_0, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

onde

$$x_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}.$$

Temos

$$dx_p^{-1}U_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall p \in \mathbb{H}^3(-1),$$

sendo $\{U_1, U_2, U_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\}$ base de $T_p\mathbb{H}^3(-1)$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}}, 1, 0, 0 \right) \in \mathbb{L}^4,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}}, 0, 1, 0 \right) \in \mathbb{L}^4,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}}, 0, 0, 1 \right) \in \mathbb{L}^4,$$

e sendo $\xi(p) = p$ a normal unitária a $T_p\mathbb{H}^3(-1)$ no ponto p .

O operador de Weingarten associado a ξ é $\mathcal{A}_\xi(X) = -(\nabla_X \xi)^T$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^4$ e $X \in \chi(\mathbb{H}^3(-1))$.

Temos, para $i = 1, 2, 3$,

$$\mathcal{A}_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = -(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(x_0, x_1, x_2, x_3))^T = -\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}}, \dots, 1, \dots \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Logo,

$$(\mathcal{A}_\xi)_p = -id_{T_p\mathbb{H}^3(-1)}.$$

Chamando de $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathbb{H}^3(-1)$, a equação de Gauss fica:

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{R}(X, Y)Z, T) &= g_{-1}(\mathcal{A}Y, Z)g_{-1}(\mathcal{A}X, T) - g_{-1}(\mathcal{A}X, Z)g_{-1}(\mathcal{A}Y, T) = \\ &= g_{-1}(-Y, Z)g_{-1}(-X, T) - g_{-1}(-X, Z)g_{-1}(-Y, T) = \\ &= \cancel{\neg}(g_{-1}(Y, Z)g_{-1}(X, T) - g_{-1}(X, Z)g_{-1}(Y, T)), \quad \forall p \in \mathbb{H}^3(-1), \\ &\quad \forall X, Y, Z, T \in T_p\mathbb{H}^3(-1). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{R}(X, Y)X, Y) &= -(-g_{-1}(Y, X)g_{-1}(X, Y) + g_{-1}(X, X)g_{-1}(Y, Y)) = \\ &= -g_{-1}(X \wedge Y, X \wedge Y), \quad \forall p \in \mathbb{H}^3(-1), \quad \forall X, Y \in T_p\mathbb{H}^3(-1). \end{aligned}$$

Logo, a curvatura seccional do plano gerado pelos vetores X, Y , tangentes a $\mathbb{H}^3(-1)$ em p é -1 . Ou seja, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3(-1)$ tem curvatura seccional constante igual a -1 .

1.7 Isometrias de $\mathbb{H}^3(-1)$

Para descrever as isometrias do espaço hiperbólico usaremos a seguinte

Proposição 1.1. *Sejam $f, g : M \rightarrow N$ isometrias da variedade Riemanniana conexa M na variedade Riemanniana N . Se existe um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$, então $f = g$.*

Demonstração. Ver [SU].

□

Proposição 1.2. *As isometrias de $\mathbb{H}^3(-1)$ são as aplicações $O \in O_1(4)$ que deixam invariante o conjunto $\mathbb{H}^3(-1) = \{p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{L}^4 / p_0 > 0, g_{-1}(p, p) = -1\}$.*

Demonstração. Ver [SU].

□

Indicaremos por $O_1^+(4)$ o conjunto das isometrias de $\mathbb{H}^3(-1)$.

1.8 Outros Modelos da Geometria Hiperbólica

1. A bola unitária de Klein é dada pelo conjunto

$$\mathbb{D}^3(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

munido da métrica

$$d\sigma^2 = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

2. O modelo de Poincaré é dado pelo conjunto

$$\mathbb{B}^3(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 4\},$$

munido da métrica

$$d\sigma^2 = \frac{16}{(4 - x^2 - y^2 - z^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

3. O semi-espço superior é dado pelo conjunto

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\},$$

munido da métrica

$$d\sigma^2 = \frac{1}{z^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Observamos que o modelo do hiperbolóide é muito utilizado para efetuar cálculos, que muitas vezes são mais simples, pois a conexão de $\mathbb{L}^4$, na métrica considerada, é a derivação usual. Já o outro modelo $\mathbb{R}_+^3$ permite uma melhor visualização dos objetos geométricos nele contido. Por esta razão e pelo fato de que os modelos são isométricos entre si,

optamos por trabalhar com o modelo $\mathbb{R}_+^3$. Vamos, a seguir, enfatizar apenas a isometria que escolhemos para utilizar neste trabalho, sendo que as demais estão bem detalhadas em [SU].

1.8.1 Isometria entre $\mathbb{R}_+^3$ e $\mathbb{H}^3(-1)$

Para construirmos um difeomorfismo ϕ_+ entre $\mathbb{H}^3(-1)$ e $\mathbb{R}_+^3$ e a métrica induzida de $\mathbb{R}_+^3$ daremos os seguintes passos: primeiramente levaremos $(\mathbb{H}^3(-1), g_{-1})$ isometricamente sobre $\mathbb{D}^3(1)$ munido da sua respectiva métrica; em seguida, passaremos para o conjunto $S(U_0, 1)_- = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S(U_0, 1) / 0 \leq x < 1\}$, onde $S(U_0, 1) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 / x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, fazendo a seguir uma rotação deste conjunto para, finalmente, através da projeção estereográfica pelo polo norte atingirmos $\mathbb{R}_+^3$. Seja $\phi_+ : \mathbb{H}^3(-1) \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ definida por

$$\phi_+(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_0 - x_1}(x_2, x_3, 1)$$

Temos que ϕ_+ é inversível e sua inversa $\phi_+^{-1} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ é dada por

$$\phi_+^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1}{2}, x_1, x_2 \right).$$

Derivando, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_+^{-1}}{\partial x_1} = \frac{1}{x_3} (x_1, x_1, 1, 0), \\ \frac{\partial \phi_+^{-1}}{\partial x_2} = \frac{1}{x_3} (x_2, x_2, 0, 1), \\ \frac{\partial \phi_+^{-1}}{\partial x_3} = \frac{1}{x_3^2} \left(\frac{-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1}{2}, \frac{-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 1}{2}, -x_1, -x_2 \right). \end{cases}$$

Logo,

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \phi_+^{-1}}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_+^{-1}}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\delta_{ij}}{x_3^2},$$

que são os coeficientes da métrica de $\mathbb{R}_+^3$. Denotando $x = x_1$, $y = x_2$ e $z = x_3$, temos:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

1.9 A Geometria do Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

1. Geodésicas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco em $\mathbb{H}^3(-1)$, conforme a definição 1.5. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^4$ e de $\mathbb{H}^3(-1)$, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t) = 0, \forall t \in I &\Leftrightarrow (\nabla_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t))^T = 0, \forall t \in I \Leftrightarrow (\ddot{\alpha}(t))^T = 0, \text{ com } \ddot{\alpha}(t) \in \\ \mathbb{L}^4, \forall t \in I &\Leftrightarrow \ddot{\alpha}(t) \in \mathbb{L}^4 \text{ é normal a } T_{\alpha(t)}\mathbb{H}^3(-1), \forall t \in I \Leftrightarrow \exists \lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \ddot{\alpha}(t) &= \lambda(t)\alpha(t). \end{aligned}$$

Então

$$g_{-1}(\alpha(t), \alpha(t)) = -1 \Rightarrow g_{-1}(\dot{\alpha}(t), \alpha(t)) = 0.$$

Logo,

$$g_{-1}(\ddot{\alpha}(t), \alpha(t)) = -g_{-1}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = -1,$$

ou seja,

$$g_{-1}(\lambda(t)\alpha(t), \alpha(t)) = \lambda(t)g_{-1}(\alpha(t), \alpha(t)) = -\lambda(t) = -1.$$

Consequentemente, $\lambda(t) = 1$ e, portanto, $\ddot{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$.

Assim, uma curva α parametrizada por comprimento de arco é geodésica em $\mathbb{H}^3(-1)$ se, e somente se, $\ddot{\alpha}(t) - \alpha(t) = 0$, $\forall t \in I$. Ou seja,

$$\alpha(t) = (\cosh t)C_1 + (\sinh t)C_2,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{L}^4$, $t \in \mathbb{R}$. Impondo condições iniciais $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = v$, com $v \in T_p\mathbb{H}^3(-1)$ e $|v| = 1$, a geodésica de $\mathbb{H}^3(-1)$ que passa por p com velocidade v é:

$$\alpha(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v, t \in \mathbb{R},$$

de onde concluímos que α está inteiramente contida no plano que passa pela origem e é gerado por p e v . Deste modo, as geodésicas $\alpha : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ são as intersecções $\mathbb{H}^3(-1) \cap \pi$, onde π é o plano de $\mathbb{L}^4$ gerado por $\alpha(0)$ e $\dot{\alpha}(0)$ e que passa pela origem. Dai concluímos que as k -subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}^3(-1)$ são as intersecções $\mathbb{H}^3(-1) \cap V^{k+1}$, onde V^{k+1} , $k = 1, 2, 3$ é um subespaço de $\mathbb{L}^4$.

2. Esferas Geodésicas

Definição 1.7. Dados um ponto $p \in \mathbb{H}^3(-1)$, um número real $r > 0$ e um conjunto $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$, $k = 1, 2$, de vetores ortonormais em $T_p\mathbb{H}^3(-1)$, o conjunto

$$S_p^k(r, V) = \{x(t) = (\cosh r)p + \sum_{i=1}^{k+1} (\sinh r) \frac{t_i}{|t|} v_i / t = (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\},$$

onde $V = [v_1, \dots, v_{k+1}]$ e $|t| = (\sum_{i=1}^{k+1} t_i^2)^{\frac{1}{2}}$, é uma subvariedade de $\mathbb{H}^3(-1)$, de dimensão k , chamada k -esfera geodésica de raio r e centro p .

Observe que para cada vetor unitário $v = v(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t_i}{|t|} v_i$ em $T_p \mathbb{H}^3(-1)$, o ponto $x(t)$ correspondente está na geodésica parametrizada por comprimento de arco $\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$, onde $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x(t)$, isto é, $x(t) = \exp_p(r, v)$. Logo,

$$S_p^k(r, V) \subset [p, v_1, \dots, v_{k+1}] \cap \mathbb{H}^3(-1).$$

Ou seja, $S_p^k(r, V)$ está contida na $(k+1)$ -subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3(-1)$ dada por $\mathbb{H}^3(-1) \cap [p, v_1, \dots, v_{k+1}]$.

Além disto, para cada $t = (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ podemos escrever:

$$x(t) = (\cosh r)p + (\sinh r)v_1 + \sinh r \left(\left(\frac{t_1}{|t|} - 1 \right) v_1 + \sum_{i=2}^{k+1} \frac{t_i}{|t|} v_i \right).$$

Considerando o $(k+1)$ -hiperplano afim de $\mathbb{L}^4$ dado por

$$\overline{P}^{k+1} = (\cosh r)p + (\sinh r)v_1 + [v_1, \dots, v_{k+1}]$$

vemos que $x(t) \in \overline{P}^{k+1}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$. Então $S_p^k(r, V) \subset \overline{P}^{k+1} \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Mas, como $S_p^k(r, V)$ e $\overline{P}^{k+1} \cap \mathbb{H}^3(-1)$ são k -subvariedades de $\mathbb{H}^3(-1)$ e $S_p^k(r, V)$ é completa, obtemos

$$S_p^k(r, V) = \overline{P}^{k+1} \cap \mathbb{H}^3(-1),$$

ou seja, $S_p^k(r, V)$ é a intersecção de $\mathbb{H}^3(-1)$ com o $(k+1)$ -hiperplano afim $\overline{P}^{k+1}$ dado acima.

Observamos que $\overline{P}^{k+1}$ é ortogonal a p . Logo, só intercepta uma componente conexa do hiperbolóide, que é a componente $\{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 / g_{-1}(x, x) = -1, x_0 > 0\}$.

Em particular, se $k = 1$, temos os círculos e se $k = 2$, temos as esferas do espaço hiperbólico. Aqui, os círculos e as esferas estão totalmente contidos no espaço hiperbólico, pois verifica-se que todo ponto de ambos equidista, na métrica hiperbólica, de um ponto fixado, que é o centro delas. Em geral, este centro não coincide com o centro euclidiano.

3. Horoesferas

Definição 1.8. *Seja N^{k+1} uma $(k+1)$ -subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3(-1)$, $k = 1, 2$. Tomemos uma geodésica de N^{k+1} com ponto inicial $q \in N^{k+1}$ e, para cada ponto p desta geodésica, tomemos também a k -esfera geodésica com centro p que passa por q . Fazendo p tender a infinito, o conjunto limite será denominado k -horoesfera de $\mathbb{H}^3(-1)$, $k = 1, 2$.*

Seja $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{H}^3(-1)$ a geodésica parametrizada por comprimento de arco, com $\alpha(0) = q$, escolhida para fazer variar os centros das k -esferas geodésicas e consideremos campos ortonormais $v_1, \dots, v_{k+1}$ diferenciáveis ao longo de α , satisfazendo, para todo $t > 0$:

$$v_1(t) = \dot{\alpha}(t), g_{-1}(v_i, v_j) = \delta_{ij} \text{ e } g_{-1}(\alpha(t), v_i(t)) = 0, i, j = 1, \dots, k+1.$$

Para cada $t > 0$ tomemos o número real positivo $r(t)$ tal que $\exp_{\alpha(t)}(-r(t)v_1) = q$ e consideremos a k -esfera geodésica de centro $\alpha(t)$ e raio $r(t)$, dada por:

$$S_{\alpha(t)}^k(r(t), [v_1(t), \dots, v_{k+1}(t)]) = \overline{P}^{k+1}(\overline{p}, t) \cap \mathbb{H}^3(-1),$$

com $\bar{P}^{k+1}(\bar{p}, t) = \bar{p} + [v_1, \dots, v_{k+1}]$ e $\bar{p} = (\cosh r(t))\alpha(t) + (\sinh r(t))v_1(t)$.

Assim, fazendo $t \rightarrow +\infty$, temos que $\dot{\alpha}(t)$ tende a uma direção paralela a uma geratriz do cone $x_0^2 = \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2$ e, portanto, $\bar{P}^{k+1}(\bar{p}, t)$ tende a um $(k+1)$ -hiperplano afim $\bar{\pi}^{k+1}$ paralelo a um $(k+1)$ -hiperplano tangente ao cone. Concluimos, então, que as horoesferas de $\mathbb{H}^3(-1)$ são da forma $\bar{\pi}^{k+1} \cap \mathbb{H}^3(-1)$, onde $\bar{\pi}^{k+1}$ é um $(k+1)$ -hiperplano afim, paralelo ao cone $x_0^2 = \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2$ e, reciprocamente, todo conjunto deste tipo é uma horoesfera de $\mathbb{H}^3(-1)$.

Em particular, se $k = 1$, chamamos a 1-horoesfera de horociclo. No modelo do semi-espço superior, temos que as horoesferas são as esferas ou círculos tangentes ao bordo do infinito e os planos paralelos ou retas paralelas ao mesmo.

4. Superfícies Equidistantes

Seja N^2 uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3(-1)$. Então podemos escrever $N^2 = V^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$, onde V^3 é um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^4$. Para cada $p \in N^2$, tomemos $\eta(p) \in T_p \mathbb{H}^3(-1)$ tal que

$$g_{-1}(\eta(p), v) = 0, \quad \forall v \in T_p N^2.$$

Observemos que como N é uma subvariedade de codimensão 1, então existe uma única direção normal η para todo $p \in N$. Para cada real $d > 0$, consideremos o conjunto

$$HE(N, d) = \{\beta_p(d)/p \in N\},$$

com $\beta_p(s) = (\cosh s)p + (\sinh s)\eta$, $s \in \mathbb{R}$, é a geodésica em $\mathbb{H}^3(-1)$ parametrizada por comprimento de arco que passa por p com velocidade η . É claro que esta

geodésica é ortogonal a N . Então $\beta_p(\mathbb{R}) = [p, \eta] \cap \mathbb{H}^3(-1)$ e $HE(N, d)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{H}^3(-1)$ que estão a uma distância intrínseca fixa d de N . Seja $\bar{V}^3 = (\sinh d)\eta + V^3$.

Vamos mostrar, agora, que $HE(N, d) = \bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Seja $\beta_p(d) \in HE(N, d)$. Então $\beta_p(d) = (\cosh d)p + (\sinh d)\eta$, onde $p \in N = V^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Logo, $p \in V^3$ e, então, $(\cosh d)p \in V^3$, pois V^3 é um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^4$. Conclui-se que $\beta_p(d) \in (\sinh d)\eta + V^3 = \bar{V}^3$ e, como $\beta_p(d) \in \mathbb{H}^3(-1)$, obtemos $\beta_p(d) \in \bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Portanto, $HE(N, d) \subset \bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Reciprocamente, seja $q \in \bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$. Então $q \in \bar{V}^3$. Ou seja, $q = (\sinh d)\eta + v$, onde $v \in V^3$. Mas $q \in \mathbb{H}^3(-1)$. Então $g_{-1}(q, q) = -1$. Logo, $g_{-1}(v, v) = -\cosh^2 d$. Neste caso, temos $g_{-1}(\frac{v}{\cosh d}, \frac{v}{\cosh d}) = \frac{1}{\cosh^2 d} g_{-1}(v, v) = -1$. Ou seja, $\frac{v}{\cosh d} \in \mathbb{H}^3(-1)$. Como podemos escrever $q = (\sinh d)\eta + (\cosh d)\frac{v}{\cosh d}$, onde $\frac{v}{\cosh d} \in V^3 \cap \mathbb{H}^3(-1) = N$, obtemos $q \in HE(N, d)$ e $\bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1) \subset HE(N, d)$. Isto prova o resultado.

Concluimos, então, que $HE(N, d)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de $\mathbb{H}^3(-1)$.

Definição 1.9. $HE(N, d)$ definida acima é chamada **superfície equidistante** ou **hiperesfera**.

Observação 1.1. Temos que $\bar{V}^3$ sempre intercepta as duas componentes conexas de $\mathbb{H}^3(-1)$. Reciprocamente, uma subvariedade do tipo $\bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$, onde $\bar{V}^3$ é um hiperplano afim de $\mathbb{L}^4$ que intercepta as duas componentes conexas de $\mathbb{H}^3(-1)$ é uma superfície equidistante, pois existe $V^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$ superfície totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3(-1)$ da qual os pontos de $\bar{V}^3 \cap \mathbb{H}^3(-1)$ distam um mesmo valor fixo $d > 0$.

No modelo do semi-espaco superior, temos que as hiperesferas s3o as esferas que n3o est3o totalmente contidas em $\mathbb{R}_+^3 \cup \partial_\infty \mathbb{R}_+^3$ ou os semi-planos com origem no plano do infinito. Se o 3ngulo que formam com o plano do infinito for reto, obteremos planos totalmente geod3sicos.

As esferas geod3sicas, as horoesferas, as superf3cies totalmente geod3sicas e as hiperesferas s3o as superf3cies totalmente umb3licas do espaco hiperb3lico.

1.10 Trigonometria Hiperb3lica

Como as rela33es trigonom3tricas obtidas nos tri3ngulos hiperb3licos dependem apenas das medidas de seus lados e dos 3ngulos entre eles, elas independem do modelo. Neste caso, escolhemos o modelo do semi-plano superior para desenvolver nossa teoria.

Defini33o 1.10. *Consideremos r uma reta hiperb3lica, s uma perpendicular a r e P o ponto de intersec333o entre r e s . Em s , de algum lado de r , marcamos o ponto Q a uma dist3ncia hiperb3lica d de P . A seguir, por Q tra3amos um eixo t paralelo ao eixo de refer3ncia r . A fun333o de Lobatchewsky $\Pi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 3 dada por $\Pi(d) = \text{medida do 3ngulo entre } QP \text{ e } t$.*

Teorema 1.3. *Seja d como na defini333o anterior. Ent3o:*

$$1. \tan\left(\frac{\Pi(d)}{2}\right) = e^{-d};$$

$$2. \sin(\Pi(d)) = \frac{1}{\cosh d};$$

$$3. \cos(\Pi(d)) = \tanh d;$$

$$4. \tan(\Pi(d)) = \frac{1}{\sinh d}.$$

Demonstração. Usando a definição de Π , suponhamos que r é um semi-círculo euclidiano de centro O e raio 1 e s é o semi-eixo y_+ . Sejam x a altura do ponto Q , $d = d(P, Q)$, a distância hiperbólica e P é a intersecção de r e s .

Como o ponto P tem, é claro, altura 1, então $d(P, Q) = d = \ln x$, ou seja, $x = e^d$.

Seja R o centro da circunferência euclidiana t . Logo, $RQ = y + 1$, onde $RO = y$, e o ângulo entre RQ e s é $\frac{\pi}{2} - \theta$, onde $\theta = \Pi(d)$. Assim,

$$x^2 + y^2 = (y + 1)^2$$

e

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Do $\triangle QOR$ obtemos:

$$1. \tan \theta = \frac{x}{y} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$\text{Como } \tan \theta = \frac{2 \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}, \text{ segue que:}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{x} = e^{-d}.$$

$$2. \sin \theta = \sin(\Pi(d)) = \frac{x}{y + 1} = \frac{1}{\cosh d}.$$

$$3. \cos \theta = \cos(\Pi(d)) = \frac{y}{y + 1} = \tanh d.$$

$$4. \tan \theta = \tan(\Pi(d)) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{\sinh d}.$$

□

1.10.1 Triângulos Hiperbólicos

Conforme [R], seja s a semi-circunferência euclidiana de centro O e raio 1 e seja r o semi-eixo y_+ . Sejam A , B e C pontos de $\mathbb{H}^2$ como na figura, determinando um triângulo hiperbólico, tal que $d(A, B) = c$, $d(B, C) = a$ e $d(C, A) = b$, onde d é a distância hiperbólica. Sejam α , β e $\frac{\pi}{2}$ os ângulos entre AB e AC , BA e BC e CA e CB , respectivamente. Sejam $\bar{s}$ a semi-circunferência euclidiana de centro $\bar{O}$, passando por A , e $\bar{r}$ a semi-reta euclidiana com origem em $\bar{O}$ e ortogonal ao eixo x . Seja $D = \bar{r} \cap \bar{s}$.

Sejam $\delta = \Pi(b)$ e $\gamma = \Pi(c + d)$, onde $d = d(B, D)$. Então δ e γ são como na figura. Observemos que $\beta = \Pi(d)$. Como δ é externo ao $\triangle O A \bar{O}$, temos que $\delta = \varphi + \gamma$, onde φ é como na figura. Por outro lado, $\delta = \gamma + \alpha$. Daí, $\alpha = \varphi$ e $\delta = \alpha + \gamma$, ou seja

$$\alpha + \Pi(c + d) = \Pi(b). \quad (1.1)$$

Invertendo agora o $\triangle ABC$ na semi-circunferência euclidiana s , temos um triângulo congruente aquele, também denotado $\triangle ABC$, onde agora a hipotenusa está num semi-círculo euclidiano de centro $\tilde{O}$ e raio R , como na figura.

