SUBESPAÇOS INVARIANTES
EM ALGUMAS
ÁLGEBRAS BÁRICAS

Juaci Picanço da Silva

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

– São Paulo, dezembro de 1998 –

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Juaci Picanço da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 26 de janeiro de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Alexandre Grishkov - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira - FEIS - UNESP
- Prof. Dr. Ivan Shestakov - NOVOSIBIRSK UNIV.

À Fofa e à Fefê

Agradecimentos

Tenho muitas razões pelas quais devo agradecer ao professor Roberto Costa. Por ele ter me aceitado como orientando quando tinha vários outros alunos. Pela dedicação com que nos orientava: houve um período que os nossos seminários eram diários. Mesmo depois de ter sofrido um grave problema de saúde e ter se submetido a uma desgastante e perigosa cirurgia, ele continuou cuidando de seus orientandos. Para mim, foi muito gratificante ter a oportunidade de conviver e ver como é o trabalho de um profissional como ele.

Gostaria de agradecer também às seguintes pessoas, sem a ajuda das quais, eu não conseguiria realizar este trabalho:

À minha esposa Ana Lúcia que se encarregou de muitas tarefas minhas e enfrentou sozinha muitos dos nossos problemas para que eu pudesse estudar e teve, juntamente com a nossa filha, a Fernanda, que tolerar intermináveis momentos de ausência de minha parte.

À Lúcia Ikemoto que me convenceu a estudar álgebras não associativas, apresentou-me o professor Roberto Costa, sugeriu várias mudanças neste trabalho e tirou muitas das minhas dúvidas. Além disso, em várias situações fora da universidade, pude contar com a sua ajuda e a do seu namorado, o Ricardo.

Ao Ivo Basso, com quem estudei o problema da invariância em álgebras que não são de Bernstein.

Ao Juan Carlos que, no pouco tempo que discutimos algumas propriedades dos P-subespaços, sugeriu algumas modificações que melhoraram certos resultados.

Ao Jair e ao Orlando que tantas vezes me ajudaram na difícil convivência com os computadores. Quase tudo que sei sobre linguagem C e L^AT_EX aprendi com eles.

Além dos já mencionados, uma série de outros amigos também contribuíram para tornar mais agradável esta fase da minha vida. Cito aqui alguns deles: Cristina Vaz, Cristina Wolff, Claus, Fátima, Márcio, Adriana, Pablo, Roberto, Panzarelli, Lintz, Osvaldo, Marcia, Alan, Ana Cládia, Guzzo, Maria, Fábio S., Major, Ayumi, Fábio Beleza, Roseli, Carlos.

Gostaria também de agradecer a todas as pessoas que, com o seu trabalho, nobre ou humilde, fazem o IME funcionar e ficar cada vez melhor.

Juaci Picanço da Silva

Abstract

In this work, we will introduce certain subspaces of the kernel of some baric algebras (A, ω) and among them, the Bernstein algebras. The set $\text{Ip}(A)$ of idempotents of weight 1 of the algebras which we consider is not empty and each $e \in \text{Ip}(A)$ determines a decomposition of A which has the following form: $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, where Ke , U_e and V_e are the proper subspaces of the linear operator of A defined by $L_e(x) = ex$. We will call P-subspaces those subspaces that have a polynomial expression in terms of U_e and V_e , for instance: $U_e V_e$, V_e^2 , $U_e^2 + U_e^3$, $V_e^3 + (U_e V_e)V_e + (U_e V_e)^2$. Our main purpose is to study the invariance of P-subspaces and also the invariance of dimension of P-subspaces under change of idempotent. We also consider a case (A, λ) , where λ is only a linear form.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos certos subespaços do núcleo de algumas álgebras báricas (A, ω) , dentre elas as álgebras de Bernstein. O conjunto $\text{Ip}(A)$ dos idempotentes de peso 1 das álgebras que consideramos é não vazio e cada $e \in \text{Ip}(A)$ determina uma decomposição de A da seguinte forma: $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, onde Ke , U_e e V_e são os subespaços próprios do operador linear de A definido por $L_e(x) = ex$. Chamamos de P-subespaços aos subespaços que possuem uma expressão polinomial em termos de U_e e V_e , por exemplo: $U_e V_e$, V_e^2 , $U_e^2 + U_e^3$, $V_e^3 + (U_e V_e)V_e + (U_e V_e)^2$. Nosso principal objetivo é estudar a invariância dos P-subespaços e também a invariância da dimensão dos P-subespaços com relação à mudança do idempotente. Também consideramos um caso (A, λ) , onde λ é apenas uma forma linear.

Sumário

Introdução	3
0 Preliminares	5
0.1 Álgebras de Bernstein	6
0.2 Álgebras de Bernstein-Jordan	11
1 P-subespaços	13
1.1 P-subespaços de álgebras de Bernstein	14
1.2 Nilpotência e P-subespaços	18
2 Invariância de P-subespaços em álgebras de Bernstein	19
2.1 Exemplos de P-subespaços invariantes	19
2.1.1 O P-subespaço $\tilde{p}$	20
2.1.2 O P-subespaço $S_{k,r}$	22
2.2 Exemplos de P-subespaços não invariantes	24
2.3 Invariância em álgebras de Bernstein satisfazendo $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$. . .	28
2.4 Invariância em álgebras de Bernstein-Jordan	36
2.5 Invariância em álgebras de Bernstein	38
2.5.1 P-subespaços de grau ≤ 3	46
3 Invariância de P-subespaços em outras álgebras bárias	50
3.1 Train álgebras de posto 3	51
3.2 Álgebras satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$	53
3.2.1 O caso $\lambda(A^2) = 0$	54
3.2.2 O caso $\lambda(A^2) \neq 0$	58
3.3 Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$	62
3.4 Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$	69
3.5 Comentários finais	72

Referências Bibliográficas	74
Índice de Símbolos	76
Índice Remissivo	77

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é encontrar invariantes para uma álgebra de Bernstein (A, ω) . Faremos isto utilizando certos subespaços de A , chamados P-subespaços, que são construídos a partir de uma decomposição de Peirce de A . Se $A = Ke \oplus U \oplus V$ é uma tal decomposição relativa ao idempotente e , então os seguintes subespaços: U , V , UV , U^2 , V^3 , $UV \oplus V$, $((UV)V + U^2V) \oplus U^2$, etc. são exemplos de P-subespaços. Ou seja, os P-subespaços são, em poucas palavras, subespaços de A que possuem uma expressão polinomial em termos de U e V . Assim, cada P-subespaço está associado ao idempotente escolhido para se fazer a decomposição de Peirce. Entretanto, mostraremos que alguns deles não dependem desta escolha. Tais subespaços são invariantes de A . Ainda, as dimensões de certos P-subespaços não dependem da mudança de idempotente e , portanto são invariantes numéricos de A .

Inicialmente estudamos os P-subespaços na subclasse das álgebras de Bernstein que satisfazem $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$ para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$. Mostraremos que todos os P-subespaços das álgebras de Bernstein desta subclasse têm dimensão invariante e encontraremos uma condição de simples verificação, que é necessária e suficiente, para que um dado P-subespaço seja, ele próprio, invariante. Tais resultados provavelmente são válidos para outras subclasses, mas mostramos que, num certo sentido, não é possível aumentar esta subclasse e ainda ter os mesmos resultados. Além disso, a subclasse que estudamos é bastante grande, pois contém as álgebras de Bernstein-Jordan. Este fato foi de grande utilidades para o estudo dos P-subespaços na classe inteira, visto que em toda álgebra de Bernstein existe um ideal L tal que o quociente por L é uma álgebra de Bernstein-Jordan. Com isso é possível provar alguns resultados para uma álgebra de Bernstein qualquer usando o que sabemos para as álgebras de Bernstein-Jordan. Por exemplo, desta forma prova-se que todo P-subespaço de uma álgebra de Bernstein, contido em V , tem dimensão invariante.

Para as álgebras de Bernstein-Jordan foram obtidos os melhores resultados e todos eles são válidos para as train álgebras de posto 3.

Depois observamos que o método utilizado para encontrar invariantes nas álgebras de Bernstein e train de posto 3, podia ser aplicado para obter invariantes em outras classes de álgebras básicas que possuem uma decomposição de Peirce. Também estudamos álgebras

munidas de uma forma linear apenas.

Este trabalho é a continuação do estudo de subespaços invariantes, iniciado por duas alunas, a Roseli Oliveira e a Maria Luiza Lelis, que estudaram esta questão em train álgebras de posto 3 e Bernstein, respectivamente.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo, citaremos os conceitos e resultados básicos sobre álgebras de Bernstein e provaremos alguns fatos que serão utilizados, principalmente, nos Capítulos 1 e 2.

Seja A uma álgebra não necessariamente associativa sobre um corpo K . Neste trabalho consideraremos sempre $\text{car}(K) \neq 2$ e A de dimensão finita. As *potências principais* de um elemento $a \in A$ são definidas recursivamente por $a^1 = a$ e $a^{n+1} = aa^n$, para todo inteiro positivo n . Em geral, temos $a^m a^n \neq a^{m+n}$.

Se S é um subconjunto de A , usaremos a notação $\langle S \rangle$ para indicar o subespaço de A gerado por S . Dados dois subespaços X e Y , definimos o subespaço XY por

$$XY = \langle xy; x \in X \text{ e } y \in Y \rangle$$

Muitas vezes utilizaremos as seguintes observações:

Observação 0.1 *Se $\mathcal{X}$ é um conjunto de geradores do subespaço X e $\mathcal{Y}$ é um conjunto de geradores do subespaço Y então $XY = \langle xy; x \in \mathcal{X} \text{ e } y \in \mathcal{Y} \rangle$.*

Observação 0.2 *Se X , Y e Z são subespaços de uma álgebra A então $X(Y + Z) = XY + XZ$.*

A segunda observação é consequência das igualdades $x(y + z) = xy + xz$ e $x_1y + x_2z = x_1(y + 0) + x_2(0 + z)$, onde $x, x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

Para subespaços usamos também a notação de potências principais: $X^1 = X$ e $X^n = X(X^{n-1})$.

Em várias ocasiões usaremos o seguinte lema:

Lema 0.1 *Seja X um subespaço de uma álgebra A . Se A é comutativa então*

$$(a) \quad X^2 = \langle x^2 : x \in X \rangle;$$

$$(b) \quad X + X^2 = \langle x + x^2 : x \in X \rangle.$$

Demonstração: Sejam $x, x_1, x_2 \in X$. A parte (a) segue da fórmula $x_1 x_2 = \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2)$ e a parte (b) é consequência de (a) e das identidades $x^2 = \frac{1}{2}(x + x^2) + \frac{1}{2}(-x + (-x)^2)$ e $x = (x + x^2) - x^2$. $\square$

Quando existe um homomorfismo não nulo $\omega: A \rightarrow K$, o par (A, ω) é chamado de *álgebra bária*, o homomorfismo ω é dito *função peso* de A e o escalar $\omega(a)$, com $a \in A$, é o *peso* do elemento a . Chamamos de *núcleo* de A ao kernel de ω e usamos a notação $N = \ker \omega$.

Se I é um ideal de A com $I \subseteq N$ então $\bar{\omega}: \bar{A} \rightarrow K$, definido por $\bar{\omega}(x + I) = \omega(x)$, para todo $x \in A$, é um homomorfismo da álgebra quociente $\bar{A} = A/I$ em K . Portanto, $(\bar{A}, \bar{\omega})$ é uma também álgebra bária.

0.1 Álgebras de Bernstein

Uma álgebra bária (A, ω) sobre um corpo K é chamada de *álgebra de Bernstein* se A é comutativa e $(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2$, para todo $x \in A$. Portanto, os elementos do núcleo N de A satisfazem a identidade

$$(x^2)^2 = 0 \tag{1}$$

e as seguintes linearizações:

$$x_1^2(x_1 x_2) = 0 \tag{2}$$

$$x_1^2(x_2 x_3) + 2(x_1 x_2)(x_1 x_3) = 0 \tag{3}$$

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) + (x_1 x_3)(x_2 x_4) + (x_1 x_4)(x_2 x_3) = 0 \tag{4}$$

com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N$.

Em toda álgebra de Bernstein, ω é o único homomorfismo não nulo de A em K . Por isso, muitas vezes, nos referimos a uma álgebra de Bernstein escrevendo apenas A ao invés de (A, ω) . O núcleo N é um ideal de A de codimensão 1 e existe pelo menos um idempotente de peso 1 de A . Cada idempotente e de peso 1 determina uma decomposição da álgebra: $A = Ke \oplus N = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, chamada de *decomposição de Peirce* de A associada a e , onde

$$U_e = \{u : eu = \frac{1}{2}u\}$$

$$V_e = \{v : ev = 0\}$$

são subespaços de A e satisfazem as inclusões

$$U_\epsilon V_\epsilon \subseteq U_\epsilon \quad V_\epsilon^2 \subseteq U_\epsilon \quad U_\epsilon^2 \subseteq V_\epsilon \quad (5)$$

e a igualdade

$$U_\epsilon V_\epsilon^2 = 0 \quad (6)$$

Os elementos u de U_ϵ e v de V_ϵ satisfazem as seguintes identidades:

$$u^3 = 0 \quad (7)$$

$$uv^2 = 0 \quad (8)$$

$$u(uv) = 0 \quad (9)$$

$$(uv)^2 = 0 \quad (10)$$

$$u^2v^2 = 0 \quad (11)$$

Linearizando estas identidades obtemos

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \quad (12)$$

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0 \quad (13)$$

$$u(v_1v_2) = 0 \quad (14)$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0 \quad (15)$$

$$(u_1v)(u_2v) = (uv_1)(uv_2) = 0 \quad (16)$$

$$(u_1u_2)(v_1v_2) = 0 \quad (17)$$

onde $u, u_i \in U_\epsilon$ e $v, v_j \in V_\epsilon$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$).

Usando as identidades (12), (13) e (15), prova-se o seguinte resultado para subespaços do núcleo de uma álgebra de Bernstein.

Proposição 0.1 *Sejam $X_1, X_2, X_3 \subseteq U_\epsilon$ e $W \subseteq V_\epsilon$ subespaços de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_\epsilon \oplus V_\epsilon$. Então*

$$(a) \quad X_1^2X_2 \subseteq X_1(X_1X_2);$$

$$(b) \quad X_1(X_2X_3) \subseteq X_2(X_3X_1) + X_3(X_1X_2);$$

$$(c) \quad X_1(X_2W) = X_2(X_1W).$$

Demonstração: Segue da parte (a) do Lema 0.1 e da Observação 0.1 que $X_1^2 X_2$ é gerado por elementos da forma $x_1^2 x_2$ com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Agora, pela identidade (12), $x_1^2 x_2 \in X_1(X_1 X_2)$. Assim, $X_1^2 X_2 \subseteq X_1(X_1 X_2)$. As demonstrações de (b) e (c) são análogas. $\square$

O conjunto de todos os idempotentes de A de peso 1 é dado por

$$\text{Ip}(A) = \{e + u + u^2 ; u \in U_e\}$$

Se $f_u = e + u + u^2$ é outro idempotente de A , com $u \in U_e$, então

$$U_{f_u} = \{x + 2ux ; x \in U_e\} \quad (18)$$

$$V_{f_u} = \{v - 2uv - 2u^2 v ; v \in V_e\} \quad (19)$$

e as aplicações lineares $\sigma_u: U_e \rightarrow U_{f_u}$ e $\tau_u: V_e \rightarrow V_{f_u}$ definidas por

$$\sigma_u(x) = x + 2ux \quad (20)$$

$$\tau_u(v) = v - 2uv - 2u^2 v \quad (21)$$

são isomorfismos de espaços vetoriais. Portanto, a dimensão dos subespaços U_e e V_e não depende da escolha do idempotente. Assim, $\dim U_e$ e $\dim V_e$ são invariantes numéricos de A . Dizemos que o par $(1 + \dim U_e, \dim V_e)$ é o *tipo* de A . Na maioria dos casos, quando não houver possibilidade de confusão, omitimos o índice e em U_e , V_e e o índice u em f_u , σ_u e τ_u .

Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, então $(A^2, \omega|_{A^2})$ é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce associada a e dada por $A^2 = Ke \oplus U \oplus U^2$. Dizemos que A é *nuclear* se $A = A^2$ ou equivalentemente se $V = U^2$.

Quando $U^2 = 0$, dizemos que A é *excepcional*. No caso em que $UV = V^2 = 0$, A é dita *normal*.

Todos os resultados citados anteriormente sobre álgebras de Bernstein podem ser encontrados em [9] e [19].

Dada uma família $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de subespaços de uma álgebra, fazendo a soma e a intersecção de todos os seus subespaços, obtemos dois novos subespaços associados à família dada. A próxima proposição nos diz o que é obtido dessa maneira para $\{U_f\}_{f \in \text{Ip}(A)}$ e $\{V_f\}_{f \in \text{Ip}(A)}$. Na verdade, a proposição seguinte é consequência de um fato mais geral que demonstraremos no Capítulo 2, mas ela é apresentada agora por conveniência.

Proposição 0.2 *Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Então*

$$(a) \quad \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} U_f = U \cap \text{ann} U;$$

$$(b) \quad \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} V_f = V \cap \text{ann}(U \oplus U^2);$$

$$(c) \quad \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f = U \oplus U^2;$$

$$(d) \quad \sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f = (UV + U^2V) \oplus V.$$

Demonstração: A fórmula (a) faz parte da Proposição 3.4 de [3]. Mostremos (b). Seja $\epsilon \in \text{Ip}(A)$ fixo. Se $w \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$ então, para cada $u \in U_\epsilon$, existe $v \in V_\epsilon$ tal que $w = v - 2(u + u^2)v$. De onde segue que $w = v$ e $(u + u^2)v = 0$. Agora, usando a parte (b) do Lema 0.1, concluimos que $w \in V_\epsilon \cap \text{ann}(U_\epsilon \oplus U_\epsilon^2)$. Assim,

$$\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} V_f \subseteq V_\epsilon \cap \text{ann}(U_\epsilon \oplus U_\epsilon^2)$$

Por outro lado, se $v \in V_\epsilon \cap \text{ann}(U_\epsilon \oplus U_\epsilon^2)$ então, para todo $u \in U_\epsilon$, temos que $v = v - 2(u + u^2)v \in V_{f_u}$. Logo, $v \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$. Assim,

$$V_\epsilon \cap \text{ann}(U_\epsilon \oplus U_\epsilon^2) \subseteq \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$$

o que conclui a demonstração da parte (b). Mostremos agora (c). Como $U_{f_u} = \{x + 2ux; x \in U_\epsilon\}$, para todo $u \in U_\epsilon$, temos que

$$\sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f = \sum_{u \in U_\epsilon} \langle x + 2ux; x \in U_\epsilon \rangle$$

Segue daí que $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f \subseteq U_\epsilon \oplus U_\epsilon^2$. Por outro lado, é evidente que $U_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f$ e, segue de

$$u^2 = \frac{1}{2}(u + 2u^2) - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sigma_u(u) - \frac{1}{2}u \in U_{f_u} + U_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f$$

que $U_\epsilon^2 \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f$. Para mostrar (d), observemos que

$$\sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f = \sum_{u \in U_\epsilon} \langle v - 2uv - 2u^2v; v \in V_\epsilon \rangle$$

Portanto, $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f \subseteq (U_\epsilon V_\epsilon + U_\epsilon^2 V_\epsilon) \oplus V_\epsilon$. Por outro lado, temos que $V_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$.

Agora segue das Observações 0.1 e 0.2 e do Lema 0.1 que

$$U_\epsilon V_\epsilon + U_\epsilon^2 V_\epsilon = (U_\epsilon + U_\epsilon^2) V_\epsilon = \langle (u + u^2)v; u \in U_\epsilon \text{ e } v \in V_\epsilon \rangle \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$$

pois $(u + u^2)v = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}(v - 2(u + u^2)v) = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\tau_u(v) \in V_\epsilon + V_{f_u}$. $\square$

Definimos os subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ como segue

$$\tilde{U} = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f \quad (22)$$

$$\tilde{V} = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f \quad (23)$$

A proposição anterior nos dá uma descrição mais simples de $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$, isto é,

$$\tilde{U} = U \oplus U^2 \quad (24)$$

$$\tilde{V} = (UV + U^2V) \oplus V \quad (25)$$

É claro da definição que $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ não dependem da escolha de um particular idempotente. Portanto, $U \oplus U^2$ e $(UV + U^2V) \oplus V$ não dependem do idempotente. Este fato já é conhecido, uma vez que $U \oplus U^2$ é o núcleo de A^2 e, foi provado em [8] que, para o train polinômio $p = x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 - \frac{1}{2}\omega(x)^2x$, temos $(UV + U^2V) \oplus V = \{a \in A: f(a) = 0 \text{ para qualquer } f \in J_p\}$, onde $J_p = \{f \in A^*: f(p(a)) = 0\}$.

Dois outros subespaços que não dependem do idempotente escolhido são: $N = U \oplus V$ e $P = (UV + V^2) \oplus V$. Sabemos que $N = \ker \omega$ e é bem conhecido que P , chamado de ideal de Etherington, é o ideal gerado por $\{x^2 - \omega(x)x: x \in A\}$.

