Cohomologia de Hochschild de
Álgebras Truncadas

Ana Claudia Locateli

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de doutor em matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

São Paulo, outubro de 1998.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida por
Ana Claudia Locateli
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 13 de novembro de 1998.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (orientador)	IME-USP
Prof. Dr. Hector Merklen Goldschmidt	IME-USP
Prof. Dr. Antonio Paques	IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. Miguel Angel Ferrero	UFRS
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti	IMECC-UNICAMP

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os grupos e o anel de cohomologia de Hochschild de uma k -álgebra truncada. Dado um corpo k , uma k -álgebra truncada é um quociente de álgebra de caminhos da forma $\frac{kQ}{J^N}$, onde Q é uma aljava finita e conexa, J é o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas de Q , e N é um inteiro maior ou igual a dois. Obtemos fórmulas combinatórias para calcular as dimensões dos grupos de cohomologia de Hochschild de k -álgebras truncadas no caso em que k é um corpo com característica zero, e para k -álgebras de ciclo truncadas independentemente da característica do corpo k . Uma k -álgebra de ciclo truncada é uma k -álgebra truncada onde a aljava Q é um único ciclo orientado. Provamos que o anel de cohomologia de Hochschild de uma k -álgebra truncada com característica de k igual a zero tem dimensão finita se e somente se a aljava Q não possui ciclos orientados. Apresentamos também uma descrição do produto de Yoneda para extensões no caso das álgebras truncadas consideradas. No caso das álgebras de ciclo truncadas, utilizamos esta descrição para estudar a estrutura de anel do anel de cohomologia de Hochschild. Obtemos geradores para esse anel e provamos que o anel de cohomologia de Hochschild desse tipo de álgebras é sempre finitamente gerado. Apresentamos ainda aplicações dos resultados obtidos. Provamos, por exemplo que duas álgebras de ciclo truncadas são derivadamente equivalentes se e somente se são isomorfas.

Abstract

The purpose of this paper is to study the Hochschild cohomology groups and ring of a truncated quiver k lgebra. Given a field k , a truncated quiver k -algebra is a quotient of a path algebra $\frac{kQ}{J^N}$, where Q is connected finite quiver, J is the two sided ideal of the path algebra kQ generated by the arrows of kQ , and N is an integer greater than or equal to 2. We obtain combinatoric formulas that allow us to calculate the dimensions of the Hochschild cohomology groups of truncated quiver k -algebras when k is a field of characteristic zero, or truncated cycle algebras for any field k . A truncated cycle algebra is a truncated quiver algebra where the quiver Q is a single oriented cycle. We prove that the Hochschild cohomology ring of a truncated quiver algebra over a characteristic zero field is finite dimensional if and only if the quiver Q has no oriented cycles. We also give a description of the Yoneda product for extensions in the case of this kind of algebras. Using this description, we study the ring structure of the Hochschild cohomology ring of truncated cycle algebras. We obtain generators for this ring and prove that this ring is always finitely generated. Some applications are given. For instance, we prove that two truncated cycle algebras are derived equivalent if and only if they are isomorphic.

Agradecimentos

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro;
A Eduardo do N. Marcos, pela orientação , apoio, e amizade;
Ao grupo de Representações de Álgebras do IME-USP, pelo incentivo;
A Prof. Edward Green, pelas sugestões;
A minha família, Domingos, Sonia, Flavia e André, pelo amor, apoio e por me “agüentarem” nesse período difícil;
A Flavia, Ricardo, Alan, Adriana e Márcio, pela amizade e o “abrigo”, e a Isabelle, que com um sorriso me fazia esquecer do stress do dia;
A Alan, pelo apoio, carinho e compreensão ;
A todos meus amigos do IME-USP, que de uma forma ou de outra me ajudaram a passar por mais essa;
A Lúcia, Jair e Claus, pela inestimável ajuda em LaTeX;
A Regina e André, por uma ano de convivência e aventuras;
Aos amigos brasileiros em Blacksburg, em especial a Kalimar, Paulo e Tel, pela ajuda, amizade e momentos de alegria;
Aos amigos Joel, Adeel e Hasan, pela amizade sincera e companherismo;
A todos os amigos que encontrei no American Martial Arts Center, pela alegria e carinho;
A Mr. Hampton, pelo que me ensinou, e pela amizade, carinho e cuidado;
A Karthik, “soulmate”, amigo do coração , pelos inúmeros momentos de alegria, pelo apoio, carinho, e por estar sempre ao meu lado, mesmo estando longe.

Muito obrigada a todos vocês! Valeu!

A todos aqueles que aliam o coração
à razão para guiarem suas vidas.

Sumário

Introdução	4
1 Preliminares	8
1.1 Álgebras de Caminhos	8
1.1.1 O Produto de Yoneda	11
1.2 Grupos de Cohomologia de Hochschild	12
1.3 Uma resolução minimal para álgebras monomiais	15
1.4 Categorias Derivadas	18
1.4.1 Categorias Exatas, Categorias Estáveis, e Categorias Triangulares	19
1.4.2 Categorias Derivadas	23
1.4.3 Funtores derivados	26
1.5 Equivalências Derivadas de Álgebras associadas a Árvores de Brauer	27
1.5.1 Álgebras Associadas a Árvores de Brauer	27
2 Grupos de Cohomologia para álgebras truncadas	32
2.1 Outra descrição para a resolução projetiva minimal	32
2.2 Os grupos de cohomologia	45
2.3 O caso especial do ciclo	47
2.4 Aplicações	49
3 O Produto de Yoneda em $H^*(A)$	52
3.1 Um Produto em $H^*(A)$	52
3.2 O caso particular $Q = Z_e$	56
3.3 $\vee$ é o produto de Yoneda	58
4 A estrutura de $H^*(A)$ para $A = \frac{kZ_e}{J^N}$	61
4.1 A estrutura de anel de $H^*(A)$	61
4.2 Exemplos de Álgebras de Ciclos não Truncadas	67

5	Categorias Derivadas de Álgebras de Ciclos Truncadas	70
5.1	Álgebras de Ciclo Truncadas Derivadamente Equivalentes	70
	Referências Bibliográficas	73

Introdução

Sejam k um corpo e A uma k -álgebra. Os grupos de cohomologia de Hochschild de A foram introduzidos por Hochschild em [16], como os grupos de cohomologia de um complexo “especial” chamado agora de complexo de Hochschild. Tais grupos de cohomologia, denotados por $H^i(A)$ para $i \geq 0$, são invariantes da álgebra A por equivalência derivada e em particular por equivalência de Morita.[14] e [25]

Como pode-se ver em [14], os grupos de cohomologia podem ser definidos equivalentemente como

$$H^i(A) = \text{Ext}_{A^e}^i(A, A)$$

onde $A^e = A^{op} \otimes_k A$ é chamada álgebra envolvente de A . Observe que todo A - A -bimódulo é naturalmente um A^e -módulo à direita. Tendo essa definição em mente, pode-se então considerar o anel de cohomologia de Hochschild de A , $H^\bullet(A)$, definido por

$$H^\bullet(A) = \coprod_{i \geq 0} H^i(A)$$

onde a estrutura multiplicativa é dada pelo produto de Yoneda para extensões, que será definido posteriormente.

Ainda tendo em vista a definição dos grupos de cohomologia de Hochschild por meio do funtor Ext , uma forma de se calcular esses grupos é através de uma resolução projetiva de A como A^e -módulo à direita. Aplicando o funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$ a uma tal resolução e calculando os grupos de cohomologia do complexo resultante, obtém-se os grupos $H^i(A)$. Em [14], Happel apresenta, no caso de álgebras de dimensão finita, uma primeira descrição de uma resolução projetiva minimal de A como A^e -módulo, que leva à formulação de uma conjectura, conhecida como conjectura da dimensão homológica, que afirma que A possui dimensão global finita se e somente se o anel $H^\bullet(A)$ tem dimensão finita. Porém Happel apresenta nesse resultado apenas a descrição dos A^e -projetivos que aparecem nessa resolução. O cálculo dos grupos de Hochschild requer uma descrição também das aplicações entre esses projetivos. Em [2] Bardzell apresenta uma resolução projetiva minimal de A como A^e -módulo à direita descrevendo, no caso em que A é uma álgebra monomial,

os projetivos e as aplicações dessa resolução . É natural então pensar em calcular os grupos de cohomologia de Hochschild para esse tipo de álgebras.

Nesse trabalho estudamos álgebras do tipo $A = \frac{kQ}{J^N}$, onde k é um corpo, Q é uma aljava finita e conexa, $N \geq 2$, e J é o ideal bilateral da álgebra de caminhos kQ gerado pelas flechas de Q . Chamamos essas álgebras de álgebras truncadas. No caso em que a aljava Q é um único ciclo orientado com ϵ vértices, que denotaremos por Z_ϵ , vamos chamar a álgebra A de álgebra de ciclo truncada. Em [6], Cibils determina as dimensões dos grupos de Hochschild e a estrutura de $H^\bullet(A)$ no caso em que $N = 2$.

No capítulo 1 apresentamos definições e resultados preliminares necessários ao entendimento do trabalho. São apresentados rápidos resumos sobre o que será utilizado nos capítulos posteriores, bem como as referências para demonstrações e resultados adicionais no assunto.

No capítulo 2 apresentamos, na primeira seção , uma nova descrição para a resolução dada por Bardzell no caso particular das álgebras truncadas. Essa descrição nos permite obter fórmulas combinatórias para o cálculo das dimensões dos grupos de Hochschild de álgebras truncadas onde o corpo k tem característica zero e descrever um método que funciona em qualquer característica. Tais fórmulas são apresentadas na segunda seção . Na terceira seção calculamos as dimensões desses grupos no caso de álgebras de ciclo truncadas, independentemente da característica do corpo k . Na última seção são apresentadas algumas consequências dos resultados obtidos. Provamos, por exemplo, a validade da conjectura da dimensão homológica no caso das álgebras truncadas onde k tem característica zero.

No capítulo 3 definimos um produto no conjunto $P = \coprod_{i \geq 0} P_i^*$, onde P_i^* , para $i \geq 0$, são os k -espaços vetoriais que aparecem no complexo utilizado para calcular os grupos $H^i(A)$. Provamos que esse produto ainda está bem definido em $H^\bullet(A)$, e coincide com o produto de Yoneda em $H^\bullet(A)$ nos casos em que A é uma álgebra truncada com $\text{car } k = 0$, ou uma álgebra de ciclo truncada com k corpo qualquer.

No capítulo 4, utilizamos os resultados obtidos nos capítulos anteriores sobre álgebras de ciclo truncadas para determinar a estrutura de anel de $H^\bullet(A)$ nesse caso. Determinamos geradores para cada grupo de Hochschild, e algumas relações satisfeitas pelos geradores do anel $H^\bullet(A)$. Em particular, provamos que quando A é uma álgebra de ciclo truncada, o anel $H^\bullet(A)$ é sempre finitamente gerado, embora de dimensão infinita. São apresentados exemplos de álgebras de ciclo não truncadas onde isso não ocorre. Damos uma apresentação para esse anel no caso de álgebras associadas a árvores de Brauer. Uma das razões pelas quais o ciclo é um caso importante a ser considerado é que, além de ser um caso em que é possível se obter as fórmulas para as dimensões dos grupos de cohomologia, tem relação estreita com o estudo de álgebras de grupo. É sabido que toda álgebra de grupo de dimensão finita é estavelmente equivalente a uma álgebra de Nakayama. Mas

a estrutura de uma álgebra estavelmente equivalente a uma álgebra de Nakayama simétrica (dada por álgebras de ciclo) é dada por árvores de Brauer.

No último capítulo é apresentada uma aplicação dos resultados obtidos para álgebras de ciclo truncadas para provar que duas dessas álgebras são derivadamente equivalentes se e somente se são isomorfas. Em particular, é provado que o anel de cohomologia de Hochschild distingue completamente entre si esse tipo de álgebras.

Um prolongamento natural desse trabalho seria o estudo dos grupos de Hochschild e do anel de Hochschild no caso de álgebras monomiais. Acreditamos, por exemplo, que a descrição do produto de Yoneda apresentada no capítulo 3 ainda é válida para álgebras monomiais em geral. Seria possível determinar fórmulas combinatórias para calcular as dimensões dos grupos de Hochschild de álgebras monomiais? E a conjectura da dimensão homológica continua válida para essas álgebras? Em um trabalho recente, E. Green, Ø. Solberg e D. Zacharia obtiveram uma outra resolução projetiva minimal, que talvez leve respostas a essas e outras perguntas sobre cohomologia de Hochschild.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo vamos apresentar as definições e alguns resultados básicos que serão utilizados neste trabalho. A maioria das demonstrações será omitida, mas forneceremos referências de textos onde pode-se encontrar essas demonstrações, bem como resultados adicionais sobre o assunto. As principais referências para esse capítulo são [1], [7], [18], [19] e [15].

1.1 Álgebras de Caminhos

Nesse trabalho vamos estar estudando álgebras associadas a aljavas truncadas por um inteiro maior que 2. Nessa primeira seção vamos então apresentar as definições básicas da teoria de álgebras de caminhos, e alguns resultados sobre as mesmas que auxiliarão a leitura do trabalho.

Definição : Uma aljava é um grafo orientado $Q = (Q_0, Q_1)$, onde Q_0 é o conjunto dos vértices de Q , e Q_1 é o conjunto das flechas de Q .

Durante o trabalho estaremos sempre considerando que Q é uma aljava finita, isto é, que Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos.

Vamos denotar por $o : Q_1 \rightarrow Q_0$ e $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ as aplicações dadas por $o(\alpha) = i$ e $t(\alpha) = j$, sempre que α for uma flecha com origem no vértice i e término no vértice j . Um caminho p na aljava Q é uma seqüência de flechas $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$ com $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$ para todo $1 \leq i \leq l - 1$. A cada vértice $i \in Q_0$ associamos o símbolo e_i , que chamaremos de caminho trivial associado a i , e definimos $o(e_i) = t(e_i) = i$. Para um caminho não trivial p como acima, denotamos $o(p) = o(\alpha_1)$ e $t(p) = t(\alpha_l)$. Um caminho não trivial tal que $o(p) = t(p)$ é chamado um ciclo orientado. Definimos ainda o comprimento de um caminho não trivial p ,

que denotamos por $l(p)$, como sendo o número de flechas em p , e o comprimento de um caminho trivial e_i é zero por definição .

Dizemos que uma aljava Q é conexa se o grafo subjacente é conexo.

Dado um corpo k , vamos denotar por kQ o k -espaço vetorial que tem como base o conjunto de caminhos em Q . Introduzimos em kQ uma estrutura de k -álgebra, definindo o produto de dois caminhos $p = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ e $q = \beta_1 \cdots \beta_n$ em Q por

$$pq = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_l \beta_1 \cdots \beta_n, & \text{se } t(\alpha_l) = o(\beta_1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e estendendo esse produto a kQ por linearidade. A k -álgebra assim obtida é chamada álgebra de caminhos de Q sobre k . Note que kQ é uma álgebra associativa com elemento identidade $\sum_{i \in Q_0} e_i$.

Se Q é uma aljava finita e k é um corpo, então kQ é uma álgebra básica e hereditária, e tem dimensão finita se e somente se Q não possui ciclos orientados. Além disso, kQ é indecomponível se e somente se Q é uma aljava conexa. O conjunto $\{e_i; i \in Q_0\}$ forma um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ .

Definição : Seja J o ideal bilateral de kQ gerado por Q_1 . Um ideal I de kQ é chamado um ideal admissível se existe um inteiro $n > 0$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$.

Observação : Se Q é uma aljava finita sem ciclos orientados, então todo ideal de kQ contido em J^2 é admissível.

Teorema 1.1.1 (Gabriel) [9] *Sejam k um corpo algebricamente fechado e A uma k -álgebra indecomponível, básica e de dimensão finita sobre k . Então A é isomorfa a um quociente de uma álgebra de caminhos $\frac{kQ_A}{I}$, onde I é ideal admissível de kQ_A .*

Definição : Dada uma aljava Q , uma relação r em Q é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos eles com a mesma origem e o mesmo término.

Não é difícil provar que se Q é uma aljava finita e I é um ideal admissível de kQ , então I é finitamente gerado e possui um sistema gerador formado por relações em Q .

Definição : Uma aljava com relações é um par (Q, I) , onde Q é uma aljava e I é um ideal admissível de kQ . A álgebra de caminhos dada por essa aljava com

relações é definida como a álgebra $\frac{kQ}{I}$.

O teorema acima afirma então que toda álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, é isomorfa a uma álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações.

Se $A = \frac{kQ}{I}$ é dada por uma aljava finita com relações, então temos que A é uma álgebra básica e de dimensão finita sobre k , e é indecomponível se e somente se Q é uma aljava conexa. Além disso, o conjunto $\{\bar{e}_i; i \in Q_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A , e se $\bar{J}$ é a imagem de J pela projeção canônica $kQ \rightarrow \frac{kQ}{I}$, então $\bar{J}$ é isomorfo ao radical de Jacobson de A .

Vamos agora mostrar como os módulos sobre um quociente de uma álgebra de caminhos podem ser descritos através das representações da aljava com relações correspondente. Dada uma álgebra A , vamos denotar por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos à direita finitamente gerados.

Uma representação (V, f) de uma aljava Q sobre um corpo k é uma sequência de k -espaços vetoriais de dimensão finita $V = (V_i)_{i \in Q_0}$ e um conjunto de transformações lineares $f = \{f_\alpha : V_i \rightarrow V_j; \alpha \text{ é uma flecha de } i \text{ para } j\}$. Dado um caminho não trivial $p = \alpha_1 \cdots \alpha_l$, definimos a transformação linear $f_p : V_{o(p)} \rightarrow V_{t(p)}$ como sendo a composta $f_{\alpha_l} \circ \cdots \circ f_{\alpha_1}$. Podemos estender essa definição a todo elemento da álgebra A por linearidade. Um morfismo $h : (V, f) \rightarrow (W, g)$ entre duas representações de (Q, I) sobre k é uma sequência de transformações lineares $(h_i)_{i \in Q_0}$, onde $h_i : V_i \rightarrow W_i$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{h_i} & W_i \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow g_\alpha \\ V_j & \xrightarrow{h_j} & W_j \end{array}$$

comuta para toda flecha $\alpha \in Q_1$ de i para j . A composição de morfismos é definida coordenada a coordenada. A categoria obtida dessa forma é chamada a categoria das representações de (Q, I) , e denotada por $\text{Rep}(Q, I)$.

Teorema 1.1.2 *Sejam k um corpo, (Q, I) uma aljava finita com relações e $A = \frac{kQ}{I}$. Então a categoria $\text{Rep}(Q, I)$ é isomorfa à categoria $\text{mod}A$.*

Desse modo podemos identificar os módulos e morfismos em $\text{mod}A$ com as representações de (Q, I) e os morfismos entre elas. Pode-se provar que o conjunto dos vértices Q_0 determina os A -módulos simples, projetivos e injetivos a menos de isomorfismo. Isto é, a cada vértice $i \in Q_0$ está associado um A -módulo simples S_i ,

o projetivo P_i , que é a cobertura projetiva do simples S_i , e o injetivo I_i , que é a envolvente injetiva de S_i .

1.1.1 O Produto de Yoneda

Sejam k um corpo e A uma k -álgebra de dimensão finita. Vamos denotar por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos à direita sobre A . Dados M e N dois módulos em $\text{mod}A$, uma n -extensão de N por M é uma seqüência exata em $\text{mod}A$

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Vamos denotar por $\text{Exact}^n(M, N)$ o conjunto das n -extensões de N por M . Podemos definir em $\coprod_{M, N \in \text{mod}A} \text{Exact}^n(M, N)$ uma estrutura de anel, onde a multiplicação é dada pelo produto de Yoneda em extensões. Dadas

$$E : 0 \rightarrow M \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f} E_n \rightarrow N \rightarrow 0$$

uma n -extensão, e

$$F : 0 \rightarrow N \xrightarrow{g} F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_m \rightarrow L \rightarrow 0$$

uma m -extensão, o produto de Yoneda $E \sim F$ é a $(n+m)$ -extensão

$$E \sim F : 0 \rightarrow M \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_n \xrightarrow{g \circ f} F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_m \rightarrow L \rightarrow 0.$$

Sabemos que, para todos M, N em $\text{mod}A$, $\text{Ext}_A^n(M, N)$ é isomorfo a $\text{Exact}^n(M, N)$ módulo uma relação de equivalência, como grupos abelianos. Prova-se ainda que essa relação de equivalência é compatível com o produto de Yoneda (vide [21]). Podemos então considerar em $\coprod_{M, N \in \text{mod}A} \text{Ext}_A^n(M, N)$ o produto induzido pelo produto de Yoneda por meio deste isomorfismo.

Usando a definição do isomorfismo entre $\text{Exact}^n(M, N)$ módulo a reação de equivalência mencionada e $\text{Ext}_A^n(M, N)$, não é difícil verificar que, dados $\bar{f} \in \text{Ext}_A^n(M, L)$, e $\bar{g} \in \text{Ext}_A^0(N, M)$, o produto de Yoneda das classes $\bar{f}$ e $\bar{g}$ é dado pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
P'_n & \longrightarrow & P'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_0 \\
\downarrow y_n & & \downarrow y_{n-1} & & & & \downarrow y_1 & & \downarrow y_0 & \searrow g \\
P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & & & & & & & & \searrow f \\
& & & & & & & & & & & & L
\end{array}$$

onde $\cdots \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de N , $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de M , e as aplicações y_i são levantamentos de g . Então $\bar{f} \sim \bar{g} = f \circ y_n$ (vide [12]).

Na próxima seção descrevemos o produto cup definido por Gerstenhaber [10], que é isomorfo ao produto de Yoneda como definido acima.

1.2 Grupos de Cohomologia de Hochschild

Seja k um corpo e A uma k -álgebra de dimensão finita. Vamos denotar por $\text{mod } A$ a categoria dos A -módulos à direita finitamente gerados.

Os grupos de cohomologia de Hochschild foram introduzidos por Hochschild em [16]. Nessa seção apresentamos as definições básicas desses grupos, e algumas interpretações dos grupos de dimensão pequena.

