**Melhor Coaproximação
em Espaços Normados**

Jorge Ariel Brisset Páez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise Funcional**
Orientadora: **Prof^a. Dra. Carmen Silvia Cardassi**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CAPES

-São Paulo, abril de 1999-

Melhor Coaproximação em Espaços Normados

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Jorge Ariel Brisset
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, abril de 1999.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Carmen Silvia Cardassi (Orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig - IME-USP
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - IMECC-UNICAMP

RESUMO

Em 1972, Franchetti e Furi [F-F72] introduziram um tipo de aproximação em espaços normados chamado de *melhor coaproximação*. Este trabalho estuda a existência e a unicidade de melhor coaproximação em subconjuntos convexos, algumas caracterizações para espaços de Hilbert e uma caracterização para espaços estritamente convexos. Também veremos a melhor coaproximação polinômica de uma função contínua e propriedades do operador melhor coaproximação.

ABSTRACT

In 1972, Franchetti and Furi [F-F72] introduced a kind of approximation in normed spaces, called *best coapproximation*. This work is concerned with the existence and uniqueness of best coapproximation by elements of convex subsets, characterizations of elements of best coapproximation, some characterizations of Hilbert spaces and a characterization of strictly convex spaces. Best polynomial coapproximation of continuous functions and properties of the best coapproximation operator are also presented.

a mi Martinacho.

Agradecimientos I:

- Antes que nada, quiero agradecer a los que tienen la paciencia de leer tantos agradecimientos.
- A mi hijo, Martín: por seguir tan unido a mí como el primer día.
- A mi querida familia: por haberme apoyado siempre y aguantarme cada vez que fui.
- A mis padres, Celso y Elena (no hace falta decir porqué).
- A mis hermanos, Miguel, Susy y Tito: por el apoyo.
- A mis sobrinos, (in alphabetical order) Andrea, Claudia, Danielo, Dieguito, Fede, Fernando, Naty, Nico y Rodri: por hacerme pensar en ellos y extrañarlos tanto.
- A mis tías Mirza y Soñita: por ser pésimas jugadoras de “tuti cabrero” y de “rummy canasta” .
- A mi amor, Lety Pery: por su incondicional amor y porque “... no es perfecta mas, se acerca a lo que yo simplemente soñé...”
- A la familia de Leticia, sin excepción, por algo muy simple y enorme: dejarme ser uno de ellos.
- A mi mejor amigo, Danielo: simplemente por eso.
- Al “drink-team” del Liceo 13: por asegurarme el puesto de golero y por haber realizado juntos tantos “brindis por pierrot” en el “Renta”.
- A mis compañeros de los liceos 13 “Ytuzaingó” y “El Clemente”: por el estímulo y por recibirme siempre con los brazos abiertos.
- A todos aquellos que debí mencionar aquí y me olvidé: por no enojarse ante tal omisión.
- A la justicia española: por haberme hecho creer que la justicia tarda pero llega.
- Al campeón del siglo, el CLUB ATLÉTICO PEÑAROL: por darme tantas alegrías.

Agradecimientos II:

- A Carmen: por su excelente orientación y por ser tan buena profesora y persona.
- A los profesores Chaim, Elza, Enrique, Lúcia, Débora, Roseli, Carmen y Albo: por sus enseñanzas tanto matemáticas como didácticas.
- A los profesores Futorny y Menshikov: por su invalorable ayuda en las traducciones de ruso y sus “tours” por la biblioteca.
- A los profesores uruguayos Borghi, Barreiro y Mara: porque gracias a ellos aprendí a querer la matemática.
- Al profesor Alfredo Guido: por haber sido quien más influyó en mí cuando decidí hacer la maestría.
- A Marina: por haber conseguido el material de Rusia.
- A mis amigos, Cecilia, Irene, José, Jocirei, Ramiro, Ronaldo, Marcelo, Fernando, Daniela y Marcos: por haber hecho de nuestras casas un hogar (además de haber “arreglado el mundo” varias veces con un mate en la mano).
- A mis vecinos, Maria, José, Marina, Emivan, Adriana, Luciana, Marcelo, Maria do Carmo, Lenir, Edna, Andrea, Jeferson y Adriana: por haberme aguantado a mí y a mis amigos y no protestar por estar tan alta la música.
- A Héctor y Marcela Merklen: por todas las “gauchadas” que me hicieron.
- A mis hermanos brasileños, Bárbara, Regina, Daniel, Liane, José, Sidney, Marco Aurélio, Samuel, Raul, Claus, Fernando, Jocirei, Ronaldo, Mário, Edson, Edson, Rolo, Caputi, Paulo, Ayumi, Cintia, Márcio, Juaci, Jair, Gláucio, Lúcia, Marcelo, Calixto, Walter, Daniela, Clézio, Leandro, Alice, Saidi, Kao, Kennedy, Branderberger, Douglas, Maria, Walquíria, Marcelo, Loreley, Vanderlei, Lucia : por permitir que me integrara a ellos como uno más.

- A mis hermanos hispanoamericanos y también de otras latitudes, Germán, Santos, Nelson, Xyoby, Nestor. Alberto, Antonio, Gaspar, Carlos, Cristian, Mariano, Carlos, Laura. Laura, Gonzalo, Lucho. Raúl, Juan, Ivo, Ricardo, Gladys, Sandra. Paola, Jairo, José, Hernán, Irene, Carolina, Marcel, Claudia, Milton. Pablo. Juan Carlos : por los tan lindos momentos que pasamos juntos y por el riquísimo intercambio cultural, el cual no fue justo, pues recibí mucho más de lo que di.

Sumário

Introdução	1
1 Melhor Coaproximação: Definições e Exemplos	3
1.1 Definições e Proposições Básicas	3
1.2 Exemplos	5
2 Existência e Unicidade da Melhor Coaproximação	15
2.1 Ortogonalidade.	15
2.2 Existência da Melhor Coaproximação.	27
2.3 Funções Convexas e Diferenciabilidade.	37
2.4 Unicidade e Linearidade da Melhor Coaproximação.	43
3 Hipercírculos de Chebyshev e Coaproximação	47
3.1 Hipercírculos e Centros de Chebyshev	47
3.2 Uma Caracterização para Espaços de Hilbert	58
4 Caracterizações de Melhor Coaproximação e Aplicações	64
4.1 Caracterizações de Melhor Coaproximação	65
4.2 Melhor Coaproximação Polinômica	73
4.3 Uma Caracterização para Espaços Estritamente Convexos	80
5 Propriedades do Operador R_C	86
5.1 Propriedades de R_G	86
5.2 Caracterizações de espaços de Hilbert	94
5.3 Propriedades de R_C	101
5.4 R_C e a retração ortogonal	104
5.5 Aproximação, coaproximação e retração ortogonal fortes	113
Referências Bibliográficas	122

Introdução

Em 1972 C. Franchetti e M. Furi [F-F72] introduziram uma nova noção de aproximação em espaços normados, hoje conhecida como melhor coaproximação.

A partir daí, diversos matemáticos estudaram o assunto, entre os quais P. L. Papini e I. Singer.

Em 1991, T. D. Narang escreveu um *survey* [Nar91] da matéria entitulado:

On best coapproximation in normed linear spaces, Rocky Moun. J. Math. **22** (1991), 265-287 .

O conceito de melhor coaproximação está fortemente vinculado com a ortogonalidade no sentido da definição de G. Birkhoff [Bir35]. Esta ortogonalidade não é a única estudada em espaços normados quaisquer. Por exemplo, em [Jam45] podemos encontrar, além dessa, a isósceles e a pitagórica. A ortogonalidade de Birkhoff está também vinculada com a melhor aproximação e será utilizada em respectivas caracterizações.

Este trabalho pretende introduzir o conceito de melhor coaproximação e compará-lo com outros tipos de aproximação, como a melhor aproximação e a retração ortogonal ([Bru73]), estudar relações com outros tópicos e achar propriedades da melhor coaproximação, no caso em que possa ser visto como operador.

Apresentamos diversos exemplos. Nos primeiros utilizaremos basicamente a definição, visando a melhor compreensão do novo conceito; depois usamos, em alguns casos particulares, os resultados teóricos obtidos no decorrer do trabalho.

Quase todas as provas estão incluídas no texto. A exclusão de algumas provas é devida, fundamentalmente, à extensão do trabalho. Nestes casos serão dadas as referências bibliográficas onde o leitor pode achá-las.

No capítulo 1, apresentamos o conceito de melhor coaproximação estudando varios exemplos [Dav63]. Também veremos alguns resultados básicos do assunto mas de uma grande utilidade em todo o trabalho.

No capítulo 2, estudaremos condições para a existência e para a unicidade da melhor coaproximação. Para isso, veremos previamente alguns resultados sobre ortogonalidade, funções convexas e diferenciabilidade de Gâteaux ([Jam45], [Jam47a], [Phe89], [Hol72], [Jam47b], [Kak39]).

No capítulo 3, veremos uma caracterização para espaços de Hilbert a partir dos espaços reflexivos, estudando previamente algumas propriedades de hipercírculos e centros de Chebyshev [Fra75].

No capítulo 4, obteremos caracterizações da melhor coaproximação a partir de outras já conhecidas de melhor aproximação. Como aplicação, estudaremos em $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ a melhor coaproximação tanto polinômica como em subespaços de polinômios e uma caracterização para espaços estritamente convexas, muito parecida a uma conhecida que utiliza a melhor aproximação [Sin70]).

No capítulo 5, estudaremos propriedades do operador melhor coaproximação sobre subespaços, que vão nos permitir obter outras caracterizações para espaços de Hilbert ([Pap74], [Pap75]), e sobre subconjuntos convexas ([Pap76]). Neste último aspecto, estudaremos também o conceito de melhor coaproximação forte, comparando os resultados com os da melhor aproximação e da retração ortogonal. A finalidade é que o trabalho tenha um capítulo, no qual o leitor possa achar todas as propriedades do operador coaproximação, embora algumas delas tenham sido introduzidas ao estudar outros aspectos da melhor coaproximação.

Em toda a dissertação, trabalharemos com espaços normados reais.

Capítulo 1

Melhor Coaproximação: Definições e Exemplos

O objetivo principal deste capítulo é introduzir o conceito de melhor coaproximação. Além disso, às vezes faremos comparações com a conhecida melhor aproximação. Trabalharemos alguns exemplos que servem para esclarecer o conceito de melhor coaproximação. Também provaremos neste capítulo proposições básicas do assunto, mas de uma grande utilidade para todo o trabalho.

1.1 Definições e Proposições Básicas

Definição 1.1.1. Dados X um espaço normado, $x \in X$ e C um subconjunto de X , dizemos que $g_0 \in C$ é ponto de *melhor aproximação* de x em C se para todo g em C vale a seguinte desigualdade

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\|. \quad (1.1)$$

O conjunto dos pontos g_0 que satisfazem (1.1) será representado por $P_C(x)$

Definição 1.1.2. Dados X um espaço normado, $x \in X$ e C um subconjunto de X , dizemos que $g_0 \in C$ é ponto de *melhor coaproximação* de x em C se para todo g em C vale a seguinte desigualdade

$$\|g_0 - g\| \leq \|x - g\|. \quad (1.2)$$

O conjunto dos pontos g_0 que satisfazem (1.2) será representado por $R_C(x)$

Proposição 1.1.3. *Sejam X um espaço normado. C um subconjunto de X e x um ponto de X .*

Então $P_C(x) = C \cap A_C(x)$, onde

$$A_C(x) = \bigcap_{g \in C} \overline{B}_{\|x-g\|}(x).$$

Prova :

Para $g_0 \in P_C(x)$, pela definição 1.1.1 temos que $g_0 \in C$. Além disso, g_0 satisfaz (1.1) e então temos que $g_0 \in \overline{B}_{\|x-g\|}(x)$ para todo $g \in C$. Portanto, $g_0 \in A_C(x)$.

Reciprocamente, se $g_0 \in C \cap A_C(x)$, temos que $g_0 \in C$ e

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\| \text{ para todo } g \in C.$$

■

Proposição 1.1.4. *Sejam X um espaço normado. C um subconjunto de X e x um ponto de X .*

Então $R_C(x) = C \cap B_C(x)$, onde

$$B_C(x) = \bigcap_{g \in C} \overline{B}_{\|x-g\|}(g).$$

Prova :

Análoga à proposição anterior.

■

Observação 1.1.5. Da proposição 1.1.4 deduz-se que o conjunto $R_C(x)$ é limitado por $\|x\|$ se $0 \in C$ (por exemplo se for subespaço) e apenas limitado se for um subconjunto C qualquer. Além disso, será fechado e convexo se C também o for.

Na próxima seção veremos alguns exemplos utilizando as proposições 1.1.3 e 1.1.4.

1.2 Exemplos

Exemplo 1.2.1. Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_2$. Sejam $x = (0, 1)$ e C o eixo x_1 . É fácil ver que neste caso os conjuntos de melhor aproximação e de melhor coaproximação são iguais:

$$P_C(x) = R_C(x) = \{(0, 0)\}.$$

Figura 1.1.

Exemplo 1.2.2. Consideremos novamente o plano $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_2$. Sejam $x = (3, 0)$ e C a bola fechada $\overline{B}_1(0)$. Neste caso os conjuntos de melhor aproximação e de melhor coaproximação não são iguais, pois

$$P_C(x) = \{(1, 0)\} \text{ e } R_C(x) = \overline{B}_1(0) = C.$$

Figura 1.2.

Exemplo 1.2.3. Tomemos agora ainda $\mathbb{R}^2$, mas com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideremos x e C como no primeiro exemplo. Neste caso, os conjuntos também não são iguais, pois

$$P_C(x) = [-1, 1] \times \{0\} \quad \text{e} \quad R_C(x) = \{(0, 0)\}.$$

Figura 1.3.

Exemplo 1.2.4. Novamente com $\mathbb{R}^2$, $x = (0, 1)$ e C o eixo x_1 , só que neste caso vamos considerar a norma $\|\cdot\|_1$. O resultado é o oposto ao obtido no caso anterior:

$$P_C(x) = \{(0, 0)\} \quad \text{e} \quad R_C(x) = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Figura 1.4.

Exemplo 1.2.5. Sejam $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_2)$, $C = \mathcal{P}_1$ (conjunto dos polinômios de grau no máximo 1) e $y = x^4$. Vamos achar $P_C(y)$ e $R_C(y)$.

Procuraremos $P_C(y)$, ou seja, as funções $l \in \mathcal{P}_1$ tais que

$$\|y - l\|_2 \leq \|y - g\|_2 \quad \text{para toda } g \in C.$$

Em outras palavras, devemos achar as funções da forma $ax + b$, tais que

$$\int_0^1 (x^4 - (ax + b))^2 dx \text{ seja mínima.}$$

Fazendo operações

$$\int_0^1 (x^4 - (ax + b))^2 dx = \frac{1}{9} - \frac{a}{3} - \frac{2b}{5} + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$$

Chamando

$$M(a, b) = \frac{1}{9} - \frac{a}{3} - \frac{2b}{5} + \frac{a^2}{3} + ab + b^2,$$

obtemos uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, da qual devemos achar o mínimo (se existir) em todo $\mathbb{R}^2$.

As derivadas parciais da M são

$$M_a(a, b) = -\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} + b$$

e

$$M_b(a, b) = -\frac{2}{5} + a + 2b,$$

donde deduz-se que existe uma única $l_0(x) \in \mathcal{P}_1$, que é

$$l_0(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}. \quad (1.3)$$

Agora vamos achar $R_C(y)$, ou seja, as funções da forma $ax + b$ tais que

$$\|ax + b - g\|_2 \leq \|x^4 - g\|_2 \quad \text{para toda } g \in \mathcal{P}_1,$$

o que equivale a resolver

$$\|ax + b - g\|_2^2 \leq \|x^4 - g\|_2^2 \quad \text{para toda } g \in \mathcal{P}_1.$$

Queremos então que para quaisquer $m, n \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 [(ax + b) - (mx + n)]^2 dx \leq \int_0^1 (x^4 - mx - n)^2 dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^1 (ax + b)^2 dx - 2 \int_0^1 [amx^2 + (an + bm)x] dx \leq \int_0^1 x^8 dx - 2 \int_0^1 [x^4(mx + n)] dx,$$

donde,

$$m\left(-\frac{2a}{3} - b + \frac{1}{3}\right) + n\left(-a - 2b + \frac{2}{5}\right) + a^2 + ab + b^2 - \frac{1}{9} \leq 0.$$

Em resumo temos

$$\begin{cases} -\frac{2a}{3} - b + \frac{1}{3} = 0 \\ -a - 2b + \frac{2}{5} = 0 \end{cases}$$

e além disso $a^2 + ab + b^2 - \frac{1}{9} \leq 0$. ⁽¹⁾

Resolvendo o sistema linear acima obtemos que $a = \frac{4}{5}$ e $b = -\frac{1}{5}$ e tais valores satisfazem ⁽¹⁾. Logo a melhor coaproximação de $y = x^4$ em $\mathcal{P}_1$ é

$$f_0(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5},$$

a qual é igual à melhor aproximação (ver equação 1.3 e figura 1.5).

Figura 1.5.

Exemplo 1.2.6. Consideremos agora $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ e C e y como no exemplo anterior.

Procuraremos $P_C(y)$, ou seja, as funções l da forma $l(x) = ax + b$ tais que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |x^4 - ax - b| \text{ seja mínimo.}$$

Os extremos de $h(x) = x^4 - ax - b$ em $[0, 1]$ podem ser

$$\begin{cases} |b| & \text{em } x = 0 \\ |a + b - 1| & \text{em } x = 1 \\ |3(\frac{a}{4})^{\frac{4}{3}} + b| & \text{em } x = (\frac{a}{4})^{\frac{1}{3}}, \text{ se } (\frac{a}{4})^{\frac{1}{3}} \text{ pertence a } [0, 1]. \end{cases}$$

Daí, minimizando-os, obtemos como únicos resultados $a = 1$ e $b = -\frac{3}{8\sqrt[3]{4}}$.

Portanto

$$l_0(x) = x - \frac{3}{8\sqrt[3]{4}}.$$

Agora acharemos $R_C(y)$.

Precisamos achar $g_0 \in \mathcal{P}_1$ tal que

$$\|g - g_0\|_\infty \leq \|x^4 - g\|_\infty \quad \text{para todo } g \in \mathcal{P}_1,$$

ou seja, achar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|mx + n - (ax + b)\|_\infty \leq \|x^4 - mx - n\|_\infty \quad \text{para quaisquer } m, n \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente a

$$\max_{x \in [0, 1]} |(m - a)x + n - b| \leq \max_{x \in [0, 1]} |x^4 - mx - n| \quad \text{para quaisquer } m, n \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Esquemáticamente, expressaremos a desigualdade acima da seguinte maneira:

$$\max(I) \leq \max(II).$$

As possibilidades de máximos são:

$$\begin{cases} \text{em } (I), & \text{para } x = 0, \quad \text{ou } x = 1; \\ \text{em } (II), & \text{para } x = 0, \quad x = (\frac{m}{4})^{\frac{1}{3}} \text{ ou } x = 1. \end{cases}$$

Em outras palavras, a desigualdade (1.4) é equivalente a

$$\max\{|n - b|, |m - a + n - b|\} \leq \max\{|n|, |-\frac{3m^{4/3}}{4^{4/3}} - n|, |1 - m - n|\}.$$

Vamos resolver o problema separando nos seguintes casos:

(i) $m \leq 0$, (ii) $m \geq 4$ e (iii) $0 < m < 4$.

(i) Se $n \leq \frac{1-m}{2}$, então $|n| \leq |n - (1 - m)|$, e portanto

$$\max(II) = |1 - m - n|.$$

Analogamente se $n \geq \frac{1-m}{2}$ temos $\max(II) = |n|$.

Figura 1.6.

(ii) Neste caso se $n \geq \frac{1-m}{2}$ temos que $|n| \leq |1 - m - n|$, e portanto

$$\max(II) = |n + m - 1|.$$

Analogamente se $n < \frac{1-m}{2}$ temos $\max(II) = |n|$.

Figura 1.7.

(iii) Vamos comparar as funções $f(m) = 1 - m$ e $g(m) = -3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}}$. Fazendo o estudo delas é possível concluir que $f(m) > g(m)$ para todo $0 < m < 4$ (ver figura 1.8).

Figura 1.8.

Como $m - 1$ pode ser tanto positivo como negativo, precisamos estudar mais dois novos casos:

(iv) $0 < m < 1$ e (v) $1 \leq m < 4$.

(iv) Se $n \leq \frac{3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}} + m - 1}{2}$, temos

$$\max(II) = |3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}} - n|.$$

Analogamente se $n > \frac{3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}} + m - 1}{2}$, temos

$$\max(II) = |1 - m - n|.$$

Figura 1.9.

(v) Se $n \leq \frac{3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}}}{2}$, temos

$$\max(II) = |1 - m - n|,$$

e se $n > \frac{3(\frac{m}{4})^{\frac{4}{3}}}{2}$, temos

$$\max(II) = |n|.$$

Figura 1.10.

Figura 1.11. Resumo dos resultados do exemplo 1.2.6

Agora estamos aptos a resolver a inequação (1.4), procurando a e $b \in \mathbb{R}$ que a satisfaçam. Usando os resultados de (1), (2), (7) e (8), concluímos que a única função que satisfaz essas condições é $g_0(x) = x$. Vejamos se satisfaz a definição (outro caminho é verificar que satisfaz todas as outras condições).

A função g_0 pertence a $R_C(y)$ se e somente se

$$\|(m-1)x + n\|_\infty \leq \|x^4 - mx - n\|_\infty \quad \text{para quaisquer } m, n \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\max\{|n|, |1-m-n|\} \leq \max\{|n|, |1-m-n|, |g(m)-n|\},$$

o que é óbvio. Portanto $g_0(x) = x$ é a melhor coaproximação de $y(x) = x^4$ em $\mathcal{P}_1$ (ver figura 1.12).

Figura 1.12.

No capítulo 4 determinaremos uma forma fácil de achar as melhores coaproximações polinômicas de uma função contínua em $[0, 1]$ que confirma este resultado.

Exemplo 1.2.7. Seja $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. Queremos achar a melhor aproximação e a melhor coaproximação de $f(x) = e^x$ no subespaço C das funções constantes (ver uma generalização deste exemplo na proposição 4.2.9).

Procuraremos $P_C(f)$.

Devemos achar $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - a| \quad \text{seja mínimo.}$$

A resposta é muito simples: $a = \frac{e+1}{2}$ é o único real que satisfaz tal condição. Portanto $f_0(x) = \frac{e+1}{2}$ é a melhor aproximação da função $f(x) = e^x$ no subespaço C das funções constantes.

Agora procuraremos $R_C(f)$.

Devemos achar $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|a - b\|_\infty \leq \|e^x - b\|_\infty \quad \text{para todo } b \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$|a - b| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - b| \quad \text{para todo } b \in \mathbb{R}.$$

Estudemos dois casos:

$$(i) \ b \leq \frac{e+1}{2} \quad \text{e} \quad (ii) \ b > \frac{e+1}{2}.$$

(i) Nesta situação a desigualdade fica $|a - b| \leq e - b$,

o que equivale a

$$1 \leq a \leq e.$$

(ii) Agora a desigualdade fica $|a - b| \leq b - 1$,

o que equivale a

$$1 \leq a \leq e.$$

Daí concluímos que $g_0(x) = a$ é melhor coaproximação da função $f(x) = e^x$ no subespaço das funções constantes, para qualquer $a \in [1, e] = f([0, 1])$.

Figura 1.13.

