**ÁLGEBRAS DE p -GRUPOS COM
BASES MULTIPLICATIVAS FILTRADAS**

José Cloves Verde Saraiva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies**

– São Paulo, março de 1999 –

ÁLGEBRAS DE p -GRUPOS COM
BASES MULTIPLICATIVAS FILTRADAS

José Cloves Verde Saraiva

Este exemplar corresponde à redação final
da tese apresentada por José Cloves Verde
Saraiva, devidamente corrigida e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 22 de março de 1999

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies - IME-USP
- Prof. Dr. Jairo Zacarias Gonçalves - IME-USP
- Prof. Dr. Rudolf Richard Maier - UnB
- Prof. Dr. Norai Romeu Rocco - UnB
- Prof. Dr. Guilherme Augusto de La Rocque Leal - UFRJ

RESUMO

Seja K um corpo de característica $p > 0$ e G um p -grupo finito metacíclico. Apresentamos neste trabalho uma classificação das álgebras de grupo KG que possuem uma base multiplicativa filtrada sobre o corpo K . Apresentamos também uma aplicação da técnica empregada na demonstração do Teorema de Classificação para determinar bases multiplicativas filtradas de outras álgebras de grupo KG , onde G é um p -grupo não-metacíclico.

ABSTRACT

Let K be a field of the characteristic $p > 0$ and let G be a finite metacyclic p -group. We present a classification of the group algebras KG which have a multiplicative filtered base over K . We also present an application of the technique used in the proof of this classification to determine such bases for others KG where G are not metacyclic.

..., *but I'm gonna wave my freak flag high. high.*

(If six was nine - James M. Hendrix)

Tudo aqui escrito é dedicado à memória do meu avô, Eduardo Otelo da Silva Coqueiro, e daqueles que saudosamente partiram mas ainda vivem na minha lembrança.

Uma dedicatória especial aos meus pais, Maria José e José da Paz Saraiva, e à minha querida esposa, Maria Vitória e aos filhos Andrei e Raysa, e à minha avó Felícia nos seus 90 anos.

AGRADECIMENTOS

Diante do trabalho a fé, a esperança alcançada e os corações de muitos, não os esquecerei. Só por DEUS! conceder tudo o quanto até agora escrevo. E, neste momento, tento olhar pra todo o caminho que me conduziu a esta formação e ver a “gente boa” acreditando na minha força de vontade e me dar a chance de concluir meu objetivo. Resta-me agradecer.

Inicialmente, agradeço aos colegas Inaldo Tavares, José de Ribamar Cabral Lopes, Francisco Pinheiro Dominice, Cristian Novoa Bustos, Ezio Costa, João Batista Nascimento, Andreas Brunner, Luciano Huanca e Rosângela Kulcsar pelo que no dia a dia o estudo proporcionou agradáveis encontros e fraterna amizade.

Aqui registro os meus agradecimentos aos queridos mestres, Profas. Helena Santos e Dilsa Furtado, Profs. Raymundo Moacir, Eleazar Carvalho, Olavo Correia Lima, Rudolf Richard Maier. Agradeço também ao Prof. Chaim Hönig pelas conversas e sutilezas gerais e não esqueço de agradecer o encorajamento dos professores Plínio Simões, Rui Tavares, Jairo Gonçalves, Luíz Gonzaga Xavier de Barros, Orlando Stanley, Nair Fernandes, Hector Merklen e especialmente aos professores visitantes Victor Bovdi e seu pai, A.A. Bovdi, por sugerirem o tema. O Teorema 3.1.1 foi obtido em colaboração com V. Bovdi.

Ao professor Dr. Francisco César Polcino Milies cabe o meu maior agradecimento, por me aceitar como aluno e fundamentalmente por sua sábia orientação, sugestões, correções, aceitar o estudo deste problema e por acreditar no meu trabalho.

Finalmente, agradecer aos que com grande empenho fazem a infra-estrutura do IME-USP, os amigos da limpeza, segurança, o bom café e ao bom pessoal da Biblioteca – Marina, Sílvia, Inácia, Eunice, Alessandra, Nádia, Luísa, Célia e Teresa –, Marlene da Xerox e os amigos do restaurante Crisma. Também aos colegas da UFMA, em especial Maria Luíza, Vera Lobato, Durval Rocha, Maria Rita, Jocelino Melo, José Romão e Luis Carlos Filgueiras de Carvalho e aos amigos Amorim Pinto, Wilson Passos, Ribinha e Arimatéia, pela valiosa colaboração, e ao Walter, pelo esmero na digitação.

À glória de São Luís, São Paulo, dos milagres de São José de Ribamar e ao sol da Praia do Araçagi.

Assim seja!

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Bases multiplicativas filtradas para p -grupos abelianos	3
2	Resultados básicos e notações	6
2.1	Grupos (p -grupos metacíclicos)	7
2.2	Álgebras de dimensão finita	9
2.3	K -bases multiplicativas filtradas - propriedades fundamentais	11
2.4	Álgebras de grupo	13
2.4.1	Álgebras de p -grupos	14
3	Bases multiplicativas filtradas para p-grupos metacíclicos finitos	28
3.1	Introdução	28
3.2	O teorema de classificação	34
4	Exemplo de p-grupo não metacíclicos com base multiplicativa filtrada	57
4.1	Exemplos especiais de álgebra de grupo com base multiplicativa filtrada . .	58
	Referências	76

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é resolver parcialmente a questão proposta por R. Bautista, P. Gabriel, A. Roiter e L. Salmeron na referência [1], que é a seguinte: *Quando pode existir uma K -base multiplicativa filtrada numa álgebra de grupo KG ?* Sobre esta questão apenas L. Paris [18] dá exemplos de álgebras de grupo KG , que não possuem K -base multiplicativa filtrada e também prova que se K é um corpo de característica 2 e G o 2-grupo diedral finito ou G o grupo quatérnio com oito elementos e K contendo uma raiz cúbica primitiva da unidade, então KG tem uma K -base multiplicativa filtrada.

A resposta aqui apresentada trata da classificação das álgebras de grupo KG de um p -grupo finito metacíclico G sobre um corpo K de característica $p > 0$ tais que KG possui uma K -base multiplicativa filtrada. Nossa resposta está escrita no Capítulo 3, no Teorema 3.1.1, onde somente as álgebras de grupo dadas como exemplo por L. Paris [18] têm uma tal K -base.

No capítulo 4 trabalhamos numa situação mais geral do que tratamos no Teorema 3.1.1,

isto é, tratamos com p -grupos não metacíclicos, onde apresentamos um novo p -grupo com base multiplicativa filtrada, e também apresentamos outros p -grupos três geradores sem base multiplicativa filtrada.

Para melhor entendimento do assunto, fazemos a seguinte definição:

Definição 1.0.1 *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K e considere o conjunto B uma K -base de A . Dizemos que B é uma K -base multiplicativa filtrada se valem as seguintes propriedades:*

- 1) $B \cup \{0\}$ é um semigrupo para multiplicação de A ;
- 2) $B \cap \text{rad}(A)$ é uma K -base do $\text{rad}(A)$, onde $\text{rad}(A)$ denota o radical de Jacobson de A ;
- 3) Se $e, e' \in B \setminus \text{rad}(A)$, $e \neq e'$, então $e^2 = e$ e $e.e' = 0$.

Estas K -bases especiais foram introduzidas por H. Kupisch, em 1965, tratando da Teoria das Representações de Álgebras [14].

1.1 Bases multiplicativas filtradas para p -grupos abelianos

Os resultados citados nesta seção são já conhecidos, devidos a L. Paris [18]. Devido ao teorema de estrutura dos p -grupos abelianos finitos, os seguintes resultados são fundamentais à construção de bases multiplicativas filtradas para qualquer p -grupo abeliano.

Resultado 1.1.1 *Seja G um p -grupo cíclico finito, $G = \langle a : a^{p^n} = 1 \rangle$, $n \geq 1$ e K um corpo de características $p > 0$. Então o conjunto*

$$B = \{(a - 1)^k \mid 0 \leq k < p^n\}$$

é uma K -base multiplicativa filtrada da álgebra KG .

Resultado 1.1.2 *Sejam KG_1 e KG_2 álgebras de grupo com K -bases multiplicativas filtradas B_1 , B_2 , respectivamente, então $B_1 \times B_2$ é uma K -base multiplicativa filtrada de $K[G_1 \times G_2]$.*

Imediatamente segue que:

Resultado 1.1.3 *Seja $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_s \rangle$ um p -grupo abeliano finito escrito como produto direto de subgrupos cíclicos $\langle a_i \rangle$ de ordem q_i , $1 \leq i \leq s$, então o conjunto*

$$B = \{(a_1 - 1)^{n_1} (a_2 - 1)^{n_2} \cdots (a_s - 1)^{n_s} \mid 0 \leq n_i < q_i\}$$

é uma K -base multiplicativa filtrada da álgebra KG sobre o corpo K de característica $p > 0$.

Neste trabalho trataremos exclusivamente com álgebras de grupo KG , onde K um corpo de característica $p > 0$ e o grupo G é um p -grupo finito. Na página 16, como consequência do Resultado 2.4.2 (1), provaremos que toda K -base de KG verifica trivialmente a condição 3).

Na referência [1], R. Bautista, P. Gabriel, A. Roiter e L. Salmeron provaram que se A é uma álgebra tipo representação finita (isto é, no qual existe somente um número finito de classes de isomorfismo de A -módulo indecomponíveis) sobre um corpo K algebricamente fechado, então A tem uma K -base multiplicativa filtrada.

O seguinte teorema, devido a G. Higman, nos diz como são as álgebras de grupo em geral que são do tipo representação finita. Vide [5, Teorema 5.13, p.57].

Teorema 1.1.4 (G. Higman) *Uma álgebra de grupo KG do grupo G sobre um corpo K de característica $p > 0$ é do tipo representação finita se, e somente se, os p -subgrupos de Sylow de G são cíclicos.*

Importante é que a existência das bases multiplicativas filtradas não caracteriza uma álgebra de grupo tipo representação finita.

A álgebra de grupo $K(C_p \times C_p)$, $p \geq 3$, onde o grupo é o produto direto de grupos cíclicos de ordem p e K um corpo de característica $p > 0$ é um exemplo de álgebra de grupo não do tipo representação finita (pelo Teorema de Higman), mas pelo Resultado 1.1.3 tem uma K -base multiplicativa filtrada.

Finalizamos esta introdução informando que P. Lendrock e G.O. Michler [16] provaram que a álgebra de grupo do menor grupo de Janko, J_1 , sobre um corpo de característica 2 não possui uma K -base multiplicativa filtrada.

Capítulo 2

Resultados básicos e notações

Neste capítulo descrevemos os resultados, definições, e introduzimos a notação a ser usada no contexto deste trabalho. Para melhor adequar as informações, este ficará dividido em subseções, onde começamos com grupos, tratando especialmente dos p -grupos e mais particularmente dos p -grupos metacíclicos. Dando continuidade, tratamos das álgebras de dimensão finita, suas bases, subálgebras importantes, os ideais e especialmente o radical de Jacobson e, a seguir, numa nova subseção tratamos das álgebras de grupo, principalmente das álgebras de grupo KG de um p -grupo G sobre um corpo K de característica $p > 0$. Sobre estas álgebras de grupo de um p -grupo tratamos da determinação de K -bases para certos quocientes de potência do radical, como caso especial do que já foi tratado por Jennings [9]. Para maior entendimento, também, ou fazemos uma demonstração do resultado apresentado ou indicamos a referência onde este se encontra.

2.1 Grupos (p -grupos metacíclicos)

Neste trabalho todos os grupos são finitos e os resultados principais aqui tratados são com respeito à classe dos p -grupos onde p é um número primo.

Definição 2.1.1 Dizemos que um grupo G é metacíclico se este tem um subgrupo normal H tal que H e G/H são cíclicos.

Os principais exemplos são os diedrais, semi-diedrais, quatérnios generalizados etc.

Nesta classe de grupos, no caso de G ser um grupo finito, podemos estabelecer que

$$H = \langle a \rangle \approx \mathbb{Z}_m \quad \text{e} \quad \frac{G}{H} = \langle Hb \rangle \approx \mathbb{Z}_n,$$

com $a, b \in G$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Desde que o índice de H é n , temos que $b^n \in H$ e $b^{-1}ab \in H$, o que nos permite escrever

$$b^{-1}ab = a^r \quad \text{e} \quad b^n = a^s,$$

onde r, s são números inteiros, $1 \leq r, s \leq m$. Daí, é fácil ver que $b^{-1}a^tb = a^{tr}$, logo $b^{-k}a^tb^k = a^{tr^k}$. Então, por ser $b^n = a^s$, temos

$$a = a^{-s}aa^s = b^{-n}ab^n = a^{r^n},$$

portanto, $r^n \equiv 1 \pmod{m}$, pois $o(a) = |H| = m$. Analogamente vale $a^s = b^n = b^{-1}b^n b^{-1} = b^{-1}a^s b = a^{rs}$, portanto, $rs \equiv s \pmod{m}$.

Estas observações permitem escrever uma apresentação para todo grupo metacíclico finito. Particularmente, para um p -grupo metacíclico, os seguintes resultados podem ser encontrados em [8, p.336, Satz 11.2]:

Resultado 2.1.2 *Todo p -grupo metacíclico G admite a seguinte apresentação:*

$$G = \langle a, b | a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, {}^b a = a^r \rangle,$$

onde $t \geq 0$, $r^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^n}$ e $p^t(r-1) \equiv 0 \pmod{p^n}$. Portanto, todo elemento $g \in G$ pode ser escrito com $g = a^i b^j$, onde $0 \leq i \leq p^n$ e $0 \leq j < p^m$ e claramente $|G| = p^{n+m}$.

Observa-se que na apresentação de G , a notação da conjugação ${}^b a = bab^{-1}$ e usamos para o comutador $(b, a) = {}^b a a^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$ (estas notações são introduzidas na referência [8]).

Também é conhecido o seguinte resultado:

Resultado 2.1.3 *Sendo G um p -grupo não abeliano, então o fator G/G' não pode ser cíclico.*

Uma demonstração sai da caracterização de Wielandt que o subgrupo comutador de G, G' , é um subgrupo do subgrupo de Frattini, $\Phi(G)$, de G , vale em geral para grupos nilpotentes aqui em particular para p -grupo e do Teorema da Base de Burnside [8, Hilfssatz 7.1c, p.300].

Concluimos esta seção introduzindo alguma notação. Sejam H, K subgrupos de um grupo qualquer G . Definimos

$$[H, K] = \langle (h, k), h \in H, k \in K \rangle$$

$$\text{e } G^p = \langle x^p | x \in G \rangle.$$

2.2 Álgebras de dimensão finita

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K . Então seus elementos são dados por combinações lineares, $a = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$ de n elementos básicos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ e coeficientes $a_i \in K$. Daí, naturalmente, definimos a adição, a multiplicação por escalares e o produto dado pela fórmula

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i \right) = \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j) \varepsilon_i \varepsilon_j,$$

onde é conhecido o produto dos elementos básicos $\varepsilon_i \varepsilon_j$ e assim a multiplicação e a álgebra A ficam determinadas com respeito à base $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Neste trabalho, tratamos de conceitos bastante conhecidos no estudo das álgebras, e destacamos os seguintes com respeito à álgebra A : subálgebra de A , ideais à esquerda (à direita), ideais bilaterais e as álgebras quocientes. Dentre estes conceitos, recordamos agora os mais importantes.

Definição 2.2.1 *A subálgebra de Frattini de A , denotada por $\Phi(A)$, é definida como a intersecção de todas as subálgebras maximais de A , se estas existem; caso contrário, define-se $\Phi(A) = A$.*

Definição 2.2.2 *Dizemos que um elemento $a \in A$ é nilpotente se existe um número inteiro positivo k tal que $a^k = 0$.*

Definição 2.2.3 *Sejam I e J ideais à esquerda (à direita, bilaterais), o subgrupo aditivo de A gerado pelos produtos ab onde $a \in I$, $b \in J$ e denotado por IJ é um ideal à esquerda*

(à direita, bilateral) de A . E, assim, indutivamente, definimos as potências de I por

$$I^n = I^{n-1}I \quad \text{onde} \quad I^1 = I.$$

Observa-se que I^n consiste de todas as somas finitas

$$\sum_{i=1}^r a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}, \quad \text{com } a_{i_j} \in I \quad \text{e} \quad r \geq 1.$$

Definição 2.2.4 Dizemos que o ideal I de A é nilpotente se alguma potência de I é zero. O menor inteiro positivo k que satisfaz $I^k = 0$ é chamado o índice de nilpotência do ideal I . Particularmente, se $I = A$ é nilpotente, dizemos que A é uma álgebra nilpotente.

Destacamos um resultado importante de G.L. Carns e C.Y. Chao (vide [2]):

Resultado 2.2.5 Seja A uma álgebra de dimensão finita nilpotente, então $\Phi(A) = A^2$.

São conhecidos os seguintes resultados, que podem ser encontrados em [4] e [5]:

Resultado 2.2.6 Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K de dimensão n e seja I um ideal lateral de A . Se todo elemento de I é nilpotente, então I é nilpotente e o índice de nilpotência de I é no máximo $n + 1$.