Sejam $\xi = \Pi(b)$, $\epsilon = \Pi(d - c)$, onde $d = D(E, B)$ e $\beta = \Pi(d)$. Do $\triangle O A \tilde{O}$, obtemos

$\epsilon + \xi + \alpha = \pi$. Logo,

$$\alpha + \Pi(d - c) + \Pi(b) = \pi. \quad (1.2)$$

Observando que $\pi - \Pi(d - c) = \Pi(c - d)$ e subtraindo (1.2) de (1.1), obtemos:

$$\alpha = \frac{\Pi(c - d)}{2} - \frac{\Pi(c + d)}{2}.$$

Daí,

$$\tan \alpha = \frac{\tan \left(\frac{\Pi(c-d)}{2} \right) - \tan \left(\frac{\Pi(c+d)}{2} \right)}{1 + \tan \left(\frac{\Pi(c-d)}{2} \right) \tan \left(\frac{\Pi(c+d)}{2} \right)},$$

e concluimos

$$\tan \alpha = \frac{e^d - e^{-d}}{e^c + e^{-c}}.$$

Lembrando que $\tan \left(\frac{\beta}{2} \right) = e^{-d}$, temos:

$$\tan \alpha = \frac{\cot \left(\frac{\beta}{2} \right) - \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)}{2 \cosh c}.$$

Assim,

$$\cosh c = \cot \beta \cot \alpha. \quad (1.3)$$

Eliminando, agora, α de (1.1) e de (1.2), obtemos

$$\Pi(b) = \frac{\Pi(c-d)}{2} + \frac{\Pi(c+d)}{2}$$

e

$$\tan(\Pi(b)) = \frac{\tan\left(\frac{\Pi(c-d)}{2}\right) + \tan\left(\frac{\Pi(c+d)}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\Pi(c-d)}{2}\right) \tan\left(\frac{\Pi(c+d)}{2}\right)} = \frac{1}{\sin \beta \sinh c}.$$

Assim,

$$\sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c} \quad (1.4)$$

E, pela lei dos senos euclidiana aplicada ao $\triangle O A \overline{O}$ inscrito na semi-circunferência euclidiana, temos

$$\frac{O\overline{O}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{R}}{\sin \delta}$$

e

$$\overline{R} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha}.$$

Por outro lado,

$$\cos \beta = \frac{1}{\overline{R}}.$$

Como $\delta = \Pi(b)$, obtemos

$$\cos \beta = \sin \alpha \cosh b. \quad (1.5)$$

Combinando (1.4) e (1.5), vemos que

$$1 = \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 c} + \sin^2 \alpha \cosh^2 b$$

e, portanto,

$$1 - \cosh^2 b = \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 c} - \cos^2 \alpha \cosh^2 b.$$

Logo,

$$\cos \alpha = \tanh b \coth c. \quad (1.6)$$

Usando (1.5) duas vezes em (1.3), obtemos

$$\cosh c = \frac{\frac{\cos \beta}{\sin \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \cosh a \cosh b.$$

Resumindo:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b, \quad (1.7)$$

que é o teorema de Pitágoras hiperbólico.

Como no vértice A a expressão (1.4) se resume a

$$\sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c},$$

obtemos

$$\tan \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c \tanh b \coth c} = \frac{\tanh a}{\sinh b},$$

ou seja,

$$\tan \alpha = \frac{\tanh a}{\sinh b}. \quad (1.8)$$

Resumindo, temos a seguinte

Proposição 1.3. *No triângulo retângulo em C abaixo são válidas as seguintes relações trigonométricas:*

$$1. \cosh c = \coth \alpha \coth \beta;$$

$$2. \sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c};$$

$$3. \cos \alpha = \sin \beta \cosh a;$$

$$4. \cos \alpha = \tanh \beta \coth c;$$

$$5. \text{ Teorema de Pitágoras Hiperbólico: } \cosh c = \cosh a \cosh b;$$

$$6. \tan \alpha = \frac{\tanh a}{\sinh b}.$$

Para deduzirmos as fórmulas que nos permitem resolver triângulos quaisquer, procedemos como na Geometria Euclidiana: dividimos o $\triangle ABC$ em dois triângulos retângulos, pela altura relativa ao lado BC , por exemplo. Seja D a intersecção desta altura com o lado BC . Temos dois casos a considerar: se D é interior ao segmento BC ou se D é exterior. Consideraremos apenas o primeiro caso, pois o segundo é análogo, bastando substituir somas por diferenças nos lugares convenientes.

Aplicando (1.4) nos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$, obtemos:

$$\sin \gamma \sinh b = \sinh AD = \sin \beta \sinh c$$

ou seja,

$$\frac{\sin \gamma}{\sinh c} = \frac{\sin \beta}{\sinh b}.$$

Fazendo o mesmo raciocínio para a altura relativa ao lado AC chegamos à **lei dos senos hiperbólica**:

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

Como $\cos \alpha = \cos(\delta + \epsilon)$ e

$$\begin{cases} \sin \delta = \frac{\sinh BD}{\sinh c} \\ \sin \epsilon = \frac{\sinh CD}{\sinh b} \\ \cos \delta = \tanh AD \coth c \\ \cos \epsilon = \tanh AD \coth b \end{cases}$$

temos:

$$\cos \alpha = \frac{\tanh^2 AD \cosh c \cosh b - \sinh BD \sinh CD}{\sinh b \sinh c}, \quad (1.9)$$

ou seja,

$$\sinh b \sinh c \cos \alpha = \tanh^2 AD \cosh c \cosh b - \sinh BD \sinh CD. \quad (1.10)$$

Como

$$\cosh a = \cosh(BD + CD) = \cosh BD \cosh CD + \sinh BD \sinh CD,$$

obtemos:

$$\sinh b \sinh c \cos \alpha + \cosh a = \tanh^2 AD \cosh c \cosh b + \cosh BD \cosh CD.$$

Por (1.7),

$$\cosh b = \cosh AD \cosh CD \quad e \quad \cosh c = \cosh AD \cosh BD,$$

e, então:

$$\cosh BD \cosh CD = \frac{\cosh b \cosh c}{\cosh^2 AD},$$

que substituído em (1.10), nos dá:

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha, \quad (1.11)$$

que é a **primeira lei dos cossenos hiperbólica**.

Por (1.6), temos:

$$\cos \beta = \frac{\tanh BD}{\tanh c} \quad e \quad \cos \gamma = \frac{\tanh CD}{\tanh b},$$

ou seja,

$$\cos \beta \cos \gamma = \frac{\tanh BD \tanh CD}{\tanh b \tanh c} = \frac{\sinh BD \sinh CD \cosh b \cosh c}{\cosh BD \cosh CD \sinh b \sinh c}.$$

Como

$$\cosh b = \cosh AD \cosh CD \quad e \quad \cosh c = \cosh AD \cosh BD,$$

obtemos:

$$\cos \beta \cos \gamma = \frac{\sinh BD \sinh CD \cosh^2 AD}{\sinh b \sinh c}.$$

Somando esta expressão com (1.10), verificamos que

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \frac{\tanh^2 AD \cosh b \cosh c + \sinh BD \sinh CD \sinh^2 AD}{\sinh b \sinh c},$$

isto é,

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \sin \beta \sin \gamma (\sinh BD \sinh CD + \cosh CD \cosh BD),$$

pois

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{\sinh AD}{\sinh c} \\ \sin \gamma = \frac{\sinh AD}{\sinh c} \end{cases}$$

Portanto obtemos

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh a,$$

que é a segunda lei dos cossenos hiperbólica.

1.10.2 Triângulos Assintóticos

Triângulos simplesmente assintóticos são aqueles que têm um vértice no bordo do infinito. Deduziremos as relações destes triângulos a partir daquelas já obtidas para triângulos hiperbólicos.

Seja o $\triangle ABC$ como na figura.

Seja $z(t)$ a geodésica que une A a θ tal que $b_\theta(z(0)) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = \theta$. Sejam $d(B, z(t)) = a(t)$ e $\beta(t) = \text{ângulo entre } AB \text{ e } Bz(t)$. Sejam $d(A, z(t)) = b + t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (a(t) - t) = a$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \beta$. Da primeira lei dos cossenos hiperbólica, temos:

$$\cosh a(t) = \cosh(b + t) \cosh c - \sinh(b + t) \sinh c \cos \alpha.$$

Multiplicando ambos os membros por e^{-t} e passando o limite $t \rightarrow +\infty$, obtemos:

$$e^a = e^b \cosh c - e^b \sinh c \cos \alpha. \quad (1.12)$$

Pela lei dos senos hiperbólica, temos

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a(t)} = \frac{\sin \beta(t)}{\sinh(b+t)}.$$

Multiplicando novamente ambos os membros por e^t e calculando o limite da expressão acima quando $t \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\frac{\sin \alpha}{e^a} = \frac{\sin \beta}{e^b}. \quad (1.13)$$

1.10.3 Quadriláteros Hiperbólicos

Seja g uma geodésica orientada pelo vetor η em $\mathbb{H}^2$. Definimos:

Definição 1.11. Dizemos que um quadrilátero é tri-retângulo quando ele tem três ângulos retos.

Lema 1.1. No quadrilátero tri-retângulo abaixo, a , b , c e d representam os comprimentos

hiperbólicos de seus lados.

Então:

$$1. \sinh c = \cosh d \sinh a;$$

$$2. \cosh a = \tanh d \coth b.$$

Demonstração. Sejam x , θ , β e φ como na figura abaixo.

Pelas propriedades da trigonometria hiperbólica, temos:

$$\cosh b \cosh c = \cosh x = \cosh a \cosh d,$$

ou seja,

$$\cosh d = \frac{\cosh b \cosh c}{\cosh a}.$$

Desde que

$$\cos \theta = \tanh b \coth x \quad e \quad \sin \theta = \tanh a \coth x,$$

obtemos:

$$\tan \theta = \frac{\tanh a}{\tanh b}.$$

Por outro lado,

$$\tan \theta = \frac{\tanh c}{\sinh b}.$$

Daí,

$$\frac{\sinh a \cosh b}{\cosh a \sinh b} = \frac{\sinh c}{\sinh b \cosh c}$$

e consequentemente mostramos a validade da primeira relação

$$\sinh c = \cosh d \sinh a.$$

Para mostrarmos a segunda, utilizamos a lei dos senos hiperbólica

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\sinh d} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\sinh c},$$

logo,

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \beta} = \frac{\sinh d}{\sinh c}.$$

Por outro lado, como

$$\cos \varphi = \tanh b \coth x \quad e \quad \cos \beta = \tanh a \coth x,$$

concluimos, utilizando a primeira relação, que

$$\cosh a = \tanh d \coth b.$$

□

Seja g uma geodésica orientada pelo vetor η em $\mathbb{H}^2$. Definimos:

$$d_g(x) = \begin{cases} d_g(g(u), x), & \text{se } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \quad r \geq 0 \\ -d_g(g(u), x), & \text{se } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \quad r < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Lema 1.2. *Sejam $A, B \in \mathbb{H}^2$ e g uma geodésica orientada. Sejam $a = d(A, B)$, $b = d_g(A)$, $b \neq 0$, e $c = d_g(B)$. Sejam p_A e p_B as projeções de A e B , respectivamente, sobre g e seja $d = d(p_A, p_B)$. Então*

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \cosh d - \sinh b \sinh c.$$

Demonstração. Suponhamos $b > 0$ (se $b < 0$, a demonstração é análoga). Neste caso, temos a figura a seguir.

Seja D a projeção de A sobre a geodésica que une B a p_B e y a distância de D a p_B . Neste caso, obtemos um triângulo retângulo ABD e um quadrilátero tri-retângulo Ap_Ap_BD .

Pelo lema 1.1 aplicado ao quadrilátero acima, obtemos:

$$\begin{cases} \sinh b = \sinh y \cosh x \\ \sinh x = \sinh d \cosh b \\ \cosh y = \tanh x \coth d \end{cases}$$

Logo,

$$\cosh x \cosh y = \cosh x \frac{\sinh x \cosh d}{\cosh x \sinh d}.$$

Resumindo,

$$\cosh x \cosh y = \cosh b \cosh d.$$

Por outro lado, o teorema de Pitágoras hiperbólico aplicado ao $\triangle ABD$ nos dá:

$$\cosh a = \cosh x \cosh(c - y),$$

ou seja,

$$\cosh a = \cosh x (\cosh c \cosh y - \sinh c \sinh y).$$

Assim,

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \cosh d - \sinh b \sinh c.$$

□

Proposição 1.4. *Sejam $A, B \in \mathbb{H}^2$ e seja g uma geodésica orientada. Sejam $a = d(A, B)$, $b = d_g(A)$ e $c = d_g(B)$. Temos:*

$$\sinh c = \cosh a \sinh b - \sinh a \cosh b \cos \alpha,$$

onde $\alpha = \text{ângulo entre } AB \text{ e } p_A$.

Demonstração. Sejam p_A e p_B as projeções de A e B , respectivamente, sobre g . Se $b = 0$ o resultado segue das relações trigonométricas de um triângulo retângulo. Suponhamos, então, $b \neq 0$. Temos as figuras que se seguem.

No $\triangle Bp_Ap_B$:

$$\cosh x = \cosh c \cosh d.$$

No $\triangle ABp_A$, utilizando-se a primeira lei dos cossenos hiperbólica, obtemos

$$\cosh x = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \alpha.$$

Daí,

$$\cosh c \cosh d = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \alpha. \quad (1.15)$$

Pelo lema 1.2,

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \cosh d - \sinh b \sinh c. \quad (1.16)$$

Substituindo (1.15) em (1.16), obtemos:

$$\sinh b \sinh c = \cosh a \sinh^2 b - \sinh b \sinh a \cosh b \cos \alpha. \quad (1.17)$$

Desde que $\sinh b \neq 0$, pois $b \neq 0$, podemos dividir (1.17) por $\sinh b$. Neste caso, temos:

$$\sinh c = \cosh a \sinh b - \cosh b \sinh a \cos \alpha.$$

□

Capítulo 2

Superfícies Rotacionais com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

Este capítulo se baseia no artigo [B], que descreve as superfícies de rotação com curvatura média constante no espaço hiperbólico. Isto é feito através da descrição das curvas geratrizes destas superfícies. Observemos que estas superfícies são do tipo esférico. Para obtermos uma parametrização explícita destas superfícies e, portanto, das suas curvas geratrizes, convém fixarmos coordenadas cilíndricas no espaço hiperbólico.

2.1 Coordenadas Cilíndricas no Espaço Hiperbólico

Fixamos um ponto O sobre uma geodésica α , que será a origem do sistema de coordenadas, e um plano totalmente geodésico Π' , ortogonal a α e passando por O . Em Π' fixamos um raio geodésico α^+ que tem origem em O . Se $Q \in \Pi'$, definiremos as coordenadas polares (ρ, θ) de Q por: ρ representa a distância hiperbólica de Q a O e θ é o ângulo que forma o raio geodésico α^+ com OQ , medido no sentido anti-horário. Para um ponto $P \in \mathbb{H}^3$ qualquer, as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) de P são definidas por: a curva equidistante, γ , de α que passa por P , corta o plano Π' num ponto P' , de coordenadas polares (ρ, θ) . Para obter a terceira coordenada z , tomamos o plano totalmente geodésico Π que passa por P e corta ortogonalmente a geodésica α num ponto $\Pi \cap \alpha$. Chamamos a distância (hiperbólica) de $\Pi \cap \alpha$ à origem de z .

No modelo do semi-espço superior fixamos o eixo $\bar{z}$ como sendo a geodésica α . Como Π' deve ser ortogonal a α , então deve ser uma semi-esfera ortogonal ao bordo. Seja O o ponto $\Pi' \cap \alpha$. Em Π' fixamos um raio geodésico que é um raio da semi-esfera. Para termos as coordenadas cilíndricas de $P \in \mathbb{H}^3$, tomamos a curva γ equidistante de α (que é a reta que passa por P e pela origem de $\mathbb{R}_+^3$). Chamamos de P' a intersecção desta reta γ com o plano Π' . Temos que P' tem coordenadas polares (ρ, θ) . Para obtermos a terceira coordenada, tomamos um plano totalmente geodésico Π que passa por P e é ortogonal a α (então Π deve ser uma semi-esfera ortogonal ao bordo). A distância do ponto $\Pi \cap \alpha$ à origem O do sistema é a terceira coordenada z .

Figura 2.1: Coordenadas cilíndricas no semi-espço superior

2.2 A Família de Bour de uma Superfície de Rotação

A relação entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas no modelo do semi-espço superior é dada por

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = e^z (\tanh \rho \cos \theta, \tanh \rho \sin \theta, \operatorname{sech} \rho).$$

Daí obtemos que a métrica do espaço hiperbólico em coordenadas cilíndricas é:

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 + \cosh^2 \rho dz^2. \quad (2.1)$$

Em coordenadas cilíndricas, a órbita de um ponto P de coordenadas (ρ_0, θ_0, z_0) é obtida por

$$R_\varphi(p) = (\rho_0, \theta_0 + \varphi, z_0),$$

onde R_φ é a rotação de P de ângulo φ . Se S é uma superfície de rotação em torno do eixo $\bar{z}$ e $c(s)$ é sua curva geratriz, parametrizada por comprimento de arco, então $X(s, t) = R_t(c(s))$ é uma parametrização para S , que será chamada **parametrização natural**. Nesta parametrização a métrica de S será dada por:

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2 dt^2, \quad (2.2)$$

onde $U = U(s)$ é uma função positiva de s . Mostraremos, a seguir, que existe uma família de superfícies rotacionais isométricas, $\mathcal{F}$, parametrizadas por parâmetros naturais.

Suponhamos que a superfície rotacional S corte o plano $\theta = 0$ numa curva λ que, localmente, seja um gráfico $\lambda = \lambda(\rho)$ sobre o eixo ρ . Então, neste pedaço, a parametrização de S , em coordenadas cilíndricas, é dada por:

$$S : X(\rho, \varphi) = (\rho, \varphi, \lambda(\rho)).$$

A restrição da métrica de $\mathbb{H}^3$ a S dá a primeira forma fundamental de S . Como $X_\rho(\rho, \varphi) = (1, 0, \dot{\lambda}(\rho))$ e $X_\varphi(\rho, \varphi) = (0, 1, 0)$, escritos na base $\{d\rho, d\theta, dz\}$, então temos que os coeficientes da primeira forma fundamental de S são:

$$E = 1 + \dot{\lambda}^2(\rho) \cosh^2 \rho, \quad F = 0 \quad e \quad G = \sinh^2 \rho.$$

Logo, a métrica restrita à S é dada por

$$d\sigma^2 = (1 + \dot{\lambda}^2(\rho) \cosh^2 \rho) d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\varphi^2. \quad (2.3)$$

Então podemos definir os parâmetros s e t de forma que

$$ds = \sqrt{1 + \dot{\lambda}^2 \cosh^2 \rho} d\rho \quad e \quad dt = d\varphi.$$

Observemos que a reparametrização é possível, pois

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + \dot{\lambda}^2 \cosh^2 \rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + \dot{\lambda}^2 \cosh^2 \rho} \neq 0$$

Para verificar que (s, t) são de fato parâmetros naturais, é preciso verificar que ρ não depende de t , para que possamos escrever (2.3) na forma (2.2). Como $ds^2 = (1 + \dot{\lambda}^2 \cosh^2 \rho) d\rho$ e $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\rho}$, podemos escrever

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\lambda^2,$$

Finalmente, $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ implica em $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e, portanto, ρ não depende de t . Então temos $U^2(s) = \sinh^2 \rho(s)$ e, daí

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s) dt^2,$$

o que demonstra que (s, t) são parâmetros naturais de S .

Vamos mostrar, agora, que existe uma família $\mathcal{F}$ de superfícies rotacionais isométricas entre si, parametrizadas por parâmetros naturais.

Seja S uma superfície de rotação parametrizada por parâmetros naturais. Queremos determinar funções ρ , λ e φ , dependentes de s e t , que satisfazem às relações

$$\begin{cases} ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\lambda^2 \\ U dt = \pm \sinh \rho d\varphi \end{cases} \quad (2.4)$$

Este cálculo consiste na determinação da aplicação inversa da mudança de coordenadas $s = s(\rho, \varphi)$ e $t = t(\rho, \varphi)$, dadas por

$$ds = \sqrt{1 + \dot{\lambda}^2 \cosh^2 \rho} d\rho \quad e \quad dt = d\varphi. \quad (2.5)$$

Como vimos anteriormente, ρ não depende de t . Como $\lambda = \lambda(\rho)$, então λ também não depende de t . De (2.4), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm \left(\frac{U}{\sinh \rho} \right) \end{cases}$$

Daí, temos que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} = 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}$. Portanto, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ não depende de s . Então podemos escrever $\pm \left(\frac{U}{\sinh \rho} \right) = \frac{1}{m} \neq 0$, onde m é constante. Ou seja,

$$m^2 U^2 = \sinh^2 \rho \quad (2.6)$$

Observando que

$$\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho = 1$$

temos

$$\cosh^2 \rho = 1 + m^2 U^2.$$

De (2.6) temos

$$m^2 U \dot{U} = \sinh \rho \cosh \rho \dot{\rho}.$$

Daí,

$$(\dot{\rho})^2 = \frac{m^4 U^2 \dot{U}^2}{\sinh^2 \rho \cosh^2 \rho}.$$

Logo,

$$(\dot{\rho})^2 = \frac{m^2 \dot{U}^2}{1 + m^2 U^2}.$$

De (2.5) também obtemos

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho \, d\lambda^2,$$

ou seja,

$$1 = \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 + \cosh^2 \rho \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2.$$

Logo,

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}}{1 + m^2 U^2}.$$

Observando que λ só depende de s , temos

$$\lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}}{1 + m^2 U^2} dt$$

Segue, ainda, de (2.4) que $U dt = \pm \sinh \rho d\varphi$. Portanto, $U dt = m U d\varphi$ e observando que $\varphi_s = 0$, temos

$$\varphi(s, t) = \frac{1}{m} t.$$

Portanto, obtemos uma família de superfícies de rotação $\mathcal{F}$, no parâmetro m , todas com a primeira forma fundamental dada por $d\sigma^2 = ds^2 + U^2 dt^2$. Portanto, são isométricas entre si e isométricas à superfície S , que é obtida tomando-se $m = 1$.

