O radical em algumas álgebras não associativas e álgebras dibáricas.

Maria Aparecida Couto

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior

Co-orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da CAPES - PICD

São Paulo, Outubro de 1998

ABSTRACT

There are three sections in this work. In the first section we study baric alternative algebras of finite dimension on a field F of characteristic distinct of two. These algebras have two radicals, namely, the nilpotent radical, which is the maximal nilpotent ideal of the algebra and the bar radical, which is the intersection of maximal baric ideals. These two radicals are not necessarily equal as we show with an example. We did a comparison between these two radicals and, denoting by $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ the nilpotent radical and by $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ the bar radical, we showed that $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$, where $\text{bar}(\mathcal{A})$ is the kernel of the weight homomorphism of the algebra $\mathcal{A}$.

In the second section we study the multiplication algebra of an arbitrary baric algebra $\mathcal{A}$, of finite dimension. From the assumption that the algebra $\mathcal{A}$ is semisimple in the baric sense, the goal was to discover if the multiplication algebra, here denoted by $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, would be semisimple in the baric sense. The answer is on the negative and we illustrate this with an example. We look for conditions to get an affirmative answer to the question. We finish this section with a partial converse, that is, if we add the hypothesis that $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, then if $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ is semisimple in the baric sense, so is the algebra $\mathcal{A}$.

In the last section, we study an algebra which is motivated by genetic models, but it is not baric. It is not associative and it has a non trivial homomorphism onto the sexual differentiation algebra (this last has dimension two). We call these algebras dibaric algebras. In this section we study the homomorphism above, called dibaric weight homomorphism, we define semisimplicity and we finish with a version of the Krull-Schmidt Theorem and the definition of dibaric radicals.

RESUMO

Este trabalho consta de três partes. Na primeira parte estudamos as álgebras alternativas bárias de dimensão finita sobre um corpo F de característica distinta de dois. Essas álgebras possuem dois radicais, a saber, o radical nilpotente que é o ideal nilpotente maximal da álgebra e o bar radical que é a intersecção dos ideais bários maximais. Esses dois radicais não são necessariamente iguais e isto mostra-se com um exemplo. Assim foi feita uma comparação entre esses dois radicais e, denotando por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ o radical nilpotente e $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ o bar radical, chegamos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$, onde $\text{bar}(\mathcal{A})$ é o núcleo do homomorfismo peso da álgebra $\mathcal{A}$.

Na segunda parte estudamos a álgebra de multiplicação de uma álgebra bária arbitrária $\mathcal{A}$ de dimensão finita. Partindo do pressuposto de que a álgebra $\mathcal{A}$ é semisimples no sentido bário, o objetivo era saber se a álgebra de multiplicação aqui denotada por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ seria semisimples no sentido bário. A resposta é negativa e isso mostramos com um exemplo. Assim buscamos condições que tornem esse fato verdadeiro. Finalizamos essa parte com uma espécie de recíproca, ou seja, adicionando a hipótese de que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, chegamos que se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bário, então a álgebra $\mathcal{A}$ também é.

Na terceira e última parte estudamos um tipo de álgebra cuja motivação vem de modelos genéticos mas que não é bária. Não é associativa e possui um homomorfismo sobrejetor cuja imagem é a álgebra de diferenciação sexual que tem dimensão dois. Tais álgebras são chamadas de álgebras dibárias. Aqui estudamos esse homomorfismo ao qual chamamos de homomorfismo peso dibário, definimos semisimplicidade e finalizamos com uma versão do Teorema de Krull-Schmidt e a definição de radical dibário.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	19
1.1 Álgebras	19
1.1.1 Álgebras associativas de dimensão finita	19
1.1.2 Álgebras não associativas	22
1.2 A álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$	24
1.3 Álgebras Alternativas	26
1.4 Álgebras Béricas	30
1.4.1 Elementos da Genética Clássica	30
1.4.2 Conceitos básicos	39
1.4.3 Álgebras de Bernstein	44
2 Álgebras Alternativas Béricas	46
2.1 Resultados Preliminares	46
2.2 A decomposição de Peirce	49

2.3	Idempotentes do $\text{bar}(A)$	55
2.4	O radical nil e o bar-radical	57
3	A Álgebra de Multiplicação, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, de uma álgebra básica semisimples	68
3.1	Resultados Gerais	68
3.2	$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra alternativa básica semisimples	91
3.3	$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra de Bernstein semisimples	94
4	Álgebras Dibáricas	97
4.1	Introdução	97
4.2	Homomorfismos pesos dibáricos	103
4.3	Álgebras dibáricas	116
4.4	O Teorema de Krull-Schmidt	125
4.5	O Radical de uma álgebra dibárica	138
	Bibliografia	144
	Índice Remissivo	148

Introdução

Esta monografia baseia-se fundamentalmente nos Capítulos 2, 3, e 4. O primeiro capítulo é reservado a resultados já conhecidos, que por conveniência, achamos interessante tê-los mais próximos. Neste trabalho, a menos quando for especificado, estaremos tratando de álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero.

No Capítulo 2, discorreremos sobre as álgebras alternativas báricas de dimensão finita. Vale ressaltar que todos os resultados obtidos, são válidos para as álgebras associativas báricas de dimensão finita. Como exemplo destes tipos de álgebras citamos os anéis de grupos, ou seja, dado um grupo $\mathfrak{G}$ de ordem finita e um anel $\mathcal{R}$, consideramos

$$\mathcal{R}\mathfrak{G} = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i g_i \mid r_i \in \mathcal{R}, g_i \in G \right\}.$$

O anel de grupo $\mathcal{R}\mathfrak{G}$ é uma estrutura bastante conhecida, que é bárica. O homomorfismo peso é dado por

$$w : \mathcal{R}\mathfrak{G} \longrightarrow \mathcal{R}, \quad w\left(\sum_{i=1}^n r_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i,$$

onde $\sum_{i=1}^n r_i g_i$ é um elemento de $\mathcal{R}\mathfrak{G}$.

O primeiro resultado deste capítulo é referente à presença de idempotentes de peso 1 nestas álgebras. Mostramos então o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária de potências associativas e de dimensão finita, então $\mathcal{A}$ possui um elemento idempotente de peso 1.*

Para mostrar esse teorema, usamos basicamente o fato de que uma álgebra associativa de dimensão finita que não é uma nilálgebra, possui um idempotente. A partir disso, pelo fato de que se $\mathcal{A}$ é associativa e bária de dimensão finita ela não é uma nilálgebra, mostramos que pelo menos um idempotente e , nela existente, tem peso 1. Para mostrar o resultado para as báricas de potências associativas, usamos o fato de que uma subálgebra gerada por apenas um elemento é associativa. Naturalmente o caso das álgebras alternativas, devido ao Teorema de Artin, segue como corolário.

Depois tomando uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$, fizemos a decomposição de Peirce do $\bar{bar}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : w(x) = 0\}$ e comparamos com a decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$. Na seção próxima discorreremos sobre os idempotentes do $\bar{bar}(\mathcal{A})$ e mostramos que se um elemento idempotente principal e de peso 1 em $\mathcal{A}$ é decomposto como soma de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais, $e = e_1 + e_2 + \dots + e_k$, onde $w(e_1) = 1$ e $w(e_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, então o elemento $u = e_2 + \dots + e_k$ é um idempotente principal do $\bar{bar}(\mathcal{A})$.

Na última seção deste capítulo fizemos uma comparação de dois radicais de uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$. Comparamos o radical nil de $\mathcal{A}$ que é o ideal nil maximal, neste trabalho denotado por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, e o bar radical de $\mathcal{A}$ que é a intersecção de todos os ideais báricos maximais de $\mathcal{A}$. Ao bar radical denotamos por $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$. Mostramos então que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap \bar{bar}(\mathcal{A})^2$, e portanto o bar radical $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ é sempre nilpotente.

No Capítulo 3 trabalhamos com a álgebra de multiplicação de uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ arbitrária de dimensão finita, aqui denotada por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Tratamos os elementos de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ como polinômios em R_a e L_a , os operadores mul-

tiplicativos à direita e à esquerda de $\mathcal{A}$ respectivamente. Assim sendo, consideramos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ como a álgebra cujos elementos são da forma $f(S_1, S_2, \dots, S_n)$, onde $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ para $n \geq 1$ e $S_i = R_{a_i}$ ou $S_i = L_{a_i}$. O primeiro resultado que provamos foi que se uma álgebra $(\mathcal{A}, w)$ é bária, então sua álgebra de multiplicação também é bária. Tal resultado citamos a seguir:

Teorema 0.0.2 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária de dimensão finita então a álgebra de multiplicação de $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ também é uma álgebra bária com homomorfismo peso dado por*

$$\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow F, \quad \lambda(f(S_{x_1}, \dots, S_{x_n})) = f(w(x_1), \dots, w(x_n))$$

O objetivo principal deste capítulo, era provar um resultado similar ao de Nathan Jacobson, que pode ser visto em ([18]) e que diz que se uma álgebra arbitrária $\mathcal{A}$ de dimensão finita é escrita como uma soma direta de subálgebras simples, então a álgebra de multiplicação desta álgebra também pode ser decomposta em soma direta de subálgebras simples. Assim, gostaríamos de mostrar que se uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ tem a propriedade de que o $\text{bar}(\mathcal{A})$ é decomposto como uma soma direta de ideais báricos simples, então a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ também tem seu bar decomposto em ideais báricos simples e então o bar radical $\mathcal{R}_B(\mathcal{M})$ é zero. Não foi possível mostrar esse resultado, pelo fato de que ele não é verdadeiro e isso foi verificado com dois exemplos. Tais exemplos foram, em primeiro lugar, a álgebra gerada pelos elementos $\{e, v\}$ com a seguinte tábua de multiplicação:

	e	v
e	e	$2v$
v	$2v$	$2v$

e função peso $w : \mathcal{A} \longrightarrow F$ dada por $w(\epsilon) = 1$ e $w(v) = 0$. Note que esta álgebra é comutativa, mas não é associativa. Note também que essa álgebra é uma álgebra bária simples. Conseguimos provar que a álgebra de multiplicação desta álgebra não é simples, uma vez que possui um ideal nilpotente contido no $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ e este não pode ser decomposto em soma direta de ideais simples.

Como segundo exemplo, consideramos a álgebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(F) \right\},$$

com homomorfismo peso, dado por

$$w \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \alpha.$$

Esta álgebra é simples no sentido bário, mas podemos mostrar que sua álgebra de multiplicação não é semisimples no sentido bário.

Assim, diante dessa impossibilidade, estudamos alguns ideais existentes na álgebra de multiplicação de uma álgebra bária semisimples. Tais ideais foram obtidos da seguinte maneira: Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária que tem seu bar ideal decomposto em uma soma direta de ideais báricos simples, $\text{bar}(\mathcal{A}) = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_k$, consideramos para cada I_j , $j = 1, 2, \dots, k$ a subálgebra $[I_j]^*$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, gerada pelos operadores multiplicativos à direita e à esquerda definidos por elementos de I_j . Em seguida tomamos o ideal U_j em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ gerado por essa subálgebra. Desta maneira, para cada ideal bário I_j em $\mathcal{A}$, conseguimos um ideal bário U_j em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Naturalmente, mostra-se que a soma como espaços vetoriais $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ é direta. Sobre a estrutura deles, mostramos que esses ideais são ideais báricos simples

ou em caso contrário, são decompostos em uma soma direta de subespaços, $\mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \oplus J_j$ onde $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ é um ideal bário simples e nilpotente e J_j é uma subálgebra que tem a estrutura de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo à esquerda.

Também mostramos que o radical nil. $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é semi-simples no sentido citado acima, tem a seguinte caracterização:

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \{f \in \text{bar}(\mathcal{M}) \mid f|_{\text{bar}(\mathcal{A})} \equiv 0\}.$$

E ainda que

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subseteq U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Finalmente, demos condições sobre a álgebra $\mathcal{A}$ para que a álgebra de multiplicação correspondente fosse semisimples no sentido bário. Tais condições, seguem no seguinte teorema:

Teorema 0.0.3 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária semisimples no sentido bário. Então*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \oplus \mathcal{R}_1(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_m(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_s(\mathcal{M}) \oplus J_{m+1} \oplus \cdots \oplus J_s \oplus U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_k,$$

é semisimples no sentido bário se e somente se $J_j \equiv 0$ e $\mathcal{B} \equiv 0$.

Finalizando este capítulo, calculamos de um modo geral a álgebra de multiplicação de uma álgebra alternativa bária semisimples e de uma álgebra de Bernstein semisimples. No caso da álgebra alternativa bária chegamos à conclusão de que se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ for semisimples no sentido bário, então o idempotente e da álgebra $\mathcal{A}$ pertence ao centro da álgebra $\mathcal{A}$. Para as álgebras de Bernstein, chegamos à conclusão de que se a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ for semisimples, então $\mathcal{A} = Fe$ ou $\mathcal{A} = Fe \oplus Z_e$. Em relação à álgebra de

Bernstein, alguns resultados sobre a dimensão de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ a partir da $\dim(\mathcal{A})$, foram obtidos.

O Capítulo 3 é bem independente dos outros dois. Nele tratamos de um outro tipo de álgebra, também não associativa, a saber, as álgebras dibáricas. As álgebras dibáricas tem sua motivação na genética clássica, quando estudamos o comportamento de populações bissexuais. Para sermos mais explícitos, consideremos uma população onde temos $a_0, a_1, \dots, a_n$ como tipos gaméticos femininos e apenas um tipo gamético masculino que denotaremos pela letra Y . Os genótipos femininos serão dados por $a_i a_j$ que denotaremos por a_{ij} e os genótipos masculinos serão dados por $a_j Y$, para $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$. Assumimos que os genótipos femininos a_{ij} produzem os gametas a_k com probabilidade p_{ijk} , enquanto que os genótipos masculinos $a_i Y$ produzem a_k com probabilidade p_{ik} . Se os genótipos masculinos produzem os gametas X e Y com a mesma frequência, então temos:

$$\sum_{k=0}^n p_{ijk} = 1, \quad \sum_{k=0}^n p_{ik} = \frac{1}{2}.$$

Seja $\mathcal{Z}$ o espaço vetorial real com base

$$\{a_{ij}, a_i Y \mid i, j = 0, \dots, n\}$$

de dimensão $(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$. Consideremos em $\mathcal{Z}$ a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned} a_{ij} \cdot a_l Y &= a_l Y \cdot a_{ij} = \sum_{k,r=0}^n p_{ijk} p_{lr} a_{kr} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n p_{ijk} a_k Y \\ a_{ij} \cdot a_l &= a_l Y \cdot a_p Y = 0 \end{aligned}$$

para $i, j, l, q = 0, \dots, n$. A álgebra $\mathcal{Z}$ é chamada de álgebra zigótica com herança assimétrica ligada ao sexo e com tipos gaméticos $a_0, \dots, a_n$. $\mathcal{Z}$ é uma álgebra comutativa mas não é associativa. Também não é uma álgebra bária desde que os elementos da base são nilpotentes de índice dois. Para contornar essa aparente dificuldade Etherington [5], introduziu a idéia de estudar separadamente os componentes masculinos e femininos de uma população. Logo depois, Holgate [16] formalizou este conceito com a introdução de sua álgebra com diferenciação sexual e a generalização de álgebras báricas chamadas álgebras dibáricas. Seguindo a notação moderna de Wörz-Busekros [25], introduzimos abaixo a definição de álgebra de diferenciação sexual e álgebra dibárica as quais foram definidas por Holgate sobre o corpo dos números reais.

Definição 0.0.1 *Seja $\mathcal{S}$ uma álgebra comutativa bi-dimensional gerada pelos elementos $\{\mathfrak{m}, \mathfrak{h}\}$, sobre um corpo F de característica distinta de dois, com a seguinte tábu de multiplicação:*

	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{m}$	0	$\frac{1}{2}(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})$
$\mathfrak{h}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})$	0

Esta álgebra $\mathcal{S}$ é chamada de Álgebra de diferenciação sexual.

Temos que $\mathcal{S}^2 = \langle \mathfrak{m} + \mathfrak{h} \rangle_F$ é um ideal de $\mathcal{S}$ isomorfo ao corpo F . Assim

$\mathcal{S}^2$ é uma álgebra bária. A partir disto podemos definir a generalização de Holgate de uma álgebra bária.

Definição 0.0.2 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ será chamada dibárica se ela admite um homomorfismo sobrejetor sobre a álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$.*

A este homomorfismo sobrejetor de $\mathcal{A}$, na álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$, chamamos de homomorfismo peso dibárico. Sobre os homomorfismos pesos dibáricos, dedicamos uma seção onde demos a definição de homomorfismos pesos equivalentes e mostramos alguns resultados que listamos a seguir.

Definição 0.0.3 *Dizemos que dois homomorfismos pesos dibáricos λ e λ' de uma álgebra $\mathcal{A}$ são equivalentes, se existe um automorfismo $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ de tal maneira que $\lambda' = f \circ \lambda$.*

Em seguida mostramos que os únicos automorfismos de $\mathcal{S}$ são a identidade e a involução, aqui denotada por $*$, e a partir disso segue que cada classe de equivalência definida acima possui exatamente dois representantes. Desta forma, se γ e γ' , são dois homomorfismos pesos dibáricos distintos e equivalentes, temos que $\gamma' = * \circ \gamma$. Assim denotamos por $\mathcal{E}$ o conjunto de tais classes de equivalência, ou seja, um elemento de $\mathcal{E}$ é da forma $\{\gamma, \gamma^*\}$, onde γ é um homomorfismo dibárico e $\gamma^* = * \circ \gamma$. Ainda sobre essas classes de equivalência mostramos o seguinte teorema:

Teorema 0.0.4 *A correspondência $\{\gamma, \gamma^*\} \mapsto \text{Ker}(\gamma)$ é uma bijeção entre o conjunto $\mathcal{E}$ das classes de equivalência de homomorfismos pesos dibáricos de $\mathcal{A}$ e o conjunto de ideais I de $\mathcal{A}$ de codimensão 2 tais que $\mathcal{A}/I \cong \mathcal{S}$.*

Como corolário deste teorema mostramos que homomorfismos pesos dibáricos com núcleos iguais são equivalentes e, seguindo essa linha, provamos as proposições:

Proposição 0.0.1 *Distintos homomorfismos pesos dibáricos de uma álgebra $\mathcal{A}$ são linearmente independentes.*

Proposição 0.0.2 *Seja uma álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão n e r um número natural tal que $\mathcal{A}^{[r+1]} = \mathcal{A}^{[r]}$. Nestas condições temos que o número máximo de homomorfismos pesos dibáricos distintos de $\mathcal{A}$ é $2 \cdot \dim(\mathcal{A}^{[r]})$.*

Proposição 0.0.3 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca. Se para todo $a \in \text{Ker}(\gamma)$ existir um monômio $p(x) \in F[x]$ distinto de zero tal que $p(a) = 0$, então os únicos homomorfismos dibáricos de $\mathcal{A}$ são γ e γ^* .*

Em seguida demos um exemplo de uma álgebra denominada *Álgebra de evolução para uma população bissexual*, definida sobre o espaço vetorial $R^n \times R^\nu$, a qual provamos ser dibárca e mostramos que existe apenas um homomorfismo dibárco, a menos de equivalências, que é positivo no sentido que a imagem de Ω definido por

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in R^n \times R^\nu \mid x_i, y_j \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^\nu y_j = 1 \right\},$$

está totalmente contido no conjunto $\{\alpha m + \beta h \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0\}$.

A próxima seção foi dedicada às definições de subálgebras dibáricas, ideais, homomorfismos dibáricos e etc... Estas definições são análogas às definições dadas para as álgebras báricas. Também introduzimos o conceito de *idempotente semiprincipal* de uma álgebra dibárca, cuja definição segue nas linhas abaixo

Definição 0.0.4 *Um idempotente ϵ em uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$, é chamado semiprincipal se $\epsilon = u + v$, onde $\gamma(u) = \mathfrak{m}$, $\gamma(v) = \mathfrak{h}$, ϵ ainda*

$$u^2 = 0, \quad uv = \frac{(u+v)}{2} = vu, \quad v^2 = 0.$$

Note que se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárca, consideramos um idempotente semiprincipal $\epsilon = u + v$ em $\mathcal{A}$, então temos a decomposição $\mathcal{A} = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}$ onde $Fu \oplus Fv$ é uma subálgebra dibárca isomorfa a $\mathcal{S}$.

Terminando esta seção demos um exemplo de uma álgebra dibárca construída a partir de uma álgebra bárica. Tal álgebra chama-se *álgebra assimétrica triplicada*. Nesta álgebra provamos que existe um único homomorfismo peso dibárco, a menos, é claro, de equivalências.

Na seção seguinte mostramos um análogo ao Teorema de Krull Schmidt para as álgebras dibárcas. Para tanto, definimos uma estrutura a qual denominamos de *Join* de álgebras dibárcas, e que discorreremos brevemente nas linhas que seguem:

Dadas duas álgebras dibárcas $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$, temos o produto externo $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ com a multiplicação dada por $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Este produto é uma álgebra não necessariamente dibárca, mas o conjunto

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mid \gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2)\}$$

é uma subálgebra dibárca de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Esta afirmação é fácil de ser comprovada uma vez que se (x_1, x_2) e (y_1, y_2) são dois elementos deste conjunto, temos que $\gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2)$ e $\gamma_1(y_1) = \gamma_2(y_2)$, logo $\gamma_1(x_1y_1) = \gamma_1(x_1)\gamma_1(y_1) = \gamma_2(x_2)\gamma_2(y_2) = \gamma_2(x_2y_2)$. O homomorfismo dibárco é dado por

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(x_1, x_2) := \gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2).$$

A esta álgebra dibárca chamaremos de *join* de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ e denotaremos por $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2, \gamma_1 \vee \gamma_2)$.

A partir do Join de álgebras dibárcas introduzimos o conceito de álgebras dibárcas decomponíveis e indecomponíveis ou seja:

Definição 0.0.5 *Uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ é decomponível se existem álgebras dibárcas não triviais $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ tais que*

$$(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\mathcal{A}_1, \gamma_1) \vee (\mathcal{A}_2, \gamma_2).$$

Caso contrário dizemos que $\mathcal{A}$ é indecomponível.

Terminamos esta seção com o Teorema de Krull-Schmidt para as álgebras dibárcas:

Teorema 0.0.5 (Krull Schmidt) *Sejam $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca com idempotente semiprincipal $e = u + v$ satisfazendo c.c.d e c.c.a.. Se*

$$(\mathcal{A}, \gamma) = (\mathcal{A}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}_n, \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n),$$

$$(\mathcal{A}, \gamma) = (\mathcal{B}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{B}_m, \chi_1 \vee \cdots \vee \chi_m).$$

onde cada $(\mathcal{A}_i, \gamma_i)$ e $(\mathcal{B}_j, \chi_j)$ são subálgebras dibárcas indecomponíveis de $(\mathcal{A}, \gamma)$, então $n = m$ e com uma devida reindexação temos que $(\mathcal{A}_i, \gamma_i) \cong (\mathcal{B}_i, \chi_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalmente, na última seção deste capítulo, definimos o radical de uma álgebra dibárca e também definimos semisimplicidade de tais álgebras. Tais definições são dadas a seguir:

Definição 0.0.6 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca. O radical de $(\mathcal{A}, \gamma)$ é zero se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é simples, de outra forma o radical de $(\mathcal{A}, \gamma)$ é a intersecção de todos os $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos maximais de $\mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$. Denotamos por $\text{rad}(\mathcal{A})$ ao radical da álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$.*

Definição 0.0.7 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca. Se existem álgebras dibárcas simples $(\mathcal{A}_1, \gamma_1), (\mathcal{A}_2, \gamma_2), \dots, (\mathcal{A}_n, \gamma_n)$ tais que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n, \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n)$, então $(\mathcal{A}, \gamma)$ é chamada de semisimples.*

Finalizando, demonstramos os seguintes resultados:

Proposição 0.0.4 *Se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárca semisimples, então temos que $\text{rad}(\mathcal{A}) = 0$.*

Teorema 0.0.6 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca satisfazendo c.c.d. Se $\text{rad}(\mathcal{A}) = 0$, então $(\mathcal{A}, \gamma)$ é semisimples.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Álgebras

1.1.1 Álgebras associativas de dimensão finita

Nesta subseção todos os resultados citados podem ser vistos em ([1], [4]) ou em qualquer outro livro de álgebras de dimensão finita.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo F é um F -espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre o qual se tem definido um produto associativo bilinear. Em outras palavras, a qualquer par ordenado (a, b) de elementos do espaço $\mathcal{A}$ se associa um determinado elemento de $\mathcal{A}$, denominado em geral por produto e denotado por ab .

Definição 1.1.1 *Um elemento e em uma álgebra arbitrária $\mathcal{A}$ é chamado de idempotente se $e \neq 0$ e $e^2 = e$.*

Teorema 1.1.1 *Toda álgebra $\mathcal{A}$ associativa que não é nilpotente, possui em elemento idempotente.*

Definição 1.1.2 *Um elemento $x \in \mathcal{A}$ é chamado propriamente nilpotente se para todo $a \in \mathcal{A}$ tivermos que ax e xa são nulos ou são nilpotentes.*

Definição 1.1.3 *Dizemos que um conjunto de elementos idempotentes $e_1, e_2, \dots, e_n$ são dois a dois ortogonais se $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$.*

Definição 1.1.4 *Um elemento idempotente e em uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamado de principal de $\mathcal{A}$ se não existe idempotente u ortogonal a e .*

Definição 1.1.5 *Um elemento idempotente e em uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamado de primitivo se e não pode ser escrito como uma soma $u + v$, onde u e v são idempotentes ortogonais.*

Teorema 1.1.2 *Todo elemento idempotente não primitivo de $\mathcal{A}$ é a soma de um número finito de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais.*

Teorema 1.1.3 *Seja u um elemento idempotente não principal em uma álgebra $\mathcal{A}$. Então existe um elemento idempotente principal e tal que $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ de tal forma que $e_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ são idempotentes primitivos dois a dois ortogonais e $u = e_1 + \dots + e_r$ para $r < n$.*

Definição 1.1.6 *Ao ideal nilpotente maximal de $\mathcal{A}$ chamaremos de radical da álgebra e denotaremos por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.*

Teorema 1.1.4 *$\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é o conjunto de todos os elementos propriamente nilpotentes de $\mathcal{A}$.*

Definição 1.1.7 Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é semisimples se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = (0)$.

Teorema 1.1.5 Uma álgebra $\mathcal{A}$ é semisimples, se e somente se ela é escrita como uma soma direta de subálgebras simples.

Teorema 1.1.6 Toda álgebra semisimples possui uma unidade u ($ua = au = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$).

Teorema 1.1.7 Toda álgebra simples é semisimples.

Agora citaremos alguns resultados referentes à módulos sobre uma álgebra $\mathcal{A}$. Naturalmente como podemos olhar uma álgebra $\mathcal{A}$ com a estrutura de anel, as definições coincidem com as definições de $\mathcal{R}$ -módulos.

Podemos olhar uma álgebra $\mathcal{A}$ como um módulo sobre ela mesma. Nestas condições a álgebra recebe o nome de *módulo regular*.

Dado um $\mathcal{A}$ -módulo M definimos o radical desse módulo como a interseção dos seus $\mathcal{A}$ -submódulos maximais e denotamos por $\mathcal{R}(M)$. Ao radical de $\mathcal{A}$ como um $\mathcal{A}$ -módulo regular, denotaremos por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Essa notação é a mesma que se dá ao radical de Jacobson da álgebra $\mathcal{A}$ uma vez que, em verdade, eles coincidem.

Teorema 1.1.8 Um $\mathcal{A}$ -módulo M é semisimples se e somente se o radical $\mathcal{R}(M)$ é nulo.

Teorema 1.1.9 Para qualquer $\mathcal{A}$ -módulo M , temos que $\mathcal{R}(M) = M\mathcal{R}(\mathcal{A})$ onde, $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ como já foi visto anteriormente, é o radical da álgebra $\mathcal{A}$.

1.1.2 Álgebras não associativas

Uma álgebra $\mathcal{A}$ não associativa é uma álgebra na qual a multiplicação não tem a propriedade associativa. Tal propriedade pode ser expressa através do associador $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$, para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Se a álgebra $\mathcal{A}$ é não associativa então existem elementos $x, y, z \in \mathcal{A}$ tais que $(x, y, z) \neq 0$. Naturalmente em uma álgebra associativa este associador é sempre zero.

Neste trabalho as álgebras estudadas serão não necessariamente associativas.

De um modo geral, quase todas as definições citadas acima para as álgebras associativas são válidas para as álgebras não associativas. A diferença reside exatamente nas definições que envolvem a multiplicação da álgebra. Abaixo citaremos algumas definições que diferem das álgebras associativas.

Definição 1.1.8 *O núcleo de uma álgebra $\mathcal{A}$, aqui denotado por $\mathcal{Z}$, é o conjunto dos elementos $z \in \mathcal{A}$ que se associam com todos os elementos de $\mathcal{A}$. Utilizando o associador, podemos escrever que se $z \in \mathcal{Z}$, então para todo $x, y \in \mathcal{A}$ temos:*

$$(x, y, z) = (x, z, y) = (z, x, y) = 0.$$

Observe que numa álgebra associativa, $\mathcal{Z} = \mathcal{A}$.

Definição 1.1.9 *O centro de uma álgebra $\mathcal{A}$ não associativa, aqui denotado por $\mathcal{C}$, é o conjunto dos elementos $c \in \mathcal{Z}$ que comutam com todos os elementos de $\mathcal{A}$, ou seja, para todo $x \in \mathcal{A}$, se $c \in \mathcal{C}$, então $xc = cx$, para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.1.10 *Seja $x \in \mathcal{A} \in \mathcal{B}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$.*

(i) *Então*

$${}^1x := x, \quad {}^{r+1}x := x({}^rx), \quad r \in N,$$

$$x^1 := x, \quad x^{r+1} := (x^r)x, \quad r \in N,$$

são chamadas respectivamente de potência principal à esquerda e à direita de x .

Similarmente potência principal à esquerda e à direita de uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ são definidas por

$${}^1\mathcal{B} := \mathcal{B}, \quad {}^{r+1}\mathcal{B} := \langle \mathcal{B}({}^r\mathcal{B}) \rangle, \quad r \in N,$$

$$\mathcal{B}^1 := \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}^{r+1} := \langle (\mathcal{B}^r)\mathcal{B} \rangle, \quad r \in N.$$

(ii) *A potência principal de uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é definida por*

$$\mathcal{B}^{(1)} := \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}^{(r+1)} := \langle \mathcal{B}\mathcal{B}^{(r)}, \mathcal{B}^{(r)}\mathcal{B} \rangle, \quad r \in N.$$

(iii) *A potência plenária de um elemento $x \in \mathcal{A}$ e a potência plenária de uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ são definidas respectivamente por*

$$x^{[1]} := x, \quad x^{[r+1]} := x^{[r]}x^{[r]}, \quad r \in N,$$

$$\mathcal{B}^{[1]} := \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}^{[r+1]} := \langle \mathcal{B}^{[r]}\mathcal{B}^{[r]} \rangle, r \in N.$$

(iv) *Um elemento $x \in \mathcal{A}$ é chamado de potência associativa se a seguinte igualdade é válida*

$$x^i x^j = x^{i+j}, \quad \text{para todo } i, j \geq 1$$

- Definição 1.1.11** (i) Um elemento $x \in \mathcal{A}$ é chamado de nilpotente à esquerda (nilpotente à direita) de índice k se ${}^k x = 0$ mas ${}^{k+1} x \neq 0$ ($x^k = 0$, mas $x^{k+1} \neq 0$).
- (ii) Uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é chamada de nil à esquerda (nil à direita) se todos os elementos de $\mathcal{B}$ são nilpotentes à esquerda (nilpotentes à direita).
- (iii) Uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é chamada de nilpotente à esquerda (nilpotente à direita, nilpotente) de índice k se ${}^k \mathcal{B} = 0$, mas ${}^{k+1} \mathcal{B} \neq 0$ ($\mathcal{B}^k = 0$, mas $\mathcal{B}^{(k+1)} \neq 0$, $\mathcal{B}^{(k)} = 0$ mas $\mathcal{B}^{(k+1)} \neq 0$, respectivamente).
- (iv) Uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é chamada de solúvel de índice k se $\mathcal{B}^{[k]} = 0$, mas $\mathcal{B}^{[k-1]} \neq 0$.

1.2 A álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

Seja a um elemento qualquer de uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo F . O operador multiplicativo à direita de $\mathcal{A}$, determinado por a é definido por

$$R_a : x \mapsto xa, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A}.$$

O conjunto $R(\mathcal{A})$ de todos os operadores multiplicativos determinados pelos elementos da álgebra $\mathcal{A}$ é um subespaço da álgebra associativa $\mathfrak{G}$ de todos os operadores lineares sobre $\mathcal{A}$. Similarmente, o operador multiplicativo à esquerda L_a é definido por

$$L_a : x \mapsto ax, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A},$$

e o conjunto $L(\mathcal{A})$ de todos os operadores multiplicativos à esquerda definidos pelos elementos de $\mathcal{A}$ é um subespaço de $\mathfrak{G}$.

Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ a álgebra envolvente de $R(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{A})$, isto é, a subálgebra associativa de $\mathfrak{G}$ gerada pela intersecção de todas as subálgebras de $\mathfrak{G}$ que contém $R(\mathcal{A})$ e $L(\mathcal{A})$. Podemos escrever os elementos dessa álgebra em termos polinomiais e então dizemos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é o conjunto de todos os polinômios $f(S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_n}), n \geq 1, f \in F[X_1, \dots, X_n]$, cujo termo independente é nulo e $S_{a_i} = L_{a_i}$ ou R_{a_i} .

Se adicionarmos a essa álgebra a função identidade Id de $\mathcal{A}$, obtemos uma álgebra com unidade que denotaremos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$ e similarmente escrevemos $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$ como

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp = \{f(S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_n}), n \geq 1, f \in F[X_1, \dots, X_n], S_{a_i} = L_{a_i} \text{ ou } R_{a_i}\}.$$

Se B é um subconjunto de $\mathcal{A}$, a álgebra envolvente dos operadores multiplicativos à direita e à esquerda de $\mathcal{A}$ definidos por elementos de B , denotaremos por $[B]^*$. Nestas condições temos que $[\mathcal{A}]^* = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, mas observe a diferença existente entre $[B]^*$ e $\mathcal{M}(B)$ quando B é uma subálgebra própria de $\mathcal{A}$. Neste caso essas duas álgebras são álgebras associativas de operadores sobre diferentes espaços.