Resultado 2.2.7 Seja A uma álgebra de dimensão n sobre um corpo K . Se existe uma K -base de A formada só por elementos nilpotentes, então a própria A é uma álgebra nilpotente (vide [7]).

Definição 2.2.8 *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo. O radical de Jacobson de A , denotado por $\text{rad}(A)$, é definido como a intersecção de todos os ideais à esquerda maximais de A , se estes existirem; caso contrário, define-se $\text{rad}(A) = A$.*

Neste trabalho o conceito principal de K -base multiplicativa filtrada de uma K -álgebra depende especialmente de $\text{rad}(A)$, isto é, do radical de Jacobson da álgebra A . Por isso, finalizamos este subitem com o

Resultado 2.2.9 *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K , então valem os seguintes itens:*

(a) $\text{rad}(A)$ é nilpotente;

(b) $\text{rad}(A)$ contém todos os ideais à esquerda nilpotentes de A ;

(Vide referência [5].)

2.3 K -bases multiplicativas filtradas - propriedades fundamentais

Vamos provar nesta seção uma proposição fundamental no estudo e desenvolvimento do teorema principal deste trabalho.

Proposição 2.3.1 *Seja B uma base multiplicativa filtrada de uma álgebra de dimensão finita A sobre um corpo K . Então valem as seguintes propriedades:*

- (i) $B \cap \text{rad}(A)^n$ é uma base do $\text{rad}(A)^n$, $\forall n \geq 1$, sobre o corpo K ;
- (ii) Se $u, v \in B \setminus \text{rad}(A)^k$ e $u \equiv v \pmod{(\text{rad}(A)^k)}$, então $u = v$;
- (iii) Se $B \setminus \{1\} \subseteq \text{rad}(A)$, então $B \setminus \text{rad}(A)^2$ são geradores de A como álgebra sobre K .

Demonstração:

- (i) Pela Definição 1.0.1, $B \cap \text{rad}(A)$ é uma K -base do $\text{rad}(A)$ e o subconjunto $B \cap \text{rad}(A)^n$ é linearmente independente sobre K . E, desde que o conjunto dos produtos $b_1 b_2 \cdots b_n$, com $b_i \in B$ é um sistema de geradores para $\text{rad}(A)^n$ e cada tal produto é sempre 0 ou pertence a $B \cap \text{rad}(A)^n$, concluímos que $B \cap \text{rad}(A)^n$ é uma K -base do $\text{rad}(A)^n$.
- (ii) Escrevendo $u - v = \sum_{w \in B \cap \text{rad}(A)^k} \lambda_w w$, com $\lambda_w \in K$, temos pela independência linear dos elementos da base que todos os λ_w são nulos e $u = v$.
- (iii) Pelo Resultado 2.2.9, o radical de uma álgebra de dimensão finita A é nilpotente e pela aplicação direta do Resultado 2.2.5 particularmente aplicado ao $\text{rad}(A)$ e sabendo que a subálgebra de Frattini só contém não geradores.

2.4 Álgebras de grupo

Seja K um corpo e G um grupo finito de ordem $|G| = n$. Se $g_1, g_2, \dots, g_n$ são os elementos de G , considere KG o conjunto de todas as somas formais

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i, \quad \text{com } \alpha_i \in K,$$

onde duas tais expressões, $\sum \alpha_i g_i$ e $\sum \beta_i g_i$ são consideradas iguais se e somente se $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. KG é um espaço vetorial definindo-se a adição e multiplicação por um escalar, usualmente dadas por

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^n \beta_i g_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) g_i; \\ 2) \quad & \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) g_i \quad \text{com } \lambda \in K, \end{aligned}$$

e a multiplicação de G induz uma multiplicação em KG , dada da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i g_i \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{g_i g_j = g_k} \alpha_i \beta_j \right) g_k.$$

A identificação de g_i com $1g_i$, $1 \in K$, faz $G \subseteq KG$ e com esta identificação os elementos do grupo G formam uma base de KG sobre o corpo K . O conjunto KG com as operações acima descritas é uma álgebra de dimensão finita n -dimensional sobre K : é a chamada álgebra de grupo do grupo G sobre o corpo K .

Sabe-se que KG é uma álgebra com unidade e, pela identificação acima, a unidade é o elemento neutro do grupo, $1 \in G$ e claramente os elementos da K -base G são invertíveis

em KG . É também imediato ver que KG é uma álgebra comutativa se e somente se G é um grupo abeliano e, além disso, se $G \neq 1$ finito, KG não pode ser uma álgebra de divisão.

Um resultado muito conhecido é o Teorema de Maschke: *KG é semisimples se e somente se a característica do corpo K não divide a ordem de G .*

Por outro lado, se $\text{car}K = p > 0$ divide a ordem do grupo G , o radical de KG é não nulo, pois basta ver que o ideal gerado por $\sigma = \sum_{i=1}^n g_i \in KG$ é de quadrado nulo, portanto, nilpotente e o Resultado 2.2.9 garante $\text{rad}(KG) \neq 0$.

Sabemos também que o homomorfismo de aumento $\varepsilon : KG \rightarrow K$ tem núcleo $\text{Ker}\varepsilon = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \in KG \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$, o ideal de aumento de KG , que aqui denotamos por $I_K(G)$.

Objetivando a prova do teorema principal deste trabalho, tratamos das álgebras de grupo modulares, particularmente com as álgebras KG , onde G é um p -grupo finito e K é um corpo de característica $p > 0$.

Pela importância deste assunto, vamos introduzi-lo como uma subseção.

2.4.1 Álgebras de p -grupos

O básico neste estudo é o artigo famoso de Jennings (1941) [9], onde buscamos maior transparência no que se refere à determinação de K -bases para quocientes de potências do

radical. Isto será feito no caso particular das álgebras de p -grupos metacíclicos modulares no teorema principal.

P. 68

Resultado 2.4.1 (Jennings) *O radical, $\text{rad}(KG)$, da álgebra de grupo KG de um p -grupo G de ordem p^n sobre um corpo K de característica $p > 0$ tem dimensão igual a $p^n - 1$ e tem uma K -base formada por todos os elementos $g_i - 1$, onde $1 \neq g_i \in G$.*

O conjunto $\{g - 1 \mid g \in G\}$ é uma base de $I_K(G)$ cujos elementos são todos nilpotentes. Pelo Resultado 2.2.7, segue que $I_K(G)$ é nilpotente e, pelo Resultado 2.2.9, temos que $I_K(G) \subset \text{rad}(KG)$. Como $\dim(I_K(G)) = \dim(KG) - 1$, segue que $I_K(G) = \text{rad}(KG)$.

Pela nilpotência do $\text{rad}(KG) = I_K(G)$, podemos escrever

$$(2.1) \quad KG = I_K^0(G) \supset I_K^1(G) \supset I_K^2(G) \supset \cdots \supset I_K^t(G) = 0,$$

onde $t = t(G)$ é o índice de nilpotência do radical de KG . Observamos que a seqüência decrescente de ideais (2.1) é comumente chamada de uma *filtração do ideal $I_K(G)$* por ter a propriedade de que $I_K^i(G)I_K^j(G) \subseteq I_K^{i+j}(G)$ (vide referência [12], Teo.1.5(ii), p.308).

Agora destacamos os seguintes resultados sobre o índice de nilpotência $t = t(G)$, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência [12, pp. 313–322].

Resultado 2.4.2 *Seja G um p -grupo de ordem p^a , $a \geq 1$. Então valem:*

1) *D. Wallace (1968): $a(p - 1) + 1 \leq t(G) \leq p^a$;*

2) Motose-Ninomiya (1975):

(i) $t(G) = a(p-1) + 1$ se e somente se G é abeliano elementar;

(ii) $t(G) = p^a$ se e somente se G é cíclico.

Agora, com este resultado, podemos provar que nas álgebras de grupo KG onde G é um p -grupo de ordem p^a , $a \geq 1$ e K é um corpo de característica $p > 0$, toda K -base B de KG verifica a condição (iii) da Definição 1.0.1 pelo seguinte: se um elemento idempotente $e \in B \setminus \text{rad}(KG)$, então $e = 1 + \xi$ com $\xi \in \text{rad}(KG)$, pelo Resultado 2.4.1. Devido à idempotência de e , podemos escrever $e = e^{p^a} = (1 + \xi)^{p^a} = 1 + \xi^{p^a} = 1$, pois $\xi^{p^a} = 0$ pelo item 1) do Resultado 2.4.2 acima.

Concluimos que para um p -grupo G sobre um corpo K de característica $p > 0$ a álgebra KG é um anel local e seu único idempotente não nulo é 1.

Resultado 2.4.3 (Koshitani (1977) e Motose (1978)) *Se G é p -grupo metacíclico com apresentação*

$$G = \langle a, b | a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, {}^b a = a^r \rangle,$$

então

$$t(G) = \begin{cases} p^n + p^m - 1 & , \text{ se } m \leq t \\ p^{n+m-t} + p^t - 1 & , \text{ se } m > t. \end{cases}$$

Segue-se facilmente que os seguintes grupos de ordem 2^{n+1} possuem álgebras de grupo modular cujos radicais $I_K(G)$ têm índice de nilpotência igual a $2^n + 1$.

- Diedral: $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1} \rangle$.
- Quatérnio Generalizado: $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1} \rangle$.
- Semidiedral: $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle$, que é isomorfo a

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle.$$

Demonstração: Por serem metacíclicos com $m = 1$ e para o grupo diedral e semidiedral $t = n$, e $t = n - 1$ para o grupo quatérnio generalizado, portanto temos que $1 \leq n - 1 < n$, pois $n \geq 2$. Aplicando diretamente o Resultado 2.4.3 temos que

$$t(G) = 2^n + 2^1 - 1 = 2^n + 1.$$

Os n -ésimos subgrupos de dimensão de G sobre o corpo K , se definem por

$$\mathcal{D}_n(G) = G \cap (1 + I_K^n(G)) \quad (n \geq 1)$$

e, por um resultado de Jennings, estes subgrupos característicos de G podem ser computados recursivamente da seguinte forma:

$$\mathcal{D}_1(G) = G \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_n(G) = [\mathcal{D}_{n-1}(G), G] \left(\mathcal{D}(G) \right)_{[n/p]}^p,$$

com $n \geq 2$, onde $[n/p]$ significa o menor inteiro maior do que ou igual à fração n/p (vide referência [12, teo.1.6, p.309]).

Resultado 2.4.4 *Com a notação acima, vale que*

$$G' = [G, G] \subseteq \mathcal{D}_2(G).$$

Finalizamos este item provando um importante resultado que estabelece uma K -base ordenada para álgebras KG e particularmente descreve K -bases para os quocientes de potências do radical, ou melhor, explicita as K -bases para fatores da filtração de $I_K(G)$:

$$KG = I_K^0(G) \supseteq I_K^1(G) \supseteq \cdots \supseteq I_K^k(G) \supseteq I_K^{k+1}(G) \supseteq \cdots \supseteq I_K^t(G) = 0,$$

onde $t = t(G)$ é o índice de nilpotência de $I_K(G)$.

O seguinte lema tem muita importância, pois ele simplifica a dificuldade natural que aparece no artigo de Jennings.

Lema 2.4.5 *Seja G o p -grupo não abeliano dado pela apresentação*

$$G = \langle a, b \mid a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, {}^b a = a^r \rangle,$$

onde $t \geq 0$, $r^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^n}$ e $p^t(r-1) \equiv 0 \pmod{p^n}$ e seja K um corpo de característica $p > 0$. Considere o conjunto

$$L_k = \{(1-a)^{k_1}(1-b)^{k_2} \mid 0 \leq k_1 < p^n, 0 \leq k_2 \leq p^m, k_1 + k_2 = k\}$$

e seja $w : I_K(G) \rightarrow I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ a projeção canônica. Então a imagem $w(L_k)$ do conjunto L_k é uma base do quociente $I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Demonstração: Faremos indução sobre k , para provar que a imagem do conjunto $\{(1-a)^l(1-b)^{k-l} \mid 0 \leq l \leq k\}$ pela projeção canônica é um sistema de geradores do quociente $I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ como espaço vetorial sobre o corpo K . Seja $g, g' \in G$, a identidade $1 - gg' = (1-g) + (1-g') - (1-g)(1-g')$ implica que a imagem do conjunto $\{(1-a), (1-b)\}$ pela projeção canônica é um sistema de geradores do quociente $I_K(G)/I_K^2(G)$ como espaço vetorial sobre K . Suponhamos por hipótese de indução, que $w(L_m)$ com $m \leq k$ seja um

sistema de geradores do espaço vetorial $I_K^m(G)/I_K^{m+1}(G)$ e vamos provar que as imagens dos produtos $u_1 u_2$, com $u_1 \in I_K(G)$ e $u_2 \in I_K^m(G)$ geram o quociente $I_K^{m+1}(G)/I_K^{m+2}(G)$ como espaço vetorial sobre K . Podemos escrever:

$$\begin{aligned} w(u_1) &\equiv \alpha_1(1-a) + \alpha_2(1-b) \pmod{I_K^2(G)}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2 \in K, \\ w(u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \beta_l(1-a)^l(1-b)^{m-l} \pmod{I_K^{m+1}(g)}, \text{ com } \beta_l \in K, 0 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

Portanto, temos o produto

$$(**) \quad w(u_1 u_2) \equiv \sum_{l=0}^m \alpha_1 \beta_l (1-a)^{l+1} (1+b)^{m-l} + \alpha_2 \beta_l (1+b) (1+a)^l (1+b)^{m-l} \pmod{I_K^{m+2}(G)}.$$

Vamos considerar primeiro o caso em que $p > 2$. Denotamos $c = (b, a) = bab^{-1}a^{-1} = {}^b a a^{-1} = a^r a^{-1} = a^{r-1}$ o gerador do subgrupo comutador de G , G' . Pelo Resultado 2.4.4, $c \in G' \subseteq \mathcal{D}_2(G)$ implica que $(1-c) \in I_K^2(G)$ e calculamos

$$\begin{aligned} (1-b)(1-a) &= (1-a) - (b-ba) = (1-a) - (b-cab) \\ &= (1-a) - (1-ca)b = (1-a) + (1-ca)(1-b) - (1-ca). \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$(2.4.6) \quad 1 - gg' = (1-g) + (1-g') - (1-g)(1-g'), \quad \forall g, g' \in G,$$

que será de uso frequente daqui em diante, temos

$$\begin{aligned} (1-b)(1-a) &= (1-a) + [(1-c) + (1-a) - (1-c)(1-a)](1-b) \\ &\quad - [(1-c) + (1-a) - (1-c)(1-a)] \\ &= (1-a) + (1-c)(1-b) + (1-a)(1-b) - (1-c)(1-a)(1-b) \\ &\quad - (1-c) - (1-a) + (1-c)(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-c)(1-b) + (1-a)(1-b) - (1-c)(1-a)(1-b) \\
&\quad - (1-c) + (1-c)(1-a).
\end{aligned}$$

Como os termos $(1-c)(1-b)$, $(1-c)(1-a)(1-b)$ e $(1-c)(1-a) \in I_K^3(G)$ e $c = a^{r-1}$, podemos escrever que

$$(1-b)(1-a) \equiv (1-a)(1-b) - (1-c) \pmod{I_K^3(G)},$$

isto é,

$$(*) \quad (1-b)(1-a) \equiv (1-a)(1-b) - (1-a^{r-1}) \pmod{I_K^3(G)}.$$

Além disso, $r-1$ não pode ser coprimo com a ordem do elemento $a \in G$, pois caso contrário $G' = \langle a \rangle$ implicaria que G/G' seria cíclico e pelo Resultado 2.1.3, G seria cíclico (contradição). Como a ordem do elemento $a \in G$ é p^n , concluímos que p divide $r-1$, isto é, existe um inteiro s tal que $r-1 = ps$. Na congruência (*), obtemos:

$$(1-b)(1-a) \equiv (1-a)(1-b) - (1-a^{ps}) \pmod{I_K^3(G)},$$

então

$$(1-b)(1-a) \equiv (1-a)(1-b) - (1-a^s)^p \pmod{I_K^3(G)}$$

e como $p > 2$, temos:

$$(1-b)(1-a) \equiv (1-a)(1-b) \pmod{I_K^3(G)},$$

donde

$$(1-b)(1-a)^l(1-b)^{m-l} \equiv (1-a)^l(1-b)^{m-l+1} \pmod{I_K^{m+2}(G)}.$$

Substituindo em (**), obtemos

$$w(u_1 u_2) \equiv \sum \alpha_1 \beta_l (1-a)^{l+1} (1-b)^{m-l} - \alpha_2 \beta_l (1-a)^l (1-b)^{m-l+1} \pmod{I_K^{m+2}(G)},$$

provando o lema para $p > 2$.

A seguir, considere $p = 2$. Tal como no caso anterior, pode-se provar que $p = 2$ divide $r - 1$ e escrevemos $r - 1 = 2s$. Se s for um número par então 4 divide $r - 1$ e um simples cálculo mostra que

$$c + 1 = (a^{r-1} + 1) = (a^{4s'} + 1) = (a^{s'} + 1)^4 \in I_K^3(G),$$

logo, também teremos que

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) \pmod{I_K^3(G)},$$

donde, fazendo as mesmas substituições que foram feitas no caso anterior na congruência (**), o lema fica também provado quando $p = 2$ e $4/r - 1$.