Então a família de superfícies de rotação $\mathcal{F}$, em coordenadas cilíndricas, é dada pelas igualdades a seguir

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho &= m^2 U^2 \\ \lambda(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}}{1 + m^2 U^2} dt \\ \varphi(t) &= \frac{1}{m} t \end{cases} \quad (2.7)$$

A família dada acima é chamada **família de Bour** da superfície S .

- Observação 2.1.** 1. A suposição de $S \cap \{\text{plano } \theta = 0\}$ ser localmente um gráfico sobre o eixo ρ (gráfico de $\lambda = \lambda(\rho)$) pode ser feita para qualquer superfície de rotação, exceto o cilindro ou aquelas que se comportam localmente como um cilindro.
2. É imediato calcular a curvatura Gaussiana da família $\mathcal{F}$ nas coordenadas naturais, onde $d\sigma^2 = ds^2 + U^2 dt^2$. Como $E = 1$, $F = 0$ e $G = U^2$, obtemos então, que a expressão da curvatura Gaussiana é

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_s - (\Gamma_{11}^2)_t + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2,$$

onde:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\dot{U}}{U} \Rightarrow (\Gamma_{12}^2)_s = \frac{\ddot{U}U - \dot{U}^2}{U^2} \end{cases}$$

Logo,

$$-EK = -K = \frac{\ddot{U}U - \dot{U}^2}{U^2} + \left(\frac{\dot{U}}{U}\right)^2 = \frac{\ddot{U}}{U}.$$

Portanto,

$$K = -\frac{\ddot{U}}{U}.$$

3. As curvas $c(s)$ ortogonais às órbitas são geodésicas de S , pois lembrando que se S tem a parametrização natural, então S é dada por

$$S : X(s, t) = R_\varphi(c(s))$$

Então $c(s)$ é uma curva coordenada e seu campo tangente é dado por X_s . Os

símbolos de Christoffel de S , nesta métrica, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\dot{U}}{U} \\ \Gamma_{12}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = -U\dot{U} \\ \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Então o sistema de equações diferenciais das geodésicas, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} s'' + \Gamma_{11}^1(s'')^2 + 2\Gamma_{12}^1 s't' + \Gamma_{22}^1(t')^2 = 0 \\ t'' + \Gamma_{11}^2(s'')^2 + 2\Gamma_{12}^2 s't' + \Gamma_{22}^2(t')^2 = 0 \end{array} \right.$$

se simplifica para

$$\left\{ \begin{array}{l} s'' - U\dot{U}(t')^2 = 0 \\ t'' + 2\frac{\dot{U}}{U}s't' = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

onde s' e t' são as coordenadas do campo tangente escrito na base $\{X_s, X_t\}$. Então,

para o campo X_s , temos $s' = 1$ e $t' = 0$. Logo, o campo X_s satisfaz o sistema acima.

Portanto, $c(s)$ é uma geodésica de S .

2.3 Coeficientes da Segunda Forma Fundamental de uma Superfície de Rotação em $\mathbb{H}^3$

A parametrização das superfícies de rotação em coordenadas cilíndricas depende do modelo tomado no espaço hiperbólico. Por exemplo, no modelo do hiperbolóide, a parame-

trização natural para uma superfície da família $\mathcal{F}$ é dada por

$$X(s, t) = (\cosh \lambda \cosh \rho, \sinh \lambda \cosh \rho, \cos \varphi \sinh \rho, \sin \varphi \sinh \rho)$$

onde $\lambda = \lambda(s)$, $\varphi = \varphi(t)$ e $\rho = \rho(s)$ são dados por (2.7). Usando esta parametrização explícita, podemos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental de uma superfície de rotação da família $\mathcal{F}$. Por conveniência, em cada ponto da superfície, consideremos a seguinte base pseudo-ortonormal de $\mathbb{L}^4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = (\cosh \lambda, \sinh \lambda, 0, 0) \\ V_2 = (0, 0, \cos \varphi, \sin \varphi) \\ V_3 = (\sinh \lambda, \cosh \lambda, 0, 0) \\ V_4 = (0, 0, -\sin \varphi, \cos \varphi) \end{array} \right.$$

Claramente, $\langle V_1, V_1 \rangle = -1$ e $\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 2, 3, 4$, na métrica de Lorentz.

Então, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial V_1}{\partial s} = \dot{\lambda} V_3 & e \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial s} = \varphi_s V_4 = 0 & e \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = \varphi_t V_4 = \frac{1}{m} V_4 \\ \frac{\partial V_3}{\partial s} = \dot{\lambda} V_1 & e \quad \frac{\partial V_3}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V_4}{\partial s} = -\varphi_s V_2 = 0 & e \quad \frac{\partial V_4}{\partial t} = -\varphi_t V_2 = -\frac{1}{m} V_2 \end{array} \right.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{cases} V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 = V_4 \\ V_1 \wedge V_2 \wedge V_4 = -V_3 \\ V_1 \wedge V_3 \wedge V_4 = V_2 \\ V_2 \wedge V_3 \wedge V_4 = V_1 \end{cases}$$

Observemos que:

$$\begin{cases} X = \cosh \rho V_1 + \sinh \rho V_2 \\ X_s = \dot{\rho} \sinh \rho V_1 + \dot{\rho} \cosh \rho V_2 + \dot{\lambda} \cosh \rho V_3 \\ X_t = \varphi_t \sinh \rho V_4 \\ X_{st} = \varphi_t \dot{\rho} \cosh \rho V_4 \\ X_{tt} = -(\varphi_t)^2 \sinh \rho V_2 \end{cases}$$

Daí, obtemos:

$$\tilde{N} = X \wedge X_s \wedge X_t = \dot{\lambda} \varphi_t \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho V_1 + \dot{\lambda} \varphi_t \sinh \rho \cosh^2 \rho V_2 - \dot{\rho} \varphi_t \sinh \rho V_3$$

Então:

$$\tilde{g} = \langle X_{tt}, \tilde{N} \rangle = -\dot{\lambda} (\varphi_t)^3 \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho$$

e

$$\tilde{f} = \langle X_{st}, \tilde{N} \rangle = 0$$

Observemos, ainda, que em coordenadas naturais temos $E = 1$, $F = 0$ e $G = U^2$. Logo,

$$|\tilde{N}|^2 = EG - F^2 = U^2 \text{ e}$$

$$g = \frac{\tilde{g}}{|\tilde{N}|} = -\frac{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2} m^2 U^2 (1 + m^2 U^2)}{m U (1 + m^2 U^2)}.$$

Ou seja,

$$g = -\frac{U}{m}\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}$$

e

$$f = \frac{\tilde{f}}{|\tilde{N}|} = 0.$$

Para calcular e , usamos que $K = -\frac{\ddot{U}}{U}$ e $K = K_e - 1$, onde $K_e = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$. Então,

$$\left(-\frac{\ddot{U}}{U} + 1\right)U^2 = e\left(-\frac{U\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}}{m}\right),$$

o que implica em

$$e = \frac{m\ddot{U} - mU}{\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}}.$$

Resumindo, os coeficientes da segunda forma fundamental de um elemento da família $\mathcal{F}$ são:

$$\begin{cases} e = \frac{m\ddot{U} - mU}{\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}} \\ f = 0 \\ g = -\frac{U}{m}\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2} \end{cases}$$

Daí, podemos facilmente calcular a equação de curvatura média para um elemento da família $\mathcal{F}$:

$$H(s) = -\left(\frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}\right) = \frac{-1}{2mU} \left[\frac{-2m^2U^2 + m^2U\ddot{U} + m^2\dot{U}^2 - 1}{\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}} \right],$$

ou melhor

$$H(s) = -\left(\frac{-2m^2U^2 + m^2U\ddot{U} + m^2\dot{U}^2 - 1}{2mU\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2}}\right) \quad (2.9)$$

Proposição 2.1. *Uma superfície de rotação em $\mathbb{H}^3$ parametrizada por parâmetros naturais é totalmente umbílica se satisfaz a relação:*

$$1 + m^2 U \ddot{U} - m^2 \dot{U}^2 = 0$$

Demonstração. Seja S uma superfície de rotação em $\mathbb{H}^3(-1)$ totalmente umbílica. Então devemos ter $H^2(p) = K_e(p)$, $\forall p \in S$, ou seja: $H^2 - K_e = 0$, $\forall p \in S$. Como

$$H = - \left(\frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \right) = - \left(\frac{eU^2 + g}{2U^2} \right),$$

segue que

$$H^2 = \frac{1}{4U^4} (e^2 U^4 + 2egU^2 + g^2).$$

Como

$$K_e = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{U^2},$$

temos

$$H^2 - K_e = \frac{1}{4U^4} (e^2 U^4 + 2egU^2 + g^2 - 4egU^2) = \frac{1}{4U^4} (eU^2 - g)^2 = 0.$$

Assim, $eU^2 - g = 0$, ou seja,

$$\frac{mU^2(\ddot{U} - U)}{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}} + \frac{U}{m} \sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2} = 0.$$

Daí,

$$\frac{U}{m\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}} (m^2 U \ddot{U} - m^2 U^2 + 1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2) = 0.$$

Como U é uma função positiva, obtemos:

$$1 + m^2 U \ddot{U} - m^2 \dot{U}^2 = 0.$$

□

2.4 Superfícies de Rotação com H Constante

Observando que em superfícies existe uma única direção normal, a curvatura média H pode ser sempre tomada positiva, pois se ela for negativa, basta inverter a orientação e, então, ela fica positiva. Neste caso, fazemos uma divisão natural em $0 \leq H < 1$, $H = 1$ e $H > 1$.

2.4.1 $H > 1$

Integrando a equação diferencial (2.9) para H constante, com $H > 1$, e substituindo na expressão (2.7), obtemos uma parametrização explícita para todas as superfícies de rotação com curvatura média constante $H > 1$ do espaço hiperbólico.

Observemos, primeiramente, que:

$$H = \frac{1}{2m^2U\dot{U}} \left(mU\sqrt{1 + m^2U^2 - m^2\dot{U}^2} \right)'.$$

Sendo $x = mU$, obtemos $\dot{x} = m\dot{U}$. Portanto,

$$H = \frac{1}{2x\dot{x}} \left(x\sqrt{1 + x^2 - \dot{x}^2} \right)',$$

ou seja:

$$2x\dot{x}H = \left(x\sqrt{1 + x^2 - \dot{x}^2} \right)'.$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$\int 2x\dot{x}H dx = \int \left(x\sqrt{1 + x^2 - \dot{x}^2} \right)' dx.$$

Daí,

$$x^2 H - \bar{a} = x \sqrt{1 + x^2 - \dot{x}^2}, \quad (2.10)$$

com $\bar{a} \in \mathbb{R}$ constante de integração. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2 \dot{x}^2 = x^4(1 - H^2) + x^2(1 + 2\bar{a}H) - \bar{a}^2.$$

Fazendo $z = x^2$, temos $\dot{z} = 2x\dot{x}$, e

$$\frac{\dot{z}^2}{4} = (1 - H^2)z^2 + (1 + 2\bar{a}H)z - \bar{a}^2. \quad (2.11)$$

Logo,

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 - H^2)z^2 + (1 + 2\bar{a}H)z - \bar{a}^2}} = 2ds. \quad (2.12)$$

Resolvamos, agora, a equação acima para $H > 1$. Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (1 - H^2)z^2 + (1 + 2\bar{a}H)z - \bar{a}^2 &= (H^2 - 1) \left[-z^2 + \frac{1 + 2\bar{a}H}{H^2 - 1}z - \frac{\bar{a}^2}{H^2 - 1} \right] = \\ &= (H^2 - 1) \left[- \left(z - \frac{1 + 2\bar{a}H}{2(H^2 - 1)} \right)^2 + \frac{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4(H^2 - 1)\bar{a}^2}{4(H^2 - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

A equação (2.12) fica:

$$\frac{dz}{\sqrt{- \left(z - \frac{1 + 2\bar{a}H}{2(H^2 - 1)} \right)^2 + \frac{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4(H^2 - 1)\bar{a}^2}{4(H^2 - 1)^2}}} = 2\sqrt{H^2 - 1}ds.$$

Integrando, obtemos:

$$\arcsin \left[\frac{z - \frac{1 + 2\bar{a}H}{2(H^2 - 1)}}{\frac{\sqrt{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4(H^2 - 1)\bar{a}^2}}{2(H^2 - 1)}} \right] = 2\sqrt{H^2 - 1}s.$$

Ou seja,

$$\sin(2\sqrt{H^2 - 1}s) \frac{\sqrt{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4\bar{a}^2(H^2 - 1)}}{2(H^2 - 1)} = z - \frac{1 + 2\bar{a}H}{2(H^2 - 1)}.$$

Daí,

$$z = x^2 = m^2 U^2 = \frac{1 + 2\bar{a}H + \sqrt{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4\bar{a}^2(H^2 - 1)} \sin(2\sqrt{H^2 - 1}s)}{2(H^2 - 1)},$$

ou seja,

$$m^2 U^2 = \frac{1 + 2\bar{a}H + \sqrt{(1 + 2\bar{a}H)^2 - 4\bar{a}^2(H^2 - 1)} \sin(2\sqrt{H^2 - 1}s)}{2(H^2 - 1)}.$$

Escrevendo $A = 1 + 2\bar{a}H$, $B = \sqrt{1 + 4\bar{a}H + 4\bar{a}^2}$ e $\alpha = \sqrt{H^2 - 1}$, ficamos com:

$$m^2 U^2 = \frac{A + B \sin(2\alpha s)}{2\alpha^2}.$$

Derivando, obtemos:

$$m^2 \dot{U}^2 = \frac{B^2 \cos^2(2\alpha s)}{2(A + B \sin(2\alpha s))}.$$

Ainda,

$$1 + m^2 U^2 = \frac{(H^2 - 1) + A + B \sin(2\alpha s)}{2\alpha^2}.$$

Portanto, a família de Bour das superfícies de rotação que têm curvatura média constante

$H > 1$ é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh^2 \rho(s) = \frac{A + B \sin(2\alpha s)}{2\alpha^2} \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2}\alpha(2\bar{a} + H(1 + B \sin(2\alpha t)))\sqrt{A + B \sin(2\alpha t)}}{(2\bar{a} + H(1 + B \sin(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \cos^2(2\alpha t)} dt \\ \varphi(t) = \frac{1}{m}t \end{array} \right. \quad (2.13)$$

As curvas geratrizes destas superfícies são dadas por $\Omega(s) = (\rho(s), \lambda(s))$, onde $\rho(s)$ e $\lambda(s)$

são dadas acima. A geometria destas curvas é esclarecida no próximo teorema.

Teorema 2.1. *Seja $\Omega(s)$ a curva geratriz de uma superfície de rotação com curvatura média constante $H > 1$ no espaço hiperbólico. Então Ω é uma curva periódica de período $\tilde{A} = \lambda \left(\frac{\pi}{\sqrt{H^2 - 1}} \right)$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que as funções $\rho(s)$ e $\lambda'(s)$ são periódicas de período $\frac{\pi}{\sqrt{H^2 - 1}}$. De fato,

$$\rho(s) = \operatorname{arcsinh} \left(\pm \frac{\sqrt{A + B \sin(2\alpha s)}}{\sqrt{2}\alpha} \right).$$

Logo, o período de $\rho(s)$ é determinado por $\sin(2\alpha s)$, que é $\frac{\pi}{\alpha}$. Ainda, como o período de $\cos(2\alpha s)$ também é $\frac{\pi}{\alpha}$ e como

$$\lambda'(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha(2\bar{a} + H(1 + B \sin(2\alpha s)))\sqrt{A + B \sin(2\alpha s)}}{(2\bar{a} + H(1 + B \sin(2\alpha s)))^2 + \alpha^2 B^2 \cos^2(2\alpha s)},$$

temos que o período de $\lambda'(s)$ é $\frac{\pi}{\alpha}$. Então, para todo $s \in \mathbb{R}$, se tomarmos $\bar{s} = s + \frac{\pi}{\alpha}$, temos

$\rho(\bar{s}) = \rho(s)$ e $\lambda'(\bar{s}) = \lambda'(s)$. Integrando esta última expressão, obtemos

$$\lambda'(\bar{s}) = \lambda'(s)$$

$$\lambda(\bar{s}) = \lambda(s) + m,$$

com $m \in \mathbb{R}$. Tomando $s = 0$, temos que $m = \lambda \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$. Assim,

$$\Omega(\bar{s}) = (\rho(\bar{s}), \lambda(\bar{s})) = \left(\rho(s), \lambda(s) + \lambda \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right),$$

ou seja,

$$\Omega(\bar{s}) = \Omega(s) + \left(0, \lambda \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right).$$

Observamos que $\Omega(\bar{s})$ é a translação de $\Omega(s)$, ao longo do eixo de rotação, cujo comprimento é $\tilde{A} = \lambda \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$. Logo, $\Omega(s)$ é uma curva periódica, com período $\tilde{A} = \lambda \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$. $\square$

Vamos estudar, agora, o comportamento destas superfícies através do estudo das suas curvas geratrizes, conforme varia a constante de integração $\bar{a}$. Observemos, inicialmente, que $\bar{a} \in \left[\frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}, +\infty \right]$. Neste caso, obtemos:

- ✓ 1. Se $\bar{a} = \frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}$, temos $1 + 4\bar{a}H + 4\bar{a}^2 = 0$. Logo, $B = 0$ e $\sinh^2 \rho(s) = \frac{A}{2\alpha^2}$.

Portanto, $\rho(s) = \rho = \text{constante}$, ou seja, a superfície gerada pela rotação da curva $\Omega(s) = (\rho, \lambda(s))$ é um cilindro.

2. Se $\frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2} < \bar{a} < 0$, a função $\lambda(s)$ é estritamente monótona, pois o sinal de $\lambda'(s)$ é determinado por $2\bar{a} + H + HB \sin(2\alpha s)$.

Como $2\bar{a} + H + HB \sin(2\alpha s) \leq 2\bar{a} + H + HB$, $\forall s \in \mathbb{R}$, e $2\bar{a} + H + HB < 0$, temos que $\lambda'(s) < 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Logo, λ é estritamente monótona. Neste caso, temos que as curvas geratrizes são os ondulóides.

3. Se $\bar{a} = 0$, temos que as curvas geratrizes $\Omega(s)$ são semi-circunferências tangentes entre si, gerando superfícies de rotação totalmente umbílicas.

4. Se $\bar{a} > 0$, temos que a equação $2\bar{a} + H + HB \sin(2\alpha s) = 0$ possui infinitas soluções $s_k = s_0 + k \frac{\pi}{2\alpha}$, com $k \in \mathbb{Z}$, onde $s_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin \left(\frac{-(2\bar{a} + H)}{HB} \right)$. Logo, existem infinitos pontos críticos da função $\lambda(s)$. Como o sinal de $\lambda''(s)$, nestes pontos, é dado por $\cos(2\alpha s_k)$, pois

$$\lambda''(s) = \frac{2\sqrt{2}\alpha^2 H \cos(2\alpha s_k) \sqrt{A + B \sin(2\alpha s_k)}}{(2\bar{a} + H(1 + B \sin(2\alpha s_k)))^2 + \alpha^2 B^2 \cos^2(2\alpha s_k)},$$

temos

$$\cos(2\alpha s_k) = \begin{cases} \cos(2\alpha s_0), & \text{se } k = 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ -\cos(2\alpha s_0), & \text{se } k = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo, pontos de máximo e de mínimo se alternam sucessivamente. Neste caso, as curvas geratrizes são os nodóides.

2.4.2 $H = 1$

Fazendo $H = 1$ em (2.11), obtemos

$$(1 + 2\bar{a})z - \bar{a}^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$1 + 4\bar{a} + 4\bar{a}^2 \geq 0.$$

Logo, devemos ter $\bar{a} \geq -\frac{1}{2}$.

Se em (2.12) considerarmos $H = 1$, temos:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 + 2\bar{a})z - \bar{a}^2}} = 2ds.$$

Após integração, ficamos com

$$\frac{2}{1 + 2\bar{a}} \sqrt{(1 + 2\bar{a})z - \bar{a}^2} = 2s.$$

Daí,

$$(1 + 2\bar{a})z - \bar{a}^2 = (1 + 2\bar{a})^2 s^2.$$

Logo,

$$z = x^2 = m^2 U^2 = \frac{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}{1 + 2\bar{a}}. \quad (2.14)$$

Com isto obtemos

$$\sinh^2 \rho = \frac{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}{1 + 2\bar{a}}.$$

Derivando a expressão (2.14), obtemos

$$2m^2 U \dot{U} = 2(1 + 2\bar{a})s,$$

ou seja

$$m^2 \dot{U}^2 = \frac{(1 + 2\bar{a})s^2}{m^2 U^2} = \frac{(1 + 2\bar{a})^3 s^2}{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}.$$

Obtemos ainda:

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{1 + m^2 U^2 - m^2 \dot{U}^2}}{1 + m^2 U^2} dt = \\ &= \int_0^s \frac{\sqrt{1 + 2\bar{a}}(-\bar{a}(1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 t^2) \sqrt{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 t^2}}{(-\bar{a}((1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 t^2)^2 + (1 + 2\bar{a})^4 t^2)} dt. \end{aligned}$$

Resumindo, a família de Bour das superfícies de rotação da família $\mathcal{F}$ que tem curvatura média constante $H = 1$ é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh^2 \rho = \frac{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}{1 + 2\bar{a}} \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + 2\bar{a}}(-\bar{a}(1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 t^2) \sqrt{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 t^2}}{(-\bar{a}(1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 t^2)^2 + (1 + 2\bar{a})^4 t^2} dt \\ \varphi(t) = \frac{1}{m} t \end{array} \right. \quad (2.15)$$

O teorema a seguir descreve a geometria das curvas geratrizes das superfícies de rotação,

$\Omega(s) = (\rho(s), \lambda(s))$, onde $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ são definidas por (2.15).

Teorema 2.2. *Seja Ω a curva geratriz de uma superfície de rotação com curvatura média constante $H = 1$. Então Ω é simétrica em relação ao raio geodésico.*

Demonstração. De

$$\sinh^2 \rho = \frac{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}{1 + 2\bar{a}},$$

obtemos:

$$\rho(s) = \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}{1 + 2\bar{a}}}.$$

Logo,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \rho(s) = \infty.$$

Então ρ é uma função ilimitada. Ainda, $\rho(-s) = \rho(s)$. Logo, ρ é uma função par.

