Extensões por um ponto de

Álgebras inclinadas mansas

Alegria Gladys Chalom de Oliveira

Tese Apresentada ao

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

para a obtenção do grau de doutor em matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Hector Alfredo Merklen Goldschmidt

São Paulo, junho de 1998.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida por
Alegria Gladys Chalom de Oliveira
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 24 de agosto de 1998.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hector Merklen Goldschmidt (orientador)	IME-USP
Prof. Dr. FLávio Ulhoa Coelho	IME-USP
Prof. Dr. Norai Romeu Rocco	UnB
Prof. Dr. Antonio Paques	IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. José Antonio de la Peña	UNAM-MEXICO

Resumo

Sabemos por [P1] que, dada uma álgebra Λ mansa, teremos que a forma quadrática de Tits q_Λ é fracamente não negativa, isto é,

$$\text{se } \Lambda \text{ é mansa então } q_\Lambda(z) \geq 0 ,$$

para todo z vetor-dimensão de coordenadas positivas.

Além disso, a recíproca foi provada para algumas famílias de álgebras, porém não é válida em geral.

O propósito deste trabalho é provar que, para certas categorias vectorospaciais selvagens $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$, onde B é uma álgebra inclinada mansa e M é um módulo indecomponível, teremos a forma $q_{B[M]}$ fortemente indefinida, o que nos fornece recíprocas parciais do teorema acima.

Abstract

We know, after [P1], that, given a tame algebra Λ , the Tits form q_Λ is weakly non negative. That is,

$$\text{if } \Lambda \text{ is tame then } q_\Lambda(z) \geq 0 ,$$

for any dimension-vector z of positive coordinates.

Moreover, the converse has been shown for some families of algebras, but it is not true in general.

The purpose of this work is to show that for certain wild vectorspace categories $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$, where B is tame tilted and M is an indecomposable B -module, we have $q_{B[M]}$ strongly indefinite. This will give partial converses of the above theorem.

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, gostaria de manifestar a minha gratidão a todos aqueles que contribuíram para a sua realização.

Agradeço ao Prof. Hector Merklen, pela sua infinita paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Flávio Coelho, pelo estímulo constante e sua disposição de responder minhas dúvidas.

Agradeço aos Profs. Jose Antonio de la Peña, Otto Kerner, Nikolaos Marmaridis, Viktor Bekkert e Bertha Tomé, por suas sugestões valiosas e observações interessantes.

Agradeço profundamente ao meu marido e meus filhos, pelo constante apoio e estímulo.

Sumário

1	Preliminares	10
1.1	Hipóteses	10
1.2	Categorias vectorespaciais e Extensões por um ponto	12
1.2.1	Definições	12
1.2.2	Extensões por um ponto	13
1.3	Propriedades da extensão	15
1.4	Comparando formas quadráticas	17
1.5	Álgebras inclinadas	22
2	Módulos dirigidos	28
2.1	Categorias Infinitas	28
2.2	Categorias Finitas	33
2.3	Demonstração do Teorema	51
3	Categorias de Roiter	61
3.1	Critério de Bekkert	61
3.2	Categorias de tipo $\hat{E}$	82
4	Módulos da família tubular separante	110
4.1	Álgebras inclinadas de tipo tubular doméstico	111
4.2	Extensões tubulares	116
4.2.1	Padrões	117
4.2.2	Álgebras iteradas tubulares	117

4.2.3	Espirais	118
4.3	Álgebras de tipo co-tubular doméstico	120

Introdução

A teoria das representações teve um crescimento muito acelerado nos últimos anos, com a introdução de novas técnicas e demonstrações de conjecturas importantes, levando assim a novos problemas e a um reestruturamento da teoria como um todo.

Cada um desses métodos, a saber : os métodos diagramáticos, as técnicas funtoriais e as sequências que quase cindem, a teoria de BOCS'es e as categorias vectorespaciais, e a introdução da geometria algébrica, tiveram um forte impacto na teoria.

Depois da demonstração das conjecturas de Brauer-Thrall e da demonstração feita por Y. Drozd da conjectura de Donovan e Freilich, (dicotomia manso-selvagem, usando teoria de BOCS'es) um dos problemas principais da área é o de encontrar critérios mais simples para decidir quando uma determinada álgebra é ou não mansa, uma vez que os critérios que até hoje temos requerem um conhecimento profundo da categoria $\Lambda\text{-mod}$.

A grosso modo, podemos dizer que as álgebras mansas são aquelas cujos módulos indecomponíveis são dados por um número finito de famílias uni-paramétricas enquanto que as selvagens são as álgebras cuja categoria $\Lambda\text{-mod}$ “contém” os B -módulos finitamente gerados para qualquer outra álgebra B de dimensão finita sobre k .

Um fato muito importante, provado por De la Peña ([P1]) é que se uma álgebra Λ é mansa então a forma quadrática de Tits q_Λ a ela associada é fracamente não negativa. A recíproca não vale em geral, mas em alguns casos particulares. Observamos que a forma quadrática de Euler, χ_Λ não tem essa propriedade: existem álgebras mansas cuja forma de Euler é fortemente indefinida. A recíproca do Teorema de De la Peña vale por exemplo nos seguintes casos:

1-Se Λ é hereditária ([DR])

2-Se Λ é inclinada ([K])

3-Se Λ é quase-inclinada ([S])

4-Se Λ é extensão por um ponto de uma álgebra mansa oculta, livre de $\tilde{A}_n$ ([P1])

Para todos esses casos, a estrutura da categoria $\Lambda\text{-mod}$ é bem conhecida e, a menos do caso 4, todas tem a dimensão projetiva global menor ou igual a dois, no caso 4, teremos a dimensão projetiva global menor ou igual a tres. E assim sendo a forma quadrática de Euler representou um papel importante na avaliação da forma quadrática de Tits. Por outro lado, todas são álgebras triangulares (isto é, seu quiver ordinário não tem circuitos) e portanto podem ser obtidas por repetidas extensões ou co-extensões por um ponto.

Temos duas conjecturas já famosas:

Conjectura 1 (Skowronski) vale a recíproca do Teorema de De la Peña para Λ uma álgebra fortemente simplesmente conexa

(Λ é fortemente simplesmente conexa se toda subcategoria plena convexa tem a propriedade de separação.)

Conjectura 2 (De la Peña) vale a recíproca do Teorema de De la Peña para Λ uma boa álgebra.

(Λ é uma boa álgebra se Λ é *schurian*, tem a propriedade de separação e é livre de $\tilde{A}_n$.)

Essas conjecturas não necessariamente englobam os casos já provados mas indicam outra direção no desenvolvimento da teoria. Por um lado se Λ é uma boa álgebra ou é fortemente simplesmente conexa então Λ não possui uma subcategoria plena de tipo $\tilde{A}_n$ e é triangular. Por outro lado, pouco se sabe sobre a estrutura do A-R quiver de Λ (veja [S2]).

No intuito de provar essas duas conjeturas, tem sido muito estudadas certas classes de álgebras, como as álgebras pg-críticas, as hipercríticas e as álgebras multi-espirais, e tem-se mostrado um campo muito fértil.

Gostaríamos de responder à seguinte pergunta:

Para que álgebras inclinadas mansas B e para que módulos M , temos que a forma de Tits de $B[M]$ determina o tipo de representação?

Podemos reescrever o problema da seguinte maneira:

para que álgebras inclinadas mansas B e que B -módulos M , temos que

- Se $B[M]$ é selvagem então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida (isto é, $\exists z$ vetor-dimensão de coordenadas não negativas tal que $q_{B[M]}(z) < 0$).

Nosso trabalho se desenvolve em uma linha um pouco diferente das conjecturas enunciadas e talvez mais próxima dos resultados citados acima. O problema passa pela classificação de certos tipos de categorias vectorospaciais selvagens, o que é ainda um problema em aberto. Um critério para essa classificação foi anunciado por Nazarova (veja-se [Ro],1986). Um resultado muito importante é a classificação feita por Bekkert (veja-se [B1],[B2] e [B3],1995) das categorias vectorospaciais *schurian* de crescimento polinomial. Além disso, a estrutura do A-R quiver de uma álgebra inclinada B é bem conhecida. Teremos $gldim B[M] \leq 3$ e assim poderemos comparar as duas formas quadráticas $q_{B[M]}$ e $\chi_{B[M]}$.

Podemos resumir nossos resultados da seguinte forma:

- 1) Se B é uma álgebra inclinada mansa, de tipo euclideano, com a componente pré-injetiva de tipo árvore e M é um B -módulo indecomponível da família tubular separante, então $B[M]$ é selvagem se, e somente se, $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.
- 2) Se $\mathcal{C}$ é uma componente dirigida, *standard* de tipo árvore, e M é um módulo indecomponível em $\mathcal{C}$, tal que $\mathbb{K} = Hom(M, B - mod) = Hom(M, \mathcal{C})$ é finita, se $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena uma das categorias da lista abaixo, então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Lista

1) $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ $(N,5)$ caminho-incomparáveis

2) $(\begin{smallmatrix} \square & \bullet \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} \square & \rightarrow & \square \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix})$ ou $(\blacksquare)$

3) $\begin{smallmatrix} \square & \rightleftarrows & \square \end{smallmatrix}$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\square \rightrightarrows \square, \text{ com os morfismos dados por } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\square \rightrightarrows \square, \text{ com os morfismos dados por } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4)

$$X \rightrightarrows A \rightrightarrows Y$$

$\|A\| = 1$, $\|X\| = \|Y\| = 2$ com os morfismos dados por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(1, 0) : |X| \rightarrow |A|$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : |A| \rightarrow |Y|$, isto é, existem $U \in P^1(X)$, $V \in P^1(Y)$ tais que $|\varphi|(U) \subset V \forall |\varphi| : |X| \rightarrow |Y|$ e $\ker(X \rightarrow A) = U$, $\text{Im}(A \rightarrow Y) = V$.

5)

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & & \\ \searrow \varphi_1 & & \\ Z_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & X \text{ com } \|X\| = 2, \|Z_i\| = 1, \text{Im}|\varphi_i| = U \in P^1(X) \\ \nearrow \varphi_3 & & \\ Z_3 & & \end{array}$$

$\text{Hom}(|Z_i|, |Z_j|) = 0 \forall i, j$.

$$\text{Im } |\varphi_1| = \text{Im } |\varphi_3| = U \in P^1(X)$$

$$\text{Hom}(|Z_2|, |Z_3|) = \text{Hom}(|Z_1|, |Z_3|) = \text{Hom}(|Z_3|, |Z_1|) =$$

$$\text{Hom}(|Z_3|, |Z_2|) = 0 \quad \text{e} \quad \dim \text{Hom}(|Z_i|, |X|) = 1.$$

O trabalho está organizado da seguinte forma:

no capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos da teoria, como as categorias vectoriais, as formas quadráticas e as álgebras inclinadas;

no capítulo 2 estudamos as extensões por um módulo dirigido, e vemos que, sob certas condições podemos omitir a hipótese de caminho-incomparabilidade para certas categorias vectoriais selvagens;

no capítulo 3 analisamos a classificação de Bekkert para categorias vectoriais de crescimento polinomial, do ponto de vista das categorias finitas que podem aparecer imersas em uma componente dirigida, standard de tipo árvore. Assim podemos reduzir parcialmente o estudo destas categorias à lista obtida no capítulo 2;

no capítulo 4 nos ocupamos das extensões por módulos indecomponíveis na família tubular separante de uma álgebra inclinada de tipo euclidiano.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Hipóteses

Estamos, ao longo do trabalho, com as seguintes hipóteses fixadas: k é um corpo algebricamente fechado, as álgebras consideradas são k -álgebras de dimensão finita, básicas e conexas, e portanto podemos considerar, pelo Teorema de Gabriel, $\Lambda \cong kQ/I$ onde Q é um quiver finito e I um ideal admissível. Iremos supor, além disso, que o quiver ordinário não tem circuitos orientados e assim, Λ tem dimensão global finita. Equivalentemente, Λ pode ser considerada como uma k -categoria (localmente limitada) cujos objetos são dados pelo conjunto de vértices de Q e os espaços de morfismos são da forma: $Hom_{\Lambda}(x, y) = y\Lambda x$. Uma subcategoria plena C de Λ é dita convexa (em Λ) se todo caminho em Λ com início e fim em C está inteiramente contido em C .

Os módulos (a menos de menção explícita) são finitamente gerados à esquerda. Denotamos por $\Lambda\text{-mod}$ essa categoria, e por $\Lambda\text{-ind}$ uma subcategoria plena de $\Lambda\text{-mod}$ definida por um conjunto de representantes de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis de $\Lambda\text{-mod}$.

Para cada $i \in Q_{\Lambda}$ indicamos por S_i (respectivamente P_i e I_i) ao Λ -módulo simples (respec. projetivo, injetivo) correspondente ao vértice i . O vetor-dimensão de um Λ -módulo X é o vetor $\underline{dim}X = (dim_k Hom_{\Lambda}(P_i, X))_{i \in Q_0}$ no grupo de Grothendieck $\mathbb{K}_0(\Lambda)$. O suporte de um Λ -módulo X , $\text{supp}(X)$ é a subcategoria plena de Λ definida pelo conjunto

$\{i \in Q_0 | X(i) \neq 0\}$.

Supomos conhecida a translação de Auslander-Reiten, τ , e o quiver de Auslander-Reiten de $\Lambda\text{-mod}$, que denotaremos por Γ_Λ . Além disso, iremos identificar os pontos de Γ_Λ com os Λ -módulos indecomponíveis correspondentes.

Aos morfismos irredutíveis chamaremos simplesmente de flechas.

Uma componente Γ de Γ_Λ é dita *standard* se a subcategoria plena de $\Lambda\text{-mod}$ dada pelos módulos que pertencem a Γ , é equivalente à categoria-malha $k(\Gamma)$, isto é, dados X e Y módulos pertencentes a Γ e um morfismo f de X a Y , então f é soma de compostas de morfismos irredutíveis entre módulos em Γ . Um caminho em $\Lambda\text{-mod}$ é uma sequência de morfismos não nulos e não isomorfismos $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_t$, onde cada M_i é indecomponível. Um caminho em $\Lambda\text{-mod}$ é dito um ciclo se $M_0 \cong M_t$. Um módulo é dirigido se ele não pertence a nenhum ciclo em $\Lambda\text{-mod}$, uma componente C de Γ_Λ é dirigida se todo módulo pertencente a C é dirigido. Se M é um módulo dirigido então $\text{End}_\Lambda(M) \cong k$. Um caminho $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_t$ é chamado de seccional se $M_{i-1} \neq \tau(M_{i+1})$, para todo i , $0 < i < t$.

Para maiores detalhes quanto às notações, definições e propriedades básicas, veja o livro “Tame algebras and integral quadratic forms”, C.M. Ringel, Springer Lecture Notes 1099.

Estaremos considerando a hipótese de que algumas das componentes dirigidas de uma álgebra B sejam de tipo árvore, mas não necessariamente todas. Iremos discutir certos aspectos desta hipótese no Apêndice A. Veja-se também [AL1],[AL2],[ALP].

A menos de menção explícita, estamos supondo M indecomponível (veja-se 2.2.10)

Definição 1.1.1 Λ é mansa se para todo natural $d \in N$, existe uma família finita $M_1, M_2, \dots, M_{s(d)}$ de $\Lambda - k[t]$ -bimódulos, livres de posto finito sobre $k[t]$ e tais que para quase todo Λ -módulo M indecomponível de dimensão d , temos $M \cong M_i \otimes_{k[t]} S_\alpha$, onde S_α é um $k[t]$ -módulo simples.

Definição 1.1.2 Λ é selvagem se existe M um $\Lambda - k \langle x, y \rangle$ -bimódulo, livre de posto finito sobre $k \langle x, y \rangle$, tal que o funtor:

$$F := M \otimes_{k\langle x, y \rangle} - : k\langle x, y \rangle\text{-mod} \rightarrow \Lambda\text{-mod}$$

preserva indecomponíveis e reflete isomorfismos.

Teorema 1.1.3 (Drozd)[CB] Se Λ é uma k -álgebra de dimensão finita, então Λ é mansa ou selvagem, mas não simultaneamente.

1.2 Categorias vetorespaciais e Extensões por um ponto

1.2.1 Definições

As categorias vetorespaciais, que serão uma das ferramentas mais importantes de nosso trabalho, foram inicialmente estudadas por Nazarova e Roiter, associadas à classificação de problemas matriciais. Essas categorias tem desempenhado um papel muito importante na teoria de representações de álgebras de dimensão finita.

Definição 1.2.1 [R1] Uma categoria vetorespacial $(\mathbb{K}, | |)$ é dada por uma k -categoria de Krull-Schmidt, $\mathbb{K}$ e um funtor fiel $| | : \mathbb{K} \rightarrow \text{mod } k$.

Assim, $\mathbb{K}(X, Y) \subset \text{Hom}(|X|, |Y|)$.

Exemplo. Sejam $\mathbb{K}$ uma k -categoria de Krull-Schmidt e M um objeto em $\mathbb{K}$. Consideremos a categoria vetorespacial cujos objetos são da forma $\text{Hom}(M, X)$, $X \in \text{Obj } \mathbb{K}$ e os morfismos $\text{Hom}(M, f) : \text{Hom}(M, X) \rightarrow \text{Hom}(M, Y)$ onde

$f : X \rightarrow Y$ é morfismo em $\mathbb{K}$ e $\text{Hom}(M, f)$ é dada por composição. Se esse funtor não é fiel, consideramos apenas a sua imagem.

Chamamos a essa categoria de $\text{Hom}(M, \mathbb{K})$ e, nesse caso, denotamos por $|X|$ ao k -espaço vetorial $\text{Hom}(M, X)$.