Observação 1.2.8. Estudando os exemplos anteriores é possível concluir que nem sempre os dois conjuntos com os quais vamos trabalhar coincidem. De fato, eles podem ser bem distintos. É ainda possível deduzir que nos casos onde $P_C(x)$ e $R_C(x)$ são diferentes também não existe inclusão de um no outro e mesmo que sejam unitários, tais conjuntos, não necessariamente são iguais. No próximo capítulo veremos em que condições tais conjuntos são, com certeza, iguais.

Capítulo 2

Existência e Unicidade da Melhor Coaproximação

O objetivo principal deste capítulo é estudar condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade da melhor coaproximação. Além disso veremos exemplos e interpretações geométricas de alguns resultados. Para esses fins, estudaremos algumas propriedades de ortogonalidade e de diferenciabilidade em espaços normados reais.

2.1 Ortogonalidade.

Nesta seção vamos estudar o conceito e algumas propriedades de ortogonalidade em espaços normados que vão nos permitir, na seção 2.2, achar condições necessárias e suficientes para a existência da melhor coaproximação. Além disso, os resultados desta seção são muito importantes no desenvolvimento do capítulo 3.

Existem diversos tipos de ortogonalidade em espaços normados, entre os quais a de Birkhoff [Bir35], que será a utilizada neste trabalho. Outros tipos são a isósceles e a pitagórica. Para maiores detalhes ver [Jam45].

Definição 2.1.1. Sejam X um espaço normado real e $x, y \in X$. Dizemos que x é *ortogonal* a y se para todo α real vale $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$. Denotaremos $x \perp y$.

Dizemos que o conjunto Y é ortogonal ao conjunto Z se $y \perp z$ para todo $y \in Y$ e para todo $z \in Z$. Denotaremos $Y \perp Z$.

A seguir veremos um exemplo simples que mostra que a ortogonalidade não é necessariamente recíproca e, em seguida, que em espaços pré-hilbertianos é.

Exemplo 2.1.2. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $x = (1, 0)$ e $y = (1, 1)$. Vamos provar que $x \perp y$ mas $y \not\perp x$.

$$\|x + \lambda y\|_1 = \|(1, 0) + (\lambda, \lambda)\|_1 = |1 + \lambda| + |\lambda|.$$

Então $x \perp y$ pois $|1 + \lambda| + |\lambda| \geq 1 = \|x\|_1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Figura 2.1. $f(\lambda) = |1 + \lambda| + |\lambda|$.

Para ver que $y \not\perp x$ basta observar que se tomarmos $\lambda = -1$ não é verdade que $\|y\|_1 \leq \|y + \lambda x\|_1$, pois teríamos $2 \leq 1$.

Proposição 2.1.3. Sejam X um espaço pré-hilbertiano, x e y em X . Então

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Sabemos por hipótese que $x \perp y$, o que por definição significa que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

Usando isso temos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|x\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Em resumo temos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \geq 0.$$

Logo,

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

($\Leftarrow$)

Primeiramente, observemos que se $x = 0$, a afirmação é óbvia. Suponhamos então que temos $x \neq 0$ e que $\langle x, y \rangle = 0$. Portanto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\|^2 = \langle x, x + \lambda y \rangle$. Mas pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\|x\|^2 = \langle x, x + \lambda y \rangle \leq \|x\| \|x + \lambda y\|.$$

Logo,

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

■

Corolário 2.1.4. *Sejam X um espaço pré-hilbertiano, x e y em X tais que $x \perp y$. Então $y \perp x$.*

Prova :

Imediata. Basta observar que como o corpo é $\mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ e utilizar a proposição 2.1.3. ■

Lema 2.1.5. *A ortogonalidade é uma propriedade homogênea, i.e., se $x \perp y$ então $ax \perp by$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.*

Prova :

Sabemos da hipótese que $x \perp y$, ou seja, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ e queremos provar que $ax \perp by$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Note-se que se $a = 0$ ou $b = 0$ nada temos a provar. Por isso trabalharemos com os dois distintos de zero.

Dados a e $b \in \mathbb{R}^*$, para cada $\lambda' \in \mathbb{R}$ escolhemos $\lambda = \frac{\lambda' b}{a}$ e substituindo na hipótese

obtemos que

$$\|x\| \leq \|x + \frac{\lambda' b}{a} y\|,$$

ou seja,

$$\|x\| \leq \|\frac{ax + \lambda' by}{a}\|.$$

Portanto

$$|a| \|x\| \leq \|ax + \lambda' by\|$$

e daí

$$\|ax\| \leq \|ax + \lambda' by\|.$$

■

Lema 2.1.6. *Se f é um funcional linear contínuo não nulo em um espaço normado X e $x \in X$, então*

$$|f(x)| = \|f\| \|x\| \iff x \perp \ker(f).$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Tomando $h \in \ker(f)$, sabemos que

$$|f(x)| = |f(x + h)| \leq \|f\| \|x + h\|$$

e como $|f(x)| = \|f\| \|x\|$ e $\|f\| \neq 0$,

$$\|x\| \leq \|x + h\|.$$

Pelo lema 2.1.5 , $\|x\| \leq \|x + \alpha h\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, $x \perp h$.

($\Leftarrow$)

Sejam $x \perp \ker(f)$ e $|f(x)| = p\|x\|$, com $p \geq 0$. É claro que $p \leq \|f\|$, pois se $p > \|f\|$, teríamos $|f(x)| < p\|x\|$. Vamos mostrar que $p = \|f\|$.

Para todo $h \in \ker(f)$, temos

$$\|x\| \leq \|x + h\|$$

e portanto

$$|f(x+h)| = |f(x)| = p\|x\| \leq p\|x+h\|.$$

Além disso, temos que todo $y \in X$ pode ser expresso na forma $ax + h$, com $a \in \mathbb{R}$ e $h \in \ker(f)$. Se $a = 0$, $|f(y)| \leq p\|y\|$. Suponhamos que $a \neq 0$. Então temos

$$|f(y)| = |f(ax + h)| = |a| |f(x + \frac{1}{a}h)| \leq |a|p\|x + \frac{1}{a}h\| = p\|y\|.$$

Em resumo, para todo $y \in X$

$$|f(y)| \leq p\|y\|.$$

Logo $p \geq \|f\|$ e

$$p = \|f\|.$$

■

Observação 2.1.7. Se $f = 0$ o resultado não é válido, pois basta tomar $x \neq 0$ e obviamente não é verdade que $x \perp x$.

Proposição 2.1.8. *Sejam x e y dois pontos de um espaço normado X . Então são satisfeitas as seguintes propriedades:*

- (i) *Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \perp ax + y$.*
- (ii) *Para a como em (i) e $x \neq 0$, $|a| \leq \|y\|/\|x\|$.*
- (iii) *Para $x \neq 0$, o conjunto $M = \{a \in \mathbb{R} : x \perp ax + y\}$ tem máximo B e mínimo A .*

Prova :

- (i) Se $x = 0$, o resultado é trivial. Se $x \neq 0$, pelo Teorema de Hahn-Banach sabemos que existe $f \in X^*$ não nulo tal que $|f(x)| = \|f\|\|x\|$. Pela proposição anterior só precisamos mostrar que $ax + y \in \ker(f)$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Vejamos:

$$f(ax + y) = 0 \iff af(x) + f(y) = 0.$$

Como f e x não são nulos e $|f(x)| = \|f\|\|x\|$, temos que $f(x) \neq 0$, e tomando $a = -\frac{f(y)}{f(x)}$ a parte (i) está provada. ■

(ii) Sejam $x \neq 0$ e a tais que $x \perp ax + y$. Se $a = 0$, a afirmação é óbvia. Portanto vamos supor que $a \neq 0$. Pela definição de ortogonalidade temos

$$\|x\| \leq \|x + k(ax + y)\| \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R}.$$

Daí, tomando $k = -1/a$, temos

$$|a| \leq \|y\|/\|x\|.$$

■

(iii) Pelos itens anteriores sabemos que $M = \{a \in \mathbb{R} : x \perp ax + y\}$ é não vazio e limitado. Portanto, M tem sup e inf. Sejam $A = \inf(M)$ e $B = \sup(M)$. Mostraremos que A e B são elementos de M . Como B é o $\sup(M)$, podemos escolher $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em M , tal que $a_n \rightarrow B$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x\| \leq \|x + k(a_n x + y)\| \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R}$$

Logo, com $n \rightarrow +\infty$, conclui-se que $B \in M$.

Analogamente temos $A \in M$.

■

Lema 2.1.9. *Sejam x e y em um espaço normado X , e A e B em $\mathbb{R}$ tais que $A \leq B$, $x \perp Ax + y$ e $x \perp Bx + y$. Então $x \perp ax + y$ para todo $a \in [A, B]$.*

Prova :

Sejam $a \in [A, B]$ e $k \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que

$$\|x + k(ax + y)\| \geq \|x\|.$$

Se $a = A$ ou $a = B$ ou $A = B$, não há nada a provar. Suponhamos então que $a \in]A, B[$.

Para $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x + k(ax + y)\| &= \|x + k(ax + y) + kAx - kAx\| = \|x(1 + k(a - A)) + k(Ax + y)\| \geq \\ &\geq \|x(1 + k(a - A))\| \geq \|x\|, \quad \text{pelo lema 2.1.5 e porque } 1 + k(a - A) \geq 1. \end{aligned}$$

Para $k < 0$

$$\begin{aligned}\|x + k(ax + y)\| &= \|x + k(ax + y) + kBx - kBx\| = \|x(1 + k(a - B)) + k(Bx + y)\| \geq \\ &\geq \|x(1 + k(a - B))\| \geq \|x\|, \text{ novamente pelo lema 2.1.5 e porque } 1 + k(a - B) \geq 1.\end{aligned}$$

Portanto

$$x \perp ax + y \quad \text{para todo } a \in]A, B[.$$

■

Lema 2.1.10. *Sejam X um espaço normado, x e $y \in X$ e $a \in \mathbb{R}$.
Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|(\lambda + a)x + y\| - \|\lambda x + y\|) = a\|x\|.$$

Prova :

Usando que $\lambda + a > 0$ para λ suficientemente grande e positivo e que $\frac{\lambda}{\lambda+a} + \frac{a}{\lambda+a} = 1$, temos

$$\begin{aligned}\|(\lambda + a)x + y\| &= \frac{\lambda}{\lambda + a}\|(\lambda + a)x + y\| + \frac{a}{\lambda + a}\|(\lambda + a)x + y\| = \\ &= \|\lambda x + \frac{\lambda}{\lambda + a}y\| + a\|x + \frac{y}{\lambda + a}\|.\end{aligned}$$

Então

$$\|(\lambda + a)x + y\| - \|\lambda x + y\| = \|\lambda x + \frac{\lambda}{\lambda + a}y\| - \|\lambda x + y\| + a\|x + \frac{y}{\lambda + a}\|,$$

mas

$$\left| \|\lambda x + \frac{\lambda}{\lambda + a}y\| - \|\lambda x + y\| \right| \leq \|(\frac{\lambda}{\lambda + a} - 1)y\| = \|\frac{a}{\lambda + a}y\|.$$

Portanto, como $\|\frac{a}{\lambda + a}y\| \rightarrow 0$ se $\lambda \rightarrow +\infty$, temos

$$\left| \|\lambda x + \frac{\lambda}{\lambda + a}y\| - \|\lambda x + y\| \right| \rightarrow 0 \text{ se } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Além disso, como

$$a\|x + \frac{y}{\lambda + a}\| \rightarrow a\|x\| \text{ se } \lambda \rightarrow +\infty,$$

concluimos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|(\lambda + a)x + y\| - \|\lambda x + y\|) = a\|x\|.$$

■

Lema 2.1.11. *Sejam x e y em um espaço normado X tais que $\|x + y\| = \|x - y\|$, e seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $|k| \geq 1$. Então*

$$(i) \quad \|x + y\| \leq \|x + ky\| \text{ e } \|x - y\| \leq \|x + ky\|;$$

$$(ii) \quad \|x + ky\| \geq \|x\|.$$

Prova :

(i) Basta provar a primeira afirmação, pois $\|x - y\| = \|x + y\|$.

Como $x + ky = \frac{1}{2}(k+1)(x+y) - \frac{1}{2}(k-1)(x-y)$, pela desigualdade triangular, temos

$$\|\frac{1}{2}(k+1)(x+y)\| \leq \|x + ky\| + \|\frac{1}{2}(k-1)(x-y)\| \quad (2.1)$$

e

$$\|\frac{1}{2}(k-1)(x-y)\| \leq \|x + ky\| + \|\frac{1}{2}(k+1)(x+y)\|. \quad (2.2)$$

Se $k \geq 1$, por (2.1) temos

$$\begin{aligned} \|x + ky\| &\geq \|\frac{1}{2}(k+1)(x+y)\| - \|\frac{1}{2}(k-1)(x-y)\| = \\ &= \frac{1}{2}(k+1)\|(x+y)\| - \frac{1}{2}(k-1)\|(x-y)\|. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\|x + y\| = \|x - y\|$, concluimos que $\|x + y\| \leq \|x + ky\|$ para todo $k \geq 1$.

Se $k \leq -1$, por (2.2) temos

$$\begin{aligned}\|x + ky\| &\geq \left\| \frac{1}{2}(k-1)(x-y) \right\| - \left\| \frac{1}{2}(k+1)(x+y) \right\| = \\ &= -\frac{1}{2}(k-1)\|(x-y)\| + \frac{1}{2}(k+1)\|(x+y)\|.\end{aligned}$$

Novamente usando a hipótese, deduz-se $\|x + y\| \leq \|x + ky\|$ para todo $k \leq -1$.

Logo,

$$\|x + y\| \leq \|x + ky\| \quad \text{para todo } |k| \geq 1.$$

■

(ii) Como $2x = (x + y) + (x - y)$, utilizando a desigualdade triangular e a parte (i), temos

$$2\|x\| \leq 2\|x + ky\|.$$

■

Proposição 2.1.12. *Sejam $x \neq 0$ e y dois vetores de um espaço normado X . Então*

$$(i) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|) = -A\|x\|;$$

$$(ii) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x\| - \|\lambda x - y\|) = -B\|x\|,$$

onde A e B são como na proposição 2.1.8.

Prova :

(i) Vamos mostrar que para toda sequência $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, com $\lambda_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$, se existe

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\|),$$

ele é igual a $-A\|x\|$. Como $\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|$ está limitado por $\|y\|$, podemos tomar duas seqüências $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$ tais que $\alpha_i \rightarrow +\infty$, $\beta_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\alpha_i x + y\| - \|\alpha_i x\|) = \limsup (\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|)$$

e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\beta_i x + y\| - \|\beta_i x\|) = \liminf (\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|).$$

Assim obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|) = -A\|x\|.$$

Seja então $\{\lambda_i\}_i$ tal que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty$ e $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\|) \in \mathbb{R}$. Digamos que $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\|) = -r\|x\|$ para algum $r \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $r = A$.

Somando e subtraindo $\|\lambda_i x + (Ax + y)\| + A\|x\|$ na expressão do limite a igualdade fica

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow +\infty} -\|\lambda_i x + (Ax + y)\| + \|\lambda_i x + y\| + A\|x\| + \|\lambda_i x + (Ax + y)\| - \|\lambda_i x\| - A\|x\| = \\ = -r\|x\|, \end{aligned}$$

que pelo lema 2.1.10 fica

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\lambda_i x + (Ax + y)\| - \|\lambda_i x\| - A\|x\|) = -r\|x\|.$$

Como A é tal que $x \perp Ax + y$, temos $\|\lambda_i x + (Ax + y)\| \geq \|\lambda_i x\|$, e então

$$-A\|x\| \leq -r\|x\|.$$

Logo,

$$r \leq A. \tag{2.3}$$

Voltando a

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\|) = -r\|x\|,$$

para todo $\varepsilon > 0$ temos N tal que se $i > N$ vale

$$|\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\| + r\|x\|| < \varepsilon\|x\|,$$

ou ainda, para $i > N$,

$$\|\lambda_i x + y\| - \|\lambda_i x\| + r\|x\| = \epsilon_i\|x\| \quad \text{com} \quad |\epsilon_i| < \varepsilon.$$

Daí, também temos

$$\|\lambda_i x + y\| = \|\lambda_i x\| - r\|x\| + e_i\|x\| = \|(\lambda_i - r + e_i)x\|.$$

Multiplicando por 2 e reescrevendo a igualdade de forma conveniente, obtemos

$$\|[(2\lambda_i - r + e_i)x + y] + [(r - e_i)x + y]\| = \|[(2\lambda_i - r + e_i)x + y] - [(r - e_i)x + y]\|,$$

e, pelo lema 2.1.11, temos para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $|k| \geq 1$,

$$\|(2\lambda_i - r + e_i)x + y + k[(r - e_i)x + y]\| \geq \|(2\lambda_i - r + e_i)x + y\|. \quad (2.4)$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ qualquer, escolhemos $N_1 \geq N$ de modo que $k = \frac{2\lambda_i}{|p|} \geq 1$. Logo, k satisfaz (2.4).

Agora, dividindo por k , obtemos

$$\left\| \frac{(2\lambda_i - r + e_i)x + y}{2\lambda_i/p} + (r - e_i)x + y \right\| \geq \left\| \frac{(2\lambda_i - r + e_i)x + y}{2\lambda_i/p} \right\|,$$

equivalente a

$$\left\| p\left(1 - \frac{r - e_i}{2\lambda_i}\right)x + \frac{py}{2\lambda_i} + (r - e_i)x + y \right\| \geq \left\| p\left(1 - \frac{r - e_i}{2\lambda_i}\right)x + \frac{py}{2\lambda_i} \right\|.$$

Tomando o limite quando $i \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que para qualquer $p \in \mathbb{R}$

$$\|px + rx + y\| \geq \|px\|.$$

Dividindo por $|p|$ e utilizando o lema 2.1.5 e a definição temos que $x \perp rx + y$, donde concluímos que

$$r \geq A.$$

Por (2.3) temos que

$$r = A.$$

(ii) Seja B o maior b satisfazendo que $x \perp bx + y$. Então $-B$ é o menor dos b tais que $x \perp b(-x) - y$, e daí, por (i), temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x - y\| - \|\lambda x\|) = -(-B)\|x\|$$

e portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x\| - \|\lambda x - y\|) = -B\|x\|$$

■

Exemplo 2.1.13. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$. Calculemos A e B .

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|\lambda x + y\| - \|\lambda x\|) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\|(\lambda, 1)\| - \|(\lambda, 0)\|) = 1.$$

Portanto, $A = -1$.

Em forma análoga obtemos que $B = 1$ e daí

$$(1, 0) \perp (a, 1) \text{ para todo } a \in [-1, 1].$$

Figura 2.2.

2.2 Existência da Melhor Coaproximação.

Nesta seção, utilizando os resultados de seção 2.1, acharemos condições necessárias e suficientes para a existência da melhor coaproximação. Além disso, demonstraremos uma caracterização dos espaços de Hilbert utilizando a melhor coaproximação (teorema 2.2.13).

Proposição 2.2.1. *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X , g_0 em G e x em X . Então*

$$g_0 \in P_G(x) \iff x - g_0 \perp G.$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Sabemos que para todo $g \in G$

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\|, \quad (2.5)$$

e é preciso provar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $g_1 \in G$

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g_0 + \alpha g_1\|.$$

Então, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g_1 \in G$, consideremos $g = g_0 - \alpha g_1$, que pertence a G , que é subespaço. Substituindo em (2.5), obtemos o resultado desejado.

($\Leftarrow$)

Agora temos

$$x - g_0 \perp g_1 \quad \text{para todo } g_1 \in G,$$

o que significa que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $g_1 \in G$ temos

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g_0 + \alpha g_1\|.$$

Dado $g \in G$, tomando $\alpha = 1$ e $g_1 = g - g_0 \in G$ temos que $\|x - g_0\| \leq \|x - g\|$.

Logo, $g_0 \in P_G(x)$. ■

Proposição 2.2.2. *Sejam X um espaço normado, G subespaço de X , g_0 em G e x um ponto de X . Então*

$$g_0 \in R_G(x) \iff G \perp x - g_0.$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Temos que provar que para todo $g \in G$, tem-se $g \perp x - g_0$, ou seja, que para todo $g \in G$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|g\| \leq \|g + \alpha(x - g_0)\|.$$

Se $\alpha = 0$, a desigualdade é óbvia. Podemos então supor que $\alpha \neq 0$.

Como $g_0 \in R_G(x)$, então para todo $g_1 \in G$

$$\|g_0 - g_1\| \leq \|x - g_1\|.$$

Para cada $g \in G$, tomamos $g_1 = g_0 - \frac{1}{\alpha}g$, que pertence a G porque G é subespaço. Daí temos que para todo $g \in G$

$$\|g_0 - g_0 + \frac{1}{\alpha}g\| \leq \|x - (g_0 - \frac{1}{\alpha}g)\|,$$

ou

$$\frac{1}{|\alpha|}\|g\| \leq \|x - g_0 + \frac{1}{\alpha}g\|.$$

Portanto, para todo $g \in G$

$$\|g\| \leq \|g + \alpha(x - g_0)\|,$$

donde concluímos que

$$g \perp x - g_0 \quad \text{para todo } g \in G.$$

($\Leftarrow$)

Para qualquer $g \in G$ sabemos por hipótese que $g \perp x - g_0$, ou seja, para todo $g \in G$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\|g\| \leq \|g + \alpha(x - g_0)\|.$$

Para cada $g_1 \in G$ tomamos $\alpha = 1$ e $g = g_0 - g_1$, obtendo $\|g_0 - g_1\| \leq \|x - g_1\|$ e portanto $g_0 \in R_G(x)$. ■

Proposição 2.2.3. *Seja X um espaço pré-hilbertiano, G um subespaço de X e x um ponto de X . Então*

$$P_G(x) = R_G(x).$$

Prova :

Imediata. Basta observar que pelo corolário 2.1.4 a ortogonalidade é recíproca em espaços pré-hilbertianos e aplicar as proposições 2.2.1 e 2.2.2. ■

A relação $g_0 \in R_C(x)$ pode ser vista como um multioperador de X em $\mathcal{P}(C)$, onde os elementos de X que têm imagem não vazia têm um papel muito relevante em nosso estudo. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.2.4. Sejam X um espaço normado e C um subconjunto de X . Definimos o multioperador $R_C : X \rightarrow \mathcal{P}(C)$ por

$$R_C(x) = \{g_0 : g_0 \text{ é melhor coaproximação de } x \text{ em } C\},$$

e $D(R_C)$, como o conjunto dos elementos de X que têm melhor coaproximação em C , ou seja,

$$D(R_C) = \{x \in X : R_C(x) \neq \emptyset\}.$$

$D(R_G)$ é o domínio “razoável” de R_C e por isso é chamado de domínio de R_C .

Teorema 2.2.5. Sejam X um espaço normado e G um subespaço de X de dimensão 1. Então $D(R_G) = X$.

Demonstração :

Seja $x \in X$. Se x é um elemento de G nada temos a provar. Suponhamos que x não pertence ao subespaço G . Sendo $y \in G$ tal que $[y] = G$, pela proposição 2.1.8 temos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $y \perp by + x$.

Tomemos $g_0 = -by$, ou seja, $y \perp x - g_0$. Pelo lema 2.1.5 temos que $\lambda y \perp x - g_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, que por definição significa $G \perp x - g_0$. Logo, pela proposição 2.2.2, temos que $g_0 \in R_G(x)$. ■

Definição 2.2.6. Sejam X um espaço normado, $x \in X$ e G um subespaço de X . Definimos $\{x\} \cup G$ como o subespaço gerado por x e pelos elementos de G .