Observamos ainda que ρ tem um único ponto de mínimo em $s = 0$, pois

$$\dot{\rho}(s) = \frac{(1 + 2\bar{a})s}{(\sinh \rho)(\cosh \rho)} = 0.$$

Daí, temos que $s = 0$. Como

$$\ddot{\rho}(0) = \frac{(1 + 2\bar{a})}{(\sinh \rho(0))(\cosh \rho(0))},$$

temos que o sinal de $\ddot{\rho}(0)$ é dado por $\sinh \rho(0)$, que é positivo. Logo, ρ é crescente quando $s > 0$. Observemos, agora, que $\lambda(s)$ é ímpar. Seja

$$f(s) = \frac{\sqrt{1 + 2\bar{a}}(-\bar{a}(1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 s^2) \sqrt{\bar{a}^2 + (1 + 2\bar{a})^2 s^2}}{(-\bar{a}(1 + \bar{a}) + (1 + 2\bar{a})^2 s^2)^2 + (1 + 2\bar{a})^4 s^2}.$$

Claramente f é uma função par. Então

$$\lambda(-s) = \int_0^{-s} f(t) dt = - \int_{-s}^0 f(t) dt = -(- \int_s^0 f(u) du) = - \int_0^s f(u) du = -\lambda(s),$$

onde fizemos a mudança de variável $u = -t$. Logo, a curva Ω é simétrica em relação ao raio geodésico ρ .

□

Observação 2.2. Nesta família de superfícies, devemos ter que $\bar{a} > -\frac{1}{2}$, para que tudo que foi feito acima possa ter sentido.

Vamos agora estudar o comportamento das curvas geratrizes destas superfícies em função do parâmetro $\bar{a}$.

1. Se $-\frac{1}{2} < \bar{a} < 0$, as curvas são todas mergulhadas, pois, neste caso, a função $\lambda(s)$ é estritamente monótona:

$$\lambda'(s) = \frac{\sqrt{1+2\bar{a}}(-\bar{a}(1+\bar{a}) + (1+2\bar{a})^2 s^2) \sqrt{\bar{a}^2 + (1+2\bar{a})^2 s^2}}{(-\bar{a}(1+\bar{a}) + (1+2\bar{a})^2 s^2)^2 + (1+2\bar{a})^4 s^2}.$$

Então o sinal de $\lambda'(s)$ é dado pela expressão $(-\bar{a}(1+\bar{a}) + (1+2\bar{a})^2 s^2)$.

Mas para $-\frac{1}{2} < \bar{a} < 0$, temos claramente que $(-\bar{a}(1+\bar{a}) + (1+2\bar{a})^2 s^2) > 0$. Logo, $\lambda'(s)$ não muda de sinal. Portanto, a aplicação inclusão da curva na superfície é um homeomorfismo. Como a diferencial da inclusão é injetiva, temos que é um mergulho.

2. Se $\bar{a} = 0$, as curvas são duas porções de horociclos tangentes na origem, gerando superfícies totalmente umbílicas que são as horoesferas, pois $\sinh^2 \rho = s^2$ nos dá que $\rho(s) = \operatorname{arcsinh}(s)$. Ainda temos:

$$\lambda(s) = \int_0^s \frac{t^3}{t^4 + t^2} dt = \int_0^s \frac{t}{t^2 + 1} dt = \ln \sqrt{1 + s^2} - \ln 1 = \ln \sqrt{1 + s^2}.$$

Logo, $\Omega(s) = (\operatorname{arcsinh}(s), \ln \sqrt{1+s^2})$.

No modelo do $\mathbb{R}_+^3$, em coordenadas cartesianas, temos:

$$(x, y, z) = \sqrt{1+s^2} \left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \right).$$

Ou seja,

$$(x, y, z) = (s, 0, 1).$$

Portanto, $\Omega(s)$ é uma reta no plano xz que gera um plano paralelo ao plano xy , ou seja, uma horoesfera em $\mathbb{R}_+^3$.

3. Se $\bar{a} > 0$, as curvas possuem uma única auto-intersecção, gerando superfícies de rotação imersas. Temos que a função $\lambda(s)$ se comporta como $\ln |s|$, pois $\lambda'(s)$ se comporta como $\frac{1}{|s|}$. Como $\tanh \rho \rightarrow 1$, quando $|s| \rightarrow \infty$, então nas coordenadas cartesianas do modelo do semi-espaco temos que $x \rightarrow +\infty$. Mas a coordenada z depende de $\bar{a}$, pois, neste caso, temos:

$$z = e^{\lambda \operatorname{sech} \rho} = |s| \sqrt{\frac{1+2\bar{a}}{1+2\bar{a}+\bar{a}^2+(1+2\bar{a})^2 s^2}}.$$

Então, se $\bar{a} \rightarrow +\infty$, temos que $z \rightarrow 0$. Se $\bar{a} \rightarrow 0$, então $z \rightarrow 1$.

Curvas geratrizes de superfícies de rotação com H constante, $H = 1$

$$-\frac{1}{2} < \bar{a} < 0$$

$$\bar{a} \geq 0$$

2.4.3 $0 \leq H < 1$

Neste caso, temos:

$$(1-H^2)z^2 + (1+2\bar{a}H)z - \bar{a}^2 = (1-H^2) \left[\left(z + \frac{1+2\bar{a}H}{2(1-H^2)} \right)^2 - \left(\frac{(1+2\bar{a}H)^2 + 4\bar{a}^2(1-H^2)}{4(1-H^2)^2} \right) \right].$$

Então a equação (2.12) fica:

$$\frac{dz}{\sqrt{\left(z + \frac{1+2\bar{a}H}{2(1-H^2)}\right)^2 - \frac{(1+2\bar{a}H)^2 + 4\bar{a}^2(1-H^2)}{4(1-H^2)^2}}} = 2\sqrt{1-H^2}ds.$$

Integrando, obtemos:

$$\operatorname{arccosh} \left[\frac{z + \frac{1+2\bar{a}H}{2(1-H^2)}}{\frac{\sqrt{(1+2\bar{a}H)^2 + 4\bar{a}^2(1-H^2)}}{2(1-H^2)}} \right] = 2\sqrt{1-H^2}s.$$

Logo,

$$z + \frac{1+2\bar{a}H}{2(1-H^2)} = \frac{\sqrt{(1+2\bar{a}H)^2 + 4\bar{a}^2(1-H^2)} \cosh(2\sqrt{1-H^2}s)}{2(1-H^2)},$$

ou seja,

$$z = x^2 = m^2 U^2 = \frac{-(1+2\bar{a}H) + \sqrt{1+4\bar{a}H+4\bar{a}^2} \cosh(2\sqrt{1-H^2}s)}{2(1-H^2)}.$$

Portanto,

$$m^2 U^2 = \frac{-(1+2\bar{a}H) + \sqrt{1+4\bar{a}H+4\bar{a}^2} \cosh(2\sqrt{1-H^2}s)}{2(1-H^2)} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.7), obtemos

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho = \frac{-A + B \cosh(2\alpha s)}{2\alpha^2} \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2}\alpha(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))\sqrt{-A + B \cosh(2\alpha t)}}{(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha t)} dt \\ \varphi(t) = \frac{1}{m}t \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $A = 1 + 2\bar{a}H$, $B = \sqrt{1 + 4\bar{a}H + 4\bar{a}^2}$ e $\alpha = \sqrt{1 - H^2}$.

O teorema a seguir descreve a geometria das curvas geratrizes das superfícies de rotação,

$\Omega(s) = (\rho(s), \lambda(s))$, onde $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ são definidas por (2.17).

Teorema 2.3. *Seja Ω a curva geratriz de uma superfície de rotação com curvatura média constante H , onde $0 \leq H < 1$. Então:*

1. *A curva é simétrica em relação ao raio geodésico ρ .*
2. *O bordo assintótico desta curva é constituído por um ou dois pontos.*
3. *Existem famílias de curvas mergulhadas na superfície.*

Demonstração. 1. A simetria é verificada provando que o raio $\rho(s)$ é uma função par, ilimitada e que atinge seu único ponto de mínimo em $s = 0$. Ainda mais, $\lambda(s)$ é uma função ímpar. De

$$\sinh^2 \rho = \frac{-A + B \cosh(2\alpha s)}{2\alpha^2},$$

obtemos:

$$\rho(s) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s)}}{\sqrt{2}\alpha} \right).$$

Como $\cosh(2\alpha s) = \cosh(2\alpha(-s))$, segue que $\rho(s) = \rho(-s)$. Assim, $\rho(s)$ é par.

Observando que $\cosh(2\alpha s) \rightarrow \infty$, quando $s \rightarrow \infty$, temos que

$$\operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s)}}{\sqrt{2}\alpha} \rightarrow \infty,$$

quando $s \rightarrow \infty$. Consequentemente, $\rho(s)$ é ilimitada. Temos

$$\dot{\rho}(s) = \frac{B \sinh(2\alpha s)}{2\alpha \sinh(\rho) \cosh(\rho)}$$

e

$$\cosh^2 \rho = 1 + \frac{-A + B \cosh(2\alpha s)}{2\alpha^2},$$

ou seja,

$$\cosh \rho = \frac{\sqrt{-A + 2\alpha^2 + B \cosh(2\alpha s)}}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Logo,

$$\dot{\rho}(s) = \frac{\alpha B \sinh(2\alpha s)}{\sqrt{-A + 2\alpha^2 + B \cosh(2\alpha s)} \sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s)}}.$$

Daí, obtemos que $s = 0$ é um ponto crítico da função $\rho(s)$. Mas

$$\ddot{\rho}(0) = \frac{2\alpha^2 B \cosh(0)}{\sqrt{-A + 2\alpha^2 + B} \sqrt{-A + B}} > 0.$$

Logo, $s = 0$ é ponto de mínimo de $\rho(s)$. Basta mostrar, agora, que $\lambda(s)$ é ímpar.

Como o integrando da função $\lambda(s)$ é uma função par, então $\lambda(s)$ é ímpar (os cálculos são os mesmos do caso $H = 1$). Então concluímos que as curvas geratrizes das superfícies de rotação com curvatura média constante $0 \leq H < 1$ são simétricas em relação ao raio geodésico ρ .

2. Chamando de $f(t)$ o integrando da função $\lambda(s)$, ou seja,

$$f(t) = \frac{\sqrt{2\alpha(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))} \sqrt{-A + B \cosh(2\alpha t)}}{(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha t)},$$

temos que f é uma função contínua. Observando que $-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha s))$ se comporta como a função $\cosh(2\alpha s)$, que $\sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s)}$ se comporta como $\cosh(2\alpha s)$ e que $\alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha s)$ se comporta como $\sinh^2(2\alpha s)$, temos que f se comporta como $\frac{\cosh(2\alpha s) \sqrt{\cosh(2\alpha s)}}{\cosh^2(2\alpha s) + \sinh^2(2\alpha s)}$, ou seja, f tende exponencialmente a zero quando $s \rightarrow \infty$. Então $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ é convergente. Logo, a função $\lambda(s)$ é limitada e possui limite finito quando $s \rightarrow \infty$. Isto nos dá que cada curva geratriz está compreendida entre duas geodésicas ortogonais ao eixo de rotação. O fato de $\lambda(s)$

ser limitada e possuir limite finito quando $s \rightarrow \infty$ também demonstra que o bordo assintótico das curvas geratrizes consta de um ou dois pontos, de onde temos que as superfícies geradas por estas curvas têm como bordo assintótico uma ou duas circunferências.

3. O parâmetro $\bar{a}$ está definido para todo número real, pois em (2.11) devemos ter

$$(1 - H^2)z^2 + (1 + 2\bar{a}H)z - \bar{a}^2 \geq 0.$$

Portanto, devemos ter

$$1 + 4\bar{a}H + 4\bar{a}^2 \geq 0.$$

Mas $1 + 4\bar{a}H + 4\bar{a}^2 > 0, \forall \bar{a} \in \mathbb{R}$. Logo, $(1 - H^2)z^2 + (1 + 2\bar{a}H)z - \bar{a}^2 \geq 0, \forall \bar{a} \in \mathbb{R}$.

Vamos dividir o estudo das curvas geratrizes em três casos, conforme o sinal de $\bar{a}$.

(a) Se $\bar{a} < 0$, temos que a função $\lambda(s)$ é estritamente monótona, pois:

$$\lambda'(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))\sqrt{-A + B \cosh(2\alpha t)}}{(-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha t)}.$$

Logo, o termo que determina o sinal de $\lambda'(s)$ é $-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\alpha s))$.

Mas $-2\bar{a} - H + HB \cosh(2\alpha s) \geq -2\bar{a} - H + HB > 0, \forall s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\lambda'(s)$ não muda de sinal.

(b) Se $\bar{a} > 0$, a equação

$$-2\bar{a} + H(-1 + B \cosh(2\sqrt{1 - H^2}s)) = 0$$

tem duas soluções: $s_1 = \frac{1}{2\sqrt{1-H^2}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2\bar{a}+H}{HB}\right)$ e $s_2 = -s_1$. Então a função

$\lambda(s)$ possui dois pontos críticos. Mas

$$\lambda''(s_i) = \frac{\sqrt{2}\alpha H B \sinh(2\alpha s_i) \sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s_i)}}{\alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha s_i)}, i = 1, 2.$$

Portanto,

$$\lambda''(s_i) = \frac{\sqrt{2}H \sqrt{-A + B \cosh(2\alpha s_i)}}{\alpha B \sinh(2\alpha s_i)}, i = 1, 2.$$

Então o sinal de $\lambda''(s)$ é dado por $\sinh(2\alpha s_i)$, $i = 1, 2$, onde $\alpha = \sqrt{1 - H^2}$.

Se tomarmos $s_1 < 0$, temos que $\sinh(2\alpha s_1) < 0$ e, ou seja, s_1 é um ponto de máximo de $\lambda(s)$. Neste caso, temos que $s_2 > 0$ ou seja, s_2 é um ponto de mínimo de $\lambda(s)$.

Concluimos finalmente que se $0 < H < 1$ e se:

- (a) $\bar{a} < 0$, então todas as curvas geratrizes estão mergulhadas na superfície, pois a função $\lambda(s)$ é estritamente monótona, o que nos dá que a aplicação inclusão da curva na superfície é um mergulho;
- (b) $\bar{a} = 0$, então temos que as curvas geratrizes são curvas equidistantes, gerando superfícies equidistantes;
- (c) $\bar{a} > 0$, então temos que existem curvas mergulhadas e curvas não mergulhadas na superfície. Em [G], demonstra-se que existe $H_0 \cong 0,64$, tal que se $0 < H < H_0$, então existe $a_0 = a_0(H)$ tal que, se $0 < \bar{a} < a_0$, a curva tem uma única auto-intersecção. Se $\bar{a} > a_0$, a curva é mergulhada. Quando $\bar{a} = a_0$, a curva é mergulhada e possui um único ponto no bordo do infinito.

Quando $H_0 \leq H < 1$, as curvas são todas imersas com um único ponto de auto-intersecção.

Se $H = 0$, temos que a família de Bour destas superfícies de rotação é:

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{a}^2} \cosh(2s)}{2} \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2}(-2\bar{a}\sqrt{-1 + B \cosh(2t)})}{4\bar{a}^2 + (1 + 4\bar{a}^2) \sinh^2(2t)} dt \end{cases}$$

onde $B = \sqrt{1 + 4\bar{a}^2}$. Neste caso

$$\lambda'(s) = \frac{\sqrt{2}(-2\bar{a}\sqrt{-1 + B \cosh(2s)})}{4\bar{a}^2 + (1 + 4\bar{a}^2) \sinh^2(2s)},$$

ou seja, o sinal de $\lambda'(s)$ é determinado por $\bar{a}$. Assim, se $\bar{a} < 0$ temos que $\lambda'(s) > 0$ e se $\bar{a} > 0$, então $\lambda'(s) < 0$. Logo, $\lambda'(s)$ não muda de sinal, ou seja, $\lambda(s)$ é estritamente monótona. Como no caso $0 < H < 1$, temos que todas estas curvas estão mergulhadas na superfície. Se $\bar{a} = 0$, temos $\lambda(s) = 0$ e, então, a curva geratriz é dada por $(\rho(s), 0, 0)$, reduzindo-se ao eixo ρ . Neste caso, a superfície de rotação gerada é um plano totalmente geodésico.

□

Observação 2.3. As propriedades referentes ao bordo assintótico das superfícies com curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$ estão bem detalhadas em [B1].

Curvas geratrizes de superfícies de rotação com H constante, $0 \leq H < 1$

$$H = 0$$

$$H = 0.5 \text{ e } \bar{a} < 0$$

Curvas geratrizes de superfícies de rotação com H constante, $H = 0.5$

$$a_0 = a_0(H) \text{ e } 0 < \bar{a} < a_0$$

$$\bar{a} = a_0$$

Curvas geratrizes de superfícies de rotação com H constante, $H = 0.5$ e $H = 0.85$

$$\bar{a} > a_0$$

$$H = 0.85 \text{ e } \bar{a} < 0$$

Curvas geratrizes de superfícies de rotação com H constante, $H = 0.85$

$$\bar{a} = 0$$

$$\bar{a} > 0$$

Capítulo 3

Uma Generalização do Teorema de Delaunay para Superfícies com H Constante em $\mathbb{H}^3$

Neste capítulo, estudamos os artigos [H] e [S], sendo que no primeiro estudamos até a EDO que caracteriza a curva geratriz de uma superfície de rotação com curvatura média constante no espaço hiperbólico e, no segundo, restringimo-nos ao estudo das superfícies com curvatura média constante. Em seguida, estudamos [CA] apenas no que se refere às superfícies de Delaunay. Observamos que aqui é feito o mesmo estudo do capítulo anterior, mas sob outro ponto de vista: relacionamos as curvas geratrizes de superfícies de rotação com curvatura média constante com a curva descrita por um dos focos de cónicas, quando as fazemos rolar, sem deslizar, sobre uma geodésica fixada. As superfícies obtidas pela

rotação destas curvas são as de Delaunay.

3.1 Movimento Plano sobre o Plano Hiperbólico

3.1.1 Teoria Geral

As noções que se seguem se encontram em [CA] e têm por objetivo esclarecer o movimento plano sobre o plano hiperbólico, fazendo uma analogia com o caso euclidiano.

Definição 3.1. *Sejam N uma variedade isométrica a $\mathbb{H}^2$ e $I \subset \mathbb{R}$. Um movimento plano sobre um plano hiperbólico de N em $\mathbb{H}^2$ é uma aplicação φ de classe C^2 ,*

$$\begin{aligned}\varphi : I \times N &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (t, n) &\mapsto \varphi(t, n)\end{aligned}$$

tal que, para todo $t \in I$, $\varphi(t, \cdot)$ é uma isometria.

Notação: $\Phi_t = \varphi(t, \cdot)$.

Definição 3.2. *Sejam $x \in \mathbb{H}^2$ e $\eta_t = \Phi_t^{-1}(x) \in N$. O ponto η_t é chamado o t -coincidente de x . O campo de velocidades no instante t , V_t , é definido por*

$$V_t(x) = \frac{d}{ds}(\varphi(s, \eta_t))|_{s=t}.$$

Dois movimentos planos sobre o plano hiperbólico são ditos **tangentes**, no instante t , se seus campos de velocidades, no instante t , são iguais. Um movimento plano sobre o plano hiperbólico é dito **estacionário** se seu campo de velocidades independe de t .

No que se segue, φ designa um movimento plano sobre o plano hiperbólico e V_t designa seu campo de velocidades no instante t .

Proposição 3.1. *Para todo $t \in I$ e para toda geodésica c de $\mathbb{H}^2$, a aplicação*

$$s \mapsto \langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle$$

é constante ao longo de c .

Demonstração. Suponhamos que c está parametrizada por comprimento de arco. Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$ e $x = c(s)$, $x' = c(s')$. Denotemos $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$ e $n' = \Phi_t^{-1}(x') \in N$. Seja c_u a geodésica que une $\Phi_u(n)$ a $\Phi_u(n')$.

Seja $L(u) = d(\Phi_u(n), \Phi_u(n'))$, onde d é a distância hiperbólica. Como Φ_u é isometria, $L(u)$ é constante e aplicando na fórmula da variação primeira, temos:

$$0 = \frac{d}{du}(L(u))|_{u=t} = \int_s^{s'} \frac{\partial}{\partial u} |c'(u, s)|_{|u=t} ds = \int_s^{s'} \left(\frac{\left\langle \frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right), \frac{\partial c}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial c}{\partial s} \right|} \right)_{|u=t} ds.$$

Observando que

$$\left| \frac{\partial c}{\partial s}(u, s) \right|_{|u=t} = |c'_t(s)| = |c'(s)| = 1,$$

obtemos

$$0 = \langle V_t(x'), \dot{c}(s') \rangle - \langle V_t(x), \dot{c}(s) \rangle.$$

□

Esta proposição implica em que a projeção de $V_t(c(s))$ sobre c é um campo paralelo ao longo de c . Por outro lado, ela permite definir um campo de endomorfismos anti-simétricos.

Proposição 3.2. *Para todo $t \in I$ e para todo $x \in \mathbb{H}^2$, o endomorfismo*

$$A_t(x) : T_x \mathbb{H}^2 \rightarrow T_x \mathbb{H}^2$$

$$X \mapsto (D_X V_t)(x)$$

é anti-simétrico e tem a seguinte propriedade: sejam $X \in T_x \mathbb{H}^2$, $\gamma(s) = \Phi_s \circ \Phi_t^{-1}(x)$ e $X(s) = (\Phi_s \circ \Phi_t^{-1})_(X)$. Então $X(s)$ é um campo de vetores ao longo de γ que verifica*

$$(D_{\dot{\gamma}} X)(x) = A_t(x)X.$$

Demonstração. Sejam $X \in T_x \mathbb{H}^2$ e $c(s) = \exp_x(sX)$. Pela proposição anterior, $\langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle$ é constante ao longo de c , ou seja,

$$0 = \frac{d}{ds} (\langle V_t(c(s)), \dot{c}(s) \rangle) |_{s=0} = \langle D_{\dot{c}(0)} V_t, \dot{c}(0) \rangle = \langle A_t(x)X, X \rangle,$$

de onde obtemos que $A_t(x)$ é anti-simétrico.