Seja X um A -bimódulo de dimensão finita sobre k . Definimos o complexo de Hochschild associado a X , como o complexo

$$\cdots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

onde:

$$C^i = 0, d^i = 0 \text{ para } i < 0,$$

$$C^0 = X,$$

$$C^i = \text{hom}_k(A^{\otimes i}, X), \text{ para } i \geq 0,$$

$$d^0 : X \rightarrow \text{hom}_k(A, X)$$

$$\text{com } (d^0 x)(a) = ax - xa \text{ para } x \in X \text{ e } a \in A,$$

$$d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$$

$$\text{com } (d^i f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^i (-1)^j f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) a_{i+1},$$

$$\text{para } f \in C^i \text{ e } a_1, \dots, a_{i+1} \in A$$

O i -ésimo grupo de cohomologia de Hochschild de A com coeficientes em X é então definido como

$$H^i(A, X) = \frac{\ker d^i}{\operatorname{Im} d^{i-1}}.$$

Podemos definir em $\coprod_{i \geq 0} H^i(A, A)$ um produto, chamado produto cup, dado por: dados $f \in C^m$, e $g \in C^n$, definimos o produto $f \smile g \in C^{m+n}$ por

$$f \smile g(a_1, \dots, a_{m+n}) = f(a_1, \dots, a_m)g(a_{m+1}, \dots, a_{m+n})$$

para todo $(a_1, \dots, a_{m+n}) \in A^{\otimes m+n}$.

Uma definição equivalente pode ser dada considerando a álgebra envolvente de A , $A^e = A^{op} \otimes_k A$ onde A^{op} é a álgebra oposta de A . Temos então que a categoria de A -bimódulos é isomorfa a categoria de A^e -módulos à direita. Em particular, A é um A^e -módulo à direita. Prova-se então que

$$H^i(A, X) = \operatorname{Ext}_{A^e}^i(A, X)$$

(veja [4]). Estamos interessados no caso $X = A$. Nesse caso vamos denotar $H^i(A, A)$ apenas por $H^i(A)$.

Essa maneira de definir os grupos de cohomologia de Hochschild nos permite definir o anel de cohomologia de Hochschild de A ,

$$H^\bullet(A) = \coprod_{i \geq 0} H^i(A)$$

onde a multiplicação é induzida pelo produto de Yoneda em extensões. Em [10], Gerstenhaber prova que esse produto é isomorfo ao produto cup definido acima. Assim, $H^\bullet(A)$ tem uma estrutura de anel $\mathbb{Z}$ -graduado.

Os grupos de cohomologia de Hochschild de dimensão pequena têm interpretações concretas. $H^0(A)$ nada mais é do que o centro $Z(A)$ da álgebra A . Se consideramos $\operatorname{Der}(A, X) = \{\delta \in \operatorname{hom}(A, X) / \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b\}$ o k -espaço vetorial das derivações de A em X , e denotamos por $\operatorname{Inn}(A, X) = \{\delta \in \operatorname{Der}(A, X) / \delta(a) = ax - xa, \text{ para algum } x \in X\}$ o subespaço das derivações internas de A em X , então temos que

$$H^1(A, X) \cong \frac{\operatorname{Der}(A, X)}{\operatorname{Inn}(A, X)}.$$

O grupo $H^2(A)$ tem relação com a rigidez da álgebra A . Dada uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k , considere $K = k((x))$ o corpo de séries de potências de k na indeterminada x . Uma família de deformações a um parâmetro de A é uma estrutura de K -álgebra sobre o K -espaço vetorial $L = K \otimes_k A$ dada por

$$f : A \otimes_k A \rightarrow L,$$

onde para todo $a, b \in A$,

$$f(a, b) = ab + x f_1(a, b) + x^2 f_2(a, b) + \dots$$

Aqui as aplicações $f_i : A \otimes_k A \rightarrow A$ são k -lineares, e o termo ab denota o produto da álgebra A . A aplicação f se estende de maneira única a uma aplicação K -linear $f : L \otimes_K L \rightarrow L$ que define o produto em L . Dizemos que a álgebra A é rígida se qualquer deformação a um parâmetro de A é isomorfa sobre k à extensão trivial obtida quando $f_i = 0$ para todo $i \geq 1$. Em [10] Gerstenhaber prova que se $H^2(A) = 0$ então a álgebra A é rígida. Em [5], Cibils prova que no caso de álgebras monomiais essa afirmação passa a ser uma condição necessária e suficiente. Para demonstrações dessas interpretações, vide [14].

Desde que os grupos de cohomologia de Hochschild $H^i(A)$, para $i \geq 0$, podem ser definidos como $\text{Ext}_{A^\epsilon}^i(A, A)$, a fim de calcular tais grupos é importante conhecer uma resolução projetiva minimal de A como A^ϵ -módulo. Em [14], Happel apresenta os projetivos de uma tal resolução para álgebras de dimensão finita, que descrevemos no próximo teorema.

Teorema 1.2.1 *Sejam A um quociente de álgebra de aljava, e $\{e_1, \dots, e_m\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A . Seja*

$$\dots \rightarrow R_n \rightarrow R_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow R_1 \rightarrow R_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de A como A^ϵ -módulo. Então

$$R_n = \coprod_{i,j} P(i, j)^{\dim \text{Ext}_A^n(S_i, S_j)}$$

onde $P(i, j)$ é o A^ϵ -projetivo associado a $e_i \otimes e_j$, e S_i, S_j são os A -módulos simples associados a e_i e e_j respectivamente.

Como consequência imediata desse lema temos que

$$dp_{A^\epsilon} A = \dim gl A,$$

onde $dp_{A^\epsilon} A$ e $\dim gl A$ denotam a dimensão projetiva de A como A^ϵ -módulo e a dimensão global de A respectivamente. Desse modo, se a álgebra A possui dimensão global finita, então $H^\bullet(A)$ é uma k -álgebra de dimensão finita. A recíproca não é conhecida em geral. No capítulo 2 provamos que essa recíproca é válida para k -álgebras truncadas com k corpo de característica zero.

Outra conjectura existente nesse contexto afirma que se $H^1(A) = 0$ então a aljava de A não possui laços. Essa conjectura está provada para álgebras monomiais em geral. Em particular, está provado que se A é uma álgebra monomial então $H^1(A) = 0$ se e somente se a aljava de A é de tipo árvore (veja [3]).

1.3 Uma resolução minimal para álgebras monomiais

Seja $A = \frac{kQ}{I}$ o quociente de uma álgebra de caminhos. Aqui, Q é uma aljava finita e I é um ideal admissível de kQ . Dizemos que A é uma álgebra monomial se pode ser escrita na forma $A = \frac{kQ}{I}$ onde I é um ideal de kQ gerado por um número finito de caminhos em Q de comprimento maior ou igual a 2.

Em sua tese de doutorado, [2], M.J. Bardzell apresentou uma nova descrição para a resolução projetiva minimal de A como A^e -módulo, no caso em que A é uma álgebra monomial. Para descrever essa resolução, considere $AP(i)$, para $i \geq 0$, os conjuntos de caminhos associados definidos em [12] por

$$AP(0) = Q_0, AP(1) = Q_1,$$

$$AP(2) = \{ \text{geradores do ideal } I \},$$

e para $i \geq 3$, $AP(i)$ é construído como segue.

Seja $p \in AP(2)$. Definimos a seqüência de caminhos associada a p ao longo do caminho γ indutivamente por: seja r_2 o caminho em $AP(2)$ (se existir) tal que $o(p) < o(r_2) < t(p)$ e $o(r_2)$ é minimal com respeito a essa desigualdade. Agora assuma que $r_1, r_2, \dots, r_j$ tenham sido construídos, onde $r_1 = p$. Seja r_{j+1} tal que $o(r_{j+1})$ é minimal com respeito à desigualdade $t(r_{j-1}) \leq o(r_{j+1}) < t(r_j)$. Dado um inteiro n , vamos denotar a seqüência dos primeiros n caminhos associados a p por $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, se essa existir. Até agora estamos fazendo essa construção ao longo do caminho γ . Porém, p pode ser o começo de vários caminhos. Nesse caso queremos construir as seqüências de caminhos associados a p sobre todos os caminhos que começam com p . Defina então o conjunto

$$AS_p(n) = \{(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) \text{ seqüência de caminhos associada a } p\}.$$

Para cada $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) \in AS_p(n)$ considere o caminho com origem em $o(p)$ e término em $t(r_{n-1})$, e seja $AP_p(n)$ o conjunto de todos os caminhos construídos dessa maneira. Suponha $AP(2) = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Definimos então

$$AP(n) = \bigcup_{p \in AP(2)} AP_p(n).$$

Chamamos essa construção de construção à esquerda dos caminhos associados. Essa construção pode também ser feita pela direita, obtendo os mesmos conjuntos $AP(n)$.

Definimos ainda, dado $p \in AP(n)$, o conjunto dos subdivisores de p

$$Sub(p) = \{q \in AP(n-1); q \text{ divide } p\}.$$

Dizemos que um caminho q divide o caminho p se podemos escrever $p = rqs$ onde r e s são caminhos. Prova-se então que, no caso em que n é ímpar, $Sub(p)$ tem exatamente dois elementos, e no caso em que n é par, $Sub(p)$ tem pelo menos dois elementos.

A resolução projetiva apresentada por Bardzell é dada então por

$$\cdots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} P_i \xrightarrow{\phi_i} \cdots \xrightarrow{\phi_2} P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\phi_0} A \longrightarrow 0$$

onde

$$P_i = \coprod_{p \in AP(i)} Ao(p) \otimes_k t(p)A.$$

A aplicação ϕ_1 é definida, num elemento $o(\alpha) \otimes t(\alpha)$ da base de P_1 , por

$$\phi_1(o(\alpha) \otimes t(\alpha)) = \alpha \otimes t(\alpha) - o(\alpha) \otimes \alpha.$$

Para definir ϕ_2 , considere $\mathcal{I} = \{r_1, \dots, r_m\}$ o conjunto gerador de I , e escreva cada $r_i \in \mathcal{I}$ na forma $r_i = \sum_{j=1}^{k(i)} a_{ij}p_{ij}$, onde $a_{ij} \in k$ para todo i e j . Se $p = \alpha_{p_1} \cdots \alpha_{p_{l(p)}}$ é uma caminho no suporte de r_i , defina

$$x_p = \sum_{d=1}^{l(p)} \alpha_{p_1} \cdots \alpha_{p_{d-1}} \otimes \alpha_{p_{d+1}} \cdots \alpha_{p_{l(p)}}$$

(aqui, por conveniência notacional, consideramos $\alpha_{p_1} \alpha_{p_0} = o(r_i)$ para $d = 1$ e $\alpha_{p_{l(p)+1}} \alpha_{p_{l(p)}} = t(r_i)$ para $d = l(p)$). Então ϕ_2 é dada, em cada elemento da base de P_2 , por

$$\phi_2(o(r_i) \otimes t(r_i)) = \sum_{j=1}^{k(i)} a_{ij} x_{p_{ij}}.$$

As aplicações ϕ_i dependem da paridade de i . Dado $p \in AP(i)$, escreva $Sub(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$. Assim, se i é ímpar, temos que ϕ_i é definida, em um elemento da base, por

$$\phi_i(o(p) \otimes t(p)) = s_2 \otimes t(p) - o(p) \otimes s_1$$

onde $p = q_1 s_1 = s_2 q_2$. No caso em que i é par, ϕ_i é definida em um elemento da base de P_i por

$$\phi_i(o(p) \otimes t(p)) = \sum_{j=1}^m s_j \otimes s'_j$$

onde para cada j com $1 \leq j \leq m$, $p = s_j q_j s'_j$. Para maiores detalhes veja [2] ou [3].

Aplicando o funtor $Hom_{A^e}(-, A)$ a essa resolução, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow P_0^* \xrightarrow{\phi_1^*} \cdots \longrightarrow P_{j-1}^* \xrightarrow{\phi_j^*} P_j^* \xrightarrow{\phi_{j+1}^*} P_{j+1}^* \longrightarrow \cdots$$

onde $P_i^* = Hom_{A^e}(P_i, A) = \coprod_{p \in AP(i)} o(p)At(p)$, e as aplicações $\phi_i^* : P_{i-1}^* \rightarrow P_i^*$ são definidas por:

Se i é ímpar, então

$$\phi_i^*((\lambda_p)_{p \in AP(i-1)}) = (s(r)_2 \lambda_{q(r)_2} - \lambda_{q(r)_1} s(r)_1)_{r \in AP(i)};$$

e se i é par,

$$\phi_i^*((\lambda_p)_{p \in AP(i-1)}) = \left(\sum_{j=1}^{m(r)} s(r)_j \lambda_{q_j} s'(r)_j \right)_{r \in AP(i)} ;$$

onde $\lambda_p \in A$ para todo $p \in AP(i-1)$, e para cada $r \in AP(i)$, $Sub(r) = \{q(r)_1, \dots, q(r)_{m(r)}\}$, e $r = s(r)_j q(r)_j s'(r)_j$.

Vamos agora nos concentrar no caso das álgebras truncadas $\frac{kQ}{J^N}$.

Dado um caminho p , vamos denotar por p^j o subcaminho de p de comprimento $j \geq 0$ e término em $t(p)$. Analogamente, denotamos por ${}^j p$ o subcaminho de p de comprimento j e origem em $o(p)$.

É fácil verificar que, no caso de álgebras truncadas, temos

$$\begin{aligned} AP(2s) &= \{ \text{caminhos em } Q \text{ de comprimento } Ns \} \\ AP(2s+1) &= \{ \text{caminhos em } Q \text{ de comprimento } Ns+1 \} \end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$. Podemos então escrever os espaços vetoriais P_i^* da seguinte maneira:

$$P_{2s}^* = \coprod_{l(p)=Ns} o(p)At(p)$$

$$P_{2s+1}^* = \coprod_{l(p)=Ns+1} o(p)At(p)$$

Foi provado em [2] que se i é ímpar e $p \in AP(i)$, então p tem somente dois divisores em $AP(i-1)$. Nesse caso vamos denotar

$$Sub(p) = \{p_1, p_2\}$$

Se i é par, não é difícil mostrar que p tem N divisores, e denotamos,

$$\text{Sub}(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

onde $o(p_j) = t(j^{-1}p)$, $1 \leq j \leq N$. Desse modo, podemos escrever as aplicações ϕ_i na forma:

$$\begin{aligned} \phi_{2s+1} : P_{2s+1} &\rightarrow P_{2s} \\ \phi_{2s+1}(o(p) \otimes t(p)) &= {}^1p \otimes t(p_2) - o(p_1) \otimes p^1. \end{aligned}$$

para todo $p \in AP(2s+1)$, e

$$\begin{aligned} \phi_{2s} : P_{2s} &\rightarrow P_{2s-1} \\ \phi_{2s}(o(p) \otimes t(p)) &= \sum_{j=1}^N j^{-1} p \cdot o(p_j) \otimes t(p_j) \cdot p^{N-j}. \end{aligned}$$

para todo $p \in AP(2s)$. E as aplicações ϕ_i^* podem ser descritas como:

$$\begin{aligned} \phi_{2s+1}^* : P_{2s}^* &\rightarrow P_{2s+1}^* \\ \phi_{2s+1}^*((\lambda_{p \in AP(2s)})) &= (({}^1r)\lambda_{r_2} - \lambda_{r_1}({}^1r))_{r \in AP(2s+1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{2s}^* : P_{2s-1}^* &\rightarrow P_{2s}^* \\ \phi_{2s}^*((\lambda_{p \in AP(2s-1)})) &= \left(\sum_{j=1}^N (j^{-1}r)\lambda_{r_j}({}^1r^{N-j}) \right)_{r \in AP(2s)} \end{aligned}$$

O problema é que calcular os grupos de cohomologia a partir do complexo definido acima é muito difícil. No próximo capítulo vamos apresentar uma outra descrição para esse complexo quando A é uma álgebra truncada, escolhendo-se bases convenientes para os espaços vetoriais envolvidos. Essa descrição nos permitirá determinar fórmulas para calcular as dimensões dos grupos de cohomologia de Hochschild para álgebras truncadas onde k é corpo com característica zero, e para álgebras truncadas onde a aljava subjacente é um ciclo, independentemente da característica de k .

1.4 Categorias Derivadas

Nessa seção apresentamos algumas definições e resultados básicos da teoria de categorias derivadas. Para mais detalhes sobre o assunto, bem como demonstrações para os resultados, veja [14].

1.4.1 Categorias Exatas, Categorias Estáveis, e Categorias Triangulares

Definição : Uma categoria exata é uma categoria aditiva $\mathcal{E}$ munida de uma classe de seqüências exatas curtas (que chamaremos seqüências admissíveis)

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

onde $i = \ker p$ é chamado um monomorfismo admissível, e $p = \operatorname{coker} i$ é chamado um epimorfismo admissível, fechada por isomorfismos e satisfazendo:

ex0: $1_0 : 0 \rightarrow 0$ é um epimorfismo admissível,

ex1: A classe dos epimorfismos admissíveis é fechada por composição ,

ex2: Cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & C' \\ & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

onde p é epimorfismo admissível se completa a um diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{p'} & C' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

onde p' é ainda um epimorfismo admissível.

ex2': Cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & & \\ A' & & \end{array}$$

onde i é um monomorfismo admissível se completa a um diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' \end{array}$$

onde i' é ainda um monomorfismo admissível.

Exemplos:

1- Se A é um anel, então a categoria $\text{mod}A$ dos A -módulos à direita finitamente gerados munido do conjunto das seqüências exatas curtas de A -módulos é uma categoria exata.

2- Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. A categoria dos complexos sobre $\mathcal{A}$ munido das seqüências exatas curtas que cindem componente a componente, é uma categoria exata denotada por $\mathcal{CA}$.

Definição : Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ duas categorias exatas. Um funtor exato $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ é um funtor aditivo que leva seqüências admissíveis em seqüências admissíveis.

Definição : Um objeto $I \in \mathcal{E}$ é injetivo se o funtor $\text{hom}_{\mathcal{E}}(-, I) : \mathcal{E} \rightarrow \text{mod}\mathbb{Z}$ é exato. Dizemos que $\mathcal{E}$ tem suficientes injetivos se para todo $A \in \mathcal{E}$ existe um monomorfismo admissível $A \rightarrow I$ onde I é injetivo.

Exemplos:

1- $\text{mod}A$ tem suficientes injetivos.

2- $\mathcal{CA}$ tem suficientes injetivos. De fato, se

$$A^\bullet : \dots \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d} A^p \xrightarrow{d} A^{p+1} \longrightarrow \dots$$

é um complexo em $\mathcal{CA}$, então o complexo $IA^\bullet$ definido abaixo é injetivo, onde $d' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e a aplicação $i_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um mono admissível.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{d} & A^p & \xrightarrow{d} & A^{p+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow i_A & & \downarrow i_A & & \downarrow i_A & & \\ \dots & \longrightarrow & A^{p-1} \oplus A^p & \xrightarrow{d'} & A^p \oplus A^{p+1} & \xrightarrow{d'} & A^{p+1} \oplus A^{p+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Definição : Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata com suficientes injetivos. Definimos a

categoria estável $\underline{\mathcal{E}}$ como sendo a categoria cujos objetos são os mesmos objetos de $\mathcal{E}$ e os morfismos são dados por: para todos A e B elementos de $\mathcal{E}$,

$$\text{hom}_{\underline{\mathcal{E}}}(A, B) = \frac{\text{hom}_{\mathcal{E}}(A, B)}{\mathcal{I}}$$

onde $\mathcal{I} = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(A, B); f \text{ se fatora por injetivo}\}$. A composição é dada por $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{f \circ g}$, para todo f e g morfismos em $\mathcal{E}$.

Podemos construir em $\underline{\mathcal{E}}$ o funtor suspensão $S : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$ como segue: para cada $A \in \mathcal{E}$ escolha uma seqüência admissível $A \xrightarrow{i_A} IA \xrightarrow{p_A} X$ e defina $SA = X$. Para cada morfismo $\bar{f} : A \rightarrow B$ de $\underline{\mathcal{E}}$, escolha um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & IA & \longrightarrow & SA \\ \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{g} \\ B & \longrightarrow & IB & \longrightarrow & SB \end{array}$$

e defina $Sf = g$.

Uma escolha diferente da seqüência admissível leva a um funtor S' canonicamente isomorfo a S .

Podemos ainda construir triângulos em $\underline{\mathcal{E}}$. Seja $E : A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ uma seqüência admissível. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ || & & \downarrow & & \downarrow g \\ A & \longrightarrow & IA & \longrightarrow & SA \end{array}$$

e seja $\delta_E = \bar{g}$. Não é difícil verificar que δ_E não depende da escolha de f , e é funtorial com respeito a E .

Definição : A seqüência $A \xrightarrow{\bar{i}} B \xrightarrow{\bar{p}} C \xrightarrow{\delta_E} SA$ é chamada o triângulo standard associado a E . Uma seqüência $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow SA'$ é chamada um triângulo se é isomorfa a um triângulo standard, i.e., existe um diagrama comutativo em $\underline{\mathcal{E}}$

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & SA' \\ a \downarrow s & & \downarrow s & & \downarrow s & & \downarrow Sa \\ A & \xrightarrow{\bar{i}} & B & \xrightarrow{\bar{p}} & C & \xrightarrow{\delta_E} & SA \end{array}$$

onde $(\bar{i}, \bar{p}, \delta_E)$ é um triângulo standard.

Teorema 1.4.1 (Happel) *Seja $\underline{\mathcal{E}}$ a categoria estável de uma categoria exata $\mathcal{E}$, munida do funtor suspensão S e os triângulos como definidos acima. Então $\underline{\mathcal{E}}$ satisfaz:*

sp0: A classe dos triângulos é fechada por isomorfismos,

sp1: Para todo $X \in \underline{\mathcal{E}}$, a seqüência $0 \rightarrow X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow S0$ é um triângulo,

sp2: Se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$ é um triângulo, então a seqüência $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX \xrightarrow{-Su} SY$ ainda é um triângulo,

sp3: Para cada diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & SX & \Delta \\ a \downarrow & & b \downarrow & & & & Sa \downarrow & \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & SX' & \Delta \end{array}$$

existe um morfismo $c : Z \rightarrow Z'$ que faz os dois quadrados à direita comutarem,

sp4: Cada diagrama $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ pode ser mergulhado em um octaedro

onde as quatro faces do tipo

são triângulos e as outras são comutativas. (aqui, $U| \rightarrow V$ denota $U \rightarrow SV$)

Definição : Uma categoria aditiva $\mathcal{I}$ munida de um funtor aditivo $S : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ e uma classe de seqüências $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow SX$ (triângulos) satisfazendo sp0-sp4

é chamada uma categoria com suspensão . Se S é uma equivalência, chamamos $\mathcal{I}$ uma categoria triangular.

Observação : sp4 implica em particular que todo morfismo $u : X \rightarrow Y$ aparece como primeiro morfismo de um triângulo.