Resta agora somente considerar o caso em que s é um inteiro ímpar, isto é, $s = 2j + 1$. Temos que

$$c + 1 = a^{r-1} + 1 = a^{2s} + 1 = a^{4j+2} + 1 = a^{4j} \cdot a^2 + 1$$

e pela identidade (2.4.5),

$$c + 1 = (a^{4j} + 1)(a^2 + 1) + (a^{4j} + 1) + (a^2 + 1),$$

donde claramente obtemos que

$$c + 1 \equiv (a + 1)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Substituindo esta congruência na congruência (*), temos:

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}$$

e por um simples cálculo, provamos que

$$(***) \begin{cases} \text{se } l \text{ é par, temos:} & (1 + b)(1 + a)^l \equiv (1 + a)^l(1 + b) \pmod{I_K^{l+2}(G)}, \\ \text{se } l \text{ é ímpar, temos:} & (1 + b)(1 + a)^l \equiv (1 + a)^l(1 + b) + (1 + a)^{l+1} \pmod{I_K^{l+2}(G)}. \end{cases}$$

Usando estes últimos resultados na congruência (**) obtemos

$$\begin{aligned}
 (**) \quad w(u_1 u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \alpha_1 \beta_l (1+a)^{l+1} (1+b) + \sum_{l \text{ par}}^m \alpha_2 \beta_l (1+b) (1+a)^l (1+b)^{m-1} \\
 &\quad + \sum_{l \text{ ímpar}}^m \alpha_2 \beta_l (1+b) (1+a)^l (1+b)^{m-l} \pmod{I_K^{m+2}(G)}.
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo o resultado de (***), obtemos

$$\begin{aligned}
 w(u_1 u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \alpha_1 \beta_l (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l} \\
 &\quad + \sum_{l \text{ par}}^m \alpha_2 \beta_l (1+a)^l (1+b)^{m-l+1} \\
 &\quad + \sum_{l \text{ ímpar}}^m \alpha_2 \beta_l [(1+a)^l (1+b)^{m-l+1} + (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l}] \pmod{I_K^{m+2}(G)}
 \end{aligned}$$

concluindo a prova de que as imagens dos produtos $u_1 u_2$ geram o quociente $I_K^{m+1}(G)/I_K^{m+2}(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Finalizando a prova do lema basta ver que o conjunto $w(L_K)$ é linearmente independente sobre K , pelo seguinte: se $\sum_{t \in L_K} \alpha_t t \equiv 0 \pmod{I_K^{k+1}(G)}$, onde $\alpha_t \in K$, então podemos escrever $\sum_{t \in L_K} \alpha_t t = \sum_{\substack{s \in \cup L_l \\ l > k}} \beta_s s$, onde $\beta_s \in K$. Conseqüentemente, $\alpha_t = 0$, $\forall t \in L_K$ porque

$$L_k \subset L = \{(1-a)^{k_1} (1-b)^{k_2} \mid 0 \leq k_1 < p^n \text{ e } 0 \leq k_2 < p^m\} = \bigcup_{k=0}^{p^n+p^m-2} L_k,$$

onde L é uma K -base de KG sobre K (fato evidente devido $|G| = |L|$).

Tendo em vista a construção das K -bases multiplicativas filtradas de álgebras de grupo que aparecerão no teorema principal no final do capítulo seguinte, introduzimos na base L , acima dada a seguinte ordenação: seja $(k_1, k_2) := (1-a)^{k_1} (1-b)^{k_2}$ e definamos a ordem $(k_1, k_2) < (k'_1, k'_2)$ se, e somente se, $k_2 < k'_2$, ou $k_2 = k'_2$ e $k_1 < k'_1$. Claramente esta ordem preserva a ordenação natural dos subconjuntos L_k com respeito aos seus elementos

$$L_0 < L_1 < L_2 < \cdots < L_k < \cdots$$

e em cada L_k os elementos $(1-a)^{k_1}(1-b)^{k_2}$ estão em ordem inferior se possuem o expoente do termo $(1-b)$ menor, onde L tem a seguinte ordenação:

K -base ordenada L

$$\begin{aligned}
& L_0 \quad : \quad 1 \\
& \quad \wedge \\
& L_1 \quad : \quad (1 - a) < (1 - b) \\
& \quad \wedge \\
& L_2 \quad : \quad (1 - a)^2 < (1 - a)(1 - b) < (1 - b)^2 \\
& \quad \wedge \\
& \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
& \quad \wedge \\
& L_K \quad : \quad (1 - a)^k < (1 - a)^{k-1}(1 - b) < \cdots < (1 - b)^k \\
& \quad \wedge \\
& \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
& \quad \wedge \\
& L_{p^n+p^m-t-2} \quad : \quad (1 - a)^{p^n+p^m-2} < \cdots < (1 - b)^{p^n+p^m-2}
\end{aligned}$$

Usando o lema, determinamos as dimensões e as bases $w(L_K)$ dos quocientes $I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ como espaço vetorial sobre K , para os seguintes grupos.

Nos seguintes exemplos considere $I = I_K(G)$ e $I^0 = KG$.

Exemplo 1 G o grupo quatérnio de ordem oito, cuja apresentação é dada por $G = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^{-1} \rangle$.

K -dimensão	Base L_k	Quociente
1	1	I^0/I^1
2	$(a+1); (b+1)$	I/I^2
2	$(a+1)^2; (a+1)(b+1)$	I^2/I^3
2	$(a+1)^3; (a+1)^2(b+1)$	I^3/I^4
1	$(a+1)^3(b+1)$	I^4/I^5

Neste trabalho interessarão grupos da forma

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle.$$

Exemplo 2 Vamos calcular bases dos quocientes no caso em que $n = 3$ do semi-diedral

$$G = \langle a, b \mid a^8 = 1, b^2 = a^4, {}^b a = a^3 \rangle.$$

K -dimensão	Base L_k	Quocientes
1	1	I^0/I^1
2	$a + 1 \quad b + 1$	I/I^2
2	$(a + 1)^2 \quad (a + 1)(b + 1)$	I^2/I^3
2	$(a + 1)^3 \quad (a + 1)^2(b + 1)$	I^3/I^4
2	$(a + 1)^4 \quad (a + 1)^3(b + 1)$	I^4/I^5
2	$(a + 1)^5 \quad (a + 1)^4(b + 1)$	I^5/I^6
2	$(a + 1)^6 \quad (a + 1)^5(b + 1)$	I^6/I^7
2	$(a + 1)^7 \quad (a + 1)^6(b + 1)$	I^7/I^8
1	$(a + 1)^7(b + 1)$	I^8/I^9

Exemplo 3 Consideremos ainda o caso em que $n = 4$, do semi-diedral

$$G_4 = \langle a, b \mid a^{16} = 1, b^2 = a^8, {}^b a = a^7 \rangle.$$

K -dimensão	K -base L_k	Quociente
1	1	I^0/I^1
2	$a + 1 \quad b + 1$	I/I^2
2	$(a + 1)^2 \quad (a + 1)(b + 1)$	I^2/I^3
2	$(a + 1)^3 \quad (a + 1)^2(b + 1)$	I^3/I^4
2	$(a + 1)^4 \quad (a + 1)^3(b + 1)$	I^4/I^5
2	$(a + 1)^5 \quad (a + 1)^4(b + 1)$	I^5/I^6
2	$(a + 1)^6 \quad (a + 1)^5(b + 1)$	I^6/I^7
2	$(a + 1)^7 \quad (a + 1)^6(b + 1)$	I^7/I^8
2	$(a + 1)^8 \quad (a + 1)^7(b + 1)$	I^8/I^9
2	$(a + 1)^9 \quad (a + 1)^8(b + 1)$	I^9/I^{10}
2	$(a + 1)^{10} \quad (a + 1)^9(b + 1)$	I^{10}/I^{11}
2	$(a + 1)^{11} \quad (a + 1)^{10}(b + 1)$	I^{11}/I^{12}
2	$(a + 1)^{12} \quad (a + 1)^{11}(b + 1)$	I^{12}/I^{13}
2	$(a + 1)^{13} \quad (a + 1)^{12}(b + 1)$	I^{13}/I^{14}
2	$(a + 1)^{14} \quad (a + 1)^{13}(b + 1)$	I^{14}/I^{15}
2	$(a + 1)^{15} \quad (a + 1)^{14}(b + 1)$	I^{15}/I^{16}
1	$(a + 1)^{15}(b + 1)$	I^{16}/I^{17}

Capítulo 3

Bases multiplicativas filtradas para p -grupos metacíclicos finitos

3.1 Introdução

O principal objetivo deste capítulo é responder a questão proposta por R. Bautista, P. Gabriel, A. Roiter e L. Salmeron na referência [1], para a classe das álgebras de grupos modulares KG , onde K é um corpo de característica $p > 0$ e G é um p -grupo metacíclico finito, com o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1 *Seja G um p -grupo metacíclico não-abeliano finito e K um corpo de característica $p > 0$. Então a álgebra de grupo KG admite uma base multiplicativa filtrada sobre o corpo K se, e somente se, $p = 2$ e apenas uma das seguintes condições vale:*

1. G é um grupo diedral;

2. K contém uma raiz cúbica primitiva da unidade e G é o grupo quatérnio de ordem 8;

Pelo acima descrito, o teorema principal descreve apenas os exemplos da álgebras de grupo com bases multiplicativas filtradas dadas por L. Paris [18].

Inicialmente apresentaremos dois lemas técnicos.

Lema 3.1.2 *Seja G o 2-grupo semi-diedral de ordem 2^{n+1} , cuja apresentação é dada por $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle$, com $n \geq 3$, e seja K um corpo de característica 2. Considerando os elementos $u = a + b$ e $v = 1 + b$ da álgebra de grupo modular KG , com radical $I_K(G)$, então os seguintes itens valem:*

$$(i) \quad (1 + a^{-1}) = \sum_{i=1}^{2^n-1} (1 + a)^i \quad e \quad (1 + a^{2^{n-1}-1}) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^i;$$

$$(ii) \quad u^2 = \sum_{i=2}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^i (1 + b) + \sum_{j=3}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^j;$$

$$(iii) \quad u^2 - uvu = (1 + a)^{2^{n-1}}(1 + b) + (1 + a)^{2^{n-1}} \neq 0;$$

$$(iv) \quad uvu = \sum_{i=2}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^i (1 + b) + \sum_{j=3}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^j;$$

$$(v) \quad u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)}, \text{ mas } u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G).$$

Demonstração:

(i) Seja $s = (1 + a) + (1 + a)^2 + \cdots + (1 + a)^{2^n - 1}$. Então temos que

$$(1 + a)s = (1 + a)^2 + (1 + a)^3 + \cdots + (1 + a)^{2^n},$$

donde

$$as = s + (1 + a)s = (1 + a) + (1 + a)^{2^n}.$$

Como $(1 + a)^{2^n} = 0$, temos que

$$s = (1 + a^{-1}),$$

donde segue a primeira igualdade.

Para a segunda igualdade deste item, tomamos $s = (1 + a) + \cdots + (1 + a)^{2^{n-1} - 1}$ e de modo análogo obtemos que $s = 1 + a^{2^{n-1} - 1}$, que comprova a segunda igualdade.

(ii) Seja $r = -1 + 2^{n-1}$ e, pela apresentação de G , temos que $b^2 = 1$ e $c = (b, a) = {}^b a a^{-1} = a^{r-1}$ e $ca = a^r$. Então,

$$\begin{aligned} u^2 &= (a + b)^2 = [(1 + a) + (1 + b)]^2 \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 + a) + (1 + b)^2 \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 + a) \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + b(1 + a) \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (b + ba) \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (b + cab) \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (1 + ca)b \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (1 + ca)(1 + b) + (1 + ca) \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (1 + a^r)(1 + b) + (1 + a^r) \end{aligned}$$

Substituindo da segunda igualdade já provada no item (i), obtemos que

$$u^2 = (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^i(1 + b) + \sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} (1 + a)^j.$$

Simplificando termos, concluimos que

$$u^2 = \sum_{i=2}^{2^{n-1}-1} (1+a)^i(1+b) + \sum_{j=3}^{2^{n-1}-1} (1+a)^j.$$

(iii) Sendo $v = 1 + b$, calculamos

$$\begin{aligned} uvu &= u(1+b)u = u^2 + ubu = u^2 + (a+b)b(a+b) \\ &= u^2 + (ab + b^2)(a+b) = u^2 + (ab + 1)(a+b) \\ &= u^2 + aba + a + ab^2 + b = u^2 + acab + a + a + b \\ &= u^2 + aa^rb + b = u^2 + (a^{r+1} + 1)b \\ &= u^2 + (1 + a^{r+1})(1+b) + (1 + a^{r+1}) \end{aligned}$$

e temos

$$u^2 - uvu = (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}} \neq 0.$$

(iv) Pelo item (iii), podemos escrever

$$uvu = u^2 + (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}}$$

e usando o valor de u^2 dado no item (ii), temos

$$uvu = \sum_{i=2}^{2^{n-1}-1} (1+a)^i(1+b) + \sum_{j=3}^{2^{n-1}-1} (1+a)^j + (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}},$$

e concluimos que

$$uvu = \sum_{i=2}^{2^{n-1}} (1+a)^i(1+b) + \sum_{j=3}^{2^{n-1}} (1+a)^j.$$

(v) Segue diretamente do item (iii), observando que $(1+a)^{2^{n-1}}(1+b)$ e $(1+a)^{2^{n-1}} \in I_K^{2^{n-1}}(G)$, podemos escrever que $u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)}$ e pelos itens (ii) e (iv) claramente $u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G)$.

Lema 3.1.3 *Seja $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1} \rangle$, com $n > 2$, e seja K um corpo de característica 2. Considere os elementos $u = a + b$ e $v = 1 + b$ da álgebra de grupo modular KG , com radical $I_K(G)$. Então temos que*

$$(i) \quad (1 + a)^{-1} = \sum_{i=1}^{2^n-1} (1 + a)^i;$$

$$(ii) \quad u^2 = \sum_{i=2}^{2^n-1} (1 + a)^i(1 + b) + \sum_{j=3}^{2^n-1} (1 + a)^j + (1 + a)^{2^{n-1}};$$

$$(iii) \quad u^2 - uvu = (1 + a)^{2^{n-1}}(1 + b) + (1 + a)^{2^{n-1}} \neq 0;$$

$$(iv) \quad uvu = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 2^{n-1}}}^{2^n-1} (1 + a)^i(1 + b) + \sum_{j=3}^{2^n-1} (1 + a)^j;$$

$$(v) \quad u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)} \quad \epsilon \quad u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G).$$

Demonstração:

(i) Como $a^{2^n} = 1$, repetimos o que foi feito no item (i) do lema anterior.

(ii) Pela apresentação dada, temos que $c = {}^b a a^{-1} = a^{-1} a^{-1} = a^{-2}$ e $ca = a^{-1}$, e escrevendo $r = -1$ temos que $b^2 = a^{2^{n-1}}$ é um elemento do centro de G . Podemos também repetir o cálculo de u^2 , substituindo no final $r = -1$. Assim obtemos:

$$u^2 = (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + (1 + a)^{-1}(1 + b) + (1 + a^{-1}).$$

Substituindo conforme o item (i), temos

$$u^2 = (1 + a)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + a) + \sum_{i=1}^{2^n-1} (1 + a)^i(1 + b) + \sum_{j=1}^{2^n-1} (1 + a)^j.$$

Simplificando temos que

$$u^2 = \sum_{i=2}^{2^n-1} (1+a)^i (1+b) + \sum_{j=3}^{2^n-1} (1+a)^j.$$

(iii) Sendo $v = 1 + b$, calculamos

$$\begin{aligned} uvu &= u(1+b)u = u^2 + ubu = u^2 + (a+b)b(a+b) \\ &= u^2 + (ab + b^2)(a+b) = u^2 + aba + b^2a + b^2a + b^3. \end{aligned}$$

Sabemos que b^2 é central e estamos em característica 2, logo,

$$\begin{aligned} uvu &= u^2 + aba + b^3 = u^2 + acab + b^3 = u^2 + aa^{-1}b + b^3 \\ &= u^2 + b + b^3 = u^2 + (1 + b^2)b = u^2 + (1 + b^2)(1 + b) + (1 + b^2). \end{aligned}$$

Sabemos que $b^2 = a^{2^{n-1}}$ e substituindo acima, obtemos

$$uvu = u^2 + (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}},$$

donde se conclui que

$$u^2 - uvu = (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}} \neq 0.$$

(iv) Pelo item (iii), podemos escrever

$$uvu = u^2 + (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}}$$

e por u^2 dado em (ii),

$$uvu = \sum_{i=2}^{2^n-1} (1+a)^i (1+b) + \sum_{j=3}^{2^n-1} (1+a)^j + (1+a)^{2^{n-1}} + (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}}.$$

Simplificando termos, podemos concluir que

$$uvu = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 2^{n-1}}}^{2^n-1} (1+a)^i (1+b) + \sum_{j=3}^{2^n-1} (1+a)^j.$$

(v) Diretamente do item (iii), observando que $(1+a)^{2^{n-1}}(1+b)$ e $(1+a)^{2^{n-1}} \in I_K^{2^{n-1}}(G)$, podemos escrever que $u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)}$ e pelos itens (ii) e (iv) claramente $u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G)$.