Por outro lado, sejam $c(u) = \exp_x(uX)$ e

$$\Gamma : I \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$(s, u) \mapsto \Phi_s \circ \Phi_t^{-1}(c(u)).$$

Como $D \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial u} = D \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s}$, temos:

$$D \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \Big|_{u=0, s=t} = D \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \Big|_{u=0, s=t}.$$

Além disto,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \Big|_{s=t} = V_t(c(u)) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \Big|_{u=0} = X(s) \end{cases}$$

Assim,

$$D \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \Big|_{u=0, s=t} = D_{\dot{\gamma}} X(x)$$

e

$$D \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \Big|_{u=0, s=t} = D_X V_t(x) = A_t(x)X.$$

Logo,

$$D_{\dot{\gamma}} X(x) = A_t(x)X.$$

□

Proposição 3.3. *Seja V um campo de vetores sobre $\mathbb{H}^2$ e, para todo $x \in \mathbb{H}^2$, seja*

$$A(x) : T_x \mathbb{H}^2 \rightarrow T_x \mathbb{H}^2$$

$$X \mapsto D_X V(x)$$

Se, para todo $x \in \mathbb{H}^2$, o endomorfismo $A(x)$ é anti-simétrico, então os difeomorfismos dos fluxos de V são as isometrias.

Demonstração. Seja $(f_t)_t$ o fluxo de V . Sejam $x \in \mathbb{H}^2$, $X, Y \in T_x \mathbb{H}^2$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$, sejam $\gamma(t) = f_t(x)$, $X(t) = (f_t)_*(X)$ e $Y(t) = (f_t)_*(Y)$. Por raciocínio análogo ao da proposição anterior, temos $A(x)X = D_{\dot{\gamma}} X(x)$ e $A(x)Y = D_{\dot{\gamma}} Y(x)$. Então deduzimos as

seguintes propriedades:

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle D_{\dot{\gamma}}X, Y \rangle + \langle D_{\dot{\gamma}}Y, X \rangle = \langle AX, Y \rangle + \langle AY, X \rangle = \langle A(X+Y), X+Y \rangle = 0,$$

pois A é anti-simétrico. Resumindo, obtemos que $\langle X(t), Y(t) \rangle$ é constante ao longo de γ e, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle X, Y \rangle = \langle (f_t)_*(X), (f_t)_*(Y) \rangle.$$

□

Desta proposição, deduzimos que o campo V_t é de Killing, pois os endomorfismos de seu fluxo são de isometrias.

Seja V um campo de Killing sobre $\mathbb{H}^2$ e seja $(f_t)_t$ seu fluxo. Para todo t , a isometria f_t se estende a um difeomorfismo $\bar{f}_t$ sobre $\overline{\mathbb{H}^2}$ que deixa $\partial_\infty \overline{\mathbb{H}^2}$ invariante. A família $(\bar{f}_t)_t$ restrita à $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos, denotando por V_∞ seu campo de velocidades derivado.

Proposição 3.4. *Seja V um campo de Killing sobre $\mathbb{H}^2$. Uma e só uma das seguintes afirmações se verificam:*

1. *existe $x \in \mathbb{H}^2$ tal que $V(x) = 0$;*
2. *V não se anula sobre $\mathbb{H}^2$ e existe um único ponto $x \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ tal que $V_\infty(x) = 0$;*
3. *V não se anula sobre $\mathbb{H}^2$ e V_∞ se anula exatamente em dois pontos sobre $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Demonstração. Um campo de vetores V se anula em um ponto x se, e somente se, x é um ponto fixo de todos os difeomorfismos do fluxo de V .

Seja $(f_t)_t$ o fluxo de V . Se para todo t temos $f_t = Id_{\mathbb{H}^2}$, o campo V é identicamente nulo e, então, estamos no primeiro caso.

Senão, seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $f_t \neq Id_{\mathbb{H}^2}$ e seja $x \in \overline{\mathbb{H}^2}$ tal que $\bar{f}_t(x) = x$. Para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que $\bar{f}_s(x) = \bar{f}_s(\bar{f}_t(x)) = \bar{f}_t(\bar{f}_s(x))$. Neste caso, $\bar{f}_s(x)$ é um ponto fixo de $\bar{f}_t$. Como o conjunto dos pontos fixos é discreto e a aplicação $s \mapsto \bar{f}_s(x)$ é contínua, então, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\bar{f}_s(x) = \bar{f}_t(x) = x$. Logo, para todo $s \in \mathbb{R}$, o ponto x é um ponto fixo de $\bar{f}_s$. Deduzimos que as isometrias são todas de mesma natureza e que as extensões a $\mathbb{H}^2$ possuem os mesmos pontos fixos.

Se f_t são elípticas, todas elas possuem o mesmo ponto fixo $x \in \mathbb{H}^2$, e estamos no primeiro caso.

Se f_t são parabólicas, $\bar{f}_t$ têm todas o mesmo ponto fixo $x \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, e estamos no segundo caso.

Se f_t são hiperbólicas, $\bar{f}_t$ têm os mesmos dois pontos fixos em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, e estamos no terceiro caso.

□

Os difeomorfismos do fluxo de um campo de Killing V definem um movimento plano sobre o plano hiperbólico. Este movimento tem a particularidade de ser estacionário: em todo instante seu campo de velocidades é igual a V . Por outro lado, se φ é um movimento plano qualquer sobre o plano hiperbólico, para todo $t \in \mathbb{R}$, seu campo de velocidades V_t é de

Killing. Ele define, então, um movimento plano, sobre o plano, estacionário tangente à φ . Tem-se, aqui, uma noção de movimento estacionário instantâneo que generaliza a noção de rotação ou de translação instantânea dos movimentos planos sobre planos euclidianos. No caso euclidiano, a equiprojetividade do campo de velocidades permite exprimir seu valor em um ponto y em função de seu valor em um ponto x e do vetor $\overrightarrow{xy}$. Tem-se uma propriedade análoga para o caso hiperbólico.

Lema 3.1. *Sejam $a(u)$ uma curva de $\mathbb{H}^2$, X um campo de vetores ao longo de $a(u)$ e $b(u) = \exp_{a(u)}(X_u)$. Temos:*

$$\dot{b}(u) = P|_{a(u)}^{b(u)} \left(\dot{a}(u)^T + \cosh \|X_u\| \dot{a}(u)^N + (D_{\dot{a}}X)(u)^T + \frac{\sinh \|X_u\|}{\|X_u\|} (D_{\dot{a}}X)(u)^N \right),$$

onde $P|_{a(u)}^{b(u)}$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica que une $a(u)$ a $b(u)$ e T e N designam as componentes tangente e normal a $X(u)$, respectivamente.

Demonstração. Sejam $G(s, u) = \exp_{a(u)}(sX_u)$ e $J_u(s) = \frac{\partial G}{\partial u}(s, u)$. Se $\gamma_u(s) = \exp_{a(u)}(sX_u)$, $0 \leq s \leq 1$, então $J_u(s)$ é um campo de Jacobi ao longo γ , com:

$$\begin{cases} J_u(0) = \frac{\partial G}{\partial u}(0, u) = \dot{a}(u) \\ \frac{dJ_u}{ds}(0) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial G}{\partial u}(s, u) \right)_{s=0} = (D_{\dot{a}}X)(u) \end{cases}$$

Então J_u verifica a equação de Jacobi:

$$\frac{D^2 J_u}{ds^2} + R(\dot{\gamma}_u(s), J_u(s))\dot{\gamma}_u(s) = 0.$$

Ou seja, J_u satisfaz a equação

$$\frac{D^2 J_u}{ds^2} - J_u = 0,$$

que, integrando e observando que $\dot{b}(u) = J_u(1)$, obtem-se o resultado desejado.

□

Proposição 3.5. *Sejam $x \in \mathbb{H}^2$, $X \in T_x \mathbb{H}^2$ e $y = \exp_x(X)$. Para todo $t \in I$, temos:*

$$V_t(y) = P|_y^x \left(V_t^T(x) + \cosh \|X\| V_t^N(x) + \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right),$$

onde $P|_y^x$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica que une y a x e T e N designam as componentes tangente e normal a X , respectivamente

Demonstração. Sejam $a(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(x)$, $b(u) = \Phi_u \circ \Phi_t^{-1}(y)$ e $X(u) = \exp_{a(u)}^{-1}(b(u))$. Pela definição, tem-se $\dot{a}(t) = V_t(x)$, $\dot{b}(t) = V_t(y)$ e $(D_{\dot{a}}X)(t) = A_t X$. Pelo lema anterior, escrevemos:

$$V_t(y) = P|_y^x \left(V_t(x)^T + \cosh \|X\| V_t(x)^N + (A_t X)^T + \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} (A_t X)^N \right).$$

Como $A_t X$ é anti-simétrico, $\langle A_t X, X \rangle = 0$, com $X \in T_x \mathbb{H}^2$. Neste caso, $(A_t X)^T = 0$ e $(A_t X)^N = A_t X$. Logo,

$$V_t(y) = P|_y^x \left(V_t^T(x) + \cosh \|X\| V_t^N(x) + \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right).$$

□

3.2 Rolamento sem Deslizar

Suponhamos que as variedades N e $\mathbb{H}^2$ sejam orientáveis.

Definição 3.3. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} : I \rightarrow N$, $\mathcal{B} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ duas curvas C^1 tais que, para todo $t \in I$, $\dot{\mathcal{R}}(t) \neq 0$, $\dot{\mathcal{B}}(t) \neq 0$ e $\|\dot{\mathcal{R}}(t)\| = \|\dot{\mathcal{B}}(t)\|$. Seja Φ_t a isometria positiva definida por:

$$\Phi_t(\mathcal{R}(t)) = \mathcal{B}(t) \quad \text{e} \quad (\Phi_t)_*(\dot{\mathcal{R}}(t)) = \dot{\mathcal{B}}(t).$$

O rolamento, sem deslizar, de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{B}$ é um movimento plano sobre o plano hiperbólico, definido por:

$$\varphi(t, n) = \Phi_t(n).$$

A curva $\mathcal{R}$ é chamada **rolante** e a curva $\mathcal{B}$, a **base**.

No que se segue, φ designa o movimento plano definido pelo rolamento, sem deslizar, de uma rolante $\mathcal{R}$ sobre uma base $\mathcal{B}$ e V_t é seu campo de velocidades.

Lema 3.2. Temos $V_t(\mathcal{B}(t)) = 0$ e, para todo $x \in \mathbb{H}^2$, temos:

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right),$$

onde $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(x)$ e $P|_{\mathcal{B}(t)}^x$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica que une $\mathcal{B}(t)$ a x .

Demonstração. Pela definição de Φ_t , temos que $\Phi_t(\mathcal{R}(t)) = \mathcal{B}(t)$. Ou seja, $\mathcal{B}(t) = \varphi(t, \mathcal{R}(t))$. Daí,

$$\dot{\mathcal{B}}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathcal{R}(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \mathcal{R}(t)) \dot{\mathcal{R}}(t).$$

Como, pela definição de Φ_t , $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \mathcal{R}(t)) \dot{\mathcal{R}}(t) = (\Phi_t)_*(\dot{\mathcal{R}}(t)) = \dot{\mathcal{B}}(t)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathcal{R}(t)) = V_t(\mathcal{B}(t))$, obtemos:

$$\dot{\mathcal{B}}(t) = V_t(\mathcal{B}(t)) + \dot{\mathcal{B}}(t),$$

ou seja,

$$V_t(\mathcal{B}(t)) = 0.$$

Pela proposição 3.5,

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(V_t(\mathcal{B}(t))^T + V_t(\mathcal{B}(t))^N \cosh \|X\| + A_t X \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} \right).$$

Assim,

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(A_t X \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} \right).$$

□

Proposição 3.6. *Seja $C(t) = \varphi(t, n)$ a trajetória de um ponto $n \in N$. Então o vetor $\dot{C}(t)$ é ortogonal à geodésica que une $\mathcal{B}(t)$ a $C(t)$.*

Demonstração. Sejam $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(C(t))$ e $g(s) = \exp_{\mathcal{B}(t)}(sX)$ a geodésica que une $\mathcal{B}(t)$ a $C(t)$, tal que $g(0) = \mathcal{B}(t)$ e $g(1) = C(t)$. Pelo lema anterior,

$$\dot{C}(t) = P|_{\mathcal{B}(t)}^{C(t)} \left(\frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} A_t X \right).$$

Como $\langle A_t X, X \rangle = 0$, então $A_t X$ é ortogonal a $X = \dot{g}(0)$. Mas $\dot{C}(t)$ é o transporte paralelo de $A_t X$ ao longo de g , ou seja, $\dot{C}(t)$ é ortogonal a $\dot{g}(1)$.

□

Consideremos $\mathbb{H}^2$ como sendo um hiperplano hiperbólico de $\mathbb{H}^3$. Cada endomorfismo $A_t(\mathcal{B}(t))$ se escreve na forma

$$A_t(\mathcal{B}(t))X = \rho(t) \frac{\partial}{\partial z} \wedge X,$$

onde $\frac{\partial}{\partial z}$ é um campo de vetores unitários normal à $\mathbb{H}^2$. O valor de $\rho(t)$ depende das curvaturas das curvas rolante e base.

Proposição 3.7. *A função $\rho(t)$ satisfaz*

$$\rho(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{B}}} \dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle,$$

onde $\nu(t) = \frac{\partial}{\partial z} \wedge \dot{\mathcal{B}}(t)$ e $\eta(t) = (\Phi_t)_*^{-1}(\nu(t))$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{B}$ estejam parametrizadas por comprimento de arco. Fixemos $t \in I$ e calculemos $\rho(t)$. Para todo $s \in I$, seja $\nu(s) = \frac{\partial}{\partial z} \wedge \dot{\mathcal{B}}(s)$, que é unitário e normal à $\mathcal{B}$. Seja $x = \exp_{\mathcal{B}(t)}(\dot{\mathcal{B}}(t))$. Do lema 3.2, temos:

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(A_t X \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} \right),$$

onde $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(x)$. Por outro lado,

$$A_t X = \rho(t) \frac{\partial}{\partial z} \wedge \dot{\mathcal{B}}(t) = \rho(t) \nu(t).$$

Assim,

$$V_t(x) = P|_{\mathcal{B}(t)}^x (\rho(t) \nu(t) \sinh 1). \quad (3.1)$$

Para calcular $\rho(t)$, vamos calcular $V_t(x)$. Sejam $n = \Phi_t^{-1}(x) \in N$, $U(s) = \exp_{\mathcal{R}(s)}^{-1}(n)$ e $\eta(s) = (\Phi_s)_*^{-1}(\nu(s))$.

Em particular, $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$ e $n = \exp_{\mathcal{R}(t)}^{-1}(\dot{\mathcal{R}}(t))$. Derivando a igualdade $n = \exp_{\mathcal{R}(s)}^{-1}(U(s))$, usando o lema 3.1 e calculando em $s = t$, obtemos:

$$0 = \dot{\mathcal{R}}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{R}}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \eta \rangle \eta(t),$$

que, pela imagem de $(\Phi_t)_*$ nos dá:

$$0 = \dot{B}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{B}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \eta \rangle \nu(t). \quad (3.2)$$

Consideremos, agora, a trajetória do ponto n . Temos $\Phi_s(n) = \exp_{B(s)}(X(s))$, com $X(s) = (\Phi_s)_*(U(s))$. Como $U = \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{\mathcal{R}} + \langle U, \eta \rangle \eta$, obtemos:

$$X = \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{B} + \langle U, \eta \rangle \nu$$

e

$$D_{\dot{B}} X = \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{B} + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, U \rangle \dot{B} + \langle U, \dot{\mathcal{R}} \rangle D_{\dot{B}} \dot{B} + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \eta \rangle \nu + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \eta, U \rangle \nu + \langle U, \eta \rangle D_{\dot{B}} \nu.$$

Calculando em $s = t$, temos que algumas das parcelas acima se anulam: como $U(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)$, e $\dot{\mathcal{R}}(t)$ tem norma constante, segue que $\langle U, D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}} \rangle = 0$. Além disto, $\langle U, \eta \rangle = 0$. Temos ainda que $D_{\dot{B}} \dot{B} = \langle D_{\dot{B}} \dot{B}, \nu \rangle \nu$, pois $\dot{B}$ tem norma constante e $\langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle = -\langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \eta, U \rangle$ pois $\langle \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle$ é constante. Logo,

$$(D_{\dot{B}} X)(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{B}(t) + (\langle D_{\dot{B}} \dot{B}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \eta \rangle) \nu(t).$$

Usando o lema 3.1 e a igualdade acima, obtemos:

$$\frac{d}{ds}(\Phi_s(n))|_{s=t} = P|_{B(t)}^x \left(\dot{B}(t) + \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \dot{\mathcal{R}} \rangle \dot{B}(t) + \sinh 1 \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} U, \eta \rangle \nu(t) + \right.$$

$$+ \sinh 1(\langle D_{\dot{\mathcal{B}}} \dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle) \nu(t) \Big) .$$

Usando (3.2), obtemos:

$$V_t(x) = \frac{d}{ds}(\Phi_s)(n)|_{s=t} = P|_{\mathcal{B}(t)}^x \left(\sinh 1(\langle D_{\dot{\mathcal{B}}} \dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle) \nu(t) \right) .$$

Comparando com a expressão (3.1), concluímos que:

$$\rho(t) = \langle D_{\dot{\mathcal{B}}} \dot{\mathcal{B}}, \nu \rangle - \langle D_{\dot{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}, \eta \rangle .$$

□

Observação 3.1. Seja $C(t) = \varphi(t, n)$ a trajetória de um ponto $n \in N$. Então, pelo lema (3.2),

$$\dot{C}(t) = V_t(C(t)) = P|_{\mathcal{B}(t)}^{C(t)} \left(A_t X \frac{\sinh \|X\|}{\|X\|} \right) ,$$

onde $X = \exp_{\mathcal{B}(t)}^{-1}(C(t))$. Se n não está em $\mathcal{R}$, então $X \neq 0$ e se $\mathcal{B}$ é uma geodésica e $\mathcal{R}$ nunca se anula, então $\dot{C}(t) \neq 0$. Em particular, podemos reparametrizar o movimento plano, sobre um plano, tomando a abscissa da curva C como novo parâmetro.

3.3 A EDO Reduzida de uma Superfície de Rotação com H Constante em $\mathbb{H}^3$

Para maiores detalhes do que se segue, ver [H].

Primeiro vamos dar uma descrição da geometria orbital das transformações de $O(2)$ em $\mathbb{H}^3$, onde $O(2)$ é o grupo das transformações isométricas em $\mathbb{H}^3$ que fixam uma geodésica,

ou seja, um grupo de transformações rotacionais do tipo usual que fixa um eixo de rotação $\mathbb{H}^1$. Então $(O(2), \mathbb{H}^3)$ tem dois tipos de órbitas: os pontos fixados e órbitas do tipo S^1 , onde S^1 é difeomorfo à variedade $\frac{O(2)}{O(1)}$.

Seja $F(O(1)) = \{\text{pontos fixados por } O(1)\}$, onde $O(1)$ é subgrupo isotrópico principal de $(O(2), \mathbb{H}^3)$. Como $O(1)$ é subgrupo de $O(2)$ e $O(2)$ fixa $\mathbb{H}^1$, então $O(1)$ também deve fixar $\mathbb{H}^1$. Ainda temos que $O(1)$ também fixa o eixo $\bar{x}$ do sistema de coordenadas cartesianas. Logo, podemos escrever $F(O(1)) = \mathbb{H}^2$.

Gostaríamos, agora, de obter o plano de órbitas no qual está localizada a curva geratriz de uma superfície de rotação. Primeiramente, observamos que uma superfície de rotação é obtida pela ação de $O(2)$ em cada ponto da curva geratriz. Logo, esta curva é obtida tomando-se o quociente da superfície por $O(2)$. Fazendo isto para todas as superfícies de rotação esférica em $\mathbb{H}^3$, obtemos todas as suas possíveis curvas geratrizes. Para obtermos o plano de órbitas das superfícies de rotação esférica de $\mathbb{H}^3$, basta tomarmos o quociente de $\mathbb{H}^3$ pela ação $O(2)$. Por outro lado, seja Ω uma curva geratriz de uma superfície de rotação S em $\mathbb{H}^3$ e seja $p \in \Omega$ um ponto cuja órbita é principal (ou seja, p não está no eixo de rotação). Neste caso, observamos que o ponto p e o seu antípoda $-p$ (ou seja, o ponto que está à mesma distância do eixo de rotação que o ponto p) têm a mesma órbita. Como p é arbitrário, então isto vale para todos os pontos da curva Ω . Lembrando que $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$, então $\frac{S}{O(2)} = \Omega$. Fazendo isto para todas as curvas geratrizes Ω que estão em $\mathbb{H}^2$ e, portanto, para todas as superfícies S em $\mathbb{H}^3$, temos $\frac{\mathbb{H}^3}{O(2)} = \frac{\mathbb{H}^2}{\mathbb{Z}_2}$, onde $\frac{\mathbb{H}^2}{\mathbb{Z}_2}$ é o plano de órbitas que contém as curvas geratrizes das superfícies de rotação em $\mathbb{H}^3$. Indicaremos o plano de órbitas por $\mathbb{H}_+^2$.

Fixemos uma geodésica M^1 . Estamos interessados em estudar o comportamento das superfícies de rotação em torno de M^1 . Suas curvas geratrizes estão localizadas no plano de órbitas $\mathbb{H}_+^2$, onde $M^1 = \partial\mathbb{H}_+^2$. Para isto, vamos parametrizar $\mathbb{H}_+^2$ pelo seguinte sistema de coordenadas: fixemos um ponto O em M^1 para ser a origem do nosso sistema e uma geodésica P , ortogonal a M^1 , passando por O . Seja $p \in \mathbb{H}_+^2$ com coordenadas (x, y) definidas a seguir. Tomemos a curva equidistante de M^1 que passa por p e corta o plano P num ponto q . Definimos y como sendo a distância hiperbólica de q a O . Tomemos, agora, uma geodésica P' que passa por p e é ortogonal a M^1 e definimos x como sendo a distância hiperbólica de $P' \cap M^1$ a O .

Para termos uma melhor visão, faremos uma figura no modelo $\mathbb{R}_+^3$.

Pela definição, temos que $x \in]-\infty, +\infty[$ e $0 \leq y < +\infty$.

Observamos que a métrica orbital é a restrição da métrica a $\mathbb{H}_+^2$. Então a métrica em termos das coordenadas (x, y) é dada por:

$$ds^2 = \cosh^2 y dx^2 + dy^2.$$

Proposição 3.8. *Seja $\Omega = \{\Omega(s) = (x(s), y(s)) / a \leq s \leq b\}$ uma curva numa variedade Riemanniana bi-dimensional $M^2 = \{(x, y) / ds^2 = \cosh^2 y dx^2 + dy^2\}$. Então a curvatura*

geodésica de Ω é dada por

$$K(s) = \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds},$$

onde α é o ângulo entre o vetor unitário tangente a Ω e $\frac{\partial}{\partial y}$.

Demonstração. Como é mostrado na figura a seguir, sejam $t(s)$ e $n(s)$ os vetores unitários tangente e normal, respectivamente, a Ω em $\Omega(s)$.