Teorema 1.2.1 *Um ideal B de uma álgebra $\mathcal{A}$ é nilpotente se e somente se a subálgebra associativa $[B]^*$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é nilpotente.*

Uma álgebra $\mathcal{A}$ tem uma estrutura de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -módulo ($\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -módulo à esquerda) determinado por $f.a = f(a)$, para todo $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $a \in \mathcal{A}$. Naturalmente quando trocamos a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ por $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$, a estrutura que define $\mathcal{A}$ como módulo permanece a mesma.

1.3 Álgebras Alternativas

Todos os resultados citados aqui podem ser encontrados em [24, Cap.3] e ([28]).

Uma *álgebra alternativa* $\mathcal{A}$ sobre um corpo F é uma álgebra na qual as identidades

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x$$

estão asseguradas para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Essas equações são conhecidas como *lei alternativa à esquerda* e *lei alternativa à direita*, respectivamente. Em termos do associador $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$, podemos escrever essas leis como

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A},$$

e em termos dos operadores multiplicativos à direita e à esquerda por

$$L_{x^2} = L_x^2, \quad R_{x^2} = R_x^2 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A}.$$

Observe ainda que os multiplicadores comutam, ou seja, para todo $x \in \mathcal{A}$ temos que $R_x L_x = L_x R_x$.

Com os associadores nas álgebras alternativas temos a seguinte propriedade

$$(x, y, z) = -(y, x, z) = (y, z, x), \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathcal{A}.$$

Por sua vez essa propriedade implica na seguinte igualdade

$$(1.1) \quad (xy)x = x(yx) \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A},$$

chamada de *lei flexível*.

A linearização da lei flexível nos dá as tres identidades seguintes:

$$(1.2) \quad (xax)y = x[a(xy)],$$

$$(1.3) \quad y(xax) = [(xy)a]x,$$

$$(1.4) \quad (xy)(ax) = x(ya)x,$$

válidas para todo $a, x, y \in \mathcal{A}$, conhecidas como *Identidades de Moufang*.

Teorema 1.3.1 (Artin) *A subálgebra gerada por qualquer dois elementos de uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$ é associativa.*

Uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre F é chamada *álgebra de potências associativas* no caso em que qualquer subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por um elemento seja associativa.

O Teorema 1.3.1 implica que qualquer álgebra alternativa é de potências associativas.

Um elemento x , em uma álgebra de potências associativas, é chamado de *nilpotente* se existe um número r tal que $x^r = 0$. Uma álgebra onde todos os seus elementos são nilpotentes é chamada de *nilálgebra*.

Teorema 1.3.2 *Qualquer nilálgebra alternativa de dimensão finita sobre F é nilpotente.*

Proposição 1.3.1 *Qualquer álgebra $\mathcal{A}$ de potências associativas que não é uma nilálgebra, contém um elemento idempotente e não nulo.*

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra alternativa de dimensão finita sobre um corpo F que possui um elemento idempotente e , podemos escrever $\mathcal{A}$ como uma soma direta

$$(1.5) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{10} \oplus \mathcal{A}_{01} \oplus \mathcal{A}_{00},$$

onde $\mathcal{A}_{ij}$ ($i, j = 0, 1$) é o subespaço de $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} \mid ex_{ij} = ix_{ij}, \quad x_{ij}e = jx_{ij}\}, \quad i, j = 0, 1.$$

A decomposição da álgebra $\mathcal{A}$ nesta soma direta é chamada de *decomposição de Peirce* de $\mathcal{A}$ relativa ao idempotente e .

Uma decomposição de Peirce mais refinada para um álgebra alternativa $\mathcal{A}$ é dada pela decomposição relativa ao conjunto $e_1, e_2, \dots, e_n$ de elementos idempotentes dois a dois ortogonais de $\mathcal{A}$. Nestas condições $\mathcal{A}$ é escrita como soma direta de espaços vetoriais

$$(1.6) \quad \mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

onde, usando o delta de Kronecker, definimos

$$(1.7) \quad \mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} \mid e_k x_{ij} = \delta_{ki} x_{ij}, \quad x_{ij} e_k = \delta_{jk} x_{ij} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n\}$$

Relativo a esta decomposição temos as seguintes inclusões:

$$(1.8) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{jk} \subseteq \mathcal{A}_{ik} \quad (i, j, k = 0, 1, \dots, n);$$

$$(1.9) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ji} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n);$$

$$(1.10) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{kl} = 0 \quad j \neq k, (i, j) \neq (k, l) \quad (i, j, k, l = 0, 1, \dots, n).$$

Um idempotente e em uma álgebra arbitrária $\mathcal{A}$ é chamado de *primitivo* se não existem idempotentes ortogonais $u, v \in \mathcal{A}$ tais que $e = u + v$. Em uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$ de dimensão finita qualquer idempotente e pode ser escrito como uma soma $e = e_1 + \cdots + e_n$ de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais.

Em uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$ de dimensão finita temos que um elemento idempotente e é principal, se e somente se a subálgebra $\mathcal{A}_{00}$ da decomposição de Peirce (1.5) relativa a e , é uma nilálgebra. Temos também que qualquer álgebra alternativa $\mathcal{A}$, que não é uma nilálgebra, contém um elemento idempotente principal. Ainda mais se u é qualquer idempotente nesta álgebra, então existem elementos idempotentes primitivos e dois a dois ortogonais $e_1, e_2, \dots, e_n$ tais que $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$, ($1 \leq r \leq n$), enquanto que $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ é um idempotente principal em $\mathcal{A}$.

Definição 1.3.1 *Um ideal I de uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamado de minimal se os únicos ideais da álgebra $\mathcal{A}$ contidos em I são os triviais, isto é, o próprio I e (0) .*

Teorema 1.3.3 *Se I é um ideal minimal de uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$, então $I^2 = (0)$ ou I é uma álgebra simples.*

Denotando por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ o *radical* de $\mathcal{A}$, ou seja, o ideal nil maximal de $\mathcal{A}$, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.3.4 (Zorn). *O radical $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ de uma álgebra alternativa $\mathcal{A}$ de dimensão finita sobre um corpo F , é o conjunto de todos os elementos propriamente nilpotentes de $\mathcal{A}$.*

Corolário 1.3.1 *Seja e um idempotente principal em uma álgebra alternativa de dimensão finita $\mathcal{A}$ e (1.5) a decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$ relativo ao idempotente e . Então temos que $\mathcal{A}_{10} \oplus \mathcal{A}_{01} \oplus \mathcal{A}_{00}$ está contido no radical $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.*

Dizemos que uma álgebra alternativa é semisimples se seu radical $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é zero. Nestas condições temos que a álgebra quociente $\mathcal{A}/\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é semisimples uma vez que seu radical é zero.

Corolário 1.3.2 *Toda álgebra alternativa $\mathcal{A} \neq 0$ semisimples e de dimensão finita possui um elemento identidade 1.*

Corolário 1.3.3 *Toda álgebra alternativa $\mathcal{A}$ simples e de dimensão finita, possui um elemento identidade 1.*

Teorema 1.3.5 (Zorn) *Uma álgebra alternativa de dimensão finita $\mathcal{A} \neq 0$ é semisimples se e somente se $\mathcal{A} = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ onde G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são ideais simples de $\mathcal{A}$.*

1.4 Álgebras Béricas

1.4.1 Elementos da Genética Clássica

O conceito fundamental da genética clássica, o *gen*, foi introduzido por Mendel sobre o nome de *carácter constante* para explicar a estatística hereditária observada em seus experimentos. De acordo com o conceito moderno um gen é uma porção distinta de uma molécula linear de ácido nucléico (DNA

ou RNA) que codifica uma certa sequência de aminoácidos. Entendemos o gen como uma unidade elementar de hereditariedade.

Cada célula traz em seu núcleo uma enorme quantidade de genes. Ao conjunto desses genes chamamos de *genótipo* da célula. Os genótipos de todas as células de um organismo, excetuando-se as células sexuais (gametas) e outros tipos de células especializadas, são idênticos ao genótipo do *zigoto* - o ovo fertilizado - a partir do qual o organismo se desenvolve. Esta uniformidade é assegurada pelo mecanismo de *mitose*, um processo de divisão celular no qual cada gen é duplicado e então as duas cópias se tornam partes das duas células filhas. Esta descrição e o mais que se segue estão grandemente simplificados mas são suficientes para a proposta deste trabalho. Pode ser considerado como um modelo verbal preliminar que será o objeto de maiores formalizações matemáticas.

No núcleo os genes se situam em estruturas chamadas de *cromossomos*. Todo cromossomo pertence a uma classe de cromossomos *homólogos* que são muito parecidos. Cada classe é chamada de *grupo de linkage*. O número de grupos de linkages e seus cromossomos são fixados para cada espécie. Em espécies com diferenciação bissexual, dois grupos de linkages são associados com a bissexualidade e são chamados de *grupo de linkage sexual*. Os cromossomos destes grupos são chamados de *cromossomos sexuais*. Estes grupos de linkages são usualmente chamados de *X* e *Y*. Os grupos de linkages que restam são chamados de *autossomais* e os cromossomos de *autossomos*. A posição no qual um gen aparece no cromossomo é denominado de *locus*. Um cromossomo pode ser convencionalmente representado como um segmento de linha reta separada em *loci* consecutivos. Aqui lembramos que a palavra *loci*, significa o plural de *locus*. Em cromossomos homólogos existe uma corres-

pondência biunívoca entre os loci. Os genes que aparecem em cromossomos homólogos são chamados de genes *alelos*. Genes alelos podem espontaneamente trocar de lugar entre eles. Essas transformações são chamadas de *mutações*. Mutações podem acarretar a ocorrência de novos alelos.

Considerando agora a correspondência entre os loci como idêntica, podemos dizer que genes alelos pertencem ao mesmo locus ou são alelos de um locus. Neste sentido, dizemos que um locus pertence não a um dado cromossomo, mas a um grupo de linkage. Dois loci que pertencem ao mesmo grupo de linkage são chamados de loci *linked*s. Podem também ser chamados de loci *autossomais* ou *X* ou *Y*–linked, dependendo do grupo de linkage do locus. Loci *X* e *Y*–linked são denominados *linked*s *sexualmente*. Alguns loci podem ser considerados simultaneamente como *X* e *Y*–linked e neste caso eles são chamados de *XY*–linked e os cromossomos *X* e *Y* são considerados como homólogos. Observe que cada locus contém pelo menos dois alelos. No caso onde ocorrem exatamente dois alelos, o locus é chamado de *dialélico* e no caso geral é chamado de *polialélico*. O conjunto de *N* cromossomos homólogos é chamado *N*–*ploid*. Para *N* = 1 chamamos *haplóide*, para *N* = 2, *diplóide* e etc... Para *N* > 2 o conjunto é chamado de *poliplóide*.

Em cada célula existe pelo menos um cromossomo autossomal e pelo menos um cromossomo sexual de cada grupo de linkage. Essa quantidade mínima pode ser justificada se levarmos em conta a célula sexual, o gameta, que possui um representante de cada cromossomo homólogo (aqui tomamos como exemplo o gameta da espécie humana). O *plóide* de uma célula é no caso geral descrito por plóides $N_1, N_2, \dots, N_r$ de grupos de linkages autossomais e plóides N_X e N_Y de grupos de linkages sexuais. Se $N_1 = 1, N_2 = 1, \dots, N_r = 1, N_X + N_Y = 1$, então a célula é chamada de

haplóide. Se $N_1 = 2, N_2 = 2, \dots, N_r = 2, N_X + N_Y = 2$, a célula é chamada de *diplóide*. Em uma célula diplóide pode ocorrer de $N_X = 2, N_Y = 0$ ou $N_X = 1 = N_Y$. A combinação $N_X = 0, N_Y = 2$ não ocorre jamais. Em células haplóides existe apenas um X -cromossomo ou um Y -cromossomo. Em um caso simplista, estamos considerando os gametas como células haplóides e os zigotos como células diplóides. Se o zigoto é diplóide, então, o mesmo ou diferentes genes podem aparecer em um locus pertencente a dois cromossomos homólogos. No primeiro caso a célula é chamada de *homozigoto* e no segundo caso é chamada de *heterozigoto*.

Para dar uma espécie de exemplo do que foi citado acima, consideramos um caso simples observado por Mendel de um locus autossomal dialélico com alelos $\mathcal{A}$ e a . Os gametas eram haplóides com genótipos $\mathcal{A}$ e a , enquanto que os zigotos eram diplóide com genótipos $\mathcal{A}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}a$, e aa . Os zigotos com genótipos $\mathcal{A}\mathcal{A}$ e aa são homozigotos e os zigotos com genótipos $\mathcal{A}a$ são heterozigotos.

Cada organismo de uma espécie com reprodução sexual é produto da reprodução de dois outros organismos, um *pai* e uma *mãe*. Neste trabalho, consideraremos apenas espécies deste tipo. Vamos supor então o mecanismo onde dois genótipos pais geram um outro genótipo. Tal mecanismo é feito em dois estágios, a *meiose* e a *fertilização*, de acordo com os níveis de existência do núcleo zigótico e do núcleo gamético. Esta reprodução em dois estágios é um critério formal do carácter sexual. A reprodução assexuada é feita através do processo de *mitose*.

I-) *Meiose* é um processo de formação de gametas a partir de zigotos pela separação de cromossomos homólogos e a formação então de células filhas. Na espécie humana o número de possibilidades diferentes destas células filhas

atinge o número de 2^{23} .

II-) Fertilização. Durante a fertilização dois gametas haplóides vindos aleatoriamente de dois organismos distintos se fundem e formam um zigoto que é diplóide. No processo de reprodução, a partir dos genótipos parentais, diferentes genótipos podem ser formados com certas probabilidades.

A ação dos genes é manifestada estatisticamente em grandes comunidades de indivíduos de mesma espécie. Estas comunidades são chamadas de *populações*. Existem populações *abertas* e *fechadas*. Em populações abertas as *migrações* são possíveis, isto é, pode existir um fluxo de indivíduos de outras populações. Nas populações fechadas não é possível que ocorram migrações. Nestas populações fechadas o aparecimento de novos genes só é possível por meio das mutações.

A população não existe somente no espaço, mas também no tempo, isto é, têm o seu próprio ciclo de vida. A base para este fenômeno é a reprodução por *interação*. A interação em uma população pode ser livre, fenômeno este que chamamos de *parmixia*, ou sujeita a certas restrições. Por exemplo na espécie humana casamentos entre pais e filhos, irmãos e irmãs, assim como parentes em geral, não são aceitos em decorrência de possíveis problemas hereditários.

É possível pensar que toda população no espaço e no tempo é constituída por gerações discretas $F_0, F_1, F_2, \dots$. A geração F_{t+1} é o conjunto de indivíduos cujos pais pertencem à geração F_t . A geração F_0 é fixada. Esta é uma situação em que a população não é de *overlap*. Isto significa que não acontece de uma geração F_{t+1} ter seus pais pertencentes às gerações $F_i, F_j, (i, j \leq t)$.

Em cada geração F_t a população é caracterizada pelo seu tamanho S_t .

Se o número S_l é muito grande, então a população deve ser caracterizada em termos estatísticos. Um *estado* de uma população é a distribuição de probabilidades dos diferentes *tipos* de organismos presentes nas gerações. Uma partição dos tipos é chamada de *diferenciação*. Aqui consideraremos os conjuntos de tipos como finitos.

Um exemplo simples de diferenciação é a diferenciação sexual. Em populações bissexuais com diferenciação sexual, qualquer partição de tipos deve estar de acordo com a diferenciação sexual, ou seja, todos os organismos do mesmo tipo devem pertencer ao mesmo sexo. Desta forma é possível falar de tipos masculinos e tipos femininos. Uma população bissexual onde os tipos são independentes do sexo, são chamadas de *autossomais*.

A *evolução* de uma população compreende uma determinada mudança de estado na geração como resultado de reprodução e seleção. A evolução de uma população pode ser considerada como um processo aleatório, porém neste trabalho não trataremos deste caso.

Vamos ver agora algumas formalizações matemáticas simples do que foi tratado. Essas formalizações ajudam a traçar um estudo de comportamento de determinadas populações, seu tempo de vida, o tempo em que um gen continua se manifestando, as probabilidades de se herdar um gen, etc...

A álgebra gamética. Como primeiro exemplo consideraremos hereditariedade Mendeliana simples para um único gen com alelos $\mathcal{A}$ e a . Neste tipo de hereditariedade a probabilidade da próxima geração herdar o alelo $\mathcal{A}$, será igual à probabilidade da geração de herdar o alelo a . Assim, quando dois gametas se reproduzem, existe uma multiplicação que indica como a informação hereditária será passada para a próxima geração. Esta multiplicação é dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
(1.11) \quad & \mathcal{A} \times \mathcal{A} = \mathcal{A}, \\
(1.12) \quad & \mathcal{A} \times a = \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{1}{2}a, \\
(1.13) \quad & a \times \mathcal{A} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\mathcal{A}, \\
(1.14) \quad & a \times a = a.
\end{aligned}$$

Na primeira e quarta expressões, observamos que os dois gametas trazem os alelos iguais, assim a próxima geração herdará este alelo. Nas outras duas expressões, como cada gameta carrega um alelo diferente, a próxima geração pode herdar qualquer um dos dois alelos com probabilidade de $1/2$. Estas expressões são uma representação algébrica do papel da hereditariedade Mendeliana simples. Agora que definimos uma multiplicação sobre os símbolos $\mathcal{A}$ e a , podemos definir matematicamente uma álgebra bidimensional sobre $\mathfrak{R}$ com base $\{\mathcal{A}, a\}$. Esta álgebra é chamada de *álgebra gamética para hereditariedade Mendeliana simples* com dois alelos.

Dependendo da população, um elemento geral $\alpha\mathcal{A} + \beta a$ da álgebra gamética o qual satisfaz $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ com $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ e $\alpha + \beta = 1$, pode representar uma população, um simples indivíduo de uma população, ou um simples gameta. Em cada caso, os coeficientes α e β significam a porcentagem da frequência associada ao alelo. Ou seja, se o elemento representa uma população, então α é a porcentagem da população que traz o alelo $\mathcal{A}$ do gene considerado. Analogamente, β é a porcentagem da população que possui o alelo a .

Para elementos da álgebra gamética que representam populações, a multiplicação de dois elementos representa interações aleatórias entre duas populações. Observe que a ordem com que os elementos se multiplicam é signi-

ficante, isto é, se a população P interage com a população Q , resultando uma população que interage com a população R , o resultado desta última pode não ser o mesmo se a população P interagir com o resultante da interação da população Q com a população R . Formalmente temos que $(P \times Q) \times R$ não é igual a $P \times (Q \times R)$. Nestas condições podemos esperar que álgebras gaméticas podem não satisfazer a propriedade associativa. Por outro lado notamos claramente que este tipo de álgebra satisfaz a propriedade da comutatividade.

A álgebra gamética descrita acima corresponde a um exemplo muito simples com apenas um gen possuindo dois alelos que ocorrem com igual frequência. Daremos agora uma definição mais geral de uma álgebra gamética. Vamos supor então que tenhamos uma população que interage de forma aleatória com n gametas distintos. Sejam esses gametas $a_1, a_2, \dots, a_n$. Esses gametas podem diferir em um ou mais loci. Consideremos então esses n gametas como a base de um n -dimensional espaço vetorial. Neste espaço vetorial definimos a seguinte multiplicação

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} a_k,$$

de tal forma que

$$(1.15) \quad 0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

$$(1.16) \quad \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} = 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$(1.17) \quad \gamma_{ijk} = \gamma_{jik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Assim obtemos a álgebra que é chamada de uma *n-dimensional álgebra gamética*.

Álgebra com realização genética. Matematicamente, as álgebras que são originárias da genética são estruturas interessantes. São geralmente comutativas mas não são associativas e não são necessariamente álgebras de Lie, Jordan ou alternativas, embora muitas das propriedades algébricas dessas estruturas tenham significância genética. Uma definição mais geral de uma álgebra que pode ter significância genética é a álgebra com realização genética. Uma álgebra com realização genética é uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais com uma base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e multiplicação dada por

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} a_k,$$

tal que $0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1$ para todo i, j, k e

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} = 1,$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Tal base é chamada de base natural para $\mathcal{A}$.

Observemos que as álgebras gaméticas são álgebras com realização genética. Em geral, em uma álgebra $\mathcal{A}$ com realização genética, um elemento x em $\mathcal{A}$, representa uma população, ou um gen para uma população se ele é expresso como uma combinação linear de elementos da base $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n,$$

satisfazendo $0 \leq \alpha_i \leq 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Então α_i é a porcentagem da população x trazer consigo o alelo a_i .

A classe de todas as álgebras com realização genética é muito grande e, observe que, todas as álgebras gaméticas satisfazem esta definição. Assim estudar álgebras com realização genética tem uma importância relevante uma vez que são álgebras com significância genética.

1.4.2 Conceitos básicos

Como foi visto acima, álgebras com realização genética não são necessariamente associativas. Entretanto, elas pertencem a uma classe especial de álgebras não associativas. Uma álgebra não associativa em geral não possui uma representação matricial mas as álgebras com realização genética possuem uma representação matricial simples, ou melhor, possuem uma representação escalar. A partir disto temos a seguinte definição:

Definição 1.4.1 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo F é chamada de álgebra bária se ela admite um homomorfismo de álgebras não trivial $w : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{K}$. Em outras palavras, uma álgebra bária é uma álgebra com uma unidimensional representação. O homomorfismo w é chamado de homomorfismo peso.*

Naturalmente se $\mathcal{A}$ é uma álgebra bária, tomando um elemento $x \in \mathcal{A}$ tal que $w(x) \neq 0$, temos a seguinte decomposição para $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = Fx \oplus \text{Ker}(w).$$

A demonstração do resultado abaixo pode ser vista em [22].

Proposição 1.4.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma n -dimensional álgebra com realização genética sobre $\mathbb{R}$. Então temos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra bária.*

No que segue, citaremos alguns resultados que quando não forem provados podem ser encontrados em [20] e [25], onde são demonstrados com detalhes.

Teorema 1.4.1 *A correspondência $w \mapsto \text{Ker}(w)$ é uma bijeção entre o conjunto dos homomorfismos pesos de uma álgebra $\mathcal{A}$ e o conjunto dos ideais I de codimensão 1 tal que $\mathcal{A}^2 \not\subset I$.*

Corolário 1.4.1 *Dois homomorfismos pesos de uma álgebra $\mathcal{A}$ com núcleos iguais são iguais.*

Proposição 1.4.2 *Distintos homomorfismos pesos de uma álgebra $\mathcal{A}$ são linearmente independentes.*

Em vista da proposição acima segue que o número de homomorfismos pesos distintos de uma álgebra bária $\mathcal{A}$ não ultrapassa a dimensão da álgebra. No que segue, mostraremos que essa cota pode ser melhorada.

Teorema 1.4.2 *A correspondência $w \mapsto w|_{\mathcal{A}^2}$ é uma injeção entre o conjunto dos homomorfismos pesos de $\mathcal{A}$ e o conjunto dos homomorfismos pesos de $\mathcal{A}^2$.*

Prova: Temos que mostrar primeiramente que esta aplicação está bem definida. De fato isso acontece pois se $x \in \mathcal{A}$ tal que $w(x) = 1$, temos que $x^2 \in \mathcal{A}^2$ tem peso 1, logo $\mathcal{A}^2$ é uma álgebra bária com homomorfismo peso dado por $w|_{\mathcal{A}^2}$. Naturalmente temos que se $w_1 = w_2$ então $w_1|_{\mathcal{A}^2} = w_2|_{\mathcal{A}^2}$ e portanto a aplicação está bem definida.

Vamos mostrar agora que esta aplicação é injetiva. Sejam então w_1, w_2 homomorfismos báricos tais que $w_1|_{\mathcal{A}^2} = w_2|_{\mathcal{A}^2}$. Temos que mostrar que esses

dois homomorfismos são iguais e para tanto, basta mostrar que eles possuem núcleos iguais. Com efeito, seja $a \in \text{Ker}(w_1)$. Como $\text{Ker}(w_1)$ é um ideal de $\mathcal{A}$, temos que $a\mathcal{A} \subseteq \text{Ker}(w_1) \cap \mathcal{A}^2$, logo devido a igualdade das restrições dos homomorfismos em $\mathcal{A}^2$, segue que $a\mathcal{A} \subseteq \text{Ker}(w_2)$. Disto concluímos que $a \in \text{Ker}(w_2)$, pois caso contrário existiria $b \in \mathcal{A}$ tal que $w_2(ab) \neq 0$ o que geraria uma contradição. Assim mostramos que $\text{Ker}(w_1) = \text{Ker}(w_2)$ e portanto os dois homomorfismos são iguais e a aplicação é injetiva. ■

Considerando agora que $\mathcal{A}^{[1]} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{[i+1]} = \mathcal{A}^{[i]}\mathcal{A}^{[i]}$, temos o corolário abaixo:

Corolário 1.4.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra bária de dimensão finita. Então temos que o número máximo de homomorfismos pesos de $\mathcal{A}$ não ultrapassa $\dim(\mathcal{A}^{[m]})$ para todo m .*

Proposição 1.4.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra bária. Se para todo $a \in \text{Ker}(w)$ existir um monômio $p(x) \in F[x]$ distinto de zero tal que $p(a) = 0$, então só existe um homomorfismo peso em $\mathcal{A}$.*

Prova: Sejam dois homomorfismos w_1, w_2 . Temos de mostrar apenas que $\text{Ker}(w_1) = \text{Ker}(w_2)$. Vamos supor por contradição que essa igualdade não se verifica. Nestas condições existe $a \in \text{Ker}(w_1)$, tal que $w_2(a) = 1$ e portanto $w_2(a^2) = 1$. Utilizando a hipótese temos que existe $p(x) \in F[x]$ tal que $p(a^2) = 0$. Logo temos $0 = w_2(p(a^2)) = p(w_2(a^2)) = p(1) = 1$ o que é uma contradição. Logo a igualdade se verifica e o resultado segue. ■

Daqui em diante sempre que nos referirmos a uma álgebra bária, estaremos nos referindo ao par $(\mathcal{A}, w)$ onde $w : \mathcal{A} \rightarrow F$ é um homomorfismo

de álgebras não nulo. Lembramos que essa álgebra não é necessariamente comutativa, associativa ou de dimensão finita.

Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ denotaremos por $\text{bar}(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{B} : w(x) = 0\}$. Observamos que $\text{bar}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ se e somente se $\mathcal{B} \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})$. Quando $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \not\subseteq \text{bar}(\mathcal{A})$, então $\mathcal{B}$ é chamada de *subálgebra bária* de $(\mathcal{A}, w)$. Neste caso $(\mathcal{B}, w')$ é uma álgebra bária onde $w' = w|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow F$. Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra bária de $(\mathcal{A}, w)$ e $\text{bar}(\mathcal{B})$ é um ideal bilateral de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}$ é chamada de *subálgebra normal* de $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra bária de $(\mathcal{A}, w)$, então $\text{bar}(\mathcal{B})$ é um ideal bilateral de $\mathcal{B}$ de codimensão 1, chamado *bar ideal* de $\mathcal{B}$. Se $I \subseteq \text{bar}(\mathcal{B})$ é um ideal bilateral de $\mathcal{B}$, então I é chamado de *ideal bário* de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ é uma *subálgebra bária maximal* de $(\mathcal{A}, w)$ se $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$ e não existe $\mathcal{C} \triangleleft \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Analogamente I é um *ideal bário maximal* de $(\mathcal{A}, w)$ se I é um ideal bário de $(\mathcal{A}, w)$, $I \neq \text{bar}(\mathcal{A})$ e não existe J ideal bário tal que $I \subseteq J \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})$.

Uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ é *simples* se para todo $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, tivermos que $\text{bar}(\mathcal{B}) = 0$ ou $\text{bar}(\mathcal{B}) = \text{bar}(\mathcal{A})$.

Um *homomorfismo bário* de uma álgebra $(\mathcal{A}, w)$ em $(\mathcal{A}', w')$ é um homomorfismo de F -álgebras $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tal que $w' \circ \Phi = w$. De maneira análoga definimos epimorfismos, monomorfismos, etc

Vamos agora definir o radical de uma álgebra bária. Esta definição bem como a demonstração dos resultados que serão aqui citados poderão ser vistos em [13].

Definição 1.4.2 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária. O bar-radical de $(\mathcal{A}, w)$ é zero se $(\mathcal{A}, w)$ é simples e em caso contrário o bar-radical de $(\mathcal{A}, w)$ é a*

intersecção de $\text{bar}(\mathcal{B})$ onde $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$ é maximal. Neste trabalho denotaremos o bar-radical de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$.

Proposição 1.4.4 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bárica com idempotente de peso 1. Então estão asseguradas as seguintes condições:*

- (i) $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ é a intersecção de $\text{bar}(\mathcal{B})$, onde $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$ é maximal;
- (ii) $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ é a intersecção dos I 's, onde I é um ideal bárico maximal de $\mathcal{A}$

Proposição 1.4.5 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bárica. Então $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A})) = 0$.*

Proposição 1.4.6 *Seja $\mathcal{B}$ uma subálgebra bárica normal de uma álgebra bárica $(\mathcal{A}, w)$ tal que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}/\text{bar}(\mathcal{B})) = 0$. Então $\mathcal{R}_B(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$.*

A próxima definição pode ser vista com mais detalhes em [2].

Definição 1.4.3 *Sejam $(\mathcal{A}_1, w_1), (\mathcal{A}_2, w_2)$ duas álgebras báricas. Consideremos o produto direto destas álgebras $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Este produto direto é uma álgebra não necessariamente bárica, mas a subálgebra*

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathcal{A}_1, x_2 \in \mathcal{A}_2, w_1(x_1) = w_2(x_2)\},$$

*é uma álgebra bárica com homomorfismo peso dado por $w(x_1, x_2) = w_1(x_1)$. A esta álgebra chamaremos de **join** das álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ e denotaremos por $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ e o homomorfismo peso desta álgebra por $w_1 \vee w_2$.*

Por indução podemos definir o join de n álgebras báricas.

Definição 1.4.4 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária com idempotente de peso 1. Se existirem álgebras báricas simples $(\mathcal{A}_1, w_1), \dots, (\mathcal{A}_n, w_n)$ cada uma delas com idempotentes de peso 1 de tal forma que $(\mathcal{A}, w) \cong (\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n, w_1 \vee \dots \vee w_n)$, então $(\mathcal{A}, w)$ é chamada de álgebra bária semisimples.*

Proposição 1.4.7 *Se uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ é semisimples então temos que existem ideais báricos simples I_j ($j = 1, \dots, n$) tais que $\text{bar}(\mathcal{A}) = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$.*

Proposição 1.4.8 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária semisimples, então temos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$.*

Teorema 1.4.3 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária de dimensão finita com idempotente de peso 1. Se $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$, então $(\mathcal{A}, w)$ é semisimples.*

1.4.3 Álgebras de Bernstein

Uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ sobre um corpo K , com $\text{car}(K) \neq 2$, é uma *álgebra de Bernstein* se $\mathcal{A}$ é comutativa e $(x^2)^2 = w(x^2)x^2$. Sabemos que em uma álgebra de Bernstein o homomorfismo w é único, o $\ker w$ é um ideal de codimensão 1 e sempre existe um elemento idempotente de peso 1. Para cada idempotente e de $\mathcal{A}$, com $w(e) = 1$, temos a decomposição $\mathcal{A} = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, chamada de decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$ associada a e , onde

$$\begin{aligned} U_e &= \{u \in \text{bar}(\mathcal{A}) ; 2eu = u\} \\ V_e &= \{v \in \text{bar}(\mathcal{A}) ; ev = 0\} \end{aligned}$$

Os subespaços U_e e V_e satisfazem

$$(1.18) \quad U_e V_e \subseteq U_e \quad V_e^2 \subseteq U_e \quad U_e^2 \subseteq V_e \quad U_e V_e^2 = 0$$

O conjunto dos idempotentes de $\mathcal{A}$ de peso 1 é dado por

$$\text{Ip}(A) = \{e + u + u^2 ; u \in U_\epsilon\}$$

Se $f_u = e + u + u^2$ é outro idempotente de A , com $u \in U_\epsilon$, então

$$\begin{aligned} U_f &= \{x + 2ux ; x \in U_\epsilon\} \\ V_f &= \{w - 2uw - 2u^2w ; w \in V_\epsilon\} \end{aligned}$$

e as aplicações lineares $\sigma_u : U_\epsilon \rightarrow U_f$ e $\tau_u : V_\epsilon \rightarrow V_f$ definidas por

$$(1.19) \quad \sigma_u(x) = x + 2ux$$

$$(1.20) \quad \tau_u(w) = w - 2uw - 2u^2w$$

são isomorfismos de espaços vetoriais. Portanto, a dimensão dos subespaços U_ϵ e V_ϵ não depende da escolha do idempotente.

Sobre o bar-radical de uma álgebra de Bernstein, foi provado em [14] que se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra de Bernstein, então seu bar-radical $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \text{bar}(\mathcal{A})^2$.

Capítulo 2

Álgebras Alternativas Béricas

Neste capítulo estudaremos as álgebras alternativas béricas de dimensão finita sobre um corpo F . Assim, a menos quando especificado, estaremos considerando álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica diferente de dois. Naturalmente os resultados obtidos para essas álgebras são também válidos para as álgebras béricas associativas de dimensão finita sobre um corpo F .

2.1 Resultados Preliminares

Teorema 2.1.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bérica associativa, então $(\mathcal{A}, w)$ possui um idempotente de peso 1.*

Para a demonstração desse teorema precisaremos de três lemas que enunciaremos e provaremos a seguir.