Definição 1.2.2 [R1] Dada uma categoria vetorespacial $(\mathbb{K}, | |)$, definimos a categoria de subespaços $\mathcal{U}(\mathbb{K})$, como segue:

Seus objetos são as ternas (X, U, φ) com $X \in \text{Obj } \mathbb{K}$, U um k -espaço vetorial e $\varphi : U \rightarrow |X|$, k -linear.

Os morfismos $(X, U, \varphi) \rightarrow (X', U', \varphi')$ são dados por pares (α, β) com $\beta: X \rightarrow X'$ em $\mathbb{K}$ e $\alpha: U \rightarrow U'$ linear e tal que o quadrado seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & |X| \\ \downarrow \alpha & & \downarrow |\beta| \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & |X'| \end{array}$$

Claramente, todo objeto de $\mathcal{U}(\mathbb{K})$ é isomorfo a uma soma direta de uma terna (X, U, φ) com $\varphi: U \rightarrow |X|$ injetora e várias cópias de $(0, k, 0)$.

Definição 1.2.3 [R1] Uma k -categoria $\mathbb{K}$ é dita *schurian* se para todo $X \in \text{Obj}\mathbb{K}$, X indecomponível, então $\text{End}_k(X)$ é um anel com divisão.

1.2.2 Extensões por um ponto

Definição 1.2.4 [R1] Seja B uma k -álgebra de dimensão finita e M um B -módulo à esquerda finitamente gerado .

Chamamos de extensão de B por M à álgebra dada por:

$$B[M] \cong \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

com as operações usuais de matrizes.

Um módulo sobre $B[M]$ pode ser identificado a uma terna (X, U, φ) com X um B -módulo, U um k -espaço vetorial e $\varphi: U \rightarrow \text{Hom}_B(M, X)$ linear, de fato:

$$\begin{bmatrix} B & M \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \cdot X_1 + M \cdot X_2 \\ kX_2 \end{bmatrix}$$

onde $M \cdot X_2$ é dada por: $\tilde{\varphi}: M \otimes_k X_2 \rightarrow X_1$.

Mas, como

$$\text{Hom}_k(X_2, \text{Hom}_B(M, X_1)) \cong \text{Hom}_B(M \otimes_k X_2, X_1)$$

logo usamos φ adjunta de $\tilde{\varphi}$.

Definição 1.2.5 [R1] Dados dois anéis S e T , e um bimódulo ${}_S M_T$, a categoria das representações do bimódulo ${}_S M_T$, que denotaremos por $\mathcal{M}({}_S M_T)$, tem como objetos as ternas

$({}_S X, {}_T U, \gamma : {}_S M \otimes_T U \rightarrow {}_S X)$ e os morfismos dados por pares (α, β) com $\alpha : {}_T U \rightarrow {}_T U'$, T -linear, $\beta : {}_S X \rightarrow {}_S X'$ S -linear de modo que:

$$\begin{array}{ccc} {}_S M \otimes_T U & \xrightarrow{\gamma} & {}_S X \\ \downarrow 1 \otimes \alpha & & \downarrow \beta \\ {}_S M \otimes_T U' & \xrightarrow{\gamma'} & {}_S X' \end{array}$$

é comutativo.

(De maneira semelhante, podemos descrever os objetos da categoria por:

$$({}_S X, {}_T U, \tilde{\gamma} : {}_T U \rightarrow \text{Hom}({}_S M, {}_S X)).$$

Definição 1.2.6 Seja S um k -álgebra de dimensão finita.

- 1) Seja $\text{Hom}({}_S M, \mathcal{M}_S)$ a categoria vectorial dada pelo funtor $\text{Hom}({}_S M, -) : S\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$.
- 2) Seja $r({}_S M)$ a subcategoria plena de $S\text{-mod}$, dada pelos objetos ${}_S X$ tais que $\text{Hom}_S(M, X) = 0$.

Lema 1.2.7 [R1] A subcategoria plena de $\mathcal{M}({}_S M_k)$ das representações do bimódulo ${}_S M_k$ sem somandos diretos da forma $(Y, 0, 0)$, com $Y \in r({}_S M)$ é r -equivalente (isto é, existe um funtor que leva uma na outra e que é pleno, denso e que reflete isomorfismos) à categoria $\mathcal{U}(\text{Hom}({}_S M, \mathcal{M}_S))$.

De acordo com o lema o tipo de representação de $B[M]$ depende de $r(M)$ e de $\mathcal{U}(\text{Hom}({}_S M, B\text{-mod}))$.

Lema 1.2.8 [R1] Seja $\mathbb{K}$ uma categoria vetorespacial *schurian*. Se $\mathbb{K}$ é de tipo de representação finito então todo objeto indecomponível tem dimensão 1. Se $\mathbb{K}$ não é selvagem então todo objeto indecomponível tem dimensão no máximo 2, e além disso, se X, Y são indecomponíveis com $\dim X = 2$ então $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$ ou $\text{Hom}(Y, X) \neq 0$.

Observação 1.2.9 Uma categoria vetorespacial *schurian* cujos objetos indecomponíveis tem todos dimensão um, corresponde à categoria aditiva de um conjunto parcialmente ordenado S , isto é $\text{add } kS$. Neste caso temos o importante:

Teorema 1.2.10 [R2] (Nazarova) O poset S é de tipo de representação selvagem se e somente se S contém um subconjunto pleno da forma: $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ ou $(N, 5)$.

Além disso: se S não é de tipo selvagem então S é de tipo manso.

1.3 Propriedades da extensão

Seja B uma álgebra com dimensão global finita.

Reunimos aqui algumas propriedades da extensão $B[M]$, que nos serão úteis.

Proposição 1.3.1 [[ARS], pg 79] Sejam B uma k -álgebra e ${}_B M_k$ um bimódulo não nulo, finitamente gerado.

Se $B[M] = \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$ então $\text{gldim } B[M] = \max\{\text{gldim } B, \text{pd}_B M + 1\}$.

Além disso, temos

Lema 1.3.2 $B\text{-mod}$ é subcategoria plena de $B[M]\text{-mod}$.

Demonstração: Sejam X, Y B -módulos na forma $(X, 0, 0)$ e $(Y, 0, 0)$. É fácil ver então que os únicos $B[M]$ -morfismos entre esses dois objetos provêm dos B -morfismos entre X e Y . $\square$

Lema 1.3.3 Se X e Y são B -módulos então:

$$\text{Ext}_{B[M]}^n((X, 0, 0), (Y, 0, 0)) \cong \text{Ext}_B^n(X, Y).$$

Demonstração: Por indução em n .

Se X e Y são B -módulos então

$$\text{Ext}_{B[M]}^1((X, 0, 0), (Y, 0, 0)) \cong \text{Ext}_B^1(X, Y).$$

Pois seja $S_e = (0, k, 0)$ o novo simples em $B[M]$ -mod e suponhamos que seja

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

uma sequência exata em $B[M]$, com

$$M_1 = (Y, 0, 0) \quad \text{e} \quad M_3 = (X, 0, 0)$$

Os simples que aparecem como fator de composição do módulo M_2 são respectivamente os simples que aparecem como fator de composição de M_1 e M_3 logo se em M_1 e M_3 não aparece o simples S_e , também não pode aparecer em M_2 , assim, M_2 é um B -módulo e temos:

$$\text{Ext}_{B[M]}^1((X, 0, 0), (Y, 0, 0)) = \text{Ext}_B^1(X, Y).$$

Vejamos agora a indução: Sejam X e Y B -módulos. Calculemos a resolução projetiva de $(X, 0, 0)$ em $B[M]$ -mod. O simples $(0, k, 0)$ não aparece como fator de composição de $(X, 0, 0)$, logo, dada a resolução projetiva ,

$$0 \rightarrow \Omega \rightarrow P \rightarrow (X, 0, 0) \rightarrow 0$$

o novo projetivo P_e não aparece como somando direto de P , e portanto Ω também é um B -módulo, isto é, $\Omega = (Z, 0, 0)$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{B[M]}^n((X, 0, 0), (Y, 0, 0)) &\cong \text{Ext}_{B[M]}^{n-1}(\Omega, (Y, 0, 0)) \cong \text{por hipótese de indução} \\ \text{Ext}_B^{n-1}(Z, Y) &\cong \text{Ext}_B^n(X, Y). \quad \square \end{aligned}$$

Lema 1.3.4 Seja M um B -módulo indecomponível em uma componente $\mathcal{C}$ do quiver de Auslander-Reiten de B . Então $\dim_k \text{Hom}_B(M, -)|_{\mathcal{C}}$ é uma função aditiva.

Demonstração: Suponhamos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ uma ARS em $\mathcal{C}$, e $M \neq C$. Então temos a sequência:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(M, C) \rightarrow \text{Ext}^1(M, A).$$

que é exata. Logo se $\text{Hom}(M, C) = 0$ teremos $\text{Hom}(M, A) \cong \text{Hom}(M, B)$ e portanto tem a mesma dimensão.

Se $\text{Hom}(M, C) \neq 0$, vejamos que δ é um epimorfismo e neste caso, teremos:

$$\dim \text{Hom}(M, B) = \dim \text{Hom}(M, C) + \dim \text{Hom}(M, A).$$

Como a sequência é uma ARS,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & g_1 & & g_2 & & \end{array}$$

dado $f \in \text{Hom}(M, C)$, $f \neq 0$ então f não é epimorfismo que cinde, logo se levanta:

$$\text{existe } \tilde{f} : M \rightarrow B \text{ tal que } f = g_2 \tilde{f}$$

isto é,

$$\delta = \text{Hom}(M, g_2) : \text{Hom}(M, B) \rightarrow \text{Hom}(M, C)$$

é um epimorfismo. $\square$

1.4 Comparando formas quadráticas

Associadas a qualquer álgebra de dimensão global finita B , podemos definir duas formas quadráticas.

Suporemos, a partir de agora, que B é uma álgebra com $\text{gldim} B \leq 2$, então por 1.3.1 para qualquer B -módulo M teremos $\text{gldim} B[M] \leq 3$.

Definição 1.4.1 [R2] Definimos a forma de Euler através da seguinte fórmula:

Seja C_B a matriz de Cartan de B (que é inversível pois $\text{gldim} B$ é finita)

e sejam x e y vetores em $\mathbb{K}_0(B)$ o grupo de Grothendieck de B .

Então temos a forma bilinear (em geral não simétrica)

$$\langle, \rangle = x C_B^{-T} y^T$$

e a correspondente forma quadrática

$\chi_B(x) = \langle x, x \rangle$ é chamada de Forma de Euler.

A forma bilinear $\langle, \rangle$ tem a seguinte interpretação homológica:

Lema 1.4.2 [R2] Sejam X e Y B -módulos então

$$\langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle = \sum_{t \geq 0} (-1)^t \dim_k \text{Ext}_B^t(X, Y).$$

Observamos porém, que a forma é definida no grupo de Grothendieck $\mathbb{K}_0(B)$, para o qual os vetores $(\underline{\dim} S_x)_{x \in Q_0}$ formam uma $\mathbb{Z}$ -base. Assim, quando $\underline{\dim} X = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ podemos substituir o vetor dimensão $\underline{\dim} X$ por $\underline{\dim}(S_1^{n_1} \oplus S_2^{n_2} \oplus \dots \oplus S_l^{n_l})$.

Definição 1.4.3 [Bo] Temos a forma quadrática de Tits que é dada por:

$$\begin{aligned} q_B(x_1, x_2, \dots, x_l) &= \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{i, j \in Q_0} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_B^1(S_i, S_j) \\ &+ \sum_{i, j \in Q_0} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_B^2(S_i, S_j) \\ &= \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{i-j \text{ flechas}} x_i x_j + \sum_{i-j \text{ relacoes minimais}} x_i x_j \end{aligned}$$

Teorema 1.4.4 (Bongartz) [Bo] Se $\text{gldim} B \leq 2$ então $\chi_B = q_B$

O teorema abaixo, cuja demonstração vem de argumentos geométricos, estende o resultado de Bongartz para tipo de representação finito, [Bo]. Tem sido uma ferramenta das mais importantes no estudo das álgebras mansas.

Teorema 1.4.5 (De la Peña) [P1]

Se B é uma álgebra mansa então q_B é fracamente não negativa (isto é, $q_B(z) \geq 0$, para z vetor de coordenadas não negativas).

Se por um lado a forma de Euler diz respeito à estrutura dos módulos, principalmente da estrutura homológica da categoria, a forma de Tits, que é definida de modo puramente combinatório a partir do quiver ordinário de B , tem um aspecto surpreendente, pois ela nos dá informações sobre a geometria das variedades de módulos sobre B . Porém, é mais fácil trabalhar com a forma de Euler, dada sua forma homológica, do que com a forma de Tits, principalmente no que se refere às extensões por um ponto.

Se B é uma álgebra cujo quiver ordinário não tem circuitos orientados então $B[M]$ também é, pois estamos acrescentando um vértice que é uma fonte.

Seja $A = B[M]$, então temos

- 1- Q_B é subquiver convexo de Q_A .

Além disso:

Lema 1.4.6 Seja B uma subcategoria convexa de A . Então q_B é a restrição de q_A .

(Como consequência, se q_B é fortemente indefinida, teremos q_A fortemente indefinida).

- 2- $B\text{-mod}$ é subcategoria plena e fechada por extensões de $A\text{-mod}$
- 3- [R2] A forma de Euler de A pode ser calculada usando novamente a matriz de Cartan:

$$C_A = \begin{bmatrix} C_B & (\underline{\dim} M)^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$C_A^{-T} = \begin{bmatrix} C_B^{-T} & 0 \\ (-\underline{\dim} M)C_B^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

Seja então X um A -módulo e consideremos:

$\underline{\dim}_A(X) = \underline{\dim}_B(Y) + n.\underline{\dim}_A(S_e)$, onde e é o novo vértice, e assim

$$\chi_A(\underline{\dim} X) = (\underline{\dim} X) C_A^{-T} (\underline{\dim} X)^{-T} =$$

$$\chi_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - n < \underline{\dim} M, \underline{\dim} Y >_B =$$

$$\chi_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - n(\dim_k \text{Hom}_B(M, Y) - \dim_k \text{Ext}_B^1(M, Y) + \dim_k \text{Ext}_B^2(M, Y))$$

- 4- Vejamos o que ocorre com a forma de Tits de A :

$$q_A(x_1, x_2, \dots, x_l, x_e) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{i, j \in Q_0} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_A^1(S_i, S_j) + \sum_{i, j \in Q_0} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_A^2(S_i, S_j) =$$

agrupando as parcelas que não possuem o termo x_e , tem-se:

$$(\sum_{i \in Q_0, i \neq e} x_i^2 - \sum_{i, j \in Q_0, i, j \neq e} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_A^1(S_i, S_j) + \sum_{i, j \in Q_0, i, j \neq e} x_i \cdot x_j \cdot \dim_k \text{Ext}_A^2(S_i, S_j)) + x_e^2 - \sum_{j \in Q_0} x_e x_j (\dim_k \text{Ext}_A^1(S_e, S_j) + \dim_k \text{Ext}_A^1(S_j, S_e)) + \sum_{j \in Q_0} x_e x_j (\dim_k \text{Ext}_A^2(S_e, S_j) + \dim_k \text{Ext}_A^2(S_j, S_e)) =$$

pois, neste primeiro bloco, como os vértices envolvidos são vértices em B , e $B\text{-mod}$ é subcategoria plena e fechada por extensões de $A\text{-mod}$,

$$q_B(x_1, x_2, \dots, x_l) + x_e^2 - \sum_{j \in Q_0} x_e x_j (\dim_k \text{Ext}_A^1(S_e, S_j) + \dim_k \text{Ext}_A^1(S_j, S_e)) + \sum_{j \in Q_0} x_e x_j (\dim_k \text{Ext}_A^2(S_e, S_j) + \dim_k \text{Ext}_A^2(S_j, S_e))$$

Como S_e é injetivo, $\text{Ext}^i(S_j, S_e) = 0$ e portanto temos:

$$q_A(\underline{\dim} Y + n \cdot \underline{\dim} S_e) = q_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - \sum_{i \in Q_0} n \cdot \dim_k \text{Ext}_A^1(S_e, S_i) \cdot x_i + \sum_{i \in Q_0} n \cdot \dim_k \text{Ext}_A^2(S_e, S_i) \cdot x_i$$

onde $\underline{\dim} Y = (x_1, x_2, \dots, x_l)$.

Porém, em A , temos a sequência exata curta:

$0 \rightarrow M \rightarrow P_e \rightarrow S_e \rightarrow 0$, de onde para qualquer A -módulo, em particular para Y temos a sequência longa:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(S_e, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(P_e, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y) \rightarrow \text{Ext}^1(S_e, Y) \rightarrow \text{Ext}^1(P_e, Y) \rightarrow \text{Ext}^1(M, Y) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow Ext^2(S_e, Y) \rightarrow Ext^2(P_e, Y) \rightarrow Ext^2(M, Y) \rightarrow \\ &\rightarrow Ext^3(S_e, Y) \rightarrow Ext^3(P_e, Y) \rightarrow Ext^3(M, Y) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mas $Hom_A(P_e, Y) = 0$ pois Y é B -módulo e

$Ext^i(P_e, Y) = 0$ pois P_e é projetivo. Assim concluímos que:

$Ext_A^1(S_e, Y) = Hom_A(M, Y) = Hom_B(M, Y)$ pois B -mod é subcategoria plena de A -mod por 1.3.2.

$Ext_A^2(S_e, Y) = Ext_A^1(M, Y) = Ext_B^1(M, Y)$ pois B -mod é subcategoria fechada por extensões por 1.3.3.