Da figura, temos:

$$\frac{dy}{ds} = (\cos \alpha)(|t(s)|) = \cos \alpha.$$

De $ds^2 = \cosh^2 y dx^2 + dy^2$, temos:

$$1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \cosh^2 y \left(\frac{dx}{ds}\right)^2.$$

Logo,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha.$$

Portanto,

$$t(s) = \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$, temos que $n(s) = \left(-\frac{\cos \alpha}{\cosh y}, \sin \alpha\right)$. Ou seja:

$$n(s) = -\frac{\cos \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como a curvatura geodésica de Ω é o valor algébrico de $\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)$, onde:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) &= \left[\frac{d^2 x}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ \left[\frac{d^2 y}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Observando que os coeficientes da primeira forma fundamental de M^2 são

$$E = \cosh^2 y, \quad F = 0 \text{ e } G = 1,$$

obtemos:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\sinh y}{\cosh y},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\sinh y \cosh y.$$

Logo,

$$\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) = \left[\frac{d^2 x}{ds^2} + 2 \frac{\sinh y}{\cosh y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right] \frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{d^2 y}{ds^2} - \sinh y \cosh y \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha$, segue que

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{\sinh y}{\cosh y} \cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \frac{1}{\cosh y} \frac{d\alpha}{ds},$$

ou seja,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{\cosh y} \cos \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\sinh y}{\cosh y} \sin \alpha \right].$$

Como $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$, segue que

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} + 2\frac{\sinh y}{\cosh y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{\cosh y} \cos \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\sinh y}{\cosh y} \sin \alpha \right] + 2\frac{\sinh y}{\cosh^2 y} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{\cosh y} \left[\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\sinh y}{\cosh y} \sin \alpha \right] = \frac{1}{\cosh y} \cos \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + 2\frac{\sinh y}{\cosh y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\cosh y} \cos \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right].$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} - \sinh y \cosh y \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 &= -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} - \sinh y \cosh y \frac{1}{\cosh^2 y} \sin^2 \alpha = \\ &= -\sin \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \sinh y \cosh y \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = -\sin \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right].$$

Portanto,

$$\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) = \frac{1}{\cosh y} \cos \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right] \frac{\partial}{\partial x} - \sin \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right] \frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo,

$$\left| \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2 y} \cos^2 \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right]^2 \cosh^2 y + \sin^2 \alpha \left[\frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \right]^2.$$

Portanto,

$$\left| \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) \right| = K(s) = \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds}.$$

□

Proposição 3.9. *Seja S uma superfície de rotação gerada pela curva $\Omega(s)$. Então as curvaturas principais de S em $\Omega(s)$ são dadas por:*

$$\begin{cases} k_1 = \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} \\ k_2 = \sin \alpha \frac{\cosh y}{\sinh y} \end{cases}$$

Demonstração. Sabemos, da teoria de superfícies, que as direções principais são a tangente à Ω em $\Omega(s)$ e a tangente à órbita $G(\Omega(s))$ em $\Omega(s)$. Logo, a curvatura k_1 , na direção tangente à Ω em $\Omega(s)$, é a curvatura geodésica. Portanto,

$$k_1 = \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds}.$$

Para determinar k_2 , precisamos calcular a curvatura média H , onde $2H = k_1 + k_2$. De (2.9), temos:

$$2H = \frac{2U^2 - U\ddot{U} - \dot{U}^2 + 1}{U\sqrt{1 + U^2 - \dot{U}^2}},$$

onde $U = \sinh y$. Logo, $\dot{U} = \cosh y \frac{dy}{ds} = \cosh y \cos \alpha$ e

$$\ddot{U} = \sinh y \cos^2 \alpha - \cosh y \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}$$

Portanto,

$$2U^2 - U\ddot{U} - \dot{U}^2 + 1 = 2\sinh^2 y - \sinh^2 y \cos^2 \alpha + \sinh y \cosh y \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} - \cosh^2 y \cos^2 \alpha + 1,$$

ou seja,

$$2U^2 - U\ddot{U} - \dot{U}^2 + 1 = \sin \alpha \left[\cosh^2 y \sin \alpha + \sinh^2 y \sin \alpha + \sinh y \cosh y \frac{d\alpha}{ds} \right].$$

Ainda,

$$1 + U^2 - \dot{U}^2 = 1 + \sinh^2 y - \cosh^2 y \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = \cosh^2 y \sin^2 \alpha,$$

e, portanto

$$2H = \frac{\sin \alpha \left[\cosh^2 y \sin \alpha + \sinh^2 y \sin \alpha + \sinh y \cosh y \frac{d\alpha}{ds} \right]}{\sinh y \cosh y \sin \alpha}.$$

Assim,

$$2H = \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} + \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha = k_1 + k_2$$

e

$$k_2 = \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha.$$

□

Seja S uma superfície de rotação com curvatura média constante em $\mathbb{H}^3$. Sua curva geratriz, $\Omega = \frac{S}{O(2)}$, é uma curva localizada em $\mathbb{H}^2$ que tem a característica de gerar uma superfície de curvatura média constante. Então Ω é caracterizada pela seguinte EDO:

$$-2H + \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} + \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha = 0. \quad (3.3)$$

Teorema 3.1. *Seja S uma superfície completa de rotação com curvatura média constante em $\mathbb{H}^3$ e seja Ω a sua curva geratriz. Então Ω é univocamente determinada, a menos de uma x -translação, pela seguinte integral primeira:*

$$J(1, H) = -H \sinh^2 y + \sinh y \cosh y \sin \alpha = \text{constante}. \quad (3.4)$$

Demonstração. Como Ω é a curva geratriz de uma superfície de rotação S com H constante, então Ω é caracterizada pela EDO

$$-2H + \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} + \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha = 0,$$

onde $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha$ e $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$. Colocando

$$J(1, H) = -H \sinh^2 y + \sinh y \cosh y \sin \alpha,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(J(1, H)) &= -2H \sinh y \cosh y \cos \alpha + \cosh^2 y \sin \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \sinh^2 y \sin \alpha \cos \alpha + \sinh y \cosh y \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \\ &= \sinh y \cosh y \cos \alpha \left[-2H + \frac{1}{\sinh y} \cosh y \sin \alpha + \frac{1}{\cosh y} \sinh y \sin \alpha + \frac{d\alpha}{ds} \right] = \\ &= \sinh y \cosh y \cos \alpha \left[-2H + \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} + \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{d}{ds}(J(1, H)) = 0$. Então concluímos que $J(1, H)$ é constante ao longo de qualquer curva integral Ω cuja EDO é dada por (3.3). Observemos, ainda, que se temos duas curvas Ω_1 e Ω_2 caracterizadas por esta integral primeira, então elas diferem apenas por uma x-translação. $\square$

3.4 A Generalização do Teorema de Delaunay em $\mathbb{H}^3$

Definição 3.4. *Seja F um ponto de $\mathbb{H}^2$ e fixemos uma geodésica α em $\mathbb{H}^2$. Nela escolhemos um ponto O para ser a origem do nosso sistema. Dizemos que F tem coordenadas*

polares (r, θ) se a distância de F a O é r e o ângulo entre α e a geodésica que une F a O é θ .

Suponha que γ seja uma curva em $\mathbb{H}_+^2$ dada como gráfico $r = r(\theta)$ no sistema de coordenadas polares (r, θ) . Se rolarmos γ ao longo de uma geodésica Γ de $\mathbb{H}_+^2$, então a origem do sistema de coordenadas polares preso a γ , F , descreve uma curva Ω . Seja Q o ponto de tangência da curva γ com a geodésica Γ . Suponha que k seja uma geodésica de referência que passa por F , onde θ é o ângulo entre k e a geodésica que une F a Q . Tomemos em F as direções $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$. Sejam α e β os ângulos entre Ω' e $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ e Ω' , respectivamente, medidos no sentido anti-horário, onde Ω' é o vetor tangente a Ω em F .

Seja ϕ o ângulo entre a geodésica que une F a Q e γ' , onde γ' é o vetor tangente a γ em Q . Seja ϕ' o ângulo entre a geodésica que une F a Q e a geodésica que une F a P , onde P é a projeção de F em Γ , que é única. Suponha que os parâmetros comprimento de arco de Ω e γ são s e ξ , respectivamente. Como $\Omega' = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha \\ \frac{dy}{ds} = \cos \alpha \end{cases}$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cosh y} \tan \alpha.$$

Figura 3.1: Curva rolando sobre uma geodésica no semi-plano superior

Conforme a proposição (1.3), temos válidas as seguintes relações no $\triangle QFP$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \phi = \frac{\tanh(x - \xi)}{\tanh r} \\ \sinh y = \sin \phi \sinh r \\ \cos \phi = \sin \phi' \cosh y \\ \cos \phi' = \frac{\tanh y}{\tanh r} \end{array} \right.$$

Observando que

$$\cot \phi' = \frac{\sinh y \cosh r}{\cos \phi \sinh r}$$

e

$$\cot \phi = \frac{\cos \phi \sinh r}{\sinh y},$$

obtemos:

$$\cot \phi \cot \phi' = \cosh r.$$

Desde que $\cosh r = \cosh(x - \xi) \cosh y$, obtemos por diferenciação:

$$\sinh r dr = \sinh(x - \xi) \cosh y (dx - d\xi) + \cosh(x - \xi) \sinh y dy.$$

Mas $\sinh(x - \xi) = \sin \phi' \sinh r$. Então:

$$dr = \sin \phi' \cosh y (dx - d\xi) + \cosh(x - \xi) \sin \phi dy.$$

Ou seja,

$$dr = -\cos \phi d\xi + \cos \phi dx + \cosh(x - \xi) \sin \phi dy.$$

De $\cos \phi = \frac{\sinh(x - \xi) \cosh r}{\cosh(x - \xi) \sinh r}$, obtemos:

$$\cos \phi dx + \cosh(x - \xi) \sin \phi dy = \frac{\cosh(x - \xi)}{\sinh r} \left[-\frac{\cosh r}{\cosh(x - \xi)} + \cosh y \right] = 0.$$

Logo,

$$dr = -\cos \phi d\xi.$$

Neste caso, temos válidas as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \cos \phi = \frac{\tanh(x - \xi)}{\tanh r} \\ (B) \quad \sinh y = \sin \phi \sinh r \\ (C) \quad dr = -\cos \phi d\xi \\ (D) \quad \cosh r = \cot \phi \cot \phi' \\ (E) \quad \cos \phi' = \frac{\tanh y}{\tanh r} \\ (F) \quad \cos \phi = \sin \phi' \cosh y \end{array} \right.$$

Diferenciando (A) e (B), obtemos;

$$(A') \quad -\sin \phi \, d\phi = \operatorname{sech}^2(x - \xi) \operatorname{coth} r (dx - d\xi) - \tanh(x - \xi) \operatorname{csch}^2 r \, dr$$

e

$$(B') \quad \cosh y \, dy = \cos \phi \sinh r \, d\phi + \sin \phi \cosh r \, dr.$$

Substituindo (A) em (A') e de (B'), temos:

$$\operatorname{sech}^2(x - \xi) \operatorname{coth} r = \operatorname{coth} r - \cos^2 \phi \tanh r$$

e

$$\tanh(x - \xi) \operatorname{csch}^2 r = \cos \phi \operatorname{sech} r \operatorname{csch} r.$$

Portanto,

$$(A'') \quad -\sin \phi \, d\phi = (\operatorname{coth} r - \cos^2 \phi \tanh r)(dx - d\xi) - \cos \phi \operatorname{sech} r \operatorname{csch} r \, dr$$

e

$$(B'') \quad \cos \phi \, d\phi = \cosh y \operatorname{csch} r \, dy - \sin \phi \operatorname{coth} r \, dr.$$

De (B'') temos:

$$d\phi = (\cosh y \operatorname{csch} r \, dy - \sin \phi \operatorname{coth} r \, dr) \frac{1}{\cos \phi},$$

que, substituindo em (A''), nos dá:

$$\begin{aligned} & (-\cos \phi \operatorname{sech} r \operatorname{csch} r \, dr + (\operatorname{coth} r - \tanh r \cos^2 \phi)(dx - d\xi)) \cos \phi + \\ & + (\operatorname{csch} r \cosh y \, dy - \sin \phi \operatorname{coth} r \, dr) \sin \phi = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando (C), observamos que

$$\begin{aligned} & -\cos^2 \phi \operatorname{sech} r \operatorname{csch} r - \sin^2 \phi \coth r + \coth r - \tanh r \cos^2 \phi = \\ & = \cos^2 \phi \coth r - \cos^2 \phi \left(\frac{\sinh^2 r + 1}{\sinh r \cosh r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Então a expressão (3.5) fica:

$$(\coth r - \tanh r \cos^2 \phi) dx \cos \phi + \operatorname{csch} r \cosh y dy \sin \phi = 0. \quad (3.6)$$

Usando que $\frac{dx}{dy} = \frac{\tan \alpha}{\cosh y}$, vemos que a expressão (3.6) fica

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\operatorname{csch} r \cosh y \sin \phi}{(\coth r - \tanh r \cos^2 \phi) \cos \phi}.$$

Daí,

$$\left(-\frac{\cosh^2 y \tan \phi}{\sinh r} \right) \left(\frac{1}{\frac{\cosh r}{\sinh r} - \frac{\sinh r}{\cosh r} \cos^2 \phi} \right) = \tan \alpha,$$

ou seja,

$$\cosh r = -\cot \phi \tan \alpha.$$

De (D) obtemos que $\tan \alpha = \cot \beta = -\cot \phi'$. Resumindo, $\phi' = -\beta$. De (E), temos:

$$\tanh r = \frac{\tanh y}{\cos \phi'}$$

e do fato que $\cos \phi' = \cos \beta = \sin \alpha$, obtemos:

$$\tanh r \sin \alpha = \tanh y. \quad (3.7)$$

Combinando (C) e (F), temos:

$$dr = -\sin \phi \cosh y d\xi = \sin \beta \cosh y d\xi = \cos \alpha \cosh y d\xi.$$

Derivando a expressão (3.7) com relação a s , obtemos:

$$\frac{1}{\cosh^2 r} \frac{dr}{ds} \sin \alpha + \tanh r \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\cosh^2 y} \frac{dy}{ds}.$$

Ou seja,

$$dr = \cosh^2 r \cot \alpha \left(\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} \right) ds. \quad (3.8)$$

Como $dr = \cos \alpha \cosh y d\xi$, temos:

$$d\xi = \cosh^2 r \csc \alpha \operatorname{sech} y \left(\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} \right) ds.$$

Tomando o sistema de coordenadas cilíndricas de $\mathbb{H}^3$ onde r é o raio, vemos que

$$d\xi^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

Logo,

$$\sinh^2 r d\theta^2 = d\xi^2 - dr^2 = \cosh^2 r \left[\cosh^2 r (\csc^2 \alpha \operatorname{sech}^2 y - \cot^2 \alpha) \left(\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 \right] ds^2$$

que, simplificando, fica

$$\sinh^2 r d\theta^2 = \cosh^2 r \left(\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 ds^2.$$

Ou seja,

$$d\theta = \frac{1}{\tanh r} \left(\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} \right) ds. \quad (3.9)$$

Proposição 3.10. *Seja $\mathbb{H}_2^+$ o plano de órbitas em $\mathbb{H}^3$ e sejam $F \in \mathbb{H}_2^+$ e (r, θ) o sistema de coordenadas polares centrado em F . Seja Γ uma geodésica de $\mathbb{H}^2$ e seja Ω o meridiano de uma superfície de rotação S , em torno de Γ , com curvatura média constante. Então existe, em $\mathbb{H}_2^+$, uma curva $\gamma_{a,b}$ de equação polar*

$$\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta},$$

com $b > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que Ω é a curva descrita por F quando $\gamma_{a,b}$ rola, sem deslizar, sobre Γ .

Demonstração. Se Ω é o meridiano de uma superfície de rotação S , então é curva geratriz desta superfície, que tem curvatura média constante. Logo, Ω é solução da equação

$$-2H + \frac{d\alpha}{ds} + \sinh y \frac{dx}{ds} + \frac{\cosh y}{\sinh y} \sin \alpha = 0,$$

onde $\frac{dx}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y}$ e $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$. Por (3.7), (3.8) e (3.9), obtemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \cosh r \sinh r \cot \alpha$$

ou

$$\frac{d}{d\theta}(\ln(\tanh r)) = \cot \alpha.$$

Da expressão (3.9), temos:

$$\tanh r d\theta = \operatorname{sech}^2 y ds - \tanh r d\alpha,$$

ou seja,

$$\tanh r \frac{d\alpha}{d\theta} = \operatorname{sech}^2 y \frac{ds}{d\theta} - \tanh r.$$

Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\tanh r}{\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds}}$$

, concluímos que

$$\tanh r \frac{d\alpha}{d\theta} = \tanh^2 r \frac{d\alpha}{ds} \left[\frac{1}{\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds}} \right].$$

Observando que $\operatorname{sech}^2 y = 1 - \tanh y \sin \alpha \tanh r$, obtemos:

$$\operatorname{sech}^2 y - \tanh r \frac{d\alpha}{ds} = 1 - \tanh r \left[\frac{d\alpha}{ds} + \tanh y \sin \alpha \right].$$

Resumindo,

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\tanh r \frac{d\alpha}{ds}}{1 - \tanh r \left(\frac{d\alpha}{ds} + \tanh y \sin \alpha \right)}.$$

Observando que $\sin \alpha = \frac{\tanh y}{\tanh r}$, temos que a EDO anterior fica:

$$\tanh r \left(\frac{d\alpha}{ds} + \tanh y \sin \alpha \right) = -(1 - 2H \tanh r)$$

ou

$$\tanh r \frac{d\alpha}{ds} = -(1 - 2H \tanh r + \tanh^2 r \sin^2 \alpha).$$

Combinando as relações obtidas acima, obtemos a seguinte EDO de $r = r(\theta)$, por diferenciação e por substituição:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (\ln(\tanh r)) = \left[1 + \left(\frac{d}{d\theta} (\ln \tanh r) \right)^2 \right] \frac{1 - 2H \tanh r + \tanh^2 r \sin^2 \alpha}{2 - 2H \tanh r}. \quad (3.10)$$

Vamos, agora, integrar explicitamente a EDO anterior por substituições convenientes de variáveis. Sejam

$$u = \ln \tanh r \quad e \quad v = \frac{du}{d\theta}.$$

Logo, $v = \cot \alpha$, pois $\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\ln \tanh r) = \cot \alpha$. Ainda:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (\ln \tanh r) = \frac{dv}{d\theta} = v \frac{dv}{du}.$$

Neste caso, a EDO (3.10) fica:

$$v \frac{dv}{du} = (1 + v^2) \left(\frac{1 - 2He^u + e^{2u} \sin^2 \alpha}{2 - 2He^u} \right) = \frac{(1 + v^2)(1 - 2He^u)}{2 - 2He^u} + \frac{e^{2u}}{2 - 2He^u}.$$

Observando que

$$\begin{aligned}\frac{2(1 - 2He^u)}{2 - 2He^u} &= 2 \left[\frac{(1 + v^2)(1 - 2He^u) - e^{2u} + 2He^{3u}}{(2 - 2He^u)(1 + v^2 - e^{2u})} \right] = \\ \frac{2}{1 + v^2 - e^{2u}} \left[\frac{(1 + v^2)(1 - 2He^u)}{2 - 2He^u} + \frac{e^{2u}}{2 - 2He^u} - e^{2u} \right] &= \\ \frac{2}{1 + v^2 - e^{2u}} \left[v \frac{dv}{du} - e^{2u} \right] &= \frac{d}{du}(\ln(1 + v^2 - e^{2u})),\end{aligned}$$

obtemos:

$$\frac{d}{du}(\ln(1 + v^2 - e^{2u})) = \frac{2(1 - 2He^u)}{2 - 2He^u}.$$

Integrando ambos os lados da equação acima:

$$\ln(1 + v^2 - e^{2u}) = 2 \int \frac{1 - 2He^u}{2 - 2He^u} du.$$

Se $H \neq 0$, fazemos $x = 1 - 2He^u$. Daí, $dx = -2He^u du = (x - 1)du$. Logo,

$$2 \int \frac{1 - 2He^u}{2 - 2He^u} du = \int \frac{2x}{(x - 1)(x + 1)} dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1} du = u + \ln | -1 + He^{2u} | + k,$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\ln(1 + v^2 - e^{2u}) = u + \ln | -1 + He^{2u} | + k.$$

Daí,

$$1 + v^2 - e^{2u} = \bar{a}e^u | -1 + He^u |,$$

onde $\bar{a} = e^k > 0$. Então,

$$v^2 = \bar{a}e^u | -1 + He^u | + e^{2u} - 1.$$

Assim,

$$v =_{\pm}^+ (\bar{a}e^u | -1 + He^u | + e^{2u} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que

$$v = \frac{d}{d\theta}(\ln \tanh r) = \frac{1}{\tanh r} \frac{d}{d\theta}(\tanh r),$$

temos que:

$$v =_{-}^{+} (\bar{a} \tanh r| - 1 + H \tanh r| + \tanh^2 r - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $w = \frac{1}{\tanh r}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= -\frac{1}{\tanh^2 r} \frac{d}{d\theta}(\tanh r) =_{-}^{+} \frac{1}{\tanh r} (\bar{a} \tanh r| - 1 + H \tanh r| + \tanh^2 r - 1)^{\frac{1}{2}} = \\ &=_{-}^{+} \left[\frac{1}{\tanh^2 r} (\bar{a} \tanh r| - 1 + H \tanh r| + \tanh^2 r - 1) \right]^{\frac{1}{2}} =_{-}^{+} \left[\bar{a} w |1 - \frac{H}{w}| + 1 - w^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\frac{dw}{d\theta} =_{-}^{+} (\bar{a} |w - H| - (w^2 - 1))^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$d\theta =_{-}^{+} [\bar{a} |w - H| - (w^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}} dw,$$

e

$$\theta =_{-}^{+} \int b(w)^{-\frac{1}{2}} dw,$$

onde $w = \frac{1}{\tanh r}$ e $b(w) = \bar{a} |w - H| - (w^2 - 1)$. Suponhamos que $w - H \geq 0$. Neste caso,

$|w - H| = w - H$ e $b(w) = -w^2 + \bar{a}w - \bar{a}H + 1$. Então:

$$\theta =_{-}^{+} \int \frac{dw}{\sqrt{-(w - \frac{\bar{a}}{2})^2 + (\frac{\bar{a}^2}{4} - \bar{a}H + 1)}} =_{-}^{+} \arccos \left[\frac{w - \frac{\bar{a}}{2}}{\sqrt{\frac{\bar{a}^2}{4} - \bar{a}H + 1}} \right].$$

Isto é,

$$\cos \theta = \frac{w - \frac{\bar{a}}{2}}{\sqrt{\frac{\bar{a}^2}{4} - \bar{a}H + 1}}.$$

Se $a = \frac{\bar{a}}{2}$ e $b = \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{4} - \bar{a}H + 1}$, temos:

$$\frac{1}{\tanh r} = w = b \cos \theta + a,$$

ou seja,

$$\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}.$$

Analogamente, se supusermos $w - H < 0$, obtemos o resultado anterior.