Lema 2.2.7. *Sejam X espaço normado. G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$ que tem melhor coaproximação em G . Então todo elemento de $\{x\} \cup G$ tem melhor coaproximação em G .*

Prova :

Sabemos que x tem melhor coaproximação em G , i.e., existe $x_0 \in G$ tal que

$$\|g - x_0\| \leq \|g - x\| \quad \text{para todo } g \in G. \quad (2.6)$$

Tomemos $y \in \{x\} \cup G$ qualquer, ou seja, $y = ax + z$ com $a \in \mathbb{R}$ e $z \in G$. Devemos provar que existe y_0 tal que

$$\|g - y_0\| \leq \|g - y\| \quad \text{para todo } g \in G.$$

Observando que se $a = 0$ o lema está satisfeito com $y_0 = z$, vamos supor que $a \neq 0$. Sendo $y_0 = ax_0 + z$, temos que $y_0 \in G$ e para $g \in G$ qualquer, como $g - z \in G$,

$$\begin{aligned} \|g - y_0\| &= \|g - ax_0 - z\| = |a| \left\| \frac{1}{a}(g - z) - x_0 \right\| \stackrel{(2.6)}{\leq} \\ &\leq |a| \left\| \frac{1}{a}(g - z) - x \right\| = \|g - z - ax\| = \|g - y\|. \end{aligned}$$

Então y_0 é melhor coaproximação de y em G . ■

Lema 2.2.8. *Sejam G e H subespaços de um espaço normado X tais que $G \subset H$. Se $x \in X \setminus H$ tem melhor coaproximação em H e todo elemento de H tem melhor coaproximação em G , então x tem melhor coaproximação em G . Mais precisamente, se $h_0 \in R_H(x)$ e $g_0 \in R_G(h_0)$, então $g_0 \in R_G(x)$.*

Prova :

Como x tem melhor coaproximação em H , sabemos que existe $h_0 \in H$ tal que

$$\|h - h_0\| \leq \|h - x\| \quad \text{para todo } h \in H. \quad (2.7)$$

Além disso, como todo elemento de H tem melhor coaproximação em G , em particular h_0 a tem, e portanto existe $g_0 \in G$ tal que

$$\|g - g_0\| \leq \|g - h_0\| \quad \text{para todo } g \in G.$$

Como $G \subset H$, a desigualdade (2.7) vale para todo $g \in G$, e daí,

$$\|g - g_0\| \leq \|g - h_0\| \leq \|g - x\| \quad \text{para todo } g \in G.$$

Logo, $g_0 \in G$ é ponto de melhor coaproximação de x em G . ■

Teorema 2.2.9. *Se para todo subespaço próprio F de um espaço normado X , existe $x \in X \setminus F$ que tem melhor coaproximação em F , então para qualquer subespaço G de X temos que $D(R_G) = X$.*

Demonstração :

Seja G um subespaço de X . Podemos supor $G \neq X$, pois $D(R_X) = X$. Consideremos então a família Σ de subespaços de X formados por elementos que contêm G e têm melhor coaproximação em G , isto é,

$$\Sigma = \{U \subset X : U \text{ subespaço de } X, G \subset U \subset D(R_G)\}$$

Observemos que $\Sigma \neq \emptyset$, pois $G \in \Sigma$. Consideremos em Σ a relação de ordem parcial " $\subset$ " dada pela inclusão entre conjuntos. Como toda cadeia $\{U_\alpha\}$ de Σ está limitada superiormente por $\bigcup_\alpha U_\alpha$, que é subespaço de X e pertence a Σ , temos pelo Lema de Zorn que Σ tem elemento maximal H .

Se $H = X$ temos $D(R_G) = X$. Suponhamos que $H \neq X$. Portanto existe $x \in X \setminus H$, que tem melhor coaproximação em H . Pelo lema 2.2.7 todo elemento de $\{\{x\} \cup H\}$ tem melhor coaproximação em H e pelo Lema 2.2.8, como $G \subset H \subset D(R_G)$, temos que todo elemento de $\{\{x\} \cup H\}$ tem melhor coaproximação em G , o que é absurdo pois H é maximal. ■

Definição 2.2.10. Seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto de um espaço normado X . A é chamado *admissível* se pode ser expresso como intersecção de bolas fechadas.

Chamaremos de *família completa de centros* de um conjunto admissível A a todo conjunto S tal que

$$A = \bigcap_{x \in S} \overline{B}_{r(x)}(x), \text{ onde } r : S \rightarrow [0, +\infty[.$$

Um subespaço fechado D é chamado *espaço diametral* de um conjunto admissível A se contém uma família completa de centros de A .

Teorema 2.2.11. *Sejam X um espaço normado, A um subconjunto admissível de X e D espaço diametral de A . Então*

$$R_D(A) = D \cap A.$$

Demonstração :

Como D é espaço diametral de A (i.e. D contém uma família completa S de centros de A), ele mesmo é uma família completa de centros, pois podemos estender a função $r : S \rightarrow [0, +\infty[$ para D tomando, para cada $z \in D \setminus S$, um raio $r(z)$ tal que $A \subset \overline{B}_{r(z)}(z)$, que existe porque A é limitado.

Portanto podemos escrever

$$A = \bigcap_{y \in D} \overline{B}_{r(y)}(y) \quad \text{onde } r : D \rightarrow [0, +\infty[.$$

Para $x \in A$, temos que

$$\|x - y\| \leq r(y) \quad \text{para todo } y \in D,$$

e pela proposição 1.1.4 sabemos que

$$R_D(x) = D \cap \left(\bigcap_{y \in D} \overline{B}_{\|x-y\|}(y) \right).$$

Logo ,

$$R_D(A) \subseteq D \cap A.$$

Reciprocamente, tomando $x \in D \cap A$ temos que

$$R_D(x) = \{x\} \subseteq R_D(A),$$

e portanto

$$D \cap A \subseteq R_D(A).$$

■

Teorema 2.2.12. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 3. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) para quaisquer $x, y \in X$, tais que $x \perp y$, tem-se que $y \perp x$;
- (iii) para todo hiperplano fechado H de X existe x não nulo tal que $H \perp x$.

Demonstração :

Para uma demonstração deste teorema, ver [Jam47b], teoremas 1 e 5. ■

Teorema 2.2.13. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 3. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) $A \cap D \neq \emptyset$ para todo subconjunto admissível A e todo espaço diametral D de A ;
- (iii) para todo hiperplano fechado G e todo x de X , $R_G(x) \neq \emptyset$, ou seja, $D(R_G) = X$.

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sejam A um subconjunto admissível de X e D um espaço diametral de A . Como X é um espaço de Hilbert, ele é reflexivo, e pelo lema 2.4 [Sin70] (pag. 99), temos que $P_D(A) \neq \emptyset$.

Além disso, sabemos pela proposição 2.2.3 que $P_D(A) = R_D(A)$. Pelo teorema 2.2.11 também sabemos que $R_D(A) = A \cap D$.

Logo,

$$A \cap D \neq \emptyset.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sejam G um hiperplano fechado de X e $x \in X$ quaisquer. Consideremos

$$B_G(x) = \bigcap_{y \in G} \overline{B}_{\|x-y\|}(y).$$

É fácil ver que $B_G(x) \neq \emptyset$, pois $x \in B_G(x)$, e que, pela maneira que foi definido, $B_G(x)$ é admissível e G é espaço diametral de $B_G(x)$.

Então, utilizando a hipótese, temos que $G \cap B_G(x) \neq \emptyset$, que pela proposição 1.1.4 implica em

$$R_G(x) \neq \emptyset.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Pelo teorema 2.2.12 basta provar que para todo hiperplano fechado G existe $v \neq 0$ tal que $G \perp v$.

Seja G um hiperplano de X . Tomemos $x \in X \setminus G$. Sabemos por hipótese que existe $g_0 \in R_G(x)$, ou seja, pela proposição 2.2.2, $G \perp x - g_0$, onde claramente $x - g_0 \neq 0$. Chamando $v = x - g_0$, o teorema está provado. ■

Teorema 2.2.14. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 3. Então são equivalentes:*

(i) X é um espaço de Hilbert;

(ii) para todo subespaço fechado G de X tem-se $D(R_G) = X$.

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Imediata. Basta aplicar a proposição 2.2.3 e lembrar que em espaços de Hilbert a melhor aproximação existe e é única para todo subespaço fechado G de X e para todo $x \in X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Consideremos somente os hiperplanos fechados H de X . Desta maneira temos que para todo hiperplano H de X existe $x \in X \setminus H$ tal que tem melhor coaproximação em H . Daí, pela proposição 2.2.2 temos que $H \perp (x - x_0)$, onde $x_0 \in R_H(x)$.

Portanto, chamando $v = x - x_0$, provamos que existe $v \neq 0$ tal que $H \perp v$, e pelo teorema 2.2.12 temos que X é um espaço de Hilbert. ■

Observação 2.2.15. Pelos teoremas 2.2.14 e 2.2.5 sabemos que só é possível afirmar a existência da melhor coaproximação para todo subespaço fechado e para todo ponto em espaços de Hilbert e em espaços de dimensão menor ou igual a 2.

Daremos agora alguns exemplos de não existência de melhor coaproximação.

Exemplo 2.2.16. Sejam $X = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ e G o subespaço de dimensão 2 de equação $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Temos que $R_G(x) = \emptyset$ para todo $x \in X \setminus G$. A justificação desta afirmação é geométrica (ver figura 2.3), notando que

$$R_G(x) = G \cap \left(\bigcap_{g \in G} (\overline{B}_{\|g-x\|}(g)) \right) \subset G \cap \left(\bigcap_{i=1,2,3} (\overline{B}_{\|g_i-x\|}(g_i)) \right) = \emptyset.$$

Figura 2.3.

Exemplo 2.2.17. Sejam $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$, $V = \{f \in X : f(0) = 0\}$ e $a = a(t) = 1$, $t \in [0, 1]$. Nestas condições vamos ver que $R_V(a) = \emptyset$. Suponhamos que existe $f_0 \in V$ tal que

$$\|f - f_0\|_\infty \leq \|f - a\|_\infty \text{ para toda } f \in V.$$

É fácil ver que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $|f_0(t_0)| < 1$, pois $f_0(0) = 0$ e f_0 é contínua.

Basta então tomar f da seguinte maneira:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(3+f_0(t_0))t}{t_0} & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ 3 + f_0(t_0) & \text{se } t_0 < t \leq 1, \end{cases}$$

e teremos

$$\|f - f_0\|_\infty \geq 3 > 2 + f_0(t_0) = \|f - a\|_\infty.$$

Logo

$$R_V(a) = \emptyset.$$

A figura 2.4 ilustra este exemplo com $f_0(t_0) > 0$, mas a mesma f funciona se $f_0(t_0) < 0$.

Figura 2.4.

2.3 Funções Convexas e Diferenciabilidade.

Nesta seção estudaremos algumas propriedades das funções convexas e da diferencial de Gâteaux, que serão, conjuntamente com os resultados obtidos na seção 2.1, de uma grande ajuda para determinar, na seção 2.4, condições suficientes para a unicidade e linearidade da melhor coaproximação.

Definição 2.3.1. Sejam Y um espaço vetorial e D um subconjunto convexo de Y . Dizemos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função convexa* se para quaisquer x e $y \in D$ e $0 \leq t \leq 1$,

$$f[tx + (1 - t)y] \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Observação 2.3.2. Em um espaço normado X , a função $f(x) = \|x\|$ é uma função convexa definida em X .

Definição 2.3.3. Seja f uma função com domínio um aberto D de X . Para $x_0 \in D$ e $x \in X$, definimos $d^+f_{x_0}(x)$ e $d^-f_{x_0}(x)$ por

$$d^+f_{x_0}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \text{ se esse limite for um número real,}$$

e

$$d^-f_{x_0}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \text{ se esse limite for um número real.}$$

Chamaremos *diferencial de Gâteaux* da função f em x_0 na direção x a $df_{x_0}(x)$ definida por

$$df_{x_0}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \text{ se esse limite for um número real.}$$

Dizemos que uma função f é *Gâteaux diferenciável* em x_0 se existe $df_{x_0}(x)$ para todo $x \in X$.

Proposição 2.3.4. *Seja f uma função convexa definida num convexo aberto D de X . Então a função $g(t) = \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$ é crescente à direita do zero e limitada inferiormente e portanto $d^+f_{x_0}$ sempre existe. Dito de outra maneira, a função g decresce até atingir seu limite quando $t \rightarrow 0^+$. De forma análoga, a função $m(t) = -\frac{f(x_0 - tx) - f(x_0)}{t}$ decresce à direita do zero e existe $d^-f_{x_0}$.*

Prova :

Se $x = 0$, a afirmação é verdadeira. Consideremos então $x \in X \setminus \{0\}$ e $x_0 \in D$ fixados.

Como D é aberto, temos que existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B}_\delta(x_0) \subset D$.

Tomemos $D_1 = \overline{B}_\delta(0)$ (ver figura 2.5).

Figura 2.5.

Primeiramente provaremos o crescimento de g . Devemos provar então que

$$\frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} \leq \frac{f(x_0 + sx) - f(x_0)}{s}, \text{ se } 0 < t < s \text{ e } sx \in D_1. \quad (2.8)$$

Para isso, começaremos mostrando que $h(z) = f(z + x_0)$ é uma função convexa definida em D_1 .

$$\begin{aligned} h(\alpha z + (1 - \alpha)y) &= f(\alpha z + (1 - \alpha)y + x_0) = f(\alpha(z + x_0) + (1 - \alpha)(y + x_0)) \leq \\ &\leq \alpha f(z + x_0) + (1 - \alpha)f(y + x_0) = \alpha h(z) + (1 - \alpha)h(y). \end{aligned}$$

Logo, h é convexa.

Agora provaremos a desigualdade (2.8).

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} &= \frac{h(tx) - h(0)}{t} = \frac{h((1 - \frac{t}{s})0 + \frac{t}{s}sx) - h(0)}{t} \leq \\ &\leq \frac{(1 - \frac{t}{s})h(0) + \frac{t}{s}h(sx) - h(0)}{t} = \frac{-h(0) + h(sx)}{s} = \frac{f(x_0 + sx) - f(x_0)}{s}. \end{aligned}$$

Então $g(t) = \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}$ é crescente à direita do zero. Portanto g decresce quando $t \rightarrow 0^+$.

Aplicando o anterior em $-x$, temos que $m(t) = -\frac{f(x_0-tx)-f(x_0)}{t}$ é decrescente à direita do zero. Portanto m cresce quando $t \rightarrow 0^+$.

Só resta provar que g está limitada inferiormente e m superiormente. Usando novamente a convexidade da f , temos que

$$2f(x_0) \leq f(x_0 - tx) + f(x_0 + tx),$$

e então para $\delta \geq \frac{t}{\|x\|} > 0$

$$m(\delta) \leq \frac{-[f(x_0 - tx) - f(x_0)]}{t} \leq \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} \leq g(\delta)$$

o que implica que a função $g(t) = \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}$ está limitada inferiormente e a função $m(t) = \frac{-[f(x_0-tx)-f(x_0)]}{t}$ está limitada superiormente. Logo, concluem-se nossas afirmações. ■

Lema 2.3.5. *Se f é uma função convexa num aberto convexo D de X , então $d^+f_{x_0}$ é sublinear, para todo $x_0 \in D$.*

Prova :

Precisamos mostrar, para cada $x_0 \in D$,

$$(i) \ d^+f_{x_0}(x+y) \leq d^+f_{x_0}(x) + d^+f_{x_0}(y) \text{ para quaisquer } x, y \in X$$

e

$$(ii) \ d^+f_{x_0}(kx) = kd^+f_{x_0}(x) \text{ para todo } k \in \mathbb{R}^+ \text{ e todo } x \in X.$$

Para (i), consideremos $x_0 \in D$, $x, y \in X$ e $t > 0$. Fazendo operações e usando o fato de que f é convexa temos

$$\begin{aligned} f(x_0 + t(x+y)) - f(x_0) &= f(x_0 + 2t(\frac{x+y}{2})) - f(x_0) = \\ &= f(\frac{1}{2}(x_0 + 2tx) + \frac{1}{2}(x_0 + 2ty)) - f(x_0) \leq \\ &\leq \frac{f(x_0 + 2tx) + f(x_0 + 2ty) - 2f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0 + 2tx) - f(x_0)}{2} + \frac{f(x_0 + 2ty) - f(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

Dividindo por t e fazendo o limite quando $t \rightarrow 0^+$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t(x+y)) - f(x_0)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t},$$

o que significa que

$$d^+ f_{x_0}(x+y) \leq d^+ f_{x_0}(x) + d^+ f_{x_0}(y).$$

Para (ii), se $k \neq 0$, usando diretamente a definição para $x_0 \in X$, $x \in X$ e $k \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} d^+ f_{x_0}(kx) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + k(tx)) - f(x_0)}{t} = \\ &= k \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + (kt)x) - f(x_0)}{kt} = kd^+ f_{x_0}(x). \end{aligned}$$

Se $k = 0$ a igualdade é imediata. ■

Lema 2.3.6. *Sejam X um espaço normado e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função sublinear. Então*

$$p \text{ é linear} \iff p(-x) = -p(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Imediata.

($\Leftarrow$)

Precisamos provar

$$(i) \ p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \text{ e todo } x \in X$$

e

$$(ii) \ p(x+y) = p(x) + p(y), \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}.$$

Para (i), basta considerar $a < 0$, e então temos que

$$p(ax) = -a \ p(-x) = -a(-p(x)) = a \ p(x).$$

Para (ii), basta provar que $p(x + y) \geq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$.
 Como $p(x) = p(x + y - y) \leq p(x + y) + p(-y) = p(x + y) - p(y)$, segue-se nosso resultado. ■

Proposição 2.3.7. *Sejam X um espaço normado e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa que seja Gâteaux diferenciável em x_0 . Então df_{x_0} é linear.*

Prova :

Sabendo por hipótese que f é Gâteaux diferenciável em x_0 , por definição

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} \text{ existe para todo } x \in X.$$

Trivialmente temos que $df_{x_0}(x) = d^+f_{x_0}(x)$. Por outro lado temos, pelo lema 2.3.5, que $d^+f_{x_0}$ é sublinear e portanto df_{x_0} o é.

Além disso, é fácil ver que $df_{x_0}(-x) = -df_{x_0}(x)$. Logo, pelo lema 2.3.6, concluímos que df_{x_0} é linear. ■

Definição 2.3.8. Sejam X um espaço normado. Dizemos que X é suave se para todo $x \neq 0$ e todo $y \in X$, existe e é real o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

isto é, a função norma é Gâteaux diferenciável em todos os pontos de $X \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.3.9. Os espaços $X_p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$ são suaves.

Exemplo 2.3.10. $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ não é suave. Sejam $f(x) = 1$ e $g(x) = \sin(2\pi x)$ (ver figura 2.6).

É fácil ver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f + tg\| - \|f\|}{t} \text{ não existe,}$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|f + tg\| - \|f\|}{t} = 1$$

enquanto que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|f + tg\| - \|f\|}{t} = -1.$$

Figura 2.6. $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ não é suave.

2.4 Unicidade e Linearidade da Melhor Coaproximação.

Nesta seção estudaremos condições para a unicidade e linearidade da melhor coaproximação.

Lema 2.4.1. *Sejam X um espaço normado suave, $x \neq 0$ e $y \in X$. Então*

$$x \perp y \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = 0.$$

Prova :

($\Rightarrow$)

Como $x \perp y$, sabemos que $\|x\| \leq \|x + ty\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq 0,$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = 0,$$

pois, como X é suave, existe esse último limite e é igual aos outros dois.

($\Leftarrow$)

Sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = 0$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = 0.$$

Logo, como a função norma é convexa, pela proposição 2.3.4,

$$\|x + ty\| - \|x\| \geq 0 \quad \text{se} \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \|x + ty\| - \|x\| \geq 0 \quad \text{se} \quad t \leq 0.$$

Portanto

$$x \perp y.$$

■

Teorema 2.4.2. *Seja X um espaço normado. Então são equivalentes:*

- (i) X é suave;
- (ii) a ortogonalidade é aditiva à direita;
- (iii) dados x, y em X , x não nulo, existe um único $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \perp ax + y$.

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sejam x, y e z elementos de X tais que $x \perp y$ e $x \perp z$. Devemos provar que $x \perp (y + z)$. Como para $x = 0$ a afirmação é óbvia, consideraremos $x \neq 0$.

Pelo lema 2.4.1 ($\Rightarrow$), sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + tz\| - \|x\|}{t} = 0.$$

Escrito de outra maneira, tomando $f = \|\cdot\|$,

$$df_x(y) = 0 \quad \text{e} \quad df_x(z) = 0.$$

Pelo corolário 2.3.7 temos que

$$df_x(y) + df_x(z) = df_x(y + z) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + t(y + z)\| - \|x\|}{t} = 0.$$

Portanto, pelo lema 2.4.1 ($\Leftarrow$),

$$x \perp (y + z).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sejam $x \neq 0$ e y em X quaisquer. Pela proposição 2.1.8, sabemos que existem A e B em $\mathbb{R}$ tais que $x \perp Ax + y$ e $x \perp Bx + y$, onde A e B são respectivamente, o menor e o maior dos números a tais que $x \perp ax + y$.

Logo, pela homogeneidade da ortogonalidade e usando a hipótese, conclue-se que

$$x \perp (A - B)x,$$

e portanto,

$$A = B,$$

donde existe um único $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \perp ax + y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sejam $x \neq 0$ e y em X quaisquer. Devemos provar que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$ existe, ou ainda, que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$, pois esses dois limites existem (proposição 2.3.4).

Calculemos o primeiro:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\|x + ty\| - \|x\|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (\|x + \frac{1}{n}y\| - \|x\|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|nx + y\| - \|nx\|). \end{aligned}$$

Mas esse último limite é conhecido e igual a $-A\|x\|$, onde A é o menor dos $a \in \mathbb{R}$ que satisfazem $x \perp ax + y$.

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = -A\|x\|.$$

Analogamente, se prova que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = -B\|x\|,$$

onde B é o maior dos $a \in \mathbb{R}$ que satisfazem $x \perp ax + y$. Como por hipótese $A = B$, deduz-se que X é suave. ■

Teorema 2.4.3. *X é suave se e somente se $R_G(y)$ é unitário para todo $y \in D(R_G)$ e todo subespaço G de X .*

Demonstração :

($\Rightarrow$)

Sejam x em X , g_1 e g_2 em $R_G(x)$. Mostraremos que $g_1 = g_2$.

Como $g_1 \in R_G(x)$ e $g_2 \in R_G(x)$ então $G \perp (x - g_1)$ e $G \perp (x - g_2)$. Logo, pelo teorema 2.4.2 temos que $G \perp (g_1 - g_2)$. Daí obtemos que $g_1 - g_2 = 0$, pois $g_1 - g_2 \in G$ porque G é subespaço.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que X não é suave. Então existem $x \neq 0$ e y em X , tais que

$$-A\|x\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = -B\|x\|.$$

Donde, pelo lema 2.4.1, temos que $x \perp y + Ax$ e $x \perp y + Bx$.

Portanto, tomando $[x] = G$, concluímos que $G \perp y - (-Ax)$ e $G \perp y - (-Bx)$ e daí

$$-Ax \in R_G(y) \text{ e } -Bx \in R_G(y).$$

Logo, $R_G(y)$ não é unitário, o que é absurdo. ■

Teorema 2.4.4. *Se X é um espaço normado suave e G é um subespaço de X , então*

- (i) *para todo $x \in X$, se não for vazio, $R_G(x)$ é unitário;*
- (ii) *$D = D(R_G)$ é um subespaço de X ;*
- (iii) *$R_G : D \rightarrow G$ é linear (considerado como função).*

Demonstração :

(i) Foi provado no teorema 2.4.3.