- 5-Além disso, para $\underline{dim}Y = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tem-se que

$dim_k Ext_B^2(M, Y) = \sum_{i \in Q_0} x_i \cdot dim_k Ext_B^2(M, S_i)$ pois se $pdM \leq 1$ ambos são nulos. Portanto suponhamos $pdM = 2$ e consideremos a resolução projetiva minimal de M

$$0 \rightarrow P'_2 \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Seja $P'_2 = \Omega^2(M) = \oplus n_j P_j$ onde P_j denota o projetivo indecomponível associado ao vértice j . Então

$$\begin{aligned} dim_k Ext^2(M, Y) &= dim_k Hom(\Omega^2(M), Y) = dim_k Hom(\oplus n_j P_j, Y) = \\ &= \sum n_j dim_k Hom(P_j, Y) = \sum n_j \cdot x_j \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \sum x_i dim_k Ext^2(M, S_i) &= \sum x_i dim_k Hom(\Omega^2(M), S_i) = \\ \sum x_i dim_k Hom(\oplus n_j P_j, S_i) &= \sum x_i (\sum n_j dim_k Hom(P_j, S_i)) = \sum n_j x_j \text{ pois } \\ dim_k Hom(P_j, S_i) &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } dim_k Ext_B^2(M, Y) = \sum_{i \in Q_0} x_i \cdot dim_k Ext_B^2(M, S_i)$$

- 6- Assim temos:

$$\begin{aligned} q_A(\underline{dim}Y + n \underline{dim}S_e) &= q_B(\underline{dim}Y) + n^2 - n \cdot \sum x_i \cdot (dim_k Hom_B(M, S_i) - \\ &dim_k Ext_B^1(M, S_i)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - n \cdot \sum x_i \cdot (\dim_k \operatorname{Hom}_B(M, S_i) - \dim_k \operatorname{Ext}_B^1(M, S_i) + \\
& \dim_k \operatorname{Ext}_B^2(M, S_i)) + n \cdot \sum x_i \cdot \dim_k \operatorname{Ext}_B^2(M, S_i) = \\
& q_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - n < \underline{\dim} M, \underline{\dim} Y > + n \cdot \dim_k \operatorname{Ext}_B^2(M, Y) = \\
& \chi_B(\underline{\dim} Y) + n^2 - n < \underline{\dim} M, \underline{\dim} Y > + n \cdot \dim_k \operatorname{Ext}_B^2(M, Y)
\end{aligned}$$

Comparando temos:

Proposição 1.4.7 Com as notações acima:

$$\chi_A(\underline{\dim} X) = q_A(\underline{\dim} X) - n \cdot \dim_k \operatorname{Ext}_B^2(M, Y)$$

1.5 Álgebras inclinadas

A teoria inclinante foi primeiramente desenvolvida por Brenner e Butler, ([BB]) e posteriormente formalizada, como hoje a conhecemos, por Happel e Ringel ([HR]).

Os resultados aqui apresentados, podem ser vistos no artigo survey de Assem ([A]).

A motivação para estudar álgebras inclinadas vem do fato de que a categoria de módulos de uma álgebra inclinada B está muito próxima à categoria de módulos sobre a álgebra hereditária H , quando B é H -inclinada, isto é, $B = \operatorname{End}_H(T)$ (para T um módulo incliante), pelo teorema de Brenner e Butler. E, por isso, podemos obter informações sobre a categoria $B\text{-mod}$, estudando a categoria $H\text{-mod}$.

Vamos então às definições:

Definição 1.5.1 [A] Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Um A -módulo T é dito incliante se satisfaz:

- 1) $\operatorname{pd}_A T \leq 1$
- 2) $\operatorname{Ext}_A^1(T, T) = 0$
- 3) o número de somandos diretos indecomponíveis não isomorfos de T é igual ao número de classes de isomorfismos de simples em $A\text{-mod}$.

Estamos em condições de ver o Teorema de Brenner e Butler:

Teorema 1.5.2 [A] Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita, ${}_A T$ módulo inclinante e $B = \text{End}_A T$. Então:

- 1) ${}_B T$ é um módulo inclinante e canonicamente $A \cong \text{End}_B(T)$.
- 2) Os funtores $\sum = \text{Hom}_A(T, -)$ e ${}_A T_B \otimes -$ induzem equivalências mutuamente inversas entre as seguintes subcategorias plenas:

$$\mathcal{G}(T) = \{{}_A M \mid \text{Ext}^1(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{{}_B N \mid \text{Tor}_B(T, N) = 0\}$$

e os funtores $\sum' = \text{Ext}_A^1(T, -)$ e $\text{Tor}_B(T, -)$, entre as categorias

$$\mathcal{F}(T) = \{{}_A M \mid \text{Hom}_A(T, M) = 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{X}(T) = \{{}_B N \mid T \otimes_B N = 0\}$$

Com notações do teorema acima, chamamos (B, T, A) de terna inclinante. Neste caso:

Teorema 1.5.3 [A] Seja (B, T, A) uma terna inclinante. Então $|gldim B - gldim A| \leq 1$.

Definição 1.5.4 [A] Um par de torção em $A\text{-mod}$ é um par $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ de classes de módulos tais que:

- 1) $\text{Hom}_A(M, N) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{G} \text{ e } \forall N \in \mathcal{F}$.
- 2) $\text{Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{G}$.
- 3) $\text{Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{G}} = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{F}$.

A classe $\mathcal{G}$ é chamada classe de torção e a classe $\mathcal{F}$ é chamada de livre de torção.

Observação 1.5.5 As subcategorias plenas, dadas pelo teorema de Brenner e Bultler são tais que $(\mathcal{G}(T), \mathcal{F}(T))$ é par de torção em $A\text{-mod}$ e $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ é par de torção em $B\text{-mod}$.

Definição 1.5.6 Seja (B, T, A) terna inclinante. T é dito separante ou *separating* se o par de torção $(\mathcal{G}(T), \mathcal{F}(T))$ cinde em A -ind (isto é, todo módulo indecomponível M pertence a $\mathcal{G}(T)$ ou a $\mathcal{F}(T)$). T é dito separador ou *splitting* se o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde em B -ind. Se T é separador, todos os B -módulos indecomponíveis são imagens de A -módulos pelos funtores Σ ou Σ' . Nesse caso, temos também uma descrição completa das sequências de Auslander-Reiten em B -mod.

Teorema 1.5.7 [A] Critério de Hoshino.

Seja (B, T, A) uma terna inclinante.

Então:

- 1) T_A é separante $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{X}(T), \text{pd}(X) = 1$.
- 2) T_A é separador $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{F}_A(T), \text{id}(Y) = 1$.

Voltemos então para as álgebras inclinadas.

Definição 1.5.8 [A] Seja H uma álgebra hereditária, de dimensão finita e T um H -módulo inclinante. Então $B = \text{End}_H(T)$ é dita uma álgebra inclinada.

Observação 1.5.9 Temos então que:

- (a) Pelo teorema 1.5.7, todo módulo inclinante sobre uma álgebra hereditária é separador e assim, $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde em B -ind. Assim sendo, o tipo de representação da álgebra inclinada B é sempre "menor ou igual" ao tipo de representação da álgebra H , no sentido que se H é mansa, B é mansa ou de tipo de representação finito.
- (b) Pelo teorema 1.5.3, sabemos que $\text{gldim } B \leq 2$.
- (c) Se T é livre de multiplicidades, teremos B básica.
- (d) O quiver ordinário de B não tem circuitos orientados.

Podemos caracterizar as álgebras inclinadas usando para isso um certo conjunto de módulos: B é inclinada se e só se possui uma *fatia completa*

Definição 1.5.10 [R2] Um conjunto de módulos indecomponíveis e não isomorfos $\mathcal{S}$ é dito uma fatia completa se satisfaz:

- (1) $\mathcal{S}$ é sincero (isto é, contém um módulo, não necessariamente indecomponível, sincero).
- (2) $\mathcal{S}$ é fechado por caminhos (isto é, se S_0 e S_1 são módulos em $\mathcal{S}$, e existe $S_0 \rightarrow \dots \rightarrow M \rightarrow \dots \rightarrow S_1$ então $M \in \mathcal{S}$).
- (3) Se M é indecomponível e não projetivo, no máximo um dos módulos M ou τM pertence a $\mathcal{S}$.
- (4) Se M, L são indecomponíveis, $f : M \rightarrow L$ é irredutível e $L \in \mathcal{S}$, então ou $M \in \mathcal{S}$ ou M é não injetivo e $\tau^- M \in \mathcal{S}$.

Pela Propriedade 2 é fácil ver que todos os módulos indecomponíveis da fatia completa pertencem à mesma componente conexa do A-R-quiver de B .

A essa componente, chamaremos de componente de conexão.

Lema 1.5.11 [R2] Sejam H uma álgebra hereditária, ${}_H T$ um H -módulo inclinante e $\text{End}_H(T) = B$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos B -módulos da forma $\sum_H I = \text{Hom}_H(T, I)$ onde I é um H -módulo injetivo indecomponível. Então $\mathcal{S}$ é uma fatia completa em $B\text{-mod}$ e reciprocamente, toda fatia completa ocorre dessa maneira. Além disso, como $H \cong kQ$, a componente de conexão de Γ_B pode ser imersa em $\mathbb{Z}Q^*$, onde Q^* é o quiver oposto de Q .

É bem conhecido que a componente de conexão $\mathcal{C}$ é *standard*, veja-se [L1].

Além disso,

Proposição 1.5.12 [L] Seja B uma álgebra inclinada e $\mathcal{C}$ a componente de conexão de Γ_B . Então X é dirigido $\forall X \in \mathcal{C}$.

Vemos em [[R2] pg 174] que

Dado um módulo inclinante T com $B = \text{End}_H T$ existe uma transformação linear:

$$\sigma_T : \mathbb{K}_0(H) \longrightarrow \mathbb{K}_0(B).$$

entre os grupos de Grothendieck que mede a mudança dos vetores-dimensão sob a ação dos funtores (definidos em 1.5.2) $\sum_T$ e $\sum'_T$

$$\sigma_T : (\underline{\dim} M) = \underline{\dim} \sum_T M - \underline{\dim} \sum'_T M.$$

Além disso, σ_T é univocamente determinada por essa fórmula e é de fato um isomorfismo dos grupos de Grothendieck. Uma consequência importante é que as formas de Euler de H e de B são $\mathbb{Z}$ -equivalentes.

Teorema 1.5.13 [K] Seja B uma álgebra inclinada de tipo de representação infinito (conexa de dimensão finita). São equivalentes:

- (1) B é mansa
- (2) χ_B é fracamente não negativa

Como o A-R-quiver de uma álgebra hereditária é conhecido, podemos obter uma série de informações sobre o A-R-quiver de B de acordo com as diversas possibilidades de T e H (veja-se [R2]).

Vejamos caso a caso:

Seja H uma álgebra hereditária mansa então T pode ser das seguintes formas:

- (1) T tem um somando pós-projetivo e um somando pré-injetivo. (Pode ou não ter somandos regulares). Nesse caso $B = \text{End}_H(T)$ é de tipo de representação finito.
- (2) T tem um somando pós-projetivo e um somando regular (mas não tem pré-injetivo). Nesse caso, B é uma extensão por ramos de uma álgebra mansa oculta B_0 e B possui uma fatia completa na componente pré-injetiva. Além disso, a componente pré-injetiva de H está contida em $(\mathcal{G}(T))$ e B é de tipo infinito.
- (2*) T tem um somando pré-injetivo e um regular (mas não tem pós-projetivo) e então a componente pós-projetiva está contida em $\mathcal{F}(T)$. Dualmente, B é uma co-extensão por ramos de uma álgebra mansa oculta B_0 e B possui uma fatia completa na componente pós-projetiva.
- (3) T é pós-projetivo então B é mansa oculta.
- (3*) T é pré-injetivo então B é mansa oculta.

Nos casos acima diremos que B é de tipo euclídeano.

Por [R3] se H é uma álgebra hereditária mansa, não existe módulo inclinante regular :

Figura 1.1: A-R quiver de B

Teorema 1.5.14 Seja B uma álgebra de dimensão finita, hereditária, conexa, de tipo de representação infinito, então existe um módulo inclinante regular se e só se B é selvagem e tem no mínimo 3 módulos simples.

Para H uma álgebra hereditária selvagem, como estamos supondo B mansa, temos por [[K],2.2] que T possui somandos pós-projetivos e pré-injetivos. Além disso, a estrutura do A-R-quiver de B é dada por (Fig 1.1)

Teorema 1.5.15 [[K],4.1] Seja H uma álgebra hereditária selvagem, T um H -módulo inclinante e $B = \text{End}_H(T)$. Então:

- B é uma co-extensão iterada de B_∞ com B_∞ uma álgebra (não necessariamente conexa) inclinada e $B_\infty = \text{End}_{H_\infty}(T_\infty)$ onde T_∞ é um H_∞ -módulo sem somandos diretos pós-projetivos.
- B é uma extensão iterada de ${}_\infty B$ com ${}_\infty B$ uma álgebra (não necessariamente conexa) inclinada e ${}_\infty B = \text{End}_{{}_\infty H}({}_\infty T)$ onde ${}_\infty T$ é um ${}_\infty H$ -módulo sem somandos diretos pré-injetivos.

Capítulo 2

Módulos dirigidos

Neste capítulo iremos analisar diversas categorias vectoriais $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$, que podem ocorrer quando M é B -módulo dirigido e indecomponível e B é uma álgebra inclinada mansa. Para o caso em que $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$ é finita, iremos analisar alguns casos.

2.1 Categorias Infinitas

Lema 2.1.1 Sejam R_i , $i = 1, \dots, n$ módulos numa família tubular separante $\mathcal{T}$ do A-R quiver de B , tal que $R_i \in \mathcal{T}_i$, onde $\mathcal{T}_i$'s são tubos distintos. Então:

$$\text{Ext}^r(R_i, R_j) = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j, \quad \forall r \geq 0.$$

Dem: Suponhamos que $\mathcal{T}$ é uma família tubular à direita da fatia completa (o outro caso é análogo). Pela fórmula de Auslander ([R2]), temos:

$$\text{Ext}^1(R_i, R_j) = D\underline{\text{Hom}}(\tau^{-1}R_j, R_i).$$

Mas $\tau^{-1}R_j$ pertence ao mesmo tubo que R_j e como não há morfismos entre os tubos

$$\text{Hom}(\tau^{-1}R_j, R_i) = 0 \implies \text{Ext}^1(R_i, R_j) = 0.$$

Além disso, como, por [[R2],3.1(5)] *id* $R_i \leq 1$, tem-se $Ext^s(R_j, R_i) = 0$ para $s > 1$ (Para R_i e R_j numa família tubular à esquerda da fatia, teremos $pdim R_i \leq 1$ de onde $Ext^s(R_i, R_j) = 0$). $\square$

Seja M um B -módulo indecomponível e suponhamos que para algum vértice x pertencente ao suporte de M , tenhamos M e I_x (o injetivo indecomponível associado a x) separados por uma família tubular separante. Veremos que neste caso a extensão $B[M]$ é selvagem e a forma quadrática, fortemente indefinida.

Lema 2.1.2 Seja M um B -módulo indecomponível pertencente a alguma componente dirigida que não seja uma componente pré-injetiva e tal que $Hom(M, I) \neq 0$ para algum I injetivo em alguma componente pré-injetiva. Então:

- 1) $B[M]$ é selvagem.
- 2) $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Demonstração: Provamos apenas 2) pois que 2) $\implies$ 1).

Como $Hom(M, I) \neq 0$, temos $f : M \rightarrow I$, $f \neq 0$ um morfismo entre componentes separadas por famílias tubulares separantes. Seja $\mathcal{I}$ a componente pré-injetiva à qual I pertence e seja $\mathcal{T}_j$ uma família tubular separante. Como $f \in rad^\infty(B - mod)$ e como $\mathcal{T}_j$ é separante, o morfismo f se fatora através de qualquer tubo de $\mathcal{T}_j$, isto é, para todo $\alpha \in P(k)$, $\exists R_j \alpha \in \mathcal{T}_j \alpha$ e tal que $Hom(M, R_j \alpha) \neq 0$.

Além disso a família $\mathcal{T}_j$ é constituída de tubos 2 a 2 ortogonais (e que são estáveis ou co-insertados, pois os projetivos estão sempre à esquerda da fatia).