Se $H = 0$, temos:

$$\ln(1 + v^2 - e^{2u}) = \int du = u + \bar{k},$$

onde $\bar{k} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$e^{u+\bar{k}} = 1 + v^2 - e^{2u}$$

e

$$v = \pm \sqrt{ke^u + e^{2u} - 1},$$

onde $k = e^{\bar{k}} > 0$. Do mesmo modo como foi feito anteriormente, obtemos

$$\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}.$$

Então $r = r(\theta)$ e, pelo que foi feito antes desta proposição, se rolarmos, sem deslizar, uma curva $\gamma_{a,b}$, que é gráfico em coordenadas polares (r, θ) de

$$\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta},$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, ao longo de uma geodésica Γ de M_2^+ , o traço da origem F do sistema de coordenadas polares é exatamente a curva Ω dada. □

3.5 As Curvas de Equação $\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}$

Para melhor estudarmos estas curvas vamos utilizar a seguinte

Definição 3.5. *Se γ é um raio geodésico, chama-se função de Buseman calculada em x a função dada por:*

$$b_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t),$$

onde este limite existe e é finito. A função de Buseman centrada em ν que se anula em F é aquela em que o raio geodésico γ mencionado acima une F a ν , onde $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e $\gamma(0) = F$.

Esta função é usada para definir parábola sem levar em consideração sua curva geratriz.

Sejam r e θ as coordenadas polares de um ponto p de $\mathbb{H}^2$, centradas em F e tomadas com relação a uma geodésica de referência k . Temos que r é a distância de F a p e θ é o ângulo entre a geodésica que une F a p e a geodésica k . Adotaremos as seguintes notações:

1. Se $E \in \mathbb{H}^2$, denotemos por d_E a função definida por $d_E(x) = d(E, x)$, onde $x \in \mathbb{H}^2$ e d é a distância hiperbólica;
2. Se $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, denotamos por b_ν a função de Buseman centrada em ν que se anula em F ;
3. Conforme já definimos em (1.14), se g é uma geodésica orientada pelo campo normal

η , denotamos por d_g a função definida por:

$$d_g(x) = \begin{cases} d(g(u), x) & \text{se } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \text{ com } r \geq 0 \\ -d(g(u), x) & \text{se } x = \exp_{g(u)}(r\eta(u)), \text{ com } r < 0 \end{cases}$$

Chamamos de função "tipo distância" às funções ${}^+d_E$, com $E \in \mathbb{H}^2$, ${}^+b_\nu$, com $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e d_g , com g geodésica orientada de $\mathbb{H}^2$.

Seja $\gamma_{a,b}$ a curva de equação polar $\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Daqui por diante, suporemos $1 < a + b$, pois caso contrário teríamos $\tanh r \geq 1$ e, então, $\gamma_{a,b}$ é vazia.

Faremos o estudo destas curvas dividindo em três casos:

1. Se $1 < a - b$:

$$1 < a - b \leq a + b \cos \theta,$$

ou seja,

$$\frac{1-a}{b} < \cos \theta.$$

Se $\theta_1 = \arccos\left(\frac{1-a}{b}\right)$, então $\theta \in]-\theta_1, \theta_1[$. Por outro lado, como $\tanh r \neq 1$,

$$a + b \cos \theta \leq 1 < a + b,$$

ou seja,

$$\cos \theta \leq \frac{1-a}{b}$$

e $\theta \in [-\theta_1, \theta_1]$. Assim, $\theta \in \mathbb{R}$ e $r(\theta) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{a + b \cos \theta}\right)$ é periódica de período 2π . Neste caso, basta estudar o que ocorre para $\theta \in [0, 2\pi]$ e observamos, então, que a curva $\gamma_{a,b}$ é fechada.

2. $1 < b - a$:

$$1 < -a + b \leq -a - b \cos \theta,$$

ou seja,

$$\frac{-(1+a)}{b} > \cos \theta.$$

Se $\theta_2 = \arccos\left(\frac{-1-a}{b}\right)$, temos que $\theta \in]\theta_2, 2\pi - \theta_2[$. Por outro lado,

$$-a - b \cos \theta \leq -a - b < -1,$$

isto é

$$\cos \theta > \frac{1-a}{b}.$$

Se $\theta_1 = \arccos\left(\frac{1-a}{b}\right)$, então $\theta \in]-\theta_1, \theta_1[$. Resumindo, $\theta \in]-\theta_1, \theta_1[\cup]\theta_2, 2\pi - \theta_2[$.

Observemos que:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm \theta_1} r(\theta) = +\infty$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm \theta_2} r(\theta) = -\infty.$$

3. Se $1 \geq a - b$ ou se $1 \geq b - a$: como $a - b \leq 1 < a + b$ e $b - a \leq 1 < a + b$, então, em ambos os casos, temos:

$$-a - b \cos \theta \leq -a - b < -1,$$

ou seja,

$$\cos \theta > \frac{1-a}{b}.$$

Se $\theta_1 = \arccos\left(\frac{1-a}{b}\right)$, então $\theta \in]-\theta_1, \theta_1[$. Observemos que $\lim_{\theta \rightarrow \pm \theta_1} r(\theta) = +\infty$.

Observação 3.2. Notemos que as curvas $\gamma_{a,b}$ têm propriedades análogas às cônicas euclidianas. Para todo θ , seja $u_\theta \in T_{\gamma_{a,b}(\theta)}\mathbb{H}^2$ o simétrico de $-\frac{\partial}{\partial r}(\theta, r(\theta))$, com relação ao vetor $\dot{\gamma}_{a,b}(\theta)$ e seja $g_\theta(s) = \exp_{\gamma_{a,b}}(su_\theta)$. A geodésica g_θ é obtida por reflexão, com relação à normal a $\gamma_{a,b}$ em $\gamma_{a,b}(\theta)$, da geodésica que passa por F .

Lema 3.3. A equação polar das geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são da forma

$$\tanh r = \frac{q}{\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Demonstração. Como a métrica em coordenadas polares de $\mathbb{H}^2$ é

$$d\sigma^2 = dr^2 + \sinh r \, d\theta^2,$$

concluimos que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1, \quad F = 0 \quad e \quad G = \sinh^2 r.$$

Daí, obtemos os símbolos de Christoffel de $\mathbb{H}^2$. Neste caso, temos o seguinte sistema de equações diferenciais para as geodésicas da forma $\gamma(\theta(t)) = (r(t), \theta(t))$ de $\mathbb{H}^2$, em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \sinh r \cosh r \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = -2\coth r \dot{r} \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.11)$$

Vamos, agora, mostrar que $\tanh r = \frac{q}{\cos(\theta - \theta_0)}$ é solução de (3.11).

Fazendo $r(t) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{q}{\cos(\theta(t) - \theta_0)} \right)$, obtemos:

$$\dot{r} = \frac{q \sin \theta}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \dot{\theta} \quad (3.12)$$

e

$$\ddot{r} = \frac{q \cos(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \dot{\theta}^2 + \frac{2q \sin^2(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0)}{(\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2)^2} \dot{\theta}^2 + \frac{q \sin(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \ddot{\theta}.$$

Observando que $\sinh r \cosh r = \frac{q \cos(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2}$ e substituindo a primeira equação de (3.11) na expressão acima, obtemos:

$$\sinh r \cosh r \dot{\theta}^2 = \left[\sinh r \cosh r + \frac{2 \sin^2(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \right] \dot{\theta}^2 + \frac{q \sin(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \ddot{\theta}.$$

Logo,

$$\ddot{\theta} = -\frac{2q \sin^2(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0)}{\cos^2(\theta - \theta_0) - q^2} \dot{\theta}^2,$$

ou seja,

$$\ddot{\theta} = 2 \sinh r \cosh r \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{q}.$$

Usando (3.12), obtemos

$$\ddot{\theta} = -2 \coth r \dot{r} \dot{\theta},$$

o que mostra que $\tanh r = \frac{q}{\cos(\theta - \theta_0)}$ é solução de (3.11). □

Lema 3.4. *Sejam $(r, \theta) \in \mathbb{H}^2$ e $X = x \frac{\partial}{\partial r} + y \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_{(r, \theta)} \mathbb{H}^2$, com $y \neq 0$. Sejam $(\rho(\alpha), \alpha)$ as coordenadas da geodésica que passa por (r, θ) na direção X . Então temos:*

$$\tanh \rho = \frac{q}{\cos(\alpha - \alpha_0)},$$

onde

$$q = \frac{\tanh^2 r}{\sqrt{\tanh^2 r + \frac{x^2}{y^2}(1 - \tanh^2 r)^2}}$$

e

$$\alpha_0 = \theta - \arctan \left(\frac{x(1 - \tanh^2 r)}{y \tanh r} \right).$$

Demonstração. A equação polar da geodésica de coordenadas $(\rho(\alpha), \alpha)$ é $\tanh \rho = \frac{q}{\cos(\alpha - \alpha_0)}$ pelo lema anterior. Como ela passa pelo ponto (r, θ) na direção X deve satisfazer

$$\tanh r = \frac{q}{\cos(\theta - \alpha_0)}.$$

Escrevendo $f : U \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto de $\mathbb{H}^2$, temos que f é o gráfico da geodésica acima quando $f = 0$. Neste caso, devemos ter;

$$x \frac{\partial f}{\partial \rho}(r, \theta) + y \frac{\partial f}{\partial \alpha}(r, \theta) = 0.$$

Ou seja,

$$x \operatorname{sech}^2 r - y \tan(\theta - \alpha_0) q \sec(\theta - \alpha_0) = 0.$$

Logo,

$$\tan(\theta - \alpha_0) = \frac{x \operatorname{sech}^2 r}{y \tanh r} = \frac{x(1 - \tanh^2 r)}{y \tanh r} \quad (3.13)$$

isto é:

$$\alpha_0 = \theta - \arctan \left(\frac{x(1 - \tanh^2 r)}{y \tanh r} \right).$$

De (3.13), obtemos:

$$\sin(\theta - \alpha_0) = \frac{x \operatorname{sech}^2 r}{y \tanh r} \cos(\theta - \alpha_0),$$

que nos dá:

$$\left(\frac{x^2 \operatorname{sech}^4 r}{y^2 \tanh^2 r} + 1 \right) \cos^2(\theta - \alpha_0) = 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\cos(\theta - \alpha_0)} = \sqrt{\frac{x^2 \operatorname{sech}^4 r + y^2 \tanh^2 r}{y^2 \tanh r}}.$$

Então

$$\tanh r = \frac{q \sqrt{x^2 \operatorname{sech}^4 r + y^2 \tanh^2 r}}{y \tanh r}.$$

Daí,

$$q = \frac{y \tanh^2 r}{\sqrt{x^2 \operatorname{sech}^4 r + y^2 \tanh^2 r}} = \frac{\tanh^2 r}{\sqrt{\tanh^2 r + \frac{x^2}{y^2}(1 - \tanh^2 r)}}.$$

□

Lema 3.5. As geodésicas g_θ têm coordenadas polares $(\rho(\alpha), \alpha)$ verificando

$$\tanh \rho(\alpha) = \frac{q_\theta}{\cos(\alpha - \alpha_\theta)},$$

com

$$q_\theta = \frac{2b \sin \theta}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \theta (a + b \cos \theta)^2 + (b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1)^2}}$$

e

$$\alpha_\theta = \theta - \arctan \left(\frac{b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1}{2b \sin \theta (a + \cos \theta)} \right).$$

Demonstração. Por construção, $\|u_\theta\| = \left\| -\frac{\partial}{\partial r} \right\| = 1$.

Fazendo $u_\theta = x \frac{\partial}{\partial r} + y \frac{\partial}{\partial \theta}$, temos:

$$x^2 + \sinh^2 r y^2 = 1, \quad (3.14)$$

ou seja,

$$x^2 - 1 = -\frac{y^2}{(a + b \cos \theta)^2 - 1},$$

$$\text{pois } \tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}.$$

Por outro lado,

$$u_\theta + \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) = \epsilon \dot{\gamma},$$

onde

$$\dot{\gamma} = \operatorname{sech}^2 r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{b \sin \theta}{(a + b \cos \theta)^2} [(a + b \cos \theta)^2 - 1] \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Então

$$x - 1 = \frac{\epsilon [(a + b \cos \theta)^2 - 1]}{(a + b \cos \theta)^2}$$

e

$$y = -\frac{\epsilon[(a + b \cos \theta)^2 - 1]}{(a + b \cos \theta)^2}.$$

Dai

$$x + 1 = \frac{2(a + b \cos \theta)^2 + \epsilon[(a + b \cos \theta)^2 - 1]}{(a + b \cos \theta)^2}.$$

Substituindo em (3.14), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon[(a + b \cos \theta)^2 - 1](2(a + b \cos \theta)^2 + \epsilon[(a + b \cos \theta)^2 - 1])}{(a + b \cos \theta)^4} = \\ & = -\frac{\epsilon^2[(a + b \cos \theta)^2 - 1]^2}{[(a + b \cos \theta)^2 - 1](a + b \cos \theta)^4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\epsilon[(a + b \cos \theta)^2 - 1] + 2(a + b \cos \theta)^2 = -\epsilon b^2 \sin^2 \theta,$$

que nos dá

$$\epsilon = \frac{-2(a + b \cos \theta)^2}{a^2 + 2ab + b^2 - 1}.$$

Portanto,

$$x = \frac{b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1}{a^2 + 2ab + b^2 - 1}$$

e

$$y = \frac{2b \sin \theta [(a + b \cos \theta)^2 - 1]}{a^2 + 2ab + b^2 - 1}.$$

Substituindo as expressões de x e y no lema anterior, obtemos o resultado desejado.

□

A família de geodésicas g_θ associada à $\gamma_{a,b}$ tem as seguintes propriedades:

Proposição 3.11. 1. Se $1 < a - b$, todas as geodésicas g_θ são concorrentes num ponto

$$\tilde{F} = \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{2b}{a^2 - b^2 - 1} \right), \pi \right) \text{ e } \dot{g}_\theta(s) = \nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s)).$$

2. Se $1 < b - a$, todas as geodésicas g_θ são concorrentes num ponto

$$\tilde{F} = \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{2b}{b^2 + 1 - a^2} \right), 0 \right) \text{ e } \dot{g}_\theta(s) = \nabla(-d_{\tilde{F}})(g_\theta(s)).$$

3. Se $1 = a - b$, para todo θ , g_θ tem um ponto no infinito na direção π , com

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} g_\theta(s) = \pi \text{ e } \dot{g}_\theta(s) = \nabla b_\pi(g_\theta(s)).$$

4. Se $1 = b - a$, para todo θ , g_θ tem um ponto no infinito na direção 0, com

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g_\theta(s) = 0 \text{ e } \dot{g}_\theta(s) = \nabla(-b_0)g_\theta(s).$$

5. Se $1 > a - b$ e $1 > b - a$, para todo θ , g_θ é ortogonal à geodésica g de equação

$$\text{polar } \tanh \rho(\alpha) = \frac{A}{\cos \alpha}, \text{ onde } A = \frac{b^2 + 1 - a^2}{2b} \text{ e } \dot{g}_\theta(s) = \nabla d_g(g_\theta(s)), \text{ para uma orientação adequada de } g.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, as g_θ têm coordenadas polares $(\rho(\alpha), \alpha)$ satisfazendo

$$\tanh \rho(\alpha) = \frac{q_\theta}{\cos(\alpha - \alpha_\theta)},$$

onde q_θ e α_θ são dados acima.

Se $1 < a - b$, já vimos que $\theta \in \mathbb{R}$. Neste caso, se $\alpha = \pi$, temos:

$$\tanh \rho_\theta = \frac{q_\theta}{\cos(\pi - \alpha_\theta)} = -\frac{q_\theta}{\cos \alpha_\theta},$$

com

$$\cos \alpha_\theta = \cos \left(\theta - \arctan \left(\frac{b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1}{2b \sin \theta (a + b \cos \theta)} \right) \right),$$

ou seja,

$$\cos \alpha_\theta = \frac{2b \sin \theta \cos \theta (a + b \cos \theta) + \sin \theta [b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1]}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \theta (a + b \cos \theta)^2 + (b^2 \sin^2 \theta - (a + b \cos \theta)^2 + 1)^2}}.$$

Logo,

$$\tanh \rho_\theta = \frac{2b}{a^2 - b^2 - 1}.$$

Ou seja,

$$\rho_\theta = \operatorname{arctanh} \left(\frac{2b}{a^2 - b^2 - 1} \right), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, g_θ passa pelo ponto $\tilde{F} = (\operatorname{arctanh}(\frac{2b}{a^2 - b^2 - 1}), \pi)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Vamos, agora, mostrar que $\nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s)) = \dot{g}_\theta(s)$. Seja s_0 tal que $g_\theta(s_0) = \tilde{F}$. Como g_θ está parametrizada por comprimento de arco, temos

$$d_{\tilde{F}}(g_\theta(s)) = s - s_0$$

e

$$\frac{d}{ds}(d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))) = \frac{d}{ds}(s - s_0),$$

ou seja,

$$\langle \nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s)), \dot{g}_\theta(s) \rangle = 1.$$

Basta mostrarmos que $\nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))$ é paralelo a $\dot{g}_\theta(s)$. Consideremos o círculo de centro $\tilde{F}$ e raio $d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))$. Pelo lema de Gauss, a fronteira deste círculo é normal às geodésicas radiais. Em particular, é normal a g_θ em $g_\theta(s)$. Por outro lado, esta é a curva de nível da função $d_{\tilde{F}}$ em $g_\theta(s)$. Neste caso, temos que a curva é ortogonal a $\nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))$. Portanto, $\nabla d_{\tilde{F}}(g_\theta(s))$ é paralelo a $\dot{g}_\theta(s)$ e, então demonstramos o resultado.

Os outros casos são análogos.

□

Corolário 3.1. *O valor da função $d_F + \delta$ é constante ao longo de cada componente conexa de $\gamma_{a,b}$, onde δ é a seguinte função:*

1. se $1 < a - b$, $\delta = d_{\bar{F}}$;

2. se $1 < b - a$, $\delta = -d_{\bar{F}}$;

3. se $1 = a - b$, $\delta = b_\pi$;

4. se $1 = b - a$, $\delta = -b_0$;

5. se $1 > a - b$ ou $1 > b - a$, $\delta = d_g$.

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que $\dot{g}_\theta(s) = \nabla \delta(g_\theta(s))$, onde δ é a função dada na hipótese. Observando que $g_\theta(0) = \gamma_{a,b}(\theta)$, vemos que $\nabla \delta(\gamma_{a,b}(\theta)) = \dot{g}_\theta(0)$. Como, pela construção de u_θ , $\dot{g}_\theta(0) = u_\theta$, obtemos

$$\nabla \delta(\gamma_{a,b}(\theta)) = u_\theta.$$

Assim, $\nabla d_F(\gamma_{a,b}(\theta)) = \frac{\partial}{\partial r}(\gamma_{a,b}(\theta))$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(d_F(\gamma_{a,b}(\theta)) + \delta(\gamma_{a,b}(\theta))) &= \langle \dot{\gamma}_{a,b}(\theta), \nabla d_F(\gamma_{a,b}(\theta)) + \nabla \delta(\gamma_{a,b}(\theta)) \rangle = \\ &= \left\langle \dot{\gamma}_{a,b}(\theta), \frac{\partial}{\partial r}(\gamma_{a,b}(\theta)) + u_\theta \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Concluindo,

$$\frac{d}{d\theta}(d_F(\gamma_{a,b}(\theta)) + \delta(\gamma_{a,b}(\theta))) = 0,$$

ou seja, $d_F + \delta$ é constante ao longo de cada componente conexa de $\gamma_{a,b}$.

□

Proposição 3.12. A curva $\gamma_{a,b}$ de equação polar $\tanh r(\theta) = \frac{1}{a + b \cos \theta}$, com $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, tem as seguintes propriedades focais:

1. se $1 < a - b$, então $\gamma_{a,b}$ é uma elipse;
2. se $1 < b - a$, então $\gamma_{a,b}$ é uma hipérbole;
3. se $1 = a - b$ ou $1 = b - a$, então $\gamma_{a,b}$ é uma parábola;
4. se $1 > a - b$ ou $1 > b - a$, então $\gamma_{a,b}$ é uma parábola generalizada.

Demonstração. Pelo corolário (3.1), temos:

1. se $1 < a - b$, então $\delta = d_{\tilde{F}}$, com $\tilde{F} \in \mathbb{H}^2$, e $d_F + d_{\tilde{F}} = \mathfrak{a}$ ao longo de $\gamma_{a,b}$. Ou seja, $\gamma_{a,b}$ é uma elipse.
2. Se $1 < b - a$, então $\delta = -d_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in \mathbb{H}^2$, e $d_F - d_{\tilde{F}} = \mathfrak{a}$ ao longo de $\gamma_{a,b}$. Logo, $\gamma_{a,b}$ é uma hipérbole.
3. Se $1 = a - b$ ou $1 = b - a$, então $\delta = \pm b_\nu$, com $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, onde b_ν é a função de Buseman centrada em ν que se anula em F . Portanto, $d_F + b_\nu = \mathfrak{a}$ ou $d_F - b_\nu = \mathfrak{a}$ ao longo de $\gamma_{a,b}$. Observando que a parábola euclidiana $y^2 = 2px$ pode ser definida como o conjunto dos pontos X que satisfazem

$$d(F, X) + \lim_{t \rightarrow \infty} (d(X, \gamma(t)) - t) = p,$$

onde $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e $\gamma(t) = (\frac{p}{2} + t, 0)$ (analogamente, $y^2 = -2px$ é o conjunto dos pontos X que satisfazem $d(F, X) - \lim_{t \rightarrow \infty} (d(X, \gamma(t)) - t) = p$), concluímos que se $d_F + b_\nu = \mathfrak{a}$ ou $d_F - b_\nu = \mathfrak{a}$ ao longo de $\gamma_{a,b}$, então esta curva é uma parábola.

4. Se $1 > a - b$ ou $1 > b - a$, então $\delta = d_g$, onde g é uma geodésica orientada de $\mathbb{H}^2$, e $d_F + d_g = \mathfrak{a}$ ao longo de $\gamma_{a,b}$. Neste caso, denominamos esta curva por parábola generalizada.