(ii) Sejam $x, y \in D(R_G)$. Pela proposição 2.2.2, existem $x_0, y_0 \in G$ tais que $G \perp x - x_0$ e $G \perp y - y_0$. Pelo teorema 2.4.2, $G \perp (x + y) - (x_0 + y_0)$.

Novamente pela proposição 2.2.2, $x + y \in D(R_G)$ pois $x_0 + y_0 \in G$.

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, pelo lema 2.1.5, $G \perp \lambda x - \lambda x_0$ e, pela proposição 2.2.2, $\lambda x \in D(R_G)$ pois $\lambda x_0 \in G$.

(iii) Imediata pela demonstração (ii). ■

Capítulo 3

Hipercírculos de Chebyshev e Coaproximação

O objetivo deste capítulo é caracterizar espaços de Hilbert a partir de espaços reflexivos usando a melhor coaproximação. Para chegar a ele, primeiramente estudaremos algumas propriedades dos hipercírculos e centros de Chebyshev, as quais têm uma importância relevante no desenvolvimento do capítulo.

3.1 Hipercírculos e Centros de Chebyshev

Nesta seção daremos os conceitos e algumas propriedades, tanto dos hipercírculos como dos centros de Chebyshev. Os resultados serão muito úteis na seção 3.2, na qual acharemos uma caracterização para espaços de Hilbert a partir dos espaços reflexivos.

Definição 3.1.1. Sejam A e V subconjuntos não vazios de X , A limitado. Consideramos $F_A : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$F_A(x) = \sup_{y \in A} \{\|x - y\|\}, \quad x \in X.$$

Chamamos *Raio de Chebyshev de A* , denotado por $r(A)$, a

$$r(A) = \inf_{x \in X} F_A(x). \quad (3.1)$$

Chamamos *Raio de Chebyshev de A com respeito a V*, denotado por $r_V(A)$, a

$$r_V(A) = \inf_{x \in V} F_A(x). \quad (3.2)$$

Um elemento x_0 de X é chamado *centro* de A se $F_A(x_0) = r(A)$. Analogamente, um ponto y_0 de V é chamado *centro de A com respeito a V*, se $F_A(y_0) = r_V(A)$. Denotaremos $E(A)$ o conjunto de centros de A e $E_V(A)$ o conjunto de centros de A com respeito a V .

Definição 3.1.2. Sejam V um subespaço fechado de um espaço normado X , $a \in X$ e $s \in \mathbb{R}$ tais que $d(a, V) = d < s$. Definimos *s-hipercírculo* de V como

$$C_s = \overline{B}_s(a) \cap V = \{v \in V : \|v - a\| \leq s\}. \quad (3.3)$$

Denotaremos $r_s = r_V(C_s) = \inf_{y \in V} [\sup_{x \in C_s} \|x - y\|]$.

Observação 3.1.3. É fácil ver que $\inf_{y \in C_s} \|a - y\| = \inf_{y \in V} \|a - y\| = d$. Basta observar que se $y \in V \setminus C_s$, $\|a - y\| > s \geq \inf_{z \in C_s} \|a - z\|$.

Figura 3.1.

A partir daqui consideramos X um espaço de Banach real, e fixamos um subespaço fechado não trivial V de X e $a \in X$ com $d(a, V) = d$.

Proposição 3.1.4. Se $s > d$, então

$$c \in E_V(C_s) \iff \begin{cases} c \in V \\ \|c - x\| \leq \|a - x\| + r_s - s, \quad \forall x \in C_s. \end{cases}$$

Prova :

($\Leftarrow$)

Sabemos da hipótese que para todo $x \in C_s$

$$\|c - x\| \leq \|a - x\| + r_s - s.$$

Tomamos o supremo em $x \in C_s$ e obtemos

$$\sup_{x \in C_s} \|c - x\| \leq \sup_{x \in C_s} \{\|a - x\| + r_s - s\}.$$

Como $\sup_{x \in C_s} \|a - x\| \leq s$, pois $C_s \subset \overline{B}_s(a)$, temos que

$$\sup_{x \in C_s} \|c - x\| \leq r_s.$$

Mas $r_s = \inf_{y \in V} [\sup_{x \in C_s} \|x - y\|] \leq \sup_{x \in C_s} \|c - x\|$, porque $c \in V$.

Daí, $\sup_{x \in C_s} \|c - x\| = r_s$ e portanto

$$c \in E_V(C_s).$$

($\Rightarrow$)

Separemos em dois casos: (i) $x = c$ e (ii) $x \neq c$.

(i) $x = c$

Como $r_s = \sup_{z \in C_s} \|z - c\|$, temos que para todo $z \in C_s$, $r_s \geq \|z - c\|$, em particular para z na fronteira de C_s , onde, além disso, sabemos que $\|a - z\| = s$.

Por outro lado, pela desigualdade triangular temos que para todo $z \in X$

$$\|z - c\| \geq \|a - z\| - \|a - c\|.$$

Em resumo temos que $r_s \geq s - \|a - c\|$, ou $\|a - c\| + r_s - s \geq 0$.

Figura 3.2.

(ii) $x \neq c$.

Se $x \neq c$, a reta cx corta a fronteira de C_s em dois pontos distintos e_1 e e_2 pertencentes a C_s , porque X é completo, V é fechado e C_s é convexo, limitado e fechado. Eles podem ser expressos assim:

$e_1 = \lambda_1 c + (1 - \lambda_1)x$, e $e_2 = \lambda_2 c + (1 - \lambda_2)x$, e é simples ver que λ_1 e λ_2 não podem ser positivos ao mesmo tempo. Vamos supor que λ_1 não é positivo.

Sabemos que $\|c - e_1\| \leq r_s$, pois c é centro de C_s e $e_1 \in C_s$, e então

$$\|c - \lambda_1 c - (1 - \lambda_1)x\| = (1 - \lambda_1)\|c - x\| \leq r_s = r_s - s + s = r_s - s + \|a - e_1\|.$$

Por outro lado,

$$\|a - e_1\| = \|a - \lambda_1 c - (1 - \lambda_1)x\| \leq \|a - x\| - \lambda_1\|c - x\|,$$

e portanto

$$(1 - \lambda_1)\|c - x\| \leq r_s - s + \|a - x\| - \lambda_1\|c - x\|.$$

Logo

$$\|c - x\| \leq r_s - s + \|a - x\|.$$

■

Como os conjuntos E e E_V podem ser vazios, vamos definir “quase centros” de modo que seja possível garantir sua existência.

Definição 3.1.5. Nas condições da definição 3.1.1, consideramos $\varepsilon > 0$. Um elemento c de X é chamado ε -quase centro de A se

$$\sup_{x \in A} \|c - x\| \leq r(A) + \varepsilon.$$

Analogamente, um ponto c de V é chamado ε -quase centro de A com respeito a V se

$$\sup_{x \in A} \|c - x\| \leq r_V(A) + \varepsilon.$$

Denotaremos $E^\varepsilon(A)$ o conjunto de ε -quase centros de A e $E_V^\varepsilon(A)$ o conjunto de ε -quase centros de A com respeito a V , ou seja,

$$E^\varepsilon(A) = \{c \in X : \sup_{v \in A} \|c - v\| \leq r(A) + \varepsilon\}$$

e

$$E_V^\varepsilon(A) = \{c \in V : \sup_{v \in A} \|c - v\| \leq r_V(A) + \varepsilon\}.$$

Proposição 3.1.6. *Se $s > d$ e C_s é o s -hipercírculo de V , então, para qualquer $\varepsilon > 0$,*

$$c \in E_V^\varepsilon(C_s) \iff \begin{cases} c \in V \\ \|c - x\| \leq \|a - x\| + r_s - s + \varepsilon \quad \forall x \in C_s. \end{cases}$$

Prova :

Análoga à proposição 3.1.4. ■

Proposição 3.1.7. *Se $s > d$, vale que*

$$s - d \leq r_s \leq s + d.$$

Prova :

Por definição e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} r_s &= \inf_{y \in V} [\sup_{x \in C_s} \|x - y\|] \leq \sup_{x \in C_s} \|x - y\| \\ &\leq \sup_{x \in C_s} \{\|x - a\| + \|a - y\|\} = \|a - y\| + \sup_{x \in C_s} \|x - a\| = \\ &= \|a - y\| + s, \quad \text{para todo } y \in V. \end{aligned}$$

Logo,

$$r_s \leq d + s.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sejam $c \in E_V^\varepsilon(C_s)$ e x qualquer elemento de C_s . Então

$$r_s \geq s - \varepsilon + \|c - x\| - \|a - x\| \geq s - \varepsilon - \|a - x\|.$$

Daí, como x é qualquer, pela observação 3.1.3, $r_s \geq s - d - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, o que implica

$$r_s \geq s - d. \quad \text{■}$$

Os exemplos a seguir mostram que podem ocorrer as igualdades na proposição 3.1.7.

Exemplo 3.1.8. Consideremos $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$, $V = \{f \in X : f(0) = 0\}$ e $a = a(t) = 1, t \in [0, 1]$. Como $d(a, V) = 1$, devemos tomar $s = d + \varepsilon = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Seja $f \in V$ qualquer. Se $f \equiv 0$, é imediato que

$$\sup_{y \in C_s} \|f - y\| = \sup_{y \in C_s} \|y\| = 2 + \varepsilon. \quad (3.4)$$

Suponhamos então $f \not\equiv 0$ e consideremos dois casos:

- (a) existe algum $t_0 \in (0, 1]$ tal que $f(t_0) < 0$,
- (b) $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

- (a) Neste caso escolhemos a função $y_{t_0} \in C_s$ dada por

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} \frac{2+\varepsilon}{t_0}t & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ 2 + \varepsilon & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Logo,

$$\sup_{y \in C_s} \|f - y\| > 2 + \varepsilon. \quad (3.5)$$

- (b) Agora temos que $f \not\equiv 0$ e que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Seja $\delta < m$ qualquer, onde $m = \max_{t \in [0, 1]} \{f(t)\}$. Pela continuidade de f , temos que existe $t_\delta \in (0, 1]$ tal que $f(t_\delta) = \delta$. Escolhemos $y_\delta \in C_s$ dada por

$$y_\delta(t) = \begin{cases} \frac{2+\varepsilon}{t_\delta}t & \text{se } 0 \leq t \leq t_\delta \\ 2 + \varepsilon & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Portanto, $\|f - y_\delta\| \geq 2 + \varepsilon - \delta$ e como δ é qualquer, concluímos que

$$\sup_{y \in C_s} \|f - y\| \geq 2 + \varepsilon. \quad (3.6)$$

Em resumo, por (3.4), (3.5) e (3.6), temos que para todo $f \in V$ vale

$$\sup_{y \in C_s} \|f - y\| \geq 2 + \varepsilon,$$

e pela proposição anterior deduz-se que

$$r_s = \inf_{f \in V} [\sup_{y \in C_s} \|f - y\|] = 2 + \varepsilon.$$

Assim,

$$r_s = s + d.$$

Figura 3.3.

Exemplo 3.1.9. Consideremos agora $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $V = \{(x_1, x_2) \in X : x_1 = -x_2\}$ e $a = (1, 1)$.

Novamente $d = 1$, e tomamos $s = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, só que neste caso $r_s = \varepsilon$, portanto

$$r_s = s - d.$$

Figura 3.4.

Corolário 3.1.10. *Se $s > d$, C_s é o s -hipercírculo de V e $c \in E_V(C_s)$, valem*

1. Se $\{x_n\}$ é uma seqüência em C_s e $\|x_n - c\| \xrightarrow{n} r_s$, então $\|a - x_n\| \xrightarrow{n} s$.
2. $\|c - a\| \leq 2d + r_s - s$.
3. Se $s \geq 2d + r_s - s$ então $c \in C_s$.
4. Se $0 \in C_s$ então $\|c\| \leq \|a\| + r_s - s$.
5. Se $v_0 \in P_V(a)$ então $\|c - v_0\| \leq d + r_s - s$.

Prova :

1. Sabemos que $c \in E_V(C_s)$ e então

$$\|c - x\| \leq \|a - x\| + r_s - s, \text{ para todo } x \in C_s.$$

Portanto, como $x_n \in C_s$, temos $s - \|a - x_n\| \leq r_s - \|c - x_n\|$ e $\|a - x_n\| \leq s$, donde, $0 \leq s - \|a - x_n\| \leq r_s - \|c - x_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \rightarrow \infty$, está provada a afirmação.

2. Para todo $x \in C_s$, como

$$\|c - a\| = \|c - x + x - a\| \leq \|c - x\| + \|x - a\|,$$

temos que

$$\|c - a\| \leq \|a - x\| + r_s - s + \|x - a\| = 2\|a - x\| + r_s - s.$$

Logo, pela observação 3.1.3, tomando o ínfimo em $x \in C_s$, obtemos o resultado desejado.

3. É imediato pela parte anterior.
4. Imediato. Basta substituir $x = 0$ na proposição 3.1.4.
5. Seja $v_0 \in P_V(a)$. Então $v_0 \in C_s$, pois $d = \|v_0 - a\| < s$, e portanto

$$\|c - v_0\| \leq \|a - v_0\| + r_s - s = d + r_s - s.$$

■

Proposição 3.1.11. *Se X é um espaço de Hilbert e $s > d$, então*

$$r_s = \sqrt{s^2 - d^2}.$$

Prova :

Sabemos que $P_V(a)$ é unitário. Seja $P_V(a) = \{h_0\}$.

($\leq$)

Mostraremos que $r_s^2 \leq s^2 - d^2$:

$$r_s^2 \leq \sup_{x \in C_s} \|h_0 - x\|^2 = \sup_{x \in C_s} (\|x - a\|^2 - d^2) \leq s^2 - d^2.$$

($\geq$)

Seja δ o diâmetro de C_s e sejam α e β os pontos de corte da fronteira de C_s com uma reta qualquer pelo ponto h_0 .

Então temos

$$\|\alpha - \beta\| = 2\sqrt{s^2 - d^2}, \text{ pois o triângulo } (a\alpha\beta) \text{ é isósceles.}$$

Portanto

$$\delta \geq 2\sqrt{s^2 - d^2}$$

Consideremos $\varepsilon > 0$ e $y \in E_V^\varepsilon(C_s)$. Então para quaisquer $x, z \in C_s$ vale que

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|x - y\| \leq \sup_{z \in C_s} \|z - y\| + \sup_{x \in C_s} \|x - y\| \leq 2r_s + 2\varepsilon.$$

Tomando o supremo em $x, z \in C_s$ obtemos

$$\delta \leq 2r_s + 2\varepsilon.$$

Daí, como ε é qualquer,

$$r_s \geq \frac{1}{2}\delta,$$

e portanto

$$r_s \geq \sqrt{s^2 - d^2}.$$

■

Proposição 3.1.12. *Se X é um espaço de Hilbert e $s > d$ então o único centro de C_s é h_0 , onde $P_V(a) = \{h_0\}$.*

Prova :

Para provar que h_0 é centro de C_s , pela proposição 3.1.4 basta mostrar que

$$\|h_0 - x\| \leq \|a - x\| + r_s - s \quad \forall x \in C_s.$$

Pela proposição 3.1.7 sabemos que $|r_s - s| \leq d$ e como $\|a - x\| \geq d$, vamos provar que

$$\|h_0 - x\|^2 \leq (\|a - x\| + r_s - s)^2 \quad \text{para todo } x \in C_s,$$

o que por Pitágoras significa

$$\|a - x\|^2 - d^2 \leq \|a - x\|^2 - 2(s - r_s)\|a - x\| + (s - r_s)^2,$$

ou ainda,

$$(s - r_s)^2 - 2(s - r_s)\|a - x\| + d^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x \in C_s.$$

Mas pela proposição 3.1.11 sabemos que

$$d^2 = s^2 - r_s^2,$$

donde

$$(s - r_s)^2 - 2(s - r_s)s + d^2 = 0$$

e também

$$s - r_s \geq 0.$$

Como $\|a - x\| \leq s$ para todo $x \in C_s$, obtemos o resultado desejado.

Agora provaremos que h_0 é o único centro de C_s . Suponhamos que exista c , centro de C_s tal que $c \neq h_0$. Seja então a reta $r = \{\alpha h_0 + (1 - \alpha)c : \alpha \in \mathbb{R}\}$. A reta r corta a fronteira de C_s em dois pontos distintos e_1 e e_2 pertencentes a C_s porque X , fechado é completo, V é fechado e C_s é convexo, limitado e fechado.

Figura 3.5.

É claro, pela proposição 3.1.11, que $e_1 \neq h_0 \neq e_2$ pois $\|e_1 - h_0\| = \|e_2 - h_0\| = r_s$. Além disso, c está entre h_0 e e_1 ou e_2 estritamente. Suponhamos que c está entre e_2 e h_0 , logo $\|c - e_1\| > r_s$, o que é absurdo. Resulta análogo se c está entre e_2 e h_0 . ■

3.2 Uma Caracterização para Espaços de Hilbert

Nesta seção vamos achar uma caracterização de espaços de Hilbert a partir dos espaços reflexivos. Utilizaremos resultados das seções 2.1 e 3.1 e também propriedades da melhor coaproximação vistas nos capítulos anteriores. Em toda a seção trabalharemos X , V e a fixados, onde X é um espaço normado real, V um subespaço de X e $a \in X$.

Teorema 3.2.1. *A função $L :]d, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L(s) = l_s = r_s - s$ tem limite finito quando $s \rightarrow \infty$.*

Demonstração :

Vamos mostrar que L é crescente. Suponhamos que existam s e t , $s < t$, tais que $l_s > l_t$. Então é possível escrever

$$l_s - l_t = 2\varepsilon \quad \text{com } \varepsilon > 0.$$

Sejam c um ε -quase centro de C_t e x em C_s qualquer. Então, como $C_s \subset C_t$, pela proposição 3.1.6

$$\|c - x\| \leq \|a - x\| + r_t - t + \varepsilon = \|a - x\| + l_t + \varepsilon = \|a - x\| + l_s - \varepsilon. \quad (3.7)$$

Em particular, como $l_s - \varepsilon \leq l_s$, pela proposição 3.1.4 deduz-se que c é centro de C_s .

Como c é centro de C_s e portanto $r_s = \sup_{x \in C_s} \|x - c\|$, podemos tomar uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\|x_n - c\| \xrightarrow{n} r_s$. Logo, utilizando a parte 1 do corolário 3.1.10 e a desigualdade (3.7)

$$r_s \leq s + l_s - \varepsilon,$$

e portanto $r_s \leq r_s - \varepsilon$, o que resulta absurdo. Então concluímos que para $s < t$

$$l_s = L(s) \leq L(t) = l_t.$$

Além disso, pela proposição 3.1.7 sabemos que L é limitada superiormente por d . Daí,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) \in \mathbb{R}.$$

■

Definição 3.2.2. Chamaremos l a

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} L(s).$$

O valor l , na verdade, deveria ser chamado $l(V, a)$ pois ele depende do subespaço V e do ponto a .

Observação 3.2.3. A expressão que aparece na proposição 3.1.4 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$E_V(C_s) = \bigcap_{x \in C_s} \overline{B}_{\|a-x\|+l_s}(x) \cap V.$$

Portanto, como $l_s \leq l$, é fácil ver que

$$\bigcap_{x \in C_s} \overline{B}_{\|a-x\|+l_s}(x) \cap V \subset \bigcap_{x \in C_s} \overline{B}_{\|a-x\|+l}(x) \cap V. \quad (3.8)$$

Definição 3.2.4. Definimos o conjunto V_s por

$$V_s = \bigcap_{x \in C_s} \overline{B}_{\|a-x\|+l}(x) \cap V.$$

Definimos o conjunto V_∞ por

$$V_\infty = \bigcap_{s > d} V_s.$$

Observação 3.2.5. Sejam s e t tais que $d < s < t$. Como $C_s \subset C_t$ temos que $V_t \subset V_s$, e se $V_s \neq \emptyset$ para todo $s > d$ então $V_\infty \neq \emptyset$. É fácil ver que se $v_0 \in V$

$$v_0 \in V_\infty \iff \|v_0 - x\| \leq \|x - a\| + l \quad \text{para todo } x \in V. \quad (3.9)$$

Teorema 3.2.6. *Seja X um espaço de Banach. Então, para qualquer subespaço fechado V de X ,*

$$a \in D(R_V) \Rightarrow l \leq 0.$$

Se $V_\infty \neq \emptyset$, vale a implicação contrária e portanto

$$a \in D(R_V) \iff l \leq 0.$$

Demonstração :

Se $a \in D(R_V)$, então existe $v_0 \in V$ tal que

$$\|x - v_0\| \leq \|a - x\| \quad \text{para todo } x \in V.$$

Portanto

$$r_s \leq \sup_{x \in C_s} \|x - v_0\| \leq \sup_{x \in C_s} \|x - a\| \leq s.$$

Daí

$$l_s = r_s - s \leq 0.$$

Logo

$$l \leq 0.$$

Suponhamos agora $l \leq 0$ e $V_\infty \neq \emptyset$. Então existe $v_0 \in V$ tal que satisfaz a inequação que aparece em (3.9). Como $l \leq 0$, para todo $x \in V$ vale

$$\|v_0 - x\| \leq \|a - x\|.$$

Logo,

$$a \in D(R_V).$$

■

Definição 3.2.7. Seja G um subespaço de X . Uma função $P : X \rightarrow G$ é chamada *projeção* de X sobre G se satisfaz:

- $P(P(x)) = P(x)$ para todo $x \in X$,
- P é linear contínua.

Definição 3.2.8. Um subespaço G , é chamado *constrito* em X , se existir uma projeção $P : X \rightarrow G$, com $\|P\| = 1$ e $P(X) = G$.

Teorema 3.2.9. *Se X é um espaço de Banach que é constricto em X^{**} , então todo subconjunto limitado de X tem centro de Chebyshev.*

Demonstração :

Para uma demonstração ver [Hol72] (pag. 184). ■

Corolário 3.2.10. *Seja X um espaço reflexivo. Então todo subconjunto limitado e não vazio A de X tem centro de Chebyshev.*

Prova :

Imediata. Como X é reflexivo, consideremos $J^{-1} : X^{**} \rightarrow X$. Claramente J^{-1} satisfaz as condições do teorema 3.2.9. ■

Observação 3.2.11. Do corolário anterior se deduz que, se X for reflexivo, $V_\infty \neq \emptyset$ para quaisquer a e V , pois

$$\emptyset \neq E_V(C_s) \stackrel{(3.8)}{\subset} V_s.$$

e daí, pela observação 3.2.5

$$V_\infty \neq \emptyset.$$

Corolário 3.2.12. *Seja X um espaço reflexivo de dimensão maior ou igual a 3. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) $l = 0$ quaisquer que sejam $a \in V$;
- (iii) $l \leq 0$ quaisquer que sejam $a \in V$.

Prova :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

É imediato pela proposição 3.1.11, pois $l_s = r_s - s = \sqrt{s^2 - d^2} - s \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

A implicação é óbvia.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Como $l \leq 0$ para quaisquer $a \in V$, pela observação 3.2.11 e pelo teorema 3.2.6 temos que $a \in D(R_V)$, ou seja, $D(R_V) \neq \emptyset$.

Portanto, pelo teorema 2.2.14, X é um espaço de Hilbert. ■

A seguir veremos por que no teorema 3.2.6 é necessária a hipótese $\dim X \geq 3$.