Dados então R_α e R_β em tubos distintos teremos $Ext^r(R_\alpha, R_\beta) = 0$. Assim sendo, podemos escolher 5 módulos (em tubos distintos) R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , com $Hom(M, R_j) \neq 0$ e vamos agora calcular a forma quadrática para o seguinte vetor-dimensão: (S_e o novo simples)

$$\begin{aligned} q_{B[M]}(\underline{dim} \bigoplus_{i=1}^5 R_i \oplus S_e^2) = \\ = \chi_{B[M]}(\underline{dim} R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4 \oplus R_5 \oplus S_e^2) + \end{aligned}$$

$$+2.\dim Ext^2(M, R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_5).$$

Como M é um módulo dirigido $Hom(M, R_i) \neq 0 \implies Ext^j(M, R_i) = 0$ para $j > 0$. Assim, basta calcular

$$\begin{aligned} \chi_{B[M]}(\underline{\dim} R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_5 \oplus 2S_e) = \\ = \chi_{B[M]}(\sum_{i=1}^5 \underline{\dim} R_i) + 4 - 2 < \underline{\dim} M, \underline{\dim} \bigoplus_{i=1}^5 R_i >_B. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} < \underline{\dim} M, \underline{\dim} \bigoplus_{i=1}^5 R_i >_B = \\ = \sum_{i=1}^5 \left(\sum (-1)^j \cdot \dim_k Ext^j(M, R_i) \right) = \\ = \sum_{i=1}^5 (\dim_k Hom_B(M, R_i) - \dim_k Ext^1(M, R_i) + \\ + \dim_k Ext^2(M, R_i)) \end{aligned}$$

como $\dim Hom(M, R_i) \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, 5$ tem-se que $< \underline{\dim} M, \underline{\dim} \bigoplus R_i > \geq 5$. Vejamos agora

$$\chi_B(\sum_{i=1}^5 \underline{\dim} R_i) = \sum_{i=1}^5 \chi_B(\underline{\dim} R_i) + \sum_{i \neq j} < R_i, R_j >.$$

Como, para $i \neq j$ temos $< R_i, R_j > = 0$, e $\chi_B(\underline{\dim} R_i) = 0$ ou 1 (por [P2] se R_i pertence a um tubo de posto 1 ou se R_i pertence a um tubo de posto > 1 , respectivamente) e então

$$\chi_B \left(\sum_{i=1}^5 \underline{\dim} R_i \right) \leq 5.$$

Assim sendo,

$$\chi_{B[M]} \left(\underline{\dim} \bigoplus_{i=1}^5 R_i \oplus S_e^2 \right) \leq 5 + 4 - 2 \cdot < \underline{\dim} M, \underline{\dim} \bigoplus R_i > \leq 5 + 4 - 2 \cdot 5 \leq -1.$$

Logo $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida e a álgebra $B[M]$ é selvagem. $\square$

Observação 2.1.3 Por [P2] se M é um módulo da família tubular à esquerda da fatia completa, tal que existe um injetivo em alguma componente pré-injetiva com $\text{Hom}(M, I) \neq 0$, essa demonstração vale igualmente, pois se M está a esquerda da fatia completa e R_i à direita teremos novamente que $\text{Hom}(M, R_i) \neq 0 \implies \text{Ext}^j(M, R_i) = 0$ para $j > 0$.

Lema 2.1.4 Seja B_0 uma subcategoria convexa de B tal que B é co-extensão iterada ou co-extensão por ramos de B_0 e suponha $M_0 = M|_{B_0}$, $M_0 \neq 0$. Então $B_0[M_0]$ é uma subcategoria convexa de $B[M]$.

Dem.: 1º caso: Seja B uma co-extensão iterada de B_0 isto é $B = [N_1][N_2]\dots[N_t]B_0$. Faremos a demonstração por indução no número de co-extensões. Os N_i 's considerados podem ser decomponíveis.

Seja $n = 1$ e $B = [N]B_0$. Chamamos de i ao vértice da co-extensão. Portanto i é um poço. Como B_0 é uma subcategoria convexa de B , se x e y são vértices de B_0 , e existe um caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$ então $z \in B_0$. Sejam x e y vértices de $B_0[M_0]$. Se x e y pertencem a B_0 , para qualquer caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$, teremos $z \in B_0$, logo $z \in B_0[M_0]$.

Suponhamos que existe um caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$ com $x, y \in B_0[M_0]$.

Se $x, y \notin B_0$, um deles é o vértice de extensão por M_0 (e portanto uma fonte) e podemos supor que seja x . Então o caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$ está inteiramente contido em $B_0[M_0]$ ou esse caminho passa por i mas $i \notin B_0[M_0]$, logo $y \neq i$.

Como i é um poço, não pode haver caminho $i \rightarrow y$. Logo o caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$ está inteiramente contido em $B_0[M_0]$ e $B_0[M_0]$ é convexa em $B[M]$.

Enunciamos a hipótese de indução: Se B é uma co-extensão iterada de B_0 um número de co-extensões menor ou igual a n , então $B_0[M_0]$ é convexa em $B[M]$.

Suponhamos agora que B é uma co-extensão iterada de B_0 por $n + 1$ co-extensões. Seja B_n uma co-extensão iterada de B_0 em n co-extensões e talque $B = [N']B_n$ isto é

$$B = [N']B_n = [N'] [N_n] \cdots [N_1] B_0.$$

Seja i o vértice da co-extensão por N' e seja x o vértice da extensão por M_0 . Então x é fonte e i é poço.

Suponhamos $x \rightarrow y$ um caminho com $y \in B_0$. Pela hipótese de indução, o caminho não se fatora por nenhum vértice de B_n que não seja vértice de B_0 e não se fatora através de i pois i é um poço e logo $B_0[M_0]$ é convexa em $B[M]$.

2º caso: Seja B uma co-extensão por ramos de B_0 . Faremos a demonstração por indução em $n = \text{comprimento do ramo}$.

Para $n = 1$, temos $B = [N]B_0$, já feito no 1º caso.

Suponhamos então que $B_0[M_0]$ é convexa em $B[M]$ quando B é uma co-extensão por um ramo de comprimento n , isto é, $B = [E, R]B_0$, onde R é um ramo de comprimento n .

Consideramos agora $B = [E', R']B_0$, com R' um ramo de comprimento $n + 1$. Seja i o vértice da co-extensão por E' , portanto não há caminhos $i \rightarrow y$ quando $y \in B_0$. Seja x o vértice associado à extensão por M . Suponhamos um caminho $x \rightarrow z \rightarrow y$ com $y \in B_0$.

Se z pertence ao ramo, o caminho passa por i o que já vimos que não é possível. Assim, $z \notin R'$, $z \neq i$ logo $z \in B_0$ e portanto $B_0[M_0]$ é convexa em $B[M]$. $\square$

Veremos que se M é um B -módulo dirigido, pertencente a uma componente dirigida $\mathcal{C}$, tal que $\text{Hom}(M, I) \neq 0$ apenas para os injetivos indecomponíveis I que pertencem a $\mathcal{C}$ então a categoria vectorial $\text{Hom}(M, B - \text{mod})$ satisfaz as propriedades abaixo:

Lema 2.1.5 Seja M um B -módulo em $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma componente dirigida, *standard* e que contém injetivos do quiver de Auslander-Reiten de B , e suponhamos que M é tal que $\text{Hom}(M, I) \neq 0$ apenas para alguns injetivos indecomponíveis I que pertencem a $\mathcal{C}$, então a categoria vectorial $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$ é tal que $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod}) = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$ é finita.

Dem:

Seja N um B -módulo tal que $\text{supp}N \cap \text{supp}M = \emptyset$ então $\text{Hom}(M, N) = 0$. Mas para todo N que pertence a qualquer componente à direita de $\mathcal{C}$ temos $\text{supp}N \cap \text{supp}M = \emptyset$ então $\text{Hom}(M, N) = 0$ e como B é uma álgebra inclinada, $\text{Hom}(M, N) = 0$ para todo

N à esquerda de M . Portanto $\text{Hom}(M, N) \neq 0$ apenas para os B -módulos N em $\mathcal{C}$ e à direita de M , isto é $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$.

Vejam os que $\mathbb{K}$ é finita.

Sejam $I_1, I_2, \dots, I_t$ os injetivos indecomponíveis pertencentes a $\mathcal{C}$, tais que $\text{Hom}(M, I_i) \neq 0$. Para cada i , como $\text{Hom}(M, I_i) \neq 0$ e estão na mesma componente (que é *standard*) existem caminhos finitos de M a I_i . Seja $N \in \mathcal{C}$ com $\text{Hom}(M, N) \neq 0$, então N é posterior a M , isto é, existe um caminho finito de M a N e além disso $\text{supp}N \cap \text{supp}M \neq \emptyset$ logo para alguns injetivos da lista acima teremos $\text{Hom}(N, I_j) \neq 0$. Portanto qualquer módulo N com $\text{Hom}(M, N) \neq 0$ é tal que $N \in \mathcal{C}$ e N pertence a algum dos caminhos (finitos) de M a I_j , portanto $\mathbb{K}$ é finita. $\square$

2.2 Categorias Finitas

Iremos analisar alguns casos em que as categorias $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod})$ são tais que $\mathbb{K}$ é finita, está inteiramente contida em uma componente *standard*, dirigida e de tipo árvore e $\mathbb{K}$ é selvagem, e teremos, nestes casos, que $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida. Claramente, essas categorias são *schurian*, por estarem imersas em componentes dirigidas. Estes resultados estendem a lista dada em [M1].

Ao longo desta secção, estamos considerando M indecomponível, veja-se 2.2.10, o caso em que M é decomponível. Além disso, os resultados são válidos para qualquer álgebra B com dimensão global menor ou igual a dois (desde que possamos definir o quiver de órbitas da componente em questão).

Definição 2.2.1 [MP] Seja $\mathcal{C}$ uma componente pré-injetiva de Γ_Λ . Definimos o quiver de órbitas de $\mathcal{C}$, denotado por $O_\tau(\mathcal{C})$ como segue: Os vértices de $O_\tau(\mathcal{C})$ são as τ -órbitas I_x^τ dos injetivos indecomponíveis de $\mathcal{C}$.

Para $I_x \in \mathcal{C}$, $I_x/S_x \cong \oplus Y_i$ onde $Y_i = \tau^{m_i} I_i$.

Neste caso colocamos uma flecha $I_x^\tau \rightarrow I_i^\tau$ no quiver das órbitas $O_\tau(\mathcal{C})$. De maneira semelhante, se $\mathcal{C}$ é a componente de conexão definimos o quiver de órbitas de $\mathcal{C}$, cujos vértices são dados pelos módulos da fatia completa.

Definição 2.2.2 [MP] Dizemos que a componente dirigida $\mathcal{C}$ é de tipo árvore se o seu quiver de órbitas for uma árvore.

Definição 2.2.3 [M1] Dois conjuntos L e L' de $\text{ind}\mathbb{K}$ são chamados de caminho-incomparáveis se para todo $|X| \in L$ e $|Y| \in L'$, não existe caminho em $\mathcal{C}$ entre X e Y .

A seguir apresentamos alguns resultados preliminares.

Notação Como em [M1] denotamos por $\square$ aos objetos de $\mathbb{K}$ que tem dimensão dois e por $\blacksquare$ aos objetos de dimensão maior ou igual a tres. Denotamos por $\|X\| = \dim_k \text{Hom}_B(M, X)$, isto é, a dimensão do objeto $|X| \in \mathbb{K}$.

Teorema 2.2.4 [M1] Se a componente pré-injetiva $\mathcal{C}$ do quiver de Auslander-Reiten de B é de tipo árvore e se a categoria $\text{ind } \mathbb{K}$ contém, como uma subcategoria plena, uma das categorias L da lista abaixo e as componentes conexas de L são caminho-incomparáveis. Então a forma de Euler χ_Λ é fortemente indefinida.

$(1,1,1,1,1), (1,1,1,2), (2,2,3), (1,3,4), (1,2,6) (N,5)$ ou $(\square \quad \bullet)$ ou $(\blacksquare)$

Como em [M1] chamamos esta lista de lista A.

Proposição 2.2.5 [MP] Seja $\mathcal{C}$ uma componente pré-injetiva de Γ_B de tipo árvore. Seja $\gamma : X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_s$ um caminho seccional em $\mathcal{C}$. Seja $\delta : \tau^{-n}X_0 \rightarrow \tau^m X_s$ um caminho com $n, m \geq 0$. Então $n = 0 = m$ e $\delta = \gamma$.

Lema 2.2.6 [MP]. Seja $\mathcal{C}$ uma componente pré-injetiva de Γ_B de tipo árvore. Seja $\gamma : X_0 \rightarrow \cdots X_{s-1} \rightarrow X_s$ um caminho seccional em $\mathcal{C}$ com $s \geq 1$.

Suponhamos que existe um módulo $M \in \mathcal{C}$ e caminhos:

$M \xrightarrow{\delta} X_0$ e $M \xrightarrow{\gamma} Y \longrightarrow X_s$ com $Y \neq X_{s-1}$. Então X_i não é projetivo, para $0 < i \leq s$.

Os resultados acima, que foram enunciados para componentes pré-injetivas, continuam válidos neste contexto.

Definição 2.2.7 [MP] Seja $M = \oplus M_i$ com M_i B -módulos indecomponíveis em alguma componente como acima. Diremos que M é bom se as categorias vectoriais $\text{Hom}(M_i, B\text{-mod})$ são disjuntas e além disso, $\cup \text{Hom}(M_i, B\text{-mod})$ é subcategoria plena de $\cup \mathcal{I}_i$ onde $\mathcal{I}_i$ é a componente dirigida onde está M_i (com a possibilidade de várias iguais).

Definição 2.2.8 [MP] Seja $M \in \Gamma_B$, seja $B_s(M)$ a álgebra suporte de sucessores de M , definida como a restrição de B ao subquiver pleno de todos os vértices a tal que existe uma cadeia de morfismos não nulos entre módulos indecomponíveis $M = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_t = I_a$.

Dizemos que M é relativamente pré-injetivo se M pertence a alguma componente pré-injetiva de $\Gamma_{B_s(M)}$

Teorema 2.2.9 [MP] Seja B uma álgebra mansa e M um B -módulo. Suponhamos que M é um bom pré-injetivo relativo de tipo árvore e que $\dim_k \text{Hom}(M, N) \leq 1 \quad \forall N \in \Gamma_B$. Então $A = B[M]$ é mansa se e somente se q_A é fracamente não negativa.

Observação 2.2.10 Vemos então que se M é bom e essas subcategorias são tais que $\dim \text{Hom}(M, N) \leq 1 \quad \forall N \in \Gamma_B$ teremos que $B[M]$ é mansa se e somente se $q_{B[M]}$ é fracamente não negativa.

Por outro lado se $M = M_1 \oplus M_2$ com M bom, e se existe algum B -módulo indecomponível X tal que $\dim \text{Hom}(M, X) = 2$, como as subcategorias são disjuntas, teremos para algum i que $\dim \text{Hom}(M_i, X) = 2$ e como a reunião é plena, para $j \neq i$ e para Y tal que $\text{Hom}(M_j, Y) \neq 0$, temos claramente que X e Y são caminho-incomparáveis, portanto $B[M]$ é selvagem e a forma quadrática é fortemente indefinida.

Começamos por provar o

Teorema 2.2.11 Seja B uma álgebra mansa inclinada, M um B -módulo indecomponível em $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é uma componente pré-injetiva ou a componente de conexão (que contém injetivos), de tipo árvore.

Suponhamos que $\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B\text{-mod}) = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$ é uma categoria com um número finito de objetos e que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena de uma das formas seguintes:

- a) $\{|X|\}$ com $\|X\| = \dim_k |X| \geq 3$
- b) $\{|X|, |Y|\}$ com $\dim_k |X| = 2$, $|Y| \neq 0$ e $\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Y|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Y|, |X|) = 0$
- c) $\{|X|, |Y|\}$ com $\dim_k |X| = 2$, $\dim_k |Y| = 2$, e

$$\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Y|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Y|, |X|) = 1$$

então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Para demonstrar o teorema precisamos dos resultados seguintes:

Lema 2.2.12 Seja $\mathbb{K}$ uma categoria como acima e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena L uma das categorias da lista A . Suponhamos, além disso, que as componentes conexas de L são caminho-incomparáveis. Então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Demonstração. Sabemos pelo teorema 2.2.4 que existe um vetor dimensão z de coordenadas não negativas tais que $\chi_{B[M]}(z) < 0$.

Além disso, pela demonstração vemos que $z = \underline{\dim} Z = \underline{\dim} \bigoplus_{i=1}^t X_i^{n_i} \oplus n \cdot S_e$ onde S_e é o novo simples e $\{X_1, X_2, \dots, X_s\}$ correspondem aos módulos pré-injetivos correspondentes à subcategoria plena L e portanto $\text{Hom}_B(M, X_i) \neq 0 \forall i$, e como M é um módulo dirigido, se $\text{Ext}^j(M, X_i) \neq 0$ teríamos um caminho $X_i \rightarrow \tau M \rightarrow \dots \rightarrow M$.

Mas temos um caminho, (pois a componente é *standard*) $M \rightarrow X_i$ e assim $M \rightarrow X_i \rightarrow \tau M \rightarrow \dots \rightarrow M$, contradição.

Logo para todo i e para todo $j > 0$, $\text{Ext}^j(M, X_i) = 0$.

Assim, pela proposição 1.4.7.

$$q_{B[M]}(\underline{\dim} Z) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim} Z) + n \cdot \dim_k \text{Ext}^2(M, \bigoplus_{i=1}^t X_i)$$

logo $q_{B[M]}(\underline{\dim} Z) < 0$. $\square$

Proposição 2.2.13 Seja $\mathbb{K}$ uma categoria vectorespacial como acima e sejam X_0, Y_0 em $\mathcal{C}$ tais que

$$\|X_0\| = 2, \quad \|Y_0\| \neq 0, \quad \text{Hom}(|X_0|, |Y_0|) = 0$$

e suponhamos que existe um caminho em $\mathcal{C}$, $\delta : X_0 \rightarrow Y_0$.

Então $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena L da lista A acrescida da categoria $(\square \square)$ e cujas componentes conexas são caminho-incomparáveis.

Notação Chamamos de A' a essa lista.

Demonstração.(por indução no comprimento dos caminhos). Suponhamos que existe um caminho

$$\delta : X_0 \rightarrow Y_0, \text{ com } \text{Hom}(M, \delta) = 0 = |\delta|.$$

Seja n =máximo dos comprimentos dos caminhos δ nessas condições ($n \geq 1$ pois $X_0 \neq Y_0$).

Este caminho é limitado pois $\mathcal{C}$ é dirigida e localmente limitada.

Para $n = 1$, δ é uma flecha. Sejam $g \neq 0$, $g : M \rightarrow Y_0$ e $f_1, f_2 : M \rightarrow X_0$ linearmente independentes. Como $|\delta| = 0$, $\delta f_i = 0$ logo δ não é monomorfismo, portanto é epimorfismo pois é flecha.

Logo Y_0 não é projetivo e podemos considerar a ARS que termina em Y_0 .