O subespaço $L = U \cap \text{ann}U$ é um ideal de A e, da parte (a) da proposição anterior, temos que

$$L = \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} U_f \quad (26)$$

Assim, L é invariante quanto à escolha do idempotente. A importância deste ideal está no fato de A/L ser uma álgebra de Jordan, como veremos na próxima seção.

0.2 Álgebras de Bernstein-Jordan

As álgebras de Bernstein-Jordan são álgebras de Bernstein (A, ω) , onde A é uma álgebra de Jordan, isto é, satisfaz a identidade $(xy)x^2 = x(yx^2)$. O resultado seguinte é a Proposição 3.1 de [3].

Proposição 0.3 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. São equivalentes:*

- (a) A é uma álgebra de Jordan;
- (b) $V_e^2 = 0$, para todo $e \in \text{Ip}(A)$;
- (c) Para todo $e \in \text{Ip}(A)$, tem-se $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$;
- (d) Existe $e \in \text{Ip}(A)$ tal que $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$;
- (e) A satisfaz a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$.

Segue desta proposição que as álgebras de Bernstein-Jordan, satisfazem a equação

$$(uv)v = 0 \quad (27)$$

e, conseqüentemente, a linearização desta

$$(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = 0 \quad (28)$$

onde $u \in U$ e $v, v_1, v_2 \in V$. Além disso, segue da parte (e) que

$$x^3 = 0 \quad (29)$$

$$x_1^2 x_2 + 2x_1(x_1 x_2) = 0 \quad (30)$$

$$x_1(x_2 x_3) + x_2(x_3 x_1) + x_3(x_1 x_2) = 0 \quad (31)$$

para quaisquer elementos x, x_1, x_2, x_3 do núcleo de uma álgebra de Bernstein-Jordan.

A próxima proposição é conseqüência da identidade (28).

Proposição 0.4 *Sejam $X \subseteq U$ e $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços de uma álgebra de Bernstein-Jordan $A = Ke \oplus U \oplus V$. Então $(XW_1)W_2 = (XW_2)W_1$.*

Seja I um ideal de uma álgebra de Bernstein (A, ω) contido em V . Usando a parte (b) da Proposição 0.3, temos que uma condição necessária e suficiente para que o quociente A/I seja uma álgebra de Jordan é que $V_e^2 \subseteq I$ para todo $e \in \text{Ip}(A)$. Sobre isto, temos o seguinte corolário (ver [5] e [6]).

Corolário 0.1 *Para toda álgebra de Bernstein (A, ω) , a álgebra quociente $(A/L, \overline{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan.*

Demonstração: Temos que $L \subseteq N$ e, de (14), segue que $V^2 \subseteq L$, para toda decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A . $\square$

Capítulo 1

P-subespaços

Dados X e Y subespaços de uma K -álgebra comutativa A , os *subespaços monomiais* de A determinados por X e Y são definidos recursivamente da seguinte maneira:

- (1) X e Y são eles próprios subespaços monomiais determinados por X e Y ;
- (2) Se m_1 e m_2 são subespaços monomiais determinados por X e Y , então $m = m_1 m_2$ é um subespaço monomial determinado por X e Y .

Os seguintes subespaços são exemplos de subespaços monomiais determinados por X e Y :

$$\begin{aligned} X^2 Y &= \langle (x_1 x_2) y; x_1, x_2 \in X, y \in Y \rangle \\ (XY) Y &= \langle (x y_1) y_2; x \in X, y_1, y_2 \in Y \rangle \\ X^3 &= \langle (x_1 x_2) x_3; x_1, x_2, x_3 \in X \rangle \\ (XY)^2 &= \langle (x_1 y_1)(x_2 y_2); x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y \rangle \end{aligned}$$

Chamamos de *subespaço polinomial* determinado por X e Y aos subespaços de A que são somas finitas de subespaços monomiais determinados por X e Y .

Seja $K[U, V]$ a álgebra dos polinômios nas variáveis comutativas e não associativas U e V e seja $\mathcal{P}$ o subconjunto de $K[U, V]$ formado pelos polinômios sem termo constante e com todos os coeficientes iguais a 1. A cada elemento $p(U, V)$ de $\mathcal{P}$ corresponde um subespaço polinomial determinado por X e Y . De fato, basta substituir U por X e V por Y . O subespaço polinomial assim obtido é denotado por $p(X, Y)$ ou simplesmente p . Quando X e Y estão fixados e não houver possibilidade de confusão, chamamos $p(X, Y)$ de *P-subespaço*. Se $p(U, V)$ é um monômio, diremos que $p(X, Y)$ é um *P-monômio*.

Para um elemento p de $K[U, V]$ utilizamos a notação ∂p para indicar o *grau* de p . Se $p = \sum_{i=1}^k m_i$, onde m_i são monômios, definimos a *ordem* de p como sendo $o(p) = \min\{\partial m_i; i = 1, \dots, k\}$.

Sejam I um ideal de A e $\overline{X} = (X + I)/I$ e $\overline{Y} = (Y + I)/I$ subespaços da álgebra quociente $\overline{A} = A/I$. Os P-subespaços $p(X, Y)$ de A estão relacionados com os P-subespaços $p(\overline{X}, \overline{Y})$ de $\overline{A}$ da seguinte maneira:

$$p(\overline{X}, \overline{Y}) = (p(X, Y) + I)/I$$

1.1 P-subespaços de álgebras de Bernstein

Nesta seção, começamos o estudo dos P-subespaços $p(U_\epsilon, V_\epsilon)$ de álgebras de Bernstein (A, ω) , onde U_ϵ e V_ϵ são subespaços da decomposição de Peirce $A = K\epsilon \oplus U_\epsilon \oplus V_\epsilon$ de A associada ao idempotente ϵ .

Já vimos que a cada polinômio $p(U, V)$ de $\mathcal{P}$ corresponde um P-subespaço $p(U_\epsilon, V_\epsilon)$. Mas, em álgebras de Bernstein, esta correspondência não é biunívoca. De fato, dados $p(U, V) = UV$, $q(U, V) = UV + (UV)V$, $r(U, V) = UV + (UV)V + U^3$, temos $p(U_\epsilon, V_\epsilon) = q(U_\epsilon, V_\epsilon) = r(U_\epsilon, V_\epsilon) = U_\epsilon V_\epsilon$, visto que $U_\epsilon^3, (U_\epsilon V_\epsilon)V_\epsilon \subseteq U_\epsilon V_\epsilon$. Exceto quando for necessário, não faremos distinção entre $p(U, V)$ e $p(U_\epsilon, V_\epsilon)$. Por exemplo, chamaremos $p(U, V)$ também de P-subespaço e escreveremos $p(U, V) = q(U, V)$, $r(U, V) \subseteq p(U, V)$, etc.

Diremos que um P-subespaço $p(U, V)$ é *invariante quanto à escolha do idempotente*, ou simplesmente que é *invariante*, quando, para $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$ quaisquer, tem-se $p(U_\epsilon, V_\epsilon) = p(U_f, V_f)$. Se $\dim p(U_\epsilon, V_\epsilon) = \dim p(U_f, V_f)$ para quaisquer $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$, diremos que $p(U, V)$ tem *dimensão invariante quanto à escolha do idempotente* ou apenas que $p(U, V)$ tem *dimensão invariante*. Muitas vezes escreveremos p_ϵ no lugar de $p(U_\epsilon, V_\epsilon)$.

Tentaremos responder as seguintes questões:

1. Quais P-subespaços de uma álgebra de Bernstein são invariantes?
2. Quais P-subespaços têm dimensão invariante?
3. Se $p(U, V)$ tem dimensão invariante e dados $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$, existe um automorfismo de espaços vetoriais “natural” $\varphi: A \rightarrow A$ tal que $\varphi(p_\epsilon) = p_f$?
4. Como, a partir de um dado P-subespaço, podemos construir outros subespaços invariantes?
5. Quais P-subespaços são ideais?

6. Existe uma seqüência decrescente $m_1(U, V) \supseteq m_2(U, V) \supseteq \dots \supseteq m_k(U, V) \supseteq \dots$ de P -monômios tal que se $m_r(U, V) = 0$ para algum inteiro positivo r então o núcleo de A é nilpotente?

A seguir, provaremos alguns resultados que serão úteis para o próximo capítulo.

Lema 1.1 *Em toda álgebra de Bernstein tem-se*

$$(a) \quad U^{2k} \subseteq V \quad e \quad U^{2k+1} \subseteq U \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$(b) \quad V^r \subseteq L \quad r = 2, 3, 4, \dots$$

$$(c) \quad U^k L = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Demonstração:

(a) Usaremos indução em k . Para $k = 1$ temos $U^2 \subseteq V$ e $U^3 \subseteq U$. Se (a) vale para k então

$$U^{2(k+1)} = U^{2k+2} = (U^{2k}U)U \subseteq (VU)U \subseteq V.$$

$$U^{2(k+1)+1} = U^{2k+2+1} = (U^{2k+1}U)U \subseteq U^3 \subseteq U.$$

(b) Temos que $V^2 \subseteq U$ e $UV^2 = 0$. Logo, $V^2 \subseteq L$. Como L é ideal, segue-se que $V^r \subseteq L$ para todo inteiro positivo $r \geq 2$.

(c) Se k é ímpar então, segue de (a) e da definição de L que

$$U^k L \subseteq UL = 0.$$

Se $k \geq 2$ é par então, usando a parte (a) da Proposição 0.1, temos

$$U^k L = (U^{k-1}U)L \subseteq U^2 L \subseteq U(UL) = 0. \quad \square$$

O próximo corolário segue imediatamente de (b) e (c) do Lema 1.1.

Corolário 1.1 *Em toda álgebra de Bernstein tem-se*

$$(a) \quad V^r \subseteq U \quad r = 2, 3, 4, \dots$$

$$(b) \quad U^k V^r = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad r = 2, 3, 4, \dots$$

As observações seguintes são de grande utilidade.

Observação 1.1 *Segue de (5) que cada P -monômio não nulo de uma álgebra de Bernstein satisfaz uma das duas possibilidades: está contido em U ou está contido em V . Assim, dado um P -subespaço p , existem dois P -subespaços $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ tal que $p = g \dot{+} h$.*

Observação 1.2 Se m é um P -monômio com $\partial m \geq 2$ então existem P -monômios m_1 e m_2 com $\partial m_1, \partial m_2 < \partial m$ tal que $m = m_1 m_2$. Usando (5), concluímos que se $m \subseteq V$ então $m_1, m_2 \subseteq U$. Agora, se $m \subseteq U$ existem duas possibilidades: $m_1 \subseteq U$ e $m_2 \subseteq V$, ou $m_1, m_2 \subseteq V$.

Esta fatoração de m não é única. Por exemplo, se $m = U(((UV)V)U^2)$, pela parte (c) da Proposição 0.1,

$$m = U^3((UV)V) = (UV)(U^3V) = U((U^3V)V)$$

Os P -subespaços contidos em V e de ordem maior ou igual a 2 satisfazem a seguinte propriedade:

Proposição 1.1 Seja $p \subseteq V$ um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein. Se $o(p) \geq 2$ então existe um P -subespaço $q \subseteq U$ tal que $p = Uq$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $p = m$ é um P -monômio com $\partial m \geq 2$. Portanto, existem P -monômios $\mu_1, \mu_2 \subseteq U$ tais que $m = \mu_1 \mu_2$. Mostraremos, usando indução em $\partial \mu_1$, que existe um P -monômio $\mu \subseteq U$ tal que $m = U\mu$. Se $\partial \mu_1 = 1$, então $m = U\mu_2$. A hipótese de indução é a seguinte: se $m = nq$ com $n, q \subseteq U$ e $\partial n \leq k$, então existe $\mu \subseteq U$ tal que $m = U\mu$. Suponhamos que $\partial \mu_1 = k + 1$. Se $\mu_1 \subseteq V^2$, então $m = \mu_1 \mu_2 \subseteq V^2 U = 0$. Se $\mu_1 \subseteq UV$, então existem P -monômios $\mu'_1 \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$, tais que $\mu_1 = \mu'_1 \nu$ e $\partial \mu'_1 \leq k$. Portanto, $m = (\mu'_1 \nu) \mu_2 = \mu'_1 (\mu_2 \nu)$, esta última igualdade, por (c) da Proposição 0.1. Como $\mu_2 \nu \subseteq U$, pela hipótese de indução, existe $\mu \subseteq U$ tal que $m = U\mu$. Agora, suponhamos que $p = \sum_{i=1}^k m_i$ é um P -subespaço contido em V , onde m_i são P -monômios com $\partial m_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, k$). Logo, existem P -monômios $\mu_i \subseteq U$ tais que $m_i = U\mu_i$. Assim, escrevendo $q = \sum_{i=1}^k \mu_i$, temos $p = Uq$ com $q \subseteq U$. $\square$

Os seguintes diagramas contém os P -monômios contidos em U e V até grau 4 e 5, respectivamente. Cada subespaço está contido em um outro imediatamente a sua esquerda e ligado a este por uma reta. As setas significam inclusões.

Figura 1.1: P-monômios contidos em U de grau menor ou igual 4.

Figura 1.2: P-monômios contidos em V de grau menor ou igual 5.

1.2 Nilpotência e P-subespaços

Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein. Denotamos por $\text{End}(A)$ a álgebra dos operadores lineares de A . Para cada $a \in A$ definimos $L_a \in \text{End}(A)$ por $L_a(x) = ax$, para todo $x \in A$. Usamos a notação $E(V)$ para indicar a subálgebra de $\text{End}(A)$ gerada pelo conjunto $\{L_v; v \in V\}$.

Sejam X, Y subespaços de A , definimos recursivamente: $YX^{(0)} = Y$ e $YX^{(k)} = (YX^{(k-1)})X$.

Proposição 1.2 *Existe um idempotente e de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que a sequência de P-monômios $U \supseteq UV \supseteq \dots \supseteq UV^{(k)} \supseteq UV^{(k+1)} \supseteq \dots$ estaciona em 0 se, e somente se, o núcleo de A é nilpotente.*

Demonstração: Suponhamos que $UV^{(k)} = 0$ para algum inteiro positivo k . Mostremos que $E(V)^{k+1} = 0$. De fato, $E(V)^{k+1}$ é gerada por elementos da forma $T = L_{v_1} \dots L_{v_{k+1}}$, onde $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$. É claro que $T(e) = 0$. Agora, se $u \in U$ então $T(u) \in V^{(k+1)}U \subseteq V^{(k)}U = 0$ e, se $v \in V$ então $T(v) \in V^{k+2} = V^{(k)}V^2 \subseteq V^{(k)}U = 0$. Assim, a álgebra $E(V)$ é nilpotente. Portanto, segue do Teorema 4.7 de [13] que o núcleo de A é nilpotente. A recíproca é evidente. $\square$

Uma consequência desta definição é que se, para algum idempotente e , a sequência $U_e \supseteq U_e V_e \supseteq \dots \supseteq U_e V_e^{(k)} \supseteq U_e V_e^{(k+1)} \supseteq \dots$ estaciona em 0, então, para todo idempotente f , a sequência $U_f \supseteq U_f V_f \supseteq \dots \supseteq U_f V_f^{(k)} \supseteq U_f V_f^{(k+1)} \supseteq \dots$ também estaciona em 0.

Capítulo 2

Invariância de P-subespaços em álgebras de Bernstein

Tentaremos responder as questões levantadas na página 14, exceto a última que já foi respondida no capítulo anterior. Não foi possível dar respostas definitivas para aquelas perguntas na classe inteira das álgebras de Bernstein. Mas na subclasse das álgebras de Bernstein-Jordan, respondemos completamente a todas as questões. Em outra subclasse, que contém as álgebras de Bernstein-Jordan, demos respostas bastante satisfatórias. Também para certas famílias de P-subespaços é possível resolver tais problemas. Por exemplo, para os P-subespaços contidos em V , para os contidos em U que satisfazem a condição $\sigma_u(g_\epsilon) = g_{f_u}$, para quaisquer $\epsilon \in \text{Ip}(A)$ e $u \in U_\epsilon$, e para os que tem grau menor ou igual a 3.

2.1 Exemplos de P-subespaços invariantes

Nesta seção, daremos duas maneiras de construir P-subespaços invariantes em uma álgebra de Bernstein. Com os resultados que demonstraremos na Seção 2.5, teremos outras maneiras de fabricar P-subespaços invariantes.

Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein. Já sabemos do capítulo anterior que os seguintes P-subespaços são invariantes:

$$N = U \oplus V \tag{2.1}$$

$$P = (UV + V^2) \oplus V \tag{2.2}$$

$$\tilde{U} = U \oplus U^2 \tag{2.3}$$

$$\tilde{V} = (UV + U^2V) \oplus V \tag{2.4}$$

É claro que N , P , $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ têm dimensão invariante. Como já sabemos que U e V têm dimensão invariante, segue de (2.2), (2.3) e (2.4) que $UV + V^2$, U^2 e $UV + U^2V$ também têm dimensão invariante.

A partir de P-subespaços invariantes conhecidos, podemos construir outros P-subespaços invariantes da seguinte maneira: seja $F(X_1, \dots, X_k)$ um polinômio sem termo independente nas variáveis comutativas e não associativas $X_1, \dots, X_k$ e sejam $q_1, \dots, q_k$, P-subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein. Então $p = F(q_1, \dots, q_k)$ é um P-subespaço invariante. De fato, se $q_{i_e} = q_{i_f}$ ($i = 1, \dots, k$), para quaisquer idempotentes e e f de A , então $p_e = F(q_{1_e}, \dots, q_{k_e}) = F(q_{1_f}, \dots, q_{k_f}) = p_f$. Assim, os seguintes P-subespaços são todos invariantes

$$N^2 = (UV + V^2) \oplus U^2 \quad (2.5)$$

$$N^3 = \left((UV)V + U^3 + V^3 + U^2V \right) \oplus U(UV) \quad (2.6)$$

$$NP = (UV + V^2) \oplus U(UV) \quad (2.7)$$

$$N\tilde{U} = (UV + U^2V) \oplus U^2 \quad (2.8)$$

$$P\tilde{U} = (UV + U^2V) \oplus U(UV) \quad (2.9)$$

$$N^3 + \tilde{U}^2 = \left((UV)V + U^3 + V^3 + U^2V \right) \oplus U(UV) \quad (2.10)$$

$$N^3 + \tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 = \left((UV)V + U^3 + V^3 + V^2 \right) \oplus U^2 \quad (2.11)$$

$$N^3 + P^2 = \left((UV)V + U^3 + V^3 + V^2 \right) \oplus U(UV) \quad (2.12)$$

$$P^2 = \left((UV)V + V^3 + V^2 \right) \oplus (UV)^2 \quad (2.13)$$

$$\left((\tilde{U}\tilde{V})\tilde{V} + \tilde{V}^3 + \tilde{U}^2\tilde{V} \right) + (\tilde{U}\tilde{V})^2 = \left((UV)V + V^3 + U^2V \right) \oplus (UV)^2 \quad (2.14)$$

Mostraremos adiante que os P-subespaços listados de (2.1) a (2.12) são todos os P-subespaços de grau menor ou igual a 3 que são invariantes em todas as álgebras de Bernstein.

2.1.1 O P-subespaço $\tilde{p}$

A seguir apresentamos um caso particular de $F(q_1, \dots, q_k)$. Seja $p = p(U, V)$ um elemento de $\mathcal{P}$, definimos $\tilde{p}$ como sendo o P-subespaço obtido de p , substituindo-se U por $U + U^2$ e V por $UV + U^2V + V$. isto é, $\tilde{p} = p(\tilde{U}_e, \tilde{V}_e)$. Quando $p = U$ temos $\tilde{p} = \tilde{U} = U + U^2$. Analogamente se $p = V$ então $\tilde{p} = \tilde{V} = UV + U^2V + V$. Deve ficar claro que $\tilde{p}$ está associado ao polinômio $p(U, V)$ e não ao P-subespaço $p(U_e, V_e)$. Esta distinção é necessária.

pois, conforme mostra o exemplo seguinte, existem P-subespaços que são distintos como polinômios e $p_e = q_e$ para qualquer $e \in \text{Ip}(A)$, mas existe $f \in \text{Ip}(A)$ tal que $\tilde{p}_f \neq \tilde{q}_f$.

Exemplo 2.1 *Seja A álgebra de Bernstein tal que $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ é uma base de A com $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada por*

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2
u_1					u_2	u_3
u_2						u_4
u_3					$-u_4$	
u_4						
v_1						
v_2						

Esta álgebra é a do exemplo 7 de [15]. É uma álgebra de Bernstein-Jordan. Logo, $V_f^2 = 0$ para todo $f \in \text{Ip}(A)$. Assim, temos também que $U_f^2 V_f = 0$ para todo $f \in \text{Ip}(A)$. Sejam $p = V^2$ e $q = U^2 V$. Como polinômios em U e V , temos que p e q são distintos, mas

$$p_f = q_f = 0$$

para todo $f \in \text{Ip}(A)$. Agora

$$\begin{aligned} \tilde{p}_e &= \tilde{V}_e^2 = (U_e V_e) V_e = \langle u_4 \rangle \\ \tilde{q}_e &= \tilde{U}_e^2 \tilde{V}_e = (U_e + U_e^2)(U_e V_e + V_e) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{p}_e \neq \tilde{q}_e$.

O P-subespaço $\tilde{p}$ satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.1 *Para qualquer P-subespaço p de uma álgebra de Bernstein, tem-se*

- (a) $\tilde{p}$ é invariante;
- (b) $p \subseteq \tilde{p}$;
- (c) $\tilde{\tilde{p}} = \tilde{p}$.