Definição : Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{T}$ categorias suspensas. Um funtor triangular de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{T}$ é um par (F, ϕ) onde $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{T}$ é um funtor aditivo e $\phi : FS \rightarrow SF$ é um isomorfismo entre funtores tal que se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} SX$ é um triângulo de $\mathcal{I}$, então $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\phi_X \circ Fw} SFX$ é um triângulo de $\mathcal{T}$. Um funtor triangular (F, ϕ) é uma equivalência triangular se F é uma equivalência.

1.4.2 Categorias Derivadas

Considere agora $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Defina a categoria de homotopia de $\mathcal{A}$ como a categoria $\mathcal{HA}$ cujos objetos são os complexos sobre $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são os morfismos entre complexos módulo homotopia. Pode-se provar que a categoria $\mathcal{HA}$ é isomorfa à categoria estável de $\mathcal{CA}$, $\underline{\mathcal{CA}}$.

Seja Σ a classe dos quase-isomorfismos de $\mathcal{HA}$, i.e., os morfismos $s : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ de $\mathcal{HA}$ que induzem isomorfismos entre $H^*(A)$ em $H^*(B)$. Para simplificar a notação vamos denotar de agora em diante $A^\bullet$ apenas por A .

Lema 1.4.1 (condições de Ore) *Nas condições descritas acima temos*

- a) 1_A pertence a Σ para todo $A \in \mathcal{HA}$, e a classe Σ é fechada por composição ;
- b) Os diagramas comutativos abaixo em $\mathcal{HA}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ s \downarrow & & \\ A' & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & & \\ t \downarrow & & \\ A' & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

onde $s, t \in \Sigma$ se completam a diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g'} & B \\ t \downarrow & & \downarrow t' \\ A' & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

onde $s', t' \in \Sigma$;

- c) Seja $f : A \rightarrow B$ um morfismo em $\mathcal{HA}$. Então existe $s \in \Sigma$ tal que $s \circ f = 0$ se e somente se existe $t \in \Sigma$ tal que $f \circ t = 0$. (em $\mathcal{HA}$)

Definição : Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Defina a categoria derivada de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{DA}$, como sendo a localização de $\mathcal{A}$ com respeito a Σ . Isto é, $\mathcal{DA}$ é a categoria cujos objetos são os mesmos objetos de $\mathcal{HA}$ (complexos sobre $\mathcal{A}$), e os morfismos são definidos como “frações à esquerda” de um morfismo em $\mathcal{HA}$. Um morfismo de A em B em $\mathcal{DA}$, denotado por $s^{-1}.f$, é uma classe de equivalência de diagramas

$$A \xrightarrow{f} B' \xleftarrow{s} B$$

onde (s, f) é equivalente a (s', f') se e somente se existe um diagrama comutativo de $\mathcal{HA}$

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & & \\ & \nearrow f & \downarrow & \nwarrow s & \\ A & \xrightarrow{f''} & C & \xleftarrow{s''} & B \\ & \searrow f' & \uparrow & \swarrow s' & \\ & & B'' & & \end{array}$$

onde $s'' \in \Sigma$.

A composição é definida por:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & D & & & \\ & & \xrightarrow{g'} & \nwarrow s' & & & \\ A & \xrightarrow{f} & B' & & C' & \xleftarrow{t} & C \\ & & \nwarrow s & \nearrow g & & & \\ & & B & & & & \end{array}$$

e a identidade para $A \in \mathcal{DA}$ é dada pelo diagrama

$$A \xrightarrow{1_A} A \xleftarrow{1_A} A$$

Observações :

- 1- Frações à direita fornecem uma categoria isomorfa.
- 2- A categoria $\mathcal{DA}$ é aditiva, e o funtor suspensão $S : \mathcal{HA} \rightarrow \mathcal{HA}$ induz um automorfismo $S : \mathcal{DA} \rightarrow \mathcal{DA}$. Assim, $\mathcal{DA}$ torna-se uma categoria triangular se consideramos o funtor suspensão S e as seqüências isomorfas a imagens de triângulos de $\mathcal{HA}$ sob o funtor quociente canônico $\mathcal{HA} \rightarrow \mathcal{DA}$ que leva um morfismo $f : A \rightarrow B$ no diagrama $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{1_B} B$.
- 3- Observe que o funtor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{DA}$ que a cada $M \in \mathcal{A}$ associa o complexo $\mathcal{M}$ tal que $M_0 = M$ e $M_i = 0$ para todo $i \neq 0$, é um funtor fiel e pleno.

Lema 1.4.2 a) Sejam P um complexo de módulos projetivos limitado à direita, e K um complexo arbitrário. Então a aplicação canônica $\text{hom}_{\mathcal{H}\mathcal{A}}(P, K) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(P, K)$ é invertível. Dualmente, se I é um complexo de módulos injetivos limitado à esquerda, então $\text{hom}_{\mathcal{H}\mathcal{A}}(K, I) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(K, I)$ é invertível.

b) Se $A, B \in \mathcal{A}$ então $\text{hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(A, B[n]) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde $A \in \mathcal{A}$ está identificado com o complexo $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ onde A tem “grau” zero, e para um complexo K , $K[n] = S^n K$.

Vamos estar considerando de agora em diante A um anel, e denotaremos por $\mathcal{H}A$ a categoria $\mathcal{H}(\text{Mod}A)$.

Definição : Um complexo $P \in \mathcal{H}A$ é chamado homotopicamente projetivo se $\text{hom}_{\mathcal{H}A}(P, N) = 0$, para todo complexo N acíclico. Um complexo $I \in \mathcal{H}A$ é chamado homotopicamente injetivo se $\text{hom}_{\mathcal{H}A}(N, I) = 0$, para todo complexo N acíclico.

Denotaremos por $\mathcal{H}_p A$ a classe dos complexos homotopicamente projetivos, e por $\mathcal{H}_i A$ a classe dos complexos homotopicamente injetivos.

Definição : Seja $\mathcal{T}$ uma categoria triangular. Uma subcategoria triangular plena de $\mathcal{T}$ é uma subcategoria aditiva plena $\mathcal{I} \in \mathcal{T}$ tal que $S\mathcal{I} = \mathcal{I}$ e para cada triângulo (X, Y, Z) de $\mathcal{T}$ com $X, Z \in \mathcal{I}$, existe $Y' \cong Y$ tal que $Y' \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ é estável sob extensões a menos de isomorfismo).

Observação : $\mathcal{H}_p A$ e $\mathcal{H}_i A$ são subcategorias triangulares plenas de $\mathcal{H}A$.

Teorema 1.4.2 Para cada complexo $K \in \mathcal{H}A$, existe um triângulo em $\mathcal{H}A$

$$\underline{p}K \rightarrow K \rightarrow \underline{a}K \rightarrow S\underline{p}K$$

onde $\underline{p}K$ é homotopicamente projetivo e $\underline{a}K$ é acíclico. Esse triângulo é único a menos de isomorfismo em $\mathcal{H}A$. Analogamente, para cada complexo $K \in \mathcal{H}A$, existe um triângulo em $\mathcal{H}A$

$$\underline{a}'K \rightarrow K \rightarrow \underline{i}K \rightarrow S\underline{a}'K$$

onde $\underline{i}K$ é homotopicamente injetivo e $\underline{a}'K$ é acíclico.

Corolário 1.4.1 O funtor canônico $\mathcal{H}A \rightarrow \mathcal{D}A$ induz equivalências $\mathcal{H}_p A \rightarrow \mathcal{D}A$ e $\mathcal{H}_i A \rightarrow \mathcal{D}A$, com quase-inversas induzidas por $\underline{p}$ e $\underline{i}$. Mais precisamente, o funtor quociente $\mathcal{H}A \rightarrow \mathcal{D}A$ admite adjuntos à direita e à esquerda plenos e fiéis induzidos por $\underline{p}$ e $\underline{i}$.

1.4.3 Funtores derivados

Sejam A, B anéis e $F : \mathcal{H}A \rightarrow \mathcal{H}B$ um funtor triangular.

Definição : Definimos o funtor completo derivado à esquerda de F por

$$\underline{L}F = \text{can} \circ F \circ \underline{p} : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$$

e o funtor completo derivado à direita de F por

$$\underline{R}F = \text{can} \circ F \circ \underline{i} : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$$

onde $\text{can} : \mathcal{H}B \rightarrow \mathcal{D}B$ é a aplicação canônica.

Seja X um complexo de A - B -bimódulos. Defina os seguintes funtores:

$$F = - \otimes_A X : \mathcal{C}A \rightarrow \mathcal{C}B$$

onde dado $K \in \mathcal{C}A$, FK é o complexo $K \otimes_A X$ tal que

$$(K \otimes_A X)^n = \bigoplus_{p+q=n} K^p \otimes_A X^q$$

e as aplicações dadas por $d(m \otimes x) = dm \otimes x + (-1)^p m \otimes dx$, para todos $m \in K^p$, $x \in X^q$; e

$$G = \text{hom}_B(X, -) : \mathcal{C}B \rightarrow \mathcal{C}A$$

onde

$$\text{hom}_B(X, L)^n = \prod_{p+q=n} \text{hom}_B(X^p, L^q)$$

para $L \in \mathcal{C}B$, e as aplicações dadas por $df = d_L \circ f - (-1)^n f \circ d_X$, onde d_L e d_X são as aplicações dos complexos L e X respectivamente.

Os funtores F e G induzem funtores adjuntos entre $\mathcal{H}A$ e $\mathcal{H}B$, que ainda vamos denotar por F e G . Os funtores derivados $\underline{L}F$ e $\underline{R}G$ são funtores triangulares adjuntos.

Definição : Definimos a subcategoria triangular plena dos complexos perfeitos de $\mathcal{D}A$,

$$\text{per}A = \{K \in \mathcal{D}A; K \text{ é quase-isomorfo a um complexo limitado de módulos projetivos finitamente gerados} \}.$$

Teorema 1.4.3 *Seja X um complexo de A - B -bimódulos, e $F : A \rightarrow B$ um funtor. $\underline{L}F : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$ é uma equivalência se e somente se $T = \underline{L}F(A) \in \mathcal{D}B$ satisfaz*

$$a) \operatorname{hom}_{\mathcal{D}B}(T, T[n]) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ A & \text{se } n = 0 \end{cases} ;$$

b) $T \in \operatorname{per} B$;

c) T gera $\operatorname{per} B$ como uma categoria triangular estável sob somas diretas.

Neste caso T é chamado um complexo inclinante.

Corolário 1.4.2 *Seja X um B -módulo inclinante generalizado, com $A = \operatorname{End}_B(X)$. Então $\underline{L}(- \otimes_A X) : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$ é uma equivalência.*

Uma consequência desses resultados para o cálculo de cohomologias de Hochschild é o seguinte:

Corolário 1.4.3 *Seja X um B -módulo inclinante generalizado, com $A = \operatorname{End}_B(X)$. Então $H^\bullet(A)$ é isomorfo a $H^\bullet(B)$ como anel graduado.*

Na próxima seção vamos descrever como é possível distinguir as categorias derivadas das álgebras de Brauer através de sua categoria derivada.

1.5 Equivalências Derivadas de Álgebras associadas a Árvores de Brauer

Nessa seção apresentamos definições e resultados básicos sobre álgebras associadas a árvores de Brauer, e uma aplicação para a teoria de categorias derivadas, na classificação destas álgebras. Para mais detalhes no assunto, veja [1].

1.5.1 Álgebras Associadas a Árvores de Brauer

Definição : Seja T um árvore finita, i.e., um grafo conexo finito com arestas simples e sem circuitos, onde a cada vértice v associamos um inteiro positivo m_v (que chamamos multiplicidade de v) e uma ordem cíclica nas arestas incidentes a v . Se no máximo um dos inteiros m_v é maior do que 1, então dizemos que a tripla (T, v_0, m) , onde v_0 é o único vértice com multiplicidade m maior que 1, é uma árvore de Brauer.

Uma árvore de Brauer é chamada uma estrela de Brauer, e denotada por $star(e, m)$ se o grafo T possui um vértice central v com multiplicidade m maior que 1, e que portanto é o vértice distinguido, e e arestas adjacentes a esse vértice.

Definição : Uma k -álgebra A de dimensão finita sobre k é chamada álgebra simétrica se admite uma forma linear $t : A \rightarrow k$ tal que a forma bilinear dada por $(a, b) \rightarrow t(ab)$ é simétrica não degenerada.

A seguinte proposição é fundamental ao nosso estudo.

Proposição 1.5.1 *Para cada árvore de Brauer (T, v_0, m) existe uma álgebra simétrica $A = A(T, v_0, m)$, única a menos de equivalência de Morita tal que:*

- a) *Os A -módulos simples são parametrizados pelas arestas de T , i.e. cada classe de isomorfismo de simples corresponde a uma aresta;*
- b) *A estrutura dos A -módulos projetivos indecomponíveis é descrita por (T, v_0, m) como segue: dada a aresta i , se $t_1, \dots, t_r$ e $j_1, \dots, j_s$ são as arestas incidentes a i , então o projetivo indecomponível P_i tem estrutura dada pela figura abaixo*

onde o simples S_i tem multiplicidade 1 se o vértice não é excepcional, e m caso contrário (a estrutura se repete).

No caso da estrela $star(\epsilon, m)$ a estrutura é dada pela figura

Logo nesse caso a álgebra A é Morita equivalente a uma álgebra truncada $\frac{kZ_\epsilon}{J^N}$ onde Z_ϵ é um ciclo com ϵ flechas, e $N = me + 1$.

A construção do quociente de álgebra de caminhos que é Morita equivalente à uma álgebra de árvore de Brauer em geral, é feita da seguinte maneira:

- 1- mergulhe a árvore T em um plano, preservando a orientação cíclica;
- 2- desenhe um vértice de Q em cada aresta de T ;
- 3- desenhe um ciclo positivo c_v de flechas de Q , todas denotadas por α_v , em volta de cada vértice v de T ;
- 4- as relações são dadas por: para cada aresta vw de T ,

$$\alpha_v \alpha_w = \alpha_w \alpha_v = 0$$

e

$$c_v^{m_v} = c_w^{m_w} \text{ onde } m_v = \begin{cases} 1 & , \text{ se } v \neq v_0 \\ m & , \text{ se } v = v_0 \end{cases}$$

Exemplo: Considere a árvore

Obtemos então

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \beta^6 = \delta = \gamma^7 \\ \alpha\beta &= \beta\alpha = 0 \\ \beta\gamma &= \gamma\beta = 0 \\ \alpha\delta &= \delta\alpha = 0\end{aligned}$$

5- A aljava desejada é então obtida “apagando” os laços não excepcionais e colocando novas relações . Se $m = 1$, apagamos também o laço excepcional.

No exemplo acima, uma apresentação admissível seria

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \beta^6 = \gamma^7 \\ \alpha\beta &= \beta\alpha = 0 \\ \beta\gamma &= \gamma\beta = 0\end{aligned}$$

Para classificar as categorias derivadas de álgebras simétricas associadas a álgebras de árvores de Brauer, vamos utilizar uma outra forma do teorema de Rickard apresentado na seção anterior.

Teorema 1.5.1 *Sejam A e B álgebras planas como módulos sobre um anel comutativo k . São equivalentes:*

- Existe $X \in \mathcal{D}(A \otimes B)$ tal que o funtor $-\otimes_A^L X : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$ é uma equivalência.*
- Existe uma equivalência triangular k -linear $F : \mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}B$.*
- Existe $T \in \mathcal{D}B$ tal que*

$$i) T \in \text{per} B$$

$$ii) \text{hom}_{\mathcal{D}B}(T, T[n]) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ A & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$iii) T \text{ gera } \text{per} B \text{ como categoria triangular estável por somas diretas.}$$

Definição : Sejam A e B k -álgebras como no teorema acima. Dizemos que A é derivadamente equivalente a B se uma (logo todas) das condições do teorema acima é válida. Nesse caso o complexo T é chamado um complexo inclinante.

Teorema 1.5.2 (*Rickard*)

a) *Seja (T, v_0, m) uma álgebra de árvore de Brauer com e arestas. Então*

$$A(T, v_0, m) \cong A(\text{star}(e, m)).$$

b) *$A(\text{star}(e, m)) \cong A(\text{star}(e', m'))$ se e somente se $e = e'$ e $m = m'$.*

Esse teorema nos permite classificar as álgebras associadas a árvores de Brauer.

Uma aplicação dos resultados que obteremos no capítulo 5 mostra que a condição necessária do item (b) do teorema acima é válida.

Capítulo 2

Grupos de Cohomologia para álgebras truncadas

Nesse capítulo obtemos fórmulas combinatórias para o cálculo das dimensões dos grupos de cohomologia de Hochschild de k -álgebras truncadas onde k é um corpo com característica zero, e de k -álgebras de ciclo truncadas sem restrições quanto à característica do corpo k . Para isso apresentamos uma outra descrição para a resolução projetiva minimal de A como A^ϵ -módulo à direita dada por Bardzell, no caso particular em que A é uma álgebra truncada qualquer. Utilizando essa nova descrição, obtemos as fórmulas desejadas. Apresentamos ainda algumas consequências dos resultados obtidos, finalizando com a prova da conjectura da dimensão homológica para álgebras truncadas com $\text{cark}=0$.

O conteúdo desse capítulo é parte de um artigo que será publicado no periódico *Communications in Algebra*, vol 27, sob o título *Hochschild Cohomology of Truncated Quiver Algebras* ([20]).

2.1 Outra descrição para a resolução projetiva minimal

Nesta seção apresentamos uma nova descrição para a resolução projetiva minimal dada por Bardzell, no caso em que A é álgebra truncada.

Vamos estar utilizando as notações introduzidas na seção 1.2. Além disso, se A e B são conjuntos de caminhos em Q , vamos denotar por $(A//B)$ o conjunto dos pares $(p, q) \in A \times B$ onde p é paralelo a q . Isto é,

$$(A//B) = \{(p, q) \in A \times B : o(p) = o(q) \text{ e } t(p) = t(q)\}.$$

Se $A = \{\text{caminhos em } Q \text{ de comprimento } i\}$ então escrevemos $(A//B) = (i//B)$ e nesse caso, se $B = \{\text{caminhos em } Q \text{ de comprimento } l\}$, então escrevemos

$(A//B) = (i//l)$. Também, dado um conjunto S , kS denota o k -espaço vetorial com base S . Alguns autores também denotam esse espaço por k^S

Lema 2.1.1 *Para todo $i \geq 0$, temos*

$$P_i^* \cong k(0//AP(i)) \oplus k(1//AP(i)) \oplus \dots \oplus k(N-1//AP(i))$$

Prova: Para cada $p \in AP(i)$, o conjunto

$$(0//\{p\}) \cup (1//\{p\}) \cup \dots \cup (N-1//\{p\})$$

é uma base para o espaço vetorial $o(p)At(p)$. Desde que $P_i^* = \coprod_{p \in AP(i)} o(p)At(p)$,

então

$$\eta : P_i^* \rightarrow k(0//AP(i)) \oplus \dots \oplus k(N-1//AP(i))$$

dada por: para todo $\lambda \in k(l//AP(i))$, com $l(\lambda) = l$, para algum $0 \leq l \leq N-1$,

$$\eta(o(p)\lambda t(p)) = (0, \dots, 0, (\lambda, p), 0, \dots, 0)$$

onde (λ, p) está na coordenada $k(l//AP(i))$, é o isomorfismo desejado. (Note que estamos apenas reordenando a base de P_i^* .) ■

Vamos agora apresentar uma nova descrição das aplicações ϕ_i^* , considerando essa nova descrição dos P_i^* .

Lema 2.1.2 *Para cada $i \geq 0$, existe uma aplicação D tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} P_{2i}^* & \xrightarrow{\phi_{2i+1}^*} & P_{2i+1}^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \bigoplus_{j=0}^{N-1} k(j//Ni) & \xrightarrow{D} & \bigoplus_{j=0}^{N-1} k(j//Ni+1) \end{array}$$

onde D é a aplicação definida por:

Dado $i \geq 0$,

$$D = (D_0, D_1, \dots, D_{N-1})$$

onde $D_{N-1} = 0$, e para $0 \leq j \leq N-2$,

$$D_j : k(j//Ni) \rightarrow k(j+1//Ni+1)$$

é dada por

$$D_j(\gamma, p) = \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha\gamma, \alpha p) - \sum_{\alpha \in Q_1} (\gamma\alpha, p\alpha)$$

para todo $(\gamma, p) \in (j//Ni)$, onde $(\alpha\gamma, \alpha p) = 0$ se $\alpha \notin Q_1 \cdot o(p)$, e $(\gamma\alpha, p\alpha) = 0$ se $\alpha \notin t(p)Q_1$.

Prova: Dado $o(p)\lambda t(p) = (0, \dots, 0, \lambda_p, 0, \dots, 0)$, com λ_p um caminho de comprimento l na coordenada $o(p)At(p)$, então temos

$$\begin{aligned} \eta^{-1}D\eta(0, \dots, \lambda_p, \dots, 0) &= \eta^{-1}D(0, \dots, 0, (\lambda_p, p), 0, \dots, 0) = \eta^{-1}(0, \dots, D_l(\lambda_p, p), \dots, 0) \\ &= \eta^{-1}(0, \dots, \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha\lambda_p, \alpha p) - \sum_{\alpha \in Q_1} (\lambda_p\alpha, p\alpha), \dots, 0) = \\ &= \sum_{\alpha \in Q_1} (\delta_{r, \alpha p} \alpha \lambda_p)_{r \in AP(2i+1)} - \sum_{\alpha \in Q_1} (\delta_{r, p\alpha} \lambda_p \alpha)_{r \in AP(2i+1)} = \\ &= (\delta_{p, r_2}({}^1r)\lambda_p - \delta_{p, r_1}\lambda_p({}^1r))_{r \in AP(2i+1)} = \phi_{2i+1}^*(0, \dots, \lambda_p, \dots, 0) \end{aligned}$$

Portanto o diagrama acima comuta, e a aplicação D tem a descrição desejada. ■

Usando essa descrição, para calcular $\dim_k \phi_{2i+1}^*$ basta calcular $\dim_k D_j$ para $0 \leq j \leq N-2$.

Definição : Seja $x = \sum_{(\gamma, p) \in (j//l)} x_{(\gamma, p)}(\gamma, p)$ um elemento de $k(j//l)$, com $j, l \geq 0$. O suporte de x é por definição o conjunto $\text{supp}(x) = \{(\gamma, p) / x_{(\gamma, p)} \neq 0\}$.

Proposição 2.1.1 Se Q é uma aljava que não é um Z_ϵ -ciclo, então D_0 é injetivo.