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0 & & M \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \delta & \downarrow g \\ \tau Y_0 & & & & Y_0 \\ & \searrow \alpha_i & & \nearrow \beta_i & \\ & & Z_i & & \end{array}$$

Chamamos $Z = \oplus Z_i$

a função: $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}} X_0 \oplus Z$ é tal que: $M \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}} X_0 \oplus Z \xrightarrow{(\delta, \beta)} Y_0$ tem composta nula logo se fatora pelo kernel de (δ, β) , isto é, existe $f'_1 : M \rightarrow \tau Y_0$ tal que $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} f'_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\text{Hom}(M, \tau Y_0) \neq 0$ e similarmente para f_2 .

Mas, por outro lado, temos $g : M \rightarrow Y_0$, $|g| \neq 0$, g não é epimorfismo que cinde, logo g se levanta na forma:

$$g = \delta g' + \sum \beta_i g'_i$$

$$\begin{aligned} |g| &= |\delta g'| + |\sum \beta_i g'_i| = \\ &|\delta| |g'| + \sum |\beta_i f'_i| \end{aligned}$$

Como $|\delta| = 0$, existe i tal que $|\beta_i g'_i| \neq 0$ e portanto existe Z_i indecomponível com $|Z_i| \neq 0$, logo podemos considerar a seguinte subcategoria plena caminho-incomparável $\{|X_0|, |Z_i|\}$ e temos o resultado.

Agora, suponhamos válido para comprimento de δ menor do que n .

Podemos supor que $g : M \rightarrow Y_0$ é um epimorfismo pois seja

$$M \longrightarrow \oplus Y_i \xrightarrow{\eta} Y_0 \text{ com } \text{Im } g = \oplus Y_i$$

Se $\text{Hom}(|X_0|, |Y_i|) = 0$ para algum i , como $|Y_i| \neq 0$ e Y_i é antecessor de Y_0 temos um caminho de comprimento menor do que n entre X e Y_i e estamos na hipótese de indução.

Suponhamos que $\text{Hom}(|X_0|, |Y_i|) \neq 0$ para algum i . Então existe α não nulo:

$$X_0 \xrightarrow{\alpha} Y_i \xrightarrow{\varphi} \oplus Y_i \xrightarrow{\eta} Y_0$$

com $|\alpha| \neq 0$. Mas η, φ são inclusões, logo $|\eta|$ e $|\varphi|$ são injetoras, logo $|\eta\varphi\alpha| : X_0 \rightarrow Y_0$, $|\eta\varphi\alpha| \neq 0$ o que contraria a hipótese de $\text{Hom}(|X_0|, |Y_0|) = 0$.

Vejamos agora o passo de indução: Suponhamos que existe um caminho máximo de comprimento n de X_0 a Y_0 para o qual temos um epimorfismo $g : M \rightarrow Y_0$ e que a proposição vale para caminhos máximos de comprimento menor do que n . Então Y_0 não

é projetivo, e podemos considerar a ARS.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_0 & & M \\
 & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \downarrow g \\
 \tau Y_0 & & \vdots & & Y_0 \\
 & \searrow \alpha_i & & \nearrow \beta_i & \\
 & & \vdots & &
 \end{array}$$

Como g não é epimorfismo que cinde, ele se levanta, isto é: $g = \beta g' + \sum \beta_i g_i$.

Como g é não nulo, existe um antecessor imediato de Y_0 que chamamos de Z_0 , tal que $|Z_0| \neq 0$.

Os caminhos de X_0 a Y_0 passam por alguns dos Z_i e não existe caminho $Z_0 \rightarrow X_0$ (pois se não, teríamos o caminho $Z_0 \rightarrow X_0 \rightarrow Y_0$ e o caminho $Z_0 \rightarrow Y_0$ que é seccional, o que contraria a proposição 2.2.5).

Portanto, se não existe caminho $X_0 \rightarrow Z_0$, teremos X_0 e Z_0 caminho-incomparáveis.

Por outro lado, se existe caminho $\delta' : X_0 \rightarrow Z_0$ com $\text{Hom}(|X_0|, |Z_0|) = 0$, vale a hipótese de indução.

Podemos supor então que existe um caminho $\delta' : X_0 \rightarrow Z_0$, com $|\delta'| \neq 0$.

Como $|\beta\delta'| = 0$, temos que $|\beta|$ não é injetora, logo β não é monomorfismo, β é um epimorfismo e $\dim|Z_0| \geq 2$ pois temos 2 morfismos de M em Z_0 ; g' com $\beta g' \neq 0$ e $\delta' \tilde{f}_i$ com $\beta \delta' \tilde{f}_i = 0$ e que são linearmente independentes, para $\tilde{f}_i : M \rightarrow X_0$.

Se há outro Z_i , com $|Z_i| \neq 0$, então Z_0 e Z_i são caminho-incomparáveis e a categoria $\{|Z_0|, |Z_i|\}$ é a categoria que procuramos. Suponhamos então que $|Z_i| = 0 \forall i \neq 0$ e portanto $\alpha_i : \tau Y_0 \rightarrow Z_i$ é epimorfismo $\forall i \neq 0$.

Observe que $g' : M \rightarrow Z_0$ não pode se fatorar através de τY_0 . Com efeito, suponhamos que exista $\varphi : M \rightarrow \tau Y_0$ com $\alpha\varphi = g'$.

Neste caso $\beta\alpha\varphi = \beta g' = g$ mas $|\beta\alpha| = \sum_{i \neq 0} |\beta_i \alpha_i|$ e como $\text{Hom}(M, Z_i) = 0 \forall i \neq 0$, $|\beta\alpha\varphi| = |(\sum_{i \neq 0} \beta_i \alpha_i)\varphi| = 0$, contradição, logo existe um antecessor direto de Z_0 , digamos T com $|T| \neq 0$, $T \neq \tau Y_0$ e $h : M \rightarrow T$ tal que $g' = \beta' h$, por outro lado, $\delta' : X_0 \rightarrow Z_0$ é tal que $|\delta'| \neq 0$ mas $|\beta\delta'| = 0$ (isto é $\beta\delta' \tilde{f}_i = 0$) e a função $\delta'(\tilde{f}_i)$ se fatora pelo kernel da função $(\beta, \beta_1, \dots, \beta_t)$.

Isto é, $\delta' \tilde{f}_i$ se fatora por τY_0 e portanto $|\tau Y_0| \neq 0$.

Temos o diagrama:

Podemos supor que existe $\gamma : X_0 \rightarrow T$, $|\gamma| \neq 0$ (pois se não existe γ ou se $\text{Hom}(|X_0|, |T|) = 0$, podemos aplicar a hipótese de indução). Consideremos inicialmente o caso que T é indecomponível. Teremos então dois morfismos de M em T :

$\gamma \tilde{f}_i$, com $\beta \beta' \gamma \tilde{f}_i = 0$, e h com $\beta' h = g'$:

$$M \xrightarrow{\tilde{f}_i} X_0 \xrightarrow{\gamma} T \quad \text{e} \quad M \xrightarrow{h} T \xrightarrow{\beta'} Z_0$$

Como $\beta(\beta' h) = \beta g' = g \neq 0$, $\gamma \tilde{f}_i$ e h são linearmente independentes. Assim $\|T\| \geq 2$ e T e τY_0 são caminho-incomparáveis.

Examinamos agora o caso em que T se decompõe (e podemos supor $T = T_1 \oplus T_2$ e $\|T_1\| = \|T_2\| = 1$.)

Com estas hipóteses, podemos supor $\|Y_0\| = 1$ pois, a menos que $\|Z_0\| = 3$ teríamos $|\tau Y_0| = 0$, contradição.

Neste caso $\|\tau Y_0\| = 1$, e seja T_1 o somando pelo qual g' se levanta.

Suponhamos que houvesse $\gamma : X_0 \rightarrow T_1$ com $|\gamma| \neq 0$ (e neste caso, como dimensão de $|T_1|$ é igual à 1, $|\gamma|$ seria sobrejetora), mas $\text{Im}|\gamma| = \langle h \rangle = |T_1|$ e $\beta' h = h'$. Mas então

$\beta\beta'h = g \neq 0$ logo $\text{Hom}(|X_0|, |Y_0|) \neq 0$ contradição, logo $\text{Hom}(|X_0|, |T_1|) = 0$ e estamos na hipótese de indução. $\square$

Corolário 2.2.14 Nas hipóteses da proposição, temos $q_{B[M]}$ fortemente indefinida.

Demonstração. Basta provar o caso em que temos X, Y caminho-incomparáveis com $\|X\| = \|Y\| = 2$.

Mas neste caso, (S_e o novo simples, que é injetivo) $q_{B[M]}(\underline{\dim} X + \underline{\dim} Y + \underline{\dim} S_e) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim} X + \underline{\dim} Y + \underline{\dim} S_e) + \dim_k \text{Ext}^2(M, X \oplus Y)$

Como X e Y são sucessores de M , e a componente é dirigida então $\text{Ext}^i(M, X \oplus Y) = 0$ para $i > 0$

$$\begin{aligned} &= \chi_B(\underline{\dim} X + \underline{\dim} Y) + 1^2 - (\dim_k \text{Hom}(M, X \oplus Y) \\ &\quad - \dim_k \text{Ext}^1(M, X \oplus Y) + \dim_k \text{Ext}^2(M, X \oplus Y)) \\ &= \chi_B(\underline{\dim} X + \underline{\dim} Y) + 1^2 - 4 \\ &= \langle \underline{\dim} X + \underline{\dim} Y, \underline{\dim} X + \underline{\dim} Y \rangle + 1 - 4 \\ &= \langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} X \rangle + \langle \underline{\dim} Y, \underline{\dim} Y \rangle + \\ &\quad \langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle + \langle \underline{\dim} Y, \underline{\dim} X \rangle - 3. \end{aligned}$$

Como X e Y são módulos dirigidos e caminho-incomparáveis, temos

$$\langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle = \dim_k \text{Hom}(X, Y) - \dim_k \text{Ext}^1(X, Y) + \dim_k \text{Ext}^2(X, Y) = 0$$

e analogamente

$$\langle \underline{\dim} Y, \underline{\dim} X \rangle = 0.$$

pois, por [M1], se $\text{Ext}^i(X, Y) \neq 0$, existe um caminho em $\mathcal{C}$, $Y \rightarrow \tau X \rightarrow \dots \rightarrow X$, então

$$q_{B[M]}(\underline{\dim} X + \underline{\dim} Y + \underline{\dim} S_e) = 1 + 1 - 3 = -1. \square$$

Vamos agora analisar o caso em que

$$\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod}) = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$$

contém uma subcategoria da forma: $L = \{|X_0|, |Y_0|\}$ com $\|X_0\| = 2$, $\|Y_0\| = 1$, $\text{Hom}(|Y_0|, |X_0|) = 0$ e existe (em $\mathcal{C}$) um caminho $\delta : Y_0 \rightarrow X_0$.

Lema 2.2.15 Seja $\mathbb{K}$ como acima (isto é:

$$\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B - \text{mod}) = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$$

uma categoria com um número finito de objetos indecomponíveis e totalmente imersa em $\mathcal{C}$ componente dirigida e *standard* de tipo árvore; que contém injetivos do quiver de Auslander Reiten de B).

Suponha que $\mathbb{K}$ contém a seguinte subcategoria onde $\|X\| = 2$, $\|E_i\| = 1$ e f_i é morfismo irredutível.

$$\begin{array}{c}
 E_1 \\
 \nearrow f_1 \\
 E_2 \\
 \nearrow f_2 \\
 X \\
 \searrow f_3 \\
 \searrow f_4 \\
 \begin{array}{c} E_3 \\ E_4 \end{array}
 \end{array}$$

Então: $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena caminho incomparável da lista A' .

Demonstração. Iremos ver que se $\mathbb{K}$ não contém uma das categorias de lista A' , então essa subcategoria acima se repete indefinidamente, mas, como $\mathbb{K}$ é finita, isso não pode ocorrer.

Suponhamos então que $\|X\| = 2$ e $\|E_i\| = 1$. Então $|f_i|$ é sobrejetora ou nula.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \nearrow f_1 \\ \nearrow f_2 \end{array} \\
X \\
\begin{array}{c} \searrow f_3 \\ \searrow f_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} E_3 \\ E_4 \end{array}
\end{array}$$

Se $|f_i| = 0$ para algum i , pela proposição 2.2.13, $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria da lista A' , caminho-incomparável.

Podemos então supor que $|f_i| \neq 0 \forall i$.

Como f_i é morfismo irredutível, ou f_i é monomorfismo e então $|f_i|$ seria injetora, o que não pode ocorrer, ou f_i é epimorfismo e portanto E_i é não projetivo.

Consideremos então a ARS que termina em E_i

$$0 \longrightarrow \tau E_i \longrightarrow X \oplus W_i \longrightarrow E_i \longrightarrow 0.$$

Se, para algum i , existe um somando W_i com $|W_i| \neq 0$, temos que $\{|X|, |W_i|\}$ é uma categoria da lista A' , caminho-incomparável.

Supomos então que $|W_i| = 0$ para todo i .

Mas neste caso, $0 \rightarrow |\tau E_i| \rightarrow |X| \rightarrow |E_i| \rightarrow 0$ é sequência exata curta em $\mathbb{K}$ e portanto $\|\tau E_i\| = 1$. Temos então um caminho seccional: $\tau E_i \rightarrow X$, e caminhos: $M \rightarrow \tau E_i$ e $M \rightarrow \tau E_j \rightarrow X$ com $j \neq i$, pela proposição 2.2.5, X não é projetivo e podemos considerar a ARS que termina em X .

$$\begin{array}{ccccc}
& & \tau E_1 & & E_1 \\
& \nearrow & \tau E_2 & \searrow & \nearrow E_2 \\
\tau X & & & & X \\
& \searrow & & \nearrow & \searrow \\
& & \tau E_3 & & E_3 \\
& & \tau E_4 & & E_4
\end{array}$$

Novamente: se existe W com $|W| \neq 0$,

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow W \oplus \tau E_1 \oplus \tau E_2 \oplus \tau E_3 \oplus \tau E_4 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

então $\|\tau X\| \geq 3$ e $\{|\tau X|\}$ é subcategoria da lista A' .

Suponhamos que não exista W nessas condições, mas então $\|\tau X\| = 2$, $\|\tau E_i\| = 1$ e $g_i : \tau X \longrightarrow \tau E_i$ é morfismo irredutível e a subcategoria se repete. $\square$

Proposição 2.2.16 Seja $\mathbb{K}$ como acima e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena, $L = \{ |X|, |Y| \}$ com $\|X\| = \|Y\| = 2$ e $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) = 1$ então $q_{B[M]}$ é fortemente indefnida.

Observações: 1) Podemos ter $\dim_k \text{Hom}_B(X, Y)$ muito maior.

2) A categoria tem uma única componente conexa (logo é sempre caminho-incomparável).

Demonstração. Veremos que ou $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria da lista A' caminho-incomparável ou existem $X, Y \in \mathcal{C}$ para os quais $\text{Hom}(M, X) \neq 0$ e $\text{Hom}(M, Y) \neq 0$ e $\dim_k \text{Hom}_B(X, Y) - \dim_k \text{Ext}^1(Y, X) + \dim_k \text{Ext}^2(Y, X) = 1$, do que irá resultar que a forma quadrática de Tits é fortemente indefnida.

1) Suponhamos $X, Y \in \mathcal{C}$ tais que $\|X\| = \|Y\| = 2$ e $\dim_k \text{Hom}(X, Y) - \dim_k \text{Ext}^1(Y, X) + \dim_k \text{Ext}_B^2(Y, X) = 1$ e seja S_e o novo simples injetivo em $B[M]$.

Então:

$$q_{B[M]}(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y \oplus S_e^2)) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y \oplus S_e^2) + 2 \dim_k \text{Ext}^2(M, X^2 \oplus Y))$$

$$\text{como } 2 \dim_k \text{Ext}^2(M, X^2 \oplus Y) = 0$$

$$\text{pois } \text{Hom}(M, X) \neq 0 \text{ e } \text{Hom}(M, Y) \neq 0$$

$$\text{e } \chi_{B[M]}(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y \oplus S_e^2)) = \chi_B(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y))$$

$$+ 4 - 2(\dim_k \text{Hom}_B(M, X^2 \oplus Y) - \dim_k \text{Ext}_B^1(M, X^2 \oplus Y) + \dim_k \text{Ext}_B^2(M, X^2 \oplus Y)).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
q_{B[M]}(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y \oplus S_e^2)) &= \chi_B(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y)) + 4 - 2(4 + 2) \text{ e} \\
\chi_B(\underline{\dim}(X^2 \oplus Y)) &= \\
\dim_k \text{Hom}_B(X^2 \oplus Y, X^2 \oplus Y) - \dim_k \text{Ext}^1(X^2 \oplus Y, X^2 \oplus Y) \\
+ \dim_k \text{Ext}^2(X^2 \oplus Y, X^2 \oplus Y) &= \\
(\text{indicando } (\)^i &= \dim_k \text{Ext}^i(\ , \)) \\
= (X^2, X^2)^0 + (X^2, Y)^0 + (Y, X^2)^0 + (Y, Y)^0 \\
- (X^2, X^2)^1 - (X^2, Y)^1 - (Y, X^2)^1 - (Y, Y)^1 \\
+ (X^2, X^2)^2 + (X^2, Y)^2 + (Y, X^2)^2 + (Y, Y)^2 \\
\text{logo}
\end{aligned}$$

$$\chi_B(X^2 \oplus Y) = 4 + 1 + 2((X, Y)^0 - (Y, X)^1 + (Y, X)^2) = 4 + 1 + 2 \cdot 1$$

$$\text{assim } q_{B[M]} \dim(X^2 \oplus Y \oplus S_e^2) = 7 + 4 - 2 \cdot 6 = -1$$

2) Veremos agora que ou acontece 1) ou $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena caminho-incomparável da lista A' .