Demonstração: Como $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ são invariantes, temos que $p(\tilde{U}, \tilde{V})$ é invariante. Agora, $U \subseteq \tilde{U}$ e $V \subseteq \tilde{V}$. Logo, $p(U, V) \subseteq p(\tilde{U}, \tilde{V})$. Assim, provamos (a) e (b). Para mostrar (c), observemos inicialmente que $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{U}$ e $\tilde{\tilde{V}} = \tilde{V}$. De fato, segue de (5) que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{U}} &= U + U^2 + (U + U^2)^2 \\ &= U + U^2 \\ \tilde{\tilde{V}} &= (U + U^2)(UV + U^2V + V) + (U + U^2)^2(UV + U^2V + V) + UV + U^2V + V \\ &= UV + U^2V + V.\end{aligned}$$

Agora, por definição, temos que $\tilde{\tilde{p}} = \tilde{p}(\tilde{\tilde{U}}, \tilde{\tilde{V}}) = p(\tilde{\tilde{U}}, \tilde{\tilde{V}}) = p(\tilde{U}, \tilde{V}) = p$. □

Na verdade, demonstra-se de maneira análoga o seguinte fato mais geral que a parte (c) da proposição anterior: dados $q_1, \dots, q_k$ P-subespaços invariantes e $p = F(q_1, \dots, q_k)$ como antes, se $\tilde{q}_1 = q_1, \dots, \tilde{q}_k = q_k$ então $\tilde{\tilde{p}} = p$.

Assim como $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{U}$ e $\tilde{\tilde{V}} = \tilde{V}$, temos também que $\tilde{\tilde{N}} = N$ e $\tilde{\tilde{P}} = P$. Logo, qualquer P-subespaço p listado de (2.1) a (2.14) satisfaz $\tilde{\tilde{p}} = p$. Portanto, todos os P-subespaços desta lista são obtidos a partir de um polinômio de duas variáveis e dos P-subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$.

2.1.2 O P-subespaço $S_{k,r}$

Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e sejam k e r inteiros positivos. O P-subespaço $S_{k,r}$ é definido como sendo a soma de todos os P-monômios contidos em U de grau k mais a soma de todos os P-monômios contidos em V de grau r . Usaremos as seguintes notações:

$M_{k,U}$ é o conjunto dos P-monômios de A , contidos em U , com grau igual a k .

$M_{k,V}$ é o conjunto dos P-monômios de A , contidos em V , com grau igual a k .

$$S_{k,U} = \sum_{m \in M_{k,U}} m, \quad S_{k,V} = \sum_{n \in M_{k,V}} n.$$

Assim, $S_{k,r} = S_{k,U} \oplus S_{r,V}$.

Temos as seguintes cadeias encaixantes

$$S_{1,U} \supseteq \dots \supseteq S_{k,U} \supseteq S_{k+1,U} \supseteq \dots \quad (2.15)$$

$$S_{1,V} \supseteq \dots \supseteq S_{k,V} \supseteq S_{k+1,V} \supseteq \dots \quad (2.16)$$

De fato, segue de (5) que cada P-monômio $m_1 \subseteq U$ (resp. $n_1 \subseteq V$) de grau $k+1$ está contido em um P-monômio $m_2 \subseteq U$ (resp. $n_2 \subseteq V$) de grau k .

A proposição seguinte nos diz para que valores de k e r o P-subespaço $S_{k,r}$ é invariante.

Proposição 2.2 *Para qualquer inteiro positivo k , os P-subespaços $S_{k+1,k}$, $S_{k,k}$ e $S_{k,k+1}$ são ideais e são invariantes quanto à escolha do idempotente.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Bernstein. Mostremos que $S_{k,k+1}$ é um ideal. A demonstração de que $S_{k+1,k}$ e $S_{k,k}$ são ideais é análoga. Temos que

$$eS_{k,k+1} = S_{k,U} \subseteq S_{k,k+1}$$

Observemos que $US_{r,U} \subseteq S_{r+1,V}$, $US_{r,V} \subseteq S_{r+1,U}$, $VS_{r,V} \subseteq S_{r+1,U}$ e $VS_{r,U} \subseteq S_{r+1,U}$, para todo inteiro positivo r . Portanto,

$$\begin{aligned} US_{k,k+1} &= US_{k,U} + US_{k+1,V} \subseteq S_{k+1,V} + S_{k+2,U} \subseteq S_{k,U} + S_{k+1,V} = S_{k,k+1} \\ VS_{k,k+1} &= VS_{k,U} + VS_{k+1,V} = S_{k+1,U} + S_{k+2,U} \subseteq S_{k,U} \subseteq S_{k,k+1} \end{aligned}$$

Assim, $S_{k,k+1}$ é ideal.

Seja m um P-monômio de grau r e sejam e e f dois idempotentes quaisquer de A . Existe $u \in U_e$ tal que $f = e + u + u^2$. Então segue de (18) e (19) e pela definição de subespaço monomial, dada na página 13, que

$$m(U_f, V_f) \subseteq m(U_e, V_e) + S_{r+1,U_e} + S_{r+1,V_e} \quad (2.17)$$

Suponhamos agora que m é um P-monômio de $S_{k,U}$. Usando (2.17) obtemos

$$m(U_f, V_f) \subseteq m(U_e, V_e) + S_{k+1,U_e} + S_{k+1,V_e} \subseteq S_{k,U_e} \oplus S_{k+1,V_e}$$

Portanto, $S_{k,U_f} \subseteq S_{k,U_e} \oplus S_{k+1,V_e}$. Da mesma maneira, mostra-se que $S_{k+1,V_f} \subseteq S_{k,U_e} \oplus S_{k+1,V_e}$. Assim, $S_{k,U_f} \oplus S_{k+1,V_f} \subseteq S_{k,U_e} \oplus S_{k+1,V_e}$. Como esta inclusão vale para quaisquer dois idempotentes de A , temos que $S_{k,U_e} \oplus S_{k+1,V_e} = S_{k,U_f} \oplus S_{k+1,V_f}$. Logo, $S_{k,k+1}$ é invariante. De maneira análoga, mostra-se que $S_{k+1,k}$ e $S_{k,k}$ também são invariantes. $\square$

Os P-subespaços $S_{k+1,k}$, $S_{k,k}$ e $S_{k,k+1}$ satisfazem a propriedade

$$\begin{aligned} S_{k+1,k} &= \tilde{S}_{k+1,k} \\ S_{k,k} &= \tilde{S}_{k,k} \\ S_{k,k+1} &= \tilde{S}_{k,k+1} \end{aligned}$$

De fato, segue da definição de $\tilde{p}$ e de $S_{k,r}$ que $\tilde{S}_{k,k+1} \subseteq S_{k,k+1} + S_{k+1,k+2}$. De (2.15) e (2.16), temos que $S_{k+1,k+2} \subseteq S_{k,k+1}$. Logo $\tilde{S}_{k,k+1} \subseteq S_{k,k+1}$. Da Proposição 2.1, segue-se que $S_{k,k+1} \subseteq \tilde{S}_{k,k+1}$. Portanto, $S_{k+1,k} = \tilde{S}_{k,k+1}$. As outras igualdades são demonstradas de maneira análoga.

Utilizaremos agora o P-subespaço $S_{2,U}$ para mostrar que nem todo ideal do núcleo de uma álgebra de Bernstein é um P-subespaço. Com efeito, consideremos o ideal L e a álgebra de Bernstein A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$, decomposição de Peirce $A = Ke \oplus \langle u_2, u_3 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada por

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
u_1	v_1				
u_2					u_2
u_3					
v_1					
v_2					

temos $U \supset L \supset S_{2,U}$ (contém e é diferente), pois $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $L = \langle u_2, u_3 \rangle$ e $S_{2,U} = UV + V^2 = \langle u_2 \rangle$. Observemos que $S_{2,U}$ contém todos os P-subespaços de ordem maior ou igual a 2 contidos em U . Como $L \supset S_{2,U}$, temos que L não é um P-subespaço de ordem maior ou igual a 2. Além disso, $U \supset L$. Logo, L não é um P-subespaço de ordem 1. Portanto, L não é P-subespaço.

2.2 Exemplos de P-subespaços não invariantes

Nesta seção, daremos exemplos de P-subespaços que não são invariantes e de P-subespaços que não têm dimensão invariante. Para isso, estudaremos três exemplos de álgebras de Bernstein. Em cada um deles, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K . $\{e, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ é uma base de A com $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$, $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, $\omega(e) = 1$ e $\omega(u_i) = \omega(v_j) = 0$ ($i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$). Não faremos os cálculos para mostrar que realmente as álgebras são de Bernstein e cada P-subespaço será determinado através da exibição de uma base.

Exemplo 2.2 $A = \langle e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3 \rangle$, com tábua de multiplicação dada por $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, $ev_j = 0$ e

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3
u_1				v_2			u_3		
u_2		v_2	$-v_2$				u_4		
u_3		$-v_2$							
u_4	v_2								
u_5									u_6
u_6									
v_1	u_3	u_4						u_5	
v_2							u_5		
v_3					u_6				

Para os idempotentes e e $f = e + u_2 + v_2$, temos

$$\begin{array}{ll}
U_e = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle & U_f = \langle u_1, u_2 + 2v_2, u_3 - 2v_2, u_4, u_5, u_6 \rangle \\
V_e = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle & V_f = \langle v_1 - 2u_4 - 2u_5, v_2, v_3 \rangle \\
U_e V_e = \langle u_3, u_4, u_6 \rangle & U_f V_f = \langle u_3 - 2v_2, u_4, u_5, u_6 \rangle \\
V_e^2 = \langle u_5 \rangle & V_f^2 = \langle u_5, u_6 \rangle \\
(U_e V_e) V_e = 0 & (U_f V_f) V_f = \langle u_5, u_6 \rangle \\
U_e^3 = 0 & U_f^3 = 0 \\
V_e^3 = \langle u_6 \rangle & V_f^3 = \langle u_6 \rangle \\
U_e^2 V_e = \langle u_5 \rangle & U_f^2 V_f = \langle u_5 \rangle \\
U_e V_e + V_e^2 = \langle u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle & U_f V_f + V_f^2 = \langle u_3 - 2v_2, u_4, u_5, u_6 \rangle \\
U_e V_e + U_e^2 V_e = \langle u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle & U_f V_f + U_f^2 V_f = \langle u_3 - 2v_2, u_4, u_5, u_6 \rangle \\
V_e^2 + U_e^3 = \langle u_5 \rangle & V_f^2 + U_f^3 = \langle u_5, u_6 \rangle \\
(U_e V_e) V_e + V_e^2 = \langle u_5 \rangle & (U_f V_f) V_f + V_f^2 = \langle u_5, u_6 \rangle \\
U_e^2 V_e + (U_e V_e) V_e = \langle u_5 \rangle & U_f^2 V_f + (U_f V_f) V_f = \langle u_5, u_6 \rangle \\
V_e^2 + U_e^3 + (U_e V_e) V_e = \langle u_5 \rangle & V_f^2 + U_f^3 + (U_f V_f) V_f = \langle u_5, u_6 \rangle \\
(U_e V_e) V_e + V_e^3 = \langle u_6 \rangle & (U_f V_f) V_f + V_f^3 = \langle u_5, u_6 \rangle \\
U_e^3 + U_e^2 V_e + (U_e V_e) V_e = \langle u_5 \rangle & U_f^3 + U_f^2 V_f + (U_f V_f) V_f = \langle u_5, u_6 \rangle
\end{array}$$

Portanto, os P-subespaços

$$\begin{array}{ll} U & UV + V^2 \\ V & UV + U^2V \end{array}$$

embora tenham dimensão invariante, conforme observamos na seção anterior, não são invariantes. Para os P-subespaços

$$\begin{array}{ll} UV & U^2V + (UV)V \\ (UV)V & V^2 + U^3 + (UV)V \\ V^2 & (UV)V + V^3 \\ V^2 + U^3 & U^3 + U^2V + (UV)V \\ (UV)V + V^2 & \end{array}$$

a dimensão depende do idempotente escolhido para decompor A .

Exemplo 2.3 $A = \langle e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle$, com tábua de multiplicação dada por $\epsilon u_i = \frac{1}{2}u_i$, $\epsilon v_i = 0$ ϵ

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
u_1	v_1	v_3				
u_2	v_3	v_2				
u_3						
v_1					$2u_3$	
v_2				$2u_3$		
v_3						$-u_3$

Para os idempotentes ϵ e $f = \epsilon + u_1 + u_2 + v_1 + v_2 + 2v_3$ temos

$$\begin{aligned} U_\epsilon^3 &= U_\epsilon^3 + (U_\epsilon V_\epsilon)V_\epsilon = U_\epsilon^3 + V_\epsilon^3 = U_\epsilon^3 + (U_\epsilon V_\epsilon)V_\epsilon + V_\epsilon^3 = 0 \\ U_f^3 &= U_f^3 + (U_f V_f)V_f = U_f^3 + V_f^3 = U_f^3 + (U_f V_f)V_f + V_f^3 = \langle u_3 \rangle \end{aligned}$$

Portanto, a dimensão dos P-subespaços

$$\begin{array}{ll} U^3 & U^3 + V^3 \\ U^3 + (UV)V & U^3 + (UV)V + V^3 \end{array}$$

depende da escolha do idempotente.

Exemplo 2.4 $A = \langle \epsilon, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, com a seguinte tábua de multiplicação: $\epsilon u_i = \frac{1}{2}u_i$, $\epsilon v_j = 0$ ϵ

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	v_2		v_3	$-v_4$			u_2			$\frac{1}{2}u_5$
u_2			v_4						$-\frac{1}{2}u_5$	
u_3	v_3	v_4					u_4			
u_4	$-v_4$							u_5		
u_5							u_6			
u_6										
v_1	u_2		u_4		u_6					
v_2				u_5						
v_3		$-\frac{1}{2}u_5$								
v_4	$\frac{1}{2}u_5$									

Usando os idempotentes ϵ e $f = \epsilon + u_2 + u_3 + 2v_4$, obtemos

$$\begin{aligned}
 V_\epsilon^3 &= U_\epsilon^2 V_\epsilon = V_\epsilon^2 + V_\epsilon^3 = U_\epsilon^2 V_\epsilon + V_\epsilon^3 = 0 \\
 V_\epsilon^2 + U_\epsilon^3 + V_\epsilon^3 &= U_\epsilon^3 + U_\epsilon^2 V_\epsilon + V_\epsilon^3 = U_\epsilon^3 + U_\epsilon^2 V_\epsilon = \langle u_5 \rangle \\
 V_f^3 &= \langle u_6 \rangle \\
 U_f^2 V_f &= V_f^2 + V_f^3 = U_f^2 V_f + V_f^3 = V_f^2 + U_f^3 + V_f^3 = \\
 &= U_f^3 + U_f^2 V_f + V_f^3 = U_f^3 + U_f^2 V_f = \langle u_5, u_6 \rangle
 \end{aligned}$$

Assim, os seguintes P-subespaços não têm dimensão invariante:

$$\begin{array}{ll}
 V^3 & V^2 + U^3 + V^3 \\
 U^2 V & U^3 + U^2 V + V^3 \\
 V^2 + V^3 & U^3 + U^2 V \\
 U^2 V + V^3 &
 \end{array}$$

O exemplo 2.3 está em [8]. Há também outros exemplos em [8] que mostram que os subespaços V^2 , V^3 , $V^2 + U^3$, $V^2 + V^3$, $U^3 + (UV)V$, $U^2 V + V^3$, $V^2 + U^3 + V^3$, $U^3 + U^2 V + V^3$ não têm dimensão invariante. Estes casos estão incluídos nos exemplos 2.2 e 2.4 que foram feitos a partir de dois exemplos que A. Grishikov construiu para mostrar que os subespaços $U^2 V$ e $(UV)V$ não têm dimensões invariantes.

2.3 Invariância em álgebras de Bernstein satisfazendo $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$

Primeiro mostraremos que a condição (as duas igualdades juntas)

$$\begin{cases} U^2V = 0 \\ (uv)v = 0 \end{cases} \text{ para quaisquer } u \in U \text{ e } v \in V \quad (2.18)$$

não depende do idempotente escolhido. Assim, (2.18) determina uma subclasse de álgebras de Bernstein. Provaremos que nesta subclasse todos os P-subespaços têm dimensão invariante.

Segue de $U^2V \subseteq V^2$ e da Proposição 0.3 que a subclasse determinada por (2.18) contém as álgebras de Bernstein-Jordan. Mas nem toda álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) é uma álgebra de Bernstein-Jordan. Por exemplo, a álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$, onde $U = \langle u \rangle$ e $V = \langle v \rangle$, com tábua de multiplicação dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v^2 = u$ e os outros produtos nulos. Temos que $U^2V = 0$, pois $U^2 = 0$ e, para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$, temos $(uv)v = 0$, visto que $UV = 0$. Entretanto, A não é de Bernstein-Jordan, uma vez que $V^2 \neq 0$.

Observação 2.1 *As álgebras tratadas nesta seção satisfazem as identidades (27) e (28).*

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. Para qualquer $u_0 \in U_e$, a função linear $\psi: U_e \rightarrow U_e$ definida por

$$\psi(u) = u - 2u_0^2u \quad (2.19)$$

é um automorfismo de espaço vetorial. De fato, basta mostrar que ψ é injetora. Seja $u \in U_e$ tal que $\psi(u) = 0$. Logo, $u = 2u_0^2u$. Usando (7), (12) e (15) obtemos as equações $u = -4u_0(u_0u)$ e $u_0u = 2u_0(u_0^2u) = -2uu_0^3 = 0$ de onde segue que $u = 0$.

Seja agora $f = e + u_0 + u_0^2$ um outro idempotente de A e sejam $\sigma: U_e \rightarrow U_f$ e $\tau: V_e \rightarrow V_f$ os isomorfismos de espaços vetoriais em (20) e (21). A próxima proposição nos fornece quatro identidades envolvendo σ , τ e ψ , quando A satisfaz (2.18).

Proposição 2.3 *Se em uma álgebra de Bernstein existe um idempotente e tal que $U_e^2V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$, então*

$$(a) \quad \sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(u_1u_2);$$

$$(b) \quad \sigma(u)\tau(v) = \sigma(\psi(u)v);$$

$$(c) \quad \tau(v_1)\tau(v_2) = \sigma(v_1v_2) = v_1v_2;$$

$$(d) \quad \psi(\psi(u)v) = uv.$$

Demonstração: Segue de (3) e (13) que a equação (a) é verdadeira para qualquer álgebra de Bernstein:

$$\begin{aligned} \sigma(u_1)\sigma(u_2) &= u_1u_2 + 2u_1(u_0u_2) + 2(u_0u_1)u_2 + 4(u_0u_1)(u_0u_2) \\ &= u_1u_2 - 2u_0(u_1u_2) - 2u_0^2(u_1u_2) \\ &= \tau(u_1u_2) \end{aligned}$$

Para provar (b) calculemos $\sigma(u)\tau(v) = uv - 2u(u_0v) + 2(u_0u)v - 4(u_0u)(u_0v)$. Agora (3), (15) e $U_\epsilon^2V_\epsilon = 0$ implicam que $\sigma(u)\tau(v) = uv + 2u_0(uv) + 2u_0^2(uv)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sigma(\psi(u)v) &= \sigma(uv - 2(u_0^2u)v) \\ &= uv - 2(u_0^2u)v + 2u_0(uv) - 4u_0((u_0^2u)v) \end{aligned}$$

Mas

$$u_0((u_0^2u)v) = 0 \tag{2.20}$$

em qualquer álgebra de Bernstein. De fato, usando (12), (15) e (16) temos

$$\begin{aligned} u_0((u_0^2u)v) &= -(u_0^2u)(u_0v) \\ &= 2(u_0(u_0u))(u_0v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim (28) implica (b). Mostremos agora (c). Segue da hipótese que

$$\tau(v_1)\tau(v_2) = v_1v_2 - 2v_1(u_0v_2) - 2(u_0v_1)v_2 + 4(u_0v_1)(u_0v_2)$$

Portanto, (16) e (28) implicam em $\tau(v_1)\tau(v_2) = v_1v_2$. Usando (14) temos $u_0(v_1v_2) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \tau(v_1)\tau(v_2) &= v_1v_2 + 2u_0(v_1v_2) \\ &= \sigma(v_1v_2) \end{aligned}$$

Finalmente, segue de (28) que

$$\begin{aligned}\psi(\psi(u)v) &= \psi\left(uv - 2(u_0^2u)v\right) \\ &= uv + 4u_0^2\left((u_0^2u)v\right)\end{aligned}$$

Agora, de (12) e (2.20) obtemos $u_0^2\left((u_0^2u)v\right) = -2u_0\left(u_0\left((u_0^2u)v\right)\right) = 0$. Assim, $\psi(\psi(u)v) = uv$. $\square$

A invariância de (2.18) é consequência do próximo corolário.