Teorema 3.2.13. *Sejam X um espaço normado, V um subespaço de X de $\dim=1$ e $a \notin V$. Então*

- (i) *existe $c_0 \in X$ tal que $c_0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} c_s$, onde c_s é o ponto médio de C_s ;*
- (ii) *$V \perp a - c_0$.*

Demonstração :

- (i) Seja c tal que $[c]=V$. Portanto, a partir de algum s_1 , existem $\alpha_s > 0$ e $\beta_s < 0$ tais que

$$\|\beta_s c - a\| = \|\alpha_s c - a\| = s.$$

Como $\alpha_s \rightarrow +\infty$ e $\beta_s \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$, pela proposição 2.1.12 sabemos que

$$\|\alpha_s c\| - \|\alpha_s c - a\| = A\|c\| + \varepsilon_s$$

e

$$\|-\beta_s c\| - \|-\beta_s c + a\| = -B\|c\| + \eta_s,$$

onde A e B são o menor e o maior dos α 's que satisfazem $c \perp \alpha c - a$, $\varepsilon_s \rightarrow 0$ e $\eta_s \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$.

Escrito de outra forma

$$\alpha_s \|c\| = A\|c\| + s + \varepsilon_s$$

e

$$\beta_s \|c\| = B\|c\| - s - \eta_s.$$

Daí

$$\frac{\alpha_s + \beta_s}{2} \|c\| = \frac{A + B}{2} \|c\| + \gamma_s$$

onde $\gamma_s \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$. Portanto

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_s + \beta_s}{2} = \frac{A+B}{2} \quad \text{e como} \quad c_s = \frac{\alpha_s + \beta_s}{2} c,$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c_s = \frac{A+B}{2}c = c_0.$$

(ii) Além disso, pelo lema 2.1.9 temos que $c \perp c_0 - a$ pois $A \leq \frac{A+B}{2} \leq B$, donde se deduz

$$V \perp c_0 - a.$$

Figura 3.6.

Observação 3.2.14. Se no teorema 3.2.13 considerarmos $V_1 = [\{a\} \cup V]$, teríamos que V_1 é um espaço reflexivo com $l \leq 0$ para quaisquer a e V (ver teorema 3.2.6). Mas V_1 não precisa ser um espaço de Hilbert, o que mostra a necessidade da hipótese $\dim X \geq 3$ no corolário 3.2.12.

Capítulo 4

Caracterizações de Melhor Coaproximação e Aplicações

Neste capítulo estudaremos condições necessárias e suficientes para a existência de melhor coaproximação utilizando condições já conhecidas para a existência da melhor aproximação.

Primeiramente, provaremos algumas proposições que vinculam a melhor coaproximação de um ponto em um subespaço com a melhor aproximação desse mesmo ponto em um outro subespaço que será definido oportunamente. Para isso, utilizaremos resultados conhecidos sobre a melhor aproximação, cujas provas omitiremos por serem bastante longas. Citaremos, em cada caso, as páginas onde elas podem ser encontradas em [Sin70].

Além disso, aplicando esses resultados, estudaremos a existência e caracterizações de coaproximações polinômicas no espaço $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ e uma caracterização de espaços estritamente convexos.

Em todo o capítulo utilizaremos as conhecidas notações B_X e S_X :

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{e} \quad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

4.1 Caracterizações de Melhor Coaproximação

Nesta seção estudaremos caracterizações de melhor coaproximação utilizando uma caracterização de melhor aproximação. Os resultados serão muito importantes nas seções 4.2 e 4.3.

Proposição 4.1.1. *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$. Então*

$$R_G(x) = \{g_0 \in G : g_0 \in \bigcap_{g \in G} P_V(g)\}, \quad (4.1)$$

onde $V = \{g_0 + \alpha(x - g_0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Prova :

Seja $g_0 \in R_G(x)$. Provaremos que $g_0 \in P_V(g)$ para qualquer $g \in G$.

Para quaisquer $g \in G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$\|g - g_0 - \alpha(x - g_0)\| \geq \|g - g_0\|$, pois $G \perp x - g_0$, e portanto

$$g_0 \in \bigcap_{g \in G} P_V(g). \quad (4.2)$$

Reciprocamente, se $g_0 \in G$ e satisfaz a expressão (4.2), temos que para todo $g \in G$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\|g - \alpha x - (1 - \alpha)g_0\| \geq \|g - g_0\|.$$

Daí, tomando $\alpha = 1$, concluímos que para todo $g \in G$

$$\|g - x\| \geq \|g - g_0\|,$$

ou seja,

$$g_0 \in R_G(x).$$

■

Figura 4.1.

Corolário 4.1.2. *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X , $x \in X \setminus G$ e $g_0 \in G$.*

Então

$$g_0 \in R_G(x) \iff G \subset P_{[x-g_0]}^{-1}(0) = \{z \in X : 0 \in P_{[x-g_0]}(z)\}, \quad (4.3)$$

onde $[x - g_0] = \{\beta(x - g_0) : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Prova :

Sendo V como na proposição 4.1.1, basta observar que $g_0 \in P_V(g)$ se e somente se $0 \in P_{[x-g_0]}(g - g_0)$ e utilizar a proposição 4.1.1. ■

Figura 4.2.

Teorema 4.1.3. *Sejam X um espaço normado de dimensão maior ou igual que 2, V um subespaço afim de X de dimensão 1, $z \in X$ e $v_0 \in V$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $v_0 \in P_V(z)$;
- (ii) existe $f \in X^*$ tal que:

- 1) $\|f\| = 1$,
- 2) $f(v - v_0) = 0$, para todo $v \in V$,
- 3) $f(z - v_0) = \|z - v_0\|$.

Demonstração :

Consideraremos dois casos: a) $z \in X \setminus V$ e b) $z \in V$.

Para o caso a) $z \in X \setminus V$, ver [Sin70] (teorema 5.1, pag.138).

Agora provaremos o caso b) $z \in V$.

(i) $(\Rightarrow)$ (ii)

Temos que $z \in V$ e $v_0 \in P_V(z)$, logo $v_0 = z$. Seja G um subespaço de dimensão 2 de X tal que $V \subset G$. Como V é um subespaço afim de G de dimensão 1, é em particular um hiperplano afim de G . Portanto existem $\hat{f} \in G^*$ não nulo e $c \in \mathbb{R}$ tais, que $V = \hat{f}^{-1}(c)$. Seja $\tilde{f} = \frac{\hat{f}}{\|\hat{f}\|}$. Agora, pelo teorema de Hann-Banach, estendemos $\tilde{f}$ a todo X e seja f tal extensão. É fácil ver que f satisfaz as propriedades 1), 2) e 3).

(ii) $(\Rightarrow)$ (i)

Agora temos que $z \in V$ e que existe $f \in X^*$ tal que satisfaz as propriedades 1), 2) e 3).

Por 2), como $z \in V$, temos que

$$f(z - v_0) = 0.$$

Logo, por 3),

$$\|z - v_0\| = 0.$$

Portanto $z = v_0$ e daí

$$v_0 \in P_V(z).$$

■

Teorema 4.1.4. *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$. Então, se $g_0 \in G$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $g_0 \in R_G(x)$.

(ii) Para cada $g \in G$ existe um funcional linear $f^g \in X^*$ tal que

$$\|f^g\| = 1,$$

$$f^g(x) = f^g(g_0),$$

$$f^g(g) = \|g\|.$$

(iii) Para cada $g \in G$ existe um funcional linear $f^g \in X^*$ tal que

$$\|f^g\| = 1,$$

$$f^g(x) = f^g(g_0),$$

$$|f^g(g)| = \|g\|.$$

Demonstração :

(i) $\iff$ (ii)

Seja $g \in G$ qualquer.

Sabemos pela proposição 4.1.1 que, sendo $V = \{g_0 + \alpha(x - g_0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$$g_0 \in R_G(x) \text{ se e somente } g_0 \in P_V(g_1) \text{ para todo } g_1 \in G,$$

o que, pelo teorema 4.1.3, é equivalente com:

- para todo $g_1 \in G$, existe $f \in X^*$ tal que

$$1) \|f\| = 1,$$

$$2) f(v - g_0) = 0 \text{ para todo } v \text{ da forma } g_0 + \alpha(x - g_0),$$

$$3) f(g_1 - g_0) = \|g_1 - g_0\|.$$

Observando que por hipótese $g_0 \in G$, para todo $g \in G$ podemos escrever $g + g_0 = g_1$, e obtemos também a equivalência com:

- para todo $g \in G$, existe $f^g \in X^*$ tal que

$$1') \|f^g\| = 1,$$

$$2') f^g(\alpha x + (1 - \alpha)g_0 - g_0) = \alpha f^g(x - g_0) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$3') f^g(g) = \|g\|.$$

Logo, (i) é equivalente a (ii).

Figura 4.3.

$$(ii) \iff (iii)$$

Imediata. No pior dos casos devemos trocar o sinal da f . ■

Lema 4.1.5. *Sejam X um espaço de Banach de dimensão 2 e $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Então existem 2 pontos extremais $\varphi_1, \varphi_2 \in S_{X^*}$ (não necessariamente distintos) e λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tais que*

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Prova :

Para uma demonstração deste lema ver [Sin70] (lema 1.1, pag.166). ■

Lema 4.1.6. *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X e φ um ponto extremal de S_{G^*} . Então existe uma extensão de φ para um ponto extremal $\hat{\varphi}$ de S_{X^*} .*

Prova :

Para uma demonstração deste lema ver [Sin70] (lema 1.2, pag.167). ■

Teorema 4.1.7. *Sejam X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 2, V um subespaço afim de X de dimensão 1, $y \in X$ e $v_0 \in V$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $v_0 \in P_V(y)$;

(ii) existem f_1 e f_2 pontos extremais de S_{X^*} e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que:

1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

2) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v - v_0) = 0$, para todo $v \in V$,

3) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(y - v_0) = \|y - v_0\|$.

Demonstração :

Consideraremos dois casos: a) $y \in X \setminus V$ e b) $y \in V$.

Para o caso a) $z \in X \setminus V$, ver [Sin70] (teorema 4.1, pag.242). Agora provaremos o caso b) $z \in V$.

(i) $(\Rightarrow)$ (ii)

Seja G subespaço de dimensão 2 de X tal que $V \subset G$.

Como $v_0 \in P_V(y)$, pelo teorema 4.1.3 sabemos que existe $f \in G^*$ tal que

$$\|f\| = 1,$$

$$f(v - v_0) = 0 \text{ para todo } v \in V,$$

$$f(x - v_0) = \|x - v_0\|.$$

Portanto, pelo lema 4.1.5 existem φ_1, φ_2 pontos extremais de S_{G^*} e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ tais que

$$f = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Agora, utilizando o lema 4.1.6 estendemos φ_1 e φ_2 para f_1 e f_2 , pontos extremais de S_{X^*} . É fácil ver que

1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

2) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v - v_0) = (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(v - v_0) = 0$, para todo $v \in V$,

$$3) (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(y - v_0) = \|y - v_0\| = 0.$$

(ii) $(\Rightarrow)$ (i)

Agora temos que $y \in V$ e que existe $f \in X^*$ tal que satisfaz as propriedades 1), 2) e 3).

Por 2), como $y \in V$, temos que

$$f(y - v_0) = 0,$$

Logo, por 3)

$$\|y - v_0\| = 0.$$

Portanto $x = v_0$ e daí

$$v_0 \in P_V(y).$$

■

Teorema 4.1.8. *Sejam X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual que 2, G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$. Um elemento g_0 de G é tal que $g_0 \in R_G(x)$ se e somente se para cada $g \in G$, existem dois pontos extremais f_1^g e f_2^g (não necessariamente distintos) de S_{X^*} e dois números λ_1^g e λ_2^g em $\mathbb{R}^+$, com $\lambda_1^g + \lambda_2^g = 1$, tais que*

$$\lambda_1^g f_1^g(x) + \lambda_2^g f_2^g(x) = \lambda_1^g f_1^g(g_0) + \lambda_2^g f_2^g(g_0), \quad (4.4)$$

$$\lambda_1^g f_1^g(g) + \lambda_2^g f_2^g(g) = \|g\|. \quad (4.5)$$

Demonstração :

Sabemos pela proposição 4.1.1 que, sendo $V = \{g_0 + \alpha(x - g_0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$$g_0 \in R_G(x) \text{ se e somente } g_0 \in P_V(g_1) \text{ para todo } g_1 \in G,$$

o que, pelo teorema 4.1.7, é equivalente com:

- para todo $g_1 \in G$, existem f_1, f_2 pontos extremais de S_{X^*} e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$1) \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$$2) (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v - g_0) = 0, \text{ para todo } v \text{ da forma } g_0 + \alpha(x - g_0),$$

$$3) (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(g_1 - g_0) = \|g_1 - g_0\|.$$

Observando que por hipótese $g_0 \in G$, para qualquer $g \in G$ podemos escrever $g + g_0 = g_1$, e obtemos também a equivalência com:

- para todo $g \in G$, existem f_1^g, f_2^g pontos extremais de S_{X^*} e $\lambda_1^g, \lambda_2^g \in \mathbb{R}$ tais que

$$1') \lambda_1^g + \lambda_2^g = 1,$$

$$2') (\lambda_1 f_1^g + \lambda_2 f_2^g)(\alpha x + (1 - \alpha)g_0 - g_0) = \alpha(\lambda_1 f_1^g + \lambda_2 f_2^g)(x - g_0) = 0, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$3') (\lambda_1 f_1^g + \lambda_2 f_2^g)(g) = \|g\|.$$

■

4.2 Melhor Coaproximação Polinômica

Nesta seção, utilizando os teoremas 4.1.4 e 4.1.8 estudaremos condições de existência e caracterizações da melhor coaproximação em $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ no subespaço dos polinômios $\mathcal{P}$ e em alguns subespaços de $\mathcal{P}$.

Teorema 4.2.1. *Sejam $X = (C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$, G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$. Um elemento g_0 de G satisfaz que $g_0 \in R_G(x)$ se e somente se para cada $g \in G$, existem dois pontos q_1^g e q_2^g de $[a, b]$ e dois números μ_1^g e μ_2^g em $\mathbb{R}$, com $|\mu_1^g| + |\mu_2^g| = 1$, tais que*

$$\mu_1^g x(q_1^g) + \mu_2^g x(q_2^g) = \mu_1^g g_0(q_1^g) + \mu_2^g g_0(q_2^g), \quad (4.6)$$

$$\mu_1^g g(q_1^g) + \mu_2^g g(q_2^g) = \|g\|_\infty. \quad (4.7)$$

Demonstração :

Sabemos por [D-S58] (pag.441) que um funcional linear $f \in X^*$ é um ponto extremal de B_{X^*} se e somente se existe um $q \in [a, b]$ e um número real ε com $|\varepsilon| = 1$, tal que para todo $y \in X$

$$f(y) = \varepsilon y(q).$$

($\Rightarrow$)

Se $g_0 \in R_G(x)$, para cada $g \in G$ existem f_i^g e λ_i^g como no teorema 4.1.8, $i = 1, 2$. Escrevendo os extremais f_i^g por $f_i^g(y) = \varepsilon_i^g y(q_i^g)$, definindo $\mu_i^g = \lambda_i^g \varepsilon_i^g$, $i = 1, 2$, e substituindo em (4.4) e (4.5), obtemos imediatamente as expressões (4.6) e (4.7).

($\Leftarrow$)

Reciprocamente, se q_i^g e μ_i^g estão nas condições de (4.6) e (4.7), então, para cada $g \in G$, definindo

$$f_i^g(y) = \begin{cases} (\text{sg} \mu_i^g) y(q_i^g), & \text{se } \mu_i^g \neq 0 \\ y(q_i^g) & \text{se } \mu_i^g = 0, \end{cases}$$

e $\lambda_i^g = |\mu_i^g|$, $i = 1, 2$ nos dois casos, obtemos $\lambda_1^g + \lambda_2^g = 1$, f_i^g extremais de S_{X^*} e as expressões (4.4) e (4.5). Logo, pelo teorema 4.1.8, concluímos que $g_0 \in R_G(x)$. ■

Observação 4.2.2. Para quaisquer $g \in G$, $q_1^g, q_2^g \in [a, b]$ e μ_1^g, μ_2^g como no teorema 4.2.1, se $\mu_1^g \neq 0$, então $|g(q_1^g)| = \|g\|_\infty$. De fato, $|g(q_1^g)| \leq \|g\|_\infty$ e supondo que $|g(q_1^g)| < \|g\|_\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} |\mu_1^g g(q_1^g) + \mu_2^g g(q_2^g)| &\leq |\mu_1^g g(q_1^g)| + |\mu_2^g g(q_2^g)| < \\ &< |\mu_1^g| \|g\| + |\mu_2^g| \|g(q_2^g)\| \leq (|\mu_1^g| + |\mu_2^g|) \|g\|_\infty = \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

o que contradiz a expressão (4.7). Analogamente, se $\mu_2^g \neq 0$, $|g(q_2^g)| = \|g\|_\infty$.

Observação 4.2.3. Se $|g(q_1^g)| = \|g\|_\infty$, então claramente a expressão (4.7) está satisfeita com $\mu_1^g = \text{sgn}(g(q_1^g))$ e $\mu_2^g = 0$. Análogo para $i = 2$.

A seguir veremos que, apesar da observação 4.2.3, existem casos em que devem ser dois os números q_i^g mencionados nas hipóteses do teorema 4.2.1.

Exemplo 4.2.4. Sejam $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, $y(t) = 2t - 1$, $G = [y]$ e $x(t) = |t - \frac{1}{2}|$. Primeiro vejamos que $G \perp x$. Pela homogeneidade da ortogonalidade basta verificar que $y \perp x$. Com efeito, se $\alpha \geq 0$, então

$$\|y + \alpha x\|_\infty \geq (y + \alpha x)(1) \geq y(1) = 1 = \|y\|_\infty,$$

e se $\alpha \leq 0$,

$$\|y + \alpha x\|_\infty \geq (y + \alpha x)(0) \geq y(0) = -1 = \|y\|_\infty,$$

o que prova nossa afirmação.

Figura 4.4.

Como $G \perp x$, então $g_0 = 0 \in R_G(x)$. Agora observemos que se as expressões (4.6) e (4.7) estivessem satisfeitas com $|\mu_1^g| = 1$ e $\mu_2^g = 0$, então por (4.7), q_1^g deveria ser 0 ou 1, que são os pontos onde $\|g\|_\infty$ é atingida, para qualquer $g \in G$. Mas esses valores não satisfariam (4.6) pois $g_0(0) = 0 \neq \frac{1}{2} = x(0)$ e $g_0(1) = 0 \neq \frac{1}{2} = x(1)$. De fato, os valores que satisfazem as equações (4.6) e (4.7), são $q_1^g = 0$, $q_2^g = 1$, $\mu_1^g = -\frac{1}{2}$ e $\mu_2^g = \frac{1}{2}$, se $g(t) = k(2t - 1)$ para $k \geq 0$ e $q_1^g = 0$, $q_2^g = 1$, $\mu_1^g = \frac{1}{2}$ e $\mu_2^g = -\frac{1}{2}$, para $k < 0$.

Teorema 4.2.5. *Sejam $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, G um subespaço de X e $x \in X \setminus G$, que tem (pelo menos uma) melhor coaproximação g_0 em G . Se existe $h \in G$ tal que $|h|$ atinge seu máximo absoluto estrito em algum $t_0 \in [a, b]$ (i.e. $|h(t_0)| = \|h\| > |h(q)|$ para todo $q \neq t_0$, $q \in [a, b]$), então*

$$g_0(t_0) = x(t_0) \quad (4.8)$$

Demonstração :

Sejam q_i^h e μ_i^h ($i = 1, 2$) nas condições do teorema 4.2.1. Então, pela observação 4.2.2, para cada $i = 1, 2$ tal que $\mu_i^h \neq 0$ temos que $|h(q_i^h)| = \|h\|_\infty$. Logo, se $\mu_i^h \neq 0$, $q_i^h = t_0$.

Usando agora a expressão (4.7), temos, quaisquer que sejam os μ_i^h ,

$$\|h\|_\infty = \mu_1^h h(q_1^h) + \mu_2^h h(q_2^h) = \mu_1^h h(t_0) + \mu_2^h h(t_0),$$

e portanto, como $\|h\|_\infty \neq 0$, temos que $\mu_1^h + \mu_2^h \neq 0$.

Mas, pela equação (4.6), $\mu_1^h x(t_0) + \mu_2^h x(t_0) = \mu_1^h g_0(t_0) + \mu_2^h g_0(t_0)$, e então

$$x(t_0) = g_0(t_0).$$

■

Corolário 4.2.6. *Sejam $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ e G um subespaço de X tal que para todo ponto t de um conjunto M denso em $[a, b]$ existe uma função $f_t \in G$ tal que $|f_t|$ atinge seu máximo absoluto estrito em t . Então, para todo $x \in X \setminus G$,*

$$R_G(x) = \emptyset.$$

Prova :

Seja $x \in X \setminus G$ e suponhamos que existe $g_0 \in R_G(x)$. Então, pelo corolário 4.2.5, temos que $x(t) = g_0(t)$ para todo $t \in M$. Logo, pela continuidade de x , concluímos que $x = g_0 \in G$, o que resulta absurdo. Portanto $R_G(x) = \emptyset$. ■

Observação 4.2.7. Lembremos do exemplo 2.4. Nele $G = \{f \in X : f(0) = 0\}$ e havíamos visto que $R_G(a) = \emptyset$, onde $a \equiv 1$. É fácil ver que para todo racional t em $(0, 1]$, existe uma função $y_t \in G$ que atinge o máximo absoluto em t . Pelo corolário anterior, $R_G(x) = \emptyset$ para todo $x \in X \setminus G$ e não só para a . (figura 4.5)

Figura 4.5.

Corolário 4.2.8. Seja $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ e seja G um subespaço de X contendo as funções $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t$ e $g_3(t) = t^2$. Então para toda $x \in X \setminus G$

$$R_G(x) = \emptyset.$$

Prova :

É fácil ver que para todo $s \in [0, 1]$ existe uma função g_s da forma $g_s(t) = at^2 + bt + c$ que atinge um máximo absoluto estrito em s . Logo, pelo corolário 4.2.6, temos que para toda $x \in X \setminus G$

$$R_G(x) = \emptyset.$$

■

Proposição 4.2.9. Sejam $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $G = [1]$ e $x \in X \setminus G$. Então

$$R_G(x) = \{g_0 \in G : g_0 \equiv c, \text{ com } \min_{t \in [a, b]} x(t) \leq c \leq \max_{t \in [a, b]} x(t)\}.$$

Prova :

Sabemos pelo teorema 2.2.5 que $R_G(x) \neq \emptyset$. Seja então $g_0 \in R_G(x)$, $g_0(t) = c$ para todo $t \in [0, 1]$. Para $g(t) = 1 \in G$, tomemos os q_i^g e os μ_i^g como no teorema 4.2.1.

Então, pela equação (4.7), temos que $\mu_1^g + \mu_2^g = 1$, e como além disso $|\mu_1^g| + |\mu_2^g| = 1$, concluímos que $\mu_i^g \geq 0$. Em consequência

$$\min_{t \in [a,b]} x(t) \leq \mu_1^g x(q_1^g) + \mu_2^g x(q_2^g) \leq \max_{t \in [a,b]} x(t),$$

e

$$\mu_1^g g_0(q_1^g) + \mu_2^g g_0(q_2^g) = (\mu_1^g + \mu_2^g)c = c.$$

Daí, utilizando a equação (4.6), obtemos

$$\min_{t \in [a,b]} x(t) \leq c \leq \max_{t \in [a,b]} x(t).$$

Reciprocamente, tomemos $g_0 \in G$, $g_0 \equiv c \in G$, com c satisfazendo

$$\min_{t \in [a,b]} x(t) \leq c \leq \max_{t \in [a,b]} x(t).$$

Então, como x é contínua, existe $q_0 \in [a, b]$ tal que $x(q_0) = c$. Portanto, para qualquer $g \in G$, tomamos $q_1^g = q_2^g = q_0$, $\mu_1^g = 1$ e $\mu_2^g = 0$. É fácil ver que com esses valores as equações (4.6) e (4.7) estão satisfeitas. Logo, pelo teorema 4.2.1, deduz-se que

$$g_0 \in R_G(x).$$

■

Observação 4.2.10. Lembremos do exemplo 1.2.7. Lá, $G = [1]$. Não é só para a função $f(t) = e^t$ que temos $c \in R_G(f)$, para todo $c \in f([0, 1])$, pois, segundo a proposição 4.2.9, isso acontece para qualquer elemento de $X \setminus G$.