Prova: Por definição,

$$D_0 : k(0//Ni) \rightarrow k(1//Ni+1)$$

$$D_0(o(p), p) = \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha, \alpha p) - \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha, p\alpha)$$

para todo $(o(p), p) \in (0//Ni)$. (Note que $(v, p) \in (0//Ni)$ se e somente se p é um ciclo de comprimento Ni e $v = o(p) = t(p)$.)

Seja

$$x = \sum_{(v, p) \in (0//Ni)} x_p(v, p),$$

onde $x_p \in k$ para todo $(v, p) \in (0//Ni)$. Vamos mostrar que se $x \in \ker D_0$ então $x_p = 0$ para todo $(v, p) \in (0//Ni)$. Para isso, fixe $(v, p) \in (0//Ni)$.

Observe inicialmente que se $Q_1.o(p) \neq \{p^1\}$ ou $t(p).Q_1 \neq \{^1p\}$, então $x_p = 0$. De fato, se $\alpha \in Q_1.o(p)$ e $\alpha \neq p^1$, então $(\alpha, \alpha p) \in \text{supp}D_0(v, p)$, mas $(\alpha, \alpha p)$ não está no suporte de $D_0(v', p')$ para nenhum (v', p') além de (v, p) . Isso é claro uma vez que $(\alpha, \alpha p) = (\beta, p'\beta)$ se e somente se $\alpha = \beta$ e $\alpha p = p'\beta$ implica que $\alpha = p^1$ e estamos supondo que $\alpha \neq p^1$. Assim, desde que $D_0(x) = 0$, temos $x_p = 0$. Se $\alpha \in o(p)Q_1$, um argumento análogo mostra que x_p é também zero.

Suponha agora que $Q_1.o(p) = \{p^1\}$ e $t(p).Q_1 = \{^1p\}$. Por conveniência notacional, seja $^1p = \beta$. Considere $(\bar{v}, \bar{p})$ o “rodado” de (v, p) , isto é, se $p = \beta\hat{p}$ então $\bar{p} = \hat{p}\beta$ e $\bar{v} = o(\bar{p})$. Temos assim que $(\beta, p\beta) \in \text{supp}D_0(v, p)$ e $(\beta, p\beta) = (\beta, \beta\bar{p}) \in \text{supp}D_0(\bar{v}, \bar{p})$. Além disso, $(\beta, p\beta)$ não está no suporte de $D_0(v', p')$ para nenhum outro (v', p') a não ser (v, p) ou $(\bar{v}, \bar{p})$, desde que se $(\beta, p\beta) = (\alpha, p'\alpha)$ então $\beta = \alpha$ e $p = p'$, e se $(\beta, p\beta) = (\alpha, \alpha p')$ então $\beta = \alpha$ e $p\beta = \alpha p' = \beta p'$. Assim, p' é o rodado $\bar{p}$ de p . Desse modo, o coeficiente de $(\beta, p\beta)$ em $D_0(x)$ é $x_p - x_{\bar{p}}$. Uma vez que $(0//Ni)$ é uma base e $D_0(x) = 0$, isso implica que

$$x_p = x_{\bar{p}}.$$

Agora, se $Q_1.o(\bar{p}) \neq \{\bar{p}^1\}$ ou $t(\bar{p}).Q_1 \neq \{\bar{p}^1\}$, então repetimos o processo e analisamos o rodado de $(\bar{v}, \bar{p})$. Uma vez que Q é uma aljava conexa que não é um Z_e -ciclo, repetindo o processo se necessário, vamos encontrar um rodado que possui uma flecha começando ou terminando na sua origem, diferente da primeira e da última flecha do rodado. Como x_p é igual ao coeficiente de todo rodado de p , segue que $x_p = 0$. Desse modo temos que $x_p = 0$ para todo $(v, p) \in (0//Ni)$ e, portanto D_0 é injetiva. ■

Vamos agora fixar mais algumas notações. Essas notações foram introduzidas por C. Cibils em [5]. Fixe j com $1 \leq j \leq N - 2$, e seja $(\gamma, p) \in (j//Ni)$.

Dizemos que (γ, p) começa junto (resp. termina junto) se a primeira (resp. última) flecha de γ e p coincidem. Também dizemos que (γ, p) começa (resp. termina) em fonte (resp. em poço) se $o(\gamma) = o(p)$ é uma fonte (resp. se $t(\gamma) = t(p)$ é um poço).

Suponha que (γ, p) começa junto, ou seja, $(\gamma, p) = (\alpha\bar{\gamma}, \alpha\bar{p})$ para algum $\alpha \in Q_1$, e ainda que (γ, p) não termina em poço. Um +movimento de (γ, p) é um par $(\bar{\gamma}\beta, \bar{p}\beta)$ onde $\beta \in t(p)Q_1$.

Se (γ, p) não começa junto, ou se (γ, p) termina em poço, então não é possível nenhum +movimento de (γ, p) , e chamamos (γ, p) uma +extrema.

De modo análogo, se (γ, p) termina junto e (γ, p) não começa em fonte, definimos um -movimento de (γ, p) . Se (γ, p) não termina junto, ou começa em fonte, dizemos que (γ, p) é uma -extrema.

Defina agora, uma relação de equivalência sobre $(j//Ni)$ dizendo que (γ, p) é equivalente a (γ', p') se existe uma sequência finita de + ou -movimentos trans-

formando (γ, p) em (γ', p') . Chamamos de j -extrema uma classe de equivalência tal que todas as suas $+$ extremas terminam em poço e todas as suas $-$ extremas começam em fonte.

Observação : Se $o(p)$ é uma fonte e $t(p)$ é um poço, então a classe de equivalência de (γ, p) contém apenas (γ, p) e é uma j -extrema. Contudo, se $o(p)$ é uma fonte e (γ, p) não começa junto, então a classe de equivalência de (γ, p) é unitária também, mas se $t(p)$ não é um poço, então essa classe não é uma j -extrema. Além disso note que se uma classe de equivalência não possui $+$ ou $-$ extremas, então ela é uma j -extrema. Isto acontece, por exemplo no caso do Z_ϵ -ciclo.

Os dois próximos lemas são generalizações dos lemas 4.3 e 4.4 de [5].

Lema 2.1.3 *Seja $(\gamma, p) \in (j//Ni)$. Se $(\alpha\gamma, \alpha p) \in \text{supp}D_j(\gamma, p)$ então seu coeficiente em $D_j(\gamma, p)$ é 1, e se $(\gamma\alpha, p\alpha) \in \text{supp}D_j(\gamma, p)$, então seu coeficiente é -1 .*

Prova: Por definição

$$D_j(\gamma, p) = \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha\gamma, \alpha p) - \sum_{\alpha \in Q_1} (\gamma\alpha, p\alpha)$$

É claro que $(\alpha\gamma, \alpha p) \neq (\beta\gamma, \beta p)$, e $(\gamma\alpha, p\alpha) \neq (\gamma\beta, p\beta)$, se $\alpha, \beta \in Q_1 o(p)$ e $\alpha \neq \beta$. Agora, se $(\alpha\gamma, \alpha p) = (\gamma\beta, p\beta)$, para $\alpha \in Q_1 o(p)$ e $\beta \in t(p)Q_1$, então $\alpha\gamma = \gamma\beta$ e $\alpha p = p\beta$. Isso implica então que $\alpha = \beta$ é um laço e γ e p são potências de α . A prova dessa afirmação é feita por indução em $l(p)$. Se $l(p) = 1$, não há nada a fazer. Suponha que a afirmação é válida para caminhos de comprimento menor ou igual a l , e suponha $l(p) = l + 1$. Então, desde que $\alpha p = p\beta$, temos que $p = \alpha\bar{p}\beta$, onde $l(\bar{p}) \leq l$. Mas $\alpha p = p\beta$ implica que $\alpha\alpha\bar{p}\beta = \alpha\bar{p}\beta\beta$, logo $\alpha\bar{p} = \bar{p}\beta$. Pela hipótese de indução, $\alpha = \beta$, e $\bar{p}$ é uma potência de α . Logo p é uma potência de α também. Mas nesse caso, $(\alpha\gamma, \alpha p)$ não pertence a $\text{supp}D_j(\gamma, p)$, uma vez que aparece em ambas as somas da definição de $D_j(\gamma, p)$. ■

Lema 2.1.4 *Seja $(\gamma, p) \in (j//Ni)$, e $(\alpha\gamma, \alpha p)$ (resp. $(\gamma\alpha, p\alpha)$) um elemento em $\text{supp}D_j(\gamma, p)$. Seja $(\gamma', p') \in (j//Ni)$ tal que $(\gamma', p') \neq (\gamma, p)$. Então o elemento $(\alpha\gamma, \alpha p)$ (resp. $(\gamma\alpha, p\alpha)$) está no suporte de $D_j(\gamma', p')$ se e somente se (γ, p) termina junto (resp. começa junto), e (γ', p') é o $-$ movimento (resp $+$ movimento) de (γ, p) correspondendo à flecha α .*

Prova: Se $(\alpha\gamma, \alpha p) \in \text{supp}D_j(\gamma, p)$ então $(\alpha\gamma, \alpha p) = (\beta\gamma', \beta p')$ ou $(\alpha\gamma, \alpha p) = (\gamma'\beta, p'\beta)$ para algum $\beta \in Q_1$.

Se $(\alpha\gamma, \alpha p) = (\beta\gamma', \beta p')$ então $\alpha = \beta$ e $(\gamma, p) = (\gamma', p')$. Logo devemos ter $(\alpha\gamma, \alpha p) = (\gamma'\beta, p'\beta)$. Nesse caso podemos escrever

$$(\gamma, p) = (\bar{\gamma}\beta, \bar{p}\beta)$$

e temos que (γ, p) termina junto. Também temos que $(\gamma', p') = (\alpha\bar{\gamma}, \alpha\bar{p})$, isto é, (γ', p') é o $-$ movimento de (γ, p) correspondendo à flecha α . A recíproca é imediata. ■

Proposição 2.1.2 *Considere D_j , para $1 \leq j \leq N-2$, como definida acima. Então temos que*

$$\dim_k \ker D_j = \# \{j - \text{extremas}\}.$$

Prova: Fixe j , com $1 \leq j \leq N-2$, e para cada j -extrema E , considere

$$\bar{E} = \sum_{(\gamma, p) \in E} (\gamma, p).$$

Vamos mostrar primeiro que $\bar{E} \in \ker D_j$. Seja $(\gamma, p) \in E$ e suponha que $(\alpha\gamma, \alpha p) \in \text{supp} D_j(\gamma, p)$. Então é claro que (γ, p) não começa em fonte, logo (γ, p) não é uma $-$ extrema desde que E é uma j -extrema. Assim (γ, p) deve terminar junto, isto é, $(\gamma, p) = (\bar{\gamma}\beta, \bar{p}\beta)$, para alguma flecha β . Pelo lema 2.1.3, $(\alpha\gamma, \alpha p)$ está no suporte de $D_j(\alpha\bar{\gamma}, \alpha\bar{p})$, com coeficiente -1 . Como $(\alpha\bar{\gamma}, \alpha\bar{p})$ é um $-$ movimento de (γ, p) , é um somando de $\bar{E}$. Logo $(\alpha\gamma, \alpha p)$ não está em $\text{supp} D_j(\bar{E})$. Temos então que $D_j(\bar{E}) = 0$.

Agora seja

$$x = \sum_{(\gamma, p) \in (j//Ni)} x_{(\gamma, p)}(\gamma, p) \in \ker D_j$$

onde $x_{(\gamma, p)} \in k$ para todo $(\gamma, p) \in (j, Ni)$.

Note que se (γ, p) e (γ', p') estão na mesma classe de equivalência, então $x_{(\gamma, p)} = x_{(\gamma', p')}$. De fato, se (γ', p') é um $+$ movimento de (γ, p) então $(\gamma, p) = (\beta\bar{\gamma}, \beta\bar{p})$ e $(\gamma', p') = (\bar{\gamma}\alpha, \bar{p}\alpha)$ com $\alpha, \beta \in Q_1$. Logo $(\gamma\alpha, p\alpha)$ está no suporte de $D_j(\gamma, p)$ com coeficiente -1 , no suporte de $D_j(\gamma', p')$ com coeficiente 1 , e não está no suporte de nenhum outro $D_j(\hat{\gamma}, \hat{p})$. Desde que $D_j(x) = 0$, segue que $x_{(\gamma, p)} = x_{(\gamma', p')}$.

Se (γ', p') é um $-$ movimento de (γ, p) a prova é análoga.

Desse modo podemos escrever

$$x = \sum_{(\gamma, p) \in (j//Ni)} x_{(\gamma, p)} \left(\sum_{(\gamma', p') \in \overline{(\gamma, p)}} (\gamma', p') \right).$$

Se (γ, p) é uma +extrema (resp. -extrema) que não termina em poço (resp. começa em fonte), isto é, (γ, p) não é uma j -extrema, então

$$x_{\overline{(\gamma, p)}} = x_{(\gamma, p)} = 0.$$

De fato, como $t(p)$ não é um poço, existe uma flecha α com $(\gamma\alpha, p\alpha) \in \text{supp} D_j(\gamma, p)$. Pelo lema 2.1.4, sabemos que se $(\gamma', p') \in (j//Ni)$ então $(\gamma\alpha, p\alpha) \in \text{supp} D_j(\gamma', p')$ se e somente se (γ, p) começa junto e (γ', p') é o +movimento de (γ, p) correspondendo à flecha α . Mas (γ, p) é uma +extrema que não termina em poço, logo (γ, p) não começa junto. Assim $(\gamma\alpha, p\alpha)$ não está no suporte de nenhum outro $D_j(\gamma', p')$ e como $D_j(x) = 0$, segue que $x_{(\gamma, p)} = 0$.

Provamos então que $\{\overline{E}; E \text{ é uma } j\text{-extrema}\}$ gera $\ker D_j$. Resta provar que esse conjunto é linearmente independente. Mas isso é imediato, uma vez que $(j//Ni)$ é uma base de $k(j//Ni)$ e os suportes das $\overline{E}$ são dois a dois disjuntos. Concluimos então que $\{\overline{E}; E \text{ é uma } j\text{-extrema}\}$ é uma base de $\ker D_j$, para $1 \leq j \leq N-2$. ■

Agora podemos calcular $\dim_k \ker \phi_{2i+1}^*$ e $\dim_k \text{Im } \phi_{2i+1}^*$, para $i \geq 1$. Por conveniência notacional vamos denotar

$$\{0\text{-extremas}\} = \emptyset$$

e

$$\{(N-1)\text{-extremas}\} = (N-1//Ni).$$

Com essa notação podemos escrever

$$\dim_k \ker D_j = \#\{j\text{-extremas}\}$$

para todo $0 \leq j \leq N-1$.

Se Q não é um ciclo orientado, então temos que

$$\begin{aligned} \dim_k \ker \phi_{2i+1}^* &= \dim_k \ker D_0 + \sum_{j=1}^{N-2} \dim_k \ker D_j + \#(N-1//Ni) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \#\{j\text{-extremas}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Im } \phi_{2i+1}^* &= \dim_k P_{2i}^* - \dim_k \ker \phi_{2i+1}^* = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \#(j//Ni) - \sum_{j=0}^{N-1} \#\{j\text{-extremas}\} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-2} [\#(j//Ni) - \#\{j\text{-extremas}\}] \end{aligned}$$

Logo temos

Proposição 2.1.3 *Se Q não é um Z_e -ciclo, então temos*

$$\begin{aligned} \dim_k \ker \phi_{2i+1}^* &= \sum_{j=0}^{N-1} \#\{j - \text{extremas}\} \\ e \\ \dim_k \text{Im } \phi_{2i+1}^* &= \sum_{j=0}^{N-2} [\#(j//Ni) - \#\{j - \text{extremas}\}] \end{aligned}$$

Agora, se Q é um Z_e -ciclo então temos

Lema 2.1.5 *Se Q é um Z_e -ciclo, então $\dim_k \ker D_0 = 1$, se $Ni \equiv 0(e)$, e $\ker D_0 = \{0\}$ caso contrário.*

A prova desse lema é análoga à prova da proposição 2.1.1.

Agora observe que a prova da proposição 2.1.2 não depende de Q ser ou não um Z_e -ciclo. No caso em que Q é um Z_e -ciclo, $k(j//Ni) \neq \{0\}$ se e somente se $Ni \equiv j \equiv t \pmod{e}$, onde $0 \leq t \leq m-1$. Assim, se $j \equiv Ni \pmod{e}$, note que cada $(\gamma, p) \in (j//Ni)$ começa e termina junto. Desde que em um Z_e -ciclo não existem poços nem fontes, podemos sempre definir +movimentos e -movimentos de (γ, p) . Vemos então que nesse caso existe somente uma classe de equivalência em $(j//Ni)$ para cada $j \equiv Ni \pmod{e}$. Além disso, essa classe equivalência é uma j -extrema, desde que não existem +extremas nem -extremas.

Corolário 2.1.1 *Suponha que Q é um Z_e -ciclo, e seja $0 \leq j \leq N-2$. Se $j \equiv Ni(e)$, então $\dim_k \ker D_j = 1$. Caso contrário temos $\ker D_j = \{0\}$.*

Desse modo, se Q é um Z_e -ciclo e denotamos,

$$C_i = \#\{j/0 \leq j \leq N-2 \text{ e } j \equiv Ni(e)\}$$

para $i \geq 1$, então temos

Proposição 2.1.4 *Se Q é um Z_e -ciclo, então para $i \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \dim_k \ker \phi_{2i+1}^* &= C_i + \#(N-1//Ni) \\ e \\ \dim_k \text{Im } \phi_{2i+1}^* &= (e-1)C_i. \end{aligned}$$

Agora vamos descrever as aplicações ϕ_{2i}^* para $i \geq 1$.

Lema 2.1.6 *Para cada $i \geq 1$, existe uma aplicação D tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} P_{2i-1}^* & \xrightarrow{\phi_{2i}^*} & P_{2i}^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \bigoplus_{j=0}^{N-1} k(j//N(i-1) + 1) & \xrightarrow{D} & \bigoplus_{j=1}^{N-1} k(j//Ni) \end{array}$$

Essa aplicação é definida por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $D_0 : k(0//N(i-1) + 1) \rightarrow k(N-1//Ni)$ é dada por

$$D_0(o(p), p) = \sum_{l(sq)=N-1} (sq, spq)$$

para todo $(o(p), p) \in (0//N(i-1) + 1)$, onde $(sq, spq) = 0$ se $t(s) = o(q) \neq o(p)$.

Prova: É uma verificação imediata mostrar que esse diagrama comuta. ■

Desse modo, para calcular $\dim_k \ker \phi_{2i}^*$ é suficiente calcular $\dim_k \ker D_0$.

Lema 2.1.7 (caso $i=1$) *Sejam $(o(p), p) \in (0//1)$ (p é um laço), e (sq, spq) um elemento em $\text{supp} D_0(o(p), p)$, onde $l(sq) = N-1$. Então (sq, spq) não está no suporte de $D_0(o(p), p)$ para nenhum outro $p' \neq p$.*

Prova: Nesse caso temos $D_0 : k(0//1) \rightarrow k(N-1//N)$. Suponha que $(sq, spq) \in \text{supp} D_0(o(p), p)$ está no suporte de $D_0(o(p'), p')$. Então existem caminhos s' e q' com $l(s'q') = N-1$ e tais que $(sq, spq) = (s'q', s'p'q')$. Isso implica que $sq = s'q'$ e $spq = s'p'q'$. Se $s = s'$ então devemos ter $p = p'$, vamos supor então que $t(s') < t(s)$. Assim $spq = s'p'q'$ implica que p' é um laço contido em s , e p é um laço contido em q' .

$$s = s'p'\bar{p} \text{ e } q' = \bar{p}pq$$

Assim $sq = s'q'$ implica que $s'p'\bar{p}q = s'\bar{p}pq$ e segue que $p'\bar{p} = \bar{p}p$. Usando um argumento semelhante ao usado na prova do lema 2.1.3, podemos ver que $p = p'$ e $\bar{p}$ é uma potência de p . Provamos então que se $(sq, spq) \in \text{supp}D_0(o(p'), p')$ então $p' = p$.

O caso $t(s') > t(s)$ é análogo. ■

Para o caso $i \geq 2$, vamos precisar de notação adicional. Dado um ciclo de comprimento $N(i-1)+1$, com $i \geq 2$, $p = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_lv\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{N(i-1)+1}$, onde $\alpha_j \in Q_1$, para $1 \leq j \leq N(i-1)+1$, e $v \in Q_0$, vamos chamar o rodado de p com origem v , o circuito $p(v) = \alpha_{l+1}\ldots\alpha_{N(i-1)+1}\alpha_1\ldots\alpha_l$.

Além disso, dado um caminho r em Q , vamos denotar por $r \cap p$ o conjunto de vértices que pertencem a r e p .

Lema 2.1.8 (caso $i \geq 2$) Sejam $i \geq 2$, $(o(p), p) \in (0//N(i-1)+1)$ e $(sq, spq) \in \text{supp}D_0(o(p), p)$, onde $l(sq) = N-1$. Seja ainda $(o(p'), p') \in (0//N(i-1)+1)$ tal que $(o(p), p) \neq (o(p'), p')$. Então (sq, spq) está no suporte de $D_0(o(p'), p')$ se e somente se $\#(sq \cap p) \geq 2$ e p' é um rodado de p com origem em algum vértice em $sq \cap p$.

Prova: Suponha que $(sq, spq) \in \text{supp}D_0(o(p'), p')$ para $(o(p'), p') \neq (o(p), p)$. Então existem caminhos s' e p' tais que $(sq, spq) = (s'q', s'p'q')$, isto é, $sq = s'q'$ e $spq = s'p'q'$.

Se $s = s'$ então devemos ter $p = p'$, uma vez que $l(p) = l(p')$. Suponha então que $t(s') < t(s)$. Como $spq = s'p'q'$, $l(p) = l(p') = N(i-1) + 1 \geq N+1$, e

$l(sq) = N-1$, temos $s = s'\bar{s}$, com $l(\bar{s}) \geq 1$, e $q' = \bar{q}q$, onde $\bar{s}$ tem origem $o(p')$ e término $o(p)$, e $\bar{q}$ tem origem $t(p')$ e término $o(p)$. Mas $sq = s'q'$ implica que $s'\bar{s}q = s'\bar{q}q$, e então temos $\bar{s} = \bar{q}$. Desse modo vemos que p' é um rodado de p e $\#(sq \cap p) \geq 2$, uma vez que os vértices que pertencem a $\bar{s}$ estão em $sq \cap p$. O caso $t(s') > t(s)$ é feito de modo análogo.