Corolário 2.1 *Em uma álgebra de Bernstein A , as condições seguintes são equivalentes:*

- (a) *Existe um idempotente e de A , tal que $U_\epsilon^2 V_\epsilon = 0$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$;*
- (b) *Para todo idempotente e de A , tem-se $U_\epsilon^2 V_\epsilon = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$.*

Demonstração: Provaremos que (a) implica (b). Seja $f = e + u_0 + u_0^2 \in \text{Ip}(A)$ com $u_0 \in U_\epsilon$. Como σ e τ são isomorfismos de espaços vetoriais, $U_f^2 V_f = \langle (\sigma(u_1)\sigma(u_2))\tau(v); u_1, u_2 \in U_\epsilon, v \in V_\epsilon \rangle$. Mas $(\sigma(u_1)\sigma(u_2))\tau(v) = \tau(u_1u_2)\tau(v) = (u_1u_2)v = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}(\sigma(u)\tau(v))\tau(v) &= \sigma(\psi(u)v)\tau(v) \\ &= \sigma\left(\psi(\psi(u)v)v\right) \\ &= \sigma((uv)v) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

Faremos uso das seguintes identidades envolvendo subespaços do núcleo de A .

Corolário 2.2 *Sejam $X, X_1, X_2 \subseteq U$ e $W, W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18). Então*

- (a) $(XW_1)W_2 = (XW_2)W_1$;
- (b) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(X_1X_2)$;
- (c) $\sigma(X)\tau(W) = \sigma(\psi(X)W)$;

$$(d) \tau(W_1)\tau(W_2) = \sigma(W_1W_2).$$

Demonstração: A parte (a) segue de (28). A Proposição 2.3 implica (b), (c) e (d). $\square$

O lema seguinte é evidente a partir da figura 1.2.

Lema 2.1 *Seja e um idempotente de uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$. Se $m \subseteq V^2$ é um P-monômio com $\partial m \geq 3$ então $m(U_e, V_e) = 0$.*

Demonstração: Se $m \subseteq V^2$ e $\partial m \geq 3$ então $m \subseteq U^2 V$. De fato, escrevamos $m = \nu_1 \nu_2$, onde ν_1 e ν_2 são P-monômios com $\partial \nu_1 \geq 2$. Assim, existem P-monômios $\mu_1, \mu_2 \subseteq U$ tal que $\nu_1 = \mu_1 \mu_2$. Portanto, $m = (\mu_1 \mu_2) \nu_2 \subseteq U^2 V$. $\square$

Proposição 2.4 *Para todo P-subespaço das álgebras de Bernstein que satisfazem (2.18) tem-se $U(Up) \subseteq p$.*

Demonstração: É suficiente provar a proposição para um P-monômio m . Usaremos indução no grau de m . Se $m = U$ ou $m = V$ então

$$\begin{aligned} U(UU) &= U^3 \subseteq U \\ U(UV) &\subseteq U^2 \subseteq V \end{aligned}$$

Suponhamos que a proposição é verdadeira para todo P-monômio de grau menor ou igual a um inteiro positivo k . Seja m um P-monômio com $\partial m = k+1$. Existem duas possibilidades: $m \subseteq U$ ou $m \subseteq V$. Observemos que $\partial m \geq 2$. Assim, pelo Lema 2.1, se $m \subseteq U$ então $m = V^2$ ou $m = \mu\nu$, onde $\mu \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios com $\partial \mu, \partial \nu \leq k$. Agora, se $m \subseteq V$ então, pela Proposição 1.1, existe um P-monômio $\mu' \subseteq U$ tal que $m = U\mu'$ e $\partial \mu' \leq k$. Segue de (6) que

$$U(UV^2) = 0$$

Usando (b) e (c) da Proposição 0.1 obtemos

$$U(U(\mu\nu)) = U(\mu(U\nu)) \subseteq \mu((U\nu)U) + (U\nu)(U\mu)$$

Segue da parte (a) do Corolário 2.2 e da hipótese de indução que

$$U(U(\mu\nu)) \subseteq \mu(U(U\nu)) + (U(U\mu))\nu \subseteq \mu\nu$$

Novamente, pela hipótese de indução,

$$U\left(U(U\mu')\right) \subseteq U\mu'$$

Portanto, para qualquer um dos casos, temos $U(Um) \subseteq m$. $\square$

O próximo corolário diz que os P-subespaços das álgebras de Bernstein que satisfazem (2.18) absorvem produto por U^2 .

Corolário 2.3 *Em toda álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) tem-se $U^2p \subseteq p$, para qualquer P-subespaço p .*

Demonstração: Escrevendo $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$, $h \subseteq V$ e usando a parte (a) da Proposição 0.1 temos

$$U^2p = U^2g + U^2h \subseteq U(Ug) + U^2V$$

Resulta daí e da Proposição 2.4 que

$$U^2p \subseteq U(Ug) \subseteq g \subseteq p$$

$\square$

Como consequência do corolário anterior temos a seguinte propriedade do automorfismo ψ .

Lema 2.2 *Nas álgebras de Bernstein que satisfazem (2.18) tem-se $\psi(g) = g$, para todo P-subespaço $g \subseteq U$.*

Demonstração: Como ψ é um automorfismo de espaço vetorial, basta mostrar que $\psi(g) \subseteq g$. Seja $x \in g$. Visto que $u_0^2 \in U^2$, usando o Corolário 2.3, temos $\psi(x) = x - 2u_0^2x \in g + U^2g = g$. $\square$

Sejam $A = K\epsilon \oplus U_\epsilon \oplus V_\epsilon$ uma álgebra de Bernstein e $u_0 \in U_\epsilon$. A transformação de Peirce associada a ϵ e a u_0 é a função linear $\varphi: A \rightarrow A$ definida por $\varphi(\alpha\epsilon + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$, onde $f = \epsilon + u_0 + u_0^2$. Assim, as transformações de Peirce são automorfismos de espaço vetorial. Ver [2] para maiores informações sobre transformações de Peirce em álgebras de Bernstein.

Provaremos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 2.1 *Todo P-subespaço de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) tem dimensão invariante.*

Demonstração: Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = Kf \oplus U_f \oplus V_f$ duas decomposições de Peirce de A , onde $f = e + u_0 + u_0^2$ com $u_0 \in U_e$. Seja φ a transformação de Peirce associada a e e a u_0 . Mostraremos que

$$\varphi(p_e) = p_f \quad (2.21)$$

Inicialmente provaremos que (2.21) vale para um P-monômio m , fazendo indução no grau k de m . Se $k = 1$ então $m = U$ ou $m = V$. Temos que $\varphi(U_e) = \sigma(U_e) = U_f$ e, analogamente, $\varphi(V_e) = \tau(V_e) = V_f$. Suponhamos agora que (2.21) vale para todo P-monômio de grau menor ou igual a k . Seja m um P-monômio de A com $\partial m = k + 1$. Portanto, pela Observação 1.2 e pelo Lema 2.1, temos três possibilidades: $m = \mu\nu$, $m = V^2$ ou $m = \mu_1\mu_2$, onde $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios de grau menor ou igual a k . Se $m = \mu\nu$ então segue da hipótese de indução que

$$m_f = \mu_f\nu_f = \varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e) = \sigma(\mu_e)\tau(\nu_e)$$

Portanto, pelo Corolário 2.2, $m_f = \sigma(\psi(\mu_e)\nu_e)$ e, usando o Lema 2.2, obtemos

$$m_f = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \varphi(m_e)$$

Os outros casos são feitos de maneira análoga. Agora, seja p um P-subespaço de A . Logo, existem P-monômios $m_1, \dots, m_k$ tais que $p = \sum_{i=1}^k m_i$. Assim, escrevendo $m_i(U_e, V_e) = m_{i_e}$ e $m_i(U_f, V_f) = m_{i_f}$, temos que

$$\varphi(p_e) = \sum_{i=1}^k \varphi(m_{i_e}) = \sum_{i=1}^k m_{i_f} = p_f$$

Como φ é um isomorfismo, $\dim p_e = \dim p_f$. Portanto, p tem dimensão invariante. $\square$

Com o objetivo de obter um resultado mais geral enfraquecendo a condição (2.18), podemos fazer as seguintes perguntas:

- 1ª) Se retirarmos uma das hipóteses $U^2V = 0$ ou $(uv)v = 0$ da condição (2.18), o Teorema 2.1 ainda vale?
- 2ª) Substituindo-se a hipótese $U^2V = 0$ por uma mais fraca, por exemplo (ver figura 1.1):

$$\begin{aligned} V(U(UV)) &= 0 \\ (U^2)^2 &= 0 \\ V(U(UV)) + (U^2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

o resultado do Teorema 2.1 ainda é verdadeiro?

Os Exemplos 2.2 e 2.4 mostram que a resposta para cada uma destas perguntas é negativa. Vimos que as álgebras destes exemplos possuem P-subespaços que não têm dimensão invariante. Entretanto, no exemplo 2.2 temos

$$\begin{aligned} U_\epsilon^2 V_\epsilon &\neq 0 \\ (uv)v \in (U_\epsilon V_\epsilon)V_\epsilon &= 0 \\ V_\epsilon(U_\epsilon(U_\epsilon V_\epsilon)) &= 0 \\ (U_\epsilon^2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

e, no Exemplo 2.4 temos

$$\begin{aligned} U_\epsilon^2 V_\epsilon &= 0 \\ \left(u_1(v_1 + v_3)\right)(v_1 + v_3) &= -\frac{1}{2}u_5 \end{aligned}$$

Neste sentido, a condição (2.18) é a melhor estimativa para o Teorema 2.1.

Observação 2.2 *Muitas vezes, de agora em diante, para simplificar a notação, escreveremos $\sigma(g_\epsilon) = g_f$ e $\tau(h_\epsilon) = h_f$ no lugar de $\sigma_u(g_\epsilon) = g_{f_u}$ e $\tau_u(h_\epsilon) = h_{f_u}$, respectivamente. Porém deve ficar claro que as funções σ e τ dependem do par de idempotentes e e f .*

O resultado seguinte é um corolário da demonstração do teorema anterior.

Corolário 2.4 *Seja A uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18). Se $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ são P-subespaços de A então*

$$\begin{aligned} \sigma(g_\epsilon) &= g_f \\ \tau(h_\epsilon) &= h_f \end{aligned}$$

para quaisquer $\epsilon, f \in Ip(A)$.

Agora, depois de estudarmos a invariância da dimensão de um P-subespaço, passamos a estudar a invariância do próprio P-subespaço. O Teorema 2.2 a seguir nos fornece um critério para que um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) seja invariante.

Teorema 2.2 *Seja p um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18). Então p é invariante se, e somente se, $Up \subseteq p$.*

Demonstração: Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma decomposição de Peirce de A e seja $p = g \dot{-} h$ um P-subespaço de A com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Para qualquer $u \in U_e$, seja $f = e + u + u^2$. Usando o Corolário 2.4, obtemos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(w); x \in g_e, w \in h_e\}$. Portanto,

$$p_f = \{(x - 2uw) + (w + 2ux); x \in g_e, w \in h_e\} \quad (2.22)$$

Suponhamos que p é invariante. Logo, $p_f = p_e$ para quaisquer idempotentes e e f . Em particular, $p_f \subseteq p_e$. Portanto, segue de (2.22) que dados $x \in g_e$ e $w \in h_e$, existem $x' \in g_e$ e $w' \in h_e$ tais que $x - 2uw = x'$ e $w + 2ux = w'$. Assim,

$$\begin{aligned} uw &= \frac{1}{2}(x - x') \\ ux &= \frac{1}{2}(w' - w) \end{aligned}$$

Logo, $U_e g_e \subseteq h_e$ e $U_e h_e \subseteq g_e$. De onde segue que $U_e p_e \subseteq p_e$.

Reciprocamente, suponhamos que $Up \subseteq p$. Podemos reescrever (2.22) como segue

$$p_f = \{x + w + 2u(x - w); x \in g_e, w \in h_e\}$$

de onde segue que

$$p_f \subseteq p_e + U_e p_e \quad (2.23)$$

Agora, usando a hipótese, concluímos que $p_f \subseteq p_e$. Como esta inclusão vale para qualquer par de idempotentes, segue-se que $p_e = p_f$. Assim, p é invariante. $\square$

Daremos agora a descrição do conjunto dos P-subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18). Lembramos que $\mathcal{P}$, com a identificação que já mencionamos antes, denota o conjunto de todos os P-subespaços de A .

Corolário 2.5 *O conjunto dos P-subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) é dado por $\{p + Up; p \in \mathcal{P}\}$.*

Demonstração: Se p é invariante então, pelo Teorema 2.2, temos que $p = p + Up$. Por outro lado, se p é um P-subespaço qualquer então, usando a Proposição 2.4, temos

$$U(p + Up) = Up + U(Up) \subseteq Up + p$$

Portanto, $p + Up$ é invariante. $\square$

Também poderíamos deduzir que $p + Up$ é invariante para qualquer P-subespaço p de A a partir da proposição seguinte.

Proposição 2.5 Para todo P -subespaço p de uma álgebra de Bernstein que satisfaz (2.18) tem-se

$$p + Up = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f$$

Demonstração: Seja $A = K\epsilon \oplus U_\epsilon \oplus V_\epsilon$ uma decomposição de Peirce de A . Escrevamos $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Para quaisquer $u \in U_\epsilon$, $x \in g_\epsilon$ e $w \in h_\epsilon$, segue do Corolário 2.4 que

$$\begin{aligned} ux &= -\frac{1}{2}(x - \sigma_u(x)) \in g_\epsilon + g_{f_u} \\ uw &= \frac{1}{2}(w - \tau_u(w)) \in h_\epsilon + h_{f_u} \end{aligned}$$

Portanto, $U_\epsilon g_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$ e $U_\epsilon h_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} h_f$. Daí segue que

$$U_\epsilon p_\epsilon = U_\epsilon g_\epsilon + U_\epsilon h_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f + \sum_{f \in \text{Ip}(A)} h_f = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} (g_f + h_f) = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f$$

Logo, $p_\epsilon + U_\epsilon p_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f$. Por outro lado, segue de (2.23) que $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f \subseteq p + Up$. $\square$

Dado p um P -subespaço qualquer de uma álgebra de Bernstein A , o menor subespaço vetorial de A que contém a família $\{p_f\}_{f \in \text{Ip}(A)}$ é dado por $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f$. A proposição anterior nos diz que este subespaço, no caso em que A satisfaz (2.18), é um P -subespaço e tais subespaços formam o conjunto de todos os P -subespaços invariantes de A .

2.4 Invariância em álgebras de Bernstein-Jordan

Como já tínhamos observado antes, as álgebras de Bernstein-Jordan satisfazem (2.18). Portanto os resultados da seção anterior são válidos também para esta subclasse. Assim temos o seguinte corolário do Teorema 2.1.

Corolário 2.6 Em uma álgebra de Bernstein-Jordan todos os P -subespaços têm dimensão invariante.

Também temos que se e e $f = e + u + u^2$ são dois idempotentes de uma álgebra de Bernstein-Jordan com $u \in U_\epsilon$, então a transformação de Peirce φ associada a e e a u satisfaz

$$\varphi(p_e) = p_f$$

para todo P-subespaço p . Em particular se $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ são P-subespaços então

$$\sigma(g_e) = g_f \quad (2.24)$$

$$\tau(h_e) = h_f \quad (2.25)$$

Como toda álgebra de Bernstein normal é de Bernstein-Jordan, temos que todo P-subespaço de uma álgebra de Bernstein normal tem dimensão invariante. Este fato não é verdadeiro para álgebras de Bernstein excepcionais. Com efeito, seja $A = Ke \oplus \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$ com tábua de multiplicação dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $uv = u$, $v^2 = 4u$ e os outros produtos iguais a zero. Para os idempotentes e e $f = e + u$ temos

$$V_e^2 = \langle u \rangle$$

$$V_f^2 = 0$$

Nas álgebras de Bernstein-Jordan alguns resultados da seção anterior podem ser melhorados. Isso se deve ao fato da condição $V^2 = 0$ ser mais forte que $U^2V = 0$. Uma consequência disto é a seguinte observação:

Observação 2.3 *Se m é um P-monômio não nulo de uma álgebra de Bernstein-Jordan com $\partial m \geq 2$, então existem duas possibilidades: $m = \mu\nu$ ou $m = \mu_1\mu_2$, onde $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios de grau menor que ∂m .*

Segue desta observação a seguinte proposição cujo resultado é mais forte que o do Corolário 2.3.

Proposição 2.6 *Em toda álgebra de Bernstein-Jordan tem-se $Vp \subseteq p$, para qualquer P-subespaço p .*

Demonstração: Inicialmente faremos a demonstração para um P-monômio m . Se $m \subseteq V$ então $Vm \subseteq V^2 = 0$. Assim, basta provar para P-monômios contidos em U . Faremos indução no grau do P-monômio. Para $m = U$ temos $VU \subseteq U$. Suponhamos que o resultado vale para P-monômios de grau menor ou igual a k . Seja m com $\partial m = k + 1$. Logo, pela Observação 2.3, $m = \mu\nu$, onde $\mu \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios com $\partial\mu, \partial\nu < k$. Usando a Proposição 0.4 e a hipótese de indução obtemos

$$Vm = V(\mu\nu) = \nu(\mu V) \subseteq \nu\mu = m$$

Seja agora $p = \sum_{i=1}^r m_i$ um P-subespaço, onde $m_1, \dots, m_r$ são P-monômios. Temos que

$$Vp = \sum_{i=1}^r Vm_i \subseteq \sum_{i=1}^r m_i = p$$

□

Com esta proposição, para álgebras de Bernstein-Jordan, além da questão da invariância de um P -subespaço, podemos também responder a quinta pergunta da página 14.

Proposição 2.7 *Seja p um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein-Jordan. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) p é invariante;
- (b) $Up \subseteq p$;
- (c) p é ideal.

Demonstração: Segue do Teorema 2.2 que (a) é equivalente a (b). Mostremos que (b) é equivalente a (c). Visto que $A = Ke \oplus U \oplus V$, vemos que p é ideal se, e somente se, $ep \subseteq p$, $Up \subseteq p$ e $Vp \subseteq p$. Fazendo a decomposição $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, temos $ep = g \subseteq p$ e, pela Proposição 2.6, $Vp \subseteq p$. Assim, p é ideal se, e somente se, $Up \subseteq p$. $\square$

Reunimos no corolário seguinte os resultados do Corolário 2.5 e da Proposição 2.5, restritos ao caso das álgebras de Bernstein-Jordan.

Corolário 2.7 *Seja A uma álgebra de Bernstein-Jordan. Então*

- (a) $p + Up = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} p_f$, para todo P -subespaço p de A ;
- (b) O conjunto dos P -subespaços invariantes de A é dado por $\{p + Up; p \in \mathcal{P}\}$.

2.5 Invariância em álgebras de Bernstein

Nosso principal objetivo agora é encontrar condições necessárias e suficientes para que um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein seja invariante. Infelizmente para a classe inteira das álgebras de Bernstein não foi possível achar uma condição de fácil verificação.

O próximo resultado segue do Corolário 2.6.

Corolário 2.8 *Todo P -subespaço de uma álgebra de Bernstein contido em V tem dimensão invariante.*

Demonstração: Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A relativa ao idempotente e . Consideremos a decomposição de Peirce $\bar{A} = K\bar{e} \oplus \bar{U} \oplus \bar{V}$

da álgebra de Bernstein $\overline{A} = A/L$ associada ao idempotente $\bar{e} = e + L$. Para todo P-subespaço $h(U, V)$ de A contido em V temos $h(\overline{U}, \overline{V}) \subseteq \overline{V}$ e $h(\overline{U}, \overline{V}) = (h(U, V) \oplus L)/L$. Portanto, $\dim h(U, V) = \dim h(\overline{U}, \overline{V})$. Agora, $h(\overline{U}, \overline{V})$ tem dimensão invariante, pois $\overline{A}$ é de Bernstein-Jordan. Logo, $h(U, V)$ também tem dimensão invariante. $\square$

Os P-subespaços da família a seguir estão contidos em V , logo, pelo corolário anterior, têm dimensão invariante (k e r são inteiros positivos).

$$\begin{aligned} & U^{2k} \\ & U^{(2k)}V \\ & (UV)^{2k} \\ & U^{(2k+1)}U^{(2r+1)} \\ & U^{(2k+1)}(UV^{(r)}) \\ & (UV^{(k)})(UV^{(r)}) \end{aligned}$$

O próximo corolário segue imediatamente do Corolário 2.8. Com ele podemos produzir P-subespaços contidos em U que têm dimensão invariante.

Corolário 2.9 *Seja $p = g \oplus h$ um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Então p tem dimensão invariante se, e somente se, g tem dimensão invariante.*

É claro que se p é invariante então p tem dimensão invariante. Assim, usando os métodos de fabricar P-subespaços invariantes dados na Seção 2.1, podemos produzir outros P-subespaços de dimensão invariante.

Estudamos na Subseção 2.1.2 os subespaços invariantes $S_{k+1,k}$, $S_{k,k}$ e $S_{k,k+}$. Agora, usando os Corolários 2.8 e 2.9, concluímos que $S_{k,U}$ e $S_{k,V}$ têm dimensão invariante. A partir de 2.15 e 2.16 podemos construir o seguinte diagrama, com as retas tendo o mesmo significado dos diagramas anteriores.

Figura 2.1: P-subespaços $S_{k+1,k}$, $S_{k,k}$, $S_{k,k+1}$, $S_{k,U}$ e $S_{k,V}$.

A este diagrama está associado um diagrama numérico, que se obtém substituindo cada subespaço pela sua respectiva dimensão. Este novo diagrama é um invariante da álgebra.