Proposição 4.2.11. *Sejam $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$, $n \geq 1$, $G = [t^n]$ e $x \in X \setminus G$. Então $R_G(x)$ é unitário, dado por*

$$R_G(x) = \{x(1)t^n\}.$$

Prova :

De novo, pelo teorema 2.2.5, sabemos que $R_G(x) \neq \emptyset$. Seja então $g_0 \in R_G(x)$, que é da forma $g_0(t) = \alpha_0 t^n$. Então, como $g(t) = t^n$ atinge seu máximo absoluto em $t = 1$, pelo corolário 4.8 segue que $x(1) = g_0(1) = \alpha_0$. Logo $g_0(t) = x(1)t^n$, ou seja, $R_G(x) = \{x(1)t^n\}$. ■

Proposição 4.2.12. *Sejam $X = (C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$, $G = [1, z]$, onde*

$$\min_{t \in [a, b]} z(t) = z(t_1) < z(t_2) = \max_{t \in [a, b]} z(t), \quad (4.9)$$

e seja $x \in X \setminus G$. Então $g_0 \in R_G(x)$, onde

$$g_0(t) = \frac{x(t_1)z(t_2) - x(t_2)z(t_1) + [x(t_2) - x(t_1)]z(t)}{z(t_2) - z(t_1)}, t \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Além disso, se existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $|g_i|$ atingem seus máximos absolutos estritos em t_i , $i = 1, 2$, então $R_G(x)$ é um conjunto unitário para cada $x \in X \setminus G$, ou seja, $R_G(x) = \{g_0\}$.

Prova :

Seja g_0 definida como em (4.10). Então $g_0 \in G$, $g_0(t_1) = x(t_1)$ e $g_0(t_2) = x(t_2)$. Também, para toda $g = \alpha_1 + \alpha_2 z \in G$, temos por (4.9) que ou $|g(t_1)| = \|g\|_\infty$ ou $|g(t_2)| = \|g\|_\infty$. No primeiro caso, tomamos $q_1^g = t_1$, $q_2^g = t_2$, $\mu_1^g = \text{sgg}(t_1)$ e $\mu_2^g = 0$. No segundo, tomamos os mesmos q_i^g , $\mu_1^g = 0$ e $\mu_2^g = \text{sgg}(t_2)$. Desta maneira estão satisfeitas as equações (4.6) e (4.7). Portanto, pelo teorema 4.2.1, temos que

$$g_0 \in R_G(x).$$

Suponhamos agora que existam $g_1, g_2 \in G$ tais que $|g_i|$ atingem seus máximos absolutos estritos em t_i , $i = 1, 2$. Então, pelo teorema 4.2.5, temos que toda $g_0 \in R_G(x)$ satisfaz

$$x(t_i) = g_0(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Sejam g_0 e $h_0 \in R_G(x)$. Eles podem ser expressos assim:

$$g_0 = \alpha_1 + \alpha_2 z \quad \text{e} \quad h_0 = \alpha'_1 + \alpha'_2 z.$$

Então

$$\alpha_1 + \alpha_2 z(t_1) = x(t_1) = \alpha'_1 + \alpha'_2 z(t_1)$$

e

$$\alpha_1 + \alpha_2 z(t_2) = x(t_2) = \alpha'_1 + \alpha'_2 z(t_2).$$

Subtraindo obtemos

$$\alpha_2[z(t_1) - z(t_2)] = \alpha'_2[z(t_1) - z(t_2)].$$

Daí, como $z(t_1) - z(t_2) \neq 0$, temos que $\alpha_2 = \alpha'_2$ e portanto $\alpha_1 = \alpha'_1$, donde

$$g_0 = h_0.$$

■

Observação 4.2.13. Um caso particular do resultado obtido na proposição 4.2.12 foi estudado no exemplo 1.2.6, o qual requereu um longo trabalho. Nele, foi necessário estudar varios casos, alguns deles bastante complicados. Observe-se que, utilizando o resultado anterior, resultam muito simples os cálculos.

Corolário 4.2.14. Para $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ e $G = [1, t^n]$ temos que para qualquer $x \in X \setminus G$.

$$R_G(x) = \{x(0) + [x(1) - x(0)]t^n\}.$$

Prova :

Imediata. basta aplicar a proposição 4.2.12. ■

4.3 Uma Caracterização para Espaços Estritamente Convexos

O objetivo desta seção é caracterizar os espaços estritamente convexos por meio da melhor coaproximação. Compararemos os resultados com outros já conhecidos sobre caracterização de espaços estritamente convexos utilizando a melhor aproximação.

Daremos também, alguns exemplos e contraexemplos utilizando o assunto do capítulo.

Definição 4.3.1. Um espaço normado X é chamado estritamente convexo se para quaisquer $x, y \in X$ distintos com $\|x\| = \|y\| = 1$, temos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Exemplo 4.3.2. Os espaços $L_p[0, 1]$, os l_p com suas normas p correspondentes são estritamente convexos para $1 < p < \infty$.

Exemplo 4.3.3. Os espaços $L_1[0, 1]$, l_1 , $L_\infty[0, 1]$ e l_∞ com suas normas correspondentes não são estritamente convexos.

Exemplo 4.3.4. O espaço $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ não é estritamente convexo. De fato, sendo $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$, temos que

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| = 1 \text{ e } \|y\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |y(t)| = 1,$$

mas

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{x+y}{2}(t) \right| = 1.$$

Figura 4.6. $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$ não é estritamente convexo.

Observação 4.3.5. De acordo com a definição 4.3.1, deduz-se que um espaço normado é estritamente convexo se, e somente se, todo subespaço de dimensão 2 o é. Daí, por exemplo, $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_p)$ é estritamente convexo para $1 < p < \infty$, pois os espaços l_p o são. Os espaços l_1 e l_∞ não são estritamente convexos pois $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$, não o são.

Agora demonstraremos o resultado principal desta seção e logo vamos compará-lo com os resultados conhecidos que vinculam convexidade estrita e melhor aproximação.

Teorema 4.3.6. *Seja X um espaço normado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Para todo subespaço G de X , todo $x \in X \setminus G$, todo $g_0 \in R_G(x)$ e todo $g \in G$, temos*

$$\|g_0 - g\| < \|x - g\|;$$

- (ii) *para todo subespaço G de X de dimensão 1, todo $x \in X \setminus G$, todo $g_0 \in R_G(x)$ e todo $g \in G$, temos*

$$\|g_0 - g\| < \|x - g\|;$$

- (iii) *para todo subespaço G de X , todo $x \in X \setminus G$ e todo $g_0 \in R_G(x)$, temos*

$$\|g_0\| < \|x\|;$$

(iv) para todo subespaço G de X de dimensão 1, todo $x \in X \setminus G$ e todo $g_0 \in R_G(x)$, temos

$$\|g_0\| < \|x\|;$$

(v) X é estritamente convexo.

Demonstração :

Algumas das implicações são imediatas: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv)$ e $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

$(iv) \Rightarrow (v)$

Se X não for estritamente convexo, existem $x, y \in X$ distintos tais que

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1.$$

Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(\alpha) = \|y + \alpha(x - y)\|$. Provaremos que φ é uma função convexa. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $t \in]0, 1[$.

$$\varphi(t\alpha + (1-t)\beta) = \|y + (t\alpha + (1-t)\beta)(x - y)\| =$$

$$= \|(1-t)y + ty + (1-t)\beta(x - y)\| = \|t(y + \alpha(x - y)) + (1-t)(y + \beta(x - y))\| \leq$$

$$\leq t\|y + \alpha(x - y)\| + (1-t)\|y + \beta(x - y)\| = t\varphi(\alpha) + (1-t)\varphi(\beta),$$

Logo, φ é convexa.

Agora, utilizando a convexidade da φ , vamos provar que $\|y + \alpha(x - y)\| \geq 1$, ou seja, $\varphi(\alpha) \geq 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Figura 4.7. $\|y + \alpha(x - y)\| \geq 1$.

Suponhamos que exista $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\alpha_1) < 1$. Então $\alpha_1 \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, pois $\varphi(0) = \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = 1$. O valor $\alpha = \frac{1}{2}$ pode ser obtido como combinação convexa de α_1 e 1 ou de 0 e α_1 , dependendo da posição de α_1 em relação a $\frac{1}{2}$: $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ ou $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, respectivamente, (ver figura 4.7).

Como

$$t\varphi(\alpha_1) + (1-t)\varphi(1) < 1,$$

e

$$t\varphi(0) + (1-t)\varphi(\alpha_1) < 1,$$

e $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$, contrariamos o fato de φ ser convexa. Logo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\|y + \alpha(x - y)\| \geq 1. \quad (4.11)$$

Usando (4.11), e como $\|y\| = 1$, obtemos $y \perp (x - y)$.

Em resumo, tomando $G = [y]$ e $g_0 = y$ obtivemos que $g_0 \in R_G(x)$ com $\|g_0\| = \|x\|$ o que resulta absurdo pois, por hipótese, temos que $\|g_0\| < \|x\|$. Portanto X é estritamente convexo.

(v) $\Rightarrow$ (i)

Suponhamos que existam um subespaço G de X , $x \in X \setminus G$, $g_0 \in R_G(x)$ e $g \in G$ tais que $\|g_0 - g\| = \|x - g\|$. Pelo teorema 4.1.4 sabemos que existe $f = f^{g_0-g}$ em X^* tal que

$$\|f\| = 1,$$

$$f(x) = f(g_0),$$

$$f(g_0 - g) = \|g_0 - g\|.$$

Daí obtemos

$$f(x - g) = f(x - g_0 + g_0 - g) = f(g_0 - g) = \|g_0 - g\| = \|x - g\|.$$

É fácil ver que $v_1 = \frac{g_0-g}{\|g_0-g\|} \neq v_2 = \frac{x-g}{\|x-g\|}$, pois $g_0 \in G$ e $x \notin G$ e também que $g \neq g_0$ pois $x \neq g$.

Em resumo, obtivemos dois vetores distintos de norma 1, v_1 e v_2 , tais que f atinge

sua norma neles. Também temos que $f(\frac{v_1+v_2}{2}) = 1$, onde $v_1 + v_2$ não pode ser nulo pois $f \in X^*$.

Se $\|\frac{v_1+v_2}{2}\| < 1$, tomamos $\lambda = \frac{1}{\|\frac{v_1+v_2}{2}\|} > 1$ e obtemos que $f(\lambda\frac{v_1+v_2}{2}) = \lambda > 1$ o que é absurdo pela definição de norma de f .

Logo, $\|\frac{v_1+v_2}{2}\| = 1$ e portanto X não é estritamente convexo, o que contradiz a hipótese. ■

Exemplo 4.3.7. Embora já tenha sido observado em 4.3.4, vamos ver, usando o teorema 4.3.6, que $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ não é estritamente convexo. Sejam $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $G = [1, t]$ e $x = x(t) = t^4$. Pela proposição 4.2.12, sabemos que existe um único $g_0 \in R_G(x)$ e ele é $g_0(t) = t$ (ver figura 4.8). É simples ver que as funções da forma $g_\alpha(t) = x - \alpha$ com $\alpha \geq \frac{3}{8\sqrt[3]{2}}$ (ver exemplo 1.2.6) satisfazem que $\|g_0 - g_\alpha\| = \|x - g_\alpha\|$.

Logo, $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ não é estritamente convexo.

Figura 4.8.

A seguir citaremos um conhecido resultado que caracteriza espaços estritamente convexos através da melhor aproximação.

Teorema 4.3.8. *Seja X um espaço normado. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) *Para todo subespaço G de X , todo $x \in X \setminus G$, todo $g_0 \in P_G(x)$ e todo $g \in G \setminus \{g_0\}$, temos*

$$\|x - g_0\| < \|x - g\|;$$

(ii) para todo subespaço G de dimensão 1 de X , todo $x \in X \setminus G$, todo $g_0 \in P_G(x)$ e todo $g \in G \setminus \{g_0\}$, temos

$$\|x - g_0\| < \|x - g\|;$$

(iii) X é estritamente convexo.

Demonstração :

O leitor interessado pode procurar uma prova deste resultado em [Sin70], página 110, corolário 3.3. ■

Capítulo 5

Propriedades do Operador R_C

Em todo este capítulo, X é um espaço normado real e estudaremos propriedades do operador R_C no caso em que C é um subconjunto convexo de X . No caso especial de C ser um subespaço, utilizaremos como notação R_G . Também serão incluídas propriedades deste operador que foram estudadas em outros capítulos.

5.1 Propriedades de R_G

Nesta seção estudaremos propriedades do operador R_G , onde G é um subespaço fechado de X .

Teorema 5.1.1. *O operador R_G tem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $x \in D(R_G)$, então $\lambda x \in D(R_G)$ e $R_G(\lambda x) = \lambda R_G(x)$.*
- (ii) *$G \subset D(R_G)$ e $R_G(x) = \{x\}$ para todo $x \in G$.*
- (iii) *Sejam $x \in X$ e $g_0 \in R_G(x)$. Então $\|g_0\| \leq \|x\|$.*
- (iv) *Se $x \in D(R_G) \cap D(P_G)$, então $\|x - g_0\| \leq 2\|x - h_0\|$, para qualquer g_0 em $R_G(x)$ e qualquer h_0 em $P_G(x)$.*
- (v) *X é suave se e somente se $R_G(y)$ é unitário para todo $y \in D(R_G)$ e todo subespaço G de X . Além disso, considerado como função, R_G é linear.*

- (vi) Se X é suave, então R_G é uma projeção de norma 1 de $D(R_G)$ em G .
- (vii) Sejam X um espaço de Hilbert e G um subespaço fechado de X . Então $D(R_G) = X$ e $R_G = P_G$.

Demonstração :

- (i) Basta utilizar a proposição 2.1.5.
- (ii) É imediata pela definição de $R_G(x)$.
- (iii) Como $0 \in G$, pois G é subespaço, $R_G(x)$ é limitado por $\|x\|$.
- (iv) Sejam $g_0 \in R_G(x)$ e $h_0 \in P_G(x)$. Pela proposição 2.2.2 sabemos que

$$(g_0 - h_0) \perp (x - g_0),$$

ou seja, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\|g_0 - h_0\| \leq \|g_0 - h_0 + \lambda(x - h_0)\|.$$

Tomando $\lambda = 1$ obtemos

$$\|g_0 - h_0\| \leq \|x - h_0\|.$$

Além disso, pela desigualdade triangular temos

$$\|x - g_0\| \leq \|x - h_0\| + \|g_0 - h_0\|.$$

Logo,

$$\|x - g_0\| \leq 2\|x - h_0\|.$$

- (v) Foi provado no teorema 2.4.4.

- (vi) Por (v), R_G pode ser considerado como função e é linear. É fácil ver que para todo $x \in D(R_G)$, $R_G(R_G(x)) = R_G(x)$ e que para todo $x \in G$, $R_G(x) = x$, onde escrevemos x e não $\{x\}$ por estarmos considerando R_G como função. Logo, $R_G^2 = R_G$.

Seja $x \in D(R_G)$. Por (iii) sabemos que

$$\|R_G(x)\| \leq \|x\|,$$

e por (i) e (ii), se $x \in G$ temos que

$$\|R_G(x)\| = 1\|x\|.$$

Portanto R_G é contínua e

$$\|R_G\| = 1.$$

(vii) Foi provado na proposição 2.2.3. ■

Observação 5.1.2. Se Y é um espaço vetorial e Z é um subespaço de Y , não triviais, e $P : Y \rightarrow Z$ é uma função linear sobrejetora tal que $P^2 = P$, então $Y = \ker(P) \oplus Z$ e $P(z) = z$ para todo $z \in Z$. Vejamos.

- Para todo $x \in Z$, existe $y \in Y$ com $P(y) = x$ e daí,

$$x = P(y) = P^2(y) = P(P(y)) = P(x).$$
- Se $y \in Y$, então $w = y - P(y) \in \ker(P)$, pois $P(w) = P(y) - P^2(y) = 0$. Então $y = w + P(y) \in \ker(P) + Z$.
- Se $w \in \ker(P) \cap Y$, então $P(w) = 0$ e $P(w) = w$, donde $w = 0$.

Um caso particular, que usaremos no teorema 5.1.3, é o de uma projeção sobrejetora $P : G \oplus H \rightarrow G$, onde G e H são subespaços de um espaço de Banach X .

Outro, que usaremos no teorema 5.1.4, é o caso de uma projeção não nula $P : X \rightarrow V$, onde X é um espaço de Banach e V é um subespaço de dimensão 1.

Teorema 5.1.3. Se $x \in X \setminus G$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $x \in D(R_G)$;
- (ii) existe $P : G \oplus [x] \rightarrow G$ projeção sobrejetora de norma 1.

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Seja $x \in D(R_G)$, ou seja, existe $g_0 \in G$ tal que para todo $g \in G$

$$\|g - g_0\| \leq \|x - g\|.$$

Definimos $P : G \oplus [x] \rightarrow G$ por $P(g + \alpha x) = g + \alpha g_0$. Provaremos que P satisfaz as condições desejadas.

- $P(P(g + \alpha x)) = P(g + \alpha g_0) = g + \alpha g_0 = P(g + \alpha x)$.

Logo, $P^2 = P$.

- $P[a(g_1 + \alpha_1 x) + b(g_2 + \alpha_2 x)] = P[(ag_1 + bg_2) + (a\alpha_1 + b\alpha_2)x] =$
 $ag_1 + bg_2 + (a\alpha_1 + b\alpha_2)g_0 = a(g_1 + \alpha_1 g_0) + b(g_2 + \alpha_2 g_0) =$
 $= aP(g_1 + \alpha_1 x) + bP(g_2 + \alpha_2 x).$

Logo, P é linear.

- P é claramente sobrejetora.
- Se $\alpha = 0$ é óbvio que $\|P(g + \alpha x)\| = \|g + \alpha x\|$ pois $P(g) = g$. (*)

Suponhamos $\alpha \neq 0$. Então, utilizando que $g_0 \in R_G(x)$ e a parte (i) do teorema 5.1.1 para αx ,

$$\|P(g + \alpha x)\| = \|g + \alpha g_0\| \leq \|g + \alpha x\|.$$

Logo, $\|P(g + \alpha x)\| \leq \|g + \alpha x\|$ e portanto P é contínua com $\|P\| \leq 1$.
Daí, por (*),

$$\|P\| = 1.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Agora sabemos que existe $P : G \oplus [x] \rightarrow G$, projeção sobrejetora de norma 1. Provaremos que $P(x) \in R_G(x)$, ou seja, $\|P(x) - g\| \leq \|x - g\|$ para todo $g \in G$.

Como P é sobrejetora, pela observação 5.1.2, $P(g) = g$ para todo $g \in G$. Além disso, como P é linear.

$$\|P(x) - g\| = \|P(x - g)\|.$$

Sendo $\|P\| = 1$,

$$\|P(x - g)\| \leq \|P\| \|x - g\| = \|x - g\|.$$

Como $P(x) \in G$, $P(x) \in R_G(x)$ e portanto

$$x \in D(R_G).$$

■

Teorema 5.1.4. *Dados X um espaço normado e V subespaço de dimensão 1 de X , existe $P : X \rightarrow V$ projeção de norma 1.*

Demonstração :

Seja $v \in V$, $\|v\| = 1$. Então $V = [v]$. Por Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ e $f(v) = \|v\| = 1$.

Seja $H = \ker(f)$. Então H é um hiperplano fechado. Afirmamos que $X = H \oplus V$. De fato, dado $x \in X$, consideremos $y_x = x - f(x)v$. Então $y_x \in H$, pois

$$f(y_x) = f(x) - f(x)f(v) = 0.$$

Assim, temos $x = (x - f(x)v) + f(x)v = y_x + f(x)v$ e $x \in H + V$.

A soma é direta pois se $z \in H \cap V$, então $f(z) = 0$ e $z = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $f(z) = \alpha = 0$. Portanto $z = 0$, ou seja, $H \cap V = \{0\}$.

Definimos $P : X \rightarrow V$ por $P(x) = f(x)v$. Temos que P é linear e também contínua pois $f \in X^*$. Além disso, para todo $x \in X$,

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(f(x)v) = f(f(x)v)v = f(x)f(v)v = f(x)v = P(x).$$

Portanto P é projeção.

Pela continuidade de P , para qualquer $x \in X$,

$$\|P(x)\| = \|P^2(x)\| \leq \|P\|\|P(x)\|.$$

Mas $P \neq 0$ pois $P(v) = v \neq 0$ e então $\|P\| \geq 1$.

Por outro lado,

$$\|P(x)\| = |f(x)|\|v\| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|,$$

e portanto,

$$\|P\| \leq 1.$$

Assim,

$$\|P\| = 1.$$

■

Teorema 5.1.5. *Seja V um subespaço de dimensão 1 de X . Então*

$$(i) \ D(R_V) = X;$$

(ii) R_V admite seletor linear.

Demonstração :

(i) Foi provado no teorema 2.2.5.

(ii) Pelo teorema 5.1.4 sabemos que existe $P : X \rightarrow V$ projeção de norma 1, ou seja, P é linear contínua, $P^2 = P$ e $\|P\| = 1$.

Provaremos que P é um seletor de R_V .

Seja $x \in X$ qualquer. Vamos provar que $P(x) \in R_V(x)$ mostrando que $V \perp x - P(x)$.

Seja $v \neq 0$ tal que $[v] = V$. Tomemos $y = v + \lambda(x - P(x))$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer. Como $\|P\| = 1$ temos que $\|P(y)\| \leq \|y\|$. Logo, usando a linearidade de P e a observação 5.1.2,

$$\|P(y)\| = \|P(v + \lambda(x - P(x)))\| = \|P(v) + \lambda(P(x) - P^2(x))\| = \|P(v)\| = \|v\|.$$

Portanto,

$$\|v\| \leq \|v + \lambda(x - P(x))\| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

o que por definição significa que $v \perp x - P(x)$.

Então,

$$V \perp x - P(x).$$

■

No lema 2.2.8, vimos que dados G e H subespaços de um espaço normado X tais que $G \subset H$, se $x \in X \setminus H$ tem melhor coaproximação em H e todo elemento de H tem melhor coaproximação em G , então x tem melhor coaproximação em G . Mais precisamente, se $h_0 \in R_H(x)$ e $g_0 \in R_G(h_0)$, então $g_0 \in R_G(x)$. Em outras palavras, $R_G(R_H(x)) \subset R_G(x)$. No seguinte exemplo veremos que esta inclusão pode ser estrita.

Exemplo 5.1.6. Sejam $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, $G = [1]$, $H = [1, t]$ e $x(t) = 3t - 2t^2$.

Figura 5.1.

Pela proposição 4.2.12 sabemos que $R_H(x) = \{h_0\}$, onde $h_0(t) = t$. Agora vamos achar $R_G(R_H(x))$, ou seja, $R_G(h_0)$.

Pela proposição 4.2.9, temos,

$$R_G(h_0) = \left\{ g_0 \in G : g_0 \equiv d, \text{ com } 0 \leq d \leq 1 \right\}$$

e

$$R_G(x) = \left\{ g_0 \in G : g_0 \equiv c, \text{ com } 0 \leq c \leq \frac{9}{8} \right\}.$$

Esquemáticamente,

$$R_G(h_0) = [0, 1] \subsetneq [0, \frac{9}{8}] = R_G(x).$$

A seguir veremos que uma condição para a igualdade é X ser suave.