3.2 O teorema de classificação

Antes de tratarmos do principal resultado deste trabalho, lembramos os seguintes fatos, importantes para o desenvolvimento da demonstração.

- Lembramos que ${}^b a = bab^{-1}$ e $(b, a) = bab^{-1}a^{-1} = {}^b aa^{-1}$, notação introduzida no Resultado 2.1.2, página 8.
- Vamos tratar exclusivamente dos p -grupos metacíclicos **não abelianos** finitos que pelo Resultado 2.1.1, tem apresentação dada por

$$G = \langle a, b \mid a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, {}^b a = a^r \rangle,$$

onde $t \geq 0$ (fixo), $r^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^n}$ e $p^t(r-1) \equiv 0 \pmod{p^n}$.

- Todo elemento $g \in G$, supra citado, pode ser escrito como $g = a^i b^j$, onde $0 \leq i < p^n$ e $0 \leq j < p^m$.
- Faremos uso frequente da identidade (2.4.6)

$$(xy - 1) = (x - 1) + (y - 1) + (x - 1)(y - 1).$$

que apareceu no Lema 2.4.5.

- Sabemos que podemos obter todo elemento do radical $I_K(G)$ como uma combinação linear dos elementos da forma $(a - 1)^k (b - 1)^l$, onde $0 \leq k < p^n$, $0 \leq l < p^m$ e $k + l \geq 1$.

O resultado principal a ser apresentado neste trabalho é o Teorema 3.1.1:

Teorema *Seja G um p -grupo metacíclico não-abeliano finito e K um corpo de característica $p > 0$. Então a álgebra de grupo KG admite uma base multiplicativa filtrada sobre o corpo K se, e somente se, $p = 2$ e uma das seguintes condições vale:*

1. G é um grupo diedral;
2. K contém uma raiz cúbica primitiva da unidade e G é o grupo quatérnio de ordem 8;

Demonstração: Sabendo que $I_K(G)$ é o radical de KG e $\dim_K(KG) = \dim_K I_K(G) + 1$, suponha que $\{1\} \cup B$ é uma K -base multiplicativa filtrada de KG . Então, B é uma K -base de $I_K(G)$. Obviamente $(a-1)^i(b-1)^j \in I_K^2(G)$ se $i+j \geq 2$ e $(a-1)$ e $(b-1)$ são geradores de $I_K(G)$ sobre K . Pelo Resultado 2.14, as classes $(a-1) + I_K^2(G)$ e $(b-1) + I_K^2(G)$ formam uma K -base do quociente $I_K(G)/I_K^2(G)$. Note que o subconjunto $B \setminus I_K^2(G)$, sabendo que pelo Resultado 2.2.5 que os elementos de $I_K^2(G)$ são não geradores da álgebra $I_K(G)$, consiste de dois elementos, que denotamos por u e v . Podemos escrever a igualdade $K[u, v] = I_K(G)$, onde u e v são não comutativas. Além disso, temos que

$$u \equiv \alpha_1(a-1) + \alpha_2(b-1) \pmod{I_K^2(G)},$$

$$v \equiv \beta_1(a-1) + \beta_2(b-1) \pmod{I_K^2(G)},$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in K$ e $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ (garantindo que u, v são linearmente independentes). Do Resultado 2.4.4, $c = (b, a) \in G' \subseteq \mathcal{D}_2(G)$, então $c - 1 \in I_K^2(G)$ e por simples multiplicação obtemos

$$\begin{aligned} uv &\equiv [\alpha_1(a-1) + \alpha_2(b-1)][\beta_1(a-1) + \beta_2(b-1)] \pmod{I_K^2(G)} \\ &\equiv \beta_1\alpha_1(a-1)^2 + \beta_1\alpha_2(b-1)(a-1) + \beta_2\alpha_1(a-1)(b-1) + \beta_2\alpha_2(b-1)^2 \\ &\pmod{I_K^3(G)}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
(b-1)(a-1) &= b(a-1) - (a-1) = (ba-b) - (a-1) \\
&= (cab-b) - (a-1) = (ca-1)b - (a-1) \\
&= (ca-1)(b-1) + (ca-1) - (a-1) \\
&= (c-1)(a-1)(b-1) + (c-1)(b-1) + (a-1)(b-1) \\
&\quad + (c-1)(a-1) + (c-1),
\end{aligned}$$

substituindo em uv , obtemos

$$\begin{aligned}
uv &= \beta_1\alpha_1(a-1)^2 + \beta_2\alpha_2(b-a)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(a-1)(b-1) + \alpha_2\beta_1(c-1) \\
&\quad + \alpha_2\beta_1[(c-1)(a-1)(b-1) + (c-1)(b-1) + (c-1)(a-1)]
\end{aligned}$$

e sabendo que $(c-1) \in I_K^2(G)$ e $(a-1), (b-1) \in I_K(G)$, temos que $(c-1)(a-1)(b-1)$, $(c-1)(b-1)$ e $(c-1)(a-1) \in I_K^3(G)$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
uv &= \beta_1\alpha_1(a-1)^2 + \beta_2\alpha_2(b-1)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(a-1)(b-1) \\
&\quad + \alpha_2\beta_1(c-1) \pmod{I_K^3(G)}
\end{aligned}$$

Trabalhando de forma análoga, temos as seguintes congruências:

$$(2) \quad uv \equiv \alpha_1\beta_1(a-1)^2 + \alpha_2\beta_2(b-1)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(a-1)(b-1) + \alpha_2\beta_1(c-1) \pmod{I_K^3(G)};$$

$$(3) \quad vu \equiv \alpha_1\beta_1(a-1)^2 + \alpha_2\beta_2(b-1)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(a-1)(b-1) + \alpha_1\beta_2(c-1) \pmod{I_K^3(G)};$$

$$(4) \quad u^2 \equiv \alpha_1^2(a-1)^2 + \alpha_2^2(b-1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2(a-1)(b-1) + \alpha_1\alpha_2(c-1) \pmod{I_K^3(G)};$$

$$(5) \quad v^2 \equiv \beta_1^2(a-1)^2 + \beta_2^2(b-1)^2 + 2\beta_1\beta_2(a-1)(b-1) + \beta_1\beta_2(c-1) \pmod{I_K^3(G)}.$$

Se $c - 1 \in I_K^3(G)$, pelas congruências (2) e (3) obtemos que $uv \equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$. Além disso, uv e vu não estão em $I_K^3(G)$ pois, caso contrário, sabendo que as projeções $(a - 1)^2, (b - 1)^2$ e $(a - 1)(b - 1)$ formam uma K -base de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ e pelas relações dadas pelas congruências teríamos que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 0$. Logo $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -2\alpha_2\beta_1 \neq 0$ se, e somente se, $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$ (fora $p = 2$) e isto implicaria que $\alpha_1 = 0$ e assim teríamos $\alpha_2\beta_1 = 0$ (contradição!), garantindo assim $uv, vu \notin I_K^3(G)$ e $uv \equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$ que, pelo item (ii) da Proposição 2.3.1, concluímos que $uv = vu$, tornando a álgebra $I_K(G)$ comutativa, contradição!

Podemos assumir então que $c - 1 \notin I_K^3(G)$. Pelo Resultado 2.1.3, para um p -grupo não abeliano o fator G/G' não pode ser cíclico. Afirmamos $(r - 1, |a|) \neq 1$. De fato, pela apresentação de G temos que $c = (b, a) = {}^b a a^{-1} = a^r a^{-1} = a^{r-1}$ e se $(r - 1, |a|) = 1$, ter-se-ia que $\langle a \rangle = \langle a^{r-1} \rangle = G'$, então G/G' seria cíclico, contradição! Concluímos que $r - 1$ é divisível por p e assim escrevemos $r - 1 = ps$, para algum inteiro s . Voltando ao cálculo de $c - 1$, temos que

$$c - 1 = (a^{ps} - 1) = (a^s - 1)^p \in I_K^3(G),$$

para $p > 2$ e também se $p = 2$ e s par. Pelas observações acima, só existe a possibilidade que s seja ímpar e G é um 2-grupo com uma das seguintes apresentações:

$$(6) \ G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^{2^m} = 1, {}^b a = a^r \rangle, \text{ onde } r^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^n} \text{ e } r \not\equiv 1 \pmod{4};$$

$$(7) \ G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^{2^m} = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^r \rangle, \text{ onde } r^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^n}, 2^{n-1}(r - 1) \equiv 0 \pmod{2^n} \text{ e } r \not\equiv 1 \pmod{4}.$$

Fazendo uma análise dos casos possíveis, temos os seguintes, que trataremos separadamente.

Caso 1) Apresentação (6) com $m = 1$ (ou $b^2 = 1$).

Caso 2) Apresentação (6) ou (7) com $m > 1$.

Caso 3) Apresentação (7) com $m = 1$ e $n \geq 2$.

Caso 1. Suponhamos que G tem apresentação (6) e $m = 1$ (ou melhor $b^2 = 1$). Desde que $r - 1 = 2s$ e s é ímpar, $s = 2k + 1$ com $k \geq 1$ e dado que $r^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$, tem para r módulo 2^n as soluções $r = 1$, $r = -1$, $r = 1 + 2^{n-1}$ e $r = -1 + 2^{n-1}$ (vide referência [5, p.200], ou referência [15, p.56]) que $r = -1$ ou $r = -1 + 2^{n-1}$ (isto é, dois subcasos), $n \geq 3$, satisfazendo a condição $r \not\equiv 1 \pmod{4}$.

Usando a identidade (1), temos

$$\begin{aligned} c + 1 &= a^{r-1} + 1 = a^{2s} + 1 = a^{2(2k+1)} + 1 = a^{4k+2} + 1 = a^{4k}a^2 + 1 \\ &= (a^{4k} + 1)(a^2 + 1) + (a^{4k} + 1) + (a^2 + 1) \end{aligned}$$

e, por indução, é fácil ver que $(a^{4k} + 1) \in I_K^3(G)$, que nos permite escrever

$$c + 1 = (a^s + 1)^2 \equiv (a + 1)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Levando este último resultado nas congruências (2) – (5), obtemos particularmente as congruências seguintes:

$$(8) \quad \begin{cases} uv \equiv \beta_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + a)^2 + \Delta(1 + a)(1 + b) & \pmod{I_K^3(G)} \\ vu \equiv \alpha_1(\beta_1 + \beta_2)(1 + a)^2 + \Delta(1 + a)(1 + b) & \pmod{I_K^3(G)} \\ u^2 \equiv \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + a)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \\ v^2 \equiv \beta_1(\beta_1 + \beta_2)(1 + a)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \end{cases}$$

Claramente, $uv, vu \notin I_K^3(G)$ e por $\Delta \neq 0$ implica que $uv \not\equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$. E desde que a K -dimensão de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ é igual a 2, o que é claro, pois os possíveis geradores

módulo $I_K^3(G)$ pelo Lema 2.4.5 são $(a+1)^2$, $(a+1)(b+1)$ e $(b+1)^2$. Mas $(b+1)^2 = 0$. Então os elementos $uv + I_K^3(G)$ e $vu + I_K^3(G)$ formam uma K -base de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$, o que faz termos $u^2, v^2 \in I_K^3(G)$. Logo, obtemos as igualdades

$$\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad \text{e} \quad \beta_1(\beta_1 + \beta_2) = 0,$$

que nos garante as soluções

$$u = \alpha(a+b) \quad \text{e} \quad v = \beta(1+b),$$

com $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$. Podemos tomar $\alpha = \beta = 1$ e então

$$u = a+b \quad \text{e} \quad v = 1+b.$$

Mais precisamente, $u \equiv (a+b) + I_K^2(G)$ e $v \equiv (1+b) + I_K^2(G)$.

Podemos agora estudar o subcaso 1.1, onde $r = -1$, que nos dá a apresentação

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1} \rangle,$$

com $n \geq 2$, que é o 2-grupo diedral de ordem 2^{n+1} .

Provaremos independentemente na Proposição 3.1.2 que a álgebra de grupo do grupo diedral de ordem 2^{n+1} admite base multiplicativa filtrada.

Podemos agora estudar o subcaso 1.2, onde $s = r = -1 + 2^{n-1}$, $n \geq 3$, que nos dá a apresentação

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle, \quad \text{com } n \geq 3,$$

conhecido como o grupo semidiedral de ordem 2^{n+1} , onde vamos agora provar que a álgebra de grupo não possui uma K -base multiplicativa filtrada pelo seguinte: se a

álgebra de grupo modular para o grupo semi-diedral tem uma K -base multiplicativa filtrada B com $u, v \in B$, então considere o item (v) do Lema 3.1.2, página 27, onde $u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)}$, com $u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G)$. Nas hipóteses do item (ii) da Proposição 2.3.1 concluímos que $u^2 = uvu$, mas pelo item (iii) do Lema 3.1.2 temos $u^2 - uvu = (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}} \neq 0$, contradição.

Caso 2. Estudamos agora o caso em que o grupo G tem as apresentações (6) com $m > 1$ ou (7) com $m > 1$. Isto é,

$$(6) \ G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^{2^m} = 1, {}^b a = a^r \rangle, \text{ onde } r^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^n} \text{ e } r \not\equiv 1 \pmod{4};$$

$$(7) \ G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^{2^m} = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^r \rangle, \text{ onde } r^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^n}, 2^{n-1}(r-1) \equiv 0 \pmod{2^n} \text{ e } r \not\equiv 1 \pmod{4}.$$

Observação: Os grupos de (6) e (7) são isomorfos (fazer $b' = ab$ em (7)).

Calculamos

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a) &= (1+a) + b(1+a) = (1+a) + (b+ba) = (1+a) + (b+cab) \\ &= (1+a) + (1+ca)b = (1+a) + (1+ca)(1+b) + (1+ca). \end{aligned}$$

Usando a identidade 2.4.6, temos que

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a) &= (1+a) + [(1+c)(1+a) + (1+c) + (1+a)](1+b) + (1+c)(1+a) \\ &\quad + (1+c) + (1+a) \\ &= (1+a)(1+b) + (1+c) + (1+c)(1+a)(1+b) + (1+c)(1+b) \\ &\quad + (1+c)(1+a), \end{aligned}$$

e sabendo que $(1 + c) \in I_K^2(G)$ e $(1 + c) \equiv (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}$, podemos concluir que

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Introduzindo esta relação nas congruências (2) – (5), obtemos neste caso particular

$$(9) \quad \begin{cases} uv \equiv \beta_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + a)^2 + \Delta(1 + a)(1 + b) + \alpha_2\beta_2(1 + b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \\ vu \equiv \alpha_1(\beta_1 + \beta_2)(1 + a)^2 + \Delta(1 + a)(1 + b) + \alpha_2\beta_2(1 + b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \\ u^2 \equiv \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + a)^2 + \alpha_2^2(1 + b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \\ v^2 \equiv \beta_1(\beta_1 + \beta_2)(1 + a)^2 + \beta_2^2(1 + b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \end{cases}$$

Sendo $\Delta \neq 0$, obtemos que $uv, vu \notin I_K^3(G)$ e $uv \not\equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$, pois caso contrário teríamos $\beta_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1(\beta_1 + \beta_2)$, o que implicaria $\beta_1\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2$, e então $\beta_1\alpha_2 = \alpha_1\beta_2$, que faz $\Delta = 0$ (contradição!) Além disso, $u^2 + I_K^3(G)$ e $v^2 + I_K^3(G)$ devem ser elementos não nulos do quociente $I_K^2(G)/I_K^3(G)$, pois se $\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ e $\alpha_2^2 = 0$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e logo $\Delta = 0$ (contradição) e se $\beta_1(\beta_1 + \beta_2) = 0$ e $\beta_2^2 = 0$, então $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e logo $\Delta = 0$ (contradição).

É imediato ver que $uv \not\equiv v^2$, $vu \not\equiv v^2$ e $uv \not\equiv u^2$, $vu \not\equiv u^2$.

Afirmamos que a K -dimensão do quociente $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ é 3. De fato, pelo Lema 2.4.5, temos que os elementos de uma K -base, módulo $I_K^3(G)$, são os seguintes:

$$(a + 1)^2; (a + 1)(b + 1) \quad \text{e} \quad (b + 1)^2.$$

Para que os quatro elementos de (9) formem uma base do quociente a única possibilidade é que $u^2 \equiv v^2 \pmod{I_K^3(G)}$. Pelo item (ii) da Proposição 2.3.1, neste caso temos que $u^2 = v^2$, de onde obtemos $\alpha_2^2 = \beta_2^2$ e $\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1(\beta_1 + \beta_2)$. Logo, $\alpha_2 = \beta_2$ e ambos devem ser diferentes de zero, pois em caso contrário, ter-se-ia que $\Delta = 0$. A segunda

igualdade mostra que considerando esta expressão como uma equação do segundo grau em α_1 , temos que $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$ ou $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$ e

$$u = (1 + \lambda)a + b + \lambda \quad \text{e} \quad v = \lambda a + b + \lambda + 1,$$

com $\lambda = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ e $\Delta = \beta_2^2 \neq 0$. Então, na igualdade $v^2 = u^2$, obtemos a relação $(1 + a^2) + ab + ba = 0$. Isto é uma contradição com as relações dadas nas apresentações (6) e (7) do grupo G , pois esta relação só é verdadeira se $1 = a^2$ e $ab = ba$ ou $1 = ab$ e $a^2 = ba$ ou $1 = ba$ e $a^2 = ab$ e todas estas fazem G abeliano (contradição com a hipótese do Teorema!). Conseqüentemente, nestas condições a álgebra de grupo KG (não comutativa) não admite uma K -base multiplicativa filtrada.