A próxima proposição nos diz que se um P-subespaço está contido em V então a mudança de idempotente é feita de maneira simples.

Proposição 2.8 *Se h é um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein contido em V , então $\tau(h_e) = h_f$, para quaisquer idempotentes e e f .*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Bernstein e sejam $e, f \in \text{Ip}(A)$ com $f = e + u + u^2$, onde $u \in U_e$. Consideremos a álgebra quociente $\bar{A} = A/L$. Usaremos a notação $\bar{x} = x + L$, para qualquer $x \in A$. Sejam as decomposições de Peirce $\bar{A} = K\bar{e} \oplus \bar{U}_{\bar{e}} \oplus \bar{V}_{\bar{e}} = K\bar{f} \oplus \bar{U}_{\bar{f}} \oplus \bar{V}_{\bar{f}}$ de $\bar{A}$ associadas aos idempotentes $\bar{e}$ e $\bar{f}$. Seja $\pi: A \rightarrow \bar{A}$ a projeção $\pi(x) = \bar{x}$. Segue da definição de subespaços polinomiais que

$$p(\bar{U}_{\bar{e}}, \bar{V}_{\bar{e}}) = \pi(p(U_e, V_e))$$

para qualquer P-subespaço p de A . Temos que $\bar{f} = \bar{e} + u + u^2 = \bar{e} + \bar{u} + \bar{u}^2$. Sejam $\tau: V_e \rightarrow V_f$ e $\bar{\tau}: \bar{V}_{\bar{e}} \rightarrow \bar{V}_{\bar{f}}$ os isomorfismos de espaços vetoriais definidos em (21), isto é, para todo $v \in V_e$, $\tau(v) = v - 2uv - 2u^2v$ e $\bar{\tau}(\bar{v}) = \bar{v} - 2\bar{u}\bar{v}$, visto que $u^2v \in L$. Portanto, $\bar{\tau}(\bar{v}) = \overline{\tau(v)}$. Temos que $\bar{\tau} \circ \pi|_{V_e} = \pi|_{V_f} \circ \tau$. De fato, $\bar{\tau}(\pi(v)) = \bar{\tau}(\bar{v}) = \overline{\tau(v)} = \pi(\tau(v))$. Assim,

$$\bar{\tau}(h(\bar{U}_{\bar{e}}, \bar{V}_{\bar{e}})) = \bar{\tau}\left(\pi(h(U_e, V_e))\right) = \pi\left(\tau(h(U_e, V_e))\right) = \left(\tau(h(U_e, V_e)) \oplus L\right)/L$$

Por outro lado, sendo A Bernstein-Jordan, segue de (2.25) que

$$\bar{\tau}(h(\bar{U}_{\bar{e}}, \bar{V}_{\bar{e}})) = h(\bar{U}_{\bar{f}}, \bar{V}_{\bar{f}}) = \left(h(U_f, V_f) \oplus L\right)/L$$

Concluimos que

$$\left(h(U_f, V_f) \oplus L\right)/L = \left(\tau(h(U_e, V_e)) \oplus L\right)/L \quad (2.26)$$

Portanto, se $w \in h(U_f, V_f)$ então $w + L \in \left(h(U_f, V_f) \oplus L\right)/L$. Por (2.26), existe $w' \in h(U_e, V_e)$ tal que $w + L = \tau(w') + L$, ou seja, $w - \tau(w') \in L$. Portanto, $w - \tau(w') \in V_f \cap L = 0$. Logo, $w = \tau(w')$. Assim, $h(U_f, V_f) \subseteq \tau(h(U_e, V_e))$. Mas, pelo Corolário 2.8, h tem dimensão invariante. Portanto, $h(U_f, V_f) = \tau(h(U_e, V_e))$. $\square$

A proposição seguinte e o seu corolário fornecem duas condições necessárias para a invariância de um P-subespaço nas álgebras de Bernstein.

Proposição 2.9 *Seja $p = g \oplus h$ um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Se p é invariante então $Ug \subseteq h$.*

Demonstração: Se $p(U, V)$ é um P-subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein A então $p(\overline{U}, \overline{V})$ é um P-subespaço invariante de $\overline{A} = A/L$. Como $\overline{A}$ é Bernstein-Jordan, segue da Proposição 2.7 que $\overline{U}p(\overline{U}, \overline{V}) \subseteq p(\overline{U}, \overline{V})$. Logo, $\overline{U}g(\overline{U}, \overline{V}) \subseteq h(\overline{U}, \overline{V})$. De onde segue que $Ug(U, V) \subseteq h(U, V)$. De fato, se $w \in Ug(U, V)$, então $w + L \in \overline{U}g(\overline{U}, \overline{V})$. Logo, $w + L \in h(\overline{U}, \overline{V})$. Portanto, existe $z \in h(U, V)$ tal que $w + L = z + L$, ou seja, $w - z \in L$. Logo, $w = z$. $\square$

Corolário 2.10 *Se $p = g \oplus h$ é um P-subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, então $\sigma(g_e) = g_f$, para quaisquer $e, f \in \text{Ip}(A)$.*

Demonstração: Sejam $e, f \in \text{Ip}(A)$ com $f = e + u + u^2$, onde $u \in U_e$. Como $p = g \oplus h$ é invariante, g tem dimensão invariante. Assim, basta mostrar que $\sigma(g_e) \subseteq g_f$. Seja $x \in g_e$. Logo, $\sigma(x) = x + 2ux \in g_e \oplus U_e g_e$. Pela Proposição 2.9, $g_e \oplus U_e g_e \subseteq g_e \oplus h_e = p_e$. Sendo p invariante, temos $p_e = p_f = g_f \oplus h_f$. Portanto, $\sigma(x) \in g_f \oplus h_f$. De onde segue que $\sigma(x) \in g_f$. $\square$

Agora estamos prontos para dar condições necessárias e suficientes para que um P-subespaço seja invariante numa álgebra de Bernstein arbitrária.

Teorema 2.3 *Seja $p = g \oplus h$ um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein, onde $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) p é invariante

$$(b) \begin{cases} Up \subseteq p \\ U^2h \subseteq g \\ \sigma(g_e) = g_f \text{ para quaisquer } e, f \in Ip(A) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} Uh \subseteq g \\ U^2h \subseteq g \\ g_f \subseteq p_e \text{ para quaisquer } e, f \in Ip(A) \end{cases}$$

Demonstração: Mostremos que (a) implica (b). Se p é invariante então $p_{f_u} \subseteq p_e$ para quaisquer $e \in Ip(A)$ e $u \in U_e$. Além disso, pelo Corolário 2.10, $\sigma(g_e) = g_f$. Assim, usando a Proposição 2.8, temos

$$\begin{aligned} p_{f_u} &= \sigma_u(g_e) \oplus \tau_u(h_e) \\ &= \{\sigma_u(x) + \tau_u(w) ; x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \\ &= \{(x - 2uw - 2u^2w) + (w + 2ux) ; x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\{(x - 2uw - 2u^2w) + (w + 2ux) ; x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \subseteq \{x' + w' ; x' \in g_e \text{ e } w' \in h_e\}$$

De onde segue que

$$\begin{cases} ux = \frac{1}{2}(w' - w) \\ (u + u^2)w = \frac{1}{2}(x - x') \end{cases}$$

Como, ux é um gerador de Ug_e e, pela parte (b) do Lema 0.1, $(u + u^2)w$ é um gerador de $Uh + U^2h$, tem-se que

$$\begin{cases} U_e g_e \subseteq h_e \\ U_e h_e \subseteq g_e \\ U_e^2 h_e \subseteq g_e \end{cases}$$

As duas primeiras inclusões implicam que $U_e p_e \subseteq p_e$.

Mostremos que (b) implica (c). Segue de $Up \subseteq p$ que $Uh \subseteq g$ e $Ug \subseteq h$. Dados $e, f \in Ip(A)$ temos

$$g_f = \sigma(g_e) \subseteq g_e + U_e g_e \subseteq g_e + h_e = p_e$$

Mostremos agora que (c) implica (a). Sejam $e, f \in \text{Ip}(A)$. Usando a Proposição 2.8, temos

$$p_f = g_f + \tau(h_e) \subseteq p_e + h_e + U_e h_e + U_e^2 h_e = p_e$$

Portanto, p é invariante. $\square$

Segue de $U^2 h \subseteq U^2 V$, para todo P-subespaço $h \subseteq V$, e do Corolário 2.4 que nas álgebras de Bernstein que satisfazem (2.18) as condições $U^2 h \subseteq g$ e $\sigma(g_e) = g_f$ são satisfeitas. Assim, o Teorema 2.3 é uma generalização do Teorema 2.2.

Vimos na Seção 2.4 que um P-subespaço p de uma álgebra de Bernstein-Jordan é invariante se, e somente se, p é um ideal. Em uma álgebra de Bernstein arbitrária não há relação entre ser ideal e ser P-subespaço invariante. De fato, os ideais de uma álgebra de Bernstein que são P-subespaços não são necessariamente invariantes. Consideremos, por exemplo, o ideal $I_e = \left[U_e V_e + V_e \left(U_e (U_e V_e) \right) \right] \oplus U_e (U_e V_e)$, e a álgebra do exemplo 2.3. Temos que I_e não é invariante, pois $U_e V_e = 0$, logo, $I_e = 0$, mas para o idempotente $f = e + u_1 + u_2 + v_1 + v_2 + 2v_3$, $U_f V_f = \langle u_3 \rangle$, assim, $I_f \neq 0$. Também nem todo P-subespaço invariante é ideal, por exemplo, o P-subespaço $\tilde{V} = (UV + U^2 V) \oplus V$ é invariante, mas na álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$ com tábua de multiplicação dada por $eu = \frac{1}{2}u$, $v^2 = u$ e os outros produtos nulos, $\tilde{V}$ não é ideal, pois $A\tilde{V} = \langle u \rangle \not\subseteq \tilde{V}$ (ver também [8]).

Observemos que a hipótese $\sigma(g_e) = g_f$ não pode ser retirada da parte (b) do Teorema 2.3, pois, caso contrário, todos os P-subespaços que são ideais de uma álgebra de Bernstein seriam invariantes.

Embora um P-subespaço invariante $p = g \oplus h$, com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, não seja necessariamente um ideal de uma álgebra de Bernstein A , se $\sigma(h) \geq 2$ então p é um ideal de A^2 , conforme podemos ver a partir do próximo corolário.

Corolário 2.11 *Se p é um P-subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein A , então $A^2 p \subseteq p$.*

Demonstração: Escrevamos $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Já sabemos, da parte (a) do Teorema 2.3 que $U^2 p, U^2 h \subseteq p$. Usando a Proposição 0.1, temos

$$U^2 g \subseteq U(Ug) \subseteq Uh \subseteq p$$

Como $A = Ke \oplus U \oplus U^2$ e $ep = g$, segue-se que $A^2 p \subseteq p$. $\square$

Corolário 2.12 *Se p é um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein nuclear então p é um ideal.*

O próximo resultado é uma generalização da Proposição 0.2. Faremos a prova deste caso mais geral embora não haja uma diferença essencial entre as duas demonstrações.

Proposição 2.10 *Para todo P -subespaço $g \subseteq U$ que satisfaz $\sigma(g_\epsilon) = g_f$, para quaisquer $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$, e para todo P -subespaço $h \subseteq V$, tem-se*

- (a) $\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f = g \cap \text{ann}U;$
- (b) $\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} h_f = h \cap \text{ann}(U + U^2);$
- (c) $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f = g \oplus Ug;$
- (d) $\sum_{f \in \text{Ip}(A)} h_f = (Uh + U^2h) \oplus h.$

Demonstração:

(a) Seja $\epsilon \in \text{Ip}(A)$ fixo. Se $x \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$ então $x \in g_\epsilon$. Mostremos que $x \in \text{ann}U_\epsilon$. De fato, temos que $x \in g_{f_u}$, para todo $u \in U_\epsilon$. Logo, existe $y \in g_\epsilon$ tal que $x = \sigma_u(y) = y + 2uy$. De onde segue que $x = y$ e $uy = 0$. Portanto, $x \in \text{ann}U_\epsilon$. Assim,

$$\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f \subseteq g_\epsilon \cap \text{ann}U_\epsilon$$

Por outro lado, se $x \in g_\epsilon \cap \text{ann}U_\epsilon$ então, para todo $u \in U_\epsilon$, tem-se $x = x + 2ux = \sigma_u(x) \in g_{f_u}$. Logo $x \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$. Portanto,

$$g_\epsilon \cap \text{ann}U_\epsilon \subseteq \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$$

(b) Se $w \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} h_f$ então, para todo $u \in U_\epsilon$, segue da Proposição 2.8 que $w \in h_{f_u} = \tau_u(h_\epsilon)$.

Assim, existe $v \in h_\epsilon$ tal que $w = \tau_u(v) = v - 2(u + u^2)v$. Portanto, $w = v$ e $(u + u^2)v = 0$. Usando o Lema 0.1, concluímos que $v \in \text{ann}(U + U^2)$. Agora, se $w \in h_\epsilon \cap \text{ann}(U_\epsilon + U_\epsilon^2)$ então $w = w - 2(u + u^2)w = \tau_u(w) \in h_{f_u}$. Logo, $w \in \bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} h_f$.

(c) Para todo $u \in g_\epsilon$, temos $\sigma_u(g_\epsilon) \subseteq g_\epsilon + U_\epsilon g_\epsilon$. Portanto,

$$\sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f = \sum_{u \in U_\epsilon} g_{f_u} = \sum_{u \in U_\epsilon} \sigma_u(g_\epsilon) \subseteq g_\epsilon + U_\epsilon g_\epsilon$$

Por outro lado, é claro que $g_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$ e se $x \in g_\epsilon$ então $ux = \frac{1}{2}(\sigma_u(x) - x) \in g_{f_u} + g_\epsilon$. Portanto,

$$U_\epsilon g_\epsilon \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$$

(d) Segue de $h_{f_u} = \tau_u(h_\epsilon) \subseteq (U_\epsilon h + U_\epsilon^2 h_\epsilon) \oplus h_\epsilon$ que

$$\sum_{f \in \text{Ip}(A)} h_f \subseteq (U_\epsilon h_\epsilon + U_\epsilon^2 h_\epsilon) \oplus h_\epsilon$$

Observemos que $(u + u^2)w = \frac{1}{2}(w - \tau_u(w)) \in h_\epsilon + h_{f_u}$, para todo $w \in h_\epsilon$. Como $(u + u^2)w$ é um gerador de $(U_\epsilon + U_\epsilon^2)h_\epsilon$, temos que

$$h_\epsilon \oplus (U_\epsilon + U_\epsilon^2)h_\epsilon \subseteq h_\epsilon + \sum_{u \in U_\epsilon} h_{f_u} \subseteq \sum_{f \in \text{Ip}(A)} h_f \quad \square$$

Nas hipóteses da proposição anterior, temos

$$\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f = g \cap \text{ann}U = (g \cap U) \cap \text{ann}U = g \cap (U \cap \text{ann}U) = g \cap L$$

Isto prova o seguinte corolário.

Corolário 2.13 *Seja $p = g \oplus h$ um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Se p é invariante então $\bigcap_{f \in \text{Ip}(A)} g_f = g \cap L$.*

O próximo resultado segue da parte (c) da Proposição 2.10.

Corolário 2.14 *Seja $g \subseteq U$ um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein. Então $\sigma(g_\epsilon) = g_f$ para quaisquer $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$ se, e somente se, $g \oplus Ug$ é invariante.*

Demonstração: Se $\sigma(g_\epsilon) = g_f$ para quaisquer $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$, então $g \oplus Ug = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} g_f$.

Logo, $g \oplus Ug$ é invariante. Reciprocamente, se $g \oplus Ug$ é invariante então, pelo Teorema 2.3, $\sigma(g_\epsilon) = g_f$. $\square$

Corolário 2.15 *Se $g \oplus h$ é um P -subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, então $g \oplus Ug$ também é invariante.*

Demonstração: Se $g \oplus h$ é invariante então $\sigma(g_\epsilon) = g_f$. Pelo corolário anterior, $g \oplus Ug$ é invariante. $\square$

A parte (d) da Proposição 2.10 implica no seguinte corolário.

Corolário 2.16 *Para todo P-subespaço $h \subseteq V$ de uma álgebra de Bernstein, tem-se que $(Uh + U^2h) \oplus h$ é invariante.*

O próximo corolário descreve o conjunto dos P-subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein arbitrária.

Corolário 2.17 *O conjunto dos P-subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein é dado por*

$$\{p + Up + U^2p; p = g + h \in \mathcal{P}, h \subseteq V, g \subseteq U, \sigma(g_\epsilon) = h_f, \epsilon, f \in \text{Ip}(A)\}$$

Demonstração: Seja $p = g \oplus h$ um P-subespaço de uma álgebra de Bernstein A com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$. Temos que $p + Up + U^2p \subseteq p + A^2p$. Assim, se p é invariante então, pelo Corolário 2.11, $p = p + Up + U^2p$ e $\sigma(g_\epsilon) = g_f$, para quaisquer $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$. Por outro lado, se $\sigma(g_\epsilon) = g_f$ então $g \oplus Ug$ é invariante. Logo, $U^2g \subseteq A^2g \cap U \subseteq g$ e, assim,

$$p + Up + U^2p = g + Ug + h + Uh + U^2h$$

Portanto, pelo Corolário 2.16, $p + Up + U^2p$ é invariante. $\square$

Segue dos Corolários 2.3 e 2.4 que este último resultado é uma generalização do Corolário 2.5.

2.5.1 P-subespaços de grau ≤ 3

Reunimos aqui os todos os P-subespaços de uma álgebra de Bernstein que têm grau menor ou igual a 3. Eles estão separados em duas listas: a dos que têm dimensão invariante e a dos que não têm dimensão invariante. Dentre os que têm dimensão invariante destacamos aqueles que são invariantes. O trabalho já foi quase todo feito nas seções anteriores.

Teorema 2.4 *Se $A = Ke \oplus U \oplus V$ é uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, ω) então*

(1) *os subespaços a seguir têm dimensão invariante e os marcados com $\star$ são invariantes.*

Grupo I :

$$\begin{aligned} U \\ UV + V^2 \\ U^3 + V^3 + (UV)V + U^2V \\ UV + U^2V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^2 + U^3 + (UV)V + V^3 \\ V^2 + (UV)V + V^3 \\ U^2V + (UV)V + V^3 \end{aligned}$$

Grupo II :

$$\begin{aligned} V \\ U(UV) \end{aligned}$$

$$U^2$$

Grupo III :

$$\begin{aligned} \star U \oplus V \\ \star U \oplus U^2 \\ U \oplus U(UV) \\ \star (UV + V^2) \oplus V \\ \star (UV + V^2) \oplus U^2 \\ \star (UV + V^2) \oplus U(UV) \\ (U^3 + V^3 + (UV)V + U^2V) \oplus V \\ \star (U^3 + V^3 + (UV)V + U^2V) \oplus U^2 \\ \star (U^3 + V^3 + (UV)V + U^2V) \oplus U(UV) \\ \star (UV + U^2V) \oplus V \\ \star (UV + U^2V) \oplus U^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star (UV + U^2V) \oplus U(UV) \\ (V^2 + U^3 + (UV)V + V^3) \oplus V \\ \star (V^2 + U^3 + (UV)V + V^3) \oplus U^2 \\ \star (V^2 + U^3 + (UV)V + V^3) \oplus U(UV) \\ (V^2 + (UV)V + V^3) \oplus V \\ (V^2 + (UV)V + V^3) \oplus U^2 \\ (V^2 + (UV)V + V^3) \oplus U(UV) \\ (U^2V + (UV)V + V^3) \oplus V \\ (U^2V + (UV)V + V^3) \oplus U^2 \\ (U^2V + (UV)V + V^3) \oplus U(UV) \end{aligned}$$

(2) os subespaços a seguir não tem dimensão invariante.