A recíproca é clara. ■

Proposição 2.1.5 A aplicação

$$D_0 : k(0//N(i-1) + 1) \rightarrow k(N-1//Ni)$$

é injetiva, para todo $i \geq 1$.

Prova: Seja $x \in \ker D_0$. Podemos escrever

$$x = \sum_{(o(p), p) \in (0//N(i-1) + 1)} x_p(o(p), p).$$

onde $x_p \in k$ para todo $(o(p), p) \in (0//N(i-1) + 1)$.

Considere primeiro o caso $i = 1$. Nesse caso, pelo lema 2.1.7, dado $(o(p), p) \in (0//N(i-1) + 1)$ e $(sq, spq) \in \text{supp}D_0(o(p), p)$ temos que (sq, spq) não está no suporte de $D_0(o(p'), p')$ para nenhum $p' \neq p$. Como $D_0(x) = 0$, devemos ter $x_p = 0$. Então $x = 0$ e D_0 é injetiva.

Agora suponha $i \geq 2$. Defina uma relação de equivalência em $(0//N(i-1) + 1)$ dizendo que p é equivalente a q se p é um rodado de q . Denotando por $\mathcal{C}$ o conjunto de classes de equivalência, podemos escrever

$$k(0//N(i-1) + 1) = \coprod_{c \in \mathcal{C}} kc$$

onde para cada classe c , kc é o espaço vetorial com base no conjunto c . Podemos definir uma ordem completa no conjunto $(0//N(i-1)+1)$ como segue. Primeiro defina uma ordem completa $<'$ no conjunto classes $\mathcal{C}$. Agora para cada $c \in \mathcal{C}$, escolha $p \in c$ e ordene os elementos de c pela ordem completa $<''$ dada por

$$p <'' p(v_1) <'' p(v_2) <'' \dots <'' p(v_l)$$

onde v_j , com $1 \leq j \leq l$, são os vértices de p .

Considere então a ordem lexicográfica em $(0//N(i-1)+1)$:

$$q \leq q' \text{ se } c(q) <' c(q'), \text{ ou } c(q) = c(q') \text{ e } q <'' q'.$$

onde $c(q)$ denota a classe de equivalência de q .

Agora podemos também colocar no conjunto $(N-1//Ni)$ uma ordem completa, como segue. Primeiro considere no subconjunto

$$B = \{({}^{N-1}p, p({}^{N-1}p)); p \in (0//N(i-1)+1)\}$$

a ordem completa induzida pela ordem em $(0//N(i-1)+1)$. Considere então em $(N-1//Ni) - B$ qualquer ordem completa e defina

$$p \leq q, \text{ para todo } p \in B \text{ e } q \in (N-1//Ni) - B.$$

Dado $(v, p) \in (0//N(i-1)+1)$, lema 2.1.8 nos assegura que $({}^{N-1}p, p({}^{N-1}p)) \in \text{supp}D_0(o(p'), p')$ se e somente se $p' \in c(p)$ e começa em algum vértice em $({}^{N-1}p) \cap p$. Seja L o comprimento do menor ciclo $\bar{p}$ tal que $p = \bar{p}^a$ para algum $a \geq 1$, escreva

$$N = mL + t$$

com $0 \leq t < L$. Então não é difícil ver que um elemento $({}^{N-1}q, q({}^{N-1}q))$ em B aparece em $D_0(v, p)$ com coeficiente $m+1$, se $q = p(v_j)$ com $1 \leq j \leq t$, ou m se $q = p(v_j)$, com $j > t$.

Desse modo, considerando as ordens que definimos nas bases de $k(0//N(i-1)+1)$ e $k(N-1//Ni)$, temos que a matriz de D_0 pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_b \\ B_1 & B_2 & \dots & B_b \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

onde cada matriz A_j corresponde a $D_0|_{kc_j}$, e é da forma

$$\begin{pmatrix} m+1 & m & m & \dots & m+1 \\ m+1 & m+1 & m & \dots & m+1 \\ m+1 & m+1 & m+1 & \dots & m+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m+1 & m+1 & m+1 & \dots & m+1 \\ m+1 & m+1 & m+1 & \dots & m \\ m & m+1 & m+1 & \dots & m \\ m & m & m+1 & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & m & m & \dots & m \\ m & m & m & \dots & m+1 \end{pmatrix}$$

onde em cada coluna temos t entradas $m+1$ e $L-t$ entradas m , e L é obtido a partir dos ciclos em c_j como fizemos anteriormente.

Agora note que se $p \in (0//N(i-1)+1)$, então devemos ter $Ni \equiv N-1(L)$. Desse modo, $\text{mdc}(N, l(p)) = 1$, e então $\text{mdc}(t, L) = 1$. Isso implica que a matriz A_j tem determinante não nulo (veja [22]). Portanto a aplicação D_0 é injetiva. ■

Observações : 1) Note que essa demonstração não depende de Q ser ou não um Z_e -ciclo.

2) Na seção 2.3 obteremos as mesmas fórmulas para ciclos, utilizando uma ação do grupo $\frac{Z_e}{eZ}$ no complexo utilizado para o cálculo das cohomologias.

Temos então

Proposição 2.1.6 *Dado $i \geq 1$ temos*

$$\dim_k \ker \phi_{2i}^* = \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//N(i-1)+1)$$

e

$$\dim_k \text{Im } \phi_{2i}^* = \#(0//N(i-1) + 1)$$

Observação : Observe novamente que essas dimensões não dependem de Q ser ou não um Z_e -ciclo.

2.2 Os grupos de cohomologia

Nessa seção calculamos fórmulas para as dimensões dos grupos de cohomologia de Hochschild de álgebras truncadas. Para isso usamos as dimensões obtidas na seção anterior. Lembre uma vez mais que neste capítulo estamos assumindo $\text{car } k = 0$.

Seja $A = \frac{kQ}{J^N}$, onde Q é uma aljava conexa e finita, J é o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas, e $N \geq 2$.

Teorema 2.2.1 *Se Q não é um Z_e -ciclo então*

$$H^0(A) = Z(A)$$

$$\dim_k H^1(A) = \dim_k Z(A) - \sum_{j=0}^{N-1} \#(j//0) + \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//1),$$

e para $i \geq 1$,

$$\dim_k H^{2i+1}(A) = \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//Ni + 1) - \sum_{j=0}^{N-1} [\#(j//Ni) - \#\{j - \text{extremas}\}]$$

e

$$\dim_k H^{2i}(A) = \sum_{j=1}^{N-1} \#\{j - \text{extremas}\} - \#(0//N(i-1) + 1).$$

Observação : Relembre que por definição $\{(N-1) - \text{extremas}\} = (N-1//Ni)$.

Prova: Já sabemos que $H^0(A) = Z(A)$, onde $Z(A)$ é o centro de A [4]. Mas $H^0(A) = \ker \phi_1^*$, então

$$\dim_k \text{Im } \phi_1^* = \dim_k P_0^* - \dim_k \ker \phi_1^* = \sum_{j=0}^{N-1} \#(j//0) - \dim_k Z(A)$$

Assim temos

$$\begin{aligned}\dim_k H^1(A) &= \dim_k \ker \phi_2^* - \dim_k \operatorname{Im} \phi_1^* = \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//1) + \dim_k Z(A) - \sum_{j=0}^{N-1} \#(j//0).\end{aligned}$$

Agora, se $i \geq 1$, então

$$\begin{aligned}\dim_k H^{2i+1}(A) &= \dim_k \ker \phi_{2(i+1)}^* - \dim_k \operatorname{Im} \phi_{2i+1}^* = \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//Ni+1) - \sum_{j=0}^{N-1} [\#(j//Ni) - \#\{j - \text{extremas}\}]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dim_k H^{2i}(A) &= \dim_k \ker \phi_{2i+1}^* - \dim_k \operatorname{Im} \phi_{2i}^* = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \#\{j - \text{extremas}\} - \#(0//N(i-1)+1).\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.2 *Se Q é um Z_e -ciclo, com $e \geq 2$, então*

$$\dim_k H^0(A) = \dim Z(A)$$

$$\dim_k H^1(A) = \dim Z(A) - \sum_{j=0}^{N-1} \#(j//0) + \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//1)$$

e para $i \geq 1$,

$$\dim_k H^{2i+1}(A) = \dim_k H^{2i}(A) = C_i$$

onde $C_i = \#\{j/0 \leq j \leq N-2 \text{ e } j \equiv Ni(e)\}$.

Prova: As provas para $H^0(A)$ e $H^1(A)$ são análogas às do teorema 2.2.1.

Se $i \geq 1$, então

$$\dim_k H^{2i+1}(A) = \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//Ni+1) - (e-1)C_i$$

Mas é fácil ver que

$$\#\{j/1 \leq j \leq N-1 \text{ e } j \equiv Ni+1(e)\} = \#\{j/0 \leq j \leq N-2 \text{ e } j \equiv Ni(e)\}.$$

Logo $\sum_{j=1}^{N-1} \#(j//Ni + 1) = eC_i$, e

$$\dim_k H^{2i+1}(A) = eC_i - (e-1)C_i = C_i.$$

Temos ainda que

$$\dim_k H^{2i}(A) = C_i + \#(N-1//Ni) - \#(0//N(i-1) + 1).$$

Mas observe que se Q é um Z_e -ciclo, então $(N-1//Ni) \neq \emptyset$ se e somente se $(0//N(i-1) + 1) \neq \emptyset$. Além disso, quando esses conjuntos são não vazios, então $\#(0//N(i-1) + 1) = \#Q_0 = \#(N-1//Ni)$. Temos então que $\dim_k H^{2i}(A) = C_i$. ■

2.3 O caso especial do ciclo

Vamos agora considerar $A = kZ_e/J^N$ onde J é o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas, $N \geq 2$, e k é um corpo com característica qualquer. Nessa seção apresentamos as dimensões dos grupos de cohomologia de Hochschild desse tipo de álgebras truncadas.

Para cada $l \geq 0$ temos que $P_l^* = \bigoplus_{j \geq 0} k(j//AP(l))$. Seja $C_e = \langle g : g^e = 1 \rangle$ o grupo cíclico de ordem e gerado por g . Então cada $k(j//AP(l))$ não nulo pode ser considerado naturalmente como um kC_e -módulo livre de posto 1, e as aplicações ϕ_j^* são aplicações de C_e -módulos. A ação de C_e é definida como segue. Dado $(\gamma, p) \in k(j//AP(l))$, defina $g \cdot (\gamma, p) = (\gamma', p')$, onde γ' e p' são os rodados de γ e p por uma flecha no sentido horário. Ou seja, se $p = \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_m \pmod{e}$, então $p' = \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{m+1} \pmod{e}$. Note que cada (γ, p) gera o módulo P_l^* .

Dado $i \geq 0$, sabemos que $\phi_{2i+1}^* : P_{2i}^* \rightarrow P_{2i+1}^*$, é dada por

$$\phi_{2i+1}^* = (D_0, D_1, \dots, D_{N-1}),$$

onde para cada j com $0 \leq j \leq N-2$, $D_j : k(j//Ni) \rightarrow k(j+1//Ni+1)$ é definida por $D_j(\gamma, p) = (\alpha\gamma, \alpha p) - (\gamma\beta, p\beta)$ onde α e β são as únicas flechas tais que $t(\alpha) = o(\gamma) = o(p)$ e $o(\beta) = t(\gamma) = t(p)$. Além disso, D_{N-1} é a aplicação nula. Se escolhemos $(\gamma_1^j, \gamma_1^{Ni})$ e $(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{Ni+1})$ como geradores de $k(j//Ni)$ e $k(j+1//Ni+1)$, respectivamente, como C_e -módulos, então podemos escrever a aplicação D_j como a aplicação de C_e -módulos dada por $D_j(\gamma_1^j, \gamma_1^{Ni}) = (g^{-1} - 1)(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{Ni+1})$. Isso implica que $\text{Im } D_j$ é o ideal de aumento de $k(j+1//Ni+1)$. Isto é, $\text{Im } D_j \cong \Delta(kC_e)$, que tem co-dimensão 1. Segue então que $\ker D_j$ é unidimensional e podemos tomar $\{(\gamma_1^j, \gamma_1^{Ni})\}$ como uma k -base para $\ker D_j$.

Agora escreva $N = m\epsilon + t$, onde $0 \leq t < \epsilon$. Sabemos que a aplicação ϕ_{2i}^* , para $i \geq 1$, é dada por

$$\phi_{2i}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $D_0 : k(0//N(i-1) + 1) \rightarrow k(N-1//Ni)$ é definida por $D_0(o(p), p) = \sum_{l(sq)=N-1} (sq, spq)$, para todo $(o(p), p) \in (0//N(i-1) + 1)$. Assim ϕ_{2i}^* é claramente uma aplicação de kC_ϵ -módulos e podemos escrever $D_0(v_1, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = m \sum_{l=1}^{\epsilon} (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) + \sum_{l=1}^t (\gamma_{\epsilon-t+l+1}^{N-1}, \gamma_{\epsilon-t+l+1}^{Ni})$. Observe que devemos ter $\gcd(N, \epsilon) = 1$, pois caso contrário teríamos $(0//N(i-1) + 1) = \emptyset$ e $D_0 = 0$. Vamos calcular o kernel e a imagem de D_0 . Seja $c_1 = m \left(\sum_{l=1}^{\epsilon} (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) \right) + \sum_{l=1}^t (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni})$. Então c_1 e gc_1 pertencem a $\text{Im } D_0$ e

$$\begin{aligned} c_1 - gc_1 &= m \sum_{l=1}^{\epsilon} (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) + \sum_{l=1}^t (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) - m \sum_{l=1}^{\epsilon} (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) - \sum_{l=2}^{t+1} (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) \\ &= (\gamma_1^{N-1}, \gamma_1^{Ni}) - (\gamma_{t+1}^{N-1}, \gamma_{t+1}^{Ni}) = (1 - g^t)(\gamma_1^{N-1}, \gamma_1^{Ni}). \end{aligned}$$

Como $\gcd(N, \epsilon) = 1$, temos também que $\gcd(t, \epsilon) = 1$. Isso implica que g^t gera C_ϵ e, conseqüentemente, $1 - g^t$ gera $\Delta(kC_\epsilon)$. Uma vez que $k(N-1//Ni)$ é isomorfo a kC_ϵ , concluímos que $\text{Im } D_0$ contém uma cópia de $\Delta(kC_\epsilon)$.

Seja ε o homomorfismo de aumento. Assim $\varepsilon(c_1) = N$ e se $\text{cark} \nmid N$, então $\text{Im } D_0$ contém propriamente $\Delta(kC_\epsilon)$. Neste caso, $\text{Im } D_0$ deve ser igual a $k(N-1//Ni)$. (Lembre que $\Delta(kC_\epsilon)$ tem co-dimensão 1). Se $\text{cark} \mid N$ então $\text{Im } D_0 = \Delta(kC_\epsilon)$ já que $c_1 \in \Delta(kC_\epsilon)$. Logo se $\text{cark} \nmid N$ então D_0 é injetiva. Se $\text{cark} \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{\epsilon}$, então $\ker D_0$ é unidimensional.

Resumindo as fórmulas obtidas, temos que se $N = m\epsilon + t$, onde $0 \leq t \leq \epsilon - 1$, então

$$\dim H^0(A) = \begin{cases} m + \epsilon & \text{se } t = 1 \\ m & \text{se } t = 0 \\ m + 1 & \text{se } t > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \dim H^1(A) = \begin{cases} m & \text{se } t = 0, 1 \\ m + 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

Dado $i \geq 1$, seja $C_i(N) = \#\{j; 0 \leq j \leq N-2, j \equiv ti \pmod{\epsilon}\}$. Se $\text{cark} \nmid N$ ou $Ni \not\equiv N-1 \pmod{\epsilon}$, então $\dim H^{2i}(A) = \dim H^{2i+1}(A) = C_i(N)$. Se $\text{cark} \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{\epsilon}$, então $\dim H^{2i}(A) = \dim H^{2i-1}(A) = C_i(N) + 1$.

Observe que podemos considerar a álgebra $A = \frac{k\mathbb{Z}_\epsilon}{J^N}$ da seguinte forma. Considere a álgebra $B = \frac{k[X]}{X^N}$ como uma álgebra $\frac{\mathbb{Z}}{\epsilon\mathbb{Z}}$ -graduada, onde X é homogêneo

de grau 1. A álgebra de recobrimento de B associada a essa graduação é então a álgebra A . A ação de $\frac{\mathbb{Z}}{e\mathbb{Z}}$ poderia ser utilizada para calcular os grupos de cohomologia. Junto com E.N. Marcos, E. Green e M. Bardzell, durante algumas discussões, mostramos que em geral se A é um recobrimento de B com grupo de recobrimento G , então o complexo que define a cohomologia de Hochschild é um G -módulo complexo. Concluimos também que a cohomologia de Hochschild é uma álgebra munida de uma ação de G . Acreditamos que isso justifica a utilização desse método para se determinar as fórmulas para as dimensões dos grupos de cohomologia das álgebras de ciclo truncadas. As mesmas fórmulas podem ser obtidas (com um pouco mais de trabalho) utilizando-se o mesmo método utilizado no caso de k -álgebras truncadas com $\text{cark} = 0$, na seção 2.2.

2.4 Aplicações

Nessa seção apresentamos algumas conseqüências dos teoremas obtidos nas seções 2.2 e 2.3. O resultado principal afirma que a k -álgebra $H^\bullet(A)$, onde A é uma álgebra truncada com $\text{cark}=0$ tem dimensão finita se e somente se a aljava Q não tem circuitos orientados.

Proposição 2.4.1 *Se Q é uma aljava sem circuitos orientados e $\text{cark}=0$, então*

$$\dim_k H^1(A) = 1 - \#Q_0 + \sum_{\alpha \in Q_1} \nu(\alpha)$$

onde para cada $\alpha \in Q_1$, $\nu(\alpha) = \dim_k o(\alpha)At(\alpha)$.

Prova: Segue do teorema 2.2.1. ■

Observação : Observe que as álgebras hereditárias satisfazem as hipóteses da proposição 2.4.1, e desse modo generalizamos a fórmula obtida por Happel (veja [14]) para essas álgebras.

Proposição 2.4.2 *Se Q é um Z_e -ciclo com $e > 3$, $e - 2 < N < e$, e se $\text{cark} \nmid N$, então*

$$\dim_k H^0(A) = \dim_k H^1(A) = 1$$

e para $i \geq 1$,

$$\dim_k H^{2i+1}(A) = \dim_k H^{2i}(A) = 1$$

se $Ni \equiv t(e)$ com $0 \leq t \leq N - 2$, e

$$H^{2i+1}(A) = H^{2i}(A) = \{0\}$$

se $Ni \equiv t(e)$ com $N - 1 \leq t \leq e - 1$.

Prova: É uma consequência do teorema 2.2.2. Nesse caso temos que se $0 \leq j \leq N-1$ então $(j//0) \neq \emptyset$ se e somente se $j = 0$, e $(j//1) \neq \emptyset$ se e somente se $j = 1$, uma vez que todo caminho paralelo a um vértice ou uma flecha tem comprimento maior ou igual a N . Logo $\dim_k H^1(A) = 1$.

Além disso, é fácil ver que se $Ni \equiv t \pmod{\epsilon}$, com $0 \leq t \leq m-1$, então $C_i = 1$ se e somente se $0 \leq t \leq N-2$ e $C_i = 0$ se e somente se $N-1 \leq t \leq m-1$. ■

Proposição 2.4.3 *Se Q é um Z_1 -ciclo, isto é, Q é um laço, e $\text{cark} = 0$, então*

$$H^0(A) = A$$

e para $i \geq 1$,

$$\dim_k H^i(A) = N - 1.$$

Se $\text{cark} \neq 0$ então $\dim_k H^i(A) = N$ para todo $i \geq 0$.

Teorema 2.4.1 *Se $\text{cark} \neq 0$, então a k -álgebra $H^\bullet(A)$ tem dimensão finita se e somente se Q é uma aljava sem circuitos orientados.*

Prova: Se Q é uma aljava sem circuitos orientados, então A tem dimensão global finita. Logo $H^\bullet(A)$ tem dimensão finita.

Suponha que Q tem circuitos orientados. Observe primeiramente que se Q é um Z_e -ciclo, então dado $i \geq 1$, $\dim_k H^{2i+1}(A) = \dim_k H^{2i}(A) = C_i$ onde $C_i = \#\{j/0 \leq j \leq N-2 \text{ e } j \equiv Ni \pmod{\epsilon}\}$. Assim se tomamos $i = xe$, para $x \geq 1$, então $C_i \neq 0$ desde que $0 \equiv Nxe = Ni \pmod{\epsilon}$. Portanto, se Q é um Z_e -ciclo então $H^{2xe+1}(A)$ e $H^{2xe}(A)$ são não nulos para todo $x \geq 1$, e $H^\bullet(A)$ não tem dimensão finita. Agora suponha que Q não é um Z_e -ciclo, mas possui um ciclo orientado C com comprimento ϵ . Podemos também supor, sem perda de generalidade, que C tem comprimento minimal. Então para todo $x \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} \dim_k H^{2xe+1}(A) &= \sum_{j=1}^{N-1} \#(j//Nxe+1) - \sum_{j=0}^{N-1} [\#(j//Nxe) - \#\{j - \text{extremas}\}] = \\ &= \#(1//Nxe+1) - \#(0//Nxe) + \sum_{j=2}^{N-1} \#(j//Nxe+1) - \dim_k \text{Im}(D_1, \dots, D_{N-2}) \geq \\ &\geq \#(1//Nxe+1) - \#(0//Nxe). \end{aligned}$$

onde as aplicações $D_j : k(j//Nxe) \rightarrow k(j+1//Nxe+1)$ para $1 \leq j \leq N-2$ são definidas no lema 2.1.2. Seja F a aplicação

$$F : (0//Nxe) \rightarrow (1//Nxe+1)$$

dada por $F(o(p), p) = ({}^1p, p({}^1p))$, para todo $(o(p), p) \in (0//Nx\epsilon)$. É fácil verificar que F é injetiva. Vamos mostrar que F não é sobrejetiva. Para isso fixe $(o(p), p) \in (0//Nx\epsilon)$. Desde que Q não é um $Z_{Nx\epsilon}$ -ciclo, existe uma flecha β , diferente das flechas de p , começando ou terminando em algum vértice de p . Suponha, sem perda de generalidade, que β começa em $o(p)$.

Temos então que $(\beta, p\beta) \in (1//Nxe + 1)$, mas $(\beta, p\beta) \notin \text{Im } F$, uma vez que $\beta \neq 1p$. Assim, F não é sobrejetiva, e $\#(1//Nxe + 1) > \#(0//Nxe)$. Portanto,

$$\dim_k H^{2re+1}(A) \neq 0$$

para todo $x \geq 1$, e $H^\bullet(A)$ não tem dimensão finita.