Lema 2.1.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária associativa, então $(\mathcal{A}, w)$ possui um idempotente.*

Prova: Como $\mathcal{A}$ é bária, $\mathcal{A}$ não é uma nilálgebra pois possui pelo menos um elemento de peso não nulo e naturalmente esse elemento não pode ser nilpotente. Dessa forma, segundo [1, Cap.2, Teo.8], $\mathcal{A}$ possui um idempotente. ■

Lema 2.1.2 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária associativa e $a \in \mathcal{A}$, com $w(a) = 1$, então $\mathcal{A}a$ é uma subálgebra bária de $(\mathcal{A}, w)$.*

Prova: Temos que $\mathcal{A}a \neq \text{bar}(\mathcal{A})$, pois $a^2 \in \mathcal{A}a$ e $w(a^2) = w(a)w(a) = 1$ e se $a, b \in \mathcal{A}$, $(ba)(ca) = (bac)a \in \mathcal{A}a$. ■

Lema 2.1.3 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária associativa e para algum $a \in \mathcal{A}$ com $w(a) = 1$, tivermos que $\mathcal{A}a = \mathcal{A}$, então $(\mathcal{A}, w)$ possui um idempotente de peso 1.*

Prova: De acordo com [1, Cap.1, Teor.1], temos:

$$\dim \mathcal{A}a = \dim \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{A} \quad b \neq 0, \quad ba \neq 0$$

Assim $ba = 0$, se e somente se $b = 0$. Como $a \in \mathcal{A}$, existe $e \in \mathcal{A}$, $e \neq 0$ tal que $a = ea$, então $a = ea = e^2a$, $(e - e^2)a = 0$, e portanto $e = e^2$, e $1 = w(a) = w(e)$. Logo $w(e) = 1$. ■

No que segue, demonstraremos o Teorema 2.1.1.

Prova: Faremos a prova por indução sobre a dimensão de $\mathcal{A}$. Se $\dim \mathcal{A} = 1$, temos que $\mathcal{A} \cong Fa$, onde $w(a) = 1$, então pelo Lema 2.1.1. existe $\alpha \in$

F , $\alpha \neq 0$ tal que $(\alpha a)^2 = \alpha a$, de onde segue que $\alpha = 1$ e portanto a é um idempotente de peso 1.

Vamos supor, por hipótese de indução, que para toda álgebra bária associativa de dimensão menor que n o teorema é válido e vamos considerar $\mathcal{A}$ uma álgebra bária de dimensão n .

Temos que se $\mathcal{A} = \mathcal{A}a$, para algum $a \in \mathcal{A}$ tal que $w(a) = 1$, pelo Lema 2.1.3, $\mathcal{A}$ possui um idempotente de peso 1.

Se $\mathcal{A}a \neq \mathcal{A}$, então $\dim \mathcal{A}a < \dim \mathcal{A}$, logo pela hipótese de indução $\mathcal{A}a$ possui idempotente de peso 1, uma vez que pelo lema 2.1.2 $\mathcal{A}a$ é uma subálgebra bária. Como $\mathcal{A}a \subseteq \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A}$ possui pelo menos um idempotente de peso 1. ■

Corolário 2.1.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária de potências associativas, então $\mathcal{A}$ possui pelo menos um elemento idempotente de peso 1.*

Prova: Considere $x \in \mathcal{A}$, $w(x) = 1$ e $\mathcal{B}$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por x .

Observe que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é subálgebra bária e associativa, logo, pelo Teorema 2.1.1, existe um idempotente de peso 1 em $\mathcal{B}$, e portanto existe idempotente de peso 1 em $\mathcal{A}$. ■

Corolário 2.1.2 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra alternativa bária, então $\mathcal{A}$ possui pelo menos um elemento idempotente de peso 1.*

Proposição 2.1.1 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária, com um idempotente e de peso 1. Então $(\mathcal{A}, w)$ é alternativa se e somente se para quaisquer $u, v \in \text{bar}(\mathcal{A})$ são válidas as seguintes condições:*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & (\epsilon, \epsilon, u) = (u, \epsilon, \epsilon) = (\epsilon, u, \epsilon) = 0 \\
(ii) \quad & (\epsilon, u, u) = (u, u, \epsilon) = (u, \epsilon, u) = 0 \\
(iii) \quad & (u, u, v) = (v, u, u) = 0 \\
(iv) \quad & (\epsilon, u, v) + (u, \epsilon, v) = 0 \\
(v) \quad & (v, \epsilon, u) + (v, u, \epsilon) = 0
\end{aligned}$$

Prova: Como $\mathcal{A}$ é alternativa, temos que para todo $x, y \in \mathcal{A}$, vale que:

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0$$

e desta forma não temos nada a demonstrar.

Temos que mostrar agora a recíproca, isto é, se valem as cinco asserções, então $\mathcal{A}$ é alternativa. Para tanto consideremos $x = \alpha\epsilon + u$, $y = \beta\epsilon + v \in \mathcal{A}$ e vamos mostrar que $(x, x, y) = (y, x, x) = 0$. De fato:

$$\begin{aligned}
(\alpha\epsilon + u, \alpha\epsilon + u, \beta\epsilon + v) &= \alpha^2\beta(\epsilon, \epsilon, \epsilon) + \alpha^2(\epsilon, \epsilon, v) + \alpha\beta(\epsilon, u, \epsilon) + \alpha(\epsilon, u, v) \\
&\quad + \alpha\beta(u, \epsilon, \epsilon) + \alpha(u, \epsilon, v) + \beta(u, u, \epsilon) + (u, u, v) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma vez que todas as expressões da igualdade, devido à hipótese, se anulam. Analogamente podemos mostrar que $(y, x, x) = 0$. ■

Note que para as álgebras alternativas básicas, são válidas as identidades (1.2), (1.3), (1.4) de Moufang e todas as suas implicações. Também é válido o Teorema de Artin.

2.2 A decomposição de Peirce

Seja $(\mathcal{A}, w)$, uma álgebra alternativa básica. Como vimos no Corolário 2.1.1, $(\mathcal{A}, w)$, possui um idempotente de peso 1. Denotando por e esse idempotente,

escrevemos $(\mathcal{A}, w)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$, temos que L_ϵ, R_ϵ , são operadores idempotentes sobre $\mathcal{A}$. Do fato de $\mathcal{A}$ ser uma álgebra alternativa, de acordo com a seção (1.3), temos que esses operadores comutam, ou seja, $L_\epsilon R_\epsilon = R_\epsilon L_\epsilon$. Portanto $(\mathcal{A}, w)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{10} \oplus \mathcal{A}_{01} \oplus \mathcal{A}_{00}$$

Onde:

$$\mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} \in \mathcal{A} \mid ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}; i, j = 0, 1\}$$

Definição 2.2.1 Se $B \subseteq \mathcal{A}$, indicaremos:

$$B_{ij} = \{x_{ij} \in B \mid ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}; i, j = 0, 1\}$$

Agora, de acordo com (1.8) e (1.9) temos que os subespaços acima descritos obedecem as seguintes relações:

$$\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jk} \subseteq \mathcal{A}_{ik}, (i, j, k = 0, 1)$$

$$\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ji}, (i, j = 0, 1)$$

Proposição 2.2.1 Tendo em vista que $\mathcal{A} = Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})$, temos:

$$\mathcal{A}_{11} = Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$$

$$\mathcal{A}_{10} = \text{bar}(\mathcal{A})_{10}$$

$$\mathcal{A}_{01} = \text{bar}(\mathcal{A})_{01}$$

$$\mathcal{A}_{00} = \text{bar}(\mathcal{A})_{00}$$

Prova: Vamos mostrar que $\mathcal{A}_{11} = Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$:

Se $x \in Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$, temos que existem $\alpha \in F$, e $u \in \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$, tal que $x = \alpha e + u$, e então:

$$(\alpha e + u)e = (\alpha e)e + ue = \alpha e + u = e(\alpha e + u),$$

uma vez que $u \in \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$, e $e^2 = e$, logo $Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11} \subseteq \mathcal{A}_{11}$.

Para mostrar que $\mathcal{A}_{11} \subseteq Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$, consideramos $x = \alpha e + u$, com $\alpha \in F$, e $u \in \text{bar}(\mathcal{A})$. Se $x \in \mathcal{A}_{11}$, temos que $xe = ex = x$, logo:

$$(\alpha e + u)e = e(\alpha e + u) = \alpha e + u$$

de onde segue que:

$$ue = eu = u \Rightarrow u \in \text{bar}(\mathcal{A})_{11}$$

Vamos mostrar agora que $\mathcal{A}_{01} = \text{bar}(\mathcal{A})_{01}$.

É fácil ver que $\text{bar}(\mathcal{A})_{01} \subseteq \mathcal{A}_{01}$. Vamos então mostrar a inclusão contrária.

Se $x \in \mathcal{A}_{01}$, temos que $ex = 0$, $xe = x$, logo, $x \in \text{bar}(\mathcal{A})$, pois se $w(x) \neq 0$, teríamos $ex \neq 0$, o que gera uma contradição, logo $\mathcal{A}_{01} \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})_{01}$. Analogamente mostra-se que $\mathcal{A}_{10} = \text{bar}(\mathcal{A})_{10}$.

Para mostrar que $\mathcal{A}_{00} = \text{bar}(\mathcal{A})_{00}$, consideramos $x \in \mathcal{A}_{00}$, então existem $\alpha \in F$, e $u \in \text{bar}(\mathcal{A})$, tal que $x = \alpha e + u$, e então:

$$(\alpha e + u)e = e(\alpha e + u) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \quad ue = eu = 0$$

Portanto $x \in \text{bar}(\mathcal{A})_{00}$, logo $\mathcal{A}_{00} \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})_{00}$. A outra inclusão é trivial. ■

Até o final dessa seção, denotaremos $\mathcal{B} = \text{bar}(\mathcal{A})$, e então a decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00}$$

Na decomposição acima, temos que $Fe \oplus \mathcal{B}_{11}$ é uma subálgebra bária de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_{00}$ é uma subálgebra de $\text{bar}(\mathcal{A})$ que, naturalmente, não é bária.

A proposição que segue, bem como sua demonstração, pode ser encontrada de forma similar em [24, Cap. IV].

Proposição 2.2.2 *Em uma álgebra bária alternativa $(\mathcal{A}, w)$, um elemento e , é um idempotente principal se e somente se, com a notação acima, $\mathcal{B}_{00}$, obtido da decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$ por esse idempotente e , é uma nilálgebra.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Seja e um idempotente principal de peso 1 em $\mathcal{A}$. Se $x \in \mathcal{B}_{00}$, temos que $ex = xe = 0$. Portanto se acontecer de existir algum $x \in \mathcal{B}_{00}$ tal que $x^2 = x \neq 0$, teremos que e não é principal. Logo $\mathcal{B}_{00}$, não possui idempotentes e dessa forma, como estamos em dimensão finita, segue que $\mathcal{B}_{00}$ é uma nilálgebra.

$(\Leftarrow)$ Se $\mathcal{B}_{00}$ é uma nilálgebra, não existe $x \in \mathcal{B}_{00}$, tal que $x^2 = x \neq 0$, logo e é principal. ■

Consideremos então uma álgebra alternativa bária $(\mathcal{A}, w)$. Por resultados citados na seção (1.3), temos que todo idempotente e de peso 1, pode ser decomposto em idempotentes primitivos e_i , dois a dois ortogonais, da seguinte forma:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_t.$$

Como $w(e_j) = 1$ ou 0 e $w(e) = 1$, podemos supor que e_1 tem peso 1 e e_j , para $j = 2, 3, \dots, t$, tem peso zero.

Como e_1 tem peso 1 podemos escrever $\mathcal{A} = F e_1 \oplus \text{bar}(\mathcal{A})$, e a partir do idempotente e acima, fazemos uma decomposição de Peirce mais refinada de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j=0}^t \mathcal{A}_{ij}$$

onde,

$$\mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} \in \mathcal{A} \mid e_k x_{ij} = \delta_{ki} x_{ij}, x_{ij} e_k = \delta_{jk} x_{ij}, \quad (k = 1, 2, \dots, t)\}$$

Proposição 2.2.3 *Nessa decomposição temos:*

$$\mathcal{A}_{11} = F e_1 \oplus \text{bar}(\mathcal{A})_{11} \quad \mathcal{A}_{ij} = \text{bar}(\mathcal{A})_{ij}, \quad (i, j) \neq (1, 1)$$

Prova: A demonstração é análoga à demonstração da proposição (2.2.1). ■

Aqui denotaremos também $\text{bar}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ e então escrevemos:

$$\mathcal{A} = F e_1 \oplus \left(\bigoplus_{i,j=0}^t \mathcal{B}_{ij} \right)$$

Como observamos anteriormente a soma $u = e_2 + e_3 + \dots + e_t$, é um idempotente pertencente ao $\text{bar}(\mathcal{A})$, logo, pode-se fazer a decomposição de Peirce de $\text{bar}(\mathcal{A})$, em relação a esse idempotente. Tal decomposição denotaremos por:

$$\mathcal{B} = \text{bar}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i,j \neq 1, j=0}^t \mathcal{B}_j$$

Uma questão natural é saber, qual a relação que existe entre a decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$, em relação a $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$, e a decomposição de Peirce de $\text{bar}(\mathcal{A})$ em relação a $u = e_2 + e_3 + \dots + e_t$. Assim temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.4 Se denotarmos por $\mathcal{B}_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, t$, os subespaços de $\text{bar}(\mathcal{A})$, obtidos da decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$, em relação a $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t$ e por ${}_i\mathcal{B}_j$, os subespaços obtidos da decomposição de Peirce de $\text{bar}(\mathcal{A})$ em relação a $u = \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t$, temos:

$$(1) \mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00} = {}_0\mathcal{B}_0$$

$$(2) \bigoplus_{j=2}^t (\mathcal{B}_{0j} \oplus \mathcal{B}_{1j}) = \bigoplus_{j=2}^t {}_0\mathcal{B}_j$$

$$(3) \bigoplus_{j=2}^t (\mathcal{B}_{j0} \oplus \mathcal{B}_{j1}) = \bigoplus_{j=2}^t {}_j\mathcal{B}_0$$

$$(4) \mathcal{B}_{ij} = {}_i\mathcal{B}_j, \quad \text{para } i, j = 2, \dots, t$$

Prova: Vamos mostrar em (1), a primeira inclusão, ou seja que $\mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00} \subseteq {}_0\mathcal{B}_0$. Notemos que

$$\mathcal{B}_{11} = \{x \in \text{bar}(\mathcal{A}) \mid e_1x = xe_1 = x \text{ e } e_jx = xe_j = 0, j = 2, \dots, t\}$$

portanto, desta definição segue diretamente que $\mathcal{B}_{11} \subseteq {}_0\mathcal{B}_0$. Agora, se $x \in \mathcal{B}_{01}$, temos que $xe_j = 0, j = 1, \dots, t$ e $e_jx = 0, j = 2, \dots, t$. logo $x \in {}_0\mathcal{B}_0$, e então $\mathcal{B}_{10} \subseteq {}_0\mathcal{B}_0$. Analogamente temos as outras inclusões.

Vamos mostrar agora em (2) que $\mathcal{B}_{0j} \oplus \mathcal{B}_{1j} \subseteq {}_0\mathcal{B}_j, j = 2, \dots, t$. Para isto, observe que se $x \in \mathcal{B}_{1j}, e_ix = 0, i = 2, \dots, t$, e $xe_j = x, j = 2, \dots, t$, logo $x \in {}_0\mathcal{B}_j$. Analogamente, se $x \in \mathcal{B}_{0j}, e_ix = 0, i = 1, \dots, t$, e $xe_j = x, j = 2, \dots, t$, logo $x \in {}_0\mathcal{B}_j$. Dessa forma temos que

$$\bigoplus_{j=2}^t (\mathcal{B}_{0j} \oplus \mathcal{B}_{1j}) \subseteq \bigoplus_{j=2}^t {}_0\mathcal{B}_j$$

Com cálculos similares obtemos em (3) que

$$\bigoplus_{j=2}^t (\mathcal{B}_{j0} \oplus \mathcal{B}_{j1}) \subseteq \bigoplus_{j=2}^t {}_j\mathcal{B}_0$$

e em (4) que

$$\mathcal{B}_{ij} \subseteq {}_i\mathcal{B}_j$$

Assim temos todas as inclusões em um sentido. Para mostrarmos a outra inclusão, basta observar que estamos trabalhando com somas diretas do mesmo espaço e portanto a igualdade segue. ■

2.3 Idempotentes do $\text{bar}(\mathcal{A})$

Proposição 2.3.1 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra alternativa bária. Se $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$, é um idempotente principal em $(\mathcal{A}, w)$, tal que $w(e) = w(e_1) = 1$ e e_i , $(i = 1, \dots, t)$, são idempotentes primitivos dois a dois ortogonais, então $u = e_2 + \dots + e_t$, é um idempotente principal em $\mathcal{B} = \text{bar}(\mathcal{A})$.*

Prova: Observemos primeiramente que se $w(e) = 1$, então existe i , tal que $w(e_i) = 1$ e $w(e_j) = 0$ para $j \neq i$. Logo sem perda de generalidades podemos supor $i = 1$ e então $u = e_2 + \dots + e_t$, é um idempotente em $\text{bar}(\mathcal{A})$. Desta forma, podemos fazer a decomposição de Peirce de $\text{bar}(\mathcal{A})$, em relação a u . Com tal decomposição, se denotarmos $\mathcal{B} = \text{bar}(\mathcal{A})$, escrevemos

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{i,j \neq 1, j=0}^t {}_i\mathcal{B}_j$$

De acordo com a Proposição 2.2.2, u é um idempotente principal em $\text{bar}(\mathcal{A})$, se e somente se ${}_0\mathcal{B}_0$, é uma nilálgebra. Assim vamos mostrar que

${}_0\mathcal{B}_0$ é uma nilálgebra e para tanto vamos supor, por contradicção que ela não seja. Como $\mathcal{A}$, tem dimensão finita, segue que ${}_0\mathcal{B}_0$ também tem dimensão finita e portanto de acordo com a Proposição, possui um idempotente $x \neq 0$.

Considerando agora a decomposição de Peirce de $\mathcal{B}$ em relação a $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$, temos pela Proposição 2.2.4 que:

$${}_0\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00}$$

e pela Proposição, temos que e_1 , é o único idempotente em $A_{11} = Fe_1 \oplus \mathcal{B}_{11}$. Como $w(e_1) = 1$, segue que $\mathcal{B}_{11}$ é uma subálgebra nilpotente de $\text{bar}(\mathcal{A})$, uma vez que ela não possui idempotentes. Vamos supor então que $\mathcal{B}_{11}^m = 0$.

Observamos ainda, pela Proposição, que $\mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é nilpotente, existe um número k tal que $\mathcal{R}(\mathcal{A})^k = 0$. Seja $n = \max\{m, k\}$. Se $x \in {}_0\mathcal{B}_0$ é um idempotente não nulo, temos que $x^n = x$ e podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$x = b_{11} + b_{10} + b_{01} + b_{00}, \quad b_{ij} \in \mathcal{B}_{ij} (i, j = 0, 1).$$

Assim $x = b_{11} + c$, onde $c \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Pelo fato de que $x^n = x$, segue que $(b_{11} + c)^n = b_{11} + c = x$, logo $x = \sum b_i c_i$, onde $b_i c_i \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Outra vez, usando o fato de que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um ideal, $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ e como é nilpotente, $x = x^n = 0$, o que resulta numa contradicção, por estarmos supondo x não nulo. Logo ${}_0\mathcal{B}_0$ é uma nilálgebra e $u = e_2 + \dots + e_t$ é um idempotente principal ■

Proposição 2.3.2 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária alternativa e $e \in \mathcal{A}$, um idempotente de peso 1. Nessas condições temos que $\text{bar}(\mathcal{A})$ é uma nilálgebra se e somente se e é um idempotente primitivo e principal.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se e não é um idempotente primitivo, existem $u, v \in \mathcal{A}$ tais que $uv = vu = 0$, $u^2 = u$, $v^2 = v$, e ainda $e = u + v$. Como $w(e) = 1$, segue que se $w(u) = 1$ então $w(v) = 0$. Logo $v \in \text{bar}(\mathcal{A})$. Isso gera uma contradição pois $\text{bar}(\mathcal{A})$, por hipótese, é uma nilálgebra.

Se e não é principal, existe $v \in \mathcal{A}$, com $v^2 = v$ tal que $ev = ve = 0$. Logo $w(v) = 0$ e portanto $v \in \text{bar}(\mathcal{A})$ e isso não é possível uma vez que $\text{bar}(\mathcal{A})$ é uma nilálgebra. Assim segue que e é um idempotente primitivo e principal.

($\Leftarrow$) Como e é primitivo e principal, por hipótese, fazemos a decomposição de Peirce em relação a e , obtendo:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00}.$$

Como $\mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{B}_{11}$ é uma nilálgebra, usando os mesmos argumentos da Proposição 2.3.1, temos que $\text{bar}(\mathcal{A})$ é uma nilálgebra. ■

2.4 O radical nil e o bar-radical

Nesta seção estudaremos a relação que existe entre o radical nil de uma álgebra alternativa bária e o bar-radical. Lembramos que quando nos referirmos ao radical nil da álgebra, utilizaremos a notação $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ e quando estivermos tratando do bar-radical a notação usada será $R_B(\mathcal{A})$.

Proposição 2.4.1 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra alternativa bária e $\mathcal{J}$ o radical nil de $\text{bar}(\mathcal{A})$ como álgebra alternativa. Nessas condições temos que se $\text{bar}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{R}(\mathcal{A})$, então $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{J}$.*

Prova: Temos que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é o ideal nil maximal de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \neq \text{bar}(\mathcal{A})$, logo $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um ideal nil de $\text{bar}(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{J}$ é o ideal nil maximal de $\text{bar}(\mathcal{A})$, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{J}$

Para provar a outra inclusão, basta mostrar que $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{A}$, pois se isso acontece, como $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é o ideal maximal de $\mathcal{A}$, segue que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Para mostrar que $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{A}$, observe que pelo fato de $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \neq \text{bar}(\mathcal{A})$, então existe $x \in \text{bar}(\mathcal{A})$ com $x^2 = x \neq 0$. Seja $e = e_1 + \cdots + e_t$ um idempotente principal de peso 1 em $\mathcal{A}$ e então $u = e_2 + \cdots + e_t$ é um idempotente principal em $\text{bar}(\mathcal{A})$ de acordo com a Proposição 2.3.1.

Fazendo a decomposição de Peirce de $\text{bar}(\mathcal{A})$ com relação a u obtemos que:

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{i,j=0,2}^t {}_i\mathcal{B}_j$$

e como $\mathcal{J}$ é o radical de $\text{bar}(\mathcal{A})$ segue que:

$${}_0\mathcal{B}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_0\mathcal{B}_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_j\mathcal{B}_0 \right) \subseteq \mathcal{J}$$

Por outro lado, utilizando a decomposição de Peirce em relação a $e = e_1 + \cdots + e_t$, temos que se $j \in \mathcal{J}$;

$$j = a_{11} + a_{10} + a_{01} + a_{00} + \sum_{j=2}^t (a_{1j} + a_{0j}) + \sum_{j=2}^t (a_{j1} + a_{j0}) + \sum_{i,j=2}^t a_{i,j}$$

onde $a_{i,j} \in \mathcal{B}_{i,j}, (i, j = 0, 1, 2, \dots, t)$

Como $\mathcal{J}$ é um ideal de $\text{bar}(\mathcal{A})$, basta mostrar que $e_1 j, j e_1 \in \mathcal{J}$. Para tanto observemos que:

$$e_1 j = a_{11} + a_{10} + \sum_{j=2}^t a_{1j} \Rightarrow e_1 j \in {}_0\mathcal{B}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_0\mathcal{B}_j \right) \subseteq \mathcal{J}$$

$$j e_1 = a_{11} + a_{01} + \sum_{j=2}^t a_{j1} \Rightarrow j e_1 \in {}_0\mathcal{B}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_j\mathcal{B}_0 \right) \subseteq \mathcal{J}.$$

Dessa forma mostramos que $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Logo $\mathcal{J} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$. ■

Corolário 2.4.1 Se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, temos que:

$$\mathcal{A} = Fe_1 \oplus \left(\bigoplus_{i,j=2}^t {}_i\mathcal{B}_j \right)$$

Prova: A demonstração segue do fato que

$${}_0\mathcal{B}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_0\mathcal{B}_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^t {}_j\mathcal{B}_0 \right) \subseteq \mathcal{J}$$

e como $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, temos que $\mathcal{J} = 0$ logo;

$$\mathcal{A} = Fe_1 \oplus \left(\bigoplus_{i,j=2}^t {}_i\mathcal{B}_j \right)$$

■

Corolário 2.4.2 Se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, temos que existe e , idempotente primitivo tal que Fe é um ideal simples de $\mathcal{A}$.

Prova: Temos que se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, tomando $e = e_1$, onde e_1 é o primeiro somando do idempotente principal que aparece na demonstração da Proposição 2.4.1, temos de acordo com o Corolário 2.4.1 que

$$\mathcal{A} = Fe_1 \oplus \left(\bigoplus_{i,j=2}^t {}_i\mathcal{B}_j \right),$$

logo se $a \in \mathcal{A}$, temos que, existe $\alpha \in F$, tal que:

$$a = \alpha e_1 + \sum_{i,j=2}^t {}_i a_j, \quad {}_i a_j \in {}_i\mathcal{B}_j,$$

portanto:

$$aFe_1 = \left(\alpha e_1 + \sum_{i,j=2}^t {}_i a_j \right) Fe_1 = Fe_1$$

e, analogamente:

$$F e_1 a = F e_1 (\alpha e_1 + \sum_{i,j=2}^t a_j) = F e_1$$

Naturalmente $F e_1$ é um ideal simples, no sentido usual, de $\mathcal{A}$. ■

Lema 2.4.1 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra ^{bárica} alternativa. Nessas condições temos que se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, então $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$.*

Prova: Se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 0$, temos pelo Teorema 1.3.5, que $\mathcal{A}$ é escrito como uma soma direta de ideais simples (no sentido usual) $G_i, (i = 1, \dots, k)$, que têm a propriedade de possuírem um elemento identidade e_i , ou seja, $G_i = e_i \mathcal{A} = \mathcal{A} e_i$. Assim, escrevemos

$$\mathcal{A} = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k.$$

Observe que para algum i , temos $w(e_i) = 1$. De fato, pois como os e_i 's são unidades, segue que $w(e_i) = 0$ ou $w(e_i) = 1$. Se todos os e_i 's tivessem peso zero, uma vez que $e_i \mathcal{A} = G_i$, seguiria que para todo i , $G_i \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})$ e então teríamos que $\mathcal{A}$ não seria uma álgebra bária. Desta forma, sem perda de generalidades, vamos considerar $i = 1$ e então $w(e_1) = 1$. Afirmamos agora, que se $j > 1$, então $w(e_j) = 0$. Para ver isto, basta observar que $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$, de onde segue que $0 = w(e_1) w(e_j) = 1 \cdot w(e_j)$. Portanto $w(e_j) = 0$. Assim $G_i \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})$ para $1 < i \leq k$.

Finalmente, vamos olhar para $G_1 = F e_1 \oplus \text{bar}(G_1)$. Note que $\text{bar}(G_1)$ é um ideal da álgebra $\mathcal{A}$ contido propriamente em G_1 que por hipótese é simples. Desta forma temos que $\text{bar}(G_1) = 0$, uma vez que não pode ser igual G_1 . Então escrevemos

$$\mathcal{A} = F e_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k,$$

de onde segue que $\mathcal{A}$ é semisimples no sentido bário e portanto conforme Teorema 1.3.5, $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$. ■

Lema 2.4.2 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária alternativa. Então temos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$.*

Prova: Se $\text{bar}(\mathcal{A})$ é uma nilálgebra, como $\text{bar}(\mathcal{A})$ é um ideal, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{bar}(\mathcal{A})$ e portanto $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Vamos supor então que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \neq \text{bar}(\mathcal{A})$. Nessas condições temos que $\mathcal{P} = Fe \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ normal e bária. Além disso o radical nil de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Dessa forma temos que $\mathcal{A}/\text{bar}(\mathcal{P}) = \mathcal{A}/\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido usual pois seu radical nil é nulo. Assim, de acordo com o Lema 2.4.1, temos que

$$\mathcal{R}_B(\mathcal{A}/\mathcal{R}(\mathcal{A})) = 0$$

e de acordo com 1.4.6 segue que:

$$\mathcal{R}_B(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \text{bar}(\mathcal{P}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}).$$

Logo $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$, e, nessas condições, $\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ é sempre nilpotente. ■

Como vimos acima, o bar-radical de uma álgebra alternativa $(\mathcal{A}, w)$, está contido no radical nil dessa álgebra. Gostaríamos de mostrar que a outra inclusão é verdadeira e então a igualdade se verificaria. Porém isso não ocorre e mostraremos esse fato com um exemplo de uma álgebra bária onde o radical nil é distinto do bar-radical.

Exemplo: Consideremos uma álgebra $\mathcal{A}$ gerada pelo conjunto $\{e, u, v\}$ com multiplicação dada pela tabela abaixo e homomorfismo peso $w : \mathcal{A} \rightarrow F$.

onde $w(\epsilon) = 1, w(u) = w(v) = 0$.

	ϵ	u	v
ϵ	ϵ	u	v
u	u	0	0
v	v	0	v

Facilmente comprova-se que essa álgebra é associativa e, portanto, alternativa. Observe que os ideais báricos $\langle u \rangle, \langle v \rangle$ são simples e $\text{bar}(\mathcal{A}) = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$, portanto $\mathcal{A}$ é semisimples no sentido bárico e então $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$. Agora, se consideramos o ideal $\langle u \rangle$ vemos que seus elementos são propriamente nilpotentes e então $\langle u \rangle \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$, como o ideal unidimensional $\langle v \rangle$ tem como base um idempotente, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \langle u \rangle$.

Proposição 2.4.2 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bárica, com $\text{bar}(\mathcal{A}) = I_1 + \dots + I_k$, onde I_j para $1 \leq j \leq k$ são ideais báricos simples e $\mathcal{J}$ é qualquer ideal bárico de $\mathcal{A}$ então temos que $\mathcal{J} = 0$ ou $\mathcal{J} = I_{j_1} \oplus \dots \oplus I_{j_l}, 1 \leq j_i \leq k$*

Prova: Seja $\mathcal{J}$ um ideal bárico de $\mathcal{A}$. Se $j \in \mathcal{J}$, temos que j é escrito da seguinte forma: $j = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, onde $i_l \in I_l, (l = 1, 2, \dots, k)$. Agora consideremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{J}_l = \{i_l \in I_l \mid i_l \text{ é somando de algum } j \in \mathcal{J}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{J}_l$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Para ver isto, consideramos $x \in \mathcal{A}$ e $i_l \in \mathcal{J}_l$. Como $i_l \in \mathcal{J}_l$ temos que existe $j \in \mathcal{J}$ tal que i_l é um dos somandos de j . Pelo fato de $\mathcal{J}$ ser um ideal, segue que $xj, jx \in \mathcal{J}$, de onde segue que $xi_l, i_lx \in \mathcal{J}_l$, uma vez que são somandos de xj e jx respectivamente e pertencem a I_l pois I_l é um ideal de $\mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{J}_l \subseteq I_l$ é um ideal, de onde segue que $\mathcal{J}_l = (0)$ ou $\mathcal{J}_l = I_l$ e assim a proposição segue. ■

Proposição 2.4.3 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra alternativa bária e I um ideal bário simples de $\mathcal{A}$. Então temos que $I^2 = I$ ou $I^2 = (0)$.*

Prova: Como $I^2 \subseteq I$, pelo fato de I ser simples, a única coisa que temos de provar é que I^2 é um ideal de $\mathcal{A}$. Para tanto seja $a = mn \in I^2$ e $x \in \mathcal{A}$. Nestas condições, devido ao fato de $\mathcal{A}$ ser uma álgebra alternativa, temos

$$\begin{aligned} a(mn) &= (xm)n - (x, m, n) \\ &= (xm)n - (n, x, m) \\ &= (xm)n - (nx)m + n(xm) \in I^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (mn)a &= m(nx) + (m, n, x) \\ &= m(nx) - (m, x, n) \\ &= m(nx) - (mx)n + m(xn) \in I^2 \end{aligned}$$

Assim mostramos que I^2 é um ideal. ■

Até aqui mostramos que se uma álgebra alternativa bária, $(\mathcal{A}, w)$ é semi-simples no sentido bário, ou seja, $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$, então temos que $\mathcal{A}$ é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_s \oplus I_{s+1} \oplus \cdots \oplus I_k,$$

onde os ideais báricos simples $\mathcal{R}_j$, $1 \leq j \leq s$ e I_l , $s+1 \leq l \leq k$ satisfazem que $\mathcal{R}_j^2 = 0$, $I_l^2 = I_l$. Notemos também que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_s$.

Ainda nestas condições, sobre a subálgebra alternativa bária $Fe \oplus I_{s+1} \oplus \cdots \oplus I_k$, temos a seguinte proposição,

Proposição 2.4.4 *A subálgebra alternativa bária $\mathcal{A}' = Fe \oplus I_{s+1} \oplus \cdots \oplus I_k$, descrita acima é semisimples no sentido de que seu nil radical é nulo e então existe um idempotente $e_1 \in \mathcal{A}$ com $w(e_1) = 1$ de tal forma que $e_1 I_l = I_l e_1 = 0$ para $s+1 \leq l \leq k$.*

Prova: O único fato que precisamos mostrar é que o nil radical de $\mathcal{A}'$ é nulo, pois se isso acontece, escrevemos $\mathcal{A}'$ como uma soma de subálgebras simples e de acordo com a demonstração do Lema 2.4.1, temos que existe e_1 tal que Fe_1 é um ideal de $\mathcal{A}'$ e então, $e_1 G_i = G_i e_1 = 0$ para $2 \leq i \leq m$. Notemos também que se $\mathcal{A}' = Fe_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_m$ é a decomposição de $\mathcal{A}'$ em subálgebras simples, temos que $G_2 \oplus \cdots \oplus G_m = I_{s+1} \oplus \cdots \oplus I_k$ e então de acordo com a Proposição 2.4.2, temos que cada G_i para $2 \leq i \leq m$, é uma soma dos ideais I_l . Como esses ideais são simples no sentido usual, e portanto simples no sentido bário, segue $m-1 = k-s+1$ e cada G_i é igual a um dos I_l . Portanto $e_1 I_l = I_l e_1 = 0$.