Caso 3. Neste caso G tem a apresentação (7), $m = 1$ e $n \geq 2$. Do estudo do Caso 1, já sabemos que quando $m = 1$ só é possível termos $r = -1$ ou $r = -1 + 2^{n-1}$ e, assim, vamos dividir o nosso estudo em quatro subcasos que denominaremos por 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

Subcaso 3.1. Tomamos $n = 2$, $r = -1$ e neste caso G tem apresentação

$$G = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, {}^b a = a^{-1} \rangle.$$

que é o conhecido grupo quatérnios de ordem oito.

Mostraremos separadamente na Proposição 3.1.3 que a álgebra de grupo do quatérnio de ordem oito admite base multiplicativa filtrada se e somente se o corpo K contém uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Subcaso 3.2. Consideramos $n > 2$ e $r = -1$ e obtemos a apresentação

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1} \rangle.$$

Agora, G é o grupo quaternio generalizado e a álgebra de grupo modular KG não tem uma base multiplicativa filtrada pelo seguinte (análogo ao que foi feito para a álgebra de grupo do grupo semidiedral): se a álgebra de grupo modular para o grupo quaternio generalizado tem uma K -base multiplicativa filtrada B com $u, v \in B$, então considere o item (v) do Lema 3.1.2, página 27, onde $u^2 \equiv uvu \pmod{I_K^{2^{n-1}}(G)}$, com $u^2, uvu \notin I_K^{2^{n-1}}(G)$ que nas hipóteses do item (ii) da Proposição 2.3.1 concluímos que $u^2 = uvu$, mas pelo item (iii) do Lema 3.1.2 temos $u^2 - uvu = (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^{n-1}} \neq 0$, contradição.

Concluímos que para a álgebra de grupo modular do quaternio generalizado não existe K -base multiplicativa filtrada.

Subcaso 3.3. Consideramos G na apresentação (7), com $n = 2$ e $r = -1 + 2^{n-1}$. Então, $r = 1$ e

$$G = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, {}^b a = a \rangle,$$

onde claramente a e b comutam e G é grupo abeliano (contradição).

Subcaso 3.4. Para concluirmos resta o estudo do subcaso 3.4, onde G tem a apresentação (7), com $n > 2$ e $r = -1 + 2^{n-1}$. Agora temos

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle,$$

que é um grupo isomorfo ao grupo semi-diedral já tratado.

Mostraremos separadamente na Observação 3.1.4 que o grupo semi-diedral possui uma base filtrada, mas não multiplicativa, i.e, $B \cup \{0\}$ para multiplicação da álgebra não é um semi-grupo.

Vamos agora tratar separadamente das construções das K -bases multiplicativas filtradas para as álgebras de grupos modulares dos 2-grupos diedral, quatérnio de ordem 8 e pelas seguintes proposições:

Proposição 3.2.1 *Seja $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = 1, {}^b a = a^{-1} \rangle$ o 2-grupo diedral de ordem 2^{n+1} e K um corpo de característica 2, então o conjunto*

$$B = \{1, v, u^i, vu^i, u^j v, vu^j v \mid i = 1, \dots, 2^{n-1} \text{ e } j = 1, \dots, 2^{n-1} - 1\},$$

onde $u = a + b$ e $v = 1 + b$ é uma K -base multiplicativa filtrada de KG .

(A base que construímos nesta proposição aparece no artigo de L. Paris [18] porém sem justificativa alguma.)

Demonstração: Inicialmente, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: Nas condições acima vale:

$$(*) \quad u^i \equiv (1+a)^{2i-1} + (1+a)^{2i-2}(1+b) + \gamma[(1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-1}(1+b)] \pmod{I_K^{2i+1}(G)},$$

onde $\gamma \equiv (1+i) \pmod{2}$.

Vamos provar a afirmação por indução em i . Para $i = 1$ ($\gamma = 0$), temos pela fórmula

$$u = u^1 \equiv (1+a)^1 + (1+a)^0(1+b) + 0[(1+a)^2 + (1+a)^1(1+b)] \pmod{I_K^3(G)}.$$

Portanto, $u \equiv (a+b) \pmod{I_K^3(G)}$, o que é verdadeiro.

Para $i = 2$ ($\gamma = 1$). Temos pela fórmula (*)

$$u^2 \equiv (1+a)^3 + (1+a)^2(1+b) + (1+a)^4 + (1+a)^3(1+b) \pmod{I_K^5(G)}$$

e por um simples cálculo

$$\begin{aligned} u^2 &= (a+b)^2 = [(1+a) + (1+b)]^2 \\ &= (1+a)^2 + (1+a)(1+b) + (1+b)(1+a) + (1+b)^2 \\ &= (1+a)^2 + (1+a)(1+b) + (1+b)(1+a), \end{aligned}$$

pois $b^2 = 1$. Pelo cálculo já feito na página 39, temos que

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a) &= (1+a) + (1+ca)(1+b) + (1+ca) \\ &= (1+a) + (1+a^{-1})(1+b) + (1+a^{-1}) \end{aligned}$$

e pela igualdade $(1+a^{-1}) = \sum_{j=1}^{2^n-1} (1+a)^j$ (já provada na página 28), podemos escrever que

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a) &\equiv (1+a)(1+b) + (1+a)^2(1+b) + (1+a)^3(1+b) \\ &\quad + (1+a)^2 + (1+a)^3 + (1+a)^4 \pmod{I_K^5(G)} \end{aligned}$$

que substituindo no cálculo de u^2 concluímos

$$u^2 \equiv (1+a)^3 + (1+a)^2(1+b) + (1+a)^4 + (1+a)^3(1+b) \pmod{I_K^5(G)}$$

e, assim, ficou provada a validade de u^i , para $i = 1, 2$.

Considere por hipótese de indução que a fórmula (*) vale para i e vamos provar que vale para $i+1$, ou melhor, provaremos que

$$\begin{aligned} u^{i+1} &\equiv (1+a)^{2i+1} + (1+a)^{2i}(1+b) + (1+\gamma)[(1+a)^{2i+2} \\ &\quad + (1+a)^{2i+1}(1+b)] \pmod{I_K^{2i+3}(G)}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
u^{i+1} &= u^i u = u^i[(1+a) + (1+b)] \\
&\equiv [(1+a)^{2i-1} + (1+a)^{2i-2}(1+b) + \gamma(1+a)^{2i} \\
&\quad + \gamma(1+a)^{2i-1}(1+b)][(1+a) + (1+b)] \pmod{I_K^{2i+3}(G)} \\
&\equiv (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-2}(1+b)(1+a) + \gamma(1+a)^{2i+1} + \gamma(1+a)^{2i-1}(1+b)(1+a) \\
&\quad + (1+a)^{2i-1}(1+b) + (1+a)^{2i-2}(1+b)^2 + \gamma(1+a)^{2i}(1+b) \\
&\quad + \gamma(1+a)^{2i-1}(1+b)^2 \pmod{I_K^{2i+3}(G)} \\
&\equiv (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-2}(1+b)(1+a) + \gamma(1+a)^{2i+1} + \gamma(1+a)^{2i-1}(1+b)(1+a) \\
&\quad + (1+a)^{2i-1}(1+b) + \gamma(1+a)^{2i}(1+b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)}.
\end{aligned}$$

Calculando separadamente,

$$\begin{aligned}
(1+b)(1+a) &= (1+a) + b(1+a) = (1+a) + (b+ba) \\
&= (1+a) + (b+cab) = (1+a) + (1+ca)(1+b) + (1+ca)
\end{aligned}$$

e pela apresentação do grupo diedral, temos que $ca = bab^{-1}a^{-1}a = {}^b a = a^{-1}$, logo

$$(1+b)(1+a) = (1+a) + (1+a) + (1+a^{-1})(1+b) + (1+a^{-1})$$

e pelo item (i) do Lema 3.1.2 tem-se que $(1+a^{-1}) = \sum_{i=1}^{2^n-1} (1+a)^i$ donde obtemos que

$$\begin{aligned}
(1+b)(1+a) &= (1+a) + \sum_{i=1}^{2^n-1} (1+a)^i(1+b) + \sum_{j=1}^{2^n-1} (1+a)^j \\
&= \sum_{j=1}^{2^n-1} (1+a)^j(1+b) + \sum_{j=2}^{2^n-1} (1+a)^j
\end{aligned}$$

levando este último resultado a expressão de u^{i+1} podemos continuar o cálculo da congruência:

$$u^{i+1} \equiv (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-2} \left[\sum_{j=1}^{2^n-1} (1+a)^j(1+b) + \sum_{j=2}^{2^n-1} (1+a)^j \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma(1+a)^{2i+1} + \gamma(1+a)^{2i} \left[\sum_{j=1}^{2^n-1} (1+a)^i(1+b) + \sum_{j=2}^{2^n-1} (1+a)^j \right] \\
& + (1+a)^{2i-1}(1+b) + \gamma(1+a)^{2i}(1+b) \\
\equiv & (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-1}(1+b) + (1+a)^{2i}(1+b) + (1+a)^{2i+1}(1+b) \\
& + (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i+1} + (1+a)^{2i+2} + \gamma(1+a)^{2i+1} + \gamma(1+a)^{2i}(1+b) \\
& + \gamma(1+a)^{2i} + 1(1+b) + \gamma(1+a)^{2i+1} + \gamma(1+a)^{2i+2} + (1+a)^{2i-1}(1+b) \\
& + \gamma(1+a)^{2i}(1+b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)},
\end{aligned}$$

Simplificando e reagrupando adequadamente os termos,

$$u^{i+1} \equiv (1+a)^{2i+1} + (1+a)^{2i}(1+b) + (1+\gamma)[(1+a)^{2i+2} + (1+a)^{2i+1}(1+b)] \pmod{I_K^{2i+3}(G)}.$$

e vale nossa afirmação.

Fazendo uso da fórmula (*) para u^i , obtemos as seguintes congruências:

$$\begin{aligned}
u^i & \equiv (1+a)^{2i-1} + (1+a)^{2i-2}(1+b) \pmod{I_K^{2i}(G)}, \\
vu^i & \equiv (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-1}(1+b) \pmod{I_K^{2i+1}(G)}, \\
u^j v & \equiv (1+a)^{2j-1}(1+b) \pmod{I_K^{2j+1}(G)}, \\
vu^j v & \equiv (1+a)^{2j}(1+b) \pmod{I_K^{2j+2}(G)},
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ e $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$.

Pelo Lema 2.4.5 e sabendo que $(1+b)^2 = 0$, observa-se que o quociente $I_K^t(G)/I_K^{t+1}(G)$ tem a seguinte K -base:

$$(a+1)^t + I_K^{t+1}(G) \quad \text{e} \quad (a+1)^{t-1}(b+1) + I_K^{t+1}(G),$$

considerando $t = 2k + 1$, onde $k = 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1$. E, assim, temos

$$u^{k+1} \equiv (1+a)^{2k+1} + (1+a)^{2k}(1+b) \pmod{I_K^{2k+2}(G)},$$

$$vu^k v \equiv (1+a)^{2k} + (1+b) \pmod{I_K^{2k+2}(G)},$$

e claramente u^{k+1} e $vu^k v$ são linearmente independentes módulo $I_K^{2k+2}(G)$. Também para $t = 2k$, onde $k = 1, \dots, 2^{n-2} - 1$, obtemos que

$$vu^k \equiv (1+a)^{2k} + (1+a)^{2k-1}(1+b) \pmod{I_K^{2k+2}(G)}$$

e

$$u^k v \equiv (1+a)^{2k-1}(1+b) \pmod{I_K^{2k+2}(G)}$$

e, portanto, vu^k e $u^k v$ são linearmente independentes módulo $I_K^{2k+2}(G)$. A matriz dos coeficientes destes elementos, escritos em função da K -base ordenada L é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \boxed{A_1} & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & * & & \vdots \\ & & & & & \boxed{A_j} & & & \vdots \\ & 0 & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & \boxed{A} & \vdots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

onde $A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $j = 1, \dots, 2^n - 1$, é unimodular. Desta forma o conjunto

$$\{1, v, u^i, vu^i, u^j v, vu^j v \mid i = 1, \dots, 2^{n-1} \text{ e } j = 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

forma uma K -base multiplicativa filtrada de KG , como queríamos demonstrar.

Vamos construir uma K -base multiplicativa filtrada para álgebra de grupo modular do grupo quáternio de ordem oito provando a seguinte proposição:

Proposição 3.2.2 *Seja $G = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, {}^b a = a^{-1} \rangle$ e K um corpo de característica 2. Então a álgebra de grupo KG tem uma K -base multiplicativa filtrada B , com $u, v \in B$, se e somente se o corpo K contém uma raiz cúbica primitiva da unidade.*

Demonstração: Considere as congruências (2) – (5) dadas na página 35, particularmente para o grupo quaternio, de onde obtemos as congruências

$$(q) \quad \begin{cases} uv \equiv (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(1+a)^2 + \Delta(1+a)(1+b) & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ vu \equiv (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2)(1+a)^2 + \Delta(1+a)(1+b) & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ u^2 \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(1+a)^2 & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ v^2 \equiv (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)(1+a)^2 & (\text{mod } I_K^3(G)) \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, temos que $uv, vu \notin I_K^3(G)$ e se $uv \equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$ ter-se-ia que $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2$ que faz $\Delta = 0$, contradição! Logo, $uv \not\equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$ e, além disso, é evidente que $uv \not\equiv v^2$, $vu \not\equiv v^2$ e $uv \not\equiv u^2$, $vu \not\equiv u^2$. Já mostramos na página 18 que a dimensão de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ é 2, portanto devemos ter que $u^2, v^2 \in I_K^3(G)$, implicando que $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 0$ e $\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2 = 0$.

Note que $\alpha_1 = 0$ implica $\alpha_2 = 0$, donde $\Delta = 0$ (contradição) (e análogo para $\beta_1 = 0$). Logo, $\alpha_1 \neq 0$ e dividindo por α_1^2 temos que $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + 1 = 0$. Isto mostra que $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ é raiz do polinômio $x^2 + x + 1$, i.e., é uma raiz cúbica primitiva da unidade. Conseqüentemente, para que a álgebra de grupo KG tenha uma base multiplicativa filtrada é necessário que o corpo K contenha uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Mostraremos que esta condição também é suficiente construindo diretamente a base.

Seja $w \in K$ uma raiz cúbica primitiva da unidade. Escrevendo $\alpha_2 = w\alpha_1$, de onde temos que $u = \alpha_1(1+a) + w\alpha_2(1+b)$ e da mesma forma deve ser $\beta_1 = w\beta_2$ ou $\beta_1 =$

$w^{-1}\beta_2$. Como esta última implica $\Delta = 0$ deve ser $\beta_1 = w\beta_2$. Então, os elementos $u = \alpha_1[(1+a) + w(1+b)]$ e $v = \beta_2[w(1+a) + (1+b)]$ e fazendo $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ podemos escrever

$$u = (1+a) + w(1+b) \quad \text{e} \quad v = w(1+a) + (1+b)$$

e a seguir vamos determinar os outros elementos da base B .

Considerando o que foi demonstrado, a K -base multiplicativa filtrada B já possui os seguintes elementos: $1, u, v, uv, vu$, faltando apenas três elementos, que passaremos a determinar. Fixados $u = (a+1) + w(b+1)$ e $v = w(a+1) + (b+1)$ e reescrevendo as congruências (q), temos

$$\begin{cases} uv \equiv w(a+1)(b+1) + w^2(a+1)^2 & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ vu \equiv w(a+1)(b+1) + (a+1)^2 & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ v^2 \equiv 0 & (\text{mod } I_K^3(G)) \\ u^2 \equiv 0 & (\text{mod } I_K^3(G)) \end{cases}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} uvu &\equiv w(a+1)^3 + w^2(a+1)^2(b+1) \pmod{I_K^4(G)} \\ vu^2 &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \\ vu^2 &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \\ vuv &\equiv w^2(a+1)^3 + w(a+1)^2(b+1) \pmod{I_K^4(G)} \\ v^2u &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \\ v^3 &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \\ u^3 &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \\ u^2v &\equiv 0 \pmod{I_K^4(G)} \end{aligned}$$

Como $\begin{vmatrix} w & w^2 \\ w^2 & w \end{vmatrix} = w^2 + w \neq 0$, os elementos uvu e vuv são linearmente independentes mod $I_K^4(G)$. Calculamos agora

$$\begin{aligned} uvu^2 &\equiv 0 \pmod{I_K^5(G)} \\ uvuv &\equiv w^2(a+1)^3(b+1) \pmod{I_K^5(G)} \\ vuvu &\equiv w^2(a+1)^3(b+1) \pmod{I_K^5(G)} \\ vuvv &\equiv 0 \pmod{I_K^5(G)}, \end{aligned}$$

onde $uvuv \equiv vuvu \pmod{I_K^5(G)}$.