□

Proposição 3.13. *Seja $F \in \mathbb{H}^2$ e seja γ uma curva conexa verificando $d_F + \delta = \mathfrak{a}$ ao longo de γ , onde δ é uma função do tipo distância. Então existem $a, b > 0$ tais que, para todo $m \in \gamma$, as coordenadas polares de m centradas em F têm a forma $(r(\theta), \theta)$, com $\tanh r(\theta) = \frac{1}{a + b \cos \theta}$.*

Demonstração. Segue de cálculos trigonométricos no plano hiperbólico.

□

Observação 3.3. Como $d_F + \delta$ é constante ao longo de γ , então sua derivada é nula ao longo de γ . Mas

$$\frac{d}{d\theta}(d_F + \delta)(\gamma(\theta)) = \langle \dot{\gamma}(\theta), \nabla d_F(\gamma(\theta)) + \nabla \delta(\gamma(\theta)) \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \dot{\gamma}(\theta), \frac{\partial}{\partial r}(\gamma(\theta)) + \nabla \delta(\gamma(\theta)) \rangle = 0.$$

Daí, concluímos que $\frac{\partial}{\partial r}(\gamma(\theta)) + \nabla \delta(\gamma(\theta))$ está na direção normal a γ em $\gamma(\theta)$, $\forall \theta$. Logo, $\nabla \delta(\gamma(\theta))$ é obtido por reflexão da direção $\frac{\partial}{\partial r}(\gamma(\theta))$ em relação à direção $\dot{\gamma}(\theta)$.

No teorema a seguir, rolar sem deslizar tem o significado da seção 3.2.

Teorema de Delaunay: *Sejam $F \in \mathbb{H}_+^2$ e γ uma curva conexa de $\mathbb{H}_+^2$ tal que $d_F + \delta = \alpha$ ao longo de γ , onde δ é uma função do tipo distância. Seja Ω a trajetória de F quando γ rola, sem deslizar, sobre uma geodésica Γ de $\mathbb{H}^2$. A curva Ω satisfaz a equação*

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \text{constante},$$

onde s é o parâmetro comprimento de arco da curva Ω , com $\Omega(s) = (x(s), y(s))$ em relação a Γ . Em particular, ela gera uma superfície de rotação com curvatura média constante. Além disto, o valor da curvatura média H verifica:

1. *se $\delta = \pm d_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in \mathbb{H}_+^2$ (γ é uma elipse ou uma hipérbole), então $H = \coth|\alpha| > 1$;*
2. *se $\delta = \pm b_\nu$, $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}_+^2$ (γ é uma parábola), então $H = 1$;*
3. *se $\delta = d_g$, onde g é uma geodésica orientada de $\mathbb{H}_+^2$ (γ é uma parábola generalizada), então $H = \tanh|\alpha| < 1$.*

Demonstração. Pela proposição (3.13), sabemos que γ tem equação polar $\tanh r = \frac{1}{a + b \cos \theta}$, com F sendo a origem do sistema de coordenadas polares (r, θ) preso a γ . Nas figuras que se seguem temos representadas as imagens de γ , em $\mathbb{H}^2$, pela isometria Φ_s do movimento plano sobre o plano hiperbólico. Denotemos por P a projeção de F sobre Γ , por Q o ponto de contato entre γ e Γ e por h a geodésica que é a linha de gradiente de δ que passa por Q .

Dividiremos a nossa demonstração em três casos: $\delta = d_{\tilde{F}}$, $\delta = b_\nu$ e $\delta = d_g$. Os outros três casos ($\delta = -d_{\tilde{F}}$, $\delta = -b_\nu$ e $\delta = -d_g$) são análogos aos anteriores, respectivamente, trocando somas por diferenças nos lugares convenientes.

1. Suponhamos $\delta = d_{\tilde{F}}$, com $\tilde{F} \in \mathbb{H}_+^2$. Neste caso, γ é uma elipse e tomamos F e $\tilde{F}$ como sendo os focos desta elipse. Seja $\tilde{P}$ a projeção de $\tilde{F}$ sobre Γ . Por hipótese,

Figura 3.2: Elipse no semi-plano superior

$d_F + \delta = a$ ao longo de γ e, pela observação (3.3), a linha de gradiente de δ passando por $Q = \gamma(\theta)$ é obtida por reflexão da geodésica QF em relação à tangente a γ em $\gamma(\theta)$. Neste caso, o ângulo que a geodésica h forma com Γ é o mesmo que a geodésica QF forma com Γ .

No triângulo QFP temos, pela proposição (1.3):

$$\sinh y = \sin \phi \sinh QF \quad (3.15)$$

e

$$\cosh QF = \cosh y \cosh QP.$$

Sendo

$$\cosh QP = \frac{\cos \beta}{\sin \phi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi},$$

segue que

$$\cosh QF = \cosh y \frac{\sin \alpha}{\sin \phi}.$$

De

$$\cosh^2 y \frac{1}{\cosh y} \sin \alpha = \sin \phi \cosh QF$$

obtemos:

$$\cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \sin \phi \cosh QF. \quad (3.16)$$

No triângulo $Q\tilde{F}\tilde{P}$ temos:

$$\sinh \tilde{y} = \sin \phi \sinh Q\tilde{F}, \quad (3.17)$$

também pela proposição (1.3). Como $d_F + d_{\tilde{F}} = \mathfrak{a}$, temos que

$$d_F(Q) + d_{\tilde{F}}(Q) = QF + Q\tilde{F} = \mathfrak{a} \text{ e}$$

$$\cosh \mathfrak{a} = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} + \sinh QF \sinh Q\tilde{F} \quad (3.18)$$

e

$$\sinh \mathfrak{a} = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} + \sinh QF \cosh Q\tilde{F}. \quad (3.19)$$

Se $d(F, \tilde{F}) = \mathfrak{c}$, temos:

$$\cosh \mathfrak{c} = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} - \sinh QF \sinh Q\tilde{F} \cos(\pi - 2\phi), \quad (3.20)$$

conforme a expressão (1.11). Fazendo a diferença de (3.18) e (3.20), obtemos:

$$\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c} = \sinh QF \sinh Q\tilde{F}(2 \sin^2 \phi).$$

Pelas expressões (3.15) e (3.17), temos:

$$\frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} = \sinh y \sinh \tilde{y}. \quad (3.21)$$

Somando (3.18) e (3.20), obtemos:

$$\frac{\cosh \mathfrak{a} + \cosh \mathfrak{c}}{2} = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} + \sinh QF \sinh Q\tilde{F} \cos^2 \phi.$$

De (3.15), (3.17) e (3.21), temos:

$$\sinh QF \sinh Q\tilde{F} = \frac{\sinh y \sinh \tilde{y}}{\sin^2 \phi} = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi}.$$

Resumindo,

$$\cosh QF \cosh Q\tilde{F} = \frac{\cosh \mathfrak{a} + \cosh \mathfrak{c}}{2} - \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi. \quad (3.22)$$

Multiplicando, agora, (3.19) e (3.16) membro a membro, temos:

$$\sinh \mathfrak{a} \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh^2 QF \sinh \tilde{y} + \cosh QF \cosh Q\tilde{F} \sinh y,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sinh \mathfrak{a} \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} &= \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} + \\ &+ \sinh^2 y \left(\frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} + \cosh QF \cosh Q\tilde{F} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

De (3.22) e (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sinh \mathfrak{a} \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} + \\
& + \sinh^2 y \left(\frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} + \frac{\cosh \mathfrak{a} + \cosh \mathfrak{c}}{2} - \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi \right) = \\
& = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \left(\frac{\cosh \mathfrak{a} + \cosh \mathfrak{c}}{2} + \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} \right) = \\
& = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \cosh \mathfrak{a},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sinh \mathfrak{a} \sinh y \frac{dx}{ds} - \cosh \mathfrak{a} \sinh^2 y = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2}.$$

Resumindo,

$$-\coth \mathfrak{a} \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sinh \mathfrak{a}}.$$

Então Ω verifica uma equação do tipo

$$-H \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \text{constante},$$

donde concluímos que $H = \coth |\mathfrak{a}| > 1$. Portanto, se rolarmos uma elipse, sem deslizar, sobre uma geodésica Γ e se a curva descrita por um de seus focos é Ω , então a superfície obtida pela rotação de Ω em torno de Γ tem curvatura média constante $H > 1$.

2. Seja $\delta = b_\nu$, onde $\nu \in \partial_\infty \mathbb{H}_+^2$. Façamos a construção como no caso anterior, mas supondo que γ seja uma parábola. Neste caso, temos a seguinte figura:

Pela proposição (1.3), no triângulo QPF temos

Figura 3.3: Parábola no semi-plano superior

$$\sinh y = \sin \phi \sinh QF. \quad (3.24)$$

Pela expressão (1.13) aplicada ao triângulo assintótico $Q\tilde{P}\nu$, temos:

$$e^{\tilde{y}} = e^{b_\theta(Q)} \sin \phi. \quad (3.25)$$

Como no caso anterior, de $\frac{dx}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y}$, obtemos:

$$\cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh QF \sin \phi. \quad (3.26)$$

De $d_F + b_\nu = \mathfrak{a}$, temos:

$$e^{\mathfrak{a}} = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF + e^{b_\theta(Q)} \sinh QF. \quad (3.27)$$

Pela expressão (1.12), obtemos:

$$e^{b_\theta(F)} = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF - e^{b_\theta(Q)} \sinh QF \cos(\pi - 2\phi),$$

que, do fato de $b_\theta(F) = 0$, nos dá:

$$1 = e^{b_\theta(Q)} \cosh QF - e^{b_\theta(Q)} \sinh QF \cos(\pi - 2\phi). \quad (3.28)$$

Subtraindo (3.28) de (3.27):

$$e^{\mathfrak{a}} - 1 = e^{b_\theta(Q)} \sinh QF (1 + \cos(\pi - 2\phi)) = 2e^{b_\theta(Q)} \sinh QF \sin^2 \phi,$$

ou seja,

$$\frac{e^{\mathfrak{a}} - 1}{2} = e^{b_\theta(Q)} \sinh y \sin \phi.$$

Resumindo,

$$\frac{e^{\mathfrak{a}} - 1}{2} = e^{\tilde{y}} \sinh y. \quad (3.29)$$

Somando (3.27) e (3.28):

$$\begin{aligned} e^{\mathfrak{a}} + 1 &= 2e^{b_\theta(Q)} \cosh QF + e^{b_\theta(Q)} \sinh QF (1 - \cos(\pi - 2\phi)) = \\ &= e^{b_\theta(Q)} \cosh QF + e^{b_\theta(Q)} \sin \phi \frac{\sinh y}{\sin^2 \phi} \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

Concluindo,

$$e^{b_\theta(Q)} \cosh QF = \frac{e^a + 1}{2} - \frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi. \quad (3.30)$$

Multiplicando (3.27) e (3.26) membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} e^a \cosh^2 y \frac{dx}{ds} &= e^{b_\theta(Q)} \cosh^2 QF \sin \phi + e^{b_\theta(Q)} \sinh QF \cosh QF \sin \phi = \\ &= e^{b_\theta(Q)} \cosh^2 QF \sin \phi + e^{b_\theta(Q)} \sinh y \cosh QF = \\ &= \frac{1}{\sinh y} (e^{b_\theta(Q)} \sin \phi \sinh y + e^{b_\theta(Q)} \sin \phi \sinh y \sinh^2 QF + e^{b_\theta(Q)} \sinh^2 y \cosh QF) = \\ &= \frac{1}{\sinh y} \left[\frac{e^a - 1}{2} + \sinh^2 y \left(\frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \phi} + e^{b_\theta(Q)} \cosh QF \right) \right]. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$e^a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^a - 1}{2} + \sinh^2 y \left(\frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \phi} + e^{b_\theta(Q)} \cosh QF \right). \quad (3.31)$$

Comparando (3.30) e (3.31), obtemos:

$$e^a \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^a - 1}{2} + \sinh^2 y \left(\frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \phi} + \frac{e^a - 1}{2} - \frac{e^a - 1}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi \right),$$

ou seja,

$$-\sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{e^a - 1}{2e^a}.$$

Pelo mesmo raciocínio do caso anterior, se rolarmos uma parábola, sem deslizar, sobre uma geodésica Γ , seu foco descreve uma curva Ω que gera uma superfície de rotação, em torno de Γ , com curvatura média constante $H = 1$.

3. Se $\delta = d_g$, onde g é uma geodésica orientada de $\mathbb{H}_+^2$. Suponhamos $d_g > 0$ ao longo de γ .

Seja $\tilde{P}$ a projeção de $\tilde{F}$ sobre Γ . Denotemos $\tilde{y} = \tilde{F}\tilde{P}$.

Novamente pela proposição (1.3) aplicada ao triângulo QPF , temos:

$$\sinh y = \sin \phi \sinh QF \quad (3.32)$$

e a mesma proposição aplicada ao triângulo $Q\tilde{P}\tilde{F}$ nos dá:

$$\sinh \tilde{y} = \sin \phi \sinh Q\tilde{F}. \quad (3.33)$$

Como nos dois casos anteriores, de $\frac{dx}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y}$, temos:

$$\cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh QF \sin \phi. \quad (3.34)$$

De $d_F + d_g = \mathfrak{a}$, obtemos que $QF + Q\tilde{F} = \mathfrak{a}$, pois $d_g(Q) = Q\tilde{F}$. Logo,

$$\sinh \mathfrak{a} = \sinh QF \cosh Q\tilde{F} + \cosh QF \sinh Q\tilde{F} \quad (3.35)$$

e

$$\cosh \mathfrak{a} = \cosh QF \cosh Q\tilde{F} + \sinh QF \sinh Q\tilde{F}. \quad (3.36)$$

Seja $\mathfrak{c} = d_g(F)$. Então, pela proposição (1.4) aplicada ao quadrilátero $QFF'\tilde{F}$, temos:

$$\sinh \mathfrak{c} = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} - \sinh QF \cosh Q\tilde{F} \cos(\pi - 2\phi),$$

ou seja,

$$\sinh \mathfrak{c} = \cosh QF \sinh Q\tilde{F} + \sinh QF \cosh Q\tilde{F} \cos 2\phi. \quad (3.37)$$

Subtraindo (3.37) de (3.35):

$$\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c} = \sinh QF \cosh Q\tilde{F}(1 - \cos 2\phi),$$

ou seja,

$$\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} = \sinh QF \cosh Q\tilde{F} \sin^2 \phi. \quad (3.38)$$

Somando (3.35) e (3.37) e utilizando (3.38), obtemos:

$$\sinh \mathfrak{a} + \sinh \mathfrak{c} = 2 \cosh QF \sinh Q\tilde{F} + \sinh QF \cosh Q\tilde{F}(1 + \cos 2\phi),$$

ou seja,

$$\cosh QF \sinh Q\tilde{F} = \frac{\sinh \mathfrak{a} + \sinh \mathfrak{c}}{2} - \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi. \quad (3.39)$$

Multiplicando (3.36) e (3.34) membro a membro:

$$\cosh \mathfrak{a} \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \cosh^2 QF \cosh Q\tilde{F} \sin \phi + \sinh QF \cosh QF \sinh Q\tilde{F} \sin \phi.$$

Usando (3.32), (3.33) e (3.38), obtemos:

$$\begin{aligned} \cosh \mathfrak{a} \cosh^2 y \frac{dx}{ds} &= \cosh^2 QF \left(\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sinh QF \sin^2 \phi} \right) \sin \phi + \frac{\sinh y}{\sin \phi} \cosh QF \sinh Q\tilde{F} \sin \phi = \\ &= \frac{1}{\sinh y} \left[\cosh^2 QF \left(\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} \right) + \sinh^2 y \sinh Q\tilde{F} \cosh QF \right] = \\ &= \frac{1}{\sinh y} \left[\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \left(\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} + \sinh Q\tilde{F} \cosh QF \right) \right]. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\begin{aligned} \cosh \mathfrak{a} \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} &= \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \left[\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} + \right. \\ &\quad \left. + \sinh Q\tilde{F} \cosh QF \right]. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Substituindo (3.39) em (3.40), obtemos:

$$\begin{aligned} \cosh \mathfrak{a} \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} &= \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \left[\frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sinh \mathfrak{a} + \sinh \mathfrak{c}}{2} - \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \sin^2 \phi} \cos^2 \phi \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2} + \sinh^2 y \sinh \mathfrak{a}.$$

Concluindo,

$$- \tanh \mathfrak{a} \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \frac{dx}{ds} = \frac{\sinh \mathfrak{a} - \sinh \mathfrak{c}}{2 \cosh \mathfrak{a}}.$$

Logo, se rolarmos, sem deslizar, uma parábola generalizada sobre uma geodésica Γ , seu foco descreve uma curva Ω que gera uma superfície de rotação, em torno de Γ , com curvatura média constante $H = \tanh |\mathfrak{a}|$.

□

Observamos que se γ é uma elipse ou uma hipérbole, então Ω satisfaz (3.4) e, como ela gera uma superfície com curvatura média constante, também satisfaz (2.10), com $H = \coth |\mathfrak{a}|$ e $x = U$, onde

$$\begin{cases} \sinh^2 y = U^2 \\ x(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + U^2 - \dot{U}^2}}{1 + U^2} \end{cases}$$

Daí, vemos que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{1 + U^2 - \dot{U}^2}}{\cosh^2 y}$$

e, de (2.10),

$$\sqrt{1 + U^2 - \dot{U}^2} = \frac{U^2 H - \bar{a}}{U}.$$

Logo,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sinh^2 y \coth |\mathfrak{a}| - \bar{a}}{\sinh y \cosh^2 y}.$$

Substituindo em (3.4), com $H = \coth |\mathfrak{a}|$, obtemos

$$-\coth |\mathfrak{a}| \sinh^2 y + \sinh y \cosh^2 y \left(\frac{\sinh^2 y \coth |\mathfrak{a}| - \bar{a}}{\sinh y \cosh^2 y} \right) = \frac{\cosh \mathfrak{a} - \cosh \mathfrak{c}}{2 \sinh \mathfrak{a}}.$$

Ou seja,

$$\bar{a} = \frac{\cosh \mathfrak{c} - \cosh \mathfrak{a}}{2 \sinh \mathfrak{a}}.$$

Se γ é elipse, então $|\mathfrak{a}| > |\mathfrak{c}|$. Daí, obtemos que

$$\frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2} < \bar{a} < 0.$$

Neste caso, Ω é um ondulóide. Se γ é uma hipérbole, $|\mathfrak{a}| < |\mathfrak{c}|$ e obtemos que $\bar{a} > 0$, ou seja, Ω é um nodóide. Se γ é uma circunferência, concluímos que

$$\bar{a} = \frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}$$

e obtemos que Ω gera um cilindro. Se γ é uma elipse degenerada ou uma hipérbole degenerada, ou seja, se $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{c}|$, temos que $\bar{a} = 0$ e Ω é formada por semi-circunferências tangentes entre si ao longo do eixo de rotação.

Analogamente, se γ é uma parábola, Ω satisfaz (3.4) e (2.10), com $H = 1$, donde concluímos que

$$\bar{a} = \frac{1 - e^{\mathfrak{a}}}{2e^{\mathfrak{a}}}.$$

Neste caso,

1. se $\mathfrak{a} > 0$, então $-\frac{1}{2} < \bar{a} < 0$ e Ω é mergulhada;

2. se $\alpha < 0$, então $\bar{a} > 0$ e Ω é uma curva imersa, com uma única auto-interseção;

3. se $\alpha = 0$, ou seja, se γ é uma parábola degenerada, então Ω gera horoesferas.

Do mesmo modo, se γ é uma parábola generalizada, Ω satisfaz (3.4) e (2.10), com

$H = \tanh |\alpha|$, e, então,

$$\bar{a} = \frac{\sinh \varsigma - \sinh \alpha}{2 \cosh \alpha}.$$

Logo,

1. se $|\alpha| > |\varsigma|$, temos $\bar{a} < 0$ e, então, Ω é mergulhada;

2. se $|\alpha| = |\varsigma|$, temos $\bar{a} = 0$ e, então, Ω é uma curva equidistante;

3. se $|\alpha| < |\varsigma|$, temos $\bar{a} > 0$. Neste caso, existe $\alpha_0 = \operatorname{arctanh}(0.64)$, tal que

(a) se $0 < |\alpha| < \alpha_0$, existe $a_0 = a_0(|\alpha|)$ tal que

i. se $0 < \bar{a} < a_0$, então Ω é imersa e tem uma única auto-interseção;

ii. se $\bar{a} > a_0$ então Ω é mergulhada;

iii. se $\bar{a} = a_0$, então Ω é mergulhada com um único ponto no bordo do infinito.

(b) se $\alpha_0 < |\alpha| < |\varsigma|$, então Ω é imersa com uma única auto-interseção.

4. se $|\alpha| = 0$, então $H = 0$ e

(a) se $|\varsigma| > 0$, temos que Ω é mergulhada;

(b) se $|\varsigma| = 0$, temos que Ω gera um plano totalmente geodésico.

Referências Bibliográficas

- [B] Barrientos, J.O., *Helicoidal Surfaces With Constant Mean Curvature in Tridimensional Spaces Forms II*, PUC - 1996.
- [B1] Barrientos, J.O., *Superfícies Helicoidais com Curvatura Média Constante no Espaço de Formas Tridimensional*, Tese de Doutorado, PUC, 1995.
- [C] Carmo, M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood cliffs: Prentice Hall, 1976.
- [C1] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [CD] Carmo, M.P. e Dajczer, M., *Rotational Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature*, Transactions of the AMS,(2) 277, 1983.
- [CA] Castillon, P., *Sur Les Sous-Variétés à Courbure Moyenne Constante Dans L' Espace Hyperbolique*, Thèse de Doctorat de Mathématiques de L' Université Joseph Fourier (Grenoble I).

- [G] Gomes, J.M., *Sobre Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico*, Tese de Doutorado, IMPA, 1985.
- [H] Hsiang, W.Y., *On Rotational W-Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature and Generalized Laws of Sine and Cosine*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, vol. 11, Number 3, September 1983.
- [R] Rocha, L.F.C., *16^o Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro.
- [S] Sterling, I., *A Generalization of a Theorem of Delaunay to Rotational W-Hypersurfaces of σ_1 -Type in $\mathbb{H}^{n+1}$ and $\mathbb{S}^{n+1}$* , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 127, Number 1, 1987.
- [SU] Suzuki, C.A., *Hipersuperfícies de Rotação em Espaços de Curvatura Constante*, Tese de Mestrado IME-USP.