Temos então $L = \{|X|, |Y|\}$ com $\|X\| = \|Y\| = 2$ e $\dim \text{Hom}_k(|X|, |Y|) = 1$ portanto existe um caminho $\delta : X \rightarrow Y$ com $|\delta| \neq 0$.

Se δ é um caminho seccional, temos pela proposição 2.2.5 que δ é o único caminho de X a Y (e esse caminho é não nulo) logo temos $\dim_k \text{Hom}_B(X, Y) = 1$.

Se tivéssemos $\text{Ext}^i(Y, X) \neq 0$ para algum $i > 0$, por [M1] teríamos um caminho: $X \rightarrow \tau Y \rightarrow Y$ o que contraria a unicidade do caminho seccional, logo $\text{Ext}^i(Y, X) = 0$ e portanto $\dim_k \text{Hom}(X, Y) - \dim_k \text{Ext}_B^1(Y, X) + \dim_k \text{Ext}_B^2(Y, X) = 1$.

Suponhamos que δ é um caminho não seccional.

Se δ tem comprimento 2, temos:

$$\begin{array}{ccc}
& & E \\
& \nearrow & \searrow \\
X = \tau Y & & Y
\end{array}$$

e podemos considerar a ARS

$$0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow 0$$

(e portanto: $0 \rightarrow |X| \rightarrow |E| \rightarrow |Y| \rightarrow 0$ é sequência exata em $\mathbb{K}$)

Como há um δ , com $|\delta| \neq 0$ entre X e Y , $|E|$ não pode ser indecomponível (em $\mathbb{K}$).

(Observe que neste caso, teríamos $\dim_k \text{Hom}(X, Y) = 0$, $\dim \text{Ext}^1(Y, X) = 1$, $\dim \text{Ext}^2(Y, X) = 0$.)

Por dimensões, se E tem 3 ou menos somandos, $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ com $|E_i| \neq 0$, há um deles com dimensão 2 ou 3 (digamos E_1) e então $\{|E_1|, |E_2|\}$ (pois $|E_2| \neq 0$) é uma categoria da lista A' caminho-incomparável.

Podemos então supor que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ com $\|E_i\| = 1$, mas então pelo lema 2.2.15, $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria caminho incomparável da lista A' .

Fazemos então uma indução em n , onde $n \geq 2$, $n =$ comprimento máximo dos caminhos δ , com $\delta : X \rightarrow Y$ não seccional, $|\delta| \neq 0$, $\|X\| = \|Y\| = 2$ e $\dim_k \text{Hom}(|X|, |Y|) = 1$.

Suponhamos válido para os caminhos de comprimento máximo menor do que n .

Então, seja:

$$\delta : X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots X_{j-1} \begin{matrix} \nearrow \\ X_j \\ \searrow \end{matrix} X_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow Y$$

e suponhamos $X_{j-1} = \tau X_{j+1}$ e $X_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y$ é seccional.

(Se tivermos $X_{j+1} = Y$ teremos um caminho $X \rightarrow \tau Y = X_{j-1} \nearrow \searrow Y$).

Se $X_{j+1} \neq Y$, podemos supor que existe um antecessor de Y, Y' com $Y' \neq X_{n-1}$ e $\text{Hom}(M, Y') \neq 0$, pois suponhamos que não existe tal Y' , neste caso todo morfismo de M a Y se fatora por X_{n-1} e então $\dim |X_{n-1}| = 2$ e $\text{Hom}(|X_{n-1}|, |Y|) = 1$ recaímos no caso já estudado.

Logo podemos supor $\|X_{n-1}\| < 2$ e temos

e portanto, pelo lema 2.2.6, $X_{j+1}, \dots, Y$ não são projetivos e assim, podemos “levantar” o caminho: (lembrando que X_{j+1} não é projetivo).

$$X = X_0 \rightarrow \dots \rightarrow X_{j-1} = \tau X_{j+1} \rightarrow \tau X_{j+2} \rightarrow \dots \tau X_{n-1} \rightarrow \tau Y.$$

e então temos o caminho $X \rightarrow \tau Y$ Y .

Vejamos a ARS que termina em Y .

$$0 \rightarrow \tau Y \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow 0$$

$$E = \oplus E_i.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & E_1 & & M \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & \nearrow & & g_1 \searrow & \\
 X & \rightarrow & \tau Y & \rightarrow & E_2 & \xrightarrow{g_2} & Y \\
 & & & \searrow & & g_3 \nearrow & \\
 & & & & E_3 & &
 \end{array}$$

Podemos supor que $\|E_i\| = 1$ para qualquer i , pois se para algum i , $\|E_i\| = 2$ já estaria provado, logo há no mínimo dois somandos diretos distintos com $|E_i| \neq 0$, g_i :

$E_i \rightarrow Y$, $|g_i| \neq 0$. Além disso, como todo morfismo de M a Y se levanta por E , isto é: $|E| \xrightarrow{|g|} |Y|$ é sobrejetora, podemos supor que $\text{Im}|g_1| \neq \text{Im}|g_2|$.

Por outro lado, se $\text{Hom}(|X|, |E_i|) = 0$, para algum i , teríamos o resultado pela proposição 2.2.13.

Suponhamos então que $\text{Hom}(|X|, |E_i|) \neq 0$, para $i = 1, 2$.

Veremos que neste caso, $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) > 1$.

Se $\text{Hom}(|X|, |E_i|) \neq 0$, seja $\varphi_i : X \rightarrow E_i$, tal que $|\varphi_i| \neq 0$ então $|\varphi_i|$ é sobrejetora e todo morfismo de M em E_i se fatora por X .

Seja $e_i = \varphi_i h$ para alguma $h : M \rightarrow X$.

Como já vimos, pode-se supor que $g_1 e_1 = y_1$, $g_2 e_2 = y_2$ e $\{y_1, y_2\}$ base de $|Y|$.

Se $\{|\psi|\} = \text{base de } \text{Hom}(|X|, |Y|)$, $\psi : X \rightarrow Y$ não é epimorfismo que cinde. logo se levanta por E , isto é: $\psi = \sum g_i \psi_i$.

Mas $|g_1 \varphi_1|, |g_2 \varphi_2| : |X| \rightarrow |Y|$ são linearmente independentes (pois tem imagens linearmente independentes, e portanto $\dim_k \text{Hom}(|X|, |Y|) > 1$, contradição. $\square$

Notação: Chamaremos de lista A^* à lista A , acrescida das categorias $(\square \rightarrow \square), (\square \square)$

ou $(\square \bullet)$

Lema 2.2.17 (Merklen) Seja $\mathbb{K}$ como antes e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém a seguinte subcategoria

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ & \searrow \alpha & \\ & & C \\ & \nearrow \beta & \\ B & & \end{array}$$

com $\|A\| = \|B\| = \|C\| = 1$

$|\alpha| = 0, |\beta| \neq 0$

α e β morfismos irredutíveis.

Então $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena da lista A^* , caminho-incomparável.

Demonstração. Veremos que se $\mathbb{K}$ não contém uma subcategoria da lista A^* , caminho-incomparável, então a situação acima se repete indefinidamente, o que não pode ocorrer.

Suponhamos A, C em $\mathcal{C}$ tais que $\|A\| = \|C\| = 1$, como $\alpha : A \rightarrow C$ é morfismo irreduzível, ou é monomorfismo (mas neste caso teríamos $|\alpha|$ injetora) ou α é epimorfismo. Logo α é epimorfismo e C não é projetivo.

Consideramos a ARS que termina em C .

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \nearrow \gamma & & \searrow \alpha \\ \tau C & & C \\ \searrow \delta & & \nearrow \beta \\ & B & \end{array}$$

Como qualquer morfismo de M em C (e sabemos que existe um) não é epimorfismo que cinde, então $h : M \rightarrow C$ se levanta por $A \oplus B$.

$$h : M \xrightarrow{\tilde{h}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} C.$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2) \quad \begin{array}{l} h_1 : M \rightarrow A \\ h_2 : M \rightarrow B \end{array}$$

Mas $\alpha h_1 = 0$ por hipótese logo $h = \beta h_2$ e portanto $\|B\| \neq 0$.

Se $|B|$ é indecomponível e $\dim |B| \geq 2$, temos $\{|B|, |A|\}$ categoria plena da lista A^* e caminho-incomparável.

Se $|B|$ é indecomponível e $\dim |B| = 1$, pela comutatividade da malha, temos: $|\alpha\gamma| = |\beta\delta| = 0$. Mas $|\beta| \neq 0$ por hipótese e $|\beta| : |B| \rightarrow |C|$ com ambos de dimensão 1, portanto $|\beta|$ é isomorfismo, logo $|\delta| = 0$.

Mas então, δ é um epimorfismo, B não é projetivo, e começamos novamente.

Ou seja a situação se repete.

(Observe que nenhum dos módulos acima pode ser igual a M , por exemplo: $|C| \neq 0$ e $\text{Hom}(|\tau C|, |C|) = 0$ logo $\tau C \neq M$).

Suponhamos então que B é decomponível.

Podemos supor que $B = B_1 \oplus B_2$ com $|B_i| \neq 0$, pois se houvesse mais somandos teríamos $\dim|\tau C| \geq 3$, temos então:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow \beta_0 & & \searrow \alpha_0 & \\
 \tau C & \xrightarrow{\beta_1} & B_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & C \\
 & \searrow \beta_2 & & \nearrow \alpha_2 & \\
 & & B_2 & &
 \end{array}$$

$\|\tau C\| = 2$ e pela comutatividade da malha $|\alpha_1\beta_1| = |\alpha_2\beta_2|$ logo $\ker|\beta_1| = \ker|\beta_2|$ pois, por construção temos $|\alpha_1| \neq 0 \neq |\alpha_2|$ e $|\alpha_0| = 0$.

Como $\|\tau C\| = 2$ e $\|B_i\| = 1$, ou $|\beta_i| = 0$ e neste caso, temos o resultado pela proposição 2.2.13 para a subcategoria $\{|\tau C|, |B_i|\}$ ou $|\beta_i|$ é sobrejetora, mas não injetora, logo β_i é epimorfismo, logo B_i não é projetivo e o mesmo argumento vale para A , assim podemos considerar as ARS que terminam em A e B_i .

$$0 \rightarrow \tau A \rightarrow \tau C \oplus W_A \rightarrow A \rightarrow 0.$$

$$0 \rightarrow \tau B_i \rightarrow \tau C \oplus W_i \rightarrow B_i \rightarrow 0.$$

Se existe W com $|W| \neq 0$, então $\{|\tau C|, |W|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos.

Suponhamos então que não existem tais W' s, temos então que as sequências

$$0 \rightarrow |\tau A| \rightarrow |\tau C| \rightarrow |A| \rightarrow 0.$$

$$0 \rightarrow |\tau B_i| \rightarrow |\tau C| \rightarrow |B_i| \rightarrow 0.$$

são exatas e portanto temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tau A & & & A & & & \\
 & \searrow \gamma_0 & & \nearrow \beta_0 & & \searrow \alpha_0 & \\
 \tau B_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \tau C & \xrightarrow{\beta_1} & B_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & C \\
 & \nearrow \gamma_2 & & \searrow \beta_2 & & \nearrow \alpha_2 & \\
 \tau B_2 & & & B_2 & & &
 \end{array}$$

com $\|\tau A\| = \|\tau B_1\| = \|\tau B_2\| = 1$ e $\ker|\beta_i| = \text{Im}|\gamma_i|$ e pelo lema 2.2.6, como γ_i é caminho seccional, τC não é projetivo.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \tau A & & A & & \\
& \nearrow \delta_0 & & \searrow \gamma_0 & \nearrow \beta_0 & & \searrow \alpha_0 \\
\tau^2 C & \xrightarrow{\delta_1} & \tau B_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \tau C & \xrightarrow{\beta_1} & B_1 \xrightarrow{\alpha_1} C \\
& \searrow \delta_2 & & \nearrow \gamma_2 & \searrow \beta_2 & & \nearrow \alpha_2 \\
& & \tau B_2 & & B_2 & &
\end{array}$$

Nenhum desses módulos pode ser o próprio M , por exemplo se $M = \tau A$, como não existe caminho de τA a τB_1 , teríamos $\|\tau B_1\| = 0$ contradição.

Além disso, veremos que $\text{Hom}(|\tau^2 C|, |C|) = 0$ e portanto $\tau^2 C \neq M$.

Em primeiro lugar observamos que $\text{Hom}(|\tau B_i|, |C|) = 0$ pois $\tau B_i \rightarrow \tau C \rightarrow B_j \rightarrow C$ é nulo pois $\ker|\beta_j| = \text{Im}|\gamma_i|$ e $\tau B_i \rightarrow \tau C \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} C$ é nulo pois $|\alpha| = 0$.

Pela comutatividade da malha, o caminho de $\tau^2 C$ a C que passa por τA é igual ao caminho que passa por $\tau B_1 \oplus \tau B_2$ e portanto também é nulo.

Mas, além disso, $\text{Im}|\gamma_1| = \text{Im}|\gamma_2|$ e $\text{Im}|\gamma_0| \neq \text{Im}|\gamma_1|$, pois há dois morfismos de M em τC que se levantam por $\tau A \oplus \tau B_1 \oplus \tau B_2$.

Porém $|\gamma_0 \delta_0| = |\gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2|$.

$$\text{Im}|\gamma_0 \delta_0| \subset \text{Im}|\gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2| = \text{Im}|\gamma_1|$$

logo $|\gamma_0 \delta_0| = 0$. Como $\|\tau^2 C\| = 1$ e $|\gamma_0| \neq 0$ por construção, então $|\delta_0| = 0$ e o processo se repete. $\square$

2.3 Demonstração do Teorema

Veremos então a demonstração do Teorema 2.2.11.

a) Suponhamos que $\mathbb{K}$ contém um objeto X com $\dim|X| \geq 3$. Então, pelo teorema 2.2.4, $\chi_{B[M]}$ é fortemente indefinida e pelo lema 2.2.12, $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

b) Se $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena da forma $(\square \rightarrow \square)$ então a proposição 2.2.16 nos diz que $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

c) Suponhamos que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria da forma: $(\square \square)$ ou $(\square \bullet)$

Sejam X e $Y \in \mathcal{C}$ com $\|X\| = 2$ $\|Y\| \neq 0$. Se X e Y são caminho-incomparáveis então o teorema 2.2.4 e o lema 2.2.12 garantem $q_{B[M]}(z) < 0$ para algum z .

Se existe um caminho $X \xrightarrow{\delta} Y$, com $|\delta| = 0$ pela proposição 2.2.13 e corolário 2.2.14 temos o resultado.

Falta analisar o caso em que existe um caminho

$Y \xrightarrow{\delta} X$ com $|\delta| = 0$.

Podemos supor (pela prop. 2.2.13) que $\|Y\| = 1$.

Novamente, fazemos a demonstração por indução em $n =$ comprimento máximo dos caminhos entre Y e X tais que $\|Y\| = 1$, $\|X\| = 2$ e $\text{Hom}(|Y|, |X|) = 0$.

Seja $n = 1$, $\delta : Y \rightarrow X$ um morfismo irreduzível. Como $|\delta| = 0$, δ não é monomorfismo e portanto é epimorfismo, logo X não é projetivo e podemos considerar a ARS:

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow Y \oplus Z \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

Como $|\delta| = 0$ os morfismos de M a X se fatoram através de Z (Z pode ou não ser indecomponível) logo $\dim|Z| \geq 2$ e portanto $\|Y \oplus Z\| \geq 3$ e $|\tau X| \neq 0$.

Se para algum Z_i indecomponível, somando direto de Z tem-se $\|Z_i\| = 2$, a categoria $\{|Y|, |Z_i|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos. Por isso, podemos supor $Z = Z_1 \oplus Z_2 \cdots$ com $\dim|Z_i| = 1$ e temos a figura:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & \nearrow \gamma & Y & \searrow \delta & \\
 & \nearrow \alpha_1 & Z_1 & \searrow \beta_1 & \\
 \tau X & & & & X \\
 & \searrow \alpha_2 & Z_2 & \nearrow \beta_2 & \\
 & \searrow \alpha_3 & Z_3 & \nearrow \beta_3 &
 \end{array}$$

Além disso seja $g : M \rightarrow Y$

Então $M \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}} Y \oplus Z$ é tal que:

$$(\delta, \beta) \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \delta g = 0$$

pois $|\delta| = 0$ logo g se fatora pelo kernel de (δ, β) isto é, por τX , e existe $\tilde{g} : M \rightarrow \tau X$ tal que $g = \gamma \tilde{g}$. Por outro lado, como $|\tau X| \neq 0$ e $\|Z_i\| = 1$, então $|\alpha_i| : |\tau X| \rightarrow |Z_i|$ são tais que

- 1) ou $|\alpha_i| = 0$ para algum i
- 2) ou $|\alpha_i|$ é sobrejetora para todo i

Suponhamos que vale 1) isto é $|\alpha_i| = 0$ para algum i .

Se $\|\tau X\| = 2$, temos que $\text{Hom}(|\tau X|, |Z_i|) = 0$ pois não pode haver outro caminho entre τX e Z_i já que o que existe é seccional, que é único pela proposição 2.2.5. Então, pela proposição 2.2.13 temos o resultado.

Se $\|\tau X\| = 1$, então temos o resultado pelo lema 2.2.17.

E se $\|\tau X\| \geq 3$, já teríamos o resultado.

Suponhamos então que vale 2), isto é $|\alpha_i|$ é sobrejetora para todo i .