Teorema 5.1.7. *Sejam X um espaço normado suave, G e H subespaços de X tais que $G \subset H$. Então*

- (i) $R_G(R_H(x)) = R_G(x)$, para todo $x \in D(R_H)$;
- (ii) $\|R_G(x)\| \leq \|R_H(x)\|$, para todo $x \in D(R_H) \cap D(R_G)$.

Demonstração :

(i) Pelo lema 2.2.8 só precisamos mostrar que $R_G(x) \subset R_G(R_H(x))$.

Seja $x \in D(R_H)$. Se $R_G(x) = \emptyset$, é óbvio que $R_G(x) \subset R_G(R_H(x))$. Consideremos então $g_0 \in R_G(x)$. Provaremos que $g_0 \in R_G(R_H(x))$.

Como X é suave, pelo teorema 2.4.4 podemos escrever $R_H(x) = \{h_0\}$, e temos $H \perp x - h_0$. Como $G \subset H$, também vale $G \perp x - h_0$. Além disso, $G \perp x - g_0$. Logo, pela proposição 2.1.5 e o teorema 2.4.2, temos

$$G \perp [(x - g_0) - (x - h_0)] = h_0 - g_0.$$

Daí,

$$g_0 \in R_G(R_H(x)),$$

obtendo o resultado desejado.

(ii) Pelo teorema 5.1.1 sabemos que R_G é uma projeção de norma 1. Utilizando a parte (i), obtemos

$$\|R_G(x)\| = \|R_G(R_H(x))\| \leq \|R_G\| \|R_H(x)\| = \|R_H(x)\|.$$

■

Observação 5.1.8. No teorema anterior é necessária a hipótese $x \in D(R_H)$ no item (i). De fato, considerando o espaço $X = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_3)$, existem subespaços H de dimensão 2 para os quais $D(R_H) = H$, como vimos no capítulo 2. Isso é devido ao fato de X não ser Hilbert. Tomemos um desses H_s e um seu subespaço G de dimensão 1. Pelo teorema 2.2.5, $D(R_G) = X$ e portanto não está satisfeita a inclusão (i).

5.2 Caracterizações de espaços de Hilbert

Nesta seção veremos mais duas caracterizações de espaços de Hilbert usando propriedades do operador R_G . Utilizaremos a notação r_G para representar um seletor de R_G .

Definição 5.2.1. Sejam G e H dois subespaços de um espaço normado X . Dizemos que G é X -isomorfo a H se existir um isomorfismo $T : X \rightarrow X$ tal que $T(G) = H$.

No próximo lema veremos um tipo de isomorfismo que será utilizado no lema 5.2.3 e no teorema 5.2.4.

Lema 5.2.2. *Sejam X um espaço normado, $f \in X^*$ e $z \in \ker(f)$. Então $T : X \rightarrow X$, dado por $T(x) = x + f(x)z$ é um isomorfismo de X em X e $T|_{\ker(f)}$ é a identidade.*

Prova :

- T é obviamente linear.
- T é injetora: Seja $x \in X$ tal que $T(x) = 0$, ou seja,

$$x + f(x)z = 0,$$

ou ainda,

$$x = -f(x)z.$$

Da igualdade acima, deduz-se que $x \in \ker(f)$ e daí $f(x) = 0$ e $x = 0$.

- T é sobrejetora: Seja $y \in X$ e consideremos $x = y - f(y)z$. Provaremos que $T(x) = y$.

$$\begin{aligned} T(x) &= T(y - f(y)z) = y - f(y)z + f(y - f(y)z)z = \\ &= y - f(y)z + f(y)z - f(y)f(z)z = y. \end{aligned}$$

- T é contínua:

$$\|T(x)\| = \|x + f(x)z\| \leq \|x\| + \|f\|\|x\|\|z\| = \|x\|(1 + \|f\|\|z\|).$$

- T^{-1} é obviamente contínua: $T^{-1}(y) = y - f(y)z$ tem a mesma forma que T .

■

Lema 5.2.3. *Sejam X um espaço normado e φ, ψ em X^* não nulos. Então $\ker(\varphi)$ é X -isomorfo a $\ker(\psi)$.*

Prova :

Se $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$, então a identidade satisfaz as condições.

Se $\ker(\varphi) \neq \ker(\psi)$, consideremos $z \in \ker(\psi - \varphi)$, tal que $z \notin \ker(\varphi) \cup \ker(\psi)$.

Vejamos que tal elemento existe. Suponhamos que $\ker(\psi - \varphi) \subset \ker(\varphi) \cup \ker(\psi)$ e seja $z_0 \in \ker(\psi - \varphi)$. Se $z_0 \in \ker(\varphi)$, então $z_0 \in \ker(\psi)$ e reciprocamente. Portanto,

$$\ker(\psi - \varphi) \subset \ker(\varphi) \cap \ker(\psi).$$

Mas isso é absurdo pois $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$ é um subespaço de codimensão 2.

Seja $\bar{z} = \frac{1}{\varphi(z)}z$. Observemos que $\varphi(\bar{z}) = \psi(\bar{z}) = 1$ e que $\bar{z} \in \ker(\psi - \varphi)$.

Tomemos um operador $T : X \rightarrow X$ definido por $T(x) = x + (\psi(x) - \varphi(x))\bar{z}$. Pelo lema 5.2.2 sabemos que T é um isomorfismo de X em X que deixa fixo $\ker(\psi - \varphi)$. Resta provar que T leva $\ker(\psi)$ em $\ker(\varphi)$.

Seja $w \in \ker(\psi)$. Então $T(w) = w - \varphi(w)\bar{z}$ e $T(w) \in \ker(\varphi)$ pois,

$$\varphi(T(w)) = \varphi(w) - \varphi(w)\varphi(\bar{z}) = 0.$$

Logo,

$$T(\ker(\psi)) \subset \ker(\varphi).$$

Seja agora $u \in \ker(\varphi)$. Como $X = \ker(\psi) \oplus [\bar{z}]$, pois $\bar{z} \notin \ker(\psi)$, podemos escrever $u = w_0 + \lambda\bar{z}$, para algum $w_0 \in \ker(\psi)$ e algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Observemos que $\varphi(w_0) = -\lambda$, pois $\varphi(w_0) = 0$ e $\varphi(\bar{z}) = 1$. Então,

$$T(w_0) = w_0 + [\psi(w_0) - \varphi(w_0)]\bar{z} = w_0 + \lambda\bar{z} = u$$

e portanto $u \in T(\ker(\psi))$.

Logo,

$$\ker(\varphi) \subset T(\ker(\psi)) \text{ e } T(\ker(\psi)) = \ker(\varphi).$$

■

Teorema 5.2.4. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 3. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) existe Y , subespaço fechado próprio e não trivial de X , tal que para todo subespaço fechado H de X , X -isomorfo a Y e para todo $x \in X$, temos que se $g_1 \in P_H(x)$ então $\|g_1\| \leq \|x\|$;
- (iii) para todo subespaço L de X de dimensão 1 e todo $x \in X$, temos que se $y \in P_L(x)$ então $\|y\| \leq \|x\|$.

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

É imediato, pelo teorema de Pitágoras, para quaisquer Y , H e x .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sejam $x \in X$, L um subespaço de X de dimensão 1 e $x_0 \in L$ tal que $\|x_0\| = 1$. Sem perda de generalidade, pela homogeneidade da melhor aproximação, consideraremos $\|x\| = 1$. Seja $y \in P_L(x)$. Provaremos que $\|y\| \leq \|x\|$.

Se $x \in L$, então $y = x$ e nada temos a provar.

Se $x \notin L$, então $d(L, x) = \|x - y\| = d > 0$.

Tomemos agora o subespaço Y da hipótese. Para $\bar{x} \in Y$, não nulo, existe, pelo teorema de Hann-Banach, $f \in X^*$ tal que $f(x_0) = f(\bar{x}) = 1$. Consideremos o operador $K : X \rightarrow X$ definido por $K(z) = z + f(z)(x_0 - \bar{x})$. Pelo lema 5.2.2, temos que K é um isomorfismo de X em X . Vejamos que K leva $[\bar{x}]$ em $L = [x_0]$.

$$K(\bar{x}) = \bar{x} + f(\bar{x})(x_0 - \bar{x}) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) = x_0.$$

Chamemos $G = K(Y)$. Como K é um isomorfismo de X em X , então G é X -isomorfo a Y , e ainda $x_0 \in G$.

Por outro lado, temos que a distância de x a $L = [x_0]$ é d e $\|x - y\| = d$. Então, como x_0 e $x - y$ são linearmente independentes, pelo teorema de Hann-Banach, existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x - y) = d$. Consideremos também $\psi \in X^*$ que se anule em G (e portanto $G \subset \ker(\psi)$) com $\|\psi\| = 1$. Pelo lema 5.2.3 sabemos que existe um isomorfismo $T : X \rightarrow X$ que leva $\ker(\psi)$ em $\ker(\varphi)$. Seja $H = T(G)$. É fácil ver que $H \subset \ker(\varphi)$. Como T o K é um isomorfismo de X em X que leva Y em H , temos que H também é X -isomorfo a Y .

Além disso, $x = y + (x - y)$, e daí $\varphi(x) = d$, pois $y \in L$, $\varphi|_L = 0$ e $\varphi(x - y) = d$.

Portanto,

$$\|z - x\| \geq |\varphi(z - x)| = d \text{ para todo } z \in \ker(\varphi).$$

Isso implica que a distância de x a H é d pois $y \in L \subset H$ atinge tal distância, donde,

$$y \in P_H(x),$$

o que por hipótese implica em

$$\|y\| \leq \|x\|.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Para provar que X é um espaço de Hilbert, usaremos o teorema 2.2.12, isto é, demonstraremos que dados x, y em X tais que $x \perp y$, tem-se que $y \perp x$. Sem perda de generalidade, pela homogeneidade da ortogonalidade, tomaremos x e y tais que $\|x\| = \|y\| = 1$.

Sejam então, x e y em X tais que $x \perp y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Provaremos que $y \perp x$, ou seja, $\|y - tx\| \geq \|y\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $x_0 \in P_{[x]}(y)$, ou seja, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|y - tx\| = \|y - x_0\|$. Suponhamos que $\|y - x_0\| < 1 = \|y\|$.

Como $x \perp y$, pela homogeneidade da ortogonalidade, temos que $x_0 \perp y$. Portanto,

$$\|x_0 + ky\| \geq \|x_0\| \text{ para todo } k \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Expressando (5.1) convenientemente obtemos

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|(x_0 - y) - ty\| \geq \|(x_0 - y) - (-y)\|.$$

Mas, essa última desigualdade significa que $(-y) \in P_{[y]}(x_0 - y)$. Então, por hipótese,

$$\|-y\| \leq \|x_0 - y\|$$

e daí

$$\|y\| < 1, \text{ o que resulta absurdo.}$$

Logo, pelo teorema 2.2.12, X é um espaço de Hilbert. ■

Definição 5.2.5. Sejam X e Z espaços normados e $f : X \rightarrow Z$. Dizemos que f é *contrativa* se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \quad \text{para quaisquer } x, y \in X.$$

A seguir veremos algumas caracterizações de espaços de Hilbert que utilizam a parte (iii) do teorema 5.2.4.

Teorema 5.2.6. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual que 3. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) X é estritamente convexo e para todo subespaço fechado G de X , temos que $D(R_G) = X$ e $(I - r_G)$ é contrativa para qualquer r_G seletor de R_G ;
- (iii) X é estritamente convexo e para todo subespaço L de X de dimensão 1, temos que $I - r_L$ é contrativa para qualquer r_L ;
- (iv) para todo subespaço L de X de dimensão 1 e todo $x \in X$, temos que

$$P_L(x) = R_L(x);$$

- (v) para todo subespaço L de X de dimensão 1 e todo $x \in X$, temos que

$$P_L(x) \subset R_L(x).$$

Demonstração :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Como X é um espaço de Hilbert, é estritamente convexo. Seja G um subespaço fechado de X . Pela proposição 2.2.14, temos que $D(R_G) = X$. Só resta provar que $(I - r_G)$ é contrativa.

Pela proposição 2.2.3, sabemos que $R_G = P_G$ e portanto r_G é a projeção ortogonal sobre G . Então, para $x, y \in X$ temos

$$\|(I - r_G)(x) - (I - r_G)(y)\| = \|(x - y) - r_G(x - y)\| \leq \|x - y\|.$$

Logo,

$$(I - r_G) \text{ é contrativa .}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

A implicação é óbvia.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Seja L um subespaço de X de dimensão 1. Notemos que $D(R_L) = X$ pois L tem dimensão 1 (teorema 2.2.5). Tomemos $x \in X$, $g_0 \in R_L(x)$ e $g \in L$. Usando um seletor r_L de R_L com $r_L(x) = g_0$, que $(I - r_L)$ é contrativa e que r_L deixa fixos os elementos de L , temos

$$\begin{aligned}\|x - g_0\| &= \|x - r_L(x) + g - r_L(g)\| = \\ &= \|(I - r_L)(x) - (I - r_L)(g)\| \leq \|x - g\|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\| \quad \text{para todo } g \in L,$$

ou seja,

$$g_0 \in P_L(x).$$

Logo,

$$R_L(x) \subset P_L(x).$$

Como X é estritamente convexo, pelo corolário 3.3, pag. 110 de [Sin70], a melhor aproximação sobre L é única. Mas $R_L(x) \neq \emptyset$ (2.2.5) e então

$$P_L(x) = R_L(x).$$

(iv) $\Rightarrow$ (v)

A implicação é óbvia.

(v) $\Rightarrow$ (i)

Seja L um subespaço de X de dimensão 1. Então $D(R_L) \neq \emptyset$. (2.2.5)

Consideremos $x \in D(P_L)$ e tomemos $g_1 \in P_L(x)$. Como $P_L(x) \subset R_L(x)$, $g_1 \in R_L(x)$ e portanto

$$\|g_1 - g\| \leq \|x - g\| \quad \text{para todo } g \in G.$$

Logo, tomando $g = 0$,

$$\|g_1\| \leq \|x\|.$$

Pelo teorema 5.2.4, X é um espaço de Hilbert. ■

Agora veremos outras caracterizações de espaços de Hilbert que utilizam o teorema 5.2.4, parte (ii).

Teorema 5.2.7. *Seja X um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 3. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) X é um espaço de Hilbert;
- (ii) X é estritamente convexo e existe um subespaço fechado próprio Y de X tal que para todo subespaço fechado G , X -isomorfo a Y , temos que $D(r_G) = X$ e $(I - r_G)$ é contrativa para qualquer r_G seletor de R_G ;
- (iii) existe um subespaço fechado próprio Y de X tal que, para todo subespaço fechado G X -isomorfo a Y e todo $x \in X$, temos que $P_G(x) \subset R_G(x)$.

Demonstração :

As demonstrações são análogas às do teorema 5.2.6. ■

5.3 Propriedades de R_C

Nesta seção estudaremos o operador R_C de melhor coaproximação em conjuntos convexos. Em toda a seção, C é um subconjunto convexo de X .

Começamos com um exemplo interessante sobre melhor coaproximação em um conjunto convexo que generaliza o exemplo 1.2.2.

Exemplo 5.3.1. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $x = (a, 0)$, onde $a \geq 1$. Calculemos $R_C(x)$.

Fazendo um raciocínio geométrico, podemos dizer que $c_0 \in R_C(x)$ se, e somente se C e x estão em semiplanos opostos determinados pela mediatriz do segmento unindo c_0 a x . Destas retas, as “piores” são as tangentes a C .

Figura 5.2.

Consideremos então só as retas m tangentes a C e seja y o simétrico de x respeito de m . Resulta simples ver que para cada m , se $y \in C$, $C \cap [y, x] \subset R_C(x)$.

A seguir, daremos a expressão paramétrica da curva γ formada pelos pontos y , cujas operações foram omitidas.

$$\gamma(\theta) = (2a \cos^2 \theta + 2 \sin \theta - a, 2 \sin \theta - 2a \sin \theta \cos \theta). \quad (5.2)$$

A figura 5.3 representa o caso particular da curva γ para $x = (1.8, 0)$, onde a região quadriculada indica o conjunto $R_C(x)$.

Figura 5.3.

Proposição 5.3.2. *O operador R_C tem as seguintes propriedades:*

- (i) $C \subset D(R_C)$ e $R_C(x) = \{x\}$ para todo $x \in C$.
- (ii) Se C é fechado, então $R_C(x)$ é fechado, para todo $x \in X$.
- (iii) Se C é convexo, então $R_C(x)$ é convexo, para todo $x \in X$.

(iv) $R_C(x)$ é limitado para todo $x \in X$.

(v) Se $x \in D(R_C)$ e $c_0 \in R_C(x)$, então $c_0 \in R_C(tx + (1-t)c_0)$, para todo $t \in [1, +\infty[$.

(vi) Se $x \in D(R_C)$ e $\text{diam}(C) \leq \text{dist}(x, C)$, então $C = R_C(x)$.

Prova :

As propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) são nossas conhecidas: 1.1.2 e 1.1.5.

(v) Queremos provar que para todo $c \in C$ e todo $t \in [1, +\infty[$,
 $\|c - c_0\| \leq \|tx + (1-t)c_0 - c\|$.

Fazendo operações e utilizando o fato de que $c_0 \in R_C(x)$, temos

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)c_0 - c\| &= \|tx + (1-t)c_0 + ct - c - ct\| = \\ &= \|t(x - c) + (1-t)(c_0 - c)\| \geq \|t(x - c)\| - \|(1-t)(c_0 - c)\| = \\ &= |t|\|x - c\| - |1-t|\|c_0 - c\| \geq |t|\|c_0 - c\| - |1-t|\|c_0 - c\| = \\ &= (t + (1-t))\|c_0 - c\| = \|c_0 - c\|. \end{aligned}$$

(vi) Seja $c_0 \in C$. Aplicando as definições de diâmetro e de distância,

$$\|c - c_0\| \leq \sup_{z, y \in C} \|z - y\| = \text{diam}(C) \leq \text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\| \leq \|c - x\|.$$

Logo, $C \subset R_C(x)$ e como $R_C(x) \subset C$, temos $C = R_C(x)$. ■

5.4 R_C e a retração ortogonal

Vamos definir a retração ortogonal, outra forma de aproximação introduzida em [Bru73] e relacioná-la com a melhor coaproximação.

Definição 5.4.1. Chamaremos *funcional tangente* à função $\tau : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

Observação 5.4.2. Este limite representa a derivada direcional pela direita no ponto x na direção y da função $\|\cdot\|$. O funcional tangente é um caso particular de $d^+ f_x$ para $f(v) = \|v\|$, e portanto existe sempre (ver observação 2.3.2 e teorema 2.3.4).

Definição 5.4.3. Consideremos $C \subset X$ um subconjunto convexo. Sejam $x \in X$ e $c_0 \in C$. Dizemos que c_0 pertence à *retração ortogonal* de x em C , e indicamos $c_0 \in Q_C(x)$, se

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0 \quad \text{para todo } c \in C. \quad (5.3)$$

Observação 5.4.4. Podemos escrever

$$Q_C(x) = \{x \in C : \tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0 \text{ para todo } c \in C\}.$$

Se $x \in C$, $\tau(x - c, 0) = 0$, e portanto $x \in Q_C(x)$. Se $c_0 \in Q_C(x)$ e $c_0 \neq x$, tomamos $c = x$. Então,

$$\tau(c_0 - x, x - c_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - x + t(x - c_0)\| - \|c_0 - x\|}{t} = -\|x - c_0\| < 0.$$

Portanto $Q_C(x) = \{x\}$, quando $x \in C$.

Exemplo 5.4.5. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $x = (3, 0)$. Veremos que $Q_C(x) = \{(1, 0)\}$.

Provemos primeiro que $(1, 0) \in Q_C(x)$, ou seja, que $\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0$, onde $c = (a, b)$ com $a^2 + b^2 \leq 1$, $c_0 = (1, 0)$ e $x = (3, 0)$.

$$\begin{aligned}\tau(c_0 - c, x - c_0) &= \tau((1 - a, -b), (2, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(1 - a, -b) + t(2, 0)\| - \|(1 - a, -b)\|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(1 - a, -b) + t(2, 0)\|^2 - \|(1 - a, -b)\|^2}{t(\|(1 - a, -b) + t(2, 0)\| + \|(1 - a, -b)\|)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4t(1 - a + t)}{t(\|(1 - a, -b) + t(2, 0)\| + \|(1 - a, -b)\|)} = \frac{1 - a}{2\|(1 - a, -b)\|} \geq 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$c_0 \in Q_C(x).$$

Agora provaremos que $c_1 = (a, b) \in C$, com $(a, b) \neq (1, 0)$, não pertence a $Q_C(x)$. Seja $c = (1, 0)$. Então,

$$\begin{aligned}\tau(c_1 - c, x - c_1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(c_1 - c) + t(x - c_1)\| - \|c_1 - c\|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(a - 1 + t(3 - a), b(1 - t))\|^2 - \|(a - 1, b)\|^2}{t(\|(c_1 - c) + t(x - c_1)\| + \|c_1 - c\|)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t((3 - a)(2(a - 1) + t(3 - a)) + b^2(t - 2))}{t(\|(c_1 - c) + t(x - c_1)\| + \|c_1 - c\|)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau(c_1 - c, x - c_1) = -\frac{a^2 + b^2 - 4a + 3}{\|c_1 - c\|}.$$

Definamos agora a função $f : C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(a, b) = -\frac{a^2 + b^2 - 4a + 3}{\|c_1 - c\|}$. Depois de alguns cálculos que serão omitidos, conclui-se que $f(a, b) < 0$ se $a^2 + b^2 \leq 1$ e $(a, b) \neq (1, 0)$. Portanto,

$$c_1 \notin Q_C(x)$$

e então

$$Q_C(x) = \{(1, 0)\}.$$

Teorema 5.4.6. $Q_C(x) \subset R_C(x)$ e $Q_C(x) \subset Q_C(tx + (1-t)c_0)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração :

Seja $c_0 \in Q_C(x)$. Então $\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0$, ou ainda,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + t(x - c_0)\| - \|x - c_0\|}{t} \geq 0, \text{ para todo } c \in C.$$

Como esse limite é atingido em forma decrescente (teorema 2.3.4), podemos afirmar que para $c \in C$, $\|c_0 - c + t(x - c_0)\| \geq \|x - c_0\|$ para todo $t \geq 0$, e em particular para $t = 1$.

Daí,

$$\|x - c\| \geq \|x - c_0\| \text{ para todo } c \in C,$$

ou seja,

$$c_0 \in R_C(x).$$

Provemos agora que $c_0 \in Q_C(tx + (1-t)c_0)$ para todo $t \geq 0$. Como para $t = 0$ a afirmação é óbvia, podemos supor que $t > 0$.

Aplicando a definição e fazendo algumas operações, temos

$$\begin{aligned} \tau(c_0 - c, tx + (1-t)c_0 - c_0) &= \tau(c_0 - c, t(x - c_0)) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + \lambda[t(c - c_0)]\| - \|c_0 - c\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} t \frac{\|c_0 - c + (\lambda t)(c - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{\lambda t} = \\ &= t\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.4.7. Se C é um subespaço de X , então

$$R_C = Q_C.$$

Demonstração :

Se C é um subespaço de X , sabemos que $c_0 \in R_C(x)$ se, e somente se, $C \perp x - c_0$. Em particular,

$$c_0 - c \perp x - c_0 \text{ para todo } c \in C$$

e daí,

$$\|(c_0 - c) + t(x - c_0)\| \geq \|c_0 - c\| \text{ para todo } x \in C \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0 \text{ e } R_C(x) \subset Q_C(x).$$

Pelo teorema 5.4.6,

$$R_C(x) = Q_C(x).$$

■

Corolário 5.4.8. *Se X é um espaço pré-hilbertiano e C é um subespaço de X , então*

$$R_C = Q_C = P_C.$$

Prova :

É consequência do teorema 5.4.7 e da proposição 2.2.3. ■

Observação 5.4.9. Nos teoremas 5.4.6 e 5.4.7, provamos que $Q_C(x) \subset R_C(x)$ e que são iguais se C for subespaço. Os exemplos 1.2.2 e 5.4.5 mostram que pode acontecer $Q_C(x) \neq R_C(x)$.