Considere o conjunto

$$B = \{1, u, v, uv, vu, uvu, vuv, uvuv\},$$

cujas matrizes de coeficientes em relação à base ordenada L é inversível

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 & w & w^2 & w^2 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w & w^2 & w^2 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & w^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^2 & w & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix}$$

donde segue que B é linearmente independente e, conseqüentemente, é uma base multiplicativa filtrada de KG .

Finalizando as construções apresentaremos para o grupo semi-diedral na observação seguinte que KG possui uma base filtrada; no entanto, ela não é multiplicativa.

Observação: Neste caso é possível definir uma K -base multiplicativa filtrada com $\tilde{u} = u + \lambda(a+1)(b+1)$ e $\tilde{v} = v + \lambda(a+1)(b+1)$, com $\lambda \neq 0$ (vide referência [18]).

Observação 3.2.3 Seja $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, {}^b a = a^{-1+2^{n-1}} \rangle$, com $n > 2$, um grupo de ordem 2^{n+1} e K um corpo de característica 2, então o conjunto

$$B = \{(uv)^i, (vu)^i, (uv)^i u, (vu)^i v \mid i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}\},$$

onde $u = a + b$ e $v = 1 + b$ é uma K -base filtrada de KG .

Demonstração: Inicialmente provamos a seguinte afirmação:

Afirmação: Nas condições acima vale:

- (i) $(uv)^i \equiv (1+a)^{2^{i-1}}(1+b) \pmod{I_K^{2i+1}(G)}$;
- (ii) $(vu)^i \equiv (1+a)^{2^{i-1}}(1+b) + (1+a)^{2^i} \pmod{I_K^{2i+1}(G)}$.

Demonstração da afirmação: Vamos provar os itens (i) e (ii) por indução em i .

- (i) Para $i = 1$ é imediato que $(uv)^1 = [(1+a)+(1+b)](1+b)$. Note que $(1+b)^2 = 1+b^2 = 1+a^{2^{n-1}} = (1+a)^{2^{n-1}} \in I_K^3(G)$. Portanto, $(uv)^1 \equiv (1+a)(1+b) \pmod{I_K^3(G)}$. Por hipótese de indução, considere o item (i) verdadeiro para i e vamos provar que vale para $i+1$, isto é, provamos que $(uv)^{i+1} \equiv (1+a)^{2^{i+1}}(1+b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)}$. De fato,

$$(uv)^{i+1} = (uv)^i(uv) \equiv (1+a)^{2^{i-1}}(1+b)(1+a)(1+b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)}.$$

Sabemos que

$$(A) \quad (1+b)(1+a) \equiv (1+a)(1+b) + (1+c) \pmod{I_K^3(G)} \text{ (calculado na p.39)}$$

e para o grupo dado temos que $c = {}^b a a^{-1} = a^{2^{n-1}-2} = a^{(2^{n-2}-1)2}$, que implica

$$\begin{aligned} 1 + c &= (1 + a^{2^{n-1}-1})^2 = ((1 + a) + (1 + a)^2 + \cdots + (1 + a)^{2^{n-2}-1})^2 \\ &= (1 + a)^2 + (1 + a)^4 + \cdots + (1 + a)^{2^{n-1}-2}, \end{aligned}$$

donde temos que $(1 + c) \equiv (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}$ e assim, substituindo em (A) obtemos

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Na expressão de $(uv)^{i+1}$, temos que

$$\begin{aligned} (uv)^{i+1} &\equiv (1 + a)^{2i-1}[(1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2](1 + b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)} \\ &\equiv (1 + a)^{2i+1}(1 + b) \pmod{I_K^{2i+3}(G)}, \end{aligned}$$

concluindo a prova da afirmação.

Da mesma forma vamos provar (ii) por indução em i .

Para $i = 1$, é imediato que

$$\begin{aligned} (vu)^1 &\equiv (1 + b)[(1 + a) + (1 + b)] \pmod{I_K^3(G)} \\ &\equiv (1 + b)[(1 + a) \pmod{I_K^3(G)}] \end{aligned}$$

e pelo já observado $(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}$. Logo, na fórmula de $(vu)^i$, para $i = 1$, temos que

$$\begin{aligned} (vu)^1 &\equiv (1 + a)^{2-1}(1 + b) + (1 + a)^{2-1} \pmod{I_K^3(G)} \\ &\equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}, \end{aligned}$$

e a fórmula vale para $i = 1$.

Por hipótese de indução, suponha que a fórmula vale para i e vamos provar que vale para $i + 1$, isto é, vale:

$$(vu)^{i+1} \equiv (1+a)^{2i+1}(1+b) + (1+a)^{2i+2} \pmod{I_K^{2i+3}(G)}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (vu)^{i+1} &= (vu)^i(vu) \equiv [(1+a)^{2i-1}(1+b) + (1+a)^{2i}][(1+a)(1+b) \\ &\quad + (1+a)^2] \pmod{I_K^{2i+3}(G)} \\ &\equiv (1+a)^{2i-1}(1+b)(1+a)(1+b) + (1+a)^{2i+1}(1+b) \\ &\quad + (1+a)^{2i-1}(1+b)(1+a)^2 + (1+a)^{2i+2} \pmod{I_K^{2i+3}(G)} \\ &\equiv (1+a)^{2i+1}(1+b) + (1+a)^{2i+2} \pmod{I_K^{2i+3}(G)}, \end{aligned}$$

concluindo a prova do item (ii) da afirmação.

Agora, usando as fórmulas da afirmação escrevemos:

$$\begin{aligned} (uv)^i &\equiv (1+a)^{2i-1}(1+b) \pmod{I_K^{2i+1}(G)} \\ (vu)^i &\equiv (1+a)^{2i-1}(1+b) + (1+a)^{2i} \pmod{I_K^{2i+1}(G)} \\ (uv)^i u &\equiv (1+a)^{2i}(1+b) + (1+a)^{2i+1} \pmod{I_K^{2i+2}(G)} \\ (vu)^i v &\equiv (1+a)^{2i}(1+b) \pmod{I_K^{2i+2}(G)} \end{aligned}$$

onde $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$. Para todo i os elementos $(vu)^i$ e $(vu)^i$ módulo $I_K^{2i+1}(G)$ formam uma base sobre o corpo K de $I_K^{2i}(G)/I_K^{2i+1}(G)$ e da mesma forma $(uv)^i u$ e $(vu)^i v$ módulo $I_K^{2i+2}(G)$ forma uma base sobre o corpo K de $I_K^{2i+1}(G)/I_K^{2i+2}(G)$.

Observamos que a matriz de coeficientes dos elementos do conjunto B em relação à base ordenada L é unimodular, pelo seguinte:

Para $i = 0$ temos que

$$\begin{cases} (uv)^0 = (vu)^0 = 1 = (1+a)^0 \\ (uv)^0 u = 1u = u = (1+a)^1 + (1+b)^1 \\ (vu)^0 v = 1v = v = (1+b)^1 \end{cases}$$

Para $i = 2^{n-1}$ temos que

$$(uv)^{2^{n-1}} = (vu)^{2^{n-1}} \equiv (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) \pmod{I_K^{2^n+1}(G)}$$

pois basta ver que

$$(uv)^{2^{n-1}} \equiv (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) \pmod{I_K^{2i+1}(G)}$$

e calculando

$$\begin{aligned} (vu)^i &\equiv (1+a)^{2i-1}(1+b) + (1+a)^{2i} \pmod{I_K^{2i+1}(G)}, \quad \text{para } i = 2^{n-1}, \\ (vu)^{2^{n-1}} &\equiv (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) + (1+a)^{2^n} \pmod{I_K^{2^n+1}(G)} \end{aligned}$$

e sendo $1+a^{2^n} = 0$, temos

$$(vu)^{2^{n-1}} \equiv (1+a)^{2^{n-1}}(1+b) \pmod{I_K^{2^n+1}(G)}$$

e este é o último elemento da base B pela ordenação de L .

Os outros elementos da base B são os seguintes:

$$\begin{cases} (vu)^i \equiv (1+a)^{2i} + (1+a)^{2i-1}(1+b) & \pmod{I_K^{2i+1}(G)} \\ (uv)^i \equiv (1+a)^{2i-1}(1+b) & \pmod{I_K^{2i+1}(G)} \\ (uv)^i u \equiv (1+a)^{2i+1} + (1+a)^{2i}(1+b) & \pmod{I_K^{2i+2}(G)} \\ (uv)^i v \equiv (1+a)^{2i}(1+b) & \pmod{I_K^{2i+2}(G)} \end{cases}$$

que forma a submatriz $A_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que compõem, nesta ordem, a diagonal da

matriz de coeficientes dos elementos do conjunto B em relação à base ordenada L , onde $j = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. A matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \boxed{A_1} & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & * & & \vdots \\ & & 0 & & & \boxed{A_i} & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & \boxed{A_{2^{n-1}-1}} & \vdots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

que é unimodular, portanto inversível e assim os elementos do conjunto

$$B = \{(uv)^i, (vu)^i, (uv)^i u, (vu)^i v \mid i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$$

são linearmente independentes e de ordem igual à ordem de G . Portanto, conclui-se que B é uma base de KG sobre o corpo K . É imediato ver que $0 \neq v^2 = (1+b)^2 = (1+a)^{2^{n-1}} \notin B$, portanto $B \cup \{0\}$ não é fechado para multiplicação.

Capítulo 4

Exemplo de p -grupo não metacíclicos com base multiplicativa filtrada

O objetivo deste capítulo é mostrar que as técnicas empregadas na demonstração do Teorema de Classificação no capítulo anterior podem ser aplicadas para determinação das bases multiplicativas filtradas de álgebras de grupo modulares para p -grupos não-metacíclicos. Apresentamos uma série de p -grupos G não metacíclicos cujas álgebras de grupo KG sobre um corpo K de característica $p > 0$ não admitem uma base multiplicativa filtrada, exceto num único caso onde $p = 2$. Além deste exemplo, finalizamos este trabalho apresentando vários p -grupos finitos com três geradores cuja álgebra de grupo modular não possui uma tal base.

Inicialmente, provamos na Proposição 4.1.1 que os p -grupos introduzidos não são metacíclicos e estudamos o único caso onde KG admite base multiplicativa filtrada. Concluimos este capítulo com mais alguns exemplos de p -grupos a três geradores cuja álgebra de grupo modular não possui uma base multiplicativa filtrada.

4.1 Exemplos especiais de álgebra de grupo com base multiplicativa filtrada

Seja p um primo e considere o p -grupo G cuja apresentação é dada por

$$G = \langle a, b \mid a^{p^{2n}} = b^{p^{2n}} = 1, {}^b a = b^{p^n} a^{p^n+1}, {}^a b = a^{p^n} b^{p^n+1}, (a^{p^n}, b) = (b^{p^n}, a) = 1 \rangle$$

com $n \geq 1$.

Proposição 4.1.1 *O grupo G acima descrito tem as seguintes propriedades:*

- (i) *Os elementos a^{p^n} e b^{p^n} estão no centro de G , isto é, $a^{p^n}, b^{p^n} \in Z(G)$;*
- (ii) *O elemento central $a^{p^n} b^{p^n}$ é gerador do subgrupo comutador de G .*
- (iii) *Para os elementos a e b de G vale a fórmula:*
$$b^k a^j = a^{j k p^n + j} b^{j k p^n + k}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$
- (iv) *Todo elemento $g \in G$ pode ser escrito na forma $g = a^i b^j$, com $0 \leq i, j < p^{2n}$. Além disso, a ordem de G é p^{4n} ;*
- (v) *G não é metacíclico.*

Demonstração:

- (i) Pela apresentação de G os elementos a^{p^n} e b^{p^n} comutam com os geradores a e b do grupo G , logo comutam com todos os seus elementos.
- (ii) Pela apresentação $G' = \langle [b, a] \rangle$ e por um cálculo simples temos $c = [b, a] = bab^{-1}a^{-1} = baa^{-1} = b^{p^n}a^{p^n+1}a^{-1} = b^{p^n}a^{p^n} \in Z(G)$.
- (iii) Temos que $ba = cab$ e por (ii), $c = a^{p^n}b^{p^n}$, $c \in Z(G)$, logo podemos escrever $ba = acb = aa^{p^n}b^{p^n}b = a^{p^n}abb^{p^n}$. Por indução sobre k vemos que $b^ka = a^{kp^n+1}b^{kp^n+k}$ e fixando o valor de k , por indução sobre j vamos provar que $b^ka^j = a^{jkp^n+j}b^{jkp^n+k}$. Para $j = 1$, temos $b^ka = b^ka^1 = a^{kp^n+1}b^{kp^n+k}$, como acima escrito. Por hipótese de indução o resultado vale para j e para $j + 1$ temos

$$\begin{aligned}
b^ka^{j+1} &= b^ka^ja = a^{jkp^n+j}b^{jkp^n+k}a = a^{jkp^n+j} \\
&= a^{jkp^n+j}a^{(jkp^n+k)p^n+1}b^{(jkp^n+k)p^n+jkp^n+k} \\
&= a^{jkp^n+j}a^{kp^n+1}b^{kp^n+jkp^n+k} \\
&= a^{(j+1)kp^n+(j+1)}b^{(j+1)kp^n+k}.
\end{aligned}$$

- (iv) Pelo que provamos no item anterior, qualquer elemento $g \in G$ dado por uma expressão finita com potência dos geradores a e b pode ser reescrita na forma $g = a^ib^j$, com $0 \leq i, j < p^n$. donde fica claro que $|G| = p^{4n}$.

- (v) Sabemos que todo p -grupo metacíclico não abeliano pode ser dado pela apresentação $H = \langle a, b \mid a^{p^n} = 1, b^{p^m} = a^{p^t}, {}^ba = a^r \rangle$, onde vale $t \geq 0$, $r^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^n}$ e $p^t(r-1) \equiv 0 \pmod{p^n}$, onde o subgrupo comutador é $H' = \langle [b, a] \rangle$ e $[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = {}^baa^{-1} = a^ra^{-1}$ e então p divide $r-1$, pois caso contrário $H' = \langle a \rangle$ implicaria H/H' cíclico e pelo resultado 2.1.3, H seria abeliano (contradição). Isso permite concluir que $a^{r-1} = (a^s)^p$, com $a^s \in G$. Em vista deste resultado, basta ver que é impossível termos que $a^{p^n}b^{p^n} = (a^jb^k)^p$ para algum $1 \leq j, k < p^{nt'}$, o que

provamos a seguir: Por aplicação da fórmula provada em (iii), podemos escrever

$$a^{p^n} b^{p^n} = (a^j b^k)^p = (a^j b^k) \cdots (a^j b^k) = a^j \underbrace{(b^k a^j) \cdots (b^k a^j)}_{p-1 \text{ vezes}} b^k,$$

donde vale a igualdade:

$$a^{p^n} b^{p^n} = a^{\frac{p(p-1)}{2}jkp^n + pj} b^{\frac{p(p-1)}{2}jkp^n + pk},$$

que implica

$$a^{p^n - \frac{p(p-1)}{2}jkp^n - pj} b^{p^n - \frac{p(p-1)}{2}jkp^n - pk} = 1.$$

Pelo item (iv), temos somente que

$$\begin{cases} p^n - \frac{p(p-1)}{2}jkp^n - pj \equiv 0 & (\text{mod } p^{2n}) \\ p^n - \frac{p(p-1)}{2}jkp^n - pk \equiv 0 & (\text{mod } p^{2n}) \end{cases}$$

Logo, multiplicando uma das equações do sistema por -1 e somando membro a membro obtemos que $j = k$, e substituindo numa das equações temos que a equação do segundo grau em k ($0 \leq k < p^n$), $\frac{p(p-1)}{2}p^n k^2 + pk - p^n = 0$ deve ter soluções inteiras e estas só podem ser da forma

$$x' = \pm p^{m_1} \quad \text{e} \quad x'' = \pm p^{m_2}, \quad m_1, m_2 \geq 0.$$

Logo, $x' + x'' = -p$, isto é, $\pm(p^{m_1} + p^{m_2}) = -p$, donde temos $p^{m_1} + p^{m_2} = p$, que estudamos nos seguintes casos:

- (1) $m_1 = 0$ e $m_2 > 0$, impossível pois $1 + p^{m_2} = p \implies p|1$;
- (2) $m_1, m_2 > 0$, impossível pois implicaria $2 \leq p^{m_1-1} + p^{m_2-1} = 1$;
- (3) Caso $m_1 = m_2 = 0$. Na equação do segundo grau temos que $p^n = x'.x'' = p^{m_1}p^{m_2} = p^0p^0 = 1$, o que implica $n = 0$ (impossível, pois $n \geq 1$).

Isto conclui a prova do item (v) e da proposição.

O lema que provaremos a seguir é uma versão do Lema 2.3.5 para álgebras de grupo KG do grupo G dado acima, para $p = 2$ e $n = 1$. Faremos uma demonstração construtiva.

Lema 4.1.2 *Seja G o grupo dado pela apresentação*

$$G = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, ba = b^2a^3, {}^ab = a^2b^3, (a^2, b) = (b^2, a) = 1 \rangle$$

e seja K um corpo de característica 2. Considere o conjunto

$$L_k = \{(1+a)^{k_1}(1+b)^{k_2} \mid 0 \leq k_1 < 4 \text{ e } 0 \leq k_2 < 4, k_1 + k_2 = k\}$$

e a projeção canônica $w : I_k(G) \rightarrow I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$. Então a imagem de L_k pela projeção canônica é uma base do quociente $I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Demonstração: Faremos a demonstração em vários passos.