Grupo IV :

UV	$V^2 + U^3 + (UV)V$
U^3	$(UV)V + V^3$
$U^3 + (UV)V$	$U^3 + U^2V + (UV)V$
$U^3 + V^3$	V^3
$U^3 + (UV)V + V^3$	U^2V
$(UV)V$	$V^2 + V^3$
V^2	$U^2V + V^3$
$V^2 + U^3$	$V^2 + U^3 + V^3$
$(UV)V + V^2$	$U^3 + U^2V + V^3$
$U^2V + (UV)V$	$U^3 + U^2V$

Grupo V :

$UV \oplus V$	$(V^2 + U^3 + (UV)V) \oplus V$
$UV \oplus U^2$	$(V^2 + U^3 + (UV)V) \oplus U^2$
$UV \oplus U(UV)$	$(V^2 + U^3 + (UV)V) \oplus U(UV)$
$U^3 \oplus V$	$((UV)V + V^3) \oplus V$
$U^3 \oplus U^2$	$((UV)V + V^3) \oplus U^2$
$U^3 \oplus U(UV)$	$((UV)V + V^3) \oplus U(UV)$
$(U^3 + (UV)V) \oplus V$	$(U^3 + U^2V + (UV)V) \oplus V$
$(U^3 + (UV)V) \oplus U^2$	$(U^3 + U^2V + (UV)V) \oplus U^2$
$(U^3 + (UV)V) \oplus U(UV)$	$(U^3 + U^2V + (UV)V) \oplus U(UV)$
$(U^3 + V^3) \oplus V$	$V^3 \oplus V$
$(U^3 + V^3) \oplus U^2$	$V^3 \oplus U^2$
$(U^3 + V^3) \oplus U(UV)$	$V^3 \oplus U(UV)$
$(U^3 + (UV)V + V^3) \oplus V$	$U^2V \oplus V$
$(U^3 + (UV)V + V^3) \oplus U^2$	$U^2V \oplus U^2$
$(U^3 + (UV)V + V^3) \oplus U(UV)$	$U^2V \oplus U(UV)$
$(UV)V \oplus V$	$(V^2 + V^3) \oplus V$
$(UV)V \oplus U^2$	$(V^2 + V^3) \oplus U^2$
$(UV)V \oplus U(UV)$	$(V^2 + V^3) \oplus U(UV)$
$V^2 \oplus V$	$(U^2V + V^3) \oplus V$
$V^2 \oplus U^2$	$(U^2V + V^3) \oplus U^2$

$$\begin{array}{ll}
V^2 \oplus U(UV) & (U^2V + V^3) \oplus U(UV) \\
(V^2 + U^3) \oplus V & (V^2 + U^3 + V^3) \oplus V \\
(V^2 + U^3) \oplus U^2 & (V^2 + U^3 + V^3) \oplus U^2 \\
(V^2 + U^3) \oplus U(UV) & (V^2 + U^3 + V^3) \oplus U(UV) \\
((UV)V + V^2) \oplus V & (U^3 + U^2V + V^3) \oplus V \\
((UV)V + V^2) \oplus U^2 & (U^3 + U^2V + V^3) \oplus U^2 \\
((UV)V + V^2) \oplus U(UV) & (U^3 + U^2V + V^3) \oplus U(UV) \\
(U^2V + (UV)V) \oplus V & (U^3 + U^2V) \oplus V \\
(U^2V + (UV)V) \oplus U^2 & (U^3 + U^2V) \oplus U^2 \\
(U^2V + (UV)V) \oplus U(UV) & (U^3 + U^2V) \oplus U(UV)
\end{array}$$

Demonstração: Vimos na Seção 2.1 que os P-subespaços marcados com $\star$ são invariantes. Utilizando estes P-subespaços e o Corolário 2.9 obtemos que os P-subespaços do grupo I têm dimensão invariante. Os subespaços do grupo II têm dimensão invariante, pois estão contidos em V . Cada P-subespaço do Grupo III é uma soma de um P-subespaço do grupo I com um do grupo II ; os que não estão marcados com $\star$ não são invariantes, visto que não satisfazem a primeira condição da parte (b) do Teorema 2.3. Nos exemplos 2.2, 2.3 e 2.4 vimos que os P-subespaços de grupo IV não têm dimensão invariante. Os subespaços do grupo V são somas dos subespaços do grupo IV com subespaços do grupo II e, portanto, não têm dimensão invariante. $\square$

Capítulo 3

Invariância de P-subespaços em outras álgebras báricas

Consideraremos neste capítulo algumas classes de álgebras báricas (A, ω) sobre um corpo K que possuem uma decomposição de Peirce análoga à das álgebras de Bernstein. Na Seção 3.2 estudaremos um par (A, λ) , onde λ é uma forma linear. Logo, (A, λ) não é necessariamente uma álgebra bárica, mas mesmo assim possui uma decomposição de Peirce da forma $A = Ke \oplus U \oplus V$; no caso em que $\lambda(A^2) = 0$, a decomposição é feita com relação a um elemento nilpotente.

Para estas álgebras usamos a mesma definição de P-subespaço dada para álgebras de Bernstein e adotamos as mesmas notações: $p = p(U, V)$, ∂m , $o(p)$, $\mathcal{P}$, etc.

Na Seção 3.1 consideramos a questão da invariância de P-subespaços nas train álgebras de posto 3, que são álgebras báricas (A, ω) sobre um corpo K satisfazendo a equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ com $\gamma \in K$. A classe das train álgebras de posto 3 é outra classe que contém as álgebras de Bernstein-Jordan. De fato, fazendo $\gamma = 0$ na equação anterior obtemos $x^3 = \omega(x)x^2$. Pela Proposição 0.3, A é Bernstein-Jordan.

As álgebras consideradas na Seção 3.2 satisfazem a equação $x^3 = \lambda(x)x^2$. Elas são, portanto, uma generalização das álgebras de Bernstein-Jordan.

Nas seções 3.3 e 3.4 estudamos os P-subespaços de álgebras báricas satisfazendo as equações $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ e $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$, respectivamente.

3.1 Train álgebras de posto 3

Seja (A, ω) uma álgebra bária de dimensão finita sobre um corpo K com $\text{car}(K) \neq 2$. Dizemos que (A, ω) é uma *train álgebra* se

$$a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a = 0$$

para todo $a \in A$. Os escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ satisfazem $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$, pois se $a \in A$ é tal que $\omega(a) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a) \\ &= \omega(a)^n (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) \end{aligned}$$

Um polinômio da forma

$$p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$$

cujos coeficientes satisfazem $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$ é chamado de *train polinômio de grau n* . Em uma train álgebra existe um único train polinômio $p(x)$ de menor grau que satisfaz $p(a) = 0$ para todo $a \in A$. O grau deste polinômio é chamado de *posto* de A . Uma train álgebra de posto n satisfaz $x^n = 0$ para todo $x \in N$. De onde concluímos que ω é o único homomorfismo de A em K . Dizemos então que N é o núcleo de A .

As train álgebras de posto 3 satisfazem uma identidade da forma

$$x^3 - (1 + \gamma) \omega(x) x^2 + \gamma \omega(x)^2 x = 0$$

com γ em K . Não consideraremos as train álgebras de posto 3 para as quais $\gamma = \frac{1}{2}$. Quando $\gamma \neq \frac{1}{2}$ a train álgebra correspondente tem elementos idempotentes de peso 1. De fato, se $d \in A$ e $\omega(d) = 1$ então $e = \frac{1}{1-2\gamma}(d^2 - 2\gamma d)$ satisfaz $e^2 = e$ e $\omega(e) = 1$ (ver [14]).

Para cada idempotente e de peso 1, temos a seguinte decomposição

$$A = Ke \oplus N = Ke \oplus U_e \oplus V_e$$

chamada decomposição de Peirce de A relativa a e , onde

$$\begin{aligned} U_e &= \{u \in A : 2eu = u\} \\ V_e &= \{v \in A : ev = \gamma v\} \end{aligned}$$

são os subespaços próprios do operador linear $L_e: N \rightarrow N$ definido por $L_e(x) = ex$, correspondente aos valores próprios distintos $\frac{1}{2}$ e γ . Tais subespaços satisfazem as relações

$$U_e^2 \subseteq V_e \quad U_e V_e \subseteq U_e \quad V_e^2 = 0 \quad (3.1)$$

Todo elemento do núcleo N de uma train álgebra de posto 3 satisfaz

$$x^3 = 0 \quad (3.2)$$

Portanto, os elementos do núcleo de uma train álgebra de posto 3 também satisfazem as identidades (30) e (31). Usando (31) e (3.2) obtemos

$$(x^2)^2 = 0$$

para qualquer $x \in N$. Assim, as identidades (3) e (4) também são satisfeitas para os elementos de N .

Agora, se $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$, então segue de (3.1) e (31) que

$$\begin{aligned} v^2 &= 0 \\ u(uv) &= 0 \\ v(vu) &= 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$.

O conjunto dos idempotentes de A de peso 1 é dado por

$$Ip(A) = \{\epsilon + u + \theta u^2 : u \in U_\epsilon\}$$

onde $\theta = (1 - 2\gamma)^{-1}$. Para um outro idempotente $f = \epsilon + u_0 + \theta u_0^2$ de A , com $u_0 \in U_\epsilon$, temos a decomposição de Peirce $A = K \oplus U_f \oplus V_f$ associada a f , onde

$$\begin{aligned} U_f &= \{u + 2\theta u_0 u : u \in U_\epsilon\} \\ V_f &= \{v - 2\theta u_0 v : v \in V_\epsilon\} \end{aligned}$$

e as aplicações lineares $\sigma: U_\epsilon \rightarrow U_f$, $\tau: V_\epsilon \rightarrow V_f$, $\psi: U_\epsilon \rightarrow V_\epsilon$ e $\varphi: A \rightarrow A$ definidas por

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= u + 2\theta u_0 v \\ \tau(v) &= v - 2\theta u_0 v \\ \psi(u) &= u - 2\theta^2 u_0^2 u \\ \varphi(\alpha\epsilon + u + v) &= \alpha\epsilon + \sigma(u) + \tau(v) \end{aligned}$$

onde $u \in U$ e $v \in V$, são isomorfismos de espaços vetoriais. A proposição seguinte é análoga a Proposição 2.3.

Proposição 3.1 *Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma train álgebra de posto 3. As funções σ, τ e ψ satisfazem as relações*

$$\begin{aligned}\sigma(u_1)\sigma(u_2) &= \tau(u_1u_2) \\ \sigma(u)\tau(v) &= \sigma(\psi(u)v)\end{aligned}$$

para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$.

Agora, procedendo de maneira inteiramente análoga ao que foi feito nas seções 2.3 e 2.4 obtemos, quanto a invariância de P -subespaços, os mesmos resultados que foram obtidos para álgebras de Bernstein-Jordan. Reunimos a seguir, num único enunciado, tais resultados.

Teorema 3.1 *Seja A uma train álgebra de posto 3. Então*

- (1) *Todo P -subespaço p de A satisfaz $\varphi(p_e) = p_f$. Em particular, todo P -subespaço tem dimensão invariante.*
- (2) *Para todo P -subespaço p de A as afirmações seguintes são equivalentes:*
 - (2.1) *p é invariante;*
 - (2.2) *$Up \subseteq p$;*
 - (2.3) *p é ideal;*
- (3) *O conjunto dos P -subespaços invariantes de A é dado por $\{p + Up; p \in \mathcal{P}\}$.*

3.2 Álgebras satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$

Estudaremos nesta seção o problema da invariância de P -subespaços de uma álgebra A sobre um corpo K satisfazendo a identidade

$$x^3 = \lambda(x)x^2 \tag{3.3}$$

onde λ é uma forma linear. Assim, todo elemento do núcleo de λ satisfaz

$$x^3 = 0 \tag{3.4}$$

Portanto, temos também as linearizações desta identidade

$$x_1^2x_2 + 2x_1(x_1x_2) = 0 \tag{3.5}$$

$$(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 = 0 \tag{3.6}$$

A existência de idempotentes não nulos em A depende de λ . Por exemplo, se λ é tal que $\lambda(x^2) = 0$ para todo $x \in A$ então A não possui idempotentes não nulos. Com efeito, se $e = e^2 \in A$ então $e = e^3 = \lambda(e)e^2 = 0$. Exemplos desta situação podem ser encontrados em [12]. O estudo desta álgebra é então dividido em dois: quando $\lambda(A^2) = 0$ e quando $\lambda(A^2) \neq 0$.

3.2.1 O caso $\lambda(A^2) = 0$

Nesta seção, consideraremos que $\text{car}(K) \neq 2, 3$ e que o par (A, λ) satisfaz

$$\lambda(A^2) = 0 \quad (3.7)$$

Estas álgebras são estudadas em [12]. Faremos aqui um resumo das suas principais propriedades.

Existe pelo menos um elemento nilpotente z em A tal que $z^2 = 0$ e $\lambda(z) = 1$. Cada um destes elementos determina uma decomposição $A = Kz \oplus U \oplus V$ chamada de *decomposição de Peirce* de A relativa a z , onde U e V são subespaços que satisfazem $N = U \oplus V$ e

$$\begin{aligned} U &= \{u \in N; zu = 0\} \\ V &= \{v \in N; zv = v\} \end{aligned}$$

Além disso, temos as seguintes relações

$$UV \subseteq U, \quad U^2 \subseteq V, \quad V^2 = 0$$

Quando houver necessidade de especificar a que elemento z estão associados os subespaços U e V escreveremos U_z e V_z .

Os elementos $u \in U$ e $v \in V$ satisfazem as identidades

$$u(uv) = (uv)v = v^2 = 0 \quad (3.8)$$

Da linearização de (3.8), obtemos

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0 \quad (3.9)$$

$$(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$v_1v_2 = 0 \quad (3.11)$$

para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U$ e $v, v_1 \in V$.

O próximo lema segue imediatamente de (3.9) e (3.10).

Lema 3.1 Se $X, X_1, X_2 \subseteq U$ e $W, W_1, W_2 \subseteq V$ são subespaços de $A = Kz \oplus U \oplus V$, então

$$(a) X_1(X_2W) = X_2(X_1W);$$

$$(b) W_1(W_2X) = W_2(W_1X).$$

A linearização de (3.3), para $x, y \in A$, é dada por

$$x^2y + 2x(xy) = \lambda(y)x^2 + 2\lambda(x)xy \quad (3.12)$$

Substituindo-se, nesta identidade, y por x^2 temos que

$$(x^2)^2 = 0 \quad (3.13)$$

para todo $x \in N$. Obtemos das linearizações de (3.13) as seguintes identidades:

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \quad (3.14)$$

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \quad (3.15)$$

$$(x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_1x_4)(x_2x_3) = 0 \quad (3.16)$$

para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in N$.

A proposição seguinte é o Corolário 2.3 de [12].

Proposição 3.2 As seguintes condições são equivalentes:

(a) A forma linear λ não é única;

(b) A é uma zero álgebra;

(c) $V = 0$.

Portanto, o caso em que λ não é única não tem interesse. Assim, vamos considerar que a forma linear λ é única e diremos que N é o *núcleo* de A .

O conjunto dos elementos nilpotentes de A é dado por

$$\text{Nilp}(A) = \{z + u - \frac{1}{2}u^2z : u \in U_z\}$$

Se $f = z + u - \frac{1}{2}u^2$ é outro elemento nilpotente de A com $u \in U_z$, então

$$U_f = \{x - ux : x \in U_z\}$$

$$V_f = \{v + uv : v \in V_z\}$$

As funções lineares $\sigma: U_z \rightarrow U_f$, $\tau: V_z \rightarrow V_f$ e $\varphi: A \rightarrow A$ definidas por

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x - ux \\ \tau(v) &= v + uv \\ \varphi(\alpha z + x + v) &= \alpha f + \sigma(x) + \tau(v)\end{aligned}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais. A função φ é chamada de *transformação de Peirce* de A associada a z e a u . Em [12] os autores estudam várias propriedades das transformações de Peirce.

A demonstração da próxima proposição é inteiramente análoga a da Proposição 2.6.

Proposição 3.3 *Para todo P -subespaço p de A tem-se $Vp \subseteq p$.*

A proposição seguinte corresponde à Proposição 2.3 e pode ser demonstrada de maneira análoga utilizando-se a função $\psi: U_z \rightarrow U_z$ definida por $\psi(x) = x - \frac{1}{2}u^2x$. Mas faremos aqui outra demonstração.

Proposição 3.4 *Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ e $\nu, \nu_1, \nu_2 \subseteq V$ P -monômios de $A = Kz \oplus U \oplus V$. Então toda transformação de Peirce φ de A satisfaz:*

- (a) $\varphi(\mu_1\mu_2) = \varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)$;
- (b) $\varphi(\nu_1\nu_2) = \varphi(\nu_1)\varphi(\nu_2) = 0$;
- (c) $\varphi(\mu\nu) = \varphi(\mu)\varphi(\nu)$.

Demonstração: Seja φ a transformação de Peirce de A associada a $z \in \text{Nilp}(A)$ e a $u_0 \in U$. Se $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in V$ então

$$\begin{aligned}\varphi(u_1u_2) &= \varphi(u_1)\varphi(u_2) \\ \varphi(v_1v_2) &= \varphi(v_1)\varphi(v_2)\end{aligned}$$

pela Proposição 3.2 de [12]. Destas identidades decorrem (a) e (b). Resta mostrar a parte (c). Segue das identidades (3.9), (3.11) e (3.15) que

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(uv) + \frac{1}{2}u_0^2(uv) \quad (3.17)$$

para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$. Mostremos agora que se $u \in \mu$ e $v \in \nu$ então

$$u_0^2(uv) \in \varphi(\mu\nu) \cap \varphi(\mu)\varphi(\nu) \quad (3.18)$$

Pela Proposição 3.3, temos que $u_0^2(uv) \in V(\mu\nu) \subseteq \mu\nu$. Usando (3.4) e (3.9), obtemos a identidade $u_0(u_0^2(uv)) = 0$. Portanto, $u_0^2(uv) = \varphi(u_0^2(uv))$. De onde segue que $u_0^2(uv) \in \varphi(\mu\nu)$. Por outro lado, $u_0^2(uv) = -(u_0^2u)v$ por (3.10). Assim, $u_0^2(uv) = -\varphi(u_0^2u)\varphi(v)$, visto que $u_0(u_0^2u) = (u_0v)(u_0^2u) = 0$ por (3.9) e (3.16). Portanto, usando novamente a Proposição 3.3, temos

$$u_0^2(uv) \in \varphi(V\mu)\varphi(\nu) \subseteq \varphi(\mu)\varphi(\nu)$$

o que conclui a prova de (3.18). Agora, (3.17) e (3.18) implicam que $\varphi(\mu\nu) = \varphi(\mu)\varphi(\nu)$. $\square$

Os dois lemas seguintes também são análogos a resultados similares das seções anteriores.

Lema 3.2 *Se $h \subseteq V$ é um P -subespaço de A com $o(p) \geq 2$, então existe um P -subespaço $g \subseteq U$ tal que $h = Ug$.*

Lema 3.3 *Todo P -subespaço de A satisfaz $U(Up) \subseteq p$.*

Agora, do mesmo modo como fizemos na seção anterior, reuniremos todos os resultados sobre invariância de um P -subespaço em um único enunciado, cuja demonstração é completamente análoga à que foi feita nas seções 2.3 e 2.4.

Teorema 3.2 *Seja (A, λ) satisfazendo $\lambda(A^2) = 0$ onde λ é uma forma linear em A . Então*

- (1) *Todo P -subespaço p de A satisfaz $\varphi(p_e) = p_f$. Em particular todo P -subespaço tem dimensão invariante.*
- (2) *Para todo P -subespaço p de A as afirmações seguintes são equivalentes:*
 - (2.1) *p é invariante;*
 - (2.2) *$Up \subseteq p$;*
 - (2.3) *p é ideal;*
- (3) *O conjunto dos P -subespaços invariantes de A é dado por $\{p + Up; p \in \mathcal{P}\}$.*

3.2.2 O caso $\lambda(A^2) \neq 0$

Uma generalização das álgebras de Bernstein-Jordan são as álgebras de Bernstein-Jordan fracas definidas em [7]. Segue do Teorema 2.8 de [7] que uma K -álgebra A é Bernstein-Jordan fraca se, e somente se, existe uma forma linear λ tal que, para todo $x \in A$,

$$\begin{cases} x^3 = \lambda(x)x^2 \\ \lambda(A^2) \neq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Em [7] também é dado um exemplo de uma tal álgebra que não é associativa, não é bária e não é Jordan.

Enunciaremos a seguir as propriedades das quais necessitaremos para o estudo dos P-subespaços nas álgebras que satisfazem (3.19). Maiores detalhes podem ser encontrados em [7].

Em A sempre existe um idempotente não nulo e , tal idempotente determina uma decomposição de A da forma $A = Ke \oplus \ker \lambda = Ke \oplus U \oplus V$, chamada de *decomposição de Peirce* de A , onde $N = \ker \lambda = U \oplus V$ e

$$\begin{aligned} U &= \{u \in N : eu = \tfrac{1}{2}u\} \\ V &= \{v \in N : ev = 0\} \end{aligned}$$

Os subespaços U e V satisfazem

$$UV \subseteq U, \quad U^2 \subseteq V, \quad V^2 \subseteq Ke$$

Escreveremos U_e e V_e quando quisermos deixar claro que a decomposição de Peirce foi feita usando-se o particular idempotente e .

Observemos que N não é necessariamente um ideal. O Teorema 2.9 de [7] nos diz que N é um ideal se, e somente se, (A, λ) é Bernstein-Jordan.

Nas álgebras que satisfazem (3.19) não podemos escrever todos os P-subespaços na forma $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, pois podemos ter, por exemplo, $p = Ke \oplus g \oplus h$.

Para os elementos $u, u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ temos as seguintes identidades.

$$u^2v = 0 \quad (3.20)$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0 \quad (3.21)$$

Segue de (3.20) que $U^2V = 0$ e

$$(u_1u_2)v = 0 \quad (3.22)$$

O conjunto dos elementos idempotentes não nulos de A é dado por

$$\text{Ip}(A) = \{e + u + u^2; u \in U_e\}$$

e se $f = e + u + u^2$ é outro idempotente de A , com $u \in U_e$, então

$$\begin{aligned} U_f &= \{x + 2ux; x \in U_e\} \\ V_f &= \{v - 2uv; v \in V_e\} \end{aligned}$$

As funções lineares $\sigma: U_e \rightarrow U_f$, $\tau: V_e \rightarrow V_f$ e $\varphi: A \rightarrow A$ definidas por

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x + 2ux \\ \tau(v) &= v - 2uv \\ \varphi(\alpha e + x + v) &= \alpha f + \sigma(x) + \tau(v) \end{aligned}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais e φ é chamada de *transformação de Peirce* de A associada a e e a u .