Se $\|\tau X\| = 2$ temos o resultado pelo lema 2.2.15 e podemos então supor $\|\tau X\| = 1$.

Se $|\alpha_i|$ é sobrejetora para todo i , todo morfismo $M \rightarrow Z_i$ se fatora através de τX .

Temos a figura:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \nearrow \gamma & & \searrow \delta & \\ \tau X & \xrightarrow{\alpha_1} & Z_1 & \xrightarrow{\beta_1} & X \\ & \searrow \alpha_2 & & \nearrow \beta_2 & \\ & & Z_2 & & \end{array}$$

Pela comutatividade da malha, temos

$$|\delta\gamma + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2| = 0 = |\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2|.$$

e neste caso, $\text{Im}|\beta_1| = \text{Im}|\beta_2|$.

Mas temos dois morfismos li de M em X que se fatoram por $Y \oplus Z$, contradição (pois $\text{Im}|\beta_i|$ não cobrem X).

Vejamos o passo da indução:

Suponhamos válido para δ caminho de comprimento máximo menor do que n e suponhamos que temos um caminho de comprimento máximo n .

Temos um caminho:

$$\delta : Y = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_n \xrightarrow{f_n} X$$

com $|\delta| = 0$.

Se $\|Y_n\| = 2$, e $|f_n| \neq 0$, temos o resultado pela proposição 2.2.16 e se $|f_n| = 0$ pela proposição 2.2.13.

Portanto podemos considerar $\|Y_n\| \leq 1$ e existe outro antecessor de X , digamos E_i com $|E_i| \neq 0$ e assim, pelo lema 2.2.6, X não é projetivo e podemos considerar a ARS

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow Y_n \oplus E_1 \oplus \cdots \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Se $\|\tau X\| = 2$, ou existe um somando de dimensão 2 e neste caso temos o resultado pela proposição 2.2.16, ou temos 4 somandos de dimensão 1 e neste caso temos o resultado pelo lema 2.2.15.

Portanto podemos supor $\|\tau X\| \leq 1$.

Vejamos agora a outra extremidade do caminho.

Podemos ter:

- 1) $\|Y_1\| = 1$.
- 2) $\|Y_1\| = 2$.
- 3) $\|Y_1\| = 0$.

Examinamos 1) Temos $Y = Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1$, se $|f_0| = 0$ temos o resultado pelo lema 2.2.17.

Se $|f_0| \neq 0$, então $|f|$ é isomorfismo e portanto $\text{Hom}(|Y_1|, |X|) = 0$ pois se não fosse zero, teríamos $\varphi : Y_1 \rightarrow X$ com $|\varphi| \neq 0$ mas como $|f_0| \neq 0$ é isomorfismo então $|\varphi f_0| \neq 0$ e teríamos $\text{Hom}(|Y_0|, |X|) \neq 0$, contradição.

Mas necessariamente o comprimento máximo dos caminhos de Y_1 a X é menor do que n e portanto vale a hipótese de indução.

Caso 2) $\|Y_1\| = 2$. Se $\dim \text{Hom}(|Y_1|, |X|) \leq 1$ temos o resultado pela proposição 2.2.13 ou 2.2.16, portanto podemos supor $\dim \text{Hom}(|Y_1|, |X|) \geq 2$. Seja Y_2 sucessor direto de Y_1 , se $\|Y_2\| = 2$ temos o resultado pela proposição 2.2.16. Assim, podemos supor que os sucessores de Y_1 tenham dimensão menor ou igual a 1.

Iremos analisar separadamente duas situações:

2A) Y_1 não injetivo

2B) Y_1 injetivo

Vejamos 2A

Supondo que Y_1 não é injetivo, podemos considerar a ARS:

$$0 \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{\alpha} T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \longrightarrow \tau^{-1}Y_1 \longrightarrow 0$$

α é monomorfismo e portanto $|\alpha|$ é injetora, então a função $|\alpha f_0| : |Y| \rightarrow |\oplus T_i|$ é não nula, logo existe algum somando T_i com $|Y_0| \rightarrow |T_i|$ não nula, mas neste caso como $\|T_i\| = 1$, a função $|Y| \rightarrow |T_i|$ é um isomorfismo, $\text{Hom}(|T_i|, |X_0|) = 0$ e vale a hipótese de indução.

Vejamos então 2B,

Y_1 é injetivo, mas Y_1 não pode ser projetivo pois, como $\|Y_1\| = 2$ e $\|Y\| = 1$, existe um antecessor direto de Y_1 , digamos Z com $\|Z\| \neq 0$ (Z não necessariamente indecomponível), e assim, pelo lema 2.2.6, Y_1 não é projetivo. Suponhamos em primeiro lugar que $|\tau Y_1| = 0$.

Neste caso, existem W e T antecessores diretos de Z e Y_0 respectivamente com $|W| \neq 0$, $|T| \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & W & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & & Z & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & & Y_1 & \cdots \longrightarrow & X \\
 & & & \nearrow & & & \\
 & & & Y & & & \\
 & & \nearrow & & & & \\
 & T & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & T_1 & & & &
 \end{array}$$

Se $\|T\| = 2$, $\{|T|, |Z|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos.

Suponhamos $\|T\| = 1$.

Se $\text{Hom}(|T|, |X|) = 0$, contraria a maximalidade do caminho, logo existe $\delta' : T \rightarrow X_0$ um caminho não nulo e portanto esse caminho não passa por Y , mas então existe um sucessor direto de T , diferente de Y , digamos T_1 com $|T_1| \neq 0$ e T_1 é caminho-incomparável com Y_1 pois existe um caminho seccional de T a Y_1 passando por Y , se houvesse um caminho de T_1 a Y_1 , teríamos $T \rightarrow T_1 \rightarrow Y_1$ o que contraria a unicidade do caminho seccional.

Suponhamos então $|\tau Y_1| \neq 0$.

Se $\|\tau Y_1\| = 2$ temos o resultado por 2.2.15, suponhamos $\|\tau Y_1\| = 1$. Como

$\dim \text{Hom}(|Y_1|, |X|) \geq 2$, temos pelo menos um sucessor direto de Y_1 , Y_2 , com $\|Y_2\| = 1$, além disso, se $\text{Hom}(|Y|, |Y_2|) \neq 0$, então $\text{Hom}(|Y_2|, |X|) = 0$ e vale a hipótese de indução. Por isso, consideramos que $\text{Hom}(|Y|, |Y_2|) = 0$, e qualquer outro sucessor direto de Y_1 tem essa propriedade. Veremos que, neste caso, Y_2 é o único sucessor direto de Y_1 e $Y = \tau Y_2$. Mais ainda, os outros antecessores diretos de Y_1 em $\mathcal{C}$ são injetivos.

Vejamos em primeiro lugar que Y_2 é o único sucessor não nulo em $\mathbb{K}$. Suponhamos que Y_1 tenha outro sucessor, T com $\|T\| = 1$. Se $\text{Hom}(|T|, |X|) = 0$ vale a hipótese de indução. Se $\text{Hom}(|Y_2|, |X|) \neq 0$ temos a figura

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 & & T \\
 & \nearrow h'_1 & & \searrow h_1 & \nearrow \varphi' \\
 \tau Y_1 & \xrightarrow{h'_2} & Z_2 & \xrightarrow{h_2} & Y_1 \\
 & \searrow g & & \nearrow f & \searrow \varphi \\
 & & Y & & Y_2
 \end{array}$$

com $\text{Im}|f| = \ker|\varphi'| = \ker|\varphi|$ e portanto como T com $\|T\| = 1$, φ' é um epimorfismo, T não é projetivo, analogamente para Y_2 , τT e τY_2 são antecessores diretos de Y_1 com dimensão 1. Portanto, para algum i , temos que $\text{Im}|h_i| = \text{Im}|f|$. Suponhamos $i = 1$, como todo morfismo de M em Y_1 se levanta por $Z_1 \oplus Z_2 \oplus Y$, $\text{Im}|h_2|$ é li com $\text{Im}|f|$. Assim sendo, podemos considerar $\{y_1, y_2\}$ uma base de $|Y_1|$ da seguinte forma $\text{Im}|h_1| = \text{Im}|f| = \langle y_1 \rangle$, $\text{Im}|h_2| = \langle y_2 \rangle$.

Como $fg + h_1 h'_1 + h_2 h'_2 = 0$, temos $-|h_2 h'_2| = |fg + h_1 h'_1|$ e assim, $\text{Im}|h_2 h'_2| \subset \langle y_1 \rangle$ e portanto, $|h_2 h'_2| = 0$, mas $|h'_2| : |\tau Y_1| \rightarrow |Z_2|$ é nula e neste caso, temos o resultado

pelo lema 2.2.17 ou é um isomorfismo e neste caso $|h_2| = 0$ e vale a hipótese de indução. Podemos então supor que $Y = \tau Y_2$ e que Y_2 é o único sucessor não nulo em $\mathbb{K}$.

Vejamos a ARS que termina em Y_2

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y_1 \oplus W \longrightarrow Y_2 \longrightarrow 0.$$

Se existe W em $\mathcal{C}$ tal que $|W| \neq 0$, então para algum W_i somando direto de W , tem-se $|W_i| \neq 0$ e $\{|W_i|, |Y_1|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos. Se existe W em $\mathcal{C}$ tal que $|W| = 0$, então para todo W_i somando direto de W , tem-se que os morfismos $\beta_i : Y \rightarrow W_i$ são epimorfismos, nenhum deles é projetivo e podemos considerar a ARS que termina em W_i :

$$0 \longrightarrow \tau W_i \longrightarrow Y \oplus L_i \longrightarrow W_i \longrightarrow 0$$

e por dimensões $|\tau W_i| \neq 0$. Se $\|\tau W_i\| = 1$, temos $|L_i| = 0$ e $\text{Hom}(|\tau W_i|, |X|) = 0$, pois não há por onde possa passar um caminho não nulo, o que contraria a maximalidade do caminho. Por outro lado, se $\|\tau W_i\| = 2$, tem-se um caminho seccional de τW_i a Y_1 e temos o resultado pela proposição 2.2.16.

Podemos então supor que não existe W em $\mathcal{C}$ e neste caso, por [[ARS], pag 154] a ARS

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow 0$$

é tal que f é envolvente injetiva e Y_2 é um simples. Vejamos que Y_1 não tem outros sucessores em $\mathcal{C}$, pois suponhamos que existe L sucessor direto de Y_1 com $|L| = 0$ então L não é projetivo, τL é um antecessor direto de Y_1 e $\|\tau L\| = 2$ novamente temos o resultado pela proposição 2.2.16. Por outro lado, seja N um antecessor direto de Y_1 distinto de Y , se N não é injetivo, teremos que $|\tau^{-1}N| \neq 0$. Assim concluímos que Y é simples e que os outros somandos do termo do meio da ARS que termina em Y_1 são injetivos. Mas, a ARS

$$0 \longrightarrow \tau Y_1 \longrightarrow Y \oplus Z_1 \oplus Z_2 \oplus N \longrightarrow Y_1 \longrightarrow 0$$

é tal que Y_1 não é simples e portanto a sequência:

$$0 \longrightarrow \text{soc}(\tau Y_1) \longrightarrow \text{soc}(Y \oplus Z_1 \oplus Z_2 \oplus N) \longrightarrow \text{soc}(Y_1) \longrightarrow 0$$

é exata, por [[ARS], pag 154] e portanto cinde. Como $Y \cong \text{soc}(Y_1)$ e $Z_1 \oplus Z_2 \oplus N$ é injetivo, que denotaremos por I^* temos que $\text{soc}(\tau Y_1) \cong \text{soc}(I^*)$ e a função $\tau Y_1 \rightarrow I^*$ é a envolvente injetiva de τY_1 . Além disso a sequência :

$$0 \longrightarrow \tau Y_1 \xrightarrow{h'} Y \oplus I^* \xrightarrow{h} Y_1 \longrightarrow 0$$

é exata e temos que

$$\frac{I^* \oplus Y}{h'(\tau Y_1)} \cong \frac{I^* \oplus Y}{(h'(\tau Y_1) \cap I^*) \oplus (h'(\tau Y_1) \cap Y)} \cong \frac{I^*}{h'(\tau Y_1) \cap I^*} \oplus Y \cong Y_1$$

pois $h'(\tau Y_1) \cap Y = 0$ porque Y_1 não é somando de I^* , mas então Y_1 é decomponível o que é uma contradição, e assim esta situação não pode ocorrer.

Caso 3) suponhamos que $|Y_1| = 0$.

Se há outro sucessor Y'_1 de Y com $|Y'_1| \neq 0$ ou há caminho de Y'_1 a X e portanto recaímos nos casos anteriores ou não há caminho e então $\{|Y'_1|, |X|\}$ são caminho-incomparáveis.

Assim podemos supor que todos os sucessores de Y são tais que $|Y_1| = 0$.

Então:

$$Y \xrightarrow{f} Y_1, \quad |f| = 0$$

e portanto f é epimorfismo e Y_1 não é projetivo,

Podemos considerar a ARS e sabemos que $|\tau Y_1| \neq 0$ pela propriedade universal do kernel.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \nearrow \gamma & & \searrow \alpha & \\ \tau Y_1 & & & & Y_1 \\ & \searrow \delta & & \nearrow \beta & \\ & & Y_0 & & \end{array}$$

Se $\|\tau Y_1\| = 1$, teríamos $|Z| = 0$ e $\text{Hom}(|\tau Y_1|, |X|) = 0$ o que contraria a maximalidade do caminho.

Se $\|\tau Y_1\| = 2$, podemos supor Z indecomponível com $\|Z\| = 1$ e se $\text{Hom}(|\tau Y_1|, |X|) = 0$ temos o resultado pela proposição 2.2.13.

Se $\text{Hom}(|\tau Y_1|, |X|) \neq 0$, existe $\varphi : \tau Y_1 \rightarrow X$, φ não é monomorfismo que cinde e $|\varphi| \neq 0$ portanto podemos supor:

$$\begin{array}{ccccc} \tau Y_1 & \longrightarrow & Z \oplus Y_0 & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \swarrow \bar{\varphi} & & \\ X & & & & \end{array}$$

que existe $\bar{\varphi} : Z \rightarrow X$ tal que $\alpha_1 \bar{\varphi} = \varphi$ logo $|\alpha_1 \bar{\varphi}| = |\varphi| \neq 0$ e portanto $|\bar{\varphi}| \neq 0$ e todo morfismo de $|\tau Y_1|$ a $|X|$ se fatora por $|Z|$. Além disso, existe um caminho de Z a X que não passa por Y_1 (pois $|Y_1| = 0$) e assim nenhum desses caminhos é seccional.

Mais ainda, a flecha $\alpha_1 : \tau Y_1 \rightarrow Z$ é tal que $|\alpha_1| : |\tau Y_1| \rightarrow |Z|$ é sobrejetora mas não injetora logo α_1 é epimorfismo, Z não é projetivo e consideramos a ARS que termina em Z .

$$\begin{array}{ccccccc} & & T & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \tau Z & & & & Z & \dots & \dots \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & \tau Y_1 & & & Y_1 & \dots \longrightarrow X_0 \\ & & & \searrow & \nearrow & & \\ & & & & Y & & \end{array}$$

Se existe T com $|T| \neq 0$, então $\{|T|, |\tau Y_1|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos.

Vejamos que $|T| = 0$ nos leva a uma contradição.

Se $|T| = 0$ então $\|\tau Z\| = 1$.

Como $\text{Hom}(|\tau Z|, |X|) = 0$ contraria a maximalidade do caminho, podemos supor $\text{Hom}(|\tau Z|, |X|) \neq 0$, existe $\psi : \tau Z \rightarrow X$, com $|\psi| \neq 0$ e ψ não passa por Y , ou Y_1 .

Se a ARS que termina em Z não tem outros somandos diretos em $B\text{-mod}$, temos $\alpha_1 \eta = 0$, logo $|\alpha_1 \eta| = 0 \Rightarrow |\psi| = 0$, contradição, pois estamos supondo $\text{Hom}(|\tau Z|, |X|) \neq 0$.

Se a ARS que termina em Z tem outros somandos com $|\oplus T_i| = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & & \oplus T_i & & \\ & \nearrow \bar{\eta} & & \searrow \bar{\alpha} & \\ \tau Z & & & & Z \\ & \searrow \eta & & \nearrow \alpha & \\ & & \tau Y_1 & & \end{array}$$

sabemos que:

$$\alpha_1\eta + \overline{\alpha\eta} = 0 \quad \text{logo} \quad |\alpha_1\eta + \overline{\alpha\eta}| = 0$$

mas $|\overline{\alpha\eta}| = 0$ pois $|T| = 0$ logo $|\alpha_1\eta| = 0$ o que contraria $\text{Hom}(|\tau Z|, |X|) \neq 0$. $\square$

Capítulo 3

Categorias de Roiter

Neste capítulo procuramos analisar outras categorias vetorespaciais finitas, inteiramente contidas em componentes dirigidas, *standard*, de tipo árvore. Como não há uma classificação das categorias vetorespaciais selvagens, mas há uma classificação das categorias vetorespaciais de crescimento polinomial (veja em [B1]), iremos trabalhar nessa direção. Algumas dessas categorias aparecem descritas em [Ro]. Continuamos com as seguintes hipóteses fixadas:

$\mathbb{K} = \text{Hom}(M, B\text{-mod}) = \text{Hom}(M, \mathcal{C})$ é uma categoria vetorespacial *schurian*, finita, selvagem e $\mathcal{C}$ é uma componente dirigida, *standard*, e de tipo árvore do A-R quiver de B .

3.1 Critério de Bekkert

Enunciamos aqui os resultados obtidos por Bekkert.