Vamos mostrar então que o radical nil de $\mathcal{A}'$ é nulo. Denotamos por $\mathcal{R}(\mathcal{A}')$ o radical nil de $\mathcal{A}'$. Temos que $\mathcal{R}(\mathcal{A}')$ é o conjunto dos elementos propriamente nilpotentes em $\mathcal{A}'$. Afirmamos que $\mathcal{R}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Isto é trivial pois se $x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, temos que $x\mathcal{R}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$, logo os elementos de $\mathcal{R}(\mathcal{A}')$ são propriamente nilpotentes em $\mathcal{A}$ e portanto a inclusão segue. Como temos que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}' = (0)$, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A}') = 0$. ■

Lema 2.4.3 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra alternativa bária. Então temos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})^2$ e portanto $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \text{bar}(\mathcal{A})^2$.*

Prova: Considere $e \in \mathcal{A}$ um idempotente de peso 1 e a decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \mathcal{B}_{11} \oplus \mathcal{B}_{10} \oplus \mathcal{B}_{01} \oplus \mathcal{B}_{00}.$$

Devido às propriedades desta decomposição citadas em (1.8), (1.9) temos que existem subespaços vetoriais $X_{i,j} \subseteq \mathcal{B}_{i,j}$, tais que

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \text{bar}(\mathcal{A})^2 \oplus X_{11} \oplus X_{10} \oplus X_{01} \oplus X_{00}.$$

Considere agora Y_{ij} bases para os subespaços X_{ij} , e o conjunto

$$\mathcal{J}_z = \text{bar}(\mathcal{A})^2 + \text{vect}_F\{(Y_{11} \cup Y_{10} \cup Y_{01} \cup Y_{00}) \setminus \{z\}\},$$

onde $z \in Y_{11} \cup Y_{10} \cup Y_{01} \cup Y_{00}$.

Afirmamos que $\mathcal{J}_z$ é um ideal bárico maximal de $\mathcal{A}$. Vamos mostrar primeiro que $\mathcal{J}_z$ é um ideal bárico. Para tanto seja $a \in \mathcal{A}$ e $j_z \in \mathcal{J}_z$. Se $a \in \text{bar}(\mathcal{A})$, temos que $aj_z, j_z a \in \text{bar}(\mathcal{A})^2$, logo $aj_z, j_z a \in \mathcal{J}_z$. Falta mostrar para $a = e$, ou seja, que $ej_z, j_z e \in \mathcal{J}_z$. Observe que se $j_z \in \mathcal{J}_z$, temos que j_z é escrito da seguinte forma: $j_z = \sum a_i b_i + a_{11} + a_{10} + a_{01} + a_{00}$, onde $\sum a_i b_i \in \text{bar}(\mathcal{A})^2$ e $a_{ij} \in Y_{ij}$. Assim temos que

$$ej_z = e(\sum a_i b_i + a_{11} + a_{10} + a_{01} + a_{00}) = \sum e(a_i b_i) + a_{11} + a_{10},$$

que está em $\mathcal{J}_z$, pois como $\mathcal{A}$ é uma álgebra alternativa, fazendo uso da lei flexível (1.1) temos que para todo i , $e(a_i b_i) = (e, a_i, b_i) - (ea_i)b_i = -(a_i, e, b_i) - (ea_i)b_i = -(a_i e)b_i + a_i(eb_i) - (ea_i)b_i$ e este produto está em $(\text{bar}(\mathcal{A}))^2$. Analogamente tem-se que $j_z e \in \mathcal{J}_z$. Dessa forma temos que $\mathcal{J}_z$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Naturalmente, ele é bárico e como sua codimensão é 1, segue que é maximal.

Finalmente, uma vez que para todo $z \in Y_{11} \cup Y_{10} \cup Y_{01} \cup Y_{00}$, $\mathcal{J}_z$ é maximal, segue que

$$\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \bigcap_z \mathcal{J}_z = (\text{bar}(\mathcal{A}))^2.$$

Logo $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$. ■

Lema 2.4.4 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra alternativa bária, então temos que $(\text{bar}(\mathcal{A}))^2 \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{A})$.*

Prova: Para mostrar esse lema, vamos considerar a álgebra quociente $\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A})$. Como essa álgebra é semisimples no sentido bário, temos que $\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))$ é escrito como uma soma de ideais bários simples $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{I}_s \oplus \bar{J}_1 \oplus \bar{J}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{J}_k$, onde $\bar{I}_i^2 = \bar{I}_i$ para $i = 1, 2, \dots, s$ e $\bar{J}_j^2 = (0)$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Observe que $\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))^2 = \bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{I}_s$ e pelo Teorema 1.3.3, segue que $\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))^2$ é escrito como uma soma de subálgebras simples no sentido usual. Desta forma temos que o radical nil desta álgebra, $\mathcal{R}(\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))^2) = 0$. Agora, notemos que $\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))^2 \cong \text{bar}(\mathcal{A})^2 / (\text{bar}(\mathcal{A}))^2 \cap \mathcal{R}_B(\mathcal{A})$ uma vez que pelo lema anterior $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$. Assim,

$$\mathcal{R}(\text{bar}(\mathcal{A}/\mathcal{R}_B(\mathcal{A}))^2) = \mathcal{R}((\text{bar}(\mathcal{A}))^2 / (\text{bar}(\mathcal{A}))^2 \cap \mathcal{R}_B(\mathcal{A})) = 0,$$

e portanto

$$\mathcal{R}((\text{bar}(\mathcal{A}))^2) \subseteq (\text{bar}(\mathcal{A}))^2 \cap \mathcal{R}_B(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{A}).$$

Como $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$ é um ideal nil contido em $(\text{bar}(\mathcal{A}))^2$, segue que

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap (\text{bar}(\mathcal{A}))^2 \subseteq \mathcal{R}((\text{bar}(\mathcal{A}))^2) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{A}).$$

■

Assim a partir dos Lemas 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra alternativa bária, então $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap (\text{bar}(\mathcal{A}))^2$, onde $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é o radical nil de $\mathcal{A}$.*

Corolário 2.4.3 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra alternativa bária, então temos que $\text{bar}(\mathcal{A})$ é nilpotente se e somente se $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A})^2$.*

Corolário 2.4.4 *Seja $(\mathcal{A}, w)$, álgebra alternativa bária. Se tivermos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$, então $\mathcal{R}(\mathcal{A})^2 = 0$.*

Corolário 2.4.5 *Se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{bar}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$, temos que $\text{bar}(\mathcal{A})^2 = 0$*

Capítulo 3

A Álgebra de Multiplicação, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, de uma álgebra bária semisimples

3.1 Resultados Gerais

Neste capítulo discorreremos sobre a álgebra de multiplicação de uma álgebra bária. Mais especificamente estudaremos o comportamento da álgebra de multiplicação quando a álgebra bária em questão é semisimples no sentido bário. Aqui trabalharemos sempre com álgebras báricas com idempotente de peso 1 e de dimensão finita. Como a álgebra de multiplicação é uma álgebra associativa, segue, de acordo com o Teorema 2.1.1, que ela possui um idempotente de peso 1 e então se o seu barideal for escrito como uma soma direta de ideais báricos simples, ela é semisimples no sentido bário. Observamos ainda que o corpo F , quando nada for especificado, será um

corpo de característica zero.

Como já foi dito no Capítulo Primeiro, denotaremos a álgebra de multiplicação de uma álgebra bária $(\mathcal{A}, w)$ por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é o conjunto de todos os polinômios $f(S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_n}), n \geq 1, f \in F[X_1, \dots, X_n]$, cujo termo independente de f é nulo e $S_{a_i} = L_{a_i}$ ou R_{a_i} .

Lembramos ainda que para denotar a álgebra de multiplicação de uma álgebra $\mathcal{A}$ a qual adjuntamos a função identidade Id usaremos a notação $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$, ou seja,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp = \{f(S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_n}), n \geq 1, f \in F[X_1, \dots, X_n], S_{a_i} = L_{a_i} \text{ ou } R_{a_i}\}.$$

Vale dizer que, a menos quando for dito o contrário, todos os resultados abaixo valem para as duas álgebras.

Um resultado bem conhecido, provado por Nathan Jacobson em [18], é que se uma álgebra arbitrária é escrita como uma soma direta de subálgebras simples, então a sua álgebra de multiplicação também é escrita como uma soma direta de subálgebras simples. Assim, seria interessante saber se este resultado é verdadeiro para as álgebras báricas; ou seja, se uma álgebra bária é escrita como um join de subálgebras báricas simples, sua álgebra de multiplicação também tem uma decomposição dessa forma? A resposta, como veremos com exemplos, é negativa. Logo, o que faremos é procurar condições onde o resultado seja verdadeiro. Para tanto, necessitamos primeiro saber se a álgebra de multiplicação em questão é bária, Assim sendo, segue o resultado abaixo.

Teorema 3.1.1 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária, então temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma álgebra bária com homomorfismo peso dado por*

$$\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow F, \quad \lambda(f(S_{a_1}, \dots, S_{a_n})) = f(w(a_1), \dots, w(a_n)).$$

Prova: Temos que mostrar que a aplicação λ é um homomorfismo e que está bem definida. Como λ depende da aplicação w e esta é um homomorfismo, segue claramente que λ é também um homomorfismo. Resta-nos então mostrar que λ está bem definida. Para isto, sejam $e \in H = \{x \in \mathcal{A}, w(x) = 1\}$ e $f(S_{a_1}, \dots, S_{a_n}) = g(S_{b_1}, \dots, S_{b_m})$. Assim temos

$$\begin{aligned}\lambda(f(S_{a_1}, \dots, S_{a_n})) &= f(w(a_1) \dots w(a_n)) \\ &= w(f(S_{a_1}, \dots, S_{a_n})(e)) = w(g(S_{b_1}, \dots, S_{b_m})(e)) \\ &= g(w(b_1), \dots, w(b_m)) = \lambda(g(S_{b_1}, \dots, S_{b_m}))\end{aligned}$$

Desta forma, segue que λ está bem definida. ■

Quando adjuntarmos à álgebra de multiplicação, a função identidade Id , podemos definir λ da mesma forma e assim $\lambda(Id) = 1$. Nos resultados abaixo estaremos trabalhando com $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \lambda)$, mas eles também são válidos, salvo quando for dito o contrário, para a álgebra $(\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp, \lambda)$.

Vamos considerar agora $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, a álgebra de multiplicação de $\mathcal{A}$, e $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ o radical nil de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Lembramos que esse ideal é caracterizado pelos elementos propriamente nilpotentes de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. No que segue daremos uma caracterização para esse radical, quando $\mathcal{A}$ é semisimples no sentido bárico.

Como $\mathcal{A}$ é semisimples escrevemos

$$\mathcal{A} = Fe \oplus I_1 \oplus \dots \oplus I_k,$$

onde I_j , para $j = 1, \dots, k$ são ideais báricos simples. Nesta condições, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.1 *Seja M um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ como módulo regular. Então temos, para $j = 1, \dots, k$ que*

$$M[I_j] = Vec_F\{f(a), f \in M, a \in I_j\} = I_j, \text{ ou } M[I_j] = 0.$$

Prova: Observe que $M[I_j] \subseteq I_j$, uma vez que os elementos de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ são combinações lineares de composições de operadores multiplicativos de $\mathcal{A}$ e I_j é um ideal. Também temos que $M[I_j]$ é um ideal bárico de $\mathcal{A}$ pois dado $x \in \mathcal{A}$, e $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(a_i)$, tomamos os operadores R_x e L_x e então temos

$$xa = L_x(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_x f_i(a_i), \quad ax = R_x(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i R_x f_i(a_i).$$

Como M é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -módulo, segue que $L_x f_i, R_x f_i \in M$ e portanto $xa, ax \in M[I_j]$. Assim, $M[I_j]$ é um ideal de $\mathcal{A}$ contido em I_j e como I_j é simples, segue que $M[I_j] = I_j$, ou $M[I_j] = 0$. ■

Teorema 3.1.2 *Seja $(\mathcal{A}, \lambda)$ uma álgebra bárica semisimples. Se $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ é o radical nil de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, então temos que*

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \{f \in \text{bar}(\mathcal{M}); f|_{\text{bar}(\mathcal{A})} \equiv 0\}.$$

Prova: Seja $f \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$. Como $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ é nil, temos que f é nilpotente e portanto $\lambda(f) = 0$, de onde segue que $f \in \text{bar}(\mathcal{M})$. Do fato de $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ ser um ideal, segue que é também um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, logo pelo lema 3.1.1, temos que para $j = 1, \dots, k$ $\mathcal{R}(\mathcal{M})[I_j] = 0$, ou $\mathcal{R}(\mathcal{M})[I_j] = I_j$. Afirmamos que $\mathcal{R}(\mathcal{M})[I_j] = 0$, pois como $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ é nil e portanto nilpotente, segue que existe um número n tal que $(\mathcal{R}(\mathcal{M}))^n \equiv 0$ e portanto se $\mathcal{R}(\mathcal{M})[I_j] = I_j$, temos

$$I_j = \mathcal{R}^{n-1}(\mathcal{M})\mathcal{R}(\mathcal{M})[I_j] = 0.$$

Como para algum j , $I_j \neq 0$, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{M})|_{\text{bar}(\mathcal{A})} = 0$.

Reciprocamente, se $f \in \text{bar}(\mathcal{M})$, e $f|_{\text{bar}(\mathcal{A})} \equiv 0$, temos que f é propriamente nilpotente. De fato, pois se $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, temos $gf(e) \in \text{bar}(\mathcal{A})$, logo $(gf)^2(e) = gf(gf(e)) = g(f(gf(e))) = 0$. Logo $(gf)^2 \equiv 0$ e portanto f é propriamente nilpotente de onde segue que $f \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$. ■

Corolário 3.1.1 $\mathcal{R}(\mathcal{M})^2 \equiv 0$.

Consideremos a subálgebra $[Fe]^*$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Esta é uma subálgebra bária, uma vez $R_e, L_e \in [Fe]^*$ e $\lambda(R_e) = \lambda(L_e) = 1$. Podemos escrever esta subálgebra da seguinte forma:

$$[Fe]^* = FL_e \oplus \text{bar}([Fe]^*).$$

Observamos que se $f \in \text{bar}([Fe]^*)$, então $f|_{Fe} \equiv 0$.

Sejam agora as subálgebras $[I_j]^*$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ para $j = 1, \dots, k$, gerada pelos ideais I_j . A partir destas álgebras consideramos os ideais em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ gerados por elas. A estes ideais denotaremos por U_j . Observamos que esses ideais podem ser nulos, por exemplo se os ideais I_j forem compostos de divisores absolutos de zero. Assim nos resultados que seguem, estaremos considerando os ideais U_j não nulos.

Proposição 3.1.1 *Os elementos de U_j ($j=1, \dots, k$), são da forma $f_j(S_{a_1}, \dots, S_{a_m})$ onde $S_{a_i} = L_{a_i}$ ou $S_{a_i} = R_{a_i}$ para $i = 1, \dots, m$, com $a_i \in I_j$ ou $a_i = e$, sendo que em cada monômio dos f_j existe pelo menos um S_{a_i} com $a_i \in I_j$.*

Prova: Observe primeiramente que como por construção $[I_j]^*$ é gerada por I_j , e o elemento e não está em I_j , necessariamente deve existir em cada monômio um operador multiplicativo definido por um elemento do $\text{bar}(\mathcal{A})$. Vamos mostrar agora, que esse elemento do $\text{bar}(\mathcal{A})$ está em I_j . Para tanto, seja $f_j(S_{a_1}, \dots, S_{a_m}) \in U_j$. Vamos escrever f_j da seguinte forma

$$f_j(S_{a_1}, \dots, S_{a_m}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_{a_{i_1}} \dots S_{a_{i_k}}.$$

Suponhamos que exista $a_{i_l}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq m$, tal que $a_{i_l} \in I_s, s \neq j$ e $S_{a_{i_l}}$ esteja presente em monômios de f_j . Se $\alpha_i S_{a_{i_1}} \dots S_{a_{i_l}} \dots S_{a_{i_k}}$ é qualquer um desses monômios, segue que para todo $x \in \mathcal{A}$,

$$\alpha_i S_{a_{i_1}} \dots S_{a_{i_l}} \dots S_{a_{i_k}}(x) \in I_j \cap I_s = (0).$$

Desta forma, mostramos que todos esses monômios são nulos e então a proposição segue. ■

Corolário 3.1.2 *Se $i \neq j$, temos que $U_i \cap U_j = (0)$.*

Corolário 3.1.3 *Se $f_j \in U_j$, segue que $f_j(a_i) = 0$ se $a_i \in I_i$ e $i \neq j$.*

Corolário 3.1.4 *Temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é escrita da seguinte maneira:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus (\text{bar}([Fe]^*) + (U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k)).$$

Proposição 3.1.2 *A intersecção $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j$ é um ideal bário simples de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Prova: Como trata-se da intersecção de dois ideais báricos, o fato desta intersecção ser um ideal bário segue trivialmente. Temos que mostrar então que este ideal é simples. Observamos que se $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j = (0)$, nada temos a demonstrar. Vamos supor então que $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j = \mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \neq (0)$. Nestas condições, consideremos o seguinte espaço vetorial:

$$\mathcal{R}_j[e] = \text{Vec}_F\{f(e); f \in \mathcal{R}_j(\mathcal{M})\}.$$

Como $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ é um ideal e portanto um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo, usando os mesmos argumentos do Lema 3.1.1, temos que $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})[e]$ é um ideal contido em

I_j e então $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})[e] = I_j$ ou $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})[e] = 0$. Como estamos considerando $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ distinto de zero, segue que $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})[e] = I_j$.

Consideremos agora $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$ uma base de I_j como subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})[e] = I_j$, segue que dado qualquer elemento da base de I_j , a_{j_s} para $1 \leq s \leq k$, existe $f_{j_s} \in \mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ tal que $f_{j_s}(e) = a_{j_s}$. Afirmamos que $\{f_{j_1}, \dots, f_{j_k}\}$ é uma base para $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ como subespaço vetorial de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Vamos mostrar primeiro que estes elementos são linearmente independentes. Para isto consideremos $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ escalares no corpo F e a combinação $\alpha_1 f_{j_1} + \dots + \alpha_k f_{j_k} = 0$. Então temos

$$\begin{aligned} (\alpha_1 f_{j_1} + \dots + \alpha_k f_{j_k})(e) &= \alpha_1 f_{j_1}(e) + \dots + \alpha_k f_{j_k}(e) \\ &= \alpha_1 a_{j_1} + \dots + \alpha_k a_{j_k} = 0 \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$ é uma base de I_j , segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ e então o conjunto $\{f_{j_1}, \dots, f_{j_k}\}$ é linearmente independente. Agora se $f \in \mathcal{R}_j(\mathcal{M})$, temos que existe $a \in I_j$ tal que $f(e) = a$. Assim para escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, temos que

$$\begin{aligned} f(e) &= a = \alpha_1 a_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} a_{j_k} \\ &= \alpha_1 f_{j_1}(e) + \dots + \alpha_{j_k} f_{j_k}(e) \\ &= (\alpha_1 f_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} f_{j_k})(e) \end{aligned}$$

Como $f(x) = (\alpha_1 f_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} f_{j_k})(x) = 0$ para todo $x \in \text{bar}(\mathcal{A})$ segue que qualquer elemento em $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ é escrito como combinação dos elementos de $\{f_{j_1}, \dots, f_{j_k}\}$. Logo esse conjunto forma uma base para $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$.

Consideremos agora a seguinte aplicação:

$$\Psi : \mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \longrightarrow I_j, \quad \Psi(f) = f(e).$$

Observe que se $f, g \in \mathcal{R}_j(\mathcal{M})$, $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $\alpha \in F$, temos

$$(i) \quad \Psi(f + g) = (f + g)(e) = f(e) + g(e) = \Psi(f) + \Psi(g)$$

$$(ii) \quad \Psi(\alpha f) = \alpha f(e) = \alpha \Psi(f)$$

$$(iii) \quad \Psi(hf) = hf(e) = h(f(e)) = h(\Psi(f))$$

Assim mostramos que Ψ é um homomorfismo de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –módulos. Como leva base em base, Ψ é um isomorfismo. Pelo fato de I_j ser um ideal bário simples e então um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulo simples, segue pelo lema de Schur que $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulo simples e portanto um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulo à direita e à esquerda simples e consequentemente um ideal bário simples.

■

Corolário 3.1.5 *Nas condições da proposição acima, temos que $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ tem a mesma dimensão de I_j .*

Proposição 3.1.3 *Se $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j = U_j$, então temos que $I_j = U_j(e)$ é nilpotente de grau dois.*

Prova: Se $a \in I_j$, temos que $R_a, L_a \in U_j$. Logo, para todo $x \in I_j$, temos que $R_a(x) = 0, L_a(x) = 0$. Desta forma, temos que $I_j^2 = (0)$. ■

Proposição 3.1.4 *Se $(0) \neq U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \neq U_j$, então temos que $U_j = \mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \oplus J_j$ como soma direta de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos e $J_j = \{f \in U_j \mid f|_{Fe} \equiv 0\}$.*

Prova: Seja $\{f_{j_1}, \dots, f_{j_k}\}$ a base de $\mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ e $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$ a base de I_j dadas na demonstração da Proposição 3.1.2. Agora consideremos $f \in U_j$.

Temos que $f(e) = a \in I_j$ e então

$$\begin{aligned} f(e) &= a = \alpha_1 a_{j_1} + \cdots + \alpha_k a_{j_k} \\ &= \alpha_1 f_{j_1}(e) + \cdots + \alpha_k f_{j_k}(e) \\ &= (\alpha_1 f_{j_1} + \cdots + \alpha_k f_{j_k})(e) \end{aligned}$$

Seguindo a demonstração, tomamos $g = \alpha_1 f_{j_1} + \cdots + \alpha_k f_{j_k}$ e $h = f - g$. Naturalmente $g \in \mathcal{R}_j(\mathcal{M})$ e $h|_{Fe} \equiv 0$. Trivialmente $\mathcal{R}_j(\mathcal{M}) \cap J_j = (0)$ e J_j é uma subálgebra de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Para mostrar que J_j é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, observe que se $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, como U_j é um ideal, temos que se $g \in J_j$, $fg \in U_j$. Para mostrar que $fg \in J_j$ observe que $fg(e) = 0$ e assim o resultado segue. ■

Proposição 3.1.5 *Se $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = (0)$, então temos que U_j é um ideal bário simples.*

Prova: Primeiramente vamos mostrar que U_j é semisimples, ou seja, que seu nil-radical ou radical de Jacobson é nulo. Observe que como U_j é um ideal, seu nil radical é dado por $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = (0)$. Logo o radical de Jacobson de U_j é nulo e então U_j é uma subálgebra semisimples.

Agora observemos que como U_j é uma álgebra semisimples associativa e de dimensão finita, ela possui uma unidade, ou seja, existe $f_j \in U_j$ tal que para todo $f \in U_j$, temos que $f_j f = f f_j = f$. Afirmamos que $f_j|_{I_j} \equiv Id|_{I_j}$, onde $Id|_{I_j}$ é a identidade restrita a I_j . Para ver isto notemos que pelos mesmos argumentos usados no Lema 3.1.1 e Proposição 3.1.2, $U_j[I_j] = I_j$ então existe um elemento $a_j \in I_j$ tal que $U_j[a_j] = I_j$. Assim, se $x \in I_j$ existe $f \in U_j$ tal que $f(a_j) = x$. Desta forma temos que para qualquer $x \in I_j$,

$$f_j(x) = f_j(f(a_j)) = f(a_j) = x.$$

O que mostra que $f_j|_{I_j} = Id|_{I_j}$.

Vamos supor agora, por contradição, que U_j não seja um ideal bário simples. Isto implica que existe um ideal bário $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ não nulo e contido propriamente em U_j . Repetindo os mesmos argumentos usados nas linhas acima, temos $\mathcal{K}$ é uma subálgebra semisimples e portanto existe $h \in \mathcal{K}$ tal que h restrita a I_j é a identidade. Mostraremos que $h = f_j$. Como estas duas funções coincidem em I_j , basta ver que elas têm a mesma imagem em e . Isto é verdadeiro pois como $f_j(e) \in I_j$ e f_j é uma unidade em U_j temos,

$$h(e) = h(f_j(e)) = f_j(e).$$

Logo as funções são as mesmas e então segue que $\mathcal{K} = U_j$. De onde temos que U_j é um ideal bário simples. ■

Observe que como os ideais U_j , da proposição acima são álgebras associativas, do fato de serem ideais minimais, segue de acordo com o Teorema 1.3.3 que essas álgebras são simples.

Proposição 3.1.6 *Em J_j da Proposição 3.1.4 existe uma função f_j tal que $f_j \equiv Id|_{I_j}$.*

Prova: Aqui só necessitamos mostrar que J_j é uma subálgebra semisimples, pois caso isso aconteça, temos que ela possui um elemento identidade e como tem a estrutura de um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo, a igualdade $J_j(I_j) = I_j$ se verifica, uma vez que estamos considerando que $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) \neq U_j$. Assim, através de cálculos análogos aos da demonstração da Proposição 3.1.5, temos que esse elemento identidade é a função identidade restrita a I_j .

Para mostrar que essa álgebra é semisimples, observe que $J_j \cong U_j/R_j$ que é semisimples. Logo o resultado segue. ■

Proposição 3.1.7 *Se $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) \neq U_j$, para todo $j = 1, \dots, k$, então temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ se escreve da seguinte forma:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k.$$

Prova: Para provar esta proposição, basta mostrar que os elementos de $\text{bar}([Fe]^*)$ são escritos como combinação linear dos elementos dos ideais U_j , para $j = 1, \dots, k$. Para isto observe que, de acordo com a demonstração da Proposição 3.1.5 e a Proposição 3.1.6, existem funções f_j em U_j tais que $f_j|_{I_j} = Id|_{I_j}$. Agora, se $f \in \text{bar}([Fe]^*)$, temos que $f_j f$ tem a mesma imagem da função $f|_{I_j}$. De fato, como observamos anteriormente, $f(e) = 0$ e então $f_j f(e) = 0$. Também se $a \in \text{bar}(\mathcal{A})$, Decompomos a em $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ com $a_j \in I_j$ para $j = 1, \dots, k$, e desta maneira temos

$$f_j f(a) = f_j f(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = f_j f(a_j) = f(a_j).$$

Como U_j é um ideal, segue que $f_j f \in U_j$ e então escrevemos $f = f_1 f + \dots + f_k f$, ou seja, f é escrito como combinação linear de elementos dos ideais U_j . Assim a proposição segue. ■

Vamos supor agora que $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = U_j$ para $1 \leq j \leq m$ com $m < k$. Nestas condições os elementos $\text{bar}([Fe]^*)$ podem não ser escritos como combinação linear de elementos em U_j , porém, ainda assim, existe uma decomposição interessante para a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Como estamos supondo m estritamente menor que k , existem funções $f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_k$, tais que para todo $f \in \text{bar}([Fe]^*)$, $f_l f$ tem a mesma imagem de $f|_{I_l}$. Desta forma consideramos a subálgebra $\mathcal{B}$ de $\text{bar}([Fe]^*)$ onde

$$\mathcal{B} = \{f - f_{m+1}f - \dots - f_k f \mid f \in \text{bar}([Fe]^*)\}$$

Observe que $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ pois se $g' = g - \sum_{i=m+1}^k f_i g$ e $h' = h - \sum_{i=m+1}^k f_i h$, $\in \mathcal{B}$, temos que $g'h' = gh - \sum_{i=m+1}^k f_i gh + \sum_{i=m+1}^k f_i g f_i h - \sum_{i=m+1}^k g f_i h$. Como $g f_i h = f_i gh$ e $f_i g f_i h = f_i gh$, para $i = m+1, \dots, k$, segue que $g'h' = gh - \sum_{i=m+1}^k f_i gh$ e portanto está em $\mathcal{B}$. Logo $\mathcal{B}$ é uma subálgebra.

Agora, para todo $g \in \mathcal{B}$, existe $f \in \text{bar}([Fe]^*)$ tal que g assume os mesmos valores que $f|_{I_1 \oplus \dots \oplus I_m}$. Nestas condições temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.8 *Se $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = U_j$ para $1 \leq j \leq m$ com $m < k$, temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é escrita como soma direta de espaços vetoriais*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \mathcal{B} \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k,$$

onde

$$\mathcal{B} = \{f - f_{m+1}f - \dots - f_k f \mid f \in \text{bar}([Fe]^*)\}.$$

Observe que os elementos da álgebra $\mathcal{B}$ são funções que só assumem valores distintos de zero nos ideais I_j tais que $I_j^2 \equiv 0$. Assim, se tomamos $f \in U_l$ tal que $U_l \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) \neq U_j$ temos que para qualquer $g \in \mathcal{B}$, $gf = fg \equiv 0$.

Corolário 3.1.6 *Se $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = U_j$ para $j = 1, \dots, k$ temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é escrita da seguinte forma:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \text{bar}([Fe]^*) \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

Proposição 3.1.9 *O radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ está totalmente contido na soma direta $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ e*

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap (U_1 \oplus \dots \oplus U_k) = U_1 \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) \oplus \dots \oplus U_k \cap \mathcal{R}(\mathcal{M})$$

Prova: Como já foi visto anteriormente a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ pode ser decomposta de três maneiras. São elas:

- (i) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$, se $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j \neq U_j$ para $j = 1, 2, \dots, k$.
- (ii) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \mathcal{B} \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$, se $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j = U_j$ para $1 \leq j < k$.
- (iii) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \text{bar}([Fe]^*) \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, se $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap U_j = U_j$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Quando $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é decomposta da forma descrita em (i) não temos nada a demonstrar quanto à inclusão.

Se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é decomposta como em (ii), consideremos $h \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ com $h = g + f^{m+1} + \cdots + f^k$, com $g \in \mathcal{B}$ e $f^j \in U_j$ para $j = m+1, \dots, k$ e podemos supor que f^j não esteja contido no radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Agora, de acordo com o Teorema 3.1.2, temos que $h(a) = 0$ para todo $a \in \text{bar}(\mathcal{A})$ e, assim sendo, tomando $a_l \in I_l$, com $m+1 \leq l \leq k$, temos

$$\begin{aligned} 0 = h(a_l) &= (g + f^{m+1} + \cdots + f^k)(a_l) \\ &= g(a_l) + f^{m+1}(a_l) + \cdots + f^k(a_l) \\ &= f^l(a_l) \end{aligned}$$

Desta forma $f^l|_{I_l} \equiv 0$ de onde segue que para $m+1 \leq l \leq k$, $f^l \equiv 0$, uma vez que estamos supondo que estas funções não pertencem a $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Nestas condições temos que $h = g$, e pelo fato de que $g(e) = 0$, segue que $h \equiv 0$. Disto segue que $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subseteq U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$.

Se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é decomposta da forma (iii), temos que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{M})$ e então se a outra inclusão não se verifica, temos que existe um $g \in \text{bar}([Fe]^*)$ tal que $g \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$, mas de acordo com o Teorema 3.1.2, temos que $g|_{\text{bar}(\mathcal{A})} \equiv 0$ e como $g(e) = 0$, segue que $g \equiv 0$. Isto mostra esse caso.

Finalmente para mostrar que

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_k) = U_1 \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus U_k \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}),$$

consideramos $g \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ escrito como a seguinte combinação

$$g = f^1 + f^2 + \cdots + f^k, \text{ com } f^j \in U_j (j = 1, \dots, k).$$

Vamos mostrar que cada $f^j \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$. Para isto observamos que $0 \equiv g|_{I_j} \equiv f^j|_{I_j}$, portanto $f^j \equiv 0$ se $f^j(e) = 0$ ou se $f^j(e) \neq 0$ segue que $f^j \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$. Desta forma a proposição segue. ■

Para concluir, temos que usando as Proposições 3.1.5, 3.1.7, 3.1.8 e 3.1.9, a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra bária semisimples pode ser escrita da seguinte forma $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{M}) \oplus \mathfrak{G}$, onde $\mathfrak{G}$ é uma subálgebra que pode assumir as seguintes decomposições:

- (i) $\mathfrak{G} = FL_e \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_s \oplus U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_k$, para $m = 0$.
- (ii) $\mathfrak{G} = FL_e \oplus \mathcal{B} \oplus J_{m+1} \oplus \cdots \oplus J_s \oplus U_{s+1} \oplus U_k$ para $m \neq 0$.
- (iii) $\mathfrak{G} = FL_e \oplus \text{bar}[Fe]^*$ para $m = k$.

Agora daremos condições necessárias e suficientes para que uma álgebra de multiplicação de uma álgebra bária semisimples, seja semisimples no sentido bário. Para tanto, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.3 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária semisimples no sentido bário. Então $\mathcal{M}(\mathcal{A}) =$*

$$FL_e \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{R}_1(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_m \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_s(\mathcal{M}) \oplus J_{m+1} \oplus \cdots \oplus J_s \oplus U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_k,$$

é semisimples no sentido bário se e somente se $J_j \equiv 0$ e $\mathcal{B} \equiv 0$.

Prova: De acordo com o Teorema 2.4.1, temos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{M}) = \mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap (\text{bar}(\mathcal{M}))^2$. Então podemos calcular esse radical e desta forma obtemos que

$$\mathcal{R}_B(\mathcal{M}) = \mathcal{B}\mathcal{R}_1(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}\mathcal{R}_m(\mathcal{M}) \oplus J_1\mathcal{R}_1(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus J_s\mathcal{R}_s(\mathcal{M}),$$

uma vez que $(\mathcal{R}_i(\mathcal{M}))^2 \equiv 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$.

Para que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ seja semisimples é necessário e suficiente que o radical acima seja nulo, logo $\mathcal{B}\mathcal{R}_i(\mathcal{M}) \equiv 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $J_j\mathcal{R}_j \equiv 0$ para $j = 1, 2, \dots, s$. Sabemos, de acordo com a demonstração da Proposição 3.1.4, que as funções de $\mathcal{B}$ só assumem valores diferentes de zero nos ideais I_i para $i = 1, 2, \dots, m$. Assim temos $\mathcal{B}\mathcal{R}_i(e) = \mathcal{B}(I_i) \equiv 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$. Logo $\mathcal{B} \equiv 0$. Analogamente, temos que $J_j\mathcal{R}_j(e) = J_j(I_j) \equiv 0$, e então $J_j \equiv 0$ para $j = 1, 2, \dots, s$ uma vez que J_j só assume valores distintos de zero em I_j . Desta forma o resultado segue. ■

Proposição 3.1.10 *Se $\mathcal{B} = \text{bar}([Fe]^*)$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bário, então temos que para todo $a \in \text{bar}(\mathcal{A})$, $ea = ae$.*

Prova: Se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bário, temos que $\mathcal{B} = \text{bar}([Fe]^*)\mathcal{R}(\mathcal{M}) = (0)$. Desta maneira $\mathcal{B} = \text{bar}([Fe]^*)[\text{bar}(\mathcal{A})] = (0)$. Assim temos que $(L_e - R_e)(a) = 0$ para todo $a \in \text{bar}(\mathcal{A})$. Logo $ea = ae$. ■

Corolário 3.1.7 Se $(\mathcal{A}, w) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ são semisimples no sentido bórico então para todos os ideais bóricos I_j nilpotentes de $\mathcal{A}$, temos que $eI_j = I_j e$, onde e é o idempotente de peso 1 de $\mathcal{A}$.