Foi provado em [7] que os P-subespaços U , V , UV , U^2 e V^2 têm dimensão invariante. Provaremos, procedendo como nas seções anteriores, que isto ocorre para todos os P-subespaços de A .

Como $V^2 \subseteq K\epsilon$, existem duas possibilidades: $V^2 = 0$ ou $V^2 = K\epsilon$. Se $V^2 = 0$ então N é ideal de A e, portanto, (A, λ) é Bernstein-Jordan. Neste caso, o estudo da invariância já foi feito. Assim, de agora em diante, assumiremos que $V^2 = K\epsilon$.

Inicialmente observemos que se m é um P-monômio com $\partial m \geq 3$ e $m \subseteq V^2$ então $m(U_e, V_e) = 0$. De fato, existem $\nu_1, \nu_2 \subseteq V$ com, por exemplo, $\partial \nu_2 \geq 2$ tal que $n = \nu_1 \nu_2$. Temos que $\nu_2 \subseteq U^2$, visto que $\partial \nu_2 \geq 2$. Portanto, $m \subseteq U^2 V = 0$. Além disso, para quaisquer P-subespaços $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ temos

$$\begin{aligned} gV^2 &= gK\epsilon = g \\ hV^2 &= hK\epsilon = 0 \end{aligned}$$

Assim, dado um P-monômio m com $\partial m \geq 2$, para o restante desta seção, basta considerar somente três possibilidades: $m = \mu\nu$, $m = \mu_1\mu_2$ ou $m = V^2 = K\epsilon$, onde $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios de grau menor ou igual a ∂m .

Lema 3.4 *Para todo P-subespaço p de uma álgebra que satisfaz (3.19) tem-se $U^2 p \subseteq p$.*

Demonstração: Basta provar o resultado para um P-monômio genérico m . Temos que $U^2 U \subseteq U$ e $U^2 V = 0$. Logo, se $m = U$ ou $m = V$ então $U^2 m \subseteq m$. Se $m = V^2$ ou

$m = \mu_1\mu_2$, onde $\mu_1, \mu_2 \subseteq U$ são P-monômios de A então $U^2m = 0$. Falta o caso em que $m = \mu\nu$, onde $\mu \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios. Temos que U^2m é gerado por elementos da forma $u_1^2(u_2v)$ com $u_1 \in U$, $u_2 \in \mu$ e $v \in \nu$. Segue de (3.6) e (3.20) que

$$u_1^2(u_2v) = -(u_1^2u_2)v \in (U^2\mu)\nu$$

Agora, usando indução em ∂m , obtemos $U^2m \subseteq m$. □

Proposição 3.5 *Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ and $\nu \subseteq V$ P-monômios de uma álgebra que satisfaz (3.19). Então toda transformação de Peirce φ de A satisfaz*

$$(a) \quad \varphi(\mu_1\mu_2) = \varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)$$

$$(b) \quad \varphi(V^2) = \varphi(V)\varphi(V)$$

$$(c) \quad \varphi(\mu\nu) = \varphi(\mu)\varphi(\nu)$$

Demonstração: Seja φ a transformação de Peirce de A associada a $e \in \text{Ip}(A)$ e a u_0 . É claro, a partir da Proposição 4.4 de [7], que $\varphi(\mu_1\mu_2) = \varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)$ e $\varphi(V_e^2) = \varphi(V_e)\varphi(V_e)$. Agora, sejam $u \in \mu$ e $v \in \nu$. As identidades (3.5), (3.6) e (3.22) implicam que $(u_0u)(u_0v) = \frac{1}{2}(u_0^2u)v$. Então, usando (3.21) e (3.22), obtemos

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(uv) - 2(u_0^2u)v \quad (3.23)$$

Segue de (3.4) e (3.21) que

$$u_0(u_0^2u) = 0 \quad (3.24)$$

para qualquer $u \in U_e$. De (3.6) e (3.20) temos que $u_0((u_0^2u)v) = -u_0((uv)u_0^2)$. Logo, $u_0((u_0^2u)v) = 0$ por (3.24). Portanto, $(u_0^2u)v = \varphi((u_0^2u)v)$. Agora usando o Lema 3.4 temos

$$(u_0^2u)v \in (U^2\mu)\nu \subseteq \mu\nu$$

Logo $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu\nu)$. Por outro lado, de (3.24) temos que

$$\varphi(u_0^2u)\varphi(v) = (u_0^2u)v - 2(u_0^2u)(u_0v)$$

Agora, segue de (3.6), (3.20) e (3.24) que

$$(u_0^2u)(u_0v) = -u_0(v(u_0^2u)) - v((u_0^2u)u_0) = 0$$

Assim, $(u_0^2u)v = \varphi(u_0^2u)\varphi(v)$. Portanto, usando novamente o Lema 3.4, temos que $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu)\varphi(\nu)$. Concluimos que $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu\nu) \cap \varphi(\mu)\varphi(\nu)$. Portanto, segue de (3.23) que $\varphi(\mu)\varphi(\nu) = \varphi(\mu\nu)$. □

Agora, da mesma maneira como foi feito nas seções anteriores pode-se demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.3 *Todo P-subespaço p de A satisfaz $\varphi(p_e) = p_f$. Em particular todo P-subespaço tem dimensão invariante.*

Para as álgebras que satisfazem (3.19) com $V^2 = Ke$ não podemos demonstrar um resultado análogo ao da Proposição 2.7. Por exemplo, o P-subespaço $U \oplus V$ é invariante, pois $U \oplus V = \ker \lambda$, mas $U \oplus V$ não é um ideal. Entretanto, para P-subespaços da forma $p = g \oplus h$ com $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$, temos um resultado análogo ao Teorema 2.2 com demonstração similar.

Teorema 3.4 *Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra satisfazendo (3.19) com $V^2 = Ke$. Então um P-subespaço da forma $p = g \oplus h$, onde $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ é invariante se, e somente se, $Up \subseteq p$.*

Com os dois lemas seguintes poderemos caracterizar alguns ideais que são P-subespaços.

Lema 3.5 *Se $A = Ke \oplus U \oplus V$ é uma álgebra satisfazendo (3.19) com $V^2 = Ke$ e $U \neq 0$, então $Vg = g$, para qualquer P-subespaço g contido em U .*

Demonstração: Basta provar para um P-monômio $m \subseteq U$. Faremos indução em ∂m . Se $\partial m = 1$, então $m = U$. Temos que $VU = U$, pela Proposição 3.6 de [7]. Suponhamos que $\partial m \geq 2$. Logo, $m = \mu\nu$ onde $\mu \subseteq U$ e $\nu \subseteq V$ são P-monômios com $\partial\mu, \partial\nu \leq \partial m$. Se $\nu = V$ então $V(\mu\nu) = V\mu = m$, pela hipótese de indução. Suponhamos agora que $\nu = \mu_1\mu_2$ onde $\mu_1, \mu_2 \subseteq U$ são P-monômios. Temos que $V(\mu(\mu_1\mu_2))$ é gerado por elementos da forma $v(u(u_1u_2))$, onde $v \in V$, $u \in \mu$, $u_1 \in \mu_1$, e $u_2 \in \mu_2$. Segue de (3.6) e (3.22) que $v(u(u_1u_2)) = -(u_1u_2)(uv)$. Portanto, $V(\mu\nu) = \nu(V\mu) = m$. $\square$

Lema 3.6 *Sejam $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra que satisfaz (3.19) com $V^2 = Ke$ e $U \neq 0$. Se p é um P-subespaço de A da forma $p = g \oplus h$, onde $g \subseteq U$. Se $Up \subseteq p$ e $o(h) \geq 2$ então p é um ideal.*

Demonstração: Temos que $ep = g \subseteq p$, e $Up \subseteq p$ pela hipótese. Agora, $o(h) \geq 2$ implica que $h \subseteq U^2$. Então $Vh \subseteq U^2V = 0$. Assim, $Vp = Vg = g \subseteq p$. $\square$

Corolário 3.1 *Sejam $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra que satisfaz (3.19) tal que $V^2 = Ke$, $U \neq 0$ e p um P-subespaço da forma $p = g \oplus h$ onde $g \subseteq U$. Se $o(h) \geq 2$, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) p é invariante;
- (b) $Up \subseteq p$;
- (c) p é um ideal de A .

3.3 Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$

Seja K um corpo com $\text{car}(K) \neq 2$ e 3 . Estudaremos agora álgebras bárias (A, ω) sobre K que satisfazem

$$(x^2)^2 = \omega(x)x^3 \quad (3.25)$$

para todo $x \in A$. Há um sucinto estudo destas álgebras em [1].

Segue de (3.25) que

$$(x^2)^2 = 0 \quad (3.26)$$

para todo $x \in N = \ker \omega$. Linearizando (3.26), obtemos

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \quad (3.27)$$

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \quad (3.28)$$

onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N$.

As duas primeiras linearizações de (3.25) são dadas por

$$4x^2(xy) = \omega(y)x^3 + \omega(x)(x^2y + 2x(xy)) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} 4x^2(yz) + 8(xy)(xz) &= 2\omega(x)((xy)z + (yz)x + (zx)y) \\ &+ \omega(y)(x^2z + 2x(xz)) + \omega(z)(x^2y + 2x(xy)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $x, y, z \in A$. Fazendo $y = z$ em (3.30), obtemos

$$4(xy)^2 + 2x^2y^2 = \omega(x)(xy^2 + 2y(yx)) + \omega(y)(x^2y + 2x(xy)) \quad (3.31)$$

Mostraremos que $\text{Ip}(A) = \{z^3 \in A ; \omega(z) = 1\}$. De fato, seja $z \in A$ tal que $\omega(z) = 1$. Portanto, $(z^2)^2 = z^3$. Logo, segue de (3.25), fazendo $x = z^2$, que $(z^3)^2 = (z^2)^3$. Assim, $(z^3)^2 = z^2(z^2)^2$. Portanto,

$$(z^3)^2 = (z^2)^3 = z^2z^3 \quad (3.32)$$

Substituindo x por z e y por z^2 em (3.29) e em (3.31) obtemos

$$\begin{aligned} 4z^2z^3 &= 2z^3 + 2z^4 \\ 4(z^3)^2 &= z^3 + 3z^4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Segue destas duas equações e de (3.32) que $z^3 = z^4$. Substituindo esta igualdade em (3.33), obtemos $(z^3)^2 = z^3$. Assim, z^3 é idempotente de A .

Sejam agora e um idempotente de peso 1 de A e $y, z \in N$. Fazendo $x = e$ em (3.30), temos

$$4(ey)(ez) + e(yz) = (ey)z + (ez)y \quad (3.34)$$

Fazendo $y = z$ em (3.34), temos

$$4(\epsilon z)^2 + \epsilon z^2 = 2(\epsilon z)z \quad (3.35)$$

Se $x = e$ e $y = z$ em (3.29), então

$$2e(\epsilon z) = \epsilon z \quad (3.36)$$

Novamente em (3.29), fazendo $x = z$ e $y = e$, obtemos

$$4z^2(\epsilon z) = z^3 \quad (3.37)$$

A primeira linearização desta identidade é dada por

$$8(yz)(\epsilon z) + 4z^2(\epsilon y) = yz^2 + 2z(zy) \quad (3.38)$$

Seja $L_e: N \rightarrow N$ o operador linear definido por $L_e(z) = \epsilon z$. Segue de (3.36) que $L_e^2 - \frac{1}{2}L_e = 0$. Assim $x(x - \frac{1}{2}) = 0$ é um polinômio anulador de L_e . Portanto, L_e é diagonalizável e os autovalores de L_e estão contidos em $\{0, \frac{1}{2}\}$. Concluimos que $N = U_e \oplus V_e$, onde

$$\begin{aligned} U_e &= \{u \in A ; \epsilon u = \tfrac{1}{2}u\} \\ V_e &= \{v \in A ; \epsilon v = 0\} \end{aligned}$$

A decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é chamada de *decomposição de Peirce* de A .

Mostremos agora que

$$U_e V_e \subseteq U_e \quad V_e^2 \subseteq V_e \quad U_e^2 \subseteq V_e \quad (3.39)$$

Sejam $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Tomando $z = u$ em (3.35), temos $\epsilon u^2 = 0$. Logo, $u^2 \in V_e$. Assim, $U_e^2 \subseteq V_e$. Analogamente, fazendo $y = u$ e $z = v$ em (3.34), tem-se $\epsilon(uv) = \frac{1}{2}uv$. De onde segue que $uv \in U_e V_e$. Logo, $U_e V_e \subseteq U_e$. Para mostrar que $V_e^2 \subseteq V_e$, usamos mais uma vez (3.35) com $z = v$.

Em (3.37), fazendo $z = u$ e depois $z = v$, obtemos

$$u^3 = v^3 = 0 \quad (3.40)$$

Tomando $y = u$ e $z = v$ em (3.38), temos

$$uv^2 = 2(uv)v \quad (3.41)$$

Analogamente, se $y = v$ e $z = u$ em (3.38), então

$$u^2v = 2u(uv) \quad (3.42)$$

As linearizações de (3.40), (3.41) e (3.42) são

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \quad (3.43)$$

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0 \quad (3.44)$$

$$v_1(v_2v_3) + v_2(v_3v_1) + v_3(v_1v_2) = 0 \quad (3.45)$$

$$u(v_1v_2) = (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 \quad (3.46)$$

$$(u_1u_2)v = u_1(u_2v) + u_2(u_1v) \quad (3.47)$$

Fixado $e \in \text{Ip}(A)$, temos que $\text{Ip}(A) = \{e + u + u^2 \in A ; u \in U_e\}$. De fato, é fácil ver que $e + u + u^2 \in \text{Ip}(A)$, para todo $u \in U_e$. Seja, agora $f \in \text{Ip}(A)$. Portanto, $f^2 = f$. Escrevendo $f = e + u + v$ com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, temos $e + u + v = e + u + 2uv + u^2 + v^2$, mas $u + 2uv \in U_e$ e $u^2 + v^2 \in V_e$. Assim, $uv = 0$ e $v = u^2 + v^2$. Multiplicando $v = u^2 + v^2$ por v , obtemos $v^2 = vu^2 + v^3 = 2u(uv) = 0$. De onde segue que $v = u^2$. Portanto, $f = e + u + u^2$.

A seguir mostraremos que

$$x(x^2y) = 0 \quad (3.48)$$

para quaisquer x e y em N . Observemos inicialmente que se $u, t \in U_e$ e $v, w \in V_e$ então

$$u(u^2t) = u(u^2w) = v(v^2t) = v(v^2w) = 0$$

De fato, segue de (3.40) e (3.47) que $u(u^2t) = u^2(ut)$. Agora, $u(u^2t) = 0$ por (3.27). Por um argumento similar mostram-se as outras igualdades. Portanto, escrevendo $x = u + v$ e $y = t + w$, temos

$$\begin{aligned} x(x^2y) &= 2u((uv)t) + 2u((uv)w) + u(v^2t) + u(v^2w) \\ &\quad + v(u^2t) + v(u^2w) + 2v((uv)t) + 2v((uv)w) \end{aligned}$$

Segue de (3.28), (3.43), (3.46) e (3.47) que

$$\begin{aligned} 2u((uv)t) &= 2u((ut)v) - 2u(u(tv)) \\ &= 2(ut)(uv) + 2v(u(ut)) + u^2(tv) \\ &= -v(u^2t) \end{aligned}$$

Usando (3.28), (3.42), (3.45) e (3.47), temos

$$\begin{aligned} 2u((uv)w) &= 2(u(uv))w - 2(uv)(uw) \\ &= (u^2v)w + u^2(vw) \\ &= -(wu^2)v \end{aligned}$$

Segue de (3.28), (3.41) e (3.47) que

$$\begin{aligned} 2v((uv)t) &= 2(ur)(vt) + 2t((uv)v) \\ &= -v^2(ut) + t(uv^2) \\ &= -u(v^2t) \end{aligned}$$

De (3.28), (3.41) e (3.46) segue que

$$\begin{aligned} 2v((uv)w) &= 2(uv)(wv) - 2w((uv)v) \\ &= -v^2(uw) - w(uv^2) \\ &= -u(v^2w) \end{aligned}$$

Substituindo estas identidades na expressão de $x(x^2y)$, concluímos que $x(x^2y) = 0$.

Segue de (3.27) e (3.48) que N é uma álgebra de Jordan.

Seja $f = e + u_0 + u_0^2 \in \text{Ip}(A)$ com $u_0 \in U_\epsilon$. Mostraremos que

$$U_f = \{u + 2u_0u; u \in U_\epsilon\} \quad (3.49)$$

$$V_f = \{v - 2u_0v; v \in V_\epsilon\} \quad (3.50)$$

Seja $u' \in U_f$. Escrevamos $u' = u + v$, onde $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$. Portanto,

$$0 = fu' - \frac{1}{2}u' = u_0v + u_0^2u + u_0u + u_0^2v - \frac{1}{2}v$$

Temos que $u_0v + u_0^2u \in U_\epsilon$ e $u_0u + u_0^2v - \frac{1}{2}v \in V_\epsilon$. De onde segue que $u_0v = -u_0^2u$ e $v = 2u_0u + 2u_0^2v$. Assim, usando (3.42) e (3.48), temos

$$\begin{aligned} v &= 2u_0u + 4u_0(u_0v) \\ &= 2u_0u - 4u_0(u_0^2u) \\ &= 2u_0u \end{aligned}$$

Portanto, $u' = u + 2u_0u$. Por outro lado, usando (3.27) e (3.43), temos, para todo $u \in U_\epsilon$, que $f(u + 2u_0u) = \frac{1}{2}(u + 2u_0u)$. Concluimos que $U_f = \{u + 2u_0u : u \in U_\epsilon\}$. Seja agora $v' \in V_f$ e sejam $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$ tais que $v' = u + v$.

$$0 = fv' = \frac{1}{2}u + u_0v + u_0^2u + u_0u + u_0^2v$$

Temos que $\frac{1}{2}u + u_0v + u_0^2u \in U_\epsilon$ e $u_0u + u_0^2v \in V_\epsilon$. Portanto, $v' = v - 2u_0v$. Agora, segue de (3.27) e (3.42) que $f(v - 2u_0v) = 0$. Logo, $V_f = \{v - 2u_0v : v \in V_\epsilon\}$.

Dados $\epsilon, f \in \text{Ip}(A)$, sejam as funções

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= u + 2u_0u \\ \tau(v) &= v - 2u_0v\end{aligned}$$

onde $f = \epsilon + u_0 + u_0^2$ com $u_0 \in U_\epsilon$. É claro que σ e τ são sobrejetoras. Se $u \in U_\epsilon$ e $v \in V_\epsilon$ são tais que $\sigma(u) = \tau(v) = 0$, então $u = -2u_0u \in U_\epsilon \cap V_\epsilon$. Logo, $u = 0$. Analogamente, $v = 0$. Portanto, σ e τ são injetoras. Assim σ e τ são isomorfismos de espaços vetoriais. Conseqüentemente U e V têm dimensão invariante quanto à escolha do idempotente. O isomorfismo de espaço vetorial $\varphi: A \rightarrow A$ definido por $\varphi(\alpha\epsilon + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$ é a *transformação de Peirce* de A a associada a ϵ e a u_0 .

São também isomorfismos de espaços vetoriais os operadores lineares $\xi: U_\epsilon \rightarrow U_\epsilon$ e $\zeta: V_\epsilon \rightarrow V_\epsilon$ definidos por

$$\begin{aligned}\xi(u) &= u - 2u_0^2u \\ \zeta(v) &= v + 2u_0^2v\end{aligned}$$

De fato, se $\xi(u) = 0$, então $u = 2u_0^2u$. Multiplicando esta igualdade por u_0 e, usando (3.48), temos que $u_0u = 2u_0(u_0^2u) = 0$. Assim, segue de (3.43) que $u = -4u_0(u_0u) = 0$. Portanto, ξ é injetora. Agora se $\zeta(v) = 0$, então $v = 2u_0^2v$. Analogamente, $u_0v = 0$. Portanto, segue de (3.42) que $v = 0$.

Proposição 3.6 *As funções σ, τ, ξ e ζ satisfazem as seguintes condições*

- (a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(\xi(u_1)\xi(u_2))$;
- (b) $\sigma(u)\tau(v) = \sigma(\xi(u)\zeta(v))$;
- (c) $\tau(v_1)\tau(v_2) = \tau(\zeta(v_1)\zeta(v_2))$.