Seja $\mathbb{K}$ uma categoria vetorespacial *schurian*. Denotamos por $S\mathbb{K}$ o conjunto dos objetos indecomponíveis de dimensão um e por $L\mathbb{K}$ o conjunto dos objetos indecomponíveis de dimensão dois. Para um objeto $|X| \in L\mathbb{K}$, identificamos o conjunto dos subespaços de $|X|$ de dimensão um com a reta projetiva e denotamos por $P^1(X)$. Para $|X| \in L\mathbb{K}$ e $V \in P^1(X)$ denotamos $S_{X,V}$ (resp. $S^{X,V}$) o conjunto dos objetos $Z \in S\mathbb{K}$ tais que $\text{Hom}(|X|, |Z|) \neq 0$ (resp. $\text{Hom}(|Z|, |X|) \neq 0$) e $V = \ker \varphi$ (resp. $V = \text{Im} \varphi$) para toda $\varphi \in \text{Hom}(|X|, |Z|)$. Para um objeto $|X| \in L\mathbb{K}$, denotamos por Ω_X (resp. Ω^X) ao conjunto dos $V \in P^1(X)$ tais que $S_{X,V} \neq \emptyset$ (resp. $S^{X,V} \neq \emptyset$). Definimos $S_X = \cup_{V \in \Omega_X} S_{X,V}$

(resp. $S^X = \cup_{V \in \Omega^X} S^{X,V}$).

Teorema 3.1.1 [B1] Uma categoria vectorial *schurian* $\mathbb{K}$ é de crescimento polinomial se e sómente se as seguintes condições se verificam:

- (a) $\dim_k |X| \leq 2$ para todo $|X|$ indecomponível em $\mathbb{K}$.
- (b) $\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Y|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Y|, |X|) > 0$ para todo $|X|$ em $L\mathbb{K}$, e $|Y|$ em $S\mathbb{K}$
- (c) $\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Z|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Z|, |X|) \geq 3$ para todo $|X|$ e $|Z|$ em $L\mathbb{K}$
- (d) $S_{X,V} \cap S^{Y,U} = \emptyset$ para todo $|X|$ e $|Y|$ em $L\mathbb{K}$, $V \in P^1(X)$, $U \in P^1(Y)$ tal que $|\text{Hom}(|X|, |Y|)| (V) = U$
- (e) $S_{X,V}$ e $S^{X,V}$ não contém os *posets* $(1, 1, 1)$ e $(1, 2)$ para todo $|X|$ em $L\mathbb{K}$ e $V \in P^1(X)$
- (f) Se $1 < \text{ord} \Omega_X < 4$ (respec. $1 < \text{ord} \Omega^X < 4$), então $S\mathbb{K}_X$ (respec. $S\mathbb{K}^X$) não contém o *poset* $(1, 1, 1, 1)$
- (g) S_{X_n, V_n} ou S^{X^1, V^1} não contém o *poset* $(1, 1)$ para todo $X_1, X_2, \dots, X_n \in L\mathbb{K}$, $V_i \in P^1(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $|\text{Hom}(|X_i|, |X_{i+1}|)| (V_i) = V_{i+1}$ para $1 \leq i < n$
- (h) $S\mathbb{K}$ não contém os seguintes *posets* $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$, $(N, 5)$ e $\{A < B > C < D > A, S, T\}$

Como estamos supondo $\mathbb{K}$ selvagem, temos que $\mathbb{K}$ não é de crescimento polinomial e reescrevemos o teorema da seguinte maneira:

Teorema 3.1.2 Uma categoria vectorial *schurian* $\mathbb{K}$ não é de crescimento polinomial se e sómente se uma das seguintes condições se verifica:

- (Â) Existe $|X|$ indecomponível em $\mathbb{K}$, com $\dim_k |X| \geq 3$
- (B̂) $\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Y|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Y|, |X|) = 0$ para algum $|X|$ em $L\mathbb{K}$, e $|Y|$ em $S\mathbb{K}$
- (Ĉ) $\dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|X|, |Z|) + \dim_k \text{Hom}_{\mathbb{K}}(|Z|, |X|) \leq 2$ para algum $|X|$ e $|Z|$ em $L\mathbb{K}$
- (D̂) Existem $|X|$ e $|Y|$ em $L\mathbb{K}$, $V \in P^1(X)$, $U \in P^1(Y)$ tais que $|\text{Hom}(|X|, |Y|)| (V) = U$ e $S_{X,V} \cap S^{Y,U} \neq \emptyset$.
- (Ê) $S_{X,V}$ ou $S^{X,V}$ contém um *poset* $(1, 1, 1)$ ou $(1, 2)$ para algum $X \in L\mathbb{K}$ e algum $V \in P^1(X)$.

- ($\hat{F}$) Para algum X com $1 < \text{ord}\Omega_X < 4$,
 S_X (resp. S^X) contém um *poset* $(1, 1, 1, 1)$
($\hat{G}$) Existem $X_1, X_2, \dots, X_n \in L\mathbb{K}$, $V_i \in P^1(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, tais que
 $|\text{Hom}(|X_i|, |X_{i+1}|)(V_i) = V_{i+1}$ para $1 \leq i < n$ e S_{X_n, V_n} e S^{X^1, V^1} contém o *poset* $(1, 1)$.
($\hat{H}$) $S\mathbb{K}$ contém algum dos seguintes *posets* $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$,
 $(1, 2, 6)$, $(N, 5)$ e $\{A < B > C < D > A, S, T\}$

Consideremos as diversas possibilidades:

Suponhamos que $\mathbb{K}$ satisfaz a condição $\hat{A}$, neste caso $\mathbb{K}$ é selvagem e $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida por 2.2.4 e 2.2.12.

Suponhamos que $\mathbb{K}$ satisfaz a condição $\hat{B}$, então pelo teorema 2.2.11, $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Suponhamos que $\mathbb{K}$ satisfaz a condição $\hat{C}$, isto é, existem $|X|$ e $|Y|$ em $\mathbb{K}$, com

$\|X\| = \|Y\| = 2$ e $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) + \dim \text{Hom}(|Y|, |X|) \leq 2$. Neste caso, se $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) + \dim \text{Hom}(|Y|, |X|) \leq 1$, novamente por 2.2.11, tem-se $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida. Se, por outro lado, $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) + \dim \text{Hom}(|Y|, |X|) = 2$, nem sempre teremos $\mathbb{K}$ selvagem.

Lema 3.1.3 ([B1]) Seja $\mathbb{K}$ uma categoria vectorial *schurian* e sejam $|X|$ e $|Y|$ em $\mathbb{K}$, com $\|X\| = \|Y\| = 2$. Então

a) Se $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) = 3$ então $\mathbb{K}\{|X|, |Y|\}$ é equivalente a uma das categorias:

I) $\begin{array}{c} \square \\ \Downarrow \\ \square \end{array}$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

J) $\begin{array}{c} \square \\ \Downarrow \\ \square \end{array}$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Se $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) + \dim \text{Hom}(|Y|, |X|) \leq 2$, então $\mathbb{K}\{|X|, |Y|\}$ é equivalente a uma das categorias:

A) $\square \rightrightarrows \square$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B) $\square \rightrightarrows \square$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

C) $\square \rightleftarrows \square$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D) $\square \rightrightarrows \square$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D^{op}) $\square \rightrightarrows \square$, com os morfismos dados por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Estamos mantendo a notação de [B1].

Como $\mathbb{K}$ está imersa em uma componente dirigida, podemos desconsiderar a categoria de tipo C . Além disso, a categoria de tipo A é mansa. Em relação às outras, temos os seguintes resultados:

Lema 3.1.4 Seja $\mathbb{K}$ uma categoria como acima e suponha que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria da forma $\{|X|, |Z_1|, |Z_2|\}$

$$\begin{array}{ccc} & & Z_1 \\ & \nearrow \varphi_1 & \\ X & & \\ & \searrow \varphi_2 & \\ & & Z_2 \end{array}$$

com $\|X\| = 2$, $\|Z_i\| = 1$

φ_1 e φ_2 morfismos irredutíveis, $|\varphi_i| \neq 0$, mas $\ker|\varphi_1| = \ker|\varphi_2|$ ou a sua imagem especular,

isto é: $\|X\| = 2$, $\|Z_i\| = 1$

com ψ_i morfismos irredutíveis e $\text{Im } |\psi_1| = \text{Im } |\psi_2|$.

Então $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena, uma das categorias da lista A^* (as da lista A' , que aparecem, serão caminho-incomporáveis).

Demonstração Suponhamos que

então $|\varphi_i|$ é sobrejetora mas não injetora, portanto Z_i não é projetivo e podemos considerar a ARS que termina em Z_i .

$$0 \rightarrow \tau Z_i \rightarrow X \oplus W_i \rightarrow Z_i \rightarrow 0$$

Se, para algum i , tem-se $|W_i| \neq 0$, então $\{|X|, |W_i|\}$ é a categoria que procuramos.

Supondo então que $|W_i| = 0 \ \forall i$, temos que $0 \rightarrow |\tau Z_i| \xrightarrow{|\psi_i|} |X| \xrightarrow{|\varphi_i|} |Z_i| \rightarrow 0$ é sequência exata em $\mathbb{K}$ e portanto $\ker |\varphi_i| = \text{Im } |\psi_i|$ e $\|\tau Z_i\| = 1$.

Como

pelo lema 2.2.6, X não é projetivo e podemos considerar a ARS que termina em X .

Como qualquer morfismo de M em X não é epimorfismo que cinde e como $Im|\psi_1| = Im|\psi_2|$, então existe T antecessor de X , $T \not\cong \tau Z_i$ com $|T| \neq 0$, e $\psi_0 : T \rightarrow X$ com $Im|\psi_0| \neq Im|\psi_1|$.

Se T é indecomponível, e $\|T\| = 2$, temos que a categoria $\{|T|, |\tau Z_i|\}$ é caminho-incomparável. Podemos supor que T é indecomponível (pelo lema 2.2.15) e $\|T\| = 1$.

Neste caso, temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tau Z_1 & & \\
 & \nearrow^{\alpha_1} & & \searrow_{\psi_1} & \\
 \tau X & \xrightarrow{\alpha_2} & \tau Z_2 & \xrightarrow{\psi_2} & X \\
 & \searrow_{\alpha_0} & & \nearrow_{\psi_0} & \\
 & & T & &
 \end{array}$$

e $\|\tau X\| = 1$. Vamos considerar uma base de $|X|$, dada por $\{x_0, x_1\}$ onde $\langle x_0 \rangle = Im|\psi_0|$, $\langle x_1 \rangle = Im|\psi_1|$ e seja $\{g\}$ base de $|\tau X|$.

Como $\psi_1\alpha_1 + \psi_2\alpha_2 + \psi_0\alpha_0 = 0$, então $|\psi_1\alpha_1| + |\psi_2\alpha_2| + |\psi_0\alpha_0| = 0$.

Mas $|\psi_i| \neq 0$ por construção.

$$-|\psi_0\alpha_0| = |\psi_1\alpha_2| + |\psi_2\alpha_2|.$$

$$-|\psi_0\alpha_0|(g) = (|\psi_1\alpha_2| + |\psi_2\alpha_2|)(g) = \eta x_1$$

$$\parallel$$

$$\lambda x_0$$

logo $|\psi_0\alpha_0| = 0$.

Como $|\psi_0|$ é injetora (e não nula), $|\alpha_0| = 0$, então pelo lema 2.2.17, $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena caminho-incomparável uma das categorias da lista A' . $\square$

Proposição 3.1.5 Seja $\mathbb{K}$ como acima e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena $\{|X|, |Y|\}$, onde

$$\|X\| = \|Y\| = \dim_k Hom(|X|, |Y|) = 2$$

com $Hom(|Y|, |X|) = 0$.

Sejam $\{x_1, x_2\}$ e $\{y_1, y_2\}$ bases, respectivamente de $|X|$ e de $|Y|$ tais que $Hom(|X|, |Y|)$ é dado por uma das seguintes bases:

$$B_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{categoria B})$$

$$B_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{categoria D})$$

$$B_3 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{categoria } D^{OP})$$

Então $q_{B[M]}$ é fortemente indefnida.

Demonstração. Novamente, iremos provar por indução no comprimento $n(\delta)$ máximo dos caminhos δ de X a Y , que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena (caminho-incomporável) da lista A^* .

Como temos dois morfismos linearmente independentes de X a Y pela proposição 2.2.5 nenhum caminho pode ser seccional e portanto não pode tampouco ser uma flecha.

Se $n(\delta) = 2$, como os caminhos não são seccionais, podemos supor:

Se temos 4 somandos como $\|A_i\| = 1$, pelo lema 2.2.15, $\mathbb{K}$ contém como uma subcategoria plena caminho incomparável, da lista A' .

Se temos 3 ou menos somandos diretos indecomponíveis no termo do meio da ARS, por dimensões, sabemos que $\exists i$ tal que $\|A_i\| > 1$ e neste caso $\{|A_i|, |A_j|\}$ é a categoria que procuramos.

Suponhamos agora que δ tem comprimento n que é o máximo dos comprimentos que ocorre nesta situação e suponhamos válido para os caminhos (máximos) de comprimento menor (estritamente) do que n .

Seja $\delta : X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow Y$.

Se $\|X_n\| = 2$, recaímos na categoria $\square \rightarrow \square$.

Portanto podemos supor $\|X_n\| \leq 1$ e neste caso existe um antecessor de Y , digamos Y' com $Y' \neq X_n$ e $|Y'| \neq 0$.

Se $\text{Hom}(|X|, |Y'|) = 0$, pelo teorema 2.2.11, temos o resultado.

Suponhamos que o caminho é da forma:

$$X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{j-1} \begin{array}{c} \nearrow X_j \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} Y' \\ \searrow \end{array} X_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y$$

com $X_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y$ seccional. Então pelo lema 2.2.6, $X_{j+2}, \dots, Y$ não são projetivos e podemos levantar o caminho:

$$X_0 \rightarrow \cdots X_{j-1} = \tau X_{j+1} \rightarrow \tau X_{j+2} \rightarrow \cdots \tau Y$$

e assim, temos um caminho δ' de X_0 a τY

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau Y \begin{array}{c} \nearrow E_1 \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ \searrow \\ E_2 \nearrow \end{array} Y$$

Dividimos em casos:

- 1) δ' é caminho seccional.
- 2) δ' não é um caminho seccional.

Começemos por 1) δ' é caminho seccional.

Novamente, dividimos em casos:

- A) Se $\dim|\tau Y| = 2$ temos o resultado pelo lema 2.2.15.
- B) Se $|\tau Y| = 0$, então pelo lema [U] temos que pelo menos para um i o caminho $X_0 \rightarrow \tau Y \rightarrow E_i$ é seccional e portanto não há outro caminho de X a E_i , pela proposição 2.2.5. Como $\|E_i\| = 1$, existe um antecessor de E_i , digamos T_i com $|T_i| \neq 0$ e não existe caminho de X a T_i pela proposição 2.2.5.

Assim, $\{|X|, |T_i|\}$ é a categoria que procuramos.

C) Se $\|\tau Y\| = 1$, podemos supor que há 3 somandos com $\|E_i\| = 1$ no termo do meio da ARS que termina em Y .

Podemos também supor que todo morfismo de X a Y passa por τY : pois suponhamos que não, então existe outro caminho não nulo de X a E_1 , por exemplo. Neste caso, existe T_1 antecessor direto de E_1 e pelo lema 2.2.6, E_1 não é projetivo

C1) Se $X \not\cong \tau E_1$, temos

por dimensões $|\tau E_1| \neq 0$, e existe $\psi : X_0 \rightarrow E_1$ que não é epimorfismo que cinde, logo ψ se levanta pelo termo do meio da ARS que termina em E_1 , isto é, existe $\psi_T : X \rightarrow T_1$ tal que $\psi = h_1 \psi_T$. Se não existe caminho de X a τE_1 , então $\{|X|, |\tau E_1|\}$ é a categoria que procuramos. Se existe caminho de X a τE_1 , este caminho faz parte do caminho seccional $\delta' : X \rightarrow \tau E_1 \rightarrow \tau Y$.

Se $\|\tau E_1\| = 2$, como o caminho é seccional, temos $\{|X|, |\tau E_1|\}$ é uma categoria da forma $\square \longrightarrow \square$, já vista no teorema 2.2.11.

Se $\|\tau E_1\| = 1$, pela comutatividade da malha a função que passa por $|T_1|$ é a mesma que passa por $|\tau Y|$, logo podemos supor que todo morfismo de X a Y passa por τY .

Isto é, todo morfismo de X a Y é da forma: $|(\sum f_i g_i) \delta'|$. Mas $|\delta'|$ é sobrejetora e não injetora. Podemos considerar uma base de X , $\{x_1, x_2\}$ tal que $|\delta'|(x_1) = 0$ (e neste caso,

a categoria é da forma: D^{OP}).

Como o caminho de X a τY é seccional, e portanto único, podemos considerar que há um único X_1 sucessor direto de X com:

$$X \xrightarrow{\varphi} X_1 \xrightarrow{\delta''} \tau Y$$

Se $\|X_1\| = 2$, teríamos $\{|X|, |X_1|\}$ uma subcategoria da forma $\square \longrightarrow \square$.

Se $\|X_1\| = 0$, teríamos $Hom(|X|, |\tau Y|) = 0$ e portanto o resultado pelo teorema 2.2.11.

Suponhamos então: $\|X_1\| = 1$.

Neste caso: $|X| \xrightarrow{|\varphi|} |X_1|$ é sobrejetora mas não injetora, logo φ é epi, X_1 não é projetivo e podemos considerar a ARS

$$\tau X_1 \xrightarrow{\psi} X \oplus A \xrightarrow{\varphi} X_1$$

Se existe $A \in \mathcal{C}$ com $|A| \neq 0$, então