A seguir veremos certas condições em que Q_C e R_C são iguais.

Teorema 5.4.10. *Se para todo $c_0 \in R_C(x)$ temos que $c_0 \in R_C(c_0 + t(x - c_0))$, para $0 \leq t \leq 1$, então*

$$R_C(x) = Q_C(x).$$

Demonstração :

Pelo teorema 5.4.6, só precisamos provar que $R_C(x) \subset Q_C(x)$, ou seja, que para todo $c_0 \in R_C(x)$, temos $\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq 0$, para todo $c \in C$.

Como $\tau(c_0 - c, x - c_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + t(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{t}$, existe sempre (observação 5.4.2), basta provar que para todo $0 < t$, $\|c_0 - c + t(x - c_0)\| \geq \|c_0 - c\|$, para todo $c \in C$. Mas isso é fácil deduzir, pois, como $c_0 \in R_C(c_0 + t(x - c_0))$, temos que para todo $0 \leq t \leq 1$ e todo $c \in C$ vale

$$\|c_0 - c\| \leq \|c_0 + t(x - c_0) - c\| = \|c_0 - c + t(x - c_0)\|.$$

■

Observação 5.4.11. De fato, no teorema anterior, não é preciso que $0 \leq t \leq 1$. Basta que exista $\alpha > 0$ tal que para $0 \leq t \leq \alpha$ tenhamos $c_0 \in R_C(c_0 + t(x - c_0))$.

Corolário 5.4.12. $c_0 \in Q_C(x)$ se e somente se, $c_0 \in R_C(c_0 + t(x - c_0))$ para todo $t \geq 0$.

Prova :

É consequência imediata dos teoremas 5.4.6 e 5.4.10 e da proposição 5.3.2. ■

Exemplo 5.4.13. Sejam $X = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $C = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : |x_2| \leq 2\}$ e $x = (0, 0, 1)$. Resulta simples ver que $R_C(x) = \{(0, 0, 0)\}$, pois $C \subset H$, onde H é o plano $x_3 = 0$ e $R_H(x) = \{(0, 0, 0)\}$. Portanto, $(0, 0, 0) \in R_C(x)$. Como se observa na figura 5.4, $(0, 0, 0)$ é o único ponto que pertence a $R_C(x)$. Isso acontece porque

$$\bigcap_{i=1}^{i=4} (\overline{B}_2(c_i)) = \left(\bigcap_{i=1}^{i=2} (\overline{B}_2(c_i)) \right) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{i=4} (\overline{B}_2(c_i)) \right) = S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Também temos que $R_C(y) = \{(0, 0, 0)\}$ para qualquer $y = (0, 0, t)$ com $0 \leq t \leq 1$. Portanto, pelo teorema 5.4.10, $Q_C(x) = R_C(x)$ e então $Q_C(x) = \{(0, 0, 0)\}$.

Figura 5.4.

Teorema 5.4.14. Se para quaisquer $c \in C$ e $c_0 \in R_C(x)$, temos que $(1-t)c_0 + tc \in C$, para todo $t \geq 1$, então

$$R_C(x) = Q_C(x).$$

Demonstração :

Novamente, pelo teorema 5.4.6, só precisamos provar que $R_C(x) \subset Q_C(x)$.

Como $c_0 \in R_C(x)$, então para todo $c \in C$

$$\|c_0 - c\| \leq \|c - x\|.$$

Em particular, se $t \geq 1$, essa desigualdade vale para $c_0 + t(c - c_0)$, que por hipótese é um elemento de C . Logo,

$$\|t(c_0 - c)\| \leq \|c_0 + t(c - c_0) - x\| = \|x - c_0 + t(c_0 - c)\|.$$

Dividindo por t e tomando $s = \frac{1}{t}$ a expressão fica

$$\|c_0 - c\| \leq \|s(x - c_0) + c_0 - c\|.$$

Portanto,

$$\|s(x - c_0) + c_0 - c\| - \|c_0 - c\| \geq 0, \text{ para qualquer } 0 \leq s \leq 1.$$

Assim,

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + s(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{s} \geq 0,$$

ou seja,

$$c_0 \in Q_C(x).$$

■

Observação 5.4.15. Na verdade, toda a semi-reta com início em c_0 passando por c está contida em C , pois, pela convexidade de C , $c_0 + t(c - c_0) \in C$ para $0 \leq t \leq 1$.

Exemplo 5.4.16. Seja $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, onde a norma $\|\cdot\|$ é dada da seguinte maneira:

$$\|(a, b)\| = \begin{cases} \frac{|b|}{3}, & \text{se } a = 0 \\ \frac{|a|}{2}, & \text{se } b = 0 \\ \frac{|a|}{2} - \frac{|b|}{3}, & \text{se } -\frac{a}{b} \geq 1, b \neq 0 \\ \frac{|a|}{2} + \frac{|b|}{3}, & \text{se } -\frac{a}{b} \leq 0, b \neq 0 \\ -\frac{|a|}{2} + \frac{|b|}{3} + \frac{|a|^3}{3|b|^2}, & \text{se } 0 < -\frac{a}{b} < 1, b \neq 0. \end{cases}$$

Na figura 5.5, temos um esquema para interpretar melhor essa norma e na figura 5.6 temos uma representação da bola unitária de X .

Figura 5.5.

Figura 5.6.

Consideremos também $C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 1\}$ e $x = (0, 0)$. Com essas condições deduzimos que

$$R_C(x) = \left\{ \left(1, -\frac{3}{2} \right) \right\}.$$

Provamos isso completamente, mas as deduções não estão incluídas neste trabalho. Daremos, na figura 5.7 uma interpretação geométrica.

Figura 5.7.

Na figura, a região onde se interceptam B_1 e B_2 , foi ampliada. Resulta bastante simples concluir que no caso de se tomar o limite quando $b \rightarrow -\infty$, o único ponto que permanecerá na intersecção de B_1 e B_2 é efetivamente $(1, -\frac{3}{2})$.

Observamos que C não é subespaço mas satisfaz as condições do teorema 5.4.14 e portanto também sabemos que

$$Q_C(x) = \left\{ \left(1, -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

5.5 Aproximação, coaproximação e retração ortogonal fortes

Nesta seção estudaremos subconjuntos de P_C , R_C e Q_C especiais, cujos elementos chamaremos de aproximações fortes.

Definição 5.5.1. Seja $x \in X \setminus C$. Dizemos que c_0 *pertence fortemente* a $P_C(x)$ se existir $r > 0$ tal que

$$\|x - c\| \geq \|x - c_0\| + r\|c_0 - c\| \quad \text{para todo } c \in C.$$

O conjunto dos elementos que satisfazem esta definição será representado por $P_C^F(x)$.

Exemplo 5.5.2. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, C o eixo x_1 e $x = (0, 1)$. É claro que $P_C(x) = \{(0, 0)\}$. Veremos que $(0, 0) \notin P_C^F(x)$.

Para $(0, 0)$ pertencer a $P_C^F(x)$, deve existir $r > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\|(0, 1) - (t, 0)\| \geq r\|(0, 0) - (t, 0)\| + \|(0, 1) - (0, 0)\|,$$

ou seja,

$$\sqrt{1 + t^2} \geq r|t| + 1, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

o que não é verdade . (figura 5.8)

Figura 5.8.

Exemplo 5.5.3. Seja $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -x_2 \geq |x_1|\}$ e $x = (0, 1)$. Claramente $P_C(x) = \{(0, 0)\} = \{c_0\}$. Veremos que $c_0 \in P_C^F(x)$, ou seja, que existe $r > 0$ tal que

$$\|x - c\| \geq \|x - c_0\| + r\|c_0 - c\| \text{ para todo } c \in C. \quad (5.4)$$

Figura 5.9. O ponto $(0, 0) \in P_C^F(x)$.

Se $c = (0, 0)$, então qualquer r satisfaz a desigualdade. Seja então $c \in C \setminus \{(0, 0)\}$, $c = (a, b)$.

Trabalhando em função dos parâmetros a e b , a desigualdade anterior fica

$$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} \geq 1 + r\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Consideremos $f : C \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(a, b) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-1)^2} - 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Estudemos f em $B_\varepsilon((0, 0))$. Temos, para ε suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \frac{a^2 + b^2 - 2b}{\sqrt{a^2 + b^2} \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2} + 1 \right)} \geq \frac{a^2 + b^2 - 2b}{4\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \\ &\geq \frac{-b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{-b}{2\sqrt{2b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Logo, em $C_1 = B_\varepsilon(0) \cap C$, vale $f(a, b) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vamos ver se existe $k > 0$ tal que $f \geq k$ para pontos fora de $B_\varepsilon((0,0))$.

Continuando com o estudo da f , temos

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \frac{a^2 + b^2 - 2b}{\sqrt{a^2 + b^2} \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2} + 1 \right)} \geq \frac{a^2 + b^2 - 2b}{\sqrt{a^2 + b^2} \left(\sqrt{b^2 + (b-1)^2} + 1 \right)} \geq \\ &\geq \frac{b^2(1 - 2/b)}{\sqrt{2b^2} \left(\sqrt{b^2(1 + (\frac{b-1}{b})^2)} + 1 \right)} = \frac{1 - 2/b}{\sqrt{2} \left(\sqrt{1 + (\frac{b-1}{b})^2} + 1/b \right)} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ quando } b \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que para algum $k_0 \in \mathbb{R}^+$, vale $f(a,b) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ para todo $c = (a,b) \in C_2 = \{(x_1, x_2) : \|(x_1, x_2)\| > k_0\}$.

Figura 5.10.

Se $k_0 < \varepsilon$, temos que $r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ satisfaz (5.4) para todo $c \in C$. Caso contrário, resta estudar f na região $C_3 = \{(x_1, x_2) : \varepsilon \leq \|(x_1, x_2)\| \leq k_0\}$. Como C_3 é compacto e f é contínua, então existe $(a_0, b_0) \in C_3$ tal que f atinge seu mínimo nele. Seja h esse valor mínimo. Também temos que tal mínimo é estritamente positivo pois f o é.

Tomando

$$r = \min \left\{ h, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\},$$

temos que r satisfaz as condições de (5.4).

Exemplo 5.5.4. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $x = (2, 0)$. Neste caso $P_C(x) = \{(1, 0)\}$, mas esse ponto não pertence fortemente ao conjunto.

Se $c = (1, 0) = c_0$, então qualquer r satisfaz

$$\|x - c\| \geq \|x - c_0\| + r\|c_0 - c\|. \quad (5.5)$$

Tomemos $c = (a, b) \in C \setminus \{c_0\}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$. A desigualdade (5.5) fica

$$\sqrt{-4a + 5} \geq 1 + r\sqrt{-2a + 2}.$$

Provaremos que não existe $r > 0$ tal que

$$\frac{\sqrt{-4a + 5} - 1}{\sqrt{-2a + 2}} \geq r, \text{ para todo } -1 \leq a < 1.$$

Fazendo algumas operações, obtemos que

$$\frac{\sqrt{-4a + 5} - 1}{\sqrt{-2a + 2}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{-a + 1}}{\sqrt{-4a + 5} + 1} \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 1^-.$$

Figura 5.11. O ponto $(1, 0) \notin P_C^F(x)$.

Definição 5.5.5. Seja $x \in X \setminus C$. Dizemos que c_0 pertence fortemente a $R_C(x)$ se existir $r > 0$ tal que

$$\|x - c\| \geq \|c_0 - c\| + r\|c_0 - x\| \text{ para todo } c \in C. \quad (5.6)$$

O conjunto dos elementos que satisfazem esta definição será representado por $R_C^F(x)$.

Observação 5.5.6. A desigualdade (5.6) pode ser escrita como

$$\|x - c\| \geq \|c_0 - c\| + k \quad \text{para todo } c \in C,$$

onde $k > 0$ qualquer, porque, de fato, $\|c_0 - x\| \neq 0$ e não depende de c .

Exemplo 5.5.7. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $x = (3, 0)$. Lembramos, do exemplo 1.2.2, que $R_C(x) = C$. Veremos que $c_0 \in C \setminus \{(-1, 0)\}$ pertence fortemente a $R_C(x)$ e que $(-1, 0) \notin R_C^F(x)$.

Primeiro estudemos $(-1, 0)$. Tomando $c = (1, 0)$ temos que $\|x - c\| = 2 = \|c_0 - c\|$, o que significa que $(-1, 0)$ não pertence fortemente a $R_C(x)$.

Seja agora $c_0 \in C \setminus \{(-1, 0)\}$. Devemos provar que existe $k > 0$ tal que $\|x - c\| \geq \|c_0 - c\| + k$ para todo $c \in C$.

Tomando $c \in C$ e utilizando as definições de distância e diâmetro,

$$\|x - c\| \geq \text{dist}(x, C) = 2 = \text{diam}(C) \geq \|c_0 - c\|.$$

Logo, $\|x - c\| - \|c_0 - c\| \geq 0$. Definamos $k = \inf_{c \in C} \{\|x - c\| - \|c_0 - c\|\}$ e suponhamos que $k = 0$. Como C é compacto e a norma é uma função contínua, temos que existe $c_1 \in C$ tal que $\|x - c_1\| - \|c_0 - c_1\| = 0$ e portanto

$$\|x - c_1\| = 2 = \|c_0 - c_1\|.$$

Daí, $c_1 = (1, 0)$ e $c_0 = (-1, 0)$, o que não é verdade.

Definição 5.5.8. Seja $x \in X \setminus C$. Dizemos que c_0 *pertence fortemente* a $Q_C(x)$ se existir $r > 0$ tal que

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq r\|x - c_0\| \quad \text{para todo } c \in C. \quad (5.7)$$

O conjunto dos elementos que satisfazem esta definição será representado por $Q_C^F(x)$.

Exemplo 5.5.9. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $x = (3, 0)$. Veremos que $c_0 = (-1, 0)$ não pertence fortemente a $Q_C(x)$.

Como vimos no exemplo 5.4.5, se $c = (a, b) \in C$,

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) = \frac{1 - a}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2a + 1}}.$$

Tomando $c = (a, b)$ tal que $a^2 + b^2 = 1$, temos

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) = \frac{1 - a}{2\sqrt{2(1 - a)}} = \frac{\sqrt{1 - a}}{2\sqrt{2}} \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 1^-.$$

Portanto, $c_0 \notin Q_C^F(x)$.

Exemplo 5.5.10. Sejam $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, C o eixo dos x_1 e $x = (0, 1)$. Tomemos $c = (a, 0) \in C$. Veremos que $c_0 = (0, 0) \notin Q_C^F(x)$.

Fazendo operações simples, obtemos que

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + t(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{t} = 0.$$

Logo, $c_0 \notin Q_C^F(x)$.

Exemplo 5.5.11. Consideremos novamente as condições de exemplo 5.5.3, ou seja, $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- : -x_2 \geq |x_1|\}$ e $x = (0, 1)$. Veremos que $c_0 = (0, 0) \in Q_C^F(x)$.

Observemos que se $c = c_0$, qualquer $0 \leq r \leq 1$ serve. Portanto, podemos supor $c \neq c_0$, $c = (a, b)$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + t(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(-a, t - b)\|^2 - \|(a, b)\|^2}{t(\|c_0 - c + t(x - c_0)\| + \|c_0 - c\|)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(t - 2b)}{t(\|c_0 - c + t(x - c_0)\| + \|c_0 - c\|)} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{|b|}{\sqrt{2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Logo, $c_0 = (0, 0) \in Q_C^F(x)$.

Teorema 5.5.12. $Q_C^F(x) \subset R_C^F(x)$.

Demonstração :

Seja $c_0 \in Q_C^F(x)$. Sabemos que existe $r > 0$ tal que para todo $c \in C$, vale

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + t(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{t} \geq r\|x - c_0\|.$$

Pela proposição 2.3.4, tomando $t = 1$ obtemos para todo $c \in C$

$$\|x - c\| - \|c_0 - c\| \geq r\|x - c_0\|.$$

■

Teorema 5.5.13. *Se para quaisquer $c \in C$ e $c_0 \in R_C(x)$, temos que $c_0 + t(c - c_0) \in C$, então, se $c_0 \in R_C^F(x)$, também $c_0 \in Q_C^F(x)$.*

Demonstração :

Provaremos que existe $r > 0$ tal que $\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq r\|x - c_0\|$, para todo $c \in C$.

Temos

$$\begin{aligned} \tau(c_0 - c, x - c_0) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\|c_0 - c + s(x - c_0)\| - \|c_0 - c\|}{s} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \|t(c_0 - c) + x - c_0\| - \|t(c_0 - c)\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x - (c_0 + t(c_0 - c))\| - \|c_0 - (c_0 + t(c_0 - c))\|. \end{aligned}$$

Como $c_0 + t(c - c_0) \in C$ e $c_0 \in R_C^F(x)$, temos que existe $r > 0$ com $\|x - (c_0 + t(c_0 - c))\| - \|c_0 - (c_0 + t(c_0 - c))\| \geq r\|x - c_0\|$ para todo $t \geq 1$ e todo $c \in C$.

Daí,

$$\tau(c_0 - c, x - c_0) \geq r\|x - c_0\|.$$

■

Corolário 5.5.14. Se C for um subespaço, então $R_C^F(x) = Q_C^F(x)$.

Demonstração :

Imediata. ■

Observação 5.5.15. No caso de C ser subespaço, temos que $c_0 \in R_C^F(x)$ se e só se existe $r > 0$ com

$$\tau(m, x - c_0) \geq r\|x - c_0\| \text{ para todo } m \in C \setminus \{0\}.$$

Teorema 5.5.16. Seja $A_r = \{c_0 \in R_C(x) : \|c_0 - c\| + r\|c_0 - x\| \leq \|x - c\|, c \in C\}$, com $r > 0$. Então $r(A_r) \leq (1 - r)d$, onde $d = \text{dist}(x, C)$ e $r(A_r)$ é o raio de Chebyshev de A_r .

Demonstração :

Lembramos a definição de raio de Chebyshev de um conjunto A ,

$$r(A) = \inf_{x \in X} \left[\sup_{c \in A} \|x - c\| \right],$$

e que claramente $r(A) \leq \sup_{c \in A} \|x - c\|$ para todo $x \in X$. (*)

Tomemos, para cada $\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon \in C$ tal que $\|x - c_\varepsilon\| < d + \varepsilon$.

Agora, tomando $c_0 \in A_r$, também temos que

$$\|c_0 - c_\varepsilon\| \leq \|x - c_\varepsilon\| - r\|c_0 - x\| < d + \varepsilon - rd = (1 - r)d + \varepsilon.$$

Por (*),

$$r(A_r) \leq \sup_{c \in A_r} \|c - c_\varepsilon\| \leq (1 + r)d + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos

$$r(A_r) \leq (1 - r)d.$$

■

Teorema 5.5.17. Seja C um subespaço. Se x tem melhor coaproximação forte em C , então todo elemento de $\{x\} \cup C$ também tem. Mais precisamente, se $c_0 \in R_C^F(x)$, então para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $c_1 \in C$, temos $kc_0 + c_1 \in R_C^F(kx + c_1)$ e com o mesmo r .

Demonstração :

Como C é subespaço, por 5.5.14, provaremos que $kc_0 + c_1 \in Q_C^F(kx + c_1)$ para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $c_1 \in C$. Como para $k = 0$ é imediato, consideraremos $k \neq 0$. Vamos usar 5.5.15. Seja $m \in C \setminus \{0\}$. Então

$$\begin{aligned} \tau(m, kx + c_1 - (kc_0 + c_1)) &= \tau(m, k(x - c_0)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|m + tk(x - c_0)\| - \|k(x - c_0)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} |k| \frac{\|\frac{m}{k} + t(x - c_0)\| - \|(x - c_0)\|}{t} = \\ &= |k| \tau\left(\frac{m}{k}, x - c_0\right) \geq |k|r\|x - c_0\| = r\|kx + c_1 - (kc_0 + c_1)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau(m, kx + c - (kc_0 + c)) \geq r\|kx + c - (kc_0 + c)\| \text{ para todo } m \in C \setminus \{0\}.$$

■

Observação 5.5.18. O exemplo 5.4.16 nos dá um exemplo de C não subespaço com $R_C^F = Q_C^F$.

Referências Bibliográficas

- [B-M73] M.W.Bartelt & H.W.McLaughlin. *Characterizations of strong unicity in approximation theory*, J. Approx. Theory **9**, (1973), 255-266.
- [Bea82] B.Beauzamy. *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holand Math. Studies **68**, (1982).
- [Bel68] P.K.Belobrov. *Some criteria for the Hilbertness of a space*, Izv. Vysš. Uččbn. Zaved. Matematika, **9** (76) (1968), 13-15 (russian).
- [Bir35] G.Birkhoff. *Orthogonality in linear spaces*, Duke Math. Jour. vol. 1 (1935), 169-172.
- [Bru73] R.E.Bruck Jr. *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341-355.
- [Con82] J.B.Conway. *A course in funtional analysis*, Springer-Verlag, New York, (1970).
- [Dav63] P.Davis. *Interpolation and approximation*, New York, Blaisdell, (1963).
- [D-S58] N.Durford & J.T.Schwartz. *Linear operators*, New York, Interscience P. Jhon Wiley, (1988).
- [Fra75] C.Franchetti. *Chebyshev centers and hipercycles*, Boll. Un. Mat. Ital.(4) **47** (1975), 565-573.
- [F-F72] C.Franchetti & M. Furi. *Some characteristic properties of real Hilbert spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **17** (1972), 1045-1048.
- [Gil65] J.R.Giles. *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1945), 436-446.
- [Hol72] R.B.Holmes. *A course on optimization and best approximation*, Springer-Verlag, New York (1972).

- [Jam45] R.C.James. *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945), 291-302.
- [Jam47a] R.C.James. *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265-292.
- [Jam47b] R.C.James. *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559-566.
- [Kak39] S.Kakutani. *Some characterizations of Euclidean spaces*, Jap. J. Math. **16** (1939), 93-97.
- [Nar91] T.D.Narang. *On best coapproximation in normed linear spaces*, Rocky Moun. J. Math. **22** (1991), 265-287.
- [Mut80] S.Muthukumar. *A note on best simultaneous approximations*, Indian J. Pure Appl. Math. **11** (1980), 715-719.
- [Pap74] P.L.Papini. *Some questions related to the concept of orthogonality in Banach spaces. Orthogonal projections*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **9** (1974), 386-401.
- [Pap75] P.L.Papini. *Some questions related to the concept of orthogonality in Banach spaces, proximity map; bases*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11** (1975), 44-63.
- [Pap76] P.L.Papini. *Approximation and strong approximation in normed spaces via tangent functionals*, J. Approx. Theory **22** (1976), 111-118.
- [P-S79] P.L.Papini & I. Singer. *Best coapproximation in normed linear spaces*, Monatsh. Math. **88** (1979), 27-44.
- [Phe89] R.R.Pheps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Berlin, Springer-Verlag (1989).
- [Sin70] I.Singer. *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, New York, (1970).
- [Sin74] I.Singer. *The theory of best approximation and functional analysis*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. **13** (1974).