Demonstração: Segue de (3.28) e (3.44) que $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = u_1u_2 - 2u_0(u_1u_2) - 2u_0^2(u_1u_2)$. Usando (3.26), (3.28) e (3.47) prova-se que $\xi(u_1)\xi(u_2) = u_1u_2 - 2u_0^2(u_1u_2)$. Agora, segue

de (3.48) que $\sigma(u)\tau(v) = \tau(\xi(u_1)\xi(u_2))$. De (3.28) e (3.47) segue que $\sigma(u)\tau(v) = uv + 2u_0(uv) + 2u_0^2(uv)$. Usando (3.26), (3.28) e (3.46) obtemos $\xi(u)\zeta(v) = uv + 2u_0^2(uv)$ e segue de (3.48) que $\sigma(u)\tau(v) = \sigma(\xi(u)\zeta(v))$. A partir de (3.28) e (3.46) mostra-se que $\tau(v_1)\tau(v_2) = v_1v_2 - 2u_0(v_1v_2) - 2u_0^2(v_1v_2)$. Usando (3.26), (3.28) e (3.45) provamos que $\zeta(v_1)\zeta(v_2) = v_1v_2 - 2u_0^2(v_1v_2)$. Finalmente, segue de (3.48) que $\tau(v_1)\tau(v_2) = \tau(\zeta(v_1)\zeta(v_2))$. $\square$

Corolário 3.2 *Sejam $X, X_1, X_2 \subseteq U$ e $W, W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços de $A = Ke \oplus U \oplus V$. Então*

- (a) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(\xi(X_1)\xi(X_2))$;
- (b) $\sigma(X)\tau(W) = \sigma(\xi(X)\zeta(W))$;
- (c) $\tau(W_1)\tau(W_2) = \tau(\zeta(W_1)\zeta(W_2))$.

Na Proposição seguinte mostramos que os P-subespaços de A absorvem produtos por V .

Proposição 3.7 *Todo P-subespaço p de A satisfaz $Vp \subseteq p$.*

Demonstração: Faremos a demonstração apenas para um P-monômio m . Temos que

$$\begin{aligned} VU &\subseteq U \\ V^2 &\subseteq V \end{aligned}$$

Se $\partial m \geq 2$ então ocorrer uma das três possibilidades:

$$\begin{aligned} m &= \mu\nu \\ m &= \mu_1\mu_2 \\ m &= \nu_1\nu_2 \end{aligned}$$

onde $\mu, \mu_1, \mu_2 \subseteq U$ e $\nu, \nu_1, \nu_2 \subseteq V$ são P-monômios de grau menor ou igual a ∂m . Um gerador de $V(\mu\nu)$ é da forma $v(uw)$, onde $v \in V$, $u \in \mu$ e $w \in \nu$. Segue de (3.46) que

$$v(uw) = u(vw) - w(uv) \in \mu(V\nu) + \nu(V\mu)$$

Temos que $V(\mu_1\mu_2) = \langle v(u_1u_2); v \in V, u_1 \in \mu_1, u_2 \in \mu_2 \rangle$. Usando (3.47) obtemos

$$v(u_1u_2) = u_1(u_2v) + u_2(u_1v) \in \mu_1(\mu_2V) + \mu_2(\mu_1V)$$

Finalmente, $V(\nu_1\nu_2)$ é gerado por elementos da forma $v(w_1w_2)$, onde $v \in V$, $w_1 \in \nu_1$ e $w_2 \in \nu_2$. Por (3.45) tem-se

$$v(w_1w_2) = -w_1(w_2v) - w_2(vw_1) \in \nu_1(\nu_2V) + \nu_2(V\nu_1)$$

Agora, fazendo indução em ∂m , obtemos $Vm \subseteq m$. $\square$

Corolário 3.3 Para quaisquer P -subespaços $g \subseteq U$ e $h \subseteq V$ tem-se

$$\begin{aligned}\xi(g) &= g \\ \zeta(h) &= h\end{aligned}$$

Demonstração: Seja $u \in g$. Segue da proposição anterior que $\xi(u) = u - 2u_0^2u \in g + Vg = g$. Logo, $\xi(g) \subseteq g$ e, como ξ é um isomorfismo de espaços vetoriais, $\xi(g) = g$. Analogamente, mostra-se que $\zeta(h) = h$. $\square$

Agora pode-se demonstrar de maneira análoga às seções anteriores o seguinte teorema, onde φ é uma transformação de Peirce de A .

Teorema 3.5 Seja A uma álgebra básica satisfazendo (3.25). Então

- (1) Todo P -subespaço p de A satisfaz $\varphi(p_e) = p_f$. Em particular, todo P -subespaço tem dimensão invariante.
- (2) Para todo P -subespaço p de A as afirmações seguintes são equivalentes:
 - (2.1) p é invariante;
 - (2.2) $Up \subseteq p$;
 - (2.3) p é ideal.

Demonstração: Basta demonstrar a parte (1) para um P -monômio m . Sejam e e $f = e + u_0 + u_0^2$ idempotentes de A com $u_0 \in U_e$. Como σ e τ são isomorfismos, temos

$$\begin{aligned}U_f &= \sigma(U_e) = \varphi(U_e) \\ V_f &= \tau(V_e) = \varphi(V_e)\end{aligned}$$

Suponhamos que o resultado é válido para todo P -monômio de grau menor ou igual a k e seja m um P -monômio com $\partial m = k + 1$. Existem três possibilidades: $m = \mu\nu$, $m = \mu_1\mu_2$, $m = \nu_1\nu_2$, onde $\mu, \mu_1, \mu_2 \in U$ e $\nu, \nu_1, \nu_2 \in V$ são P -monômios de grau menor ou igual a k . Se $m = \mu\nu$ então,

$$m_f = \mu_f\nu_f = \sigma(\mu_e)\tau(\nu_e)$$

Assim, pelo Corolário 3.2 temos

$$m_f = \sigma(\xi(\mu_e)\zeta(\nu_e)) = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \varphi(m_e)$$

Os outros casos são análogos.

A demonstração de que (2.1) é equivalente a (2.2) é completamente análoga a prova de Teorema 2.2. Prova-se que (2.2) é equivalente a (2.3) da mesma maneira como foi demonstrado que (c) é equivalente a (b) na Proposição 2.7. $\square$

3.4 Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$

Seja (A, ω) uma álgebra bária, onde A é comutativa, não associativa e de dimensão finita sobre o corpo K com $\text{car}(K) \neq 2$ e 3 . Etherington mostrou em [4] que se (A, ω) satisfaz

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x^2)x = 0 \quad (3.51)$$

com $\gamma \in K$, então (A, ω) também satisfaz

$$(x^2)^2 - (1 + 2\gamma)\omega(x^2)x^2 + 2\gamma\omega(x^3)x = 0 \quad (3.52)$$

que é a correspondente train equação para as três primeiras potências plenárias. Em [17] Walcher demonstrou que (3.51) e (3.52) são equivalentes exceto para $\gamma = 0$ e $\gamma = -\frac{1}{2}$. Se $\gamma = 0$ em (3.52), então $(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2$. Portanto, neste caso, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein. Agora, se $\gamma = -\frac{1}{2}$, então a álgebra (A, ω) satisfaz

$$(x^2)^2 = \omega(x^3)x \quad (3.53)$$

Estas álgebras também são estudadas em [1], [10], [11] e [21].

Toda álgebra A que satisfaz (3.53) possui um idempotente dado por $e = (d^3)^3$ onde $\omega(d) = 1$ (ver [21]). Cada idempotente e de A determina uma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, onde

$$\begin{aligned} U_e &= \{u \in \ker \omega : eu = \tfrac{1}{2}u\} \\ V_e &= \{v \in \ker \omega : ev = -\tfrac{1}{2}v\} \end{aligned}$$

Estes subespaços satisfazem

$$UV \subseteq U, \quad U^2 \subseteq V, \quad V^2 \subseteq V \quad (3.54)$$

Como nas seções anteriores, usamos a notação $N = \ker \omega$ e temos $N = U \oplus V$.

Segue de (3.53) que para quaisquer $x \in N$

$$(x^2)^2 = 0 \quad (3.55)$$

Assim, A também satisfaz as identidades (2), (3) e (4). Outra identidade válida nas álgebras que satisfazem (3.53) é dada por

$$x_1(x_1^2x_2) = 0 \quad (3.56)$$

Segue de (2) e (3.56) que N é uma álgebra de Jordan.

Para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$ temos

$$u^3 = 0 \quad (3.57)$$

$$v^3 = 0 \quad (3.58)$$

$$u^2v = 2u(uv) \quad (3.59)$$

$$uv^2 = 2v(vu) \quad (3.60)$$

Por linearização destas identidades, obtemos

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0 \quad (3.61)$$

$$v_1(v_2v_3) + v_2(v_3v_1) + v_3(v_1v_2) = 0 \quad (3.62)$$

$$(u_1u_2)v = u_1(u_2v) + u_2(u_1v) \quad (3.63)$$

$$u(v_1v_2) = (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 \quad (3.64)$$

O conjunto dos idempotentes de peso 1 de A é dado por

$$\text{Ip}(A) = \{e + u + \frac{1}{2}u^2 ; u \in U_\epsilon\} \quad (3.65)$$

e, se $f = e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2$, $u_0 \in U_\epsilon$, é outro idempotente, então

$$U_f = \{u + u_0u ; u \in U_\epsilon\}$$

$$V_f = \{v - u_0v ; v \in V_\epsilon\}$$

A demonstração da próxima proposição é análoga a da Proposição 3.7.

Proposição 3.8 *Se p é um P -subespaço de uma álgebra que satisfaz (3.53), então $Vp \subseteq p$.*

Para quaisquer $u_0 \in U$ e $\alpha, \beta \in K$ consideraremos o operador linear $T_{(\alpha, \beta)}: N \rightarrow N$ definido por

$$T_{(\alpha, \beta)}(x) = x + \alpha u_0x + \beta u_0^2x$$

Tais operadores satisfazem as seguintes propriedades:

Lema 3.7 *Para quaisquer $u_0 \in U$ e $\alpha, \beta \in K$, tem-se*

(a) $T_{(\alpha, \beta)}$ é um automorfismo de espaço vetorial;

(b) $T_{(0, \beta)}(p) = p$ para todo P -subespaço p de A .

Demonstração: Seja $x = u + v \in N$ com $u \in U$ e $v \in V$ tal que $T_{(\alpha,\beta)}(x) = 0$. Assim $u + v + \alpha u_0(u + v) + \beta u_0^2(u + v) = 0$, de onde segue que

$$\begin{aligned} u + \alpha u_0 v + \beta u_0^2 u &= 0 \\ v + \alpha u_0 u + \beta u_0^2 v &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando estas identidades por u_0 e usando (3.56), (3.59) e (3.61), obtemos

$$\begin{aligned} u_0 u + \frac{1}{2} \alpha u_0^2 v &= 0 \\ u_0 v - \frac{1}{2} \alpha u_0^2 u &= 0 \end{aligned}$$

Novamente, multiplicando por u_0 estas duas últimas igualdades e usando (3.56), (3.59) e (3.61), temos $u_0^2 u = u_0^2 v = 0$. Logo $u_0 u = u_0 v = 0$. Portanto, $u = v = 0$. Assim $T_{(\alpha,\beta)}$ é injetor e portanto, é um isomorfismo. Seja $x \in p$. Como $u_0^2 \in V$, segue da Proposição 3.8 que

$$T_{(0,\beta)}(x) = x + \beta u_0^2 x \in p + Vp \subseteq p$$

Portanto, $T_{(0,\beta)}(p) \subseteq p$ e, como $T_{(\alpha,\beta)}$ é injetor, temos a igualdade. $\square$

Dados $e, f \in \text{Ip}(A)$, com $f = e + u_0 + \frac{1}{2} u_0^2$, $u_0 \in U_e$, usaremos as notações: $\sigma = T_{(1,0)}|_{U_e}$, $\tau = T_{(-1,0)}|_{V_e}$, $\xi = T_{(0,-\frac{1}{2})}|_{U_e}$, $\zeta = T_{(0,\frac{1}{2})}|_{V_e}$. Temos que $\sigma: U_e \rightarrow U_f$, $\tau: V_e \rightarrow V_f$, $\xi: U_e \rightarrow U_e$ e $\zeta: V_e \rightarrow V_f$. O isomorfismo de espaço vetorial $\varphi: A \rightarrow A$ definido por $\varphi(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$ é a *transformação de Peirce* de A associada a e e a u_0 .

Proposição 3.9 *As funções σ , τ , ξ e ζ satisfazem as identidades*

$$(a) \quad \sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau\left(\xi(u_1)\xi(u_2)\right);$$

$$(b) \quad \sigma(u)\tau(v) = \sigma\left(\xi(u)\zeta(v)\right);$$

$$(c) \quad \tau(v_1)\tau(v_2) = \tau\left(\zeta(v_1)\zeta(v_2)\right).$$

para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $v, v_1, v_2 \in V_e$.

Finalmente, como nas seções anteriores, temos:

Teorema 3.6 *Seja A uma álgebra básicas satisfazendo (3.53). Então*

(1) *Todo P-subespaço p de A satisfaz $\varphi(p_e) = p_f$. Em particular, todo P-subespaço tem dimensão invariante.*

(2) *Para todo P-subespaço p de A as afirmações seguintes são equivalentes:*

(2.1) *p é invariante;*

(2.2) *$Up \subseteq p$;*

(2.3) *p é ideal.*

3.5 Comentários finais

Estudamos o problema da invariância de P-subespaços em álgebras básicas (A, ω) satisfazendo as equações

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= \omega(x^3)x \\ (x^2)^2 &= \omega(x^2)x^2 \\ (x^2)^2 &= \omega(x)x^3 \\ x^3 &= (1 + \gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x^2)x \end{aligned}$$

Observemos que estas classes de álgebras contém as álgebras que satisfazem

$$x^2 = \omega(x)x \tag{3.66}$$

$$x^3 = \omega(x^k)x^r \quad k + r = 3 \tag{3.67}$$

$$(x^2)^2 = \omega(x^k)x^r \quad k + r = 4$$

onde k e r são inteiros positivos. De fato, as álgebras que satisfazem (3.66) são álgebras de Bernstein cujo núcleo é uma zero álgebra (logo seus P-subespaços são apenas U , V e $U \oplus V$ e são invariantes), as álgebras que satisfazem (3.67) são train álgebras de posto 3 (com $\gamma = -1$ ou $\gamma = 0$).

Todas as álgebras básicas consideradas possuem uma decomposição de Peirce da forma $A = Ke \oplus U \oplus V$ associada a um idempotente. Os subespaços U e V satisfazem relações do tipo

$$UV \subseteq U, \quad U^2 \subseteq V, \quad V^2 \subseteq \Omega$$

onde, dependendo do caso $\Omega = 0$, $\Omega = U$, $\Omega = V$. O conjunto $\text{Ip}(A)$ dos elementos idempotentes de peso 1 é parametrizado através do subespaço U da seguinte maneira:

$$\text{Ip}(A) = \{e + u + \theta u^2 : u \in U\}$$

com $\theta \in K$. Para cada $u_0 \in U_e$, considerando $f = e + u_0 + \theta u_0^2$, temos os isomorfismos de espaços vetoriais $\sigma: U_e \rightarrow U_f$ e $\tau: V_e \rightarrow V_f$ definidos por

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= u + \alpha u_0 u \\ \tau(v) &= v + \beta u_0 + \rho u_0^2 v\end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta, \rho \in K$. Temos que $\rho = -1$ para álgebras de Bernstein e, nos outros casos, $\rho = 0$. Salvo as álgebras de Bernstein que não verificam (2.18), as outras álgebras consideradas possuem a propriedade de que o seus P-subespaços têm dimensões invariantes. Isso se deve ao fato de que nestas álgebras vale uma tabela da forma

$$\begin{aligned}\varphi(u_1)\varphi(u_2) &= \varphi(\xi(u_1)\xi(u_2)) \\ \varphi(u)\varphi(v) &= \varphi(\xi(u)\zeta(v)) \\ \varphi(v_1)\varphi(v_2) &= \varphi(\zeta(v_1)\zeta(v_2))\end{aligned}$$

onde φ é a transformação de Peirce de A associada a e e a u_0 e $\xi: U_e \rightarrow U_e$, $\zeta: V_e \rightarrow V_e$ são isomorfismos de espaços vetoriais definidos por

$$\begin{aligned}\xi(u) &= u + \epsilon u_0^2 u \\ \zeta(v) &= v + \delta u_0^2 v\end{aligned}$$

onde $\epsilon, \delta \in K$ (nas train álgebras de posto 3 e nas álgebras de Bernstein que satisfazem (2.18) temos $\delta = 0$, isto é, ζ é a função identidade). A principal propriedade das funções ξ e ζ é que elas preservam P-subespaços. Dessa maneira, a tabela anterior implica que $\varphi(p_e) = p_f$. Esta última igualdade nos permitiu também estabelecer uma condição necessária e suficiente bem simples para que um P-subespaço seja invariante.

Referências Bibliográficas

- [1] M. T. ALCALDE, C. BURGUEÑO and C. MALLOL. *Les $\text{Pol}(n,m)$ -algèbres: identités polynômiales symétriques des algèbres*. *Linear Algebra and its Applications*, 191:213–234, 1993.
- [2] C. BURGUEÑO and C. MALLOL. *Morphismes de Peirce et orthogonalité dans les algèbres de Bernstein*. *Linear Algebra and its Applications*, 219:179–186, 1997.
- [3] T. CORTÉS and F. MONTANER. *On the structure of Bernstein algebras*. *J. London Math. Soc.*, 51(2):41–52, 1995.
- [4] I. M. H. ETHERINGTON. *Commutative train algebras of ranks 2 and 3*. *J. London Math. Soc.* 15, 136:149, 1940.
- [5] S. GONZALEZ and C. MARTINEZ. *Idempotent elements in a Bernstein algebra*. *J. London Math. Soc.* 42(2):430–436, 1990.
- [6] I. R. HENTZEL and L. A. PERESI. *Semiprime Bernstein algebras*. *Arch. Math.* 52:539–543, 1989.
- [7] A. LABRA, C. MALLOL, A. MICALI and R. VARRO. *Sur les algèbres de Bernstein V : les algèbres de Bernstein Jordan faibles*. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 35:359–373, 1992.
- [8] M. L. LELIS. *Formas P -invariantes em álgebras de Bernstein*. *PhD thesis*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1996.
- [9] Y. LJUBICH. *Mathematical Structures in Population Genetics*, *Biomathematics*. Springer 22, 1992.
- [10] C. MALLOL and R. VARRO. *A propos des algèbres vérifiant $x^{[3]} = \omega(x)^3x$* . *Linear Algebra and its Applications*, 225:187–194, 1995.

- [11] C. MALLOL and R. VARRO. *Derivation dans les algèbres de Walcher. Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 4(2):129–146, 1996.
- [12] C. MALLOL and A. WALKHOFF. *Sur le algèbres vérifiant $x^3 = \lambda(x)x^2$. Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 4(2):169–184, 1996.
- [13] A. MICALI and M. OUATTARA. *Structure des algèbres de Bernstein. Linear Algebra and its Applications*, 218:77–88, 1995.
- [14] R. B. GALLARDO. *Sobre as T -álgebras de posto 3 e questões correlatas. PhD thesis*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1995.
- [15] R. A. OLIVEIRA. *Sobre os P -subespaços em uma train álgebra de posto 3. PhD thesis*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1997.
- [16] R. D. SCHAFER. *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- [17] S. WALCHER. *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers. Arch. Math.*, 56:547–551, 1991.
- [18] S. WALCHER. *Bernstein algebras which are Jordan algebras. Arch. Math.*, 50:218–222, 1988.
- [19] A. WÖRZ-BUSEKROS. *Algebras in Genetics*, volume 36, *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1980.
- [20] A. WÖRZ-BUSEKROS. *Bernstein algebras. Arch. Math.*, 48:388–398, 1987.
- [21] R. VARRO. *Algèbres de Bernstein périodiques. Thèse de Doctorat*, Université de Montpellier II, 1992.

Índice de Símbolos

(A, ω) – álgebra bária, 6

$A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ – decomposição de Peirce de A , 6

A^* – espaço das formas lineares de A em K , 10

K – corpo, 5

$K[U, V]$ – álgebra de polinômios em U e V , 13

$L = U \cap \text{ann}U$, 10

P – ideal de Etherington, 10

$S_{k,r} = S_{k,U} \oplus S_{r,V}$, 22

U_e, V_e – subespaços de uma decomposição de Peirce de A , 7

X^n – potências principais do subespaço X , 5

$\tilde{U} = U + U^2 = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} U_f$, 10

$\tilde{V} = V + UV + U^2V = \sum_{f \in \text{Ip}(A)} V_f$, 10

$\mathcal{P}$ – subconjunto de $K[U, V]$, 13

ω – função peso, 6

$\overline{A}$ – álgebra quociente, 6

$\tilde{p} = p(\tilde{U}, \tilde{V})$, 20

∂p – grau de p , 14

a^n – potências principais de a , 5

e – idempotente de A , 6

$o(p)$ – ordem de p , 14

Índice Remissivo

- Álgebra básica. 6
 - de Bernstein. 6
 - excepcional. 8
 - normal. 8
 - nuclear. 8
 - de Bernstein-Jordan. 11
 - de Bernstein-Jordan fracas. 58
 - de Jordan. 11
 - de polinômios. 13
 - satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$. 62
 - satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$. 69
 - satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$. 53
 - satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) = 0$. 54
 - train álgebra. 51
 - train álgebra de posto 3. 51
- Decomposição de Peirce. 6, 51, 54, 58, 63, 69
- Função peso. 6
- Grau. 14
- Ideal de Etherington. 10
- Núcleo. 6
- Ordem. 14
- P-monômios. 13
- P-subespaços. 13
 - invariantes. 14
 - que têm dimensão invariante. 14
- Peso. 6
- Posto. 51
- Potências principais. 5
- Subespaços monomiais. 13
 - polinomiais. 13
- Tipo. 8
- Train polinômio. 51
- Transformação de Peirce. 32, 56, 59, 66, 68