Afirmção 1: Seja KG a álgebra de grupo acima considerada. Então vale a congruência

$$(1+b)(1+a) \equiv (1+a)(1+b) + (1+a)^2 + (1+b)^2 \pmod{I_K^3(G)}$$

onde os elementos $(1+a)^2$ e $(1+b)^2$ estão no centro de KG .

Demonstração: Seja $c = (b, a)$. Calculamos

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a) &= (1+a) + b(1+a) = (1+a) + (b+ba) = (1+a) + (b+cab) \\ &= (1+a) + (1+ca)b = (1+a) + (1+ca)(1+b) + (1+ca). \end{aligned}$$

Aplicando a identidade (2.4.6) para o termo $(1 + ca)$, temos

$$\begin{aligned}
(1 + b)(1 + a) &= (1 + a) + \left((1 + c)(1 + a) + (1 + c) + (1 + a) \right) (1 + b) \\
&\quad + \left((1 + c)(1 + a) + (1 + c) + (1 + a) \right) \\
&= (1 + a) + (1 + c)(1 + a)(1 + b) + (1 + c)(1 + b) + (1 + a)(1 + b) \\
&\quad + (1 + c)(1 + c) + (1 + c) + (1 + a) \\
&= (1 + c)(1 + a)(1 + b) + (1 + c)(1 + b) + (1 + c)(1 + b) + (1 + a)(1 + b) \\
&\quad + (1 + c)(1 + c) + (1 + c)
\end{aligned}$$

Sabendo que $c \in G' \leq \mathcal{D}_2(G)$ implica $1 + c \in I_K^2(G)$, podemos escrever que

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + c) \pmod{I_K^3(G)}$$

e para o grupo G vale que $c = bab^{-1}a^{-1} = {}^baa^{-1} = (b^2a^3)a^{-1} = b^2a^2$. Substituindo na congruência obtemos que

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + b^2a^2) \pmod{I_K^3(G)}.$$

Aplicando a identidade (2.4.6) para o termo $(1 + b^2a^2)$, temos

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + b)^2(1 + a)^2 + (1 + b)^2 + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Como $(1 + a)^2(1 + b)^2 \in I_K^3(G)$, concluimos que

$$(1 + b)(1 + a) \equiv (1 + a)(1 + b) + (1 + b)^2 + (1 + a)^2 \pmod{I_K^3(G)}$$

É claro que $(1 + a)^2$ e $(1 + b)^2$ são centrais em KG .

Afirmção 2: Seja KG a álgebra de grupo acima considerada e seja l um número inteiro não negativo. Então valem:

$$(i) \text{ se } l \text{ é par: } (1 + b)(1 + a)^l = (1 + a)^l(1 + b);$$

(ii) se l é ímpar: $(1+b)(1+a)^l \equiv (1+a)^l(1+b) + (1+a)^{l-1}(1+b)^2 + (1+a)^{l+1} \pmod{I_K^{l+2}(G)}$.

Demonstração: O item (i) segue trivialmente e para (ii) escrevemos $l = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ e calculamos

$$(1+b)(1+a)^l = (1+b)(1+a)^{2k+1} = (1+b)(1+a)^{2k}(1+a)$$

e por (i)

$$(1+b)(1+a)^l = (1+a)^{2k}(1+b)(1+a),$$

e pela Afirmação 1,

$$\begin{aligned} (1+b)(1+a)^l &\equiv (1+a)^{2k} \left((1+a)(1+b) + (1+b)^2 + (1+a)^2 \right) \pmod{I_K^{l+2}(G)} \\ &\equiv (1+a)^{2k+1}(1+b) + (1+a)^{2k}(1+b)^2 + (1+a)^{2k+2} \pmod{I_K^{l+2}(G)}, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$(1+b)(1+a)^l \equiv (1+a)^l(1+b) + (1+a)^{l-1}(1+b)^2 + (1+a)^{l+1} \pmod{I_K^{l+2}(G)}.$$

Continuando a prova do Lema, procedemos como no Lema 2.4.5. Faremos indução sobre k , para provar que a imagem do conjunto $\{(1-a)^l(1-b)^{k-l} \mid 0 \leq l \leq k\}$ pela projeção canônica é um sistema de geradores do quociente $I_K^k(G)/I_K^{k+1}(G)$ como espaço vetorial sobre o corpo K . Seja $g, g' \in G$, a identidade $1 - gg' = (1-g) + (1-g') - (1-g)(1-g')$ implica que a imagem do conjunto $\{(1-a), (1-b)\}$ pela projeção canônica é um sistema de geradores do quociente $I_K(G)/I_K^2(G)$ como espaço vetorial sobre K . Suponhamos por hipótese de indução, que $w(L_m)$ com $m \leq k$ seja um sistema de geradores do espaço vetorial $I_K^m(G)/I_K^{m+1}(G)$ e vamos provar que as imagens dos produtos $u_1 u_2$, com $u_1 \in I_K(G)$ e $u_2 \in I_K^m(G)$ geram o quociente $I_K^{m+1}(G)/I_K^{m+2}(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} w(u_1) &\equiv \alpha_1(1-a) + \alpha_2(1-b) \pmod{I_K^2(G)}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2 \in K, \\ w(u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \beta_l(1-a)^l(1-b)^{m-l} \pmod{I_K^{m+1}(g)}, \text{ com } \beta_l \in K, 0 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

Portanto, temos o produto

$$\begin{aligned} (**) \quad w(u_1 u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \left(\alpha_1 \beta_l (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 \beta_l (1+b)(1+a)^l (1+b)^{m-l} \right) \pmod{I_K^{m+2}(G)}, \end{aligned}$$

onde substituindo-se os resultados para l par e l ímpar dados na afirmação acima obtemos:

$$\begin{aligned} w(u_1 u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \alpha_1 \beta_l (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l} \\ &\quad + \sum_{l \text{ par}}^m \alpha_2 \beta_l (1+a)^l (1+b)^{m-l+1} \\ &\quad + \sum_{l \text{ ímpar}}^m \left(\alpha_2 \beta_l [(1+a)^l (1+b) + (1+a)^{l-1} (1+b)^2 + (1+a)^{l+1}] (1+b)^{m-l} \right) \\ &\quad \pmod{I_K^{m+2}(G)} \end{aligned}$$

ou melhor

$$\begin{aligned} w(u_1 u_2) &\equiv \sum_{l=0}^m \alpha_1 \beta_l (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l} \\ &\quad + \sum_{l \text{ par}}^m \alpha_2 \beta_l (1+a)^l (1+b)^{m-l+1} \\ &\quad + \sum_{l \text{ ímpar}}^m \alpha_2 \beta_l \left((1+a)^l (1+b)^{m-l+1} + (1+a)^{l-1} (1+b)^{m-l+2} \right. \\ &\quad \left. + (1+a)^{l+1} (1+b)^{m-l} \right) \pmod{I_K^{m+2}(G)} \end{aligned}$$

Observemos os elementos $w(u_1 u_2)$ são combinação linear dos termos da forma

$$(1+a)^{k_1} (1+b)^{k_2},$$

com $k_1 + k_2 = m + 1$. Concluimos que as imagens dos produtos $(1 + a)^{k_1}(1 + b)^{k_2}$ pela projeção canônica geram o quociente $I_K^{m+1}(G)/I_K^{m+2}(G)$ como espaço vetorial sobre K . Já provamos na página 22 que $w(L_K)$ é linearmente independente sobre K . Podemos escrever

$$L = \left\{ (1 + a)^{k_1}(1 + b)^{k_2} \mid 0 \leq k_1 < p^{2n} \text{ e } 0 \leq k_2 < p^{2n} \right\} = \bigcup_{k=0}^{2p^{2n}-2} L_k$$

e claramente L é uma base da álgebra KG sobre K , pois $|G| = |L|$. E a mesma orientação anterior pode ser dada à base L .

Aplicamos o Lema para o grupo G dado e facilmente obtemos o seguinte quadro:

K -dimensão	K -base	Quocientes
1	1	I^0/I^1
2	$(1 + a); (1 + b)$	I/I^2
3	$(1 + a)^2; (1 + a)(1 + b); (1 + b)^2$	I^2/I^3
4	$(1 + a)^3; (1 + a)^2(1 + b); (1 + a)(1 + b)^2; (1 + b)^3$	I^3/I^4
3	$(1 + a)^3(1 + b); (1 + a)^2(1 + b)^2; (1 + a)(1 + b)^3$	I^4/I^5
2	$(1 + a)^3(1 + b)^2; (1 + a)^2(1 + b)^3$	I^5/I^6
1	$(1 + a)^3(1 + b)^3$	I^6/I^7

Proposição 4.1.3 *A álgebra de grupo modular KG sobre um corpo K de característica 2 tem uma K -base filtrada dada pelo conjunto*

$$B = \{1, u, v, uv, vu, v^2, uvu, uv^2, vuv, v^3, uvuv, uv^3, \underbrace{vuv^2}, \underbrace{uvuv^2}, vuv^3 \mid u = a + b, \\ v = \mu_1 a + \mu_2 b + (\mu_1 + \mu_2) \text{ e } \mu_1, \mu_2 \in K \text{ e } \mu_1 \neq \mu_2\}.$$

uvuv³

Particularmente, B é uma K -base multiplicativa filtrada fazendo $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 0$, onde $v = 1 + a$.

Demonstração: (De forma análoga ao que fizemos no final da página 34 para o Teorema

3.1.1.) Sejam u, v elementos de KG tais que

$$u = \alpha_1(a+1) + \alpha_2(b+1) \pmod{I_K^2(G)}$$

$$v = \beta_1(a+1) + \beta_2(b+1) \pmod{I_K^2(G)},$$

com $\Delta = \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \neq 0$. Por multiplicação, obtemos:

$$uv \equiv [\alpha_1(a+1) + \alpha_2(b+1)][\beta_1(a+1) + \beta_2(b+1)] \pmod{I_K^3(G)}$$

$$uv \equiv \beta_1\alpha_1(a+1)^2 + \beta_1\alpha_2(b+1)(a+1) + \beta_2\alpha_1(a+1)(b+1) + \beta_2\alpha_2(b+1)^2 \pmod{I_K^3(G)}.$$

Usando a fórmula (4.1), podemos calcular $\text{mod } I_K^3(G)$ e obter as seguintes congruências, $\text{mod } I_K^3(G)$:

$$(4.1) \quad uv \equiv (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1(1+a)^2 + \Delta(1+a)(1+b) + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2)(1+b)^2 ;$$

$$(4.2) \quad vu \equiv \alpha_1(\beta_1 + \beta_2)(1+a)^2 + \Delta(1+a)(1+b) + \beta_2(\alpha_1 + \alpha_2)(1+b)^2 ;$$

$$(4.3) \quad u^2 \equiv (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1(1+a)^2 + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(1+b)^2 ;$$

$$(4.4) \quad v^2 \equiv (\beta_1 + \beta_2)\beta_1(1+a)^2 + \beta_2(\beta_1 + \beta_2)(1+b)^2 .$$

Na tabela da página anterior, sabemos que a K -dimensão do quociente $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ é igual a 3 e pelas congruências (4.1) – (4.4), observa-se que $uv \not\equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$, $uv \not\equiv u^2 \pmod{I_K^3(G)}$, $uv \not\equiv v^2 \pmod{I_K^3(G)}$, $vu \not\equiv u^2 \pmod{I_K^3(G)}$ e $vu \not\equiv v^2 \pmod{I_K^3(G)}$. Para que este conjunto seja uma base, necessariamente deve acontecer um dos seguintes casos:

Caso 1: $u^2 \equiv v^2 \pmod{I_K^3(G)}$ e $v^2, u^2 \notin I_K^3(G)$, que pelas congruências faz $\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = \beta_2 + \beta_1\beta_2$ e $\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 = \beta_2^2 + \beta_1\beta_2$. Daí temos $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2$ e então $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$. Escrevemos a segunda igualdade na forma $\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_2(\beta_1 + \beta_2)$ e

substituindo temos $\alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = \beta_2(\alpha_1 + \alpha_2)$, que implica em $\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \beta_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2$. Portanto, $\Delta = \alpha_2\beta_1 + \beta_2\alpha_1 = 0$, contradição! Logo, $u^2 \equiv v^2 \pmod{I_K^3(G)}$ é impossível.

Caso 2: $u^2 \equiv 0 \pmod{I_K^3(G)}$ ou $v^2 \equiv 0 \pmod{I_K^3(G)}$.

Se $u^2 \equiv 0 \pmod{I_K^3(G)}$ temos que $(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, pois $\{(1+a)^2 \pmod{I_K^3(G)}, (1+b)^2 \pmod{I_K^3(G)}\}$ são linearmente independentes no quociente $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ como espaço vetorial sobre K . Conseqüentemente, se $\alpha_1 \neq \alpha_2$ teríamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, contradição. Logo, só resta o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$. Veremos que neste caso se obtém uma base de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$. Pelas congruências (4.1) – (4.4), nesta situação obtemos

$$\begin{cases} uv \equiv \lambda(1+a)(1+b) + \lambda(1+b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \\ vu \equiv \lambda(1+a)^2 + \lambda(1+a)(1+b) & \pmod{I_K^3(G)} \\ v^2 \equiv \lambda\beta_1(1+a)^2 + \lambda\beta_2(1+b)^2 & \pmod{I_K^3(G)} \end{cases}$$

com $\lambda = \beta_1 + \beta_2 \neq 0$. A matriz de coeficientes destes elementos na base

$$w(\{(1+a)^2, (1+a)(1+b), (1+b)^2\})$$

é $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda\beta_1 & 0 & \lambda\beta_2 \end{pmatrix}$ que tem determinante igual a $\lambda^4 \neq 0$. Portanto, uv, vu e v^2 formam uma base de $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Multiplicando estes elementos por u e v tomando os resultados módulo $I_K^4(G)$, obtemos:

$$\begin{cases} uvu \equiv \lambda[(1+a)^3 + (1+a)^2(1+b) + (1+a)(1+b)^2 + (1+b)^3] \\ uv^2 \equiv \lambda[\beta_1(1+a)^3 + \beta_1(1+a)^2(1+b) + \beta_2(1+a)(1+b)^2 + \beta_2(1+b)^3] \\ vuv \equiv \lambda^2[(1+a)^2(1+b) + (1+a)(1+b)^2] \\ v^3 \equiv \lambda[\beta_1^2(1+a)^3 + \beta_1\beta_2(1+a)^2(1+b) + \beta_1\beta_2(1+a)(1+b)^2 + \beta_2^2(1+b)^3] \end{cases}$$

Vemos que formam uma base de $I_K^3(G)/I_K^4(G)$ como espaço vetorial sobre K . Com efeito, eles são linearmente independentes, pois a matriz dos coeficientes em relação à base dada pela imagem da projeção canônica de $L_3 = \{(1+a)^3, (1+a)^2(1+b), (1+a)(1+b)^2, (1+b)^3\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_2 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda\beta_1^2 & \lambda\beta_1\beta_2 & \lambda\beta_1\beta_2 & \lambda\beta_2^2 \end{pmatrix}$$

que tem determinante igual a $\lambda^8 \neq 0$. Como seu número é igual à dimensão, eles formam uma base.

Multiplicando agora estes elementos por u e v e tomando os resultados módulo $I_K^5(G)$, obtemos

$$\begin{cases} uvuv \equiv \lambda^2[(1+a)^3(1+b) + (1+a)^2(1+b)^2 + (1+a)(1+b)^3] \\ uv^3 \equiv \lambda^2[\beta_1(1+a)^3(1+b) + \beta_1(1+a)^2(1+b)^2 + \beta_2(1+a)(1+b)^3] \\ vuv^2 \equiv \lambda^2[\beta_1(1+a)^3(1+b) + \beta_2(1+a)^2(1+b)^2 + \beta_2(1+a)(1+b)^3] \end{cases}$$

Da mesma forma, a matriz dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2\beta_1 & \lambda^2\beta_1 & \lambda^2\beta_1 \\ \lambda^2\beta_1 & \lambda^2\beta_2 & \lambda^2\beta_2 \end{pmatrix}$$

que tem determinante $\lambda^8 \neq 0$, e novamente os elementos acima formam uma base do quociente $I_K^4(G)/I_K^5(G)$ como espaço vetorial sobre K .

Do mesmo modo, multiplicando por u e v e tomando módulo $I_K^6(G)$, obtemos

$$\begin{cases} uvuv^2 \equiv \lambda^2[(1+a)^3(1+b)^2 + (1+a)^2(1+b)^3] \\ vuv^3 \equiv \lambda^2[\beta_1(1+a)^3(1+b)^2 + \beta_2(1+a)^2(1+b)^3] \end{cases}$$

Da mesma forma a matriz dos coeficientes $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2\beta_1 & \lambda^2\beta_2 \end{pmatrix}$ tem determinante $\lambda^5 \neq 0$, os elementos acima formam uma base do espaço $I_K^5(G)/I_K^6(G)$.