Prova: Basta notar que $\mathcal{B} = \text{bar}([Fe]^*)_{|\sum_{j=1}^l I_j}$ onde I_j para $1 \leq j \leq l$ são ideais bóricos nilpotentes. Assim se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples, temos que $\mathcal{B} = (0)$ e então $(L_e - R_e)|_{I_j} \equiv 0$ e o resultado segue. ■

Exemplo (1): Vamos agora dar um exemplo de uma álgebra bórica que é semisimples, no sentido bórico, mas sua álgebra de multiplicação não verifica a semisimplicidade no sentido bórico. Consideremos $\mathcal{A}$ uma álgebra bórica gerada pelos elementos $\{e, v\}$, com a tábua de multiplicação:

	e	v
e	e	$2v$
v	$2v$	$2v$

e função peso $w : \mathcal{A} \rightarrow F$ dada por $w(e) = 1$ e $w(v) = 0$. Note que esta álgebra é comutativa, mas não é associativa.

Observe que o ideal bórico $\langle v \rangle$, gerado pelo elemento v é simples e, portanto escrevemos $(\mathcal{A}, w)$ da seguinte forma

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \langle v \rangle.$$

Desta maneira, temos que $\mathcal{A}$ é simples no sentido bórico.

Agora, vamos considerar a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ da álgebra $\mathcal{A}$. Vamos denotar por U ao ideal da álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, gerado pela subálgebra $[v]^*$. Nestas condições temos que $U = \langle L_v \rangle$. Afirmamos que esse ideal tem $\{L_v, L_v L_e\}$ como base e portanto tem dimensão dois. De fato pois

$$L_v^k = 2^{k-1} L_v, L_e L_v = 2L_v, (L_v L_e)^k = 2^k L_v L_e, L_v L_e^2 = -2L_v + 3L_v L_e.$$

Assim qualquer elemento do ideal U é combinação linear desses dois elementos. Naturalmente eles são linearmente independentes pois se $\alpha, \beta \in F$, temos

$$\alpha L_v(e) + \beta L_v L_e(e) = (2\alpha + 2\beta)v, \alpha L_v(v) + L_v L_e(v) = (2\alpha + 4\beta)v,$$

logo se $(2\alpha + 2\beta)v = 0$ e $(2\alpha + 4\beta)v = 0$, segue que $\alpha = \beta = 0$.

Vamos mostrar agora que esse ideal bário não é simples. De fato pois a função $g = 1/4(L_v^2 + L_v L_e - L_v L_e L_e)$ está no ideal U e como $g(e) = v$ e $g(v) = 0$, pelo Teorema 3.1.2, temos que $g \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$. Observe que $L_v \in U$ e $L_v(v) = 2v$ de onde segue que L_v não está em $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Desta forma segue que U não é todo o radical e então usando a Proposição 3.1.9, e o fato acima, temos que $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ está propriamente contido em U , então este ideal não é simples.

Usando as Proposições 3.1.4, 3.1.7 e o Corolário 3.1.4, temos que $U = \mathcal{R}(\mathcal{M}) \oplus J$ e $\text{bar}([Fe]^*) \subseteq U$. Podemos comprovar este fato mais explicitamente pois se tomarmos a função $h = 1/2L_v \in U$, temos que $h|_{\langle u \rangle} \equiv Id|_{\langle v \rangle}$ e desta forma se $f \in \text{bar}([Fe]^*)$, temos que $f(e) = 0$ e então $hf(e) = 0$ e $hf(v) = f(v)$. Naturalmente $hf \in U$. Desta maneira podemos escrever a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \mathcal{R}(\mathcal{M}) \oplus J$$

e, portanto a dimensão de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é 3. Naturalmente $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ tem dimensão dois. Como o ideal bário U não é simples, a única possibilidade para que o $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ seja escrito como uma soma direta de ideais bários simples é que esses ideais tenham dimensão 1. Vamos mostrar então, que o único ideal bário de dimensão 1 em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é o radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Para isto observemos que uma função genérica f de $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = U$ é da forma

$f = \alpha L_v + \beta L_v L_e$, onde $\alpha, \beta \in F$. Assim, um ideal gerado por um elemento desta forma satisfaz, para toda função $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, a seguinte relação:

$$fg = (\alpha L_v + \beta L_v L_e)g = \tau_g(\alpha L_v + \beta L_v L_e) = \tau_g f,$$

para $\tau_g \in F$. Seja então, $g_1 = 1/4(L_v^2 + L_v L_e - L_v L_e^2)$. Temos que $g_1(e) = v$ e $g_1(v) = 0$. Desta maneira se $fg_1 = \tau_{g_1}$, segue que

$$f(v) = fg_1(e) = \tau_{g_1} f(e), \quad 0 = fg_1(v) = \tau_{g_1} f(v).$$

Observe que se $\tau_{g_1} \neq 0$, temos que $f(v) = 0$ e isto implica que $f(e) = 0$ e portanto $f \equiv 0$. Como só nos interessa uma função não nula, temos que $\tau_{g_1} = 0$ e então $f(v) = 0$. Assim se f é não nula, $f(e) \neq 0$ e de acordo com o Teorema 3.1.2, $f \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$.

Desta forma mostramos que o único ideal bárco de dimensão 1 em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é o radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Logo $\mathcal{A}$ é simples, mas sua álgebra de multiplicação não é semisimples.

Exemplo (2): Vamos considerar a seguinte subálgebra $\mathcal{A}$ da álgebra de matrizes $M_2(F)$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(F) \right\}$$

Se considerarmos $w : \mathcal{A} \rightarrow F$, dado por

$$w \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \alpha,$$

temos que $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bárca. Esta álgebra é semisimples no sentido

bárico, uma vez que pode ser escrita da seguinte maneira

$$F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_F.$$

Calculando agora a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, temos que

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FR_e \oplus F(R_e - L_e) \oplus FR_v,$$

onde,

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que nesta álgebra $\mathcal{B} = F(R_e - L_e)$ e $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = FR_v$. Temos que $\mathcal{BR}(\mathcal{M})[e] = \mathcal{B}[\langle v \rangle] = \langle v \rangle$. Observe que a condição necessária de que $ev = ve$ não foi cumprida nesta álgebra.

Consideremos agora uma álgebra $(\mathcal{A}, w)$ bárica e sua álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Na sequência, uma questão natural é saber se sendo a álgebra de multiplicação semisimples no sentido bárico, a álgebra $\mathcal{A}$ é também semisimples no sentido bárico. Nesta direção temos as seguintes proposições:

Proposição 3.1.11 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bárica e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sua álgebra de multiplicação. Então temos que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ se e somente se $\mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$.*

Prova: Observe que se $ab \in \mathcal{A}^2$, podemos escrever $ab = L_a(b) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}]$, logo $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}]$ e portanto se $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, então $\mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. Reciprocamente, se $\mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}]$, temos que existe $a \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ de tal forma que $x = f(a)$. Como f é uma combinação de monômios, temos que existem $b_1, b_2, \dots, b_j \in \mathcal{A}$ e $g_1, g_2, \dots, g_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tais que $x = \sum_{i=1}^j S_{b_i} g_i(a)$, onde $S_{b_i} = L_{b_i}$ ou $S_{b_i} = R_{b_i}$. Como para todo $i = 1, 2, \dots, j$, $S_{b_i} g_i(a) \in \mathcal{A}^2$, temos que $x \in \mathcal{A}^2$. Logo $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A}^2$. ■

Proposição 3.1.12 *Se $\mathcal{M}(\mathcal{A})[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$, então temos que $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] = \text{bar}(\mathcal{A})$.*

Prova: Observemos que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ e se $x \in e\text{bar}(\mathcal{A}) = e.\text{bar}(\mathcal{A}^2)$, existe $a, b \in \mathcal{A}$ tal que $x = \sum ea_i b_i$. Portanto podemos reescrever o elemento x da seguinte forma $x = L_e \sum L_{a_i}(b_i) \in \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}]$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} (FL_e \oplus \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})))[\mathcal{A}] &= FL_e[\mathcal{A}] + \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] \\ &= Fe + e\text{bar}(\mathcal{A}) + \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] \\ &= Fe + e.\text{bar}(\mathcal{A}^2) + \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] \\ &= Fe + \text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] \\ &= Fe + \text{bar}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

E desta forma, obtemos que $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}] = \text{bar}(\mathcal{A})$. ■

Vamos supor então que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ seja semisimples no sentido bárico e que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Desta maneira temos que $\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ é escrito como uma soma direta de ideais báricos simples $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$. Supondo que ela não seja semisimples no sentido usual temos, de acordo com a Proposição 2.4.3, que alguns desses ideais formam o radical nil, $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, com $\mathcal{R}(\mathcal{M})^2 = (0)$ e os outros ideais, caso existam, têm a propriedade de que $U_i^2 = U_i$. Aqui vamos convencionar que para $i = 1, 2, \dots, m$, $U_i^2 = (0)$ e para $i = m + 1, \dots, k$, $U_i^2 = U_i$. Nestas condições temos os seguintes resultados:

Lema 3.1.2 *Seja $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ a álgebra de multiplicação de uma álgebra bárica $(\mathcal{A}, w)$, que cumpre que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Se $\mathcal{R}(\mathcal{M})$, o radical nil é não nulo e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bárico, então temos que $\mathcal{R}(\mathcal{M})[\text{bar}(\mathcal{A})] = (0)$, ou seja, as funções pertencentes a $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ só assumem valores distintos de zero em Fe .*

Prova: De acordo com o Teorema 2.4.1, temos que $\mathcal{R}_B(\mathcal{M}) = \mathcal{R}(\mathcal{M}) \cap (\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})))^2$. Disto segue que $\mathcal{R}(\mathcal{M})\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{R}_B(\mathcal{M})$. Como estamos supondo que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bárico, temos $\mathcal{R}_B(\mathcal{M}) = (0)$ e portanto $(0) = \mathcal{R}(\mathcal{M})\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$. Assim, usando as Proposições 3.1.11 e 3.1.12, temos

$$(0) = (\mathcal{R}(\mathcal{M})\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})))[\mathcal{A}] = \mathcal{R}(\mathcal{M})(\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))[\mathcal{A}]) = \mathcal{R}(\mathcal{M})(\text{bar}(\mathcal{A})),$$

de onde segue que $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ só assume valores distintos de zero em Fe . ■

Lema 3.1.3 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bárica tal que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bárico então os elementos dos ideais U_i para $i = 1, 2, \dots, k$ só podem assumir valores distintos de zero, nos ideais báricos $U_i[\mathcal{A}]$ de $\mathcal{A}$ e em Fe .*

Prova: Seja, então

$$\text{bar}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = U_1 \oplus \dots \oplus U_m \oplus U_{m+1} \oplus \dots \oplus U_k,$$

onde $U_i^2 = (0)$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $U_i^2 = U_i$ para $i \geq m + 1$. Naturalmente esses ideais são $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos, portanto os subespaços $U_i[\mathcal{A}]$ são ideais báricos de $\mathcal{A}$. Afirmamos que as funções dos ideais U_i só assumem valores distintos de zero nos ideais $U_i[\mathcal{A}]$ e em Fe . De fato, denotando por $\mathcal{P}_i$ os ideais $U_i[\mathcal{A}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, temos por hipótese que

$$\text{bar}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_k.$$

Assim, se $f_i \in U_i$ e $x \in P_j$ para $j \neq i$ temos que $x = f_j(a)$ para algum $a \in \mathcal{A}$ e então $f_i(x) = f_i(f_j(a)) = f_i \circ f_j(a) = 0$ uma vez que $U_i \cap U_j = (0)$. Assim o lema segue. ■

Lema 3.1.4 *Temos que $\text{bar}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_k$*

Prova: Para provar essa proposição, é necessário mostrar que a intersecção de qualquer um dos $\mathcal{P}_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$, interceptado com a soma dos outros é zero.

Primeiramente, consideremos $x \in \mathcal{P}_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$, e então temos que $x = f_i(e)$ para $f_i \in U_i$. Se $x \in \mathcal{P}_1 + \cdots + \mathcal{P}_{i-1} + \mathcal{P}_{i+1} + \cdots + \mathcal{P}_k$, então $x = f_1(e) + \cdots + f_{i-1}(e) + f_{i+1}(e) + \cdots + f_m(e) + f_{m+1}(a_{m+1}) + \cdots + f_k(a_k)$ para $f_j \in U_j$ com $i \neq j$ e $a_l \in \mathcal{P}_l$ para $m+1 \leq l \leq k$.

Lembremos agora que os ideais U_l para $l = m+1, \dots, k$ são subálgebras simples e então possuem um elemento identidade h_l que de acordo com a demonstração da Proposição 3.1.5, $h_l|_{\mathcal{P}_l} \equiv \text{Id}|_{\mathcal{P}_l}$. Desta forma, para $l = m+1, \dots, k$, $f_l(a_l) = 0$, pois $0 = h_l(x) = h_l(f_i(e)) = h_l(f_l(a_l)) = f_l(a_l)$. Assim $f_i(e) = f_1(e) + \cdots + f_{i-1}(e) + f_{i+1}(e) + \cdots + f_m(e)$ de onde segue que f_i é uma combinação de elementos de U_j para $j \neq i$ e $j \leq m$, o que é uma contradição. Portanto x não pode ser distinto de zero.

Agora vamos supor $x \in \mathcal{P}_l$ para $m+1 \leq l \leq k$ e x é combinação de elementos dos outros ideais $\mathcal{P}_j$ para $j \neq l$ e $1 \leq j \leq k$. Nestas condições temos $x = f_l(a_l) = f_1(e) + \cdots + f_m(e) + f_{m+1}(a_{m+1}) + \cdots + f_{l-1}(a_{l-1}) + f_{l+1}(a_{l+1}) + \cdots + f_k(a_k)$. Como $x \in \mathcal{P}_l$ segue que $x = h_l(x) = h_l(f_1(e) + \cdots + f_m(e) + f_{m+1}(a_{m+1}) + \cdots + f_{l-1}(a_{l-1}) + f_{l+1}(a_{l+1}) + \cdots + f_k(a_k)) = 0$. Portanto $x = 0$, o que mostra o lema. ■

Lema 3.1.5 *Os ideais U_i para todo i podem ser escritos como soma direta de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos simples.*

Prova: Vamos primeiro mostrar que o lema é válido para os ideais U_i onde $i = 1, 2, \dots, m$, que fazem parte de $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Seja K um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo

de U_i . Vamos mostrar que K é um ideal de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. De fato pois se $f \in U_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$ temos que $Kf = (0)$. Tomando o elemento L_e temos que $KL_e = K$ uma vez $L_e(e) = e$. Assim $K = U_i$ pois U_i é um ideal bário simples. Logo temos que para $i = 1, 2, \dots, m$ os ideais U_i são $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos simples (aqui no sentido de não possuírem submódulos próprios).

Considerando os outros ideais U_i para $i = m + 1, \dots, k$ temos que estes são semisimples como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos uma vez que seu radical que é igual ao produto dele mesmo com o radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é nulo, isto é, $\mathcal{R}(U_i) = U_i\mathcal{R}(\mathcal{M}) = (0)$. Desta maneira esses ideais U_i podem ser escritos como uma soma direta de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos simples. ■

Com esses lemas podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.4 *Se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra bária tal que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ e sua álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bário, então temos que $(\mathcal{A}, w)$ é semisimples no sentido bário.*

Prova: Vamos considerar os ideais U_i para $i = 1, 2, \dots, m$. Vimos pelo Lemas 3.1.2 e 3.1.5 que estes ideais não possuem $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos próprios e seus elementos só assumem valores distintos de zero em Fe . Assim consideramos a aplicação:

$$\Phi : U_i \longrightarrow U_i[e] = \mathcal{P}_i, \text{ dada por } \Phi(f) = f(e).$$

Como já observamos várias vezes Φ é um homomorfismo de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulos e pelo fato de ser não nulo e U_i não possuir submódulos próprios, segue que Φ é um isomorfismo e então $\mathcal{P}_i$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –submódulo simples e, portanto, um ideal bário simples de $\mathcal{A}$.

Seja agora, U_j para $m+1 \leq j \leq k$. Temos que esses ideais, de acordo com o Lema 3.1.5 são escritos como uma soma de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos simples, $U_j = T_{j_1} \oplus \cdots T_{j_m}$. Com cálculos análogos aos de outras vezes, temos que $T_{j_i}[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{P}_j$ para $i = 1, 2, \dots, m$ são ideais báricos simples e então $\mathcal{P}_j$ é escrito como uma soma de ideais báricos simples. Naturalmente essa soma, a princípio pode não ser direta, mas na pior das hipóteses, por tratar-se de soma de ideais simples, esses ideais devem coincidir. De fato pois se sem perda de generalidades tomarmos $i = 1$, e tivermos que $T_{j_1}[\mathcal{A}] \cap (T_{j_2}[\mathcal{A}] + \cdots + T_{j_m}[\mathcal{A}]) = Z_1 \neq (0)$, então $Z_1 \subseteq T_{j_1}$ é um ideal de $\mathcal{A}$, logo $Z_1 = T_{j_1}$. Utilizando agora a Proposição 2.4.2, temos que T_{j_1} é escrito como soma de alguns desses ideais. Como T_{j_1} é simples ele não pode ser escrito como soma de ideais, de onde segue que este ideal coincide com algum ou alguns desta soma.

Desta maneira, fazendo o mesmo raciocínio para todos os U_j temos que cada $\mathcal{P}_j$ para $m+1 \leq j \leq k$ é escrito como uma soma direta de ideais báricos simples e portanto $\text{bar}(\mathcal{A})$ é escrito como uma soma direta de ideais báricos simples, uma vez que havíamos provado que $\mathcal{P}_j$ para $1 \leq j \leq s$ eram ideais báricos simples. ■

3.2 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra alternativa bária semisimples

Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra alternativa bária semisimples (no sentido bário). Nestas condições de acordo com as Proposições 2.4.3 e 2.4.4, temos que $\mathcal{A}$ é escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \mathcal{R}_1(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_m(\mathcal{A}) \oplus I_{m+1} \oplus \cdots \oplus I_k,$$

onde $R_i(\mathcal{A})^2 \equiv 0$ para $1 \leq i \leq m+1$ e $I_j^2 = I_j$ para $m+1 \leq j \leq k$. Também baseado na Proposição 2.4.4, podemos supor que o idempotente e de peso 1 é tal que $eI_j = I_je = (0)$ para todo j .

Vamos agora calcular a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ desta álgebra. Primeiro vamos considerar os ideais U_j para $j = 1, \dots, m$. Sobre esses ideais, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1 *Os ideais U_j para $1 \leq j \leq m$ estão contidos no radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Prova: Como os ideais $\mathcal{R}_j(\mathcal{A})$ com $1 \leq j \leq m$, são nilpotentes de índice dois, segue que $U_j[I_j] = (0)$. De fato, pois se $f \in U_j$, temos que em cada monômio de f existe pelo menos um operador definido por um elemento de I_j e então $f(a) = 0$ para todo $a \in I_j$. Assim se $f \neq 0$, segue que $f(e) \neq 0$ então $f \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ e portanto o resultado segue. ■

Observe que pode acontecer $U = 0$ e isto significa que o ideal I_j é um conjunto unidimensional, formado por um divisor absoluto de zero em $\mathcal{A}$.

Proposição 3.2.2 *Temos que $U_j \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}) = (0)$ para $m+1 \leq j \leq k$.*

Prova: Observe que se $f \in U_j$, pelo fato de que $eI_j = I_je = (0)$, temos que todos os monômios de f são formados apenas por operadores multiplicativos definidos por elementos de I_j , e disto segue que $f(e) = 0$, portanto em decorrência do Teorema 3.1.2, f não pode pertencer ao radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. ■

Desta forma temos que a álgebra de multiplicação de uma álgebra alternativa ou associativa semisimples no sentido bárico pode ser decomposta da

seguinte forma:

$$(3.1) \quad \mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{R}_1(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_m(\mathcal{M}) \oplus U_{m+1} \oplus \cdots \oplus U_k,$$

onde $U_j[e] = (0)$, para $j = m + 1, \dots, k$. Desta maneira, temos o seguinte teorema

Teorema 3.2.1 *Dada uma álgebra $(\mathcal{A}, w)$ alternativa e bária que é semi-simples no sentido bário, para que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, sua álgebra de multiplicação, seja semisimples no sentido bário é necessário e suficiente que $\mathcal{B} \equiv 0$.*

Prova: Para essa demonstração, basta observar que $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = (0)$ implica, devido ao Teorema 2.4.1 e a decomposição 3.1, que $\mathcal{B}\mathcal{R}_i(\mathcal{M}) = (0)$, de onde segue que $\mathcal{B}\mathcal{R}_i(Fe) = \mathcal{B}(I_i) = (0)$. Repetindo esse cálculo para $i = 1, 2, \dots, s$ temos que $\mathcal{B}$ é nulo nos ideais I_i correspondentes. Como, por construção, as funções que pertencem a $\mathcal{B}$ só podem assumir valores distintos de zero nesses ideais, temos que $\mathcal{B} = (0)$. ■

Corolário 3.2.1 *Nas condições do teorema acima, temos que o idempotente $e \in \mathcal{A}$ tem que estar no centro da álgebra $\mathcal{A}$.*

Vale observar que se considerarmos no lugar de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$, temos que esta é semisimples no sentido bário, se e somente se e for uma unidade para os ideais em questão.

3.3 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra de Bernstein semi-simples

Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra de Bernstein. Vamos supor que $\mathcal{A}$ seja semisimples no sentido bárico. Nestas condições escrevemos

$$\mathcal{A} = Fe \oplus I_1 \oplus \cdots \oplus I_k.$$

Como $\mathcal{A}$ possui esta decomposição e devido ao resultado provado por H. Guzzo em [14], temos que $\mathcal{R}_B = \text{bar}(\mathcal{A})^2$. Logo se $\mathcal{R}_B(\mathcal{A}) = 0$ temos que os subespaços $U_e = \{x \in \text{bar}(\mathcal{A}) \mid ex = (1/2)x\}$ e $Z_e = \{x \in \text{bar}(\mathcal{A}) \mid ex = 0\}$ da decomposição de Peirce de $\mathcal{A}$ satisfazem que

$$U_e Z_e = 0, \quad Z_e^2 = 0, \quad U_e^2 = 0,$$

logo $\mathcal{A}^2 = Fe \oplus U_e$ e portanto temos que $\mathcal{A}$ é de Bernstein-Jordan, conservativa e excepcional.

Naturalmente os subespaços U_e e Z_e são ideais báricos de $\mathcal{A}$. Consideremos então $u \in U_e$, como $U_e^2 = 0$, segue que para todo $x \in \mathcal{A}$, temos que $xu = \alpha u$ para $\alpha \in F$. Desta forma temos que $\langle u \rangle$ é um ideal bárico unidimensional de $\mathcal{A}$. Analogamente temos que para todo $z \in Z_e$, $\langle z \rangle$ é também um ideal bárico unidimensional. Nesta condições temos que se $\{u_1, u_2, \dots, u_l, z_1, \dots, z_k\}$ é uma base para $\mathcal{A}$, então escrevemos

$$\mathcal{A} = Fe \oplus \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle u_l \rangle \oplus \langle z_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle z_k \rangle.$$

Vamos agora calcular a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. Observe que neste caso como Z_e é o ideal formado pelos anuladores absolutos de zero da álgebra $\mathcal{A}$, temos que se $l+1 \leq j \leq k$ os ideais $U_j = 0$. Como U_e é nilpotente

de índice dois, segue que os ideais U_j para $1 \leq j \leq l$ estão contidos no radical $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Estes ideais, de acordo com o Corolário 3.1.5 têm a mesma dimensão dos ideais $I_j = \langle u_j \rangle$, ou seja, são unidimensionais. Desta maneira podemos escrever

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e \oplus \text{bar}([Fe]^*) \oplus \langle L_{u_1} \rangle \oplus \langle L_{u_2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle L_{u_l} \rangle.$$

Afirmamos que a subálgebra $\text{bar}([Fe]^*)$ também é unidimensional. De fato, pois os elementos desta subálgebra são da forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i L_e^{p_i}$ com os escalares α_i 's satisfazendo que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ e $p_i \geq 1$. Assim temos que $(\sum_{i=1}^n \alpha_i L_e^{p_i})(e) = 0$, e

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i L_e^{p_i}\right)(u) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{2^{p_i}}\right)(u) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{2^{p_i-2}}\right) \frac{1}{4}(u) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{2^{p_i-2}}\right)(L_e - L_e^2)(u). \end{aligned}$$

Portanto, o elemento $L_e - L_e^2$ é um gerador para esta subálgebra e desta forma segue que ela é unidimensional.

Assim, temos que se $(\mathcal{A}, w)$ é uma álgebra de Bernstein semisimples e se a dimensão de U_e é r , então a dimensão da álgebra de multiplicação, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, de $\mathcal{A}$ é igual a $r + 2$.

Observe que, ainda nas condições de que $\mathcal{A}$ seja semisimples, se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ for semisimples, temos que o elemento $L_e - L_e^2$ é nulo, donde segue que o ideal U_e tem que ser nulo e nestas condições, temos que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = FL_e$ e $\mathcal{A} = Fe$ ou $\mathcal{A} = Fe \oplus Z_e$. Note ainda, que o mesmo resultado é válido, se no lugar de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tivermos a álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})^\sharp$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *Se a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra de Bernstein $(\mathcal{A}, w)$ semisimples no sentido bárico, é semisimples no sentido bárico, então $\mathcal{A} = Fe$ ou $\mathcal{A} = Fe \oplus Z_e$.*

Prova: Aqui basta observar que se $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é semisimples no sentido bárioico, então temos que $\mathcal{B} = (0)$ de onde segue que para todo $u \in U_\epsilon$, $(L_\epsilon - L_\epsilon^2)(u) = \frac{1}{4}u = 0$ de onde temos que $u = 0$. Assim , o resultado segue. ■

Capítulo 4

Álgebras Dibáricas

4.1 Introdução

O estudo das álgebras dibáricas têm como motivação as álgebras que surgem de modelos genéticos em populações bissexuais. Como exemplo podemos considerar uma população de organismos masculinos e femininos estudada por Etherington, [5]. Nesta população os organismos masculinos são heterogaméticos (com cromossomos X e Y) enquanto os organismos femininos são homogaméticos (com dois cromossomos X). Etherington considerou para organismos femininos os tipos gaméticos **A** e **a** sobre os cromossomos X. Para os organismos masculinos, sobre o cromossomo X considerou os mesmos tipos gaméticos **A** e **a** e sobre o cromossomo Y considerou um tipo gamético que aqui indicaremos com a letra **Y** também. Se assumimos que a segregação Mendeliana ocorre em ambos os sexos, então a multiplicação gamética é dada pela Tábua 1.

Os possíveis zigotos femininos são **AA**, **Aa** e **aa** e os possíveis zigo-

tos masculinos são $\mathbf{AY}$ e $\mathbf{aY}$. A partir da tábua de multiplicação gamética (Tábua 1) obtemos multiplicação zigótica, segundo Tábua 2.

Observe que muitos produtos na álgebra zigótica são nulos devido ao fato de serem produtos de zigotos de mesmo sexo. Os quadros em branco na tábua de multiplicação zigótica, podem ser facilmente deduzidos utilizando-se a comutatividade. A álgebra com a multiplicação da Tábua 2 e a seguinte base como espaço vetorial

$$\{AA, Aa, aa, AY, aY\}$$

é chamada de *Álgebra zigótica com herança ligada ao sexo para dois alelos com segregação Mendeliana simples*.

Tábua 1

	A	a	Y
A	A	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Y$
a	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$	a	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}Y$

Tábua 2

	AA	Aa	aa	AY	aY
AA	0	0	0	$\frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}AY$	$\frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}AY$
Aa		0	0	$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{4}Aa + \frac{1}{4}AY + \frac{1}{2}aY$	$\frac{1}{4}Aa + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}AY + \frac{1}{4}aY$
aa			0	$\frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}aY$	$\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}aY$
AY				0	0
aY					0

Existem significantes diferenças na estrutura destas álgebras quando comparadas com as álgebras com herança genética as quais são simétricas com respeito ao sexo. A diferença estrutural mais significativa é que esta álgebra zigótica não é a duplicada comutativa de uma álgebra gamética. Devido ao fato dos elementos da base serem nilpotentes de índice dois, a álgebra zigótica com herança ligada ao sexo não é uma álgebra bárica. Para contornar essa aparente dificuldade Etherington [5], introduziu a idéia de estudar separadamente os componentes masculinos e femininos de uma população.

Logo depois, Holgate [16] formalizou este conceito com a introdução de sua álgebra com diferenciação sexual e a generalização de álgebras bárias chamadas álgebras dibáricas. Seguindo a notação moderna de Wörz-Busekros [25], introduzimos abaixo a definição de Álgebra de diferenciação sexual e álgebra dibárica as quais foram definidas por Holgate sobre o corpo dos números reais.

Definição 4.1.1 *Seja $\mathcal{S}$ uma álgebra comutativa bi-dimensional gerada pelos elementos $\{m, h\}$, sobre um corpo F de característica distinta de dois, com a seguinte Tábua de multiplicação:*

	m	h
m	0	$\frac{1}{2}(m + h)$
h	$\frac{1}{2}(m + h)$	0

Esta álgebra $\mathcal{S}$ é chamada de Álgebra de diferenciação sexual.

Temos que $\mathcal{S}^2 = \langle m + h \rangle_F$ é um ideal de $\mathcal{S}$ isomorfo ao corpo F . Assim $\mathcal{S}^2$ é uma álgebra bária. A partir disto podemos definir a generalização de Holgate de uma álgebra bária.

Definição 4.1.2 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ será chamada dibárica se ela admite um homomorfismo sobrejetor sobre a álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$.*

Proposição 4.1.1 *Se uma álgebra $\mathcal{A}$ é dibárica, então $\mathcal{A}^2$ é bária.*

Prova: Desde que $\mathcal{A}$ é dibárca, existe um homomorfismo sobrejetor $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$. Assim, usando a sobrejetividade, temos $\gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{S}$, e usando o fato de ser homomorfismo, segue que $\gamma(\mathcal{A}^2) = \mathcal{S}^2$. Como observamos acima $\mathcal{S}^2$ é isomorfo a F e desta forma temos que $\mathcal{A}^2$ é uma álgebra bárca. ■

Agora vamos introduzir uma definição mais geral de uma álgebra zigótica com herança ligada ao sexo com mais de dois tipos gaméticos.

Seja $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ os diferentes tipos gaméticos sobre o cromossomo X. Existem $(n+1)^2$ genótipos femininos $a_i a_j$ os quais denotamos por a_{ij} para todo $i, j = 0, \dots, n$. Inerente a notação $a_i a_j$ dizemos que a_i é de origem maternal e a_j é de origem paternal. Genótipos masculinos são dados por $a_i Y$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Assumimos que os genótipos femininos a_{ij} produzem os gametas a_k com probabilidade p_{ijk} , enquanto que os genótipos masculinos $a_i Y$ produzem a_k com probabilidade p_{ik} . Se os genótipos masculinos produzem os gametas X e Y com a mesma frequência, então temos:

$$\sum_{k=0}^n p_{ijk} = 1, \quad \sum_{k=0}^n p_{ik} = \frac{1}{2}.$$

Seja $\mathcal{Z}$ o espaço vetorial real com base

$$\{a_{ij}, a_i Y \mid i, j = 0, \dots, n\}$$

de dimensão $(n+1)^2 + n+1 = n^2 + 3n + 2$. Consideremos em $\mathcal{Z}$ a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}
a_{ij} \cdot a_l Y &= a_l Y \cdot a_{ij} = \sum_{k,r=0}^n p_{ijk} p_{lr} a_{kr} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n p_{ijk} a_k Y \\
a_{ij} \cdot a_{lp} &= a_l Y \cdot a_p Y = 0
\end{aligned}$$

para $i, j, l, q = 0, \dots, n$. A álgebra $\mathcal{Z}$ é chamada de álgebra zigótica com herança assimétrica ligada ao sexo e com tipos gaméticos $a_0, \dots, a_n$. $\mathcal{Z}$ é uma álgebra comutativa mas não é associativa. Também não é uma álgebra bária desde que os elementos da base são nilpotentes de índice dois. Entretanto, esta álgebra zigótica $\mathcal{Z}$ é dibárica uma vez que $\gamma : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{S}$, dado por $\gamma(a_{i,j}) = \mathfrak{h}$ e $\gamma(a_i Y) = \mathfrak{m}$ para $i, j = 0, \dots, n$ é um homomorfismo.

Alguns estudos foram realizados por Holgate [16] utilizando o desenvolvimento da teoria sobre álgebras báricas em $\mathcal{Z}^2$ para se obter informações sobre a estrutura da álgebra $\mathcal{Z}$. Gonshor em [8], [9], [10] e Wörz-Busekros em [25], [26], [27], utilizaram um ideal bárico de $\mathcal{Z}$ com o mesmo propósito. Tal ideal pode ser encontrado em Wörz-Busekros [25], dado pela proposição abaixo, cuja prova aparece em [26].

Proposição 4.1.2 *O conjunto,*

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i,j=0}^n \alpha_{ij} a_{ij} + \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i Y \mid \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \right\}$$

é um ideal de $\mathcal{Z}$ que contém $\mathcal{Z}^2$. Temos ainda que $\mathcal{L}$ é uma álgebra bária com homomorfismo peso $w : \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{R}$ dado por:

$$w\left(\sum_{i,j=0}^n \alpha_{ij} a_{ij} + \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i Y\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i.$$

Do ponto de vista genético a álgebra $\mathcal{L}$ contém todos os elementos de $\mathcal{Z}$ que correspondem a atual população, enquanto que $\mathcal{Z}^2$ contém apenas elementos que são resultados da segunda geração de $\mathcal{Z}$.

4.2 Homomorfismos pesos dibáricos

Desta seção em diante consideraremos $\mathcal{A}$ como uma álgebra arbitrária sobre um corpo F de característica diferente de dois não necessariamente comutativa ou associativa.

Uma função $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é a álgebra de diferenciação sexual definida acima, é chamada de *homomorfismo peso dibárico* se γ é um homomorfismo de álgebras sobrejetor, ou seja, a imagem de $\mathcal{A}$ por γ é exatamente $\mathcal{S}$ e também, $\gamma(x + y) = \gamma(x) + \gamma(y)$, $\gamma(\alpha x) = \alpha\gamma(x)$ e $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$, para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in F$. Nestas condições se x, y são tais que $\gamma(x) = \mathfrak{m}$ e $\gamma(y) = \mathfrak{h}$, escrevemos $\mathcal{A}$ da seguinte forma:

$$(4.1) \quad \mathcal{A} = Fx \oplus Fy \oplus \text{Ker}(\gamma),$$

onde $\text{Ker}(\gamma)$ é um ideal de $\mathcal{A}$ de codimensão dois.

Observe que se γ é um homomorfismo peso dibárico e $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ é um automorfismo então temos que $f \circ \gamma$ é um homomorfismo peso dibárico e $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(f \circ \gamma)$. Em vista disso dizemos que dois homomorfismos pesos dibáricos γ e γ' são *equivalentes* se existe um automorfismo $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ de tal maneira que $\gamma' = f \circ \gamma$.

Proposição 4.2.1 *A álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$ possui exatamente dois automorfismos, a identidade e a involução $*$: $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por,*

$$*(\mathfrak{m}) = \mathfrak{h}, \quad *(\mathfrak{h}) = \mathfrak{m}.$$

Prova: Seja $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ um homomorfismo sobrejetor dado por $f(\mathfrak{m}) = \alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{h}$, $f(\mathfrak{h}) = \mu\mathfrak{m} + \eta\mathfrak{h}$, onde $\alpha, \beta, \mu, \eta \in F$. Então temos

$$f(\mathfrak{m})f(\mathfrak{h}) = f(\mathfrak{h}\mathfrak{m}) = f\left(\frac{\mathfrak{m} + \mathfrak{h}}{2}\right),$$

de onde segue que,

$$(4.2) \quad \beta + \eta = \alpha\eta + \mu\beta = \alpha + \mu.$$

Além disso temos que $0 = f(\mathfrak{m}^2) = f(\mathfrak{m})^2$, e analogamente, $0 = f(\mathfrak{h})^2$. Isto nos dá que,

$$(4.3) \quad \alpha\beta = 0 \quad \text{e} \quad \mu\eta = 0.$$

Assim, a partir das equações (4.2) e (4.3) e do fato de que $\{f(\mathfrak{m}), f(\mathfrak{h})\}$ é uma base de $\mathcal{S}$, ou seja,

$$(4.4) \quad \alpha\eta + \beta\mu \neq 0$$

obtemos que as únicas possibilidades para f são a identidade, isto é, $\alpha = \eta = 1$ e $\beta = \mu = 0$, e a involução, ou seja, $\beta = \mu = 1$ e $\alpha = \eta = 0$. ■

A partir deste resultado, segue que cada classe de equivalência definida acima possui exatamente dois representantes. Desta forma, se γ e γ' , são dois homomorfismos pesos dibáricos distintos e equivalentes, temos que $\gamma' = * \circ \gamma$. Assim denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto de tais classes de equivalência, ou seja, um elemento de $\mathcal{E}$ é da forma $\{\gamma, \gamma^*\}$, onde γ é um homomorfismo peso dibárico e $\gamma^* = * \circ \gamma$.

Teorema 4.2.1 *A correspondência $\{\gamma, \gamma^*\} \longmapsto \text{Ker}(\gamma)$ é uma bijeção entre o conjunto $\mathcal{E}$ das classes de equivalência de homomorfismos pesos dibáricos de $\mathcal{A}$ e o conjunto de ideais I de $\mathcal{A}$ de codimensão 2 tais que $\mathcal{A}/I \cong \mathcal{S}$.*

Prova: Primeiro vamos mostrar que a aplicação $\{\gamma, \gamma^*\} \mapsto \text{Ker}(\gamma)$ está bem definida. Para tanto observamos que se γ é um homomorfismo peso dibárico, temos que $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\gamma^*)$ é um ideal de $\mathcal{A}$ de codimensão 2 e como γ é sobrejetor, pelo teorema do homomorfismo segue que $\mathcal{A}/\text{Ker}(\gamma) \cong \mathcal{S}$. Logo a aplicação está bem definida.

Vamos mostrar agora que a aplicação é injetiva. Sejam então γ, τ , dois homomorfismos pesos dibáricos tais que $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\tau)$. Como γ é sobrejetivo existem $x, y \in \mathcal{A}$, tais que $\gamma(x) = \mathfrak{m}, \gamma(y) = \mathfrak{h}$. Como estes elementos x e y não estão no núcleo de γ , escrevemos $\mathcal{A}$ como em (4.1) e, em decorrência disto, temos que $\{\tau(x), \tau(y)\}$ formam uma base para $\mathcal{S}$. Assim, seja $\tau(x) = \alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{h}, \tau(y) = \mu\mathfrak{m} + \eta\mathfrak{h}$, para $\alpha, \beta, \mu, \eta \in F$. Observemos que

$$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y) = hm = \frac{(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})}{2} = \frac{(\gamma(x) + \gamma(y))}{2} = \gamma\left(\frac{x + y}{2}\right),$$

de onde segue que $(xy - (x + y)/2) \in \text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\tau)$. Logo temos que

$$\tau(x)\tau(y) = \tau(xy) = \tau\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{\tau(x) + \tau(y)}{2},$$

de onde segue que,

$$(4.5) \quad \beta + \eta = \alpha\eta + \mu\beta = \alpha + \mu.$$

Além disto como $x^2, y^2 \in \text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\tau)$, segue que $\tau(x)^2 = \tau(x^2) = 0$, e analogamente, $\tau(y)^2 = 0$. Isto nos dá que,

$$(4.6) \quad \mu\eta = 0 \quad e \quad \alpha\beta = 0.$$

Assim, a partir das equações (4.5) e (4.6) e do fato de que $\{\tau(x), \tau(y)\}$ é uma base de $\mathcal{S}$, isto é,

$$(4.7) \quad \alpha\eta + \beta\mu \neq 0,$$

obtemos que $\tau = \gamma$, ou seja, $\alpha = \eta = 1$ e $\beta = \mu = 0$ ou $\tau = * \circ \gamma$, ou seja, $\beta = \mu = 1$ e $\alpha = \eta = 0$. Assim, segue que τ é equivalente a γ e portanto, a aplicação é injetiva.

Finalmente mostraremos que esta aplicação é sobrejetora. Seja I um ideal de $\mathcal{A}$ satisfazendo as hipóteses do teorema. Então existe um isomorfismo $\bar{\gamma} : \mathcal{A}/I \rightarrow \mathcal{S}$. Assim consideramos o homomorfismo $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ temos $x \mapsto \gamma(x) := \bar{\gamma}(\bar{x})$. Naturalmente γ é um homomorfismo que está bem definido, é sobrejetor e portanto dibárlico e $\text{Ker}(\gamma) = I$. Desta forma o teorema segue. ■

Corolário 4.2.1 *Homomorfismos pesos dibárlicos com núcleos iguais são equivalentes.*

Proposição 4.2.2 *Distintos homomorfismos pesos dibárlicos de uma álgebra $\mathcal{A}$ são linearmente independentes.*

Prova: Vamos supor que para todo $z \in \mathcal{A}$, existam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ tais que a equação abaixo, seja válida

$$(4.8) \quad \alpha_1\gamma_1(z) + \alpha_2\gamma_2(z) + \dots + \alpha_n\gamma_n(z) = 0,$$

e vamos fazer a prova por indução sobre o número n de homomorfismos pesos dibárlicos distintos de $\mathcal{A}$. Naturalmente um único homomorfismo peso dibárlico é linearmente independente. Seja $n > 1$ e vamos supor, por hipótese de indução, que a proposição é válida para $n - 1$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$, tais

que $\alpha_1\gamma_1(z)+\alpha_2\gamma_2(z)+\dots+\alpha_n\gamma_n(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}$. Devido à hipótese de indução, se existir i tal que $\alpha_i = 0$, então para todo $j = 1, 2, \dots, n$. $\alpha_j = 0$ e desta forma o resultado segue. Vamos então provar este fato e para tal distinguiremos dois casos.

Assumiremos primeiramente que todos os homomorfismos pesos tenham núcleos iguais. Nestas condições temos que $n = 2$ e pelo Corolário 4.2.1, os dois homomorfismos são equivalentes, portanto $\gamma_2 = \gamma_1^*$. Seja então $z \in \mathcal{A}$, tal que $\gamma_1(z) = \mathfrak{m}$. Assim $0 = \alpha_1\gamma_1(z) + \alpha_2\gamma_1^*(z) = 0$, teremos que $\alpha_1\mathfrak{m} + \alpha_2\mathfrak{h} = 0$, de onde segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Logo γ_1 e γ_1^* são linearmente independentes.

Agora assumimos que existam homomorfismos com núcleos distintos e sem perda de generalidades, podemos supor que $\text{Ker}(\gamma_1) \neq \text{Ker}(\gamma_2)$. Nestas condições seja $x \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma_1(x) \neq 0$ e $\gamma_2(x) = 0$. Como γ_1 é sobrejetor existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma_1(xy) = \gamma_1(x)\gamma_1(y) = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$. Assim, para todo $z \in \mathcal{A}$, temos

$$(4.9) \quad \alpha_1\gamma_1(xy)\gamma_1(z) + \alpha_2\gamma_2(xy)\gamma_2(z) + \dots + \alpha_n\gamma_n(xy)\gamma_n(z) = 0.$$

Multiplicando a equação (4.8) por $\gamma_1(xy)$, obtemos,

$$(4.10) \quad \alpha_1\gamma_1(xy)\gamma_1(z) + \alpha_2\gamma_1(xy)\gamma_2(z) + \dots + \alpha_n\gamma_1(xy)\gamma_n(z) = 0,$$

e subtraindo a equação (4.9) da equação (4.10), temos,

$$(4.11) \quad \alpha_2(\gamma_1(xy))\gamma_2(z) + \dots + \alpha_n(\gamma_1(xy) - \gamma_n(xy))\gamma_n(z) = 0.$$

Observe que como $\gamma_k(xy) \in \gamma_k(\mathcal{A}^2) = \mathcal{S}^2 = \langle \mathfrak{m} + \mathfrak{h} \rangle_F$ para $k = 1, \dots, n$, temos que existem escalares β_k , tais que $\gamma_k(xy) = \beta_k(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})$. Assim a equação (4.11) pode ser escrita da seguinte forma,

$$(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})(\alpha_2\gamma_2(z) + \alpha_3(1 - \beta_3)\gamma_3(z) + \dots + \alpha_n(1 - \beta_n)\gamma_n(z)) = 0,$$

e então temos,

$$(4.12) \quad \alpha_2 \gamma_2(z) + \alpha_3(1 - \beta_3) \gamma_3(z) + \dots + \alpha_n(1 - \beta_n) \gamma_n(z) = 0.$$

Utilizando a hipótese de indução sobre (4.12), temos que $\alpha_2 = 0$. Desta forma os homomorfismos são linearmente independentes. ■

Em vista do resultado acima, segue que o número de homomorfismos pesos dibáricos distintos de uma álgebra $\mathcal{A}$ é no máximo $2n$, onde n é a dimensão de $\mathcal{A}$. Seguidamente demonstraremos que esta cota pode ser melhorada.

Consideremos uma álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão n e definamos por indução

$$\mathcal{A}^{[1]} = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{[i]} = \mathcal{A}^{[i-1]} \mathcal{A}^{[i-1]}, \quad i > 1.$$

Desta forma temos que se $\mathcal{A}$ é de dimensão finita, então existe um número natural r tal que $\mathcal{A}^{[r+1]} = \mathcal{A}^{[r]}$ e nestas condições podemos mostrar que o número máximo de homomorfismos pesos dibáricos distintos de $\mathcal{A}$ é $2 \cdot \dim(\mathcal{A}^{[r]})$.

Antes observemos que, de acordo com a Proposição 4.1.1, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra dibárica que possui γ como homomorfismo peso dibárico, então $\mathcal{A}^2$ é bárica e $\hat{\gamma} : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$, a restrição de γ de $\mathcal{A}^2$ em $\mathcal{S}^2$ é um homomorfismo peso bárico para $\mathcal{A}^2$. Aqui identificamos $\mathcal{S}^2$ com o corpo F .

Teorema 4.2.2 *A correspondência $\{\gamma, \gamma^*\} \mapsto \hat{\gamma}$ é uma injeção entre o conjunto $\mathcal{E}$ das classes de equivalência de homomorfismos pesos dibáricos de $\mathcal{A}$ e o conjunto dos homomorfismos pesos báricos de $\mathcal{A}^2$.*

Prova: Temos que mostrar primeiramente que a aplicação está bem definida isto é, necessitamos mostrar apenas que se $\{\gamma, \gamma^*\}$ é uma classe de

equivalência, então $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^*$. Primeiramente observemos que os elementos de $\mathcal{S}^2$ são invariantes pela involução $*$ e desta forma se $p, q \in \mathcal{S}$, temos que $pq = *(pq) = *(p) * (q)$. Assim, se $x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y) = *(\gamma(x)\gamma(y)) = *(\gamma(x)) * (\gamma(y)) = \gamma^*(x)\gamma^*(y) = \gamma^*(xy).$$

Logo, para todo $x \in \mathcal{A}^2$, temos que $\hat{\gamma}(x) = \hat{\gamma}^*(x)$. Portanto a aplicação está bem definida.

Vamos mostrar agora que a aplicação é injetiva. Sejam, então, dois homomorfismos pesos dibáricos τ e γ , tais que $\hat{\tau} = \hat{\gamma}$. Temos que mostrar que esses dois homomorfismos são equivalentes e para isto, de acordo com o Corolário 4.2.1, é suficiente mostrar que possuem núcleos iguais. Com efeito, seja $a \in \text{Ker}(\gamma)$. Como $\text{Ker}(\gamma)$ é um ideal de $\mathcal{A}$, temos que $aA \subseteq \text{Ker}(\gamma) \cap \mathcal{A}^2$ e utilizando a hipótese, obtemos que $aA \subseteq \text{Ker}(\tau)$, de onde segue que $a \in \text{Ker}(\tau)$, pois caso contrário, como τ é sobrejetor, existe $b \in \mathcal{A}$, tal que $\tau(ab) \neq 0$ e isto é um absurdo. Assim mostramos que $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\tau)$ e portanto os dois homomorfismos são equivalentes e a aplicação é injetiva. ■

Segundo [20, Cap.3], temos que o número máximo de homomorfismos pesos báricos para uma álgebra bárica $\mathcal{A}$, não ultrapassa sua dimensão. Utilizando esse fato, o Teorema 1.4.2 e o teorema acima, obtemos o resultado seguinte.

Corolário 4.2.2 *Seja uma álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão n e r , um número natural tal que $\mathcal{A}^{[r+1]} = \mathcal{A}^{[r]}$. Nestas condições temos que o número máximo de homomorfismos pesos dibáricos distintos de $\mathcal{A}$ é $2 \cdot \dim(\mathcal{A}^{[r]})$.*

Proposição 4.2.3 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica. Se para todo $a \in \text{Ker}(\gamma)$ existir um monômio $p(x) \in F[x]$ distinto de zero tal que $p(a) = 0$, então os únicos homomorfismos pesos dibáricos de $\mathcal{A}$ são γ e γ^* .*

Prova: Seja $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$, um homomorfismo peso dibárico. Se $\text{Ker}(\tau) = \text{Ker}(\gamma)$, temos pelo Corolário 4.2.1 que τ é equivalente a γ e então a proposição segue. Vamos mostrar então que a igualdade é verdadeira. Vamos supor por absurdo que ela não se verifica. Então existe $a \in \text{Ker}(\gamma), y \in \mathcal{A}$ tal que $\tau(a) \neq 0$ e $\tau(ay) = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$. Utilizando a hipótese temos que existe $p(x) \in F[x]$ tal que $p(ay) = 0$. Assim temos $0 = \tau(p(ay)) = p(\tau(ay)) = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ e isto é uma contradição. Logo a igualdade se verifica. ■

Exemplo: Uma álgebra importante para aplicações genéticas é a álgebra de evolução para uma população livre com diferenciação não necessariamente autosomal. No que se segue descreveremos brevemente esta população e sua correspondente álgebra de evolução, descrita com mais detalhes em [20, Cap.I].

Assumindo que uma população é bissexual vamos supor que existam diferentes tipos femininos indexados pelo conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ e similarmente que existam diferentes tipos masculinos indexados pelo conjunto $\{1, 2, \dots, \nu\}$. O número $n + \nu$ é chamado de *dimensão* da população. Um *estado* de uma população é a distribuição de probabilidades dos diferentes tipos de organismos em cada geração, assim esta população é descrita por seu *veter estado* $z = (x, y)$ em $\Omega = \Delta^{n-1} \times \Delta^{\nu-1}$, onde $\Delta^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$ é o simplex de $\mathcal{R}^n$ e $\Delta^{\nu-1} = \{(y_1, y_2, \dots, y_\nu) \in \mathcal{R}^\nu \mid \sum_{j=1}^\nu y_j = 1\}$ é o simplex de $\mathcal{R}^\nu$. Assim, se $z = (x, y)$ é um estado de uma geração, então $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ e x_i é a probabilidade de que um indivíduo fe-

minino, nesta geração, seja do tipo i , e, analogamente $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ onde $y_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^\nu y_j = 1$ e y_j é a probabilidade de que um indivíduo masculino, nesta geração, seja do tipo j . O *espaço de estado* é

$$(4.13) \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in R^n \times R^\nu \mid x_i, y_j \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^\nu y_j = 1 \right\}.$$

Assim Ω é um conjunto convexo e compacto de $R^n \times R^\nu$.

Assumimos que a população é *hereditária*, ou seja, para cada possível estado $z = (x, y) \in \Omega$ que descreve uma geração, o estado $z' = (x', y')$ descrevendo a próxima geração por reprodução e seleção está unicamente definida. Isto significa que para cada par de tipos femininos (i, k) e cada par de tipos masculinos (j, l) existem probabilidades $p_{ij,k}^{(m)}$, $p_{ij,l}^{(h)}$ tais que $p_{ij,k}^{(m)}$ é a probabilidade de que um indivíduo feminino resultante da interação de um indivíduo feminino do tipo i com um indivíduo masculino do tipo j , seja do tipo k . Analogamente temos que $p_{ij,l}^{(h)}$ é a probabilidade de que um indivíduo masculino resultante da interação de um indivíduo feminino do tipo i com um indivíduo masculino do tipo j seja do tipo l . Portanto essas constantes chamadas de *coeficientes hereditários* satisfazem, para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq \nu$ que

$$(4.14) \quad p_{ij,k}^{(m)} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} = 1,$$

$$(4.15) \quad p_{ij,l}^{(h)} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^\nu p_{ij,l}^{(h)} = 1.$$

Finalmente assumimos que existe um processo de *parmixia*, ou seja, a probabilidade de um indivíduo feminino interagir com um indivíduo masculino não depende dos seus respectivos tipos. Assim dado um estado $z = (x, y)$

de uma geração, a probabilidade de um indivíduo feminino do tipo i interagir com um indivíduo masculino do tipo j é dado pelo produto $x_i y_j$, ou seja

$$(4.16) \quad x_i y_j = \text{prob}(i, j).$$

Nestas condições, se $z = (x, y)$ é um estado de uma população, então seu estado $z' = (x', y')$ na seguinte geração será dado por

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j p_{ij,k}^{(m)}, \quad y'_l = \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j p_{ij,l}^{(h)}$$

Estas fórmulas definem um operador quadrático $V : \Omega \rightarrow \Omega$, $z' = V(z)$ chamado de *operador evolução* da população dada. A equação $z' = V(z)$, é chamada de *equação evolução do sistema*. Estendendo este operador V , definimos no espaço $R^n \times R^\nu$ um produto comutativo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} e_i e_k &= 0 & \bar{e}_j \bar{e}_l &= 0 \\ e_i \bar{e}_j &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} e_k + \sum_{l=1}^\nu p_{ij,l}^{(h)} \bar{e}_l \right), \end{aligned}$$

onde identificamos $e_i \equiv (e_i, 0)$, $\bar{e}_j \equiv (0, \bar{e}_j)$ de tal forma que $(e_i)_{i=1}^n$ é a base canônica do R^n e $(\bar{e}_j)_{j=1}^\nu$ é a base canônica do R^ν .

Assim, obtemos a álgebra $\mathcal{A}_V$ comutativa e não necessariamente associativa chamada de *álgebra de evolução da população*. Para obter a forma geral da multiplicação observamos que para $z = (x, y)$ temos

$$z^2 = \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j \left(\sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} e_k + \sum_{l=1}^\nu p_{ij,l}^{(h)} \bar{e}_l \right)$$

e devido à comutatividade da álgebra $\mathcal{A}_V$, temos que se $z = (x, y)$, e $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, então $z\bar{z} = ((z + \bar{z})^2 - z^2 - \bar{z}^2)/2$. Assim fica definida a forma geral da multiplicação em $\mathcal{A}_V$. Em particular temos para todo $z \in \Omega$ a relação

$$z' = V(z) = z^2.$$

Proposição 4.2.4 A aplicação $s : \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por

$$s(z) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \mathfrak{m} + \left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j \right) \mathfrak{h}$$

com $z = (x, y) \in \mathcal{A}_V$ é um homomorfismo peso dibárico e portanto $(\mathcal{A}_V, s)$ é uma álgebra dibárica.

Prova: Naturalmente esta aplicação está bem definida e é sobrejetora uma vez que se $\alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h} \in \mathcal{S}$, tomamos $\alpha e_i + \beta \bar{e}_j \in \mathcal{A}_V$ e obtemos que $s(\alpha e_i + \beta \bar{e}_j) = \alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h}$. Assim temos que mostrar apenas que esta aplicação é um homomorfismo. Para tanto, seja $z = (x, y) \in \mathcal{A}_V$ e então temos

$$\begin{aligned} s(z^2) &= s\left(\sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j \left(\sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} e_k + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{e}_l\right)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j \left(\sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \mathfrak{m} + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \mathfrak{h}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j (\mathfrak{m} + \mathfrak{h}) = 2 \sum_{i,j=1}^{n,\nu} x_i y_j \mathfrak{m} \mathfrak{h} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathfrak{m} + \sum_{j=1}^{\nu} y_j \mathfrak{h}\right)^2 \\ &= s(z)s(z) \end{aligned}$$

Assim se $z, \bar{z} \in \mathcal{A}_V$, temos que

$$\begin{aligned} s(z\bar{z}) &= s\left(\frac{1}{2}((z + \bar{z})^2 - z^2 - \bar{z}^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}((s(z) + s(\bar{z}))^2 - s(z)^2 - s(\bar{z})^2) \\ &= s(z)s(\bar{z}). \end{aligned}$$

Portanto s é um homomorfismo. ■

Proposição 4.2.5 *O homomorfismo peso $s : \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathcal{S}$ está caracterizado de forma única, salvo equivalências, por ser dibárico e positivo no sentido de que a imagem de Ω está contido no conjunto $\{\alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h} \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0\}$*

Prova: Vamos supor que $\gamma : \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathcal{S}$, seja um homomorfismo peso dibárico com $\gamma(\Omega) \subseteq \{\alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h} \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0\}$. Então temos que γ , na base canônica é escrito da seguinte maneira ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \nu$),

$$\gamma(e_i) = \alpha_i \mathfrak{m} + \beta_i \mathfrak{h}, \quad \gamma(\bar{e}_j) = \bar{\alpha}_j \mathfrak{m} + \bar{\beta}_j \mathfrak{h},$$

com $\alpha_i, \beta_i, \bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j$ números reais positivos tais que

$$\alpha_i + \beta_i > 0, \quad \bar{\alpha}_j + \bar{\beta}_j > 0.$$

Observe que como $(e_i)^2 = 0, (\bar{e}_j)^2 = 0$, temos que $\gamma(e_i)^2 = 0, \gamma(\bar{e}_j)^2 = 0$. Desta forma $(\alpha_i \mathfrak{m} + \beta_i \mathfrak{h})^2 = \alpha_i \beta_i (\mathfrak{m} + \mathfrak{h}) = 0$ e $(\bar{\alpha}_j \mathfrak{m} + \bar{\beta}_j \mathfrak{h})^2 = \bar{\alpha}_j \bar{\beta}_j (\mathfrak{m} + \mathfrak{h}) = 0$. Portanto $\alpha_i \beta_i = 0$ e também $\bar{\alpha}_j \bar{\beta}_j = 0$. Por outro lado temos que $2e_i \bar{e}_j \in \Omega$, então temos por hipótese que $0 < \gamma(e_i \bar{e}_j) = \gamma(e_i) \gamma(\bar{e}_j) = (\alpha_i \mathfrak{m} + \beta_i \mathfrak{h})(\bar{\alpha}_j \mathfrak{m} + \bar{\beta}_j \mathfrak{h}) = (\alpha_i \bar{\beta}_j + \beta_i \bar{\alpha}_j)(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})$. Assim obtemos que $\alpha_i \bar{\beta}_j + \beta_i \bar{\alpha}_j > 0$. Resumindo estes fatos chegamos às seguintes relações para os escalares,

$$\alpha_i \beta_i = 0, \quad \alpha_i \bar{\beta}_j + \beta_i \bar{\alpha}_j > 0, \quad \bar{\alpha}_j \bar{\beta}_j = 0.$$

Note que em particular $\alpha_1 \beta_1 = 0$, de onde segue que $\alpha_1 > 0$ e $\beta_1 = 0$ ou $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 > 0$. Consideraremos os dois casos separadamente e chegaremos que no primeiro caso $\gamma = s$ e no segundo $\gamma = * \circ s$.

No primeiro caso assumimos que $\alpha_1 > 0$, e $\beta_1 = 0$. Então para cada j a equação $\alpha_1 \bar{\beta}_j + \beta_1 \bar{\alpha}_j > 0$ implica que $\bar{\beta}_j > 0$ e portanto $\bar{\alpha}_j = 0$. Em particular, $\bar{\beta}_1 > 0$ e também $\bar{\alpha}_1 = 0$. Portanto, a partir da desigualdade

$\alpha_i \bar{\beta}_1 + \beta_i \bar{\alpha}_1 > 0$ obtemos para cada i que $\alpha_i > 0$ e a partir disto segue que $\beta_i = 0$. Assim, chegamos que $\gamma(e_i) = \alpha_i \mathbf{m}$ e $\gamma(\bar{e}_j) = \bar{\beta}_j \mathbf{h}$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_i \bar{\beta}_j (\mathbf{m} + \mathbf{h}) &= 2\gamma(e_i)\gamma(\bar{e}_j) = 2\gamma(e_i \bar{e}_j) \\ &= \gamma \left(\sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} e_k + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{e}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \alpha_k \mathbf{m} + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{\beta}_l \mathbf{h}. \end{aligned}$$

e portanto igualando os coeficientes de $\mathbf{m}$ e $\mathbf{h}$, temos as seguintes igualdades

$$(4.17) \quad \alpha_i \bar{\beta}_j = \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \alpha_k, \quad \alpha_i \bar{\beta}_j = \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{\beta}_l,$$

para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq \nu$. Considerando agora os seguintes escalares

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \max(\alpha_i)_{i=1}^n, & \bar{\beta}_{\max} &= \max(\bar{\beta}_j)_{j=1}^{\nu}, \\ \alpha_{\min} &= \min(\alpha_i)_{i=1}^n, & \bar{\beta}_{\min} &= \min(\bar{\beta}_j)_{j=1}^{\nu}, \end{aligned}$$

e utilizando (4.17), temos

$$\alpha_{\min} = \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \alpha_{\min} \leq \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \alpha_k = \alpha_i \bar{\beta}_j \leq \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(m)} \alpha_{\max} = \alpha_{\max}$$

e também

$$\bar{\beta}_{\min} = \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{\beta}_{\min} \leq \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{\beta}_l = \alpha_i \bar{\beta}_j \leq \sum_{l=1}^{\nu} p_{ij,l}^{(h)} \bar{\beta}_{\max} = \bar{\beta}_{\max}.$$

Em particular $\alpha_{\min} \leq \alpha_{\min} \bar{\beta}_j$ e $\alpha_{\max} \bar{\beta}_j \leq \alpha_{\max}$ e como todos os escalares por hipótese são estritamente positivos, segue que para todo j , $1 \leq \bar{\beta}_j \leq 1$, o

que implica que $\bar{\beta}_j = 1$. Analogamente $\bar{\beta}_{\min} \leq \alpha_i \bar{\beta}_{\min}$, e $\alpha_i \bar{\beta}_{\max} \leq \bar{\beta}_{\max}$, e então para todo i , $\alpha_i = 1$. Em vista disto, temos que $\gamma(e_i) = \mathfrak{m}$ e $\gamma(\bar{e}_j) = \mathfrak{h}$, portanto $\gamma = s$.

Finalmente consideramos o segundo caso, ou seja que $\beta_1 > 0$ e $\alpha_1 = 0$, e procedendo de forma análoga, obtemos que $\gamma(e_i) = \beta_i \mathfrak{h}$ e $\gamma(\bar{e}_j) = \bar{\alpha}_j \mathfrak{m}$. Repetindo os cálculos acima com os escalares α_i e $\bar{\beta}_j$ chegamos que todos estes são iguais a 1 e portanto $\gamma = * \circ s$.

Assim provamos que s e seu equivalente $s^* = * \circ s$ são os únicos homomorfismos pesos dibáricos positivos nesta álgebra. ■

4.3 Álgebras dibáricas

Um par ordenado $(\mathcal{A}, \gamma)$ consistente em uma álgebra $\mathcal{A}$ e um homomorfismo dibárico γ sobre $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra dibárica*. Nestas condições o homomorfismo $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ é chamado de *função peso* e o subespaço afim de codimensão 2, $H = \{x \in \mathcal{A} \mid \gamma(x) = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}\}$ é chamado de *subespaço unidade*. Para cada $x \in \mathcal{A}$ com $x^2 \notin \text{Ker}(\gamma)$, obtemos que $x^2/\gamma(x^2) \in H$. Ao núcleo do homomorfismo γ , denotaremos por $\mathcal{N}$, ou seja,

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{A} \mid \gamma(x) = 0\},$$

que será chamado de *dibarideal* de $\mathcal{A}$. Dado um conjunto $\mathcal{B}$ qualquer contido em $\mathcal{A}$, denotaremos por $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ ao conjunto $\mathcal{N} \cap \mathcal{B}$, isto é,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathcal{B} \mid \gamma(x) = 0\}.$$

Se $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica, dizemos que uma subálgebra $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ é chamada de *subálgebra dibárica* de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}_1 \cap \text{Ker}(\gamma)$, é um ideal de

$\mathcal{A}_1$ de codimensão 2, ou equivalentemente, $\gamma_1 \equiv \gamma|_{\mathcal{A}_1}$ é sobrejetor e é denotada por $(\mathcal{A}_1, \gamma_1) \subset (\mathcal{A}, \gamma)$. Dizemos que uma subálgebra $\mathcal{A}_1$ é normal, e denotamos por $\mathcal{A}_1 \triangleleft \mathcal{A}$ se $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_1}$ é um ideal de $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_1$ é maximal se não existe $\mathcal{B}$ subálgebra dibárlica de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Nestas condições dizemos que uma álgebra dibárlica $(\mathcal{A}, \gamma)$ é simples se para toda subálgebra normal $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$ tivermos que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = 0$ ou $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \mathcal{N}$. Uma subálgebra dibárlica $\mathcal{A}$ é *não trivial* se $\mathcal{N}$ é distinto de zero, ou seja, $\mathcal{A}$ não é isomorfa a $\mathcal{S}$.

Também uma subálgebra $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ é chamada de *subálgebra bária* se $\gamma(\mathcal{A}_1) = \langle \mathfrak{m} + \mathfrak{h} \rangle_F$.

Um ideal I é chamado de *ideal dibárlico* se $I \subset \text{Ker}(\gamma)$, isto é, $\gamma|_I = 0$. Naturalmente um ideal dibárlico não pode ser uma subálgebra dibárlica. Dizemos que um ideal I é maximal se os únicos ideais dibárlicos de $\mathcal{A}$ que contém I são $\mathcal{N}$ e I . Observamos ainda que o maior ideal dibárlico de uma álgebra dibárlica $(\mathcal{A}, w)$ é $\mathcal{N}$.

O anulador $\text{ann}\mathcal{A}$ é um ideal dibárlico de $\mathcal{A}$. Também o é qualquer subespaço do $\text{ann}\mathcal{A}$. O ideal $\mathcal{A}^2$ de $\mathcal{A}$, não é dibárlico e tampouco é uma subálgebra dibárlica, mas de acordo com a Proposição 4.1.1 temos que $\mathcal{A}^2$ é uma subálgebra bária.

Para qualquer ideal dibárlico I , temos que o quociente $\mathcal{A}/I$ é uma álgebra dibárlica a qual chamamos de quociente dibárlico e escrevemos $(\mathcal{A}, \gamma)/I$. A álgebra quociente $(\mathcal{A}, \gamma)/\mathcal{N}$ é isomorfa à álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$.

Dadas duas álgebras dibárlicas $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$, um *homomorfismo de álgebras dibárlicas* $f : (\mathcal{A}_1, \gamma_1) \rightarrow (\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ é um homomorfismo de álgebras $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ tal que $\gamma_2 \circ f = \gamma_1$. Por exemplo, o mergulho de uma subálgebra dibárlica e a aplicação quociente para uma álgebra dibárlica quociente são homomorfismos dibárlicos. Claramente a composição de homo-

morfismos dibáricos é dibárico. A inversa de um isomorfismo dibárico é um isomorfismo dibárico uma vez que $\gamma_2 \circ f = \gamma_1$ implica que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ f^{-1}$. Escrevemos $(\mathcal{A}_1, \gamma_1) \cong (\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ para isomorfismos de álgebras dibáricas, ou seja, existe um isomorfismo dibárico entre as duas álgebras.

Uma álgebra dibárica $(\mathcal{A}, \gamma)$, não pode ser associativa, uma vez que $(\mathcal{A}, \gamma)/\text{Ker}(\gamma) \cong \mathcal{S}$ e a álgebra de diferenciação sexual $\mathcal{S}$ não é associativa. Em particular a álgebra de multiplicação $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de uma álgebra dibárica $(\mathcal{A}, \gamma)$ não é dibárica, uma vez que é associativa.

Proposição 4.3.1 *Seja $f : (\mathcal{A}_1, \gamma_1) \longrightarrow (\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ um homomorfismo dibárico. Então $\text{Im}(f)$ é uma subálgebra dibárica de $\mathcal{A}_2$ e $\text{Ker}(f)$ é um ideal dibárico de $\mathcal{A}_1$. A bijeção usual induzida por f é um isomorfismo dibárico, ou seja, $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Prova: Sejam $x, y \in \mathcal{A}_1$ tal que $\gamma_1(x) = \mathfrak{m}, \gamma_1(y) = \mathfrak{h}$. Então temos que $\gamma_2(f(x)) = \gamma_1(x) = \mathfrak{m}$ e $\gamma_2(f(y)) = \gamma_1(y) = \mathfrak{h}$. Assim $\text{Im}(f)$ é uma subálgebra dibárica de $\mathcal{A}$. Observe que se $f(x) = 0$, segue que $\gamma_1(x) = 0$, logo temos que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(\gamma_1)$, portanto $\text{Ker}(f)$ é um ideal dibárico de $\mathcal{A}$. Facilmente pode-se verificar que a bijeção induzida por f preserva o peso dibárico. ■

Proposição 4.3.2 *Se $f : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ é um homomorfismo dibárico entre duas álgebras dibáricas $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$, então temos que f é um isomorfismo se e somente se $\hat{f} \equiv f|_{\mathcal{N}_1} : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ é um isomorfismo, onde $\mathcal{N}_i = \text{Ker}(\gamma_i)$, para $i = 1, 2$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Claramente temos que se f é um isomorfismo, então $\hat{f}$ também é um isomorfismo.

$(\Leftarrow)$ Temos que mostrar que f é injetiva. Sejam, então $a_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v + x_1$ e

$a_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v + x_2$, onde $u, v \in \mathcal{A}_1$, com $\gamma(u) = \mathfrak{m}$, $\gamma(v) = \mathfrak{h}$, $x_1, x_2 \in \mathcal{N}_1$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$. Vamos considerar que $f(a_1) = f(a_2)$. Isto nos dá que $f(a_1 - a_2) = 0$, e então, como f é um homomorfismo dibárico, temos $\gamma_2(f((\alpha_1 - \alpha_2)u + (\beta_1 - \beta_2)v + (x_1 - x_2))) = \gamma_1((\alpha_1 - \alpha_2)u + (\beta_1 - \beta_2)v + (x_1 - x_2)) = 0$. Logo $\gamma_1((\alpha_1 - \alpha_2)u + (\beta_1 - \beta_2)v + (x_1 - x_2)) = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathfrak{m} + (\beta_1 - \beta_2)\mathfrak{h} = 0$, e portanto temos que $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$. Desta forma $a_1 - a_2 = x_1 - x_2$ e como $f(x_1 - x_2) = 0$, segue devido à hipótese que $x_1 = x_2$. Portanto $a_1 = a_2$ e então f é injetiva. ■

Definição 4.3.1 *Um idempotente e em uma álgebra dibárica $(\mathcal{A}, \gamma)$, é chamado semiprincipal se $e = u + v$, onde $\gamma(u) = \mathfrak{m}$, $\gamma(v) = \mathfrak{h}$, e ainda*

$$u^2 = 0, \quad uv = \frac{(u+v)}{2} = vu, \quad v^2 = 0.$$

Notemos que se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárica, consideramos um idempotente semiprincipal $e = u + v$ em $\mathcal{A}$, então temos a decomposição $\mathcal{A} = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}$ onde $Fu \oplus Fv$ é uma subálgebra dibárica isomorfa a $\mathcal{S}$.

Existe uma maneira natural de obter álgebras com idempotentes semiprincipais. Se N é uma álgebra arbitrária sobre F e $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2 : N \rightarrow N$ são aplicações lineares, consideramos $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus N$, com a multiplicação definida por

$$(\alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{h}, x_1)(\mu\mathfrak{m} + \eta\mathfrak{h}, x_2) = \left(\frac{(\alpha\eta + \beta\mu)}{2}(\mathfrak{m} + \mathfrak{h}), x_1x_2 + \alpha\lambda_1(x_2) + \beta\rho_1(x_2) + \mu\lambda_2(x_1) + \eta\rho_2(x_1)\right)$$

e função peso dibárico por

$$\gamma(\alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{h}, x) = \alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{h},$$

onde α, β, μ e $\eta \in F$ e $x_1, x_2, x \in N$. Temos que γ é não nulo e o elemento $(\mathfrak{m} + \mathfrak{h}, 0)$ é um idempotente semiprincipal de $\mathcal{A}$. Uma álgebra obtida desta maneira denotaremos por $[\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2, N]$.

Reciprocamente, uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ com idempotente semiprincipal $e = u + v$, é isomorfa a $[\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2, \mathcal{N}]$, onde $\mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$,

$$\lambda_1 = L_{u|_{\mathcal{N}}}, \quad \lambda_2 = L_{v|_{\mathcal{N}}}, \quad \rho_1 = R_{u|_{\mathcal{N}}}, \quad \rho_2 = R_{v|_{\mathcal{N}}}$$

e as aplicações $L_{a|_{\mathcal{N}}}$, $R_{a|_{\mathcal{N}}}$ denotam as multiplicações à esquerda e à direita pelo elemento a , restrita a $\mathcal{N}$, isto é $L_a(x) = ax$. $R_a(x) = xa$, para cada $x \in \mathcal{N}$.

Observemos que se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárca com idempotente semiprincipal $e = u + v$, e I é um ideal dibárco de $\mathcal{A}$, então temos que $Fu \oplus Fv \oplus I$ é uma subálgebra dibárca de $\mathcal{A}$. Naturalmente se I é maximal, segue que esta subálgebra é também maximal e reciprocamente temos que se I é um ideal dibárco maximal, segue que a subálgebra dibárca definida nas linhas acima é maximal.

Exemplo: (A álgebra assimétrica triplicada)

Nesta seção, dada uma álgebra bárca vamos construir uma álgebra dibárca. Esta construção e a sua motivação biológica, podem ser encontrados em [25, Cap, 6, 8].

Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bárca e $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação linear que cumpre $w \circ f = w$. Notemos que esta aplicação f deixa o ideal $\mathcal{N} = \text{Ker}(w)$ invariante, isto é, $f(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$. Em primeira instância, consideraremos o espaço vetorial $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, onde $\otimes$ denota o produto tensorial entre espaços vetoriais. Depois introduzimos o espaço vetorial $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ onde $\oplus$ denota a soma direta e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ coincide, como espaço vetorial, com $\mathcal{A}$. Em $\tilde{\mathcal{A}}$ introduzimos a multiplicação “.” determinada pelas relações abaixo:

$$\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_0 = (0) = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_1$$

$$(x \otimes y) \cdot z = xy \otimes \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}w(z)xy = z \cdot (x \otimes y)$$

onde $x, y, z \in \mathcal{A}$ e xy denota o produto de x e y na álgebra $\mathcal{A}$. Notemos que esta álgebra é comutativa ainda que a álgebra $\mathcal{A}$ não seja. Os elementos desta álgebra são da forma $(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i) + z$ onde $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \mathcal{A}_0$ e $z \in \mathcal{A}_1$. Tal álgebra foi denominada por Holgate de *álgebra triplicada assimétrica de $\mathcal{A}$* . (Com respeito à forma linear f).

Se $\mathcal{A}$ é comutativa e em lugar de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, considerarmos $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$, onde $\oplus$ denota o produto tensorial simétrico, então obtemos $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$, a *álgebra triplicada ligada ao sexo de $\mathcal{A}$* . (Com respeito à aplicação linear f).

Proposição 4.3.3 *Seja $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bária, então a triplicada assimétrica $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ é uma álgebra dibária.*

Prova: Consideremos a aplicação $\gamma : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{S}$ dada por:

$$\gamma \left(\left(\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \right) + z \right) := \left(\sum_{i \in I} w(x_i)w(y_i) \right) \mathfrak{m} + w(z)\mathfrak{h}$$

É fácil checar que γ é linear e que é sobrejetora restando-nos apenas mostrar que é um homomorfismo. Para isto, basta provar que $\gamma(a.b) = \gamma(a)\gamma(b)$ para elementos $a, b \in \tilde{\mathcal{A}}$ da forma $x \otimes y + z$ com $x, y, z \in \mathcal{A}$. Agora, para $a = x_1 \otimes y_1 + z_1$ e $b = x_2 \otimes y_2 + z_2$ temos que,

$$\begin{aligned}
\gamma(a \cdot b) &= \gamma \left(x_1 y_1 \otimes \frac{1}{2} f(z_2) + \frac{1}{2} w(z_2) x_1 y_1 + x_2 y_2 \otimes \frac{1}{2} f(z_1) + \frac{1}{2} w(z_1) x_2 y_2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (w(x_1) w(y_1) w(f(z_2))) \mathfrak{m} + \frac{1}{2} (w(z_2) w(x_1) w(y_1)) \mathfrak{h} \\
&\quad + \frac{1}{2} (w(x_2) w(y_2) w(f(z_1))) \mathfrak{m} + \frac{1}{2} w(z_1) (w(x_2) w(y_2)) \mathfrak{h} \\
&= \frac{1}{2} (w(x_1) w(y_1) w(z_2)) \mathfrak{m} + \frac{1}{2} w(z_2) (w(x_1) w(y_1)) \mathfrak{h} \\
&\quad + \frac{1}{2} (w(x_2) w(y_2) w(z_1)) \mathfrak{m} + \frac{1}{2} w(z_1) (w(x_2) w(y_2)) \mathfrak{h} \\
&= \frac{1}{2} (w(x_1) w(y_1) w(z_2) + w(x_2) w(y_2) w(z_1)) \mathfrak{m} \\
&\quad + \frac{1}{2} (w(z_2) w(x_1) w(y_1) + w(z_1) w(x_2) w(y_2)) \mathfrak{h} \\
&= ((w(x_1) w(y_1)) \mathfrak{m} + w(z_1) \mathfrak{h}) ((w(x_2) w(y_2)) \mathfrak{m} + w(z_2) \mathfrak{h}) \\
&= \gamma(a) \gamma(b).
\end{aligned}$$

■

Denotando $\mathcal{K} = Ker(w)$, observamos que

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{K} + \mathcal{K} \otimes \mathcal{A}) \oplus \mathcal{K} \subseteq Ker(\gamma) \subseteq \mathcal{A} \odot \mathcal{A} \oplus \mathcal{K}.$$

Proposição 4.3.4 *Dada uma álgebra bárica $(\mathcal{A}, w)$, temos que sua triplicada assimétrica $\tilde{\mathcal{A}}$ possui γ e seu equivalente γ^* como únicos homomorfismos pesos dibáricos.*

Prova: Para provar esta proposição, vamos mostrar que para todo elemento b em $\tilde{\mathcal{N}} = Ker(\gamma)$ existe um monômio $p(x) \in F[x]$, não nulo tal que $p(b) = 0$ e então de acordo com a Proposição 4.2.3 temos que $\tilde{\mathcal{A}}$ tem $\{\gamma, \gamma^*\}$ como únicos homomorfismos dibáricos. Desta forma, seja $b \in \tilde{\mathcal{N}}$. Afirmamos que

$b^{[3]} = 0$. Com efeito, temos $b = (\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i) + z$, com $z \in \mathcal{K}$. Assim sendo temos

$$\begin{aligned} b \cdot b &= ((\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i) + z) \cdot ((\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i) + z) \\ &= 2 \sum_{i \in I} x_i y_i \otimes f(z) + w(z) x_i y_i \\ &= 2 \sum_{i \in I} x_i y_i \otimes f(z) \end{aligned}$$

Logo segue que $b \cdot b \in \mathcal{A}_0$ e como $\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_0 = 0$, segue que $b^{[3]} = 0$. Assim tomando $p(x) = x^{[3]}$, temos que para qualquer $b \in \mathcal{N}_{(\tilde{\mathcal{A}})}$, $p(b) = 0$. ■

Corolário 4.3.1 *Se $\mathcal{N} = \text{Ker}(w)$ é nilpotente, então $\tilde{\mathcal{N}} = \text{Ker}(\gamma)$ é nilpotente.*

Prova: Primeiramente observemos que se $a = x_1 \otimes y_1 + z_1$ e $b = x_2 \otimes y_2 + z_2 \in \tilde{\mathcal{N}}$, então temos

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (x_1 \otimes y_1 + z_1) \cdot (x_2 \otimes y_2 + z_2) \\ &= x_1 y_1 \otimes \frac{1}{2} f(z_2) + x_2 y_2 \otimes \frac{1}{2} f(z_1) \end{aligned}$$

logo $a \cdot b \in \mathcal{N}_0 := \mathcal{A}_0 \cap \tilde{\mathcal{N}}$ e como $\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_0 = 0$, segue que $\tilde{\mathcal{N}}^i \cdot \tilde{\mathcal{N}}^j = (0)$, para $i, j \geq 2$. Assim a única possibilidade para que o produto de $n + 1$ elementos $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ de $\mathcal{N}$, seja distinto de zero, é que a multiplicação seja feita da seguinte forma: $L_{a_{n+1}} L_{a_n} L_{a_{n-1}} \cdots L_{a_2}(a_1)$, onde L_{a_j} é a multiplicação à esquerda por a_j . Vamos supor então que o índice de nilpotência de $\mathcal{N}$ seja n e consideremos $a_i = \sum_{j \in J} x_{ij} \otimes y_{ij} + z_i$ elementos em $\tilde{\mathcal{N}}$, para $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Nestas condições temos

$$\begin{aligned}
L_{a_{n+1}} \cdots L_{a_2}(a_1) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (((\cdots ((\sum_{j \in J} x_{1j} y_{1j}) f(z_1)) f(z_3)) \cdots) f(z_n) \otimes f(z_{n+1}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^n (((\cdots ((\sum_{j \in J} x_{2j} y_{2j}) f(z_2)) f(z_3)) \cdots) f(z_n))) \otimes f(z_{n+1}).
\end{aligned}$$

Como por hipótese, estamos supondo que $\mathcal{N}$ é nilpotente de índice n , temos que

$$\begin{aligned}
((\cdots ((\sum_{j \in J} x_{1j} y_{1j}) f(z_1)) f(z_3)) \cdots) f(z_n)) &= 0, \\
((\cdots ((\sum_{j \in J} x_{2j} y_{2j}) f(z_2)) f(z_3)) \cdots) f(z_n)) &= 0
\end{aligned}$$

porque tratam-se de produtos de n elementos que estão em $\mathcal{N}$. Portanto $\tilde{\mathcal{N}}$ é nilpotente. ■

Proposição 4.3.5 *Sejam $(\mathcal{A}, w)$ uma álgebra bárica e $(\tilde{\mathcal{A}}, \gamma)$ sua álgebra triplicada assimétrica com respeito a aplicação linear $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Se $\tilde{\mathcal{N}}$ é nilpotente, e f é sobrejetora, então temos que para todo $b \in \mathcal{N}$ existe um monômio não nulo em $F[x]$ tal que $p(b) = 0$. Desta maneira, segue que w é o único homomorfismo peso de $\mathcal{A}$.*

Prova: Vamos supor por hipótese, que $\tilde{\mathcal{N}}$ seja nilpotente de índice n . Como f é uma aplicação linear sobrejetora, temos que dado $y \in \mathcal{N}$, não nulo, existe $z \in \mathcal{A}$ tal que $f(z) = y$. Assim sendo, consideremos o elemento $a = y \otimes y + z \in \tilde{\mathcal{A}}$ e calculemos $p_n(a)$ onde $p_n(x) \in F[x]$ e $p_n(x) = x^n = R_x^{n-1}(x)$. Nestas condições temos que $p(a) = 0$ e então:

$$\begin{aligned}
p(a) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} ((\cdots ((yy)f(z))f(z)) \cdots)f(z)) \odot f(z) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} ((\cdots ((yy)y)y) \cdots)y) \otimes y = 0
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que $p_{n-1}(y) = 0$ e ou $y = 0$ e como $y \neq 0$, segue que $p_{n-1}(y) = 0$. ■

4.4 O Teorema de Krull-Schmidt

Dadas duas álgebras dibáricas $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$, e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$, temos o produto externo $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ com a multiplicação dada por $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Este produto é uma álgebra não necessariamente dibárica, mas o conjunto

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mid \gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2)\}$$

é uma subálgebra dibárica de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Esta afirmação é fácil de ser comprovada uma vez que se (x_1, x_2) e (y_1, y_2) são dois elementos deste conjunto, temos que $\gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2)$ e $\gamma_1(y_1) = \gamma_2(y_2)$, logo $\gamma_1(x_1y_1) = \gamma_1(x_1)\gamma_1(y_1) = \gamma_2(x_2)\gamma_2(y_2) = \gamma_2(x_2y_2)$. O homomorfismo dibárico é dado por

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(x_1, x_2) := \gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2).$$

A esta álgebra dibárica chamaremos de *join* de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ e denotaremos por $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2, \gamma_1 \vee \gamma_2)$.

O join de álgebras foi primeiramente definido para álgebras báricas com idempotente de peso 1 por Roberto Costa e Henrique Guzzo Junior em [2] e pode ser visto com maiores detalhes em [15] e [11]. Aqui utilizamos uma

das caracterizações de join, como subálgebra do produto externo, definido pela primeira vez em [3], por entender que esta define de uma forma mais geral esta estrutura, uma vez que independe de que as álgebras em questão possuam ou não idempotentes.

Existe uma identificação natural de $\mathcal{N}_1$, o dibarideal de $\mathcal{A}_1$ com o ideal de $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$, dado pelo conjunto $\{(x, 0) \mid x \in \mathcal{N}_1\}$. Analogamente identificamos $\mathcal{N}_2$ o dibarideal de $\mathcal{A}_2$ com o ideal dado pelo conjunto $\{(0, x) \mid x \in \mathcal{N}_2\}$. Agora tomando $u_1, v_1 \in \mathcal{A}_1$ tais que $\gamma_1(u_1) = \mathfrak{m}$, $\gamma_1(v_1) = \mathfrak{h}$, e $u_2, v_2 \in \mathcal{A}_2$ tais que $\gamma_2(u_2) = \mathfrak{m}$, $\gamma_2(v_2) = \mathfrak{h}$, temos que $u = (u_1, v_1)$ e $v = (u_2, v_2)$ estão em $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ com $\gamma_1 \vee \gamma_2(u) = \mathfrak{m}$, e $\gamma_1 \vee \gamma_2(v) = \mathfrak{h}$. Desta forma escrevemos

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2,$$

onde com as identificações acima $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ é o barideal de $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$.

Proposição 4.4.1 *O join de álgebras dibáricas satisfaz as seguintes propriedades,*

- (a) $(\mathcal{S} \vee \mathcal{A}, Id_{\mathcal{S}} \vee \gamma) \cong (\mathcal{A}, \gamma)$; onde $Id_{\mathcal{S}}$ é a identidade em $\mathcal{S}$.
- (b) $(\mathcal{S} \vee \mathcal{A}, * \vee \gamma) \cong (\mathcal{A}, \gamma)$;
- (c) $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2, \gamma_1 \vee \gamma_2) \cong (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_1, \gamma_2 \vee \gamma_1)$;
- (d) $((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3, (\gamma_1 \vee \gamma_2) \vee \gamma_3) \cong (\mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3), \gamma_1 \vee (\gamma_2 \vee \gamma_3))$.

Prova: Para demonstrar (a) consideremos a aplicação $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S} \vee \mathcal{A}$ dada por $f(a) = (\gamma(a), a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Naturalmente esta aplicação está bem definida uma vez que o par $(\gamma(a), a)$ está em $\mathcal{S} \vee \mathcal{A}$, e também é um homomorfismo pois γ é um homomorfismo. Facilmente mostra-se que é

injetiva e sobrejetiva e como $(I_S \vee \gamma)(f(a)) = (I_S \vee \gamma)(\gamma(a), a) = \gamma(a)$, segue que é um isomorfismo dibárlico. Temos que (b) demonstra-se analogamente tomando-se a aplicação $\bar{f} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S} \vee \mathcal{A}$ definida por $\bar{f}(a) = (* \circ \gamma(a), a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Este é um isomorfismo dibárlico pois $(* \vee \gamma)(\bar{f}(a)) = (* \vee \gamma)((* \circ \gamma)(a), a) = *((* \circ \gamma)(a)) = \gamma(a)$.

Para a propriedade (c) toma-se a aplicação $f : \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_1$, definida por $f(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$, para todo $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$. Naturalmente f é um homomorfismo que está bem definido, é injetivo e sobrejetivo. É dibárlico pois $(\gamma_2 \vee \gamma_1)(f(a_1, a_2)) = (\gamma_2 \vee \gamma_1)(a_2, a_1) = \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) = (\gamma_1 \vee \gamma_2)(a_1, a_2)$.

Analogamente para mostrar a propriedade (d), tomamos a aplicação $f : (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3)$, definida por $f((a_1, a_2), a_3) = (a_1, (a_2, a_3))$, para todo $((a_1, a_2), a_3) \in (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3$. Esta aplicação está bem definida e é um isomorfismo. Para ver que é dibárlico, basta notar que

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \vee (\gamma_2 \vee \gamma_3))(f((a_1, a_2), a_3)) &= (\gamma_1 \vee (\gamma_2 \vee \gamma_3))(a_1, (a_2, a_3)) \\ &= \gamma_1(a_1) = (\gamma_2 \vee \gamma_3)(a_2, a_3) = \gamma_3(a_3) = \gamma_2(a_2) \\ &= (\gamma_1 \vee \gamma_2)(a_1, a_2) = ((\gamma_1 \vee \gamma_2) \vee \gamma_3)((a_1, a_2), a_3). \end{aligned}$$

■

A condição (d) acima nos permite definir recursivamente o join de uma família arbitrária $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_{i \in I}$ de álgebras dibárlicas $(\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i \in I} \gamma_i)$, onde a álgebra é definida pela subálgebra de $\bigtimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, dada por

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in \mathcal{A}_i, \gamma_i(x_i) = \gamma_j(x_j), \forall i, j \in I\},$$

e o homomorfismo dibárlico por

$$(\bigwedge_{i \in I} \gamma_i)((x_i)_{i \in I}) := \gamma_i(x_i),$$

onde i é um índice fixo e arbitrário de I .

Se tivermos uma família de r álgebras dibárlicas, onde a dimensão de $\mathcal{A}_i$ é igual a n_i , $i = 1, 2, \dots, r$, então se cumpre que

$$\dim \bigwedge_{i=1}^r \mathcal{A}_i = 2(1 - r) + \sum_{i=1}^r n_i.$$

Definição 4.4.1 *Uma álgebra dibárlica $(\mathcal{A}, \gamma)$ é decomponível se existem álgebras dibárlicas não triviais $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ tais que*

$$(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\mathcal{A}_1, \gamma_1) \vee (\mathcal{A}_2, \gamma_2).$$

Caso contrário dizemos que $\mathcal{A}$ é indecomponível.

Proposição 4.4.2 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárlica. Então temos que $\mathcal{A}$ é decomponível se e somente se $\mathcal{N}$ é decomponível como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -módulo.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Vamos supor que $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra decomponível. Então existem $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ álgebras dibárlicas não triviais e um isomorfismo dibárlico $f : (\mathcal{A}, \gamma) \rightarrow (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2, \gamma_1 \vee \gamma_2)$. Como o dibarideal de $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ é escrito como soma direta dos ideais $\mathcal{N}_1 \equiv \{(x, 0), x \in \mathcal{N}_1\}$ e $\mathcal{N}_2 \equiv \{(0, x), x \in \mathcal{N}_2\}$ e f é um isomorfismo dibárlico, segue que o dibarideal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ é escrito como soma direta dos ideais $f^{-1}(\mathcal{N}_1)$ e $f^{-1}(\mathcal{N}_2)$. Portanto $\mathcal{N}$ é decomponível.

$(\Leftarrow)$ Para a recíproca, suponhamos que $\mathcal{N}$ seja decomponível, ou seja, que existem $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ dois $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos próprios de $\mathcal{N}$ tais que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus$

$\mathcal{N}_2$. Desta forma podemos escrever $\mathcal{A} = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, onde u, v são tais que $\gamma(u) = \mathfrak{m}$ e $\gamma(v) = \mathfrak{h}$ e os subespaços $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ são ideais de $\mathcal{A}$. Então um elemento $x \in \mathcal{A}$ é escrito de forma única como a soma $x = \alpha u + \beta v + x_1 + x_2$, onde $\alpha, \beta \in F$ e $x_1 \in \mathcal{N}_1$, $x_2 \in \mathcal{N}_2$. Esta decomposição nos permite definir as projeções $\pi_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{N}_i$, $\pi_i(x) = x_i$, para $i = 1, 2$. Estas aplicações π_i satisfazem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\pi_i(ux) &= u\pi_i(x), & \pi_i(xu) &= \pi_i(x)u, \\ \pi_i(vx) &= v\pi_i(x), & \pi_i(xv) &= \pi_i(x)v, \\ \pi_i(xy) &= \pi_i(x)\pi_i(y),\end{aligned}$$

para $x, y \in \mathcal{N}$.

Agora sobre os espaços vetoriais $\mathcal{A}_i = Fu_i \oplus Fv_i \oplus \mathcal{N}_i$, definimos uma multiplicação “ $\cdot$ ” que sobre o espaço $\mathcal{N}_i$ coincide com a multiplicação de $\mathcal{N}_i$ como subálgebra de $\mathcal{A}$, isto é definimos $x_i \cdot y_i = x_i y_i$ e os demais produtos ficam definidos pelas relações abaixo,

$$\begin{aligned}u_i \cdot v_i &= \frac{(u + v)}{2} + \pi_i(uv), & v_i \cdot u_i &= \frac{(u + v)}{2} + \pi_i(vu), \\ u_i \cdot u_i &= \pi_i(u^2), & v_i \cdot v_i &= \pi_i(v^2), \\ x_i \cdot u_i &= x_i u, & u_i \cdot x_i &= u x_i, \\ x_i \cdot v_i &= x_i v, & v_i \cdot x_i &= v x_i.\end{aligned}$$

onde $x_i, y_i \in \mathcal{N}_i$. Estes dois espaços vetoriais com a multiplicação definida acima possuem homomorfismos dibáricos dados por

$$\gamma_i(\alpha u_i + \beta v_i + x_i) = \alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h},$$

onde $\alpha, \beta \in F$ e $x_i \in \mathcal{N}_i$.

Assim $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$, $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ são álgebras dibáricas e seu join $(\mathcal{A}_1, \gamma_1) \vee (\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ é isomorfo a $(\mathcal{A}, \gamma)$. Para verificar que este fato é verdadeiro, consideramos a aplicação $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$, dada por

$$f(\alpha u + \beta v + x) = (\alpha u_1 + \beta v_1 + \pi_1(x), \alpha u_2 + \beta v_2 + \pi_2(x)).$$

Cálculos simples mostram que esta aplicação está bem definida, é linear e bijetiva, bastando apenas mostrar que trata-se de um homomorfismo de álgebras. Para isto, sejam $a = \alpha u + \beta v + x$, $b = \eta u + \mu v + y$ dois elementos de $\mathcal{A}$ e então,

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(\alpha\mu uv + \beta\eta vu + \alpha\eta u^2\beta\mu v^2 \\ &\quad + \alpha uy + \beta vy + \eta xu + \mu xv + xy) \\ &= \alpha\mu\left\{\frac{1}{2}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (\pi_1(uv), \pi_2(uv))\right\} \\ &\quad + \beta\eta\left\{\frac{1}{2}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (\pi_1(vu), \pi_2(vu))\right\} \\ &\quad + \alpha\eta(\pi_1(u^2), \pi_2(u^2)) + \beta\mu(\pi_1(v^2), \pi_2(v^2)) \\ &\quad + \alpha(\pi_1(uy), \pi_2(uy)) + \beta(\pi_1(vy), \pi_2(vy)) \\ &\quad + \eta(\pi_1(xu), \pi_2(xu)) + \mu(\pi_1(xv), \pi_2(xv)) \\ &\quad + (\pi_1(xy), \pi_2(xy)) \\ &= \alpha\mu(u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2) + \beta\eta(v_1 \cdot u_1, v_2 \cdot u_2) \\ &\quad + \alpha\eta(u_1 \cdot u_1, u_2 \cdot u_2) + \beta\mu(v_1 \cdot v_1, v_2 \cdot v_2) \\ &\quad + \alpha(u_1 \cdot \pi_1(y), u_2 \cdot \pi_2(y)) + \beta(v_1 \cdot \pi_1(y), v_2 \cdot \pi_2(y)) \\ &\quad + \eta(\pi_1(x) \cdot u_1, \pi_2(x) \cdot u_2) + \mu(\pi_1(x) \cdot v_1, \pi_2(x) \cdot v_2) \\ &\quad + (\pi_1(x) \cdot \pi_1(y), \pi_2(x) \cdot \pi_2(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha u_1 + \beta v_1 + \pi_1(x), \alpha u_2 + \beta v_2 + \pi_2(x)) \\
&\quad \cdot (\eta u_1 + \mu v_1 + \pi_1(y), \eta u_2 + \mu v_2 + \pi_2(y)) \\
&= f(a) \cdot f(b)
\end{aligned}$$

Assim mostramos que f é um homomorfismo. Naturalmente esse homomorfismo é dibárico uma vez que $(\gamma_1 \vee \gamma_2)(f(\alpha u + \beta v + x)) = (\gamma_1 \vee \gamma_2)(\alpha u + \beta v + \pi_1(x), \alpha u + \beta v + \pi_2(x)) = \alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h} = \gamma(\alpha u + \beta v + x)$. Portanto temos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra decomponível. ■

O resultado acima pode ser generalizado no sentido de que se uma álgebra dibárica $(\mathcal{A}, \gamma)$ é escrita como o join de uma família finita de álgebras dibáricas $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^n$, ou seja $(\mathcal{A}, \gamma) = (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$. Como de outras vezes, identificamos $\mathcal{N}_j = \{(0, \dots, x_j, \dots, 0) \in \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, x_j \in \mathcal{N}_j\}$, onde $\mathcal{N}_j = \text{Ker}(\gamma_j)$ e então obtemos que o ideal dibárico $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ é escrito como soma direta dos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos $\mathcal{N}_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Reciprocamente, se tivermos que o ideal dibárico $\mathcal{N}$ de uma álgebra $(\mathcal{A}, \gamma)$ é escrito como $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{N}_i$, onde $\mathcal{N}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos, definimos as álgebras sobre os espaços vetoriais $\mathcal{A}_i = Fu_i \oplus Fv_i \oplus \mathcal{N}_i$ com multiplicação análoga à da demonstração da proposição acima onde $\pi_i(\alpha u + \beta v + x) = x_i$ sempre que $x = \sum_{j=1}^n x_j$ com $x_j \in \mathcal{N}_j$. Estas álgebras possuem homomorfismos pesos dados por $\gamma_i(\alpha u_i + \beta v_i + \pi_i(x)) = \alpha \mathfrak{m} + \beta \mathfrak{h}$. Assim $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_i^n$ são álgebras dibáricas e $f : (\mathcal{A}, \gamma) \longrightarrow (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$ definido por

$$f(\alpha u + \beta v + x) = (\alpha u_1 + \beta v_1 + \pi_1(x), \dots, \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)} + \pi_n(x)),$$

onde $\alpha, \beta \in F, x \in \mathcal{N}$ é um isomorfismo dibárico.

Corolário 4.4.1 *Se uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ é escrita como o join de uma família finita de álgebras dibárcas, isto é $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$, então*

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_n,$$

onde $\mathcal{N}_i = \text{Ker}(\gamma_i)$. Reciprocamente, se ideal dibárco $\mathcal{N}$ de uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$, é soma direta de ideais $I_1, \dots, I_n$, então existem álgebras dibárcas $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^n$, com $\text{Ker}(\gamma_i) \cong I_i$ tais que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$.

Dizemos que uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ satisfaz a *condição de cadeias ascendentes* (c.c.a) se $\mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$ satisfaz (c.c.a.) como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –módulos. Analogamente, dizemos que uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ satisfaz a *condição de cadeias descendentes* se $\mathcal{N}$ satisfaz (c.c.d.) como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ –módulo.

Proposição 4.4.3 *Seja $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2, \gamma_1 \vee \gamma_2)$ o join de duas álgebras dibárcas $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$. Nestas condições temos que (e_1, e_2) é um idempotente semiprincipal em $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$, se e somente se e_1, e_2 são idempotentes semiprincipais em $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ respectivamente. Desta forma segue que $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ possui idempotente semiprincipal se e somente se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ também possuem.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Seja $e := (e_1, e_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$ com $u_1, v_1 \in \mathcal{A}_1$ e $u_2, v_2 \in \mathcal{A}_2$ um idempotente semiprincipal em $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$. Nestas condições temos que $(u_1, u_2)^2 = 0$ de onde segue que $(u_1^2, u_2^2) = 0$, portanto $u_1^2 = 0$ e $u_2^2 = 0$. Analogamente, $(v_1, v_2)^2 = 0$ e assim $v_1^2 = 0$, e $v_2^2 = 0$. Por outro lado $(u_1, u_2)(v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2) = ((u_1, u_2) + (v_1, v_2))/2$ e então $u_1 v_1 = (u_1 + v_1)/2$ e $u_2 v_2 = (u_2 + v_2)/2$. Finalmente temos $(\gamma_1 \vee \gamma_2)(u_1, u_2) = \gamma_1(u_1) = \gamma_2(u_2) = \mathfrak{m}$ e ainda mais $(\gamma_1 \vee \gamma_2)(v_1, v_2) = \gamma_1(v_1) = \gamma_2(v_2) = \mathfrak{h}$. Logo, $e_1 = u_1 + v_1$ e $e_2 = u_2 + v_2$ são idempotentes semiprincipais em $\mathcal{A}_1$ e

$\mathcal{A}_2$ respectivamente.