Observe que esse resultado prova a conjectura da dimensão homológica no caso em que A é k -álgebra truncada onde k é um corpo com característica zero, uma vez que para esse tipo de álgebras, a dimensão global é finita se e somente se a aljava Q não possui circuitos orientados.

Capítulo 3

O Produto de Yoneda em $H^\bullet(A)$

Nesse capítulo apresentamos uma nova descrição para o produto de Yoneda em $H^\bullet(A)$, onde A é uma k -álgebra truncada, onde k é um corpo com característica zero, e $N > 2$. Para isso introduzimos um produto em $P = \coprod_{i \geq 0} P_i^*$, denotado por $\vee$, e mostramos que esse produto está ainda bem definido em $H^\bullet(A)$. No caso particular em que A é uma álgebra de ciclo truncada, esse produto está bem definido para qualquer que seja a característica do corpo k . Finalmente mostramos que o produto definido coincide com o produto de Yoneda.

3.1 Um Produto em $H^\bullet(A)$

Seja $A = \frac{kQ}{I}$ uma álgebra monomial. Seja $E(A) = \coprod_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A/r, A/r)$, onde r é o radical de Jacobson da álgebra A . Sabemos que $E(A)$ possui uma base multiplicativa dada pelos conjuntos de caminhos associados, $AP(i)$ para $i \geq 0$ (vide [12]). A álgebra A também possui uma base multiplicativa B dada pela base de Groebner de A (vide [12]), que nesse caso consiste dos monômios que não estão em I .

Considere $\Lambda = A * E(A)$ o k -espaço vetorial com base o conjunto de pares $(\gamma, p) \in B \times \coprod_{i \geq 0} AP(i)$ tais que γ é paralelo a p . Defina em Λ um produto dado por

$$(\gamma, p) \vee (\sigma, q) = \begin{cases} (\gamma\sigma, pq), & \text{se } \gamma\sigma \in B \text{ e } pq \in AP(\cdot) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

nos elementos da base, e estendido por linearidade.

Note que esse produto é associativo. De fato, dados $(\gamma, p), (\sigma, q), (\delta, r)$ elementos da base de Λ , temos

$$\begin{aligned}
e \quad & [(\gamma, p) \vee (\sigma, q)] \vee (\delta, r) = \begin{cases} (\gamma\sigma\delta, pqr) , & \text{se } pq, pqr \in AP(.), \text{ e } \gamma\sigma, \gamma\sigma\delta \in B \\ 0 , & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
& (\gamma, p) \vee [(\sigma, q) \vee (\delta, r)] = \begin{cases} (\gamma\sigma\delta, pqr) , & \text{se } qr, pqr \in AP(.), \text{ e } \sigma\delta, \gamma\sigma\delta \in B \\ 0 , & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Desde que as bases são multiplicativas, segue que o produto é associativo.

Observação : Observe que deste modo podemos definir um produto associativo em $A * B$ sempre que A e B forem quocientes de álgebras de quiver com o mesmo número de vértices e com base multiplicativa. Esse assunto está sendo explorado por E. Green e E. N. Marcos.

É fácil também verificar que $\sum_{i=1}^{|Q_0|} (e_i, e_i)$ é o elemento unidade para esse produto. Portanto temos definida em Λ uma estrutura de k -álgebra dada pelo produto $\vee$.

Considere agora $A = \frac{kQ}{J^N}$, onde $N > 2$, uma álgebra truncada. É claro que Λ é isomorfa a $\coprod_{i \geq 0} P_i^* = \coprod_{i \geq 0} \coprod_{j=0}^{N-1} k(j//AP(i))$, como espaços vetoriais. Logo temos definida em $P = \coprod_{i \geq 0} P_i^*$ uma estrutura de k -álgebra.

A primeira implicação que temos para o caso de álgebras truncadas é a seguinte:

Lema 3.1.1 *Se A é uma álgebra truncada, o produto de dois elementos de grau ímpar em P é zero.*

Prova: Sejam $(\gamma, p) \in P_{2i+1}^*$ e $(\sigma, q) \in P_{2j+1}^*$. Então sabemos que $l(p) = Ni + 1$ e $l(q) = Nj + 1$, logo $l(pq) = N(i + j) + 2$. Mas se $N > 2$, isso implica que pq não pertence a nenhum $AP(.)$. Portanto $(\gamma, p) \vee (\sigma, q) = 0$. ■

Suponha que o corpo k tem característica zero. Vamos mostrar que nesse caso o produto definido acima ainda está bem definido em $H^\bullet(A)$.

A primeira estratégia tentada foi provar que, dados $(\gamma, p) \in P_i^*$ e $(\sigma, q) \in P_j^*$, a fórmula

$$\phi_{i+j+1}^*((\gamma, p) \vee (\sigma, q)) = \phi_{i+1}^*(\gamma, p) \vee (\sigma, q) + (-1)^j (\gamma, p) \vee \phi_{j+1}^*(\sigma, q)$$

é válida, seguindo o que foi feito por Gerstenhaber em [10] para o produto cup. Através dessa fórmula seria possível mostrar facilmente que o produto $\vee$ está bem definido no anel de cohomologia de A . Contudo, essa fórmula não é válida para a resolução projetiva que utilizamos, como mostra o contra-exemplo abaixo.

Exemplo: Sejam $N = 3$ e Q a aljava

Considere a álgebra truncada $A = \frac{kQ}{J^N}$, onde J é o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas. Seja $\lambda = (v, p) \in P_5^*$, onde p é o ciclo $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_7$, e $\delta = (w, r) \in P_3^*$, onde r é o ciclo $\beta_1\cdots\beta_4$. Então temos que $\lambda \vee \delta = 0$, pelo lema anterior. Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \phi_6^*(\lambda) \vee \delta - \lambda \vee \phi_4^*(\delta) &= \left[\sum_{l(sq)=2} (sq, spq) \right] \vee \delta - \lambda \vee \left[\sum_{l(s'q')=2} (s'q', s'r'q') \right] = \\ &= \sum_{l(sq)=2} (sqw, spqr) - \sum_{l(s'q')=2} (vs'q', ps'r'q') \end{aligned}$$

Então na coordenada $u = spqr = \alpha\alpha_1\cdots\alpha_7\beta_1\cdots\beta_4$, isto é, $s = \alpha$ e $q = \beta$, temos o par $(\alpha\beta, u) \neq 0$. Logo a fórmula não é válida.

A estratégia utilizada então foi mostrar diretamente que o conjunto $K = \coprod_{i \geq 0} \ker \phi_i^*$ é um subanel do anel P (munido do produto $\vee$), e que $Im = \coprod_{i \geq 0} Im \phi_i^*$ é um ideal bilateral de K .

Proposição 3.1.1 *Seja $A = \frac{kQ}{J^N}$ onde k é um corpo com característica zero. Então $K = \coprod_{i \geq 1} \ker \phi_i^*$ é um subanel de P .*

Prova: Sejam

$$x = \sum_l a_l(\gamma_l, p_l) \in \ker \phi_i^* \text{ e } y = \sum_m b_m(\sigma_m, q_m) \in \ker \phi_j^*$$

onde $i, j \geq 1$. Se i e j são pares, então $x \in P_{i-1}^*$ e $y \in P_{j-1}^*$. Nesse caso, pelo lema anterior, temos que $x \vee y = 0$. Logo $x \vee y \in K$. Se i é par e j é ímpar, então $\gamma_l \in radA$ para todo l . Logo temos que $\gamma_l \sigma_m \in radA$ para todo l e todo m , e portanto pertence a $\ker \phi_{i+j-1}^*$. O caso i par e j ímpar é análogo. Agora se i e j são ímpares, podemos então considerar $x \in \ker D_t$ e $y \in \ker D_s$ para algum t e algum s , $1 \leq t, s \leq N-1$. Sabemos que para cada l , $1 \leq l \leq N-1$, uma base

para $\ker D_l$ é dada pelas somas dos elementos pertencentes as j -extremas. Podemos então escrever $x = \sum_l a_l E_l$, $y = \sum_m b_m E'_m$ onde cada E_l é soma dos elementos de uma t -extrema, e cada E'_m é soma dos elementos de uma s -extrema. Assim temos

$$x \vee y = \sum_{l,m} a_l b_m E_l \vee E'_m.$$

Se $t + s \geq N$, então $E_l \vee E'_m = 0$ para todo l, m . Se $t + s = N - 1$, como $D_{N-1} = 0$, segue que $x \vee y \in \ker \phi_{i+j-1}^*$. Agora se $1 \leq t + s \leq N - 2$, então note que para cada l e cada m , podemos reagrupar os somandos de $E_l \vee E'_m$ de forma a obtermos somas de $(t + s)$ -extremas. De fato, sejam (γ, p) um somando de E_l , e (σ, q) um somando de E'_m . Um transladado de $(\gamma, p) \vee (\sigma, q) = (\gamma\sigma, pq)$ é ainda um somando de $E_l \vee E'_m$. De fato, se $(\alpha\gamma\sigma', \alpha pq')$ onde α é uma flecha, é um $+$ movimento de $(\gamma\sigma, pq)$ (esse movimento existe sempre que $o(p)$ não é fonte, uma vez que $o(q)$ não é fonte e (σ, q) pertence a uma m -extrema),

então $(\alpha\gamma\sigma', \alpha pq') = (\delta\gamma^1\sigma, rp^1q)$, onde (δ, r) é um transladado de (γ, p) , e $(\gamma^1\sigma, p^1q)$ é transladado de (σ, q) , pois $\gamma^1 = p^1$ uma vez que (γ, p) pertence a uma extrema e $o(\gamma) = o(p)$ não é fonte. Logo é ainda um somando de $E_l \vee E'_m$. O mesmo raciocínio pode ser feito para $-$ movimentos. Além disso, a classe de $(\alpha\gamma\sigma', \alpha pq')$ é uma $(t + s)$ -extrema, pois caso contrário, ou (γ, p) ou (σ, q) não seria extrema. Dessa forma, $x \vee y$ pode ser escrito como combinação linear de $(t + s)$ -extremas e portanto pertence a $\ker \phi_{i+j-1}^*$. ■

Proposição 3.1.2 *Seja $A = \frac{kQ}{J^N}$, onde k é corpo com característica zero. Então $Im = \coprod_{i \geq 1} Im \phi_i^*$ é um ideal bilateral de K .*

Prova: Sejam

$$x = \sum_l a_l (\gamma_l, p_l) \in Im \phi_i^* \subset P_i^* \text{ e } y = \sum_m b_m (\sigma_m, q_m) \in \ker \phi_j^* \subset P_{j-1}^*$$

para $i, j \geq 1$. Vamos mostrar que $x \vee y$ e $y \vee x$ ainda pertencem a Im . Suponha inicialmente que i é ímpar. Nesse caso podemos supor que $x \in Im D_v$ para algum v , $0 \leq v \leq N - 1$. Se j é par, então pelo lema 3.1.1, temos $x \vee y = 0 \in Im$. Se j é

ímpar, podemos supor que $y \in \ker D_u$ para algum $0 \leq u \leq N - 1$. Se $u = N - 1$, então $x \vee y = 0 \in Im$, pois $l(\gamma_l) \geq 1$, para todo l , e $l(\sigma_m) = N - 1$, para todo m . Suponha então $1 \leq u \leq N - 2$ (o caso $u = 0$ é eliminado já que D_0 é injetiva quando característica de k é zero). Podemos escrever

$$y = \sum_s b_s E_s$$

onde E_s é soma dos elementos de uma u -extrema. Também, sabemos que existe $z = \sum_l c_l(\delta_l, r_l)$ tal que

$$x = D_v(z) = \sum_l \sum_{\alpha \in Q_1} c_l [(\alpha \delta_l, \alpha r_l) - (\delta_l \alpha, r_l \alpha)]$$

Então

$$x \vee y = \sum_{l,s} c_l b_s \sum_{\alpha \in Q_1} [(\alpha \delta_l, \alpha r_l) \vee E_s - (\delta_l \alpha, r_l \alpha) \vee E_s].$$

Mas observe que para cada s , $E_s \in \ker D_u$ implica que $\sum_{\alpha \in Q_1} \alpha E_s = \sum_{\alpha \in Q_1} E_s \alpha$. Desse modo, fixando l e s , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha \delta_l, \alpha r_l) \vee E_s - \sum_{\alpha \in Q_1} (\delta_l \alpha, r_l \alpha) \vee E_s = \\ & = \sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha \delta_l, \alpha r_l) \vee E_s - \sum_{\alpha \in Q_1} (\delta_l, r_l) \vee E_s \alpha = D_{v+u} [(\delta_l, r_l) \vee E_s]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$x \vee y = \sum_{l,s} c_l b_s D_{v+u} [(\delta_l, r_l) \vee E_s] \in Im.$$

Suponha agora que i é par. Nesse caso temos que $l(\gamma_t) = N - 1$, para todo t . Se j é par, então $l(\sigma_m) \geq 1$, para todo s . Logo $x \vee y = 0 \in Im$. Se j é ímpar, podemos supor $y \in \ker D_u$ para algum $1 \leq u \leq N - 1$. Novamente temos $x \vee y = 0 \in Im$. ■

Temos provado então que o produto $\vee$ definido em P está ainda bem definido no quociente $H^\bullet(A) = \coprod_{i \geq 0} \frac{\ker \phi_{i+1}^*}{\text{Im } \phi_i^*}$. Ou seja, temos definida em $H^\bullet(A)$ uma estrutura de k -álgebra.

3.2 O caso particular $Q = Z_e$

Provamos na seção anterior que se o corpo k tem característica zero então o produto $\vee$ induz um produto associativo em $H^\bullet(A)$. Vamos mostrar nessa seção que

no caso particular onde $Q = Z_e$, esse produto está bem definido em $H^\bullet(A)$ independentemente da característica do corpo k .

Para o restante dessa seção, estaremos considerando $A = \frac{kZ_e}{jN}$, onde k é um corpo sem restrições sobre a característica. Lembre que, como vimos na seção 2.3, nesse caso as aplicações ϕ_i^* com i ímpar não dependem da característica de k . No entanto as aplicações ϕ_i^* com i par dependem da característica de k e possuem kernel e imagem diferentes do caso $\text{car}k=0$ quando $\text{car}k$ divide N e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$.

Proposição 3.2.1 *Seja A como acima. Então $K = \sum_{i \geq 1} \ker \phi_i^*$ é um subanel de $P_\bullet^*$.*

Prova: Seja $x \in \ker \phi_i^*$ e $y \in \ker \phi_l^*$ para $i, l \geq 1$. Como as aplicações ímpares não dependem da característica de k , a demonstração segue análoga ao caso $\text{car}k=0$ exceto no caso em que i ou l é par, pois no caso em que i e j são ambos pares, temos $x \vee y = 0$. Suponha então i par e l ímpar. Nesse caso, $\ker \phi_i^*$ só é diferente do caso $\text{car}k=0$ se temos $\text{car}k \mid N$ e $(0//AP(i-1)) \neq \emptyset$, logo esse é o único caso que precisamos considerar. Podemos escrever $x = x_0 + x_1$ onde $x_0 \in k(0//AP(i-1))$ e $x_1 \in \coprod_{j=1}^{N-1} k(j//AP(i-1))$. Desde que $x_1 \in \ker \phi_i^*$ devemos ter $x_0 \in \ker \phi_i^*$ também. Logo podemos supor que $x \in k(0//AP(i-1))$ e escrever $x = a \sum_{t=1}^e (v_t, p_t)$ onde a é um elemento não nulo de k . Se escrevermos $y = y_0 + y_1$ onde $y_0 \in k(0//AP(l-1))$ e $y_1 \in \sum_{j=1}^{N-1} k(j//AP(l-1))$, então temos $x \vee y = x \vee y_0 + x \vee y_1$. Como $x \vee y_1 \in \sum_{j=1}^{N-1} k(j//AP(i+l-2))$ segue que $x \vee y_1 \in \ker \phi_{i+l-1}^*$. Escrevendo $y_0 = \sum_{t=1}^e b(v_t, q_t)$, onde $b \in k$, temos $x \vee y_0 = \sum_{t=1}^e ab(v_t, p_t q_t) \in \ker D_0$. Logo $x \vee y \in \ker \phi_{i+l-1}^*$. O caso em que i é ímpar e l é par segue análogo. ■

Proposição 3.2.2 *Sob as mesmas hipóteses, $\text{Im} = \sum_{i \geq 1} \text{Im} \phi_i^*$ é um ideal bilateral de K .*

Prova: Seja $0 \neq x = \sum_t a_t(\gamma_t, p_t) \in \text{Im} \phi_i^* \subseteq P_i^*$ and $0 \neq y = \sum_s b_s(\sigma_s, q_s) \in \ker \phi_l^* \subseteq P_{l-1}^*$ para $i, l \geq 1$. Vamos mostrar que $x \vee y$ e $y \vee x$ estão em Im . Novamente não precisamos nos preocupar com o caso i e j ambos ímpares. A demonstração para i ímpar e l par é análoga à feita na proposição 3.1.2, desde que nesse caso $x \vee y = 0$. Suponha então que i é par. Então $x \in k(N-1//AP(i))$ e existe $z \in k(0//AP(i-1))$ tal que $x = \phi_i^*(z)$. Podemos assumir $z = (v_j, \gamma_j^{(i-1)})$ e escrever $x = \sum_{n=1}^e c_n(\gamma_n^{N-1}, \gamma_n^{(i)})$, onde $c_n = \begin{cases} m+1 & \text{se } j-t+1 \leq n \leq j \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Se l é par, podemos supor $y \in k(0//AP(l-1))$ como na proposição anterior. Se $\text{car } k \nmid N$, então $y = 0$ e $x \vee y = 0 \in Im$. Agora se $\text{car } k \mid N$, então podemos escrever $y = \sum_{s=1}^{\epsilon} (v_s, \gamma_s^{(l-1)})$ e assim $x \vee y = \sum_{n=1}^{\epsilon} c_n (\gamma_n^{N-1}, \gamma_n^{(i)} \gamma_{n+N-1}^{(l-1)}) = \sum_{n=1}^{\epsilon} c_n (\gamma_n^{N-1}, \gamma_n^{(i+l-1)})$. Mas $\sum_{n=1}^{\epsilon} c_n = t(m+1) + (\epsilon-t)m = m\epsilon + t = N$ e, como $\text{car } k \mid N$, temos $\sum_{n=1}^{\epsilon} c_n = 0$. Uma vez que $i+l-1$ é ímpar, segue então que $x \vee y \in Im\phi_{i+l-1}^*$. Portanto $x \vee y \in Im$.

Se l é ímpar, podemos supor $y \in \ker D_j^l$ para algum $0 \leq j \leq N-1$. Se $j \geq 1$, temos $x \vee y = 0$ uma vez que $x \in k(N-1//AP(i))$. Suponha então que $y \in \ker D_0^l$ e escreva $y = \sum_{s=1}^{\epsilon} (v_s, \gamma_s^{l-1})$. Temos então $x \vee y = \sum_{s=1}^{\epsilon} c_s (\gamma_s^{N-1}, \gamma_s^{(i+l-1)})$ e como sabemos que

$$c_n = \begin{cases} m+1 & \text{se } j-t+1 \leq n \leq j \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$$

segue que $x \vee y = \phi_{i+l-1}^*(v_j, \gamma_j^{(i+l-2)})$. Logo $x \vee y \in Im$.

Um argumento análogo mostra que $y \vee x \in Im$. ■

Temos provado então que se $Q = Z_{\epsilon}$, temos definido em $H^{\bullet}(A)$ uma estrutura de k -álgebra, independentemente da característica do corpo k .

3.3 $\vee$ é o produto de Yoneda

Vamos provar nessa seção que o produto definido na seção anterior coincide com o produto de Yoneda, no caso de álgebras truncadas com $\text{car } k=0$, ou no caso de álgebras de ciclo truncadas em geral.

Denote por $H^i(A, -)$ o funtor

$$H^i(A, -) : A^{\epsilon} - \text{mod} \rightarrow Ab$$

$$H^i(A, M) = \text{Ext}_{A^{\epsilon}}^i(A, M)$$

onde Ab denota a categoria dos grupos abelianos. Dado $i \geq 0$ e $F = \sum_{p \in AP(i)} a_p \overline{(\gamma_p, p)} \in H^i(A, A)$, considere a aplicação de funtores

$$F \vee - : H^0(A, -) \rightarrow H^i(A, -)$$

onde para cada $M \in A^{\epsilon} - \text{mod}$,

$$(F \vee -)_M : H^0(A, M) \rightarrow H^i(A, M)$$

$$(F \vee -)_M \left[\overline{(\sigma_v, v)} \right] = F \vee \overline{(\sigma_v, v)}$$

Não é difícil verificar que $(F \vee -)_M$ é uma aplicação entre funtores bem definida, e não depende do representante escolhido para F . A propriedade universal de funtores derivados assegura que existe uma única aplicação entre funtores de cohomologia $F \vee - : H^m(A, -) \rightarrow H^{m+i}(A, -)$ que estende a componente de grau zero.

Da mesma forma se denotamos o produto de Yoneda em $H^\bullet(A)$ por $\sim$, então

$$F \sim - : H^m(A, -) \rightarrow H^{m+i}(A, -)$$

é a única aplicação de funtores de cohomologia estendendo a componente de grau zero $F \sim - : H^0(A, -) \rightarrow H^m(A, -)$.

Queremos provar que no caso particular onde $M = A$, o produto $\vee$ coincide com o produto de Yoneda. Para isso, usando a propriedade universal de funtores derivados, é suficiente mostrar que para cada $F \in H^i(A)$, as aplicações $F \vee -$ e $F \sim -$ coincidem em grau zero.