E, finalmente, do mesmo modo obtemos que

$$uvuv^3 \equiv \lambda^3(1+a)^3(1+b)^3 \pmod{I_K^7(G)}.$$

E desde que o número de elementos linearmente independentes tomados módulo $I_K^j(G)$, com $j = 0, 1, 2, \dots, 7$, iguais aos números das K -dimensões dos quocientes $I_K^j(G)/I_K^{j+1}(G)$, podemos concluir que os elementos

$$\{1, u, v, uv, vu, v^2, uvu, uv^2, vuv, v^3, uvuv, uv^3, vuv^2, uvuv^2, vuv^3, uvuv^3\}$$

formam uma K -base filtrada para a álgebra de grupo KG .

Calculando temos que $uvu = (\mu_1 + \mu_2)u^2$, logo $0 \neq u^2 \in B$ se $\mu_1 + \mu_2 = 1$ e a escolha $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 0$ faz $B \cup \{0\}$ um semi-grupo para multiplicação de KG (vide Anexo).

Com respeito aos p -grupos G dados pela apresentação acima, concluímos esta seção provando o seguinte teorema:

Teorema 4.1.4 *Seja G o p -grupo não metacíclico dado acima e considere K um corpo de característica $p > 0$. Então a álgebra de grupo modular KG não possui uma base multiplicativa filtrada sobre K , exceto no único caso em que $p = 2$ e $n = 1$.*

Demonstração: Calculamos $c = bab^{-1}a^{-1} = {}^baa^{-1} = b^{p^n}a^{p^n+1}a^{-1} = b^{p^n}a^{p^n} \in Z(G)$.

Logo temos $1 - c = 1 - b^{p^n}a^{p^n}$ e que pela identidade (2.4.6) escrevemos

$$1 - c = (1 - b)^{p^n} + (1 - a)^{p^n} - (1 - b)^{p^n}(1 - a)^{p^n}$$

Se $p > 2$ e $n > 1$, segue que $1 - c \in I_K^3(G)$. Na demonstração do Teorema Principal na página 36 observamos que este fato contradiz a existência de bases multiplicativas filtradas. O único caso possível é $p = 2$ e $n = 1$, que foi estudado na proposição acima.

Finalizamos este capítulo, apresentando uma classe de p -grupos com três geradores não abelianos que não possuem base multiplicativa filtrada.

Teorema 4.1.5 *Seja G um p -grupo finito cuja apresentação é dada por*

$$G = \langle x, y, z \mid (x, z) = (y, z) = 1, (x, y) = z^{p^n} \rangle$$

e seja K um corpo de característica $p > 0$. Então a álgebra de grupo KG não admite uma base multiplicativa filtrada se $p^n \geq 3$.

Demonstração: Seja $1 \cup B$ uma base multiplicativa filtrada de KG , então B é uma base filtrada do radical $I_K(G)$. Um argumento análogo ao dado no Lema 2.4.5, mostra que as imagens de $1 - x, 1 - y, 1 - z$ pela projeção canônica formam uma base de $I_K(G)/I_K^2(G)$ sobre o corpo K . Pelo resultado (2.2.5) a subálgebra de Frattini de $I_K(G)$ é $I_K^2(G)$. Logo os elementos de $B \setminus I_K^2(G)$ são geradores de $I_K(G)$ sobre K e denotando estes por u, v, w , podemos escrever $K[u, v, w] = I_K(G)$ que é não comutativa, pois G é um grupo não comutativo.

Escrevemos

$$\begin{cases} u = \alpha_1(1 - x) + \alpha_2(1 - y) + \alpha_3(1 - z) & (\text{mod } I_K^2(G)) \\ v = \beta_1(1 - x) + \beta_2(1 - y) + \beta_3(1 - z) & (\text{mod } I_K^2(G)) \\ w = \gamma_1(1 - x) + \gamma_2(1 - y) + \gamma_3(1 - z) & (\text{mod } I_K^2(G)) \end{cases}$$

com $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$, donde calculamos

$$\begin{aligned} uv &\equiv \beta_1\alpha_1(1-x)^2 + \beta_1\alpha_2(1-y)(1-x) + \beta_1\alpha_3(1-z)(1-x) \\ &\quad + \beta_2\alpha_1(1-x)(1-y) + \beta_2\alpha_2(1-y)^2 + \beta_2\alpha_3(1-z)(1-y) \\ &\quad + \beta_3\alpha_1(1-x)(1-z) + \beta_3\alpha_2(1-y)(1-z) + \beta_3\alpha_3(1-z)^2 \pmod{I_K^3(G)}. \end{aligned}$$

Pela apresentação do grupo temos que $c = [x, y] = z^{p^n}$ e que valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (1-z)(1-x) &= (1-x)(1-z), \\ (1-z)(1-y) &= (1-y)(1-z), \end{aligned}$$

pois $z \in Z(G)$ e

$$\begin{aligned} (1-y)(1-x) &= (1-x) - y(1-x) = (1-x) - (y - yx) = (1-x) - (y - cxy) \\ &= (1-x) - (1-cx)y = (1-x) + (1-cx)(1-y) - (1-cx). \end{aligned}$$

Pela identidade (2.4.6) e por $(1-c) \in I_K^2(G)$, temos que

$$\begin{aligned} (1-y)(1-x) &= (1-x) + \left((1-c) + (1-x) - (1-c)(1-x)\right)(1-y) \\ &\quad - \left((1-c) + (1-x) - (1-c)(1-x)\right) \\ &= (1-c)(1-y) + (1-x)(1-y) - (1-c)(1-x)(1-y) \\ &\quad - (1-c) - (1-x) + (1-c)(1-x) \\ &= (1-x)(1-y) - (1-c) \pmod{I_K^3(G)}. \end{aligned}$$

Substituindo $c = z^{p^n}$, $p^n \geq 3$, temos

$$1-c = 1 - z^{p^n} = (1-z)^{p^n} \in I_K^3(G),$$

o que implica

$$(1-y)(1-x) \equiv (1-x)(1-y) \pmod{I_K^3(G)}.$$

Continuando o cálculo do produto uv , obtemos, $\pmod{I_K^3(G)}$,

$$\begin{cases} uv \equiv \beta_1\alpha_1(1-x)^2 + \beta_2\alpha_2(1-y)^2 + \beta_3\alpha_3(1-z)^2 + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\beta_1\alpha_3 + \alpha_1\beta_3)(1-x)(1-z) + (\beta_2\alpha_3 + \alpha_2\beta_3)(1-y)(1-z) \\ vu \equiv \alpha_1\beta_1(1-x)^2 + \alpha_2\beta_2(1-y)^2 + \alpha_3\beta_3(1-z)^2 + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\beta_1\alpha_3 + \alpha_1\beta_3)(1-x)(1-z) + (\beta_2\alpha_3 + \alpha_2\beta_3)(1-y)(1-z) \end{cases}$$

Analogamente,

$$\begin{cases} uw \equiv \gamma_1\alpha_1(1-x)^2 + \gamma_2\alpha_2(1-y)^2 + \gamma_3\alpha_3(1-z)^2 + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_2)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)(1-x)(1-z) + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)(1-y)(1-z) \\ wu \equiv \alpha_1\gamma_1(1-x)^2 + \alpha_2\gamma_2(1-y)^2 + \alpha_3\gamma_3(1-z)^2 + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)(1-x)(1-z) + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)(1-y)(1-z) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} vw \equiv \gamma_1\beta_1(1-x)^2 + \gamma_2\beta_2(1-y)^2 + \gamma_3\beta_3(1-z)^2 + (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)(1-x)(1-z) + (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)(1-y)(1-z) \\ wv \equiv \beta_1\gamma_1(1-x)^2 + \beta_2\gamma_2(1-y)^2 + \beta_3\gamma_3(1-z)^2 + (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)(1-x)(1-y) \\ \quad + (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)(1-x)(1-z) + (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)(1-y)(1-z) \end{cases}$$

Segue diretamente que

$$(4.5) \quad \begin{cases} uv \equiv vu \pmod{I_K^3(G)}, \\ uw \equiv wu \pmod{I_K^3(G)}, \\ vw \equiv vw \pmod{I_K^3(G)}. \end{cases}$$

Se $p = 2$ temos que

$$uv, vu, uw, wu, vw, wv \notin I_K^3(G),$$

pois caso contrário

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

e pela conhecida regra de Laplace, $\Delta = 0$, contradição!

Se $p > 2$, também temos que

$$uv, vu, uw, wu, vw, wv \notin I_K^3(G),$$

pois caso contrário $uv \equiv 0 \pmod{I_K^3(G)}$ e como $(1-x)^2, (1-y)^2, (1-z)^2, (1-x)(1-y), (1-x)(1-z), (1-y)(1-z)$ todos mod $I_K^3(G)$ formam uma base do quociente $I_K^2(G)/I_K^3(G)$ como espaço vetorial sobre K , temos as igualdades: $\beta_1\alpha_1 = 0, \beta_2\alpha_2 = 0, \beta_3\alpha_3 = 0, \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 = 0, \beta_1\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 = 0$ e $\beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 = 0$. Claramente não podemos ter $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que $\beta_1 \neq 0$, o que implica na primeira equação $\alpha_1 = 0$ e substituindo nas outras igualdades, temos

$$\begin{cases} \beta_1\alpha_2 + 0\beta_2 = 0, \\ \beta_1\alpha_3 + 0\beta_3 = 0, \end{cases} \quad \text{isto é} \quad \begin{cases} \beta_1\alpha_2 = 0, \\ \beta_1\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Portanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, que faz $\Delta = 0$ (contradição). Tudo que foi feito acima para uv pode ser feito, de modo análogo, para vu, uw, vw, wv e assim concluímos que

$$uv, vu, uw, wu, vw, wv \notin I_K^3(G).$$

Juntando estes resultados com as congruências (4.5), podemos escrever que

- (I) $uv \equiv vu \pmod{I_K^3(G)}$ e $uv, vu \notin I_K^3(G)$,
- (II) $uw \equiv wu \pmod{I_K^3(G)}$ e $uw, wu \notin I_K^3(G)$,
- (III) $vw \equiv wv \pmod{I_K^3(G)}$ e $vw, wv \notin I_K^3(G)$,

onde claramente (I), (II) e (III) verificam as hipóteses da propriedade (ii) da Proposição 2.3.1 das bases multiplicativas filtradas que implica nas igualdades $uv = vu, uw = wu$ e $vw = wv$, isto é, u, v, w comutam entre si, fazendo a álgebra $I_K(G) = K[u, v, w]$ comutativa (contradição).

Concluímos pelo acima provado que a álgebra KG não admite uma base multiplicativa filtrada.

Como aplicação direta do teorema acima, segue que os seguintes p -grupos G com três geradores não admitem uma base multiplicativa filtrada na sua álgebra de grupo KG .

(A) O 2-grupo de ordem 32 dado na apresentação

$$G_1 = \langle a, b, c, a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca, bc = ca^4b \rangle,$$

onde $(b, c) = a^4$.

(B) O p -grupo de ordem p^4 (p primo ímpar) definido por

$$G_2 = \langle a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = c^p = 1, (b, c) = a^p, (a, b) = (a, c) = 1 \rangle,$$

onde $(b, c) = a^p$ com $p \geq 3$.

(C) Os p -grupos finitos com subgrupo cíclico de índice p^2 , abaixo indicados, dados na referência [13], calculados por Y. Ninomiya (1994).

(i) O p -grupo de ordem p^m , com $m \geq 4$ e expoente p^{m-2}

$$G_3 = \langle a, b, c \mid a^{p^{m-2}} = 1, b^p = 1, c^p = 1, ab = ba, ca = ac, cbc^{-1} = a^{p^{m-3}}b \rangle,$$

onde $(c, b) = p^{m-3}$ com $p^{m-3} \geq 3$.

(ii) O 2-grupo de ordem 2^m e expoente 2^{m-2} , $m > 4$, onde $(c, b) = a^{2^{m-3}}$.

$$G_4 = \langle a, b, c \mid a^{2^{m-2}} = 1, b^2 = 1, c^2 = 1, ab = ba, ac = ca, c^{-1}bc = a^{2^{m-3}}b \rangle$$

(D) Consideramos agora a classe de todos os grupos finitos G tais que $\frac{G}{Z(G)} \approx C_p \times C_p$, onde p é um número primo, $Z(G)$ é o centro de G e C_p é um grupo cíclico de ordem p . Estes grupos foram estudados por G. Leal e C. Polcino Milies em [15], onde foi provado que $\frac{G}{Z(G)} \approx C_p \times C_p$ se, e somente se $G = D \times A$, onde A é um grupo

abeliano e D é um p -grupo *indecomponível* tal que $D = \langle x, y, Z(D) \rangle$ com $xy \neq yx$, $x, y \in G$ e $Z(D)$ tem posto menor ou igual a 3. Estudamos aqui o caso onde G é indecomponível, isto é, quando $G = D$ e $A = \{1\}$.

Como estes grupos são da forma $D = \langle x, y, Z(D) \rangle$ e estamos interessados em grupos com três geradores, vamos considerar unicamente o caso em que posto $(Z(D)) = 1$.

O caso $p = 2$ está descrito em [10] e existem duas famílias nessas condições:

$$\begin{aligned} D_1 &= \langle x, y, t_1 \mid x^2 = y^2 = t_1^{2^{m_1}} = 1, (x, y) = t_1^{2^{m_1-1}}, t_1 \text{ central} \rangle, \\ D_2 &= \langle x, y, t_1 \mid x^2 = y^2 = t_1^{2^{m_1}} = 1, (x, y) = t_1^{2^{m_1-1}}, t_1 \text{ central} \rangle, \end{aligned}$$

onde $2^{m_1-1} \geq 3$.

O caso $p > 2$ foi estudado por C. Polcino Milies e E. Jespers em [11]. Também existem duas famílias:

$$\begin{aligned} D_3 &= \langle x, y, t \mid x^p = y^p = t^{p^n} = 1, [x, y] = t^{p^{n-1}}, t \text{ central} \rangle, \\ D_4 &= \langle x, y, t \mid x^p = t, y^p = t^p = 1, [x, y] = t^{p^{n-1}}, t \text{ central} \rangle, \end{aligned}$$

onde $p^{n-1} \geq 3$.

Observação: No caso onde $p = 2$ e $m_1 = 1$, temos que G na apresentação D_1 só pode ser o 2-grupo diedral e na apresentação D_2 é quatérnio com oito elementos e neste caso as álgebras de grupo modulares coincidentemente possuem bases multiplicativas filtradas para todo corpo K de característica 2 no caso diedral e no caso quatérnio apenas para os corpos K de característica 2 que possuem uma raiz cúbica primitiva da unidade, como provamos no Teorema Principal.

QUADRO DEMONSTRATIVO DE QUE $B \cup \{0\}$ É UM SEMIGRUPO (página 69)

[illegible]

Referências

- [1] Bautista, R., Gabriel, P., Roiter, A., and Salmeron, L. *Representation of finite algebras and multiplicative bases.* Invent.-Math. **81**(2) (1985), 217–285.
- [2] Carns, G.L., Chao, C.Y. *On the radical of the group algebra of a p -group over a modular field.* Proc. Amer. Math. Soc. **33**(2) (1972), 323–328.
- [3] Coleman, D.B. Finite groups with isomorphic group algebras. *Trans. Amer. Soc.*, **105** (1962), 1–8.
- [4] Felzenswalb, B. *Álgebras de Dimensão Finita.* 12^o Colóquio Bras. de Matemática (1979).
- [5] Gow, R., Huppert, B., Knörr, R., Manz, O., Willens, W. *Representation theory in arbitrary characteristic.* Casa Editrice Dott. A Milani, Trento (1993).
- [6] Hall Jr., M. *Teoria de los grupos.* Editorial F. Trillas, S.A. (1969), México.
- [7] Herstein, I. *Non Commutative Rings.* John Wiley & Sons, NY (1968).
- [8] Huppert, B. *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

- [9] Jennings, S.A. *The structure of the group ring of a p -group over a modular field.* Trans. Amer. Math. Soc., **50** (1941), 175–185.
- [10] Jespers, E.; Leal, G.; Polcino Milies, C. Classifying indecomposable R.A. loops. *J. of Algebra*, **176**, 569–584 (1995).
- [11] Jespers, E.; Polcino Milies, C. Units of group rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **107**, 233–251 (1996).
- [12] Karpislovsky, G. *The Jacobson radical of groups algebras.* North-Holland Math. Studies 135. (Notas de Matemática 115.)
- [13] Koshitani, S. *Group rings of metacyclic p -groups.* Proc. Japan Acad., **52**, 169–172 (1975).
- [14] Kupisch, H. *Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen, I.* J. Reine Angew. Math. **219** (1965), 1–25.
- [15] Leal, G.; Polcino Milies, C. Isomorphic group (and loop) algebras. *J. of Algebra*, **155** (1993), 195–210.
- [16] Lendrock, P., Michler, G.O. *Block structure of the smallest Janko group.* Math. Ann., **232**(3), (1978), 205–238.
- [17] Ninomiya, Y. *Finite p -groups with cyclic subgroups of index p^2 .* Math. J. Okayama Univ., **36** (1994), 1–21.
- [18] Paris, L. *Some examples of group algebras without filtered multiplicative basis.* L'Enseignement Math. **33** (1987), 307–314.
- [19] Suzuki, M. *Group Theory II.* Springer-Verlag, New York, Berlin-Heidelberg, Tokyo, 1986.