($\Leftarrow$) Se $e_1 = u_1 + v_1 \in \mathcal{A}_1$ e $e_2 = u_2 + v_2 \in \mathcal{A}_2$ são idempotentes semiprincipais, temos que o par $(e_1, e_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) \in \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ uma vez que $\gamma_1(e_1) = m + \mathfrak{h} = \gamma_2(e_2)$. Este elemento satisfaz também que $(e_1, e_2)^2 = (e_1^2, e_2^2) = (e_1, e_2)$ e $(u_1, u_2)^2 = (u_1^2, u_2^2) = (0, 0)$, $(v_1, v_2)^2 = (v_1^2, v_2^2) = (0, 0)$ e finalmente que $(u_1, u_2)(v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2) = (u_1, u_2)/2 + (v_1, v_2)/2$. Portanto (e_1, e_2) é um idempotente semiprincipal em $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$. Assim temos que $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ possui idempotente semiprincipal se e somente se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ também possuem. ■

O resultado acima pode ser generalizado, no sentido de que se $(\mathcal{A}, \gamma)$ possui um idempotente semiprincipal $e = u + v$ e é isomorfa ao join de uma família finita $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^n$ de subálgebras dibáricas, então cada álgebra $\mathcal{A}_i$ possui idempotente semiprincipal $e_i = u_i + v_i$. Este fato se verifica utilizando indução sobre n e a associatividade do join de álgebras dibáricas. Formalmente, temos que para $n \leq 2$ a propriedade é válida. Assim suponhamos por hipótese de indução que a propriedade é válida para $n - 1$ e consideramos o join de n subálgebras $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Então temos que $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \vee (\bigwedge_{i=2}^n \mathcal{A}_i)$ e pela proposição anterior, temos que $\mathcal{A}_1$ e $\bigwedge_{i=2}^n \mathcal{A}_i$ possuem idempotentes semiprincipais. Usando agora a hipótese de indução sobre $\bigwedge_{i=2}^n \mathcal{A}_i$, temos que cada $\mathcal{A}_i$ possui idempotente semiprincipal e portanto temos o corolário abaixo.

Corolário 4.4.2 *Se $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$, então temos que $\mathcal{A}$ possui idempotente semiprincipal se e somente se, para todo i , $\mathcal{A}_i$ também possui.*

Proposição 4.4.4 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica com idempotente semiprincipal $e = u + v$ de tal forma que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$, então para cada i existe uma subálgebra dibárica de $\mathcal{A}$ que possui $e = u + v$ como idem-*

potente semiprincipal e que é isomorfa a (A_i, γ_i) .

Prova: Vamos supor que $(\mathcal{A}, \gamma) = (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$. Desta forma se $e = (e_1, \dots, e_n) = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)$, com $(u_1, \dots, u_n) = u$ e $(v_1, \dots, v_n) = v$, é um idempotente semiprincipal em $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, então pelo Corolário 4.4.2, temos que $e_i = u_i + v_i$ é um idempotente semiprincipal em $\mathcal{A}_i$. Temos também que $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ pode ser escrito da seguinte forma,

$$\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_n.$$

onde

$$\mathcal{N}_j = \{(0, \dots, x_j, \dots, 0) \in \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i \mid x_j \in \text{Ker}(\gamma_j)\}$$

é um ideal bilateral de $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Assim, como $e = u + v$ é um idempotente semiprincipal e $\mathcal{N}_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$ é um ideal bilateral, segue que $Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_j$ é uma subálgebra dibárca de $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Desta forma, consideramos o isomorfismo dibárco

$$f_j : Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_j \longrightarrow \mathcal{A}_j,$$

definido por $f_j(\alpha u + \beta v + x) = \alpha u_j + \beta v_j + x$, para todo $\alpha, \beta \in F$ e $x \in \mathcal{N}_j$.

■

Proposição 4.4.5 *Se uma álgebra dibárca $(\mathcal{A}, \gamma)$ com idempotente semiprincipal $e = u + v$ satisfaz a condição de cadeias descendentes então existe um número finito de subálgebras dibárcas indecomponíveis $\{(\mathcal{A}_i, \gamma_i)\}_{i=1}^n$ de $(\mathcal{A}, \gamma)$, tais que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n, \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n)$.*

Prova: Como $(\mathcal{A}, \gamma)$ satisfaz a condição de cadeias descendentes, segue por definição que o $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo $\mathcal{N}$ satisfaz c.c.d.. Assim existem $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos indecomponíveis $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_m$ de $\mathcal{N}$ tais que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_m$. Portanto temos que para cada j , $\mathcal{A}_j = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_j$ é uma subálgebra dibárca de $\mathcal{A}$ tal que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i)$. Assim, só nos resta demonstrar que para cada j , $\mathcal{A}_j$ é indecomponível. Para tanto, basta observar que um ideal dibárco I de $\mathcal{A}_j$ é um ideal dibárco de $\mathcal{A}$, já que $I\mathcal{A} = I(Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_n) = I\mathcal{A}_j \subseteq I$ e analogamente $\mathcal{A}I \subseteq I$. Assim temos que os $\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)$ -submódulos de $\mathcal{N}_j$ coincidem com os $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos de $\mathcal{N}_j$ e desta forma como $\mathcal{N}_j$ é indecomponível como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo, segue que $\mathcal{N}_j$ é indecomponível como $\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)$ -submódulo. Assim, temos que $\mathcal{A}_j$ é indecomponível. ■

Teorema 4.4.1 (Krull Schmidt) *Sejam $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárca com idempotente semiprincipal $e = u + v$ satisfazendo c.c.d e c.c.a.. Se*

$$(\mathcal{A}, \gamma) = (\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n, \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n),$$

$$(\mathcal{A}, \gamma) = (\mathcal{B}_1 \vee \dots \vee \mathcal{B}_m, \chi_1 \vee \dots \vee \chi_m).$$

onde cada $(\mathcal{A}_i, \gamma_i)$ e $(\mathcal{B}_j, \chi_j)$ são subálgebras dibárcas indecomponíveis de $(\mathcal{A}, \gamma)$, então $n = m$ e com uma devida reindexação temos que $(\mathcal{A}_i, \gamma_i) \cong (\mathcal{B}_i, \chi_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Prova: Como trata-se de duas decomposições de $\mathcal{A}$ em subálgebras indecomponíveis, temos que $\mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$ é decomposto em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos indecomponíveis das seguintes maneiras,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_n, \quad \mathcal{N} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_m.$$

onde $\mathcal{N}_i = \text{Ker}(\gamma_i)$ e $\mathcal{P}_j = \text{Ker}(\chi_j)$. Assim de acordo com o Teorema de Krull-Schmidt para $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -módulos, temos que $m = n$ e com a devida reindexação $\mathcal{N}_i \cong \mathcal{P}_i$. Ainda de acordo com o mesmo teorema, podemos escrever para $1 \leq k \leq n$

$$(4.18) \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{P}_{k+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_n.$$

Seja j um índice fixado. Mostraremos primeiramente que $\mathcal{N}_j \cong \mathcal{P}_j$ como álgebras e para isto consideraremos as duas seguintes decomposições de (4.18)

$$\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_{j-1} \oplus \mathcal{N}_j \oplus \mathcal{P}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_n,$$

$$\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_{j-1} \oplus \mathcal{P}_j \oplus \mathcal{P}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_n.$$

Em vista disto se $x \in \mathcal{N}$, então temos que x pode ser expresso de duas maneiras

$$x := x_1 + \cdots + x_n, \quad x := x'_1 + \cdots + x'_n$$

onde $x_r, x'_r \in \mathcal{N}_r$; $x_j \in \mathcal{N}_j$; $x'_j \in \mathcal{P}_j$ e $x_s, x'_s \in \mathcal{P}_s$ para $1 \leq r \leq j-1$ e $j+1 \leq s \leq n$. Sejam τ_j a injeção de $\mathcal{N}_j$ em $\mathcal{N}$ e $\pi_j : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}_j$ a projeção que leva cada $x \in \mathcal{N}$ em x'_j . Então a composição $p_j := \pi_j \circ \tau_j$ de $\mathcal{N}_j$ em $\mathcal{P}_j$ é um isomorfismo de álgebras. Primeiramente, vamos constatar que é um homomorfismo de álgebras. Para tanto, se $x, y \in \mathcal{N}_j$, então $p_j(xy) = (xy)'_j = \{(x'_1 + \cdots + x'_n)(y'_1 + \cdots + y'_n)\}'_j = \{x'_1 y'_1 + \cdots + x'_n y'_n\}'_j = x'_j y'_j = p_j(x)p_j(y)$. Para provar que é injetora consideramos $x \in \text{ker}(p_j)$. Então $0 = p_j(x) = x'_j$ e portanto temos que $x \in \mathcal{N}_j \cap (\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_{j-1} \oplus \mathcal{P}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_n) = \{0\}$, de onde segue que $x = 0$. Para mostrar que é sobrejetiva, seja $y \in \mathcal{P}_j$. Então

$y = y'_j = \pi_j(y) = \pi_j(y_1 + \cdots + y_n) = \pi_j(y_1) + \cdots + \pi_j(y_n) = 0 + \cdots + 0 + \pi_j(y_j) + 0 + \cdots + 0 = \pi_j(y_j)$ onde de acordo com a decomposição acima $y_j \in \mathcal{N}_j$.

Finalmente estabeleceremos o isomorfismo dibárlico entre as álgebras $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{B}_j$. Em vista da Proposição 4.4.4 podemos assumir, sem perdas de generalidades, que $(\mathcal{A}_j, \gamma_j)$ e $(\mathcal{B}_j, \chi_j)$ possuem o mesmo idempotente semiprincipal, ao qual denotamos por $e = u + v$. Então definimos a aplicação $f_j : \mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{B}_j$, por

$$f_j(\alpha u + \beta v + x) = \alpha u + \beta v + p_j(x)$$

onde $\alpha, \beta \in F$ e $x \in \mathcal{N}_j$. Obviamente f_j é um isomorfismo linear e dibárlico. Portanto, só nos resta mostrar que é homomorfismo de álgebras. Notemos que se $w \in \langle u, v \rangle$ e $x \in \mathcal{N}_j$, então

$$p_j(wx) = wp_j(x), \quad p_j(xw) = p_j(x)w,$$

já que $p_j(wx) = \{w(x'_1 + \cdots + x'_n)\}'_j = \{wx'_1 + \cdots + wx'_n\}'_j = wx'_j = wp_j(x)$. Analogamente, temos a outra igualdade. Assim, se $a = \alpha u + \beta v + x$, $b = \eta u + \mu v + y$ estão em $\mathcal{A}_j$ temos

$$\begin{aligned} f_j(ab) &= f_j\left(\frac{1}{2}(\alpha\mu + \beta\eta)(u + v) + \alpha uy + \beta vy + \eta xu + \mu xv + xy\right) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\mu + \beta\eta)(u + v) + \alpha p_j(uy) + \beta p_j(vy) + \eta p_j(xu) + \mu p_j(xv) \\ &\quad + p_j(xy) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\mu + \beta\eta)(u + v) + \alpha u p_j(y) + \beta v p_j(y) + \eta p_j(x)u + \mu p_j(x)v \\ &\quad + p_j(x)p_j(y) \\ &= (\alpha u + \beta v + p_j(x))(\eta u + \mu v + p_j(y)) \\ &= f_j(a)f_j(b). \end{aligned}$$

■

4.5 O Radical de uma álgebra dibárica

Nesta seção introduziremos a definição de radical de uma álgebra dibárica e mostraremos que o radical do join de um número finito de álgebras dibáricas é a soma dos radicais destas álgebras. Também definiremos semisimplicidade e mostraremos que se o radical de uma álgebra dibárica é nulo, então a álgebra é semisimples.

Para o que se segue, lembramos que um ideal dibárico I é *simples*, se ele não possui ideais dibáricos próprios da álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que I é um ideal dibárico *maximal* se os únicos ideais dibáricos que o contém são o $\text{dibar}(\mathcal{A})$ e ele mesmo. Uma álgebra $\mathcal{B}$ é chamada de *normal*, e indicaremos por $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, se $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ é um ideal dibárico de $\mathcal{A}$. Ainda temos que $\mathcal{B}$ é maximal se não existe $\mathcal{C}$, subálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Finalmente temos que uma subálgebra $\mathcal{B}$ é dita ser *simples* se para toda subálgebra normal $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, tivermos que $\mathcal{N}_{\mathcal{C}} = 0$ ou $\mathcal{N}_{\mathcal{C}} = \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.

Definição 4.5.1 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica. O radical de $(\mathcal{A}, \gamma)$ é zero se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é simples, de outra forma o radical de $(\mathcal{A}, \gamma)$ é a intersecção de todos os $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos maximais de $\mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$. Denotamos por $\text{rad}(\mathcal{A})$ ao radical da álgebra dibárica $(\mathcal{A}, \gamma)$.*

Existe uma definição de radical para as álgebras báricas, similar à definição acima que foi dada por Henrique Guzzo, no artigo *The bar-radical of baric algebras*. Para mais detalhes ver [13]. Notemos também a similaridade existente entre a definição de radical dada aqui, e o conhecido *radical de Albert*.

Proposição 4.5.1 *Se $(\mathcal{A}, \gamma)$ possui um idempotente semiprincipal, então te-*

mos que $\text{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{B} : \mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ maximal} \}$.

Prova: Observe que se $\mathcal{P}$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo maximal de $\mathcal{N}$, em particular $\mathcal{P}$ é um ideal dibárico maximal de $\mathcal{A}$. Como $(\mathcal{A}, \gamma)$ possui um idempotente semiprincipal $e = u + v$, temos que $Fu \oplus Fv$ é uma subálgebra e portanto $\mathcal{B} = Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{P}$ é uma subálgebra dibárica normal e maximal de $\mathcal{A}$. Reciprocamente se tivermos uma subálgebra normal e maximal $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, temos que $N_{\mathcal{B}}$ é um ideal dibárico e maximal de $\mathcal{A}$, portanto é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo maximal de $\mathcal{N}$ e dessa forma segue que $\text{rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$. ■

Proposição 4.5.2 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica e M um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo de $\mathcal{N}$. Então estão asseguradas as seguintes condições:*

- (i) $\text{rad}(\mathcal{A}/M)$ é a intersecção dos ideais $\mathcal{P}/M$, onde $\mathcal{P}$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo maximal de $\mathcal{N}$ e $M \subseteq \mathcal{P}$;
- (ii) $(\text{rad}(\mathcal{A}) + M)/M \subseteq \text{rad}(\mathcal{A}/M)$;
- (iii) Se $M \subseteq \text{rad}(\mathcal{A})$, então $\text{rad}(\mathcal{A}/M) = \text{rad}(\mathcal{A})/M$.

Prova: (i)- Por definição temos que $\text{rad}(\mathcal{A}/M)$ é a intersecção de todos os $\mathcal{M}(\mathcal{A}/M)$ -submódulos maximais de $\mathcal{N}/M$. Agora o resultado pode seguir facilmente através da correspondência bijetiva

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}/M,$$

existentes entre os ideais dibáricos de $\mathcal{A}$ que contém a M e os ideais dibáricos de $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/M$.

(ii)- Se $\mathcal{P}$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulo maximal com $M \subseteq \mathcal{P}$, então $\text{rad}(\mathcal{A}) + M \subseteq \mathcal{P}$. E assim

$$\text{rad}(\mathcal{A}) + M \subseteq \bigcap \{ \bar{\mathcal{P}} : M \subseteq \mathcal{P}, \text{ ideal dibárico maximal} \} = \text{rad}(\mathcal{A}/M).$$

Desta forma $(rad(\mathcal{A}) + M)/M \subseteq rad(\mathcal{A}/M)$.

(iii)- Desde que $M \subseteq rad(\mathcal{A})$, então $M \subseteq \mathcal{P}$ para todo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ - submódulo maximal $\mathcal{P}$ de $\mathcal{N}$. Então por (i), $rad(\mathcal{A}/M) = rad(\mathcal{A})/M$ ■

Corolário 4.5.1 *Se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárlica, então $rad(\mathcal{A}/rad(\mathcal{A})) = 0$.*

Proposição 4.5.3 *Seja $\mathcal{B}$ uma subálgebra dibárlica normal de $(\mathcal{A}, \gamma)$. Então $rad(\mathcal{B}) \subseteq rad(\mathcal{A}) \cap \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.*

Prova: Seja $\mathcal{P}$ um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ - submódulo de $\mathcal{N}$ maximal, então $rad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{P}$. Vamos supor que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ não esteja contido em $\mathcal{P}$, então $\mathcal{P} + \mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \mathcal{N}$. Temos que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{P}$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ - submódulo de $\mathcal{N}$ e então segue que

$$\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P} + \mathcal{N}_{\mathcal{B}}}{\mathcal{P}} \cong \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{B}}}{\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{B}}}$$

Como $\mathcal{P}$ é maximal, segue que $\mathcal{N}/\mathcal{P}$ é simples e, portanto $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ é maximal, logo $rad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ e desta forma

$$rad(\mathcal{B}) \subseteq \bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{N}_{max}} (\mathcal{N}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{P}) = \mathcal{B} \cap \left(\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{N}_{max}} \mathcal{P} \right) = \mathcal{P} \cap rad(\mathcal{A})$$

■

Proposição 4.5.4 *Seja $\mathcal{B}$ uma subálgebra dibárlica e maximal de $(\mathcal{A}, \gamma)$. Se $rad(\mathcal{A}/\mathcal{N}_{\mathcal{B}}) = 0$, então $rad(\mathcal{B}) \subseteq rad(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.*

Proposição 4.5.5 *Seja $\mathcal{B}$ uma subálgebra dibárlica e maximal de $(\mathcal{A}, \gamma)$. Se $rad(\mathcal{A}/\mathcal{N}_{\mathcal{B}}) = 0$, então $rad(\mathcal{B}) \subseteq rad(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.*

Prova: Por (ii) da Proposição 4.5.2 temos que

$$(rad(\mathcal{A}) + \mathcal{N}_B)/\mathcal{N}_B \subseteq rad(\mathcal{A}/\mathcal{N}_B) = 0,$$

e portanto $rad(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$, então pela Proposição 4.5.3, $rad(\mathcal{B}) \subseteq rad(\mathcal{A}) \cap \mathcal{N}_B = rad(\mathcal{A})$. ■

Observemos que se $(\mathcal{A}_1, \gamma_1)$ e $(\mathcal{A}_2, \gamma_2)$ são álgebras dibáricas e $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{N}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{A}_i)$ –submódulos maximais ($i = 1, 2$), então $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ e $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ são $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ –submódulos maximais de $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$.

Teorema 4.5.1 *Sejam $(\mathcal{A}_1, \gamma_1), \dots, (\mathcal{A}_n, \gamma_n)$ álgebras dibáricas. Então segue que $rad(\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n) = rad(\mathcal{A}_1) \oplus \dots \oplus rad(\mathcal{A}_n)$.*

Prova: Vamos fazer a prova por indução sobre n . Naturalmente o teorema é verdadeiro para $n = 1$. Consideremos então $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_{n-1}$ e $\mathcal{N}_B = \mathcal{N}_B$. Assim se $\mathcal{P}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ –submódulos maximais em $\mathcal{N}_B$ e $\mathcal{Q}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ –submódulos maximais de $\mathcal{N}_n = Ker(\gamma_n)$, segue que

$$\begin{aligned} rad(\mathcal{B}) \oplus rad(\mathcal{A}_n) &= \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i \right) \oplus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \right) \\ &= \left[\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i \right) \oplus (\mathcal{N}_n) \right] \cap \left[\mathcal{N}_B \oplus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \right) \right] \\ &= \left[\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i \oplus \mathcal{N}_n \right) \right] \cap \left[\mathcal{N}_B \oplus \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \right]. \end{aligned}$$

Observemos que para cada $i \in I$ $\mathcal{P}_i \oplus \mathcal{N}_n$ e $\mathcal{N}_B \cap \mathcal{Q}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)$ –submódulos maximais de $\mathcal{N}_{(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)}$,

portanto temos que

$$rad(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n) \subseteq \left[\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i \oplus \mathcal{N}_n \right) \right] \cap \left[\left(\mathcal{N}_B \oplus \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \right) \right] = rad(\mathcal{B}) \oplus rad(\mathcal{A}_n)$$

Para mostrar a inclusão contrária, seja $\mathcal{P}$ um $\mathcal{M}(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)$ -submódulo maximal em $\mathcal{N}_{(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)}$. Se $\mathcal{N}_B \subseteq \mathcal{P}$, então $rad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}$. Vamos supor então que $\mathcal{N}_B$ não está contido em $\mathcal{P}$. Nestas condições temos que $\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n = Fu \oplus Fv \oplus (\mathcal{N}_B + \mathcal{P})$ para u, v apropriados. Logo de acordo com [12, Prop. 1.9], segue que

$$\frac{\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n}{\mathcal{P}} = \frac{Fu \oplus Fv \oplus (\mathcal{N}_B + \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \cong \frac{Fu \oplus Fv + \mathcal{N}_B}{\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_B} \cong \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_B}.$$

Como $\mathcal{N}_B + \mathcal{P}$ é maximal, temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_B$ é também maximal e, portanto $rad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{N}_B$, logo $rad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}$. Similarmente temos que $rad(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{P}$. Desta forma $rad(\mathcal{B}) \oplus rad(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{P}$, para todo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{N}_{(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)}$, onde $\mathcal{P}$ é um $\mathcal{M}(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)$ -submódulo maximal e portanto $rad(\mathcal{B}) \oplus rad(\mathcal{A}_n) \subseteq rad(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_n)$. Assim por hipótese de indução, temos;

$$rad(\mathcal{A}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}_n) = rad(\mathcal{A}_1) \oplus \cdots \oplus rad(\mathcal{A}_n).$$

■

Definição 4.5.2 *Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárica. Se existem álgebras dibáricas simples $(\mathcal{A}_1, \gamma_1), (\mathcal{A}_2, \gamma_2), \dots, (\mathcal{A}_n, \gamma_n)$ tais que $(\mathcal{A}, \gamma) \cong (\mathcal{A}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}_n, \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n)$, então $(\mathcal{A}, \gamma)$ é chamada de semisimples.*

De acordo com o Teorema 4.5.1 e a Definição 4.5.2 temos a seguinte proposição:

•

Proposição 4.5.6 Se $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma álgebra dibárlica semisimples, então temos que $\text{rad}(\mathcal{A}) = 0$.

Teorema 4.5.2 Seja $(\mathcal{A}, \gamma)$ uma álgebra dibárlica satisfazendo c.c.d. Se $\text{rad}(\mathcal{A}) = 0$, então $(\mathcal{A}, \gamma)$ é semisimples.

Prova: Seja S o conjunto dos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos maximais de $\mathcal{A}$. Consideremos o conjunto M de todas as intersecções finitas $(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n)$, onde $\mathcal{P}_i \in S$. Como $(\mathcal{A}, \gamma)$ satisfaz c.c.d., temos que M possui um elemento mínimo $(\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n)$.

Para todo $\mathcal{P} \in S$, temos

$$\mathcal{P} \cap (\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n) = (\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n).$$

Logo $(\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}$. Como $\text{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{P} \in S} \mathcal{P} = 0$, segue que $(\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n) = 0$. Seja k o menor número natural tal que

$$(\mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_k) = 0, \quad \text{onde } \mathcal{C}_i \in S,$$

então $\mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \hat{\mathcal{C}}_j \cap \cdots \cap \mathcal{C}_k \neq 0$, onde $\hat{}$ significa a ausência do conjunto $\mathcal{C}_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Se considerarmos as álgebras $\mathcal{A}/\mathcal{C}_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$ temos que estas são simples uma vez que $\mathcal{C}_i$ são $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -submódulos maximais. Assim consideremos a aplicação

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}/\mathcal{C}_k, \quad f(x) = (x + \mathcal{C}_1, \dots, x + \mathcal{C}_k).$$

Vamos mostrar que f é um isomorfismo dibárlico. Claramente é um homomorfismo dibárlico, restando-nos apenas mostrar que é injetora e bijetora.

Para provar que é injetora, consideremos $x \in \text{Ker}(f)$. Então $f(x) = (x + \mathcal{C}_1, \dots, x + \mathcal{C}_k) = 0$. Disto segue que $x + \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i$, portanto $x \in (\mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_k) = 0$ e então $x = 0$ e f é injetora.

Para mostrar que é sobrejetora, vamos considerar $(x_1 + \mathcal{C}_1, \dots, x_k + \mathcal{C}_k) \in \mathcal{A}/\mathcal{C}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}/\mathcal{C}_k$. Sabemos que $\bar{\gamma}_i(x_i) = \bar{\gamma}_j(x_j)$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, k$ e desta forma temos que $x_i = \alpha u + \beta v + y_i$, com $y_i \in \mathcal{N} = \text{Ker}(\gamma)$, $\alpha, \beta \in F$. Como $\mathcal{C}_i + (\mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \hat{\mathcal{C}}_i \cap \dots \cap \mathcal{C}_k) = \mathcal{N}$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, então existem $c_i \in \mathcal{C}_i$ e $b_i \in \mathcal{C}_i + (\mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \hat{\mathcal{C}}_i \cap \dots \cap \mathcal{C}_k)$, tal que $y_i = c_i + b_i$. Logo $y_i + \mathcal{C}_i = b_i + \mathcal{C}_i$. Assim, consideremos $x = \alpha u + \beta v + \sum_{i=1}^k b_i$ e então segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha u + \beta v + \sum_{i=1}^k b_i) \\ &= (\alpha u + \beta v + b_1 + \mathcal{C}_1, \dots, \alpha u + \beta v + b_k + \mathcal{C}_k) = (x_1 + \mathcal{C}_1, \dots, x_k + \mathcal{C}_k), \end{aligned}$$

e, portanto f é um isomorfismo dibárico seguindo assim o teorema. ■

Observe que se $\mathcal{A}$ possui um idempotente semiprincipal e $\text{rad}(\mathcal{A}) = 0$, temos que $\mathcal{A}$ é escrito como um join de subálgebras simples. Isto é fácil de verificar uma vez que pelo teorema acima escrevemos $\mathcal{A}$ como um join de álgebras dibáricas simples $\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_k$ e este join pode ser reescrito da seguinte forma $\mathcal{A} \cong Fu \oplus Fv \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_k$, onde $\mathcal{N}_i$ é o dibarideal de $\mathcal{A}_i$. Assim, como $\mathcal{A}$ possui um idempotente semiprincipal $u + v$, segue que existem ideais $\bar{\mathcal{N}}_i$ em $\mathcal{N}$ tais que $Fu \oplus Fv \oplus \bar{\mathcal{N}}_i$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Albert V.M.: *Introduction to Algebra*, American Mathematical Society - Colloquium Publications - New York - London (1961).
- [2] Costa, R. and Guzzo Jr, H.: *Indecomposable baric algebras*, **Linear Algebra and its Appl.** (183) (223-236) (1993).
- [3] R. Costa and H. Guzzo Jr.: *Indecomposable baric algebras, II*, **Linear Algebra Appl.** (196) (233-242) (1994).
- [4] Drozd Yuri A.: *Algebras de dimension finita*, Universidade de Kiev, URSS (1980)
- [5] Etherington, I.M.H.: *Non Associative algebra and the symbolism of genetics*, **Proc. Roy. Soc. Edinb.** (61) (24-42) (1941).
- [6] Etherington, I.M.H.: *Genetic Algebras*, **Proc. Roy. Soc. Edinb** (59) (242-258) (1939).
- [7] Etherington, I.M.H.: *Duplication of Linear algebras*, **Proc. Edinburgh Math. Soc.** (2) (59) (242-258) (1939).
- [8] Gonshor, H: *Special train algebras arising in genetics*, **Proc. Edinburgh Math. Soc.** (2) (12) (41-53) (1960).

- [9] Gonshor, H: *Special train algebras arising in genetics II*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) (14) (333-338) (1965).
- [10] Gonshor, H: *Contributions to genetic algebras II*, Proc. Edinburgh Math. Soc.(2) (18) (273-279)(1973).
- [11] Guzzo Jr, H.: *Contribuições à teoria das álgebras não associativas*, Tese de doutorado IME-USP (1992).
- [12] Guzzo Jr, H.: *On normal and composition series for baric algebras*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra (4) (1) (25-38) (1995).
- [13] Guzzo Jr, H.: *The bar radical of baric algebras* Arch Math. (67) (106-118) (1996).
- [14] Guzzo Jr, H, P. Vicente: *On Bernstein and train algebras of rank 3*, Communications in Algebra (7) (27) (2021-2032) (1998).
- [15] Ikemoto, Lucia: *Álgebras de Bernstein: Resultados recentes*, Tese de mestrado, IME-USP (1995).
- [16] Holgate, P.: *Genetic Algebras associated with sex linkage*, Proc. Edinburgh Math.Soc.(2) (17) (113-120) (1970).
- [17] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand, (1) (1966.)
- [18] Jacobson, N.: *A note on nonassociative algebras*, Duke Math. J. (3) (544-548) (1937).
- [19] Jacobson, N.: *Lee algebras*, Dover Publications, Inc. - New York, (1961).

- [20] Lyubich, Yuri I.: *Mathematical Structures in Populations Genetics*, Springer Verlag - New York - (1983).
- [21] Polcino Milies, Francisco Cesar.: *Anéis e Módulos*, Publicações do IME - USP - São Paulo - (1972).
- [22] Reed, Mary Lynn.: *Algebraic structure of genetic inheritance*, Bulletin of the American Mathematical Society (34) (2) (107-130) (1997).
- [23] Schafer, R.D.: *Structure of genetic algebras*, Amer. J. Math. (71) (121-153) (1949).
- [24] Schafer. R.D.: *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, (1966).
- [25] Wörz-Busekros, A.: *Algebras in Genetics*, Springer-Verlag, (36) (1980).
- [26] Wörz-Busekros, A.: *The zygotic algebra for sex linkage*, J. Math. Biol., (1) (37-46) (1974).
- [27] Wörz-Busekros, A.: *The zygotic algebra for sex linkage II*, J. Math. Biol., (2) (359-371) (1975).
- [28] Zhevlakov K.A., Slin'ko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov, A.I.: *Rings that are nearly associative*, Academic Press - New York - London - (1982).

Índice Remissivo

Álgebra, 21

- de Bernstein, 48
- de potências associativas, 31
- alternativa, 30
 - bárica, 52
- bárica, 43
 - semisimples, 48
 - simples, 46
- com realização genética, 42
- de diferenciação sexual, 12, 105
- de evolução, 115
- de multiplicação, 29, 73, 74
- dibárica, 13, 105, 121
 - decomponível, 16, 133
 - indecomponível, 16, 133
 - semisimples, 17, 148
 - simples, 143
- gamética, 40
 - n-dimensional, 42
- não associativa, 26
- nilpotente, 23

à direita, 28

à esquerda, 28

quociente, 23

simples, 24

zigótica, 103, 106

Índice

de nilpotência, 23

Associador, 26, 30

Autossomos, 36

Centro

de uma álgebra, 22

não associativa, 27

Condição de Cadeia

Descendente, (c.c.d.), 20

Ascendente, (c.c.a.), 20

Cromossomos, 35

homólogos, 35

sexuais, 36

Decomposição de Peirce, 32, 49, 58

Dibarideal, 121

Diferenciação, 39
 Dimensão
 de uma álgebra, 22
 Diplóide, 36
 Elemento
 nilpotente
 à esquerda, 28
 nilpotente, 32
 de potência associativa, 28
 idempotente, 24
 primitivo, 24, 33
 principal, 24
 semiprincipal, 15, 124
 idempotentes dois a dois orto-
 gonais, 24
 nilpotente
 à direita, 28
 propriamente nilpotente, 24
 Epimorfismo
 de álgebras, 23
 de $\mathcal{R}$ -módulos, 20
 Estado, 39
 Evolução, 39
 Fertilização, 38
 Gametas, 35
 Gen, 35
 alelos, 36
 Genótipo, 35
 Grupo
 de linkage, 35
 autossomal, 36
 sexual, 36
 Haplóide, 36
 Heterozigoto, 37
 Homomorfismo
 de $\mathcal{R}$ -módulos, 19
 de álgebras, 23
 bárico, 46
 peso dibárico, 108
 peso., 43
 Homozigoto, 37
 Ideal
 à direita, 22
 à esquerda, 22
 bárico, 46
 maximal, 46
 bilateral, 22
 dibárico, 122
 maximal, 125
 minimal, 33
 Identidades de Moufang, 31
 Imagem, 19

Isomorfismo
 de álgebras, 23
 de $\mathcal{R}$ -módulos, 20
 Join
 de álgebras báricas, 47
 de álgebras dibáricas, 16, 130
 Lei
 alternativa
 à esquerda, 30
 à direita, 30
 flexível, 31
 Loci, 36
 Locus, 36
 dialélico, 36
 polialélico, 36
 Módulo
 à direita, 18
 à esquerda, 18
 artiniano, 20
 decomponível, 20
 indecomponível, 20
 noetheriano, 20
 regular, 25
 semisimples, 21
 simples, 20
 Meiose, 38
 Mitose, 35
 Monomorfismo
 de álgebras, 23
 de $\mathcal{R}$ -módulos, 20
 Mutações, 36
 Núcleo, 19
 de uma álgebra, 26
 Nilálgebra, 23, 32
 à direita, 28
 à esquerda, 28
 Operador multiplicativo
 à esquerda, 29
 à direita, 29
 Overlap, 39
 Parmixia, 38
 Poliplóide, 36
 População, 38
 bissexual, 102
 hereditária, 116
 Potência
 plenária, 28
 principal, 27
 Radical
 de um módulo, 26
 bárico, 47

de álgebra, 143
de uma álgebra, 17
nil, 34
nilpotente, 25, 75

Schur, lema de, 20

Subálgebra, 22

- bárica, 46
 - maximal, 46
 - normal, 46
- dibárica, 122
 - normal, 122
 - simples, 122

Submódulo, 19

Teorema

- Artin, 31
- de Krull-Schmidt
 - para módulos, 21
 - para álgebras, 130
- do homomorfismo, 23
- Zorn, 34
- Zorn p/ semisimplicidade, 34

Tipo, 39

Zero álgebra, 24

Zigoto, 35