Lembre que dados $f \in \ker \phi_{n+1}^* \subset \text{hom}_{A^e}(P_n, A)$, e $g \in \ker \phi_1^* \subset \text{hom}_{A^e}(P_0, A)$, o produto de Yoneda das classes $\bar{f}$ e $\bar{g}$ é dado pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_n & \xrightarrow{\phi_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{\phi_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\phi_2} & P_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0 & \searrow g \\ \downarrow y_n & & \downarrow y_{n-1} & & & & \downarrow y_1 & & \downarrow y_0 & \\ P_n & \xrightarrow{\phi_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{\phi_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\phi_2} & P_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0 & \longrightarrow A \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde as aplicações y_i são levantamentos de g . Então $\bar{f} \sim \bar{g} = \overline{f \circ y_n}$. (vide [10])

No caso de álgebras truncadas, as aplicações y_i podem ser definidas por

$$y_i : P_i \rightarrow P_i$$

$$y_i(o(p) \otimes t(p)) = o(p) \otimes g(t(p) \otimes t(p))$$

para todo $p \in AP(i)$. É fácil verificar que essas aplicações são levantamentos de g , uma vez que $g \in \ker \phi_1^*$ implica que para todo $\alpha \in Q_1$,

$$g \circ \phi_1 [o(\alpha) \otimes t(\alpha)] = g[\alpha \otimes t(\alpha) - o(\alpha) \otimes \alpha] = \alpha g(t(\alpha) \otimes t(\alpha)) - g(o(\alpha) \otimes o(\alpha))\alpha = 0$$

isto é, para todo $\alpha \in Q_1$, $\alpha g(t(\alpha) \odot t(\alpha)) = g(o(\alpha) \odot t(\alpha))\alpha$. Então temos

$$\begin{aligned}
\mu^{-1} \circ \pi(f \sim g) &= \mu^{-1} \circ \pi(f \circ y_i) = \sum_{p \in AP(i)} (f \circ y_i(o(p) \odot t(p)), p) = \\
&= \sum_{p \in AP(i)} (f(o(p) \odot g(t(p) \odot t(p))), p) = \\
&= \sum_{p \in AP(i)} (f(o(p) \odot t(p))g(t(p) \odot t(p)), p) = \\
&= \sum_{p \in AP(i)} (f(o(p) \odot t(p)), p) \vee \sum_{v \in Q_0} (g(v \odot v), v) = \\
&= \mu^{-1} \circ \pi(f) \vee \mu^{-1} \circ \pi(g).
\end{aligned}$$

Desse modo vemos que os produtos $\vee$ e $\sim$ correspondem via o isomorfismo $\mu \circ \pi$. Assim as aplicações $\bar{f} \vee _$ e $\bar{f} \sim _$ coincidem em grau zero, e portanto $\vee$ é o produto de Yoneda em $H^\bullet(A)$.

Capítulo 4

A estrutura de $H^\bullet(A)$ para $A = \frac{kZ_e}{JN}$

Nesse capítulo estudamos a estrutura de anel de $H^\bullet(A)$ no caso em que $A = \frac{kZ_e}{JN}$, onde Z_e é um ciclo com e vértices, e $N > 2$. Usamos a descrição dada para o produto de Yoneda no capítulo anterior para provar que sob essas hipóteses o anel $H^\bullet(A)$ é uma k -álgebra finitamente gerada de dimensão infinita. Usamos ainda os resultados obtidos no capítulo 2 para mostrar que essas álgebras não são derivadamente equivalentes a menos que sejam isomorfas.

4.1 A estrutura de anel de $H^\bullet(A)$

Nessa seção apresentamos a estrutura de anel de $H^\bullet(A)$ para $A = \frac{kZ_e}{JN}$. Para isso, determinamos um grupo de geradores de $H^i(A)$ para $i \geq 0$, e então determinamos a estrutura de anel apresentando os geradores de $H^\bullet(A)$ e relações. Em particular, provamos que para essas álgebras, o anel de cohomologia é sempre finitamente gerado e comutativo. Para outra apresentação para esse anel, veja [8].

Nessa seção vamos determinar k -bases de classes de equivalência para os grupos de cohomologia. A fim de simplificar a notação, usaremos um representante de cada classe de equivalência para denotá-la. Ao longo dessa seção, se x é um número racional então $[x]$ estará denotando o menor inteiro maior que x .

Proposição 4.1.1 *Se $A = \frac{kZ_e}{JN}$ com $N > 2$, então $H^0(A)$ tem k -base*

$$B = \left\{ \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{ae}, v_l); 0 \leq a \leq \left[\frac{N-2}{e} \right] \right\}$$

se $N \not\equiv 1 \pmod{e}$ ou

$$B \cup \left\{ (\gamma_l^{N-1}, v_l), 1 \leq l \leq e \right\}$$

se $N \equiv 1 \pmod{e}$.

Prova: É uma consequência imediata do fato de que $H^0(A) = \ker \phi_1^*$ e $(N-1//0) = \emptyset$ se $N \not\equiv 1 \pmod{e}$. ■

Proposição 4.1.2 Se $\text{car } k \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$, então

$$\left\{ \sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) : 0 \leq j \leq N-2, j \equiv N-1 \pmod{e} \right\} \cup \left\{ \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) \right\}$$

é uma base para $H^{2i}(A)$ para $i \geq 1$. Caso contrário temos que

$$\left\{ \sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) : 0 \leq j \leq N-2, j \equiv Ni \pmod{e} \right\}$$

é uma base de $H^{2i}(A)$ para $i \geq 1$.

Prova: Sabemos que

$$\ker \phi_{2i+1}^* = k \left\{ \sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) : 0 \leq j \leq N-1, j \equiv Ni \pmod{e} \right\} \amalg k(N-1//Ni).$$

Se $\text{car } k \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$, então temos que

$$\text{Im } \phi_{2i}^* = k \left\{ (\gamma_1^{N-1}, \gamma_1^{Ni}) - (\gamma_j^{N-1}, \gamma_j^{Ni}) : 2 \leq j \leq e \right\}.$$

Caso contrário, se $\text{car } k \nmid N$, então $\text{Im } \phi_{2i}^* = k(N-1//Ni)$. Se $\text{car } k \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$, é uma verificação direta que $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) \notin \text{Im } \phi_{2i}^*$. Desde que $H^{2i}(A) = \frac{\ker \phi_{2i+1}^*}{\text{Im } \phi_{2i}^*}$, o resultado segue. ■

Proposição 4.1.3 Se $\text{car } k \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$, então

$$\left\{ (\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) : 0 \leq j \leq N-2, j+1 \equiv 0 \pmod{e} \right\} \cup \left\{ \sum_{l=1}^e (v_l, \gamma_l^{N(i-1)+1}) \right\}$$

é uma base de $H^{2i-1}(A)$ para $i \geq 1$. Caso contrário temos que

$$\left\{ (\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) : 0 \leq j \leq N-2, j \equiv N(i-1) \pmod{e} \right\}$$

é a base desse espaço.

Prova: Sabemos que

$$\text{Im } \phi_{2i-1}^* = k\{(\gamma_l^{j+1}, \gamma_l^{N(i-1)+1}) - (\gamma_{l+1}^{j+1}, \gamma_{l+1}^{N(i-1)+1}) : 1 \leq l \leq e-1, \\ 0 \leq j \leq N-2, j \equiv N(i-1) \pmod{e}\}$$

Se $\text{car } k \mid N$ e $Ni \equiv N-1 \pmod{e}$, então

$$\ker \phi_{2i}^* = k \left\{ \sum_{l=1}^e (v_l, \gamma_l^{N(i-1)+1}) \right\} \amalg \left(\prod_{j=1}^{N-1} k(j//N(i-1)+1) \right).$$

Caso contrário, $\ker \phi_{2i}^* = \prod_{j=1}^{N-1} k(j//N(i-1)+1)$. Agora é fácil verificar que, para $1 \leq j \leq N-1$, $(\gamma_1^j, \gamma_1^{N(i-1)+1}) \notin \text{Im } \phi_{2i-1}^*$. ■

Agora estamos prontos para determinar os geradores do anel de cohomologia de Hochschild, bem como algumas relações.

Teorema 4.1.1 *Suponha que $N \leq e$ e considere $x = \sum_{l=1}^e (v_l, v_l)$, $y = (\alpha_1, \alpha_1)$, e $z_j = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni_j})$, onde i_j é o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_j \equiv j \pmod{e}$. Assim se $\text{car } k \nmid N$ ou $\text{car } k \mid N$ e $\text{mdc}(N, e) \neq 1$, então $H^\bullet(A)$ é gerado por $\{x, y, z_j : 0 \leq j \leq N-2\}$ e satisfaz as seguintes relações :*

$$y^2 = 0, z_j^{[N/j]} = 0, e z_j^a = z_{aj} \text{ se } 1 \leq aj \leq N-2 \text{ e } i_{aj} = ai_j \text{ para } 1 \leq j \leq N-2.$$

Prova: Desde que $N \leq e$, todos os grupos de cohomologia são unidimensionais. Assim x e y claramente geram $H^0(A)$ e $H^1(A)$, respectivamente. Para $i \geq 1$, $H^{2i}(A)$ é gerado por $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni})$, onde $Ni \equiv j \pmod{e}$, para $0 \leq j \leq N-2$. Para cada um desses j , seja i_j o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_j \equiv j \pmod{e}$. Note que se i é tal que $Ni \equiv 0 \pmod{e}$ e $i > i_0$, então temos $i = \lambda i_0 + i'$ com $0 \leq i' \leq i_0$. Assim, $Ni = N\lambda i_0 + Ni' \equiv 0 \pmod{e}$ e desde que $Ni_0 \lambda \equiv 0 \pmod{e}$ temos $Ni' \equiv 0 \pmod{e}$. Mas i_0 é o menor inteiro satisfazendo essa propriedade. Segue que $i' = 0$. Desse modo, $i = \lambda i_0$ e $e = \lambda i_0$. Note também que se i é tal que $Ni \equiv j \pmod{e}$, com $1 \leq j \leq N-2$ e $i > i_j$, podemos escrever $i = i_j + i'$ onde $i' \geq 1$. Então $Ni = Ni_j + Ni' \equiv j \pmod{e}$ e como $Ni_j \equiv j \pmod{e}$, temos que $Ni' \equiv 0 \pmod{e}$ e i' é um múltiplo de i_0 . Ou seja, $i = i_j + ai_0$. Agora se $H^{2i}(A) \neq 0$, então $Ni \equiv j \pmod{e}$ para algum $0 \leq j \leq N-2$. Como $H^{2i}(A)$ é gerado por $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni_j + Nai_0}) = z_0^a \vee z_j$ e $H^{2i+1}(A) \neq 0$ é gerado por $(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{Ni+1}) = z_0^a \vee z_j \vee y$, temos que $\{x, y, z_j : 0 \leq j \leq N-2\}$ gera $H^\bullet(A)$ como k -álgebra. Sabemos que o produto de elementos de grau ímpar é sempre zero. Em particular, $y^2 = 0$. Desde que caminhos de comprimento maior ou igual a N são zero, temos ainda que $z_j^{[N/j]} = 0$. É fácil ver que se $0 \leq j \leq N-2$, e se a é tal

que $1 \leq aj \leq N - 2$ com $i_{aj} = ai_j$, então devemos ter $z_j^a = z_{aj}$. ■

Corolário 4.1.1 *Se $N = e$ e $\text{cark} \nmid N$, então $H^\bullet(A)$ é isomorfo ao anel de polinômios $\frac{k[x,y,z]}{y^2}$*

Prova: Se $N = e$ então $i_0 = 1$ e $Ni \equiv 0 \pmod{e}$ para todo $i \geq 1$. ■

Teorema 4.1.2 *Suponha que $N \leq e$, $\text{cark} \mid N$, $e \text{ mdc}(N, e) = 1$ e seja I o menor inteiro tal que $N(I - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{e}$. Considere x, y , e z_j para $0 \leq j \leq N - 2$ como no teorema 4.1.1. Considere também $w = (v_1, \gamma_1^{N(I-1)+1}) \in H^{2I-1}(A)$, e $u = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{NI}) \in H^{2I}(A)$. Então $H^\bullet(A)$ é gerado pelo conjunto $\{x, y, z_j, w, u : 0 \leq j \leq N - 2\}$. Esses geradores satisfazem as relações descritas no teorema 4.1.1 e $u^2 = 0$, $u \vee y = u \vee z_j = 0$, $1 \leq j \leq N - 2$.*

Prova: Suponha $\text{cark} \mid N$. Como vimos no teorema 4.1.1, x, y , e z_j , para $0 \leq j \leq N - 2$, geram os grupos de cohomologia $H^{2i}(A)$ e $H^{2i-1}(A)$ para todo $i \geq 0$ tal que $Ni \equiv j \pmod{e}$. Se $\text{gcd}(N, e) \neq 1$, então não existe inteiro i tal que $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$ e assim $H^\bullet(A)$ é gerado por esses elementos. Se $\text{gcd}(N, e) = 1$ então existem inteiros i tal que $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$. Desde que $\text{cark} \mid N$ temos que, para esses i , $H^{2i}(A)$ e $H^{2i-1}(A)$ são não nulos. Pelas proposições 4.1.2 e 4.1.3, $H^{2i-1}(A)$ é gerado por $(v_1, \gamma_1^{N(i-1)+1})$ e $H^{2i}(A)$ é gerado por $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni})$. Seja I o menor inteiro tal que $NI \equiv N - 1 \pmod{e}$. Considere $w = (v_1, \gamma_1^{N(I-1)+1}) \in H^{2I-1}(A)$ e $u = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{NI}) \in H^{2I}(A)$. Da mesma forma que foi feito na prova do teorema 4.1.1, temos que se $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$ então $i = I + ai_0$ para algum inteiro $a \geq 0$. Assim, $H^{2i-1}(A)$ é gerado por $(v_1, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = (v_1, \gamma_1^{N(I-1)+1+Na i_0}) = w \vee z_0^a$. Além disso, $H^{2i}(A)$ é gerado por $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{Ni}) = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{N-1}, \gamma_l^{NI+Na i_0}) = u \vee z_0^a$. Segue que $\{x, y, z_j, w, u : 0 \leq j \leq N - 2\}$ gera $H^\bullet(A)$ como álgebra. Desde que todo caminho de comprimento maior ou igual a N é zero, é fácil verificar que esses elementos devem satisfazer as relações $u^2 = 0$ e $u \vee y = u \vee z_j = 0$ para $1 \leq j \leq N - 2$. ■

Teorema 4.1.3 *Suponha $N > e$, com $N \not\equiv 1 \pmod{e}$. Se $\text{cark} \nmid N$ ou se $\text{chark} \mid N$ e $\text{mdc}(N, e) \neq 1$, então $H^\bullet(A)$ é gerado por $\{x_0, x_1, y, z_r : 0 \leq r \leq e - 1\}$ onde $x_0 = \sum_{l=1}^e (v_l, v_l)$, $x_1 = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^e, v_l) \in H^0(A)$ e $y = (\alpha_1, \alpha_1) \in H^1(A)$. Aqui, para cada $0 \leq r \leq e - 1$, $z_r = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^r, \gamma_l^{Ni_r})$ com i_r o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_r \equiv r \pmod{e}$. Além disso, esses geradores satisfazem $x_1^m = 0$ se $N \equiv 0 \pmod{e}$; $x_1^{m+1} = 0$ se $N \not\equiv 0 \pmod{e}$; $y^2 = 0$, $z_r^{[N/r]} = 0$, e $z_r^a = z_{br}$ se $1 \leq br \leq e - 1$ e $i_{br} = bi_r$.*

Prova: Pela proposição 4.1.1, $H^0(A)$ tem k -base $\{\sum_{l=1}^e (\gamma_l^{a\epsilon}, v_l) : 0 \leq a \leq \lfloor \frac{N-2}{e} \rfloor\}$. Temos então que x_0 e x_1 geram $H^0(A)$. Para cada $i \geq 1$, $H^{2i}(A)$ tem k -base $\{\sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) : 0 \leq j \leq N-2, j \equiv Ni \pmod{e}\}$. Para cada r , com $0 \leq r \leq e-1$, seja i_r o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_r \equiv r \pmod{e}$. Para cada tal r , considere $z_r = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^r, \gamma_l^{Ni_r}) \in H^{2i_r}(A)$. Logo se $Ni \equiv r \pmod{e}$, onde $i > 0$, temos $i = i_r + a_r i_0$ para algum $a_r \geq 0$. Então $\sum_{l=1}^e (\gamma_l^r, \gamma_l^{Ni}) = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^r, \gamma_l^{Ni_r + Na_r i_0}) = z_r \vee z_0^{a_r}$. Se $0 \leq j \leq N-2$ e $j \equiv r \pmod{e}$ então $j = r + b_j e$ para algum $b_j \geq 0$. Assim,

$$\sum_{l=1}^e (\gamma_l^j, \gamma_l^{Ni}) = \sum_{l=1}^e (\gamma_l^{r+b_j e}, \gamma_l^{Ni_r + Na_r i_0}) = z_r \vee z_0^{a_r} \vee x_1^{b_j}.$$

Segue que x_1 e z_r , para $0 \leq r \leq e-1$, geram $H^{2i}(A)$ para $i \geq 1$. Para cada $i \geq 1$, $H^{2i-1}(A)$ tem base

$$\{(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) : 0 \leq j \leq N-2, j \equiv N(i-1) \pmod{e}\}.$$

Considere agora $y = (\alpha_1, \alpha_1) \in H^1(A)$. Note que se $0 \leq j \leq N-2$ e $j \equiv 0 \pmod{e}$, então $j = b_j e = b'_j i_0$ para algum $b'_j \geq 0$ (lembre que $e = \lambda i_0$). Então podemos escrever $(\gamma_1^{j+1}, \alpha_1) = (\gamma_1^{b'_j i_0 + 1}, \alpha_1) = y \vee x_1^{b'_j}$. Concluimos que y e x_1 geram $H^1(A)$.

Dado $i \geq 1$ tal que $N(i-1) \equiv r \pmod{e}$, para $0 \leq r \leq e-1$, podemos escrever $i-1 = i_r + a_i i_0$. Então

$$(\gamma_1^{r+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = (\gamma_1^{r+1}, \gamma_1^{Ni_r + Na_i i_0 + 1}) = z_r \vee z_0^a \vee y.$$

Como para cada j tal que $0 \leq j \leq N-2$, com $j \equiv N(i-1) \equiv r \pmod{e}$ temos $j = r + b_j e$ para algum $b_j \geq 0$, $(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = (\gamma_1^{r+b_j e+1}, \gamma_1^{Ni_r + Na_i i_0 + 1}) = z_r \vee z_0^a \vee y \vee x_1^{b_j}$. Segue que x_1 , y , e z_r , para $0 \leq r \leq e-1$, geram $H^{2i-1}(A)$ para todo $i \geq 1$. Concluimos que $\{x_0, x_1, y, z_r : 0 \leq r \leq e-1\}$ gera $H^\bullet(A)$ como álgebra. Desde que os caminhos de comprimento maior ou igual a N são zero, e o produto de elementos de grau ímpar é também zero, é fácil verificar que esses geradores satisfazem as relações acima. ■

Teorema 4.1.4 *Se $N > e$, $N \not\equiv 1 \pmod{e}$, $\text{cark} \mid N$, e $\text{mdc}(N, e) = 1$, então $H^\bullet(A)$ é gerado como álgebra pelo conjunto $\{x_0, x_1, y, z_r, w : 0 \leq r \leq e-1\}$ onde x_0, x_1, y, z_r são definidos como no teorema 4.1.3 e $w = (v_1, \gamma_1^{N(i_{N-1}-1)+1})$ com i_{N-1} o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_{N-1} \equiv N-1 \pmod{e}$. Além disso esses geradores satisfazem as mesmas relações descritas no teorema 4.1.3.*

Prova: A demonstração é similar à prova do último teorema, exceto para o caso $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$. Desde que $\gcd(N, e) = 1$, existem inteiros i tais que $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$. Para esses i , $H^{2i}(A)$ é gerado por z_R e x_1 onde $Ni \equiv N - 1 \equiv R \pmod{e}$ com $0 \leq R \leq e - 1$, e $H^{2i-1}(A)$ é gerado como espaço vetorial por $\left\{(\gamma_1^{j+1}, \gamma_1^{N(i-1)+1}) : 0 \leq j \leq N - 2, j + 1 \equiv 0 \pmod{e}\right\} \cup \left\{(v_1, \gamma_1^{N(i-1)+1})\right\}$. Como $j + 1 \equiv 0 \pmod{e}$ implica $j \equiv e - 1 \pmod{e}$, temos $(\gamma_1^e, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = y \vee z_{e-1} \vee z_0^a$ para algum $a \geq 0$. Podemos gerar o primeiro conjunto da união acima usando z_{e-1} , z_0 , y , e x_1 . No entanto não podemos gerar o último elemento a partir do conjunto $\{x_0, x_1, y, z_r : 0 \leq r \leq e - 1\}$. Considere então i_{N-1} o menor inteiro maior que zero tal que $Ni_{N-1} \equiv N - 1 \pmod{e}$. Seja $w = (v_1, \gamma_1^{N(i_{N-1}-1)+1})$. Assim $H^{2i_{N-1}-1}(A)$ é gerado por z_{e-1} , z_0 , y , x_1 , e w .

Agora se i é tal que $Ni \equiv N - 1 \pmod{e}$ então i pode ser escrito como $i = i_{N-1} + bi_0$ para algum $b \geq 0$. Podemos então escrever $(v_1, \gamma_1^{N(i-1)+1}) = (v_1, \gamma_1^{N(i_{N-1}-1)+1+Nbi_0}) = w \vee z_0^b$. Assim temos o conjunto gerador para $H^{2i-1}(A)$. ■

Em nosso último resultado damos uma apresentação para o anel de cohomologia de Hochschild de uma álgebra associada a uma árvore de Brauer. Na seção 1.5 apresentamos definições e exemplos de tais álgebras. Em [8] Holm mostrou que a cohomologia par de uma álgebra associada a uma árvore de Brauer é finitamente gerada. Podemos calcular os grupos de cohomologia de Hochschild de álgebras associadas a árvores de Brauer usando álgebras de ciclo truncadas, através do seguinte teorema de Rickard [23]. Seja $B(e, m) = kZ_e/J^{me+1}$.

Teorema 4.1.5 (Rickard) *Seja A uma álgebra de árvore de Brauer para uma árvore de Brauer T com e arestas e multiplicidade m . Então $H^i(A) \cong H^i(B(e, m))$ para todo $i \geq 0$.*

Usando esse resultado obtemos o anel de cohomologia para uma álgebra de Brauer.

Teorema 4.1.6 *Se $N > e$ e $N \equiv 1 \pmod{e}$ então a álgebra $H^*(A)$ é gerada por $\{x_0, x_1, \tilde{x}_j, y, z_r : 1 \leq j \leq e, 0 \leq r \leq e - 1\}$ se $\text{car } k \nmid N$ ou por $\{x_0, x_1, \tilde{x}_j, y, z_r, w : 1 \leq j \leq e, 0 \leq r \leq e - 1\}$ se $\text{car } k \mid N$. Aqui x_0, x_1, y, z_r , e w são descritos no teorema 4.1.3 e, para cada j com $1 \leq j \leq e$, $\tilde{x}_j = (\gamma_j^{N-1}, v_j) \in H^0(A)$. Além disso esses geradores devem satisfazer as relações descritas no teorema 4.1.3, e ainda $x_1 \vee \tilde{x}_j = y \vee \tilde{x}_j = z_r \vee \tilde{x}_j = 0$ para $1 \leq j \leq e$ e $1 \leq r \leq e - 1$. Também $x_j \vee x_{j'} = 0$ para $1 \leq j, j' \leq e$.*

Corolário 4.1.2 *Seja A uma álgebra associada a uma árvore de Brauer T com e arestas e multiplicidade m . Então*

- i) $\dim_k H^0(A) = m + e$*
 - ii) $\dim_k H^{2i}(A) = \dim_k H^{2i-1}(A) = m$ se $i \not\equiv 0 \pmod{e}$*
 - iii) Se $i \equiv 0 \pmod{e}$, então*
- $$\dim_k H^{2i}(A) = \dim_k H^{2i-1}(A) = \begin{cases} m + 1 & \text{se } \text{char } k \mid me + 1 \\ m & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4.2 Exemplos de Álgebras de Ciclos não Truncadas

Provamos nas seções anteriores que quando A é uma álgebra de ciclo truncada, o anel $H^\bullet(A)$ é sempre finitamente gerado. É natural então perguntar se esse anel é ainda finitamente gerado no caso em que A é uma álgebra de ciclo não truncada. A resposta a essa pergunta é não, e apresentamos a seguir exemplos que mostram essa afirmação.

Exemplo: Seja $Q = Z_5$ e $I = \langle a_1 a_2 a_3, a_2 a_3 a_4, a_4 a_5 a_1 \rangle$, e considere $A = \frac{kQ}{I}$. Os projetivos que apareçam na resolução projetiva minimal de A satisfazem $P_2 = P_5 = P_8 = \dots$, $P_3 = P_6 = P_9 = \dots$, e $P_4 = P_7 = P_{10} = \dots$. Também, $P_2^* = 0$, $P_3^* = kv_2 \oplus kv_4$, e $P_4^* = ka_1 \oplus ka_2 a_3 \oplus ka_4$. Assim os grupos de cohomologia de Hochschild de A são determinados a partir do seguinte complexo:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \prod_{i=1}^5 kv_i \xrightarrow{\phi_1^*} \prod_{i=1}^5 ka_i \xrightarrow{\phi_2^*} 0 \xrightarrow{\phi_3^*} kv_2 \oplus kv_4 \xrightarrow{\phi_4^*} ka_1 \oplus ka_2 a_3 \oplus ka_4 \\ \xrightarrow{\phi_5^*} 0 \xrightarrow{\phi_6^*} kv_2 \oplus kv_4 \xrightarrow{\phi_7^*} ka_1 \oplus ka_2 a_3 \oplus ka_4 \xrightarrow{\phi_8^*} 0 \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Usando as aplicações definidas em [3] vemos que $v_2 \xrightarrow{\phi_4^*} (a_1, a_2 a_3, 0)$ e $v_4 \xrightarrow{\phi_4^*} (0, a_2 a_3, a_4)$. Do mesmo modo, $v_2 \xrightarrow{\phi_7^*} (a_1, -a_2 a_3, 0)$ e $v_4 \xrightarrow{\phi_7^*} (0, a_2 a_3, -a_4)$. É fácil então checar que os grupos de cohomologia que são não nulos são $H^0(A)$ e $H^n(A)$ para $n \equiv 1 \pmod{3}$. Além disso, esses grupos não nulos têm dimensão 1. Isso significa que se $i, j > 0$, então $H^i(A) \vee H^j(A) \subseteq H^{i+j}(A) = 0$ desde que $i + j \not\equiv 1 \pmod{3}$. Ou seja, a multiplicação de elementos de grau não nulo é sempre zero. Segue então que $H^\bullet(A)$ não é finitamente gerado.

No exemplo acima, o anel de cohomologia não é finitamente gerado porque existem “espaços” entre os grupos de cohomologia não nulos. No entanto, mesmo no caso em que todos os grupos de cohomologia são não nulos, o anel de cohomologia pode não ser finitamente gerado, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Seja $A = kZ_e / \langle \gamma_1^{\epsilon+1} \rangle$. Lembre que $\gamma_1^{\epsilon+1}$ é o único caminho em Z_e de comprimento $\epsilon + 1$ começando no vértice v_1 . Então a resolução projetiva minimal de A como A^ϵ -módulo é dada por

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\phi_n} \cdots \xrightarrow{\phi_2} P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\pi} \Lambda \longrightarrow 0$$

onde $P_0 = \coprod_{i=1}^{\epsilon} Av \otimes vA$, $P_1 = \coprod_{i=1}^{\epsilon} Ao(a) \otimes t(a)A$, e $P_n = Av_1 \otimes v_2A$ para todo $n \geq 2$. Aqui π é a aplicação de multiplicação, $\phi_1(o(a) \otimes t(a)) = a \otimes t(a) - o(a) \otimes a$ para cada flecha a , $\phi_n(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes a_2a_3 \cdots a_1 + a_1a_2 \cdots a_\epsilon \otimes v_2$ se $n \geq 2$ é par, e $\phi_n(v_1 \otimes v_2) = -a_1a_2 \cdots a_\epsilon \otimes v_2 + v_1 \otimes a_2a_3 \cdots a_1$ se $n \geq 2$ é ímpar. Assim $P_n^* = v_1 \wedge v_2 = ka_1$ para cada $n \geq 2$. Então os grupos de cohomologia de Hochschild de A são determinados pelo complexo

$$\cdots \longrightarrow ka_1 \xrightarrow{\phi_{2n-1}^*} ka_1 \xrightarrow{\phi_{2n}^*} ka_1 \longrightarrow \cdots$$

Note que $\phi_{2n-1}^* = \phi_{2n}^* = 0$ para cada $n \geq 2$. Então $H^i(A) \cong \text{Hom}_{A^\epsilon}(P_i, A)$ é unidimensional para $i \geq 3$.

Agora seja $\eta \in \text{Hom}_{A^\epsilon}(P_i, A)$ para algum $i \geq 2$ com $\eta(v_1 \otimes v_2) = \alpha$. Defina $\bar{\eta}_i : P_i \longrightarrow P_0$ por $\bar{\eta}_i(v_1 \otimes v_2) = a_1 \otimes v_2$, $\bar{\eta}_{i+1} : P_{i+1} \longrightarrow P_1$ por $\bar{\eta}_{i+1}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1$, e $\bar{\eta}_{i+j} : P_{i+j} \longrightarrow P_j$ por $\bar{\eta}_{i+j}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1$.

Considere os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\phi_{i+1}} & P_i & & \\ \downarrow \eta_{i+1} & & \downarrow \eta_i & \searrow & \\ P_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0 & \longrightarrow & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_{i+j} & \xrightarrow{\phi_{i+j}} & P_{i+j-1} \\ \downarrow \eta_{i+j} & & \downarrow \eta_{i+j-1} \\ P_j & \xrightarrow{\phi_j} & P_{j-1} \end{array}$$

Para o diagrama da esquerda temos $\phi_1 \eta_{i+1}(v_1 \otimes v_2) = \phi_1(v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1) = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n$. Da mesma forma, $\eta_i \phi_{i+1}(v_1 \otimes v_2) = \eta_i(v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1 - \alpha_1 \cdots \alpha_\epsilon \otimes v_2) = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_\epsilon$, para i par. O caso i ímpar é análogo.

Logo o diagrama da esquerda comuta. Para o diagrama da direita, considere $\eta_{i+j-1} \phi_{i+j}(v_1 \otimes v_2) = \eta_{i+j-1}(v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1 - \alpha_1 \cdots \alpha_\epsilon \otimes v_2) = -\alpha_1 \cdots \alpha_\epsilon \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1$. Também, $\phi_j \eta_{i+j}(v_1 \otimes v_2) = \phi_j(v_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1) = -\alpha_1 \cdots \alpha_\epsilon \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_1$. Logo o diagrama da direita também comuta. Note que η_{i+j} não é um isomorfismo. Seja $\xi : P_i \longrightarrow A$ onde $\xi \neq 0$. Então $\xi \eta_{i+j} = \lambda \xi$ desde que $\dim \text{Hom}(P_i, A) = 1$. Assim $\xi(\eta_{i+j} - \lambda I) = 0$.

Agora $\eta_{i+j} \in \text{rad End}(P_{i+j})$. Se $\lambda \neq 0$ então $\eta_{i+j} - \lambda$ é invertível, logo devemos ter $\lambda = 0$. Isso implica que $\xi \eta_{i+1} = 0$. Repetindo o argumento temos que $H^i(A) \vee$

$H^j(A) = 0$ para $i, j \geq 1$. Observe que nesse exemplo, nem mesmo o anel de cohomologia par $H^{2\bullet}(A) = \coprod_{n \geq 0} H^{2n}(\Lambda)$ é finitamente gerado.

Capítulo 5

Categorias Derivadas de Álgebras de Ciclos Truncadas

Nesse capítulo vamos mostrar que se $\text{mod } \frac{kZ_e}{JN}$ e $\text{mod } \frac{kZ_{e'}}{JN'}$ são derivadamente equivalentes então $e = e'$ e $N = N'$. Ou seja, duas álgebras de ciclo truncadas são derivadamente equivalentes se e somente se são isomorfas.

5.1 Álgebras de Ciclo Truncadas Derivadamente Equivalentes

É claro que, se duas álgebras são isomorfas, então são também derivadamente equivalentes. Sejam então $\frac{kZ_e}{JN}$ e $\frac{kZ_{e'}}{JN'}$ duas álgebras de ciclo truncadas derivadamente equivalentes. Sabe-se que e é a dimensão do grupo de Grothendieck de $\frac{kZ_e}{JN}$ e essa dimensão é invariante por equivalência derivada. Logo e e e' são iguais. Agora sejam $A = \frac{kZ_e}{JN}$ e $A' = \frac{kZ_{e'}}{JN'}$. Vamos provar que se $H^\bullet(A)$ é isomorfo a $H^\bullet(A')$ como anéis graduados, então A é isomorfa a A' . Como o anel de cohomologia de Hochschild é um invariante para categorias derivadamente equivalentes, pelo teorema de Rickard [24] o resultado segue.

Assuma $H^\bullet(A) \cong H^\bullet(A')$. Inicialmente vamos ainda supor que ou $\text{car } k \nmid NN'$ ou a condição $\text{mdc}(N, e) \neq 1$ e $\text{mdc}(N', e) \neq 1$ é válida. Após esse caso ser resolvido, provamos o caso geral. Note que se $e = 1$ então $A = \frac{k[x]}{x^N}$ é comutativo e é determinado por sua categoria derivada, pois o centro de uma álgebra é invariante por equivalências derivadas. Podemos então assumir $e > 1$. Escreva $N = me + t$ e $N' = m'e + t'$ onde $0 \leq t, t' \leq e - 1$. Já sabemos que

$$\dim H^0(A) = \begin{cases} m + e & \text{se } t=1 \\ m & \text{se } t=0 \\ m + 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e } \dim H^1(A) = \begin{cases} m & \text{se } t=0 \text{ ou } 1 \\ m + 1 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Lembre que $C_i(N) = \#\{j : 0 \leq j \leq N-2 \text{ e } j \equiv ti \pmod{e}\}$. Então $\dim H^{2i+1}(A) = \dim H^{2i}(A) = C_i(N)$ para $i \geq 1$. A partir dessa fórmula obtemos nosso primeiro corolário.

Corolário 5.1.1 *i) $\dim H^0(A) \neq \dim H^1(A)$ se e somente se $t = 1$.
ii) Se $t = 1$ (i.e. $N = me + 1$) e $H^\bullet(A) \cong H^\bullet(A')$ então $A \cong A'$.
iii) Se $e = 2$ e $H^\bullet(A) \cong H^\bullet(A')$ então $A \cong A'$*

Assumimos agora que $e \geq 3$. Não é difícil mostrar o seguinte:

Lema 5.1.1 *i) Se $t = 0$, então $C_i(N) = m$ para todo $i \geq 0$.
ii) Se $t = 1$, $C_i(N) = m$.*

iii) Se $t \geq 2$ então $C_i(N) = \begin{cases} m + 1 & \text{se } ti \cong j \text{ com } 0 \leq j \leq t - 2 \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$

Lema 5.1.2 *Assuma $e \geq 3$, $e \nmid t$. Se C é a e -upla de números naturais: $C = (C_0(N), \dots, C_{e-1}(N))$. Então*

i) Se $\gcd(t, e) = 1$ então a e -upla C tem $t - 1$ entradas iguais a $m + 1$ e $e - t + 1$ entradas iguais a m .

ii) Se $\gcd(t, e) = \alpha \neq 1$ ou $t = 0$, então a e -upla C tem t entradas iguais a $m + 1$ e $e - t$ entradas iguais a m .

Prova: i) Como $\gcd(t, e) = 1 = \gcd(N, e)$ o conjunto $\{\overline{N0}, \overline{N1}, \dots, \overline{N(e-1)}\}$ de classes de resíduo módulo e é uma classe completa de resíduos. Usando esse fato e o lema 5.1.1, parte (iii), obtemos o resultado.

ii) O resultado é claro se $t = 0$. Assuma então $t \neq 0$ e $\alpha = \gcd(t, e)$. Escreva $e = \tilde{e}\alpha$ e $t = \tilde{t}\alpha$. Temos então que $Ni \equiv ti \equiv \alpha(\tilde{t}i) \pmod{e}$ e para cada j com $0 \leq j \leq \tilde{e} - 1$, existe um inteiro i_j tal que $ti_j \equiv Nj \equiv j\alpha \pmod{e}$. Considere agora a e -upla $B = (\overline{N0}, \overline{N1}, \dots, \overline{N(e-1)})$ onde $\bar{l}$ denota os representantes de $\bar{l} \pmod{e}$ entre 0 e $e - 1$. Na e -upla B cada $j\alpha$ aparece α vezes já que $(\overline{N0}, \overline{N1}, \dots, \overline{N(e-1)}) = (\overline{t0}, \dots, \overline{(\tilde{e}-1)\alpha t}, \overline{t0}, \dots, \overline{(\tilde{e}-1)\alpha t}, \dots)$. Como $\alpha \geq 2$ temos que o número de vezes que uma entrada na e -upla B é menor ou igual a $t - 2$ é $\alpha\tilde{t} = t$. Mas esse é exatamente o número de vezes que obtemos uma entrada igual

a $m + 1$ na e -upla C , logo temos o resultado desejado. ■

Concluimos que:

Corolário 5.1.2 *i) $\dim H^i(A) = \dim H^j(A)$ para todo i, j se e somente se $t = 0$.
ii) Se $t = 0$ e $\dim H^i(A) = \dim H^i(A')$ para todo i então $A \cong A'$.*

Corolário 5.1.3 *Se $\dim H^i(A) = \dim H^i(A')$ para todo i então $m = m'$.*

Prova: Pelos corolários 5.1.1 e 5.1.2, podemos assumir $t \neq 0$ e $t \neq 1$. Logo $m + 1 = \dim H^0(A)$. ■

De agora em diante vamos assumir que $A = \frac{kZ_e}{J^N}$ e $A' = \frac{kZ_e}{J^{N'}}$, onde $N = me + t$, $N' = me + t'$, $t \notin \{0, 1\}$, e $e \geq 3$. Suponha ainda que $t \leq t'$.

Corolário 5.1.4 *Se $\dim H^i(A) = \dim H^i(A')$ para todo i então $A \cong A'$ ou
i) $t' = t + 1$, e ii) $\gcd(t + 1, e) = 1$ e $\gcd(t, e) \neq 1$.*

Prova: Uma vez que conhecemos m , podemos determinar o número de vezes que $m + 1$ aparece na e -upla C . Seja x esse número. Então $t, t' \in \{x, x + 1\}$. Suponha que $t \neq t'$. Temos então provado (i). Se t' não é coprimo com e , então pelo lema 5.1.2 temos que $t' = x$, o que é absurdo. ■

Proposição 5.1.1 *Se $\dim H^i(A) = \dim H^i(A')$ para todo i , então $A \cong A'$.*

Prova: Suponha que $A \not\cong A'$. Pelo corolário 5.1.4 podemos assumir que

- 1) $N' = N + 1$
- 2) $\gcd(N', e) = 1$ e $\gcd(N, e) \neq 1$.

Sejam $\alpha\tilde{e} = e$ e $\alpha\tilde{t} = t$ onde $\alpha = \gcd(N, e)$ e $2 \leq e, \tilde{e}$. Temos que $\overline{ti} \in \{\overline{0}, \overline{\alpha}, \dots, \overline{(t-1)\alpha}\}$ se e somente se $\overline{(t+1)i} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{(t-1)}\}$. Agora seja j tal que $(t+1)j \equiv 1 \pmod{e}$. Então para $0 \leq k \leq e-1$ temos $C'_{kj}(N) = m+1$ se e somente se $0 \leq k \leq t-1 = t' - 2$. Se consideramos a e -upla

$$C' = (C_0(N'), C_j(N'), C_{2j}(N'), \dots, C_{(e-1)j}(N')),$$

então as primeiras t entradas dessa n -upla são iguais a $m+1$ e as demais são iguais a m .

A hipótese implica que $C' = (C_0(N), C_j(N), C_{2j}(N), \dots, C_{(e-1)j}(N))$. Como $(m+1)j \equiv 1 \pmod{e}$ temos que $\gcd(j, e) = 1$. Logo o subgrupo gerado por $\overline{tj}$ em

Z/Ze é o grupo gerado por $\bar{t}$ que é, por sua vez, o grupo gerado por $\bar{\alpha}$. Portanto, para algum r com $0 \leq r \leq t-1$ temos $trj \equiv \bar{t}, \alpha \equiv t \pmod{e}$. Para mostrar isso, considere o conjunto $\{0, tj, 2tj, \dots, (t-2)tj\}$. Existe algum $\lambda < \lambda'$ tal que $\lambda tj = \lambda' tj$. Assim $(\lambda' - \lambda)tj \equiv 0 \pmod{e}$ e $\{\bar{0}, \bar{tj}, \dots, (\lambda' - \lambda)tj\}$ é o subgrupo de Z/Ze gerado por $\bar{t}$. Portanto existe algum $u \leq t-2$ tal que $utj \equiv \bar{t} \pmod{e}$. Assim $C_u(N) = m$ o que é uma contradição. ■

Agora não vamos mais supor que $\text{car } k \nmid NN'$ ou que vale $\gcd(N, e) \neq 1$ e $\gcd(N', e) \neq 1$. Como vimos anteriormente, se $N \equiv 0$ ou $1 \pmod{e}$, então $H^\bullet(\frac{kZ_e}{jN}) \cong H^\bullet(\frac{kZ_e}{jN'})$ se e somente se $N = N'$. Assumimos então $N = me + t$ e $N' = m'e + t'$ onde $2 \leq t, t' < e-1$. Usando argumentos análogos aos usados anteriormente, não é difícil mostrar que $m = m'$. Como consequência da estrutura de anel de $H^\bullet(A)$ e $H^\bullet(A')$ temos que $\text{car } k \mid N$ e $\gcd(N, e) = 1$ se $\text{car } k \mid N'$ e $\gcd(N', e) = 1$. Podemos assim assumir sempre que $\text{car } k \nmid NN'$ ou que $\gcd(N, e) \neq 1$ e $\gcd(N', e) \neq 1$.

Finalmente observamos que é possível que $H^\bullet(\frac{kZ_e}{jN}) \cong H^\bullet(\frac{kZ_{e'}}{jN'})$ com $e \neq e'$ como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo: Dado qualquer inteiro $i \geq 2$, $H^\bullet(\frac{kZ_{2i+1}}{j^2}) \cong H^\bullet(\frac{kZ_{4i+2}}{j^2})$ como anéis graduados. Veja [6].

Referências Bibliográficas

- [1] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [2] M. J. Bardzell, *The Alternating Syzygy Behavior of Monomial Algebras*. Journal of Algebra 188, 69-89, 1997.
- [3] M. J. Bardzell, E. N. Marcos, *Induced Boundary Maps for the Cohomology of Monomial and Auslander Algebras*, Algebras and Modules II, CMS Conference Proceedings, Vol. 24, 1998.
- [4] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [5] C. Cibils, *Rigidity of Truncated Quiver Algebras*, Advances in Mathematics 79, 1990, 18-42.
- [6] C. Cibils, *Hochschild Cohomology Algebra of Radical Square Zero Algebras*, Algebras and Modules II, CMS Conference Proceedings, Vol.24, 1998.
- [7] A. Jones, H. Merklen, *Representações de Álgebras - Métodos Diagramáticos*, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- [8] K. Erdmann, T. Holm, *Twisted Bimodules and Hochschild Cohomology for Self-Injective Algebras of Class A_n* , to appear in Forum Mathematicum.
- [9] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math., 6 (1972), 71-103.
- [10] M. Gerstenhaber, *Algebraic Cohomology and Deformation Theory*, Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, Kluwer Academic Publishers, 11-264, 1988.
- [11] E.L. Green, D. Happel, D. Zacharia, *Projective Resolutions over Artin Algebras with Zero Relations*, Illinois Journal of Math. 29, 180-190, 1985.

- [12] E.L. Green, D. Zacharia, *The Cohomology Ring of a Monomial Algebra*, Manuscripta Mathematica 85, 11-23, 1994.
- [13] D. Happel, *Hochschild Cohomology of Auslander Algebras*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, 26 (part 1), Polish Scientific Publisher, 26 (Part 1), 1990, 303-310.
- [14] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*, Springer Lecture Notes 1404, 1984, 108-126.
- [15] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Math. Soc. Lectures Notes Series 119, 1988.
- [16] G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. of Math. 46, 1946, 58-67.
- [17] T. Holm, *Hochschild Cohomology of Brauer Tree Algebras*, a aparecer em Communications in Algebra.
- [18] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman, 1974.
- [19] B. Keller, Notas de aula de minicurso ministrado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1997.
- [20] A.C. Locateli, *Hochschild Cohomology of Truncated Quiver Algebras*, a aparecer em Communications in Algebra, vol27, issue 2.
- [21] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
- [22] T. Muir, *A Treatise on the Theory of Determinants*, Dover Publications.
- [23] J. Rickard, *Derived Categories and Stable Equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 61, 303-317, 1989.
- [24] J. Rickard, *Morita Theory For Derived Categories*, J. London Math. Soc. 39, 436-456, 1989.
- [25] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 38, 1994.
- [26] P. Zhang, *Hochschild Cohomology of Truncated Basic Cycle*, Science in China Vol. 40 No. 12, 1272-1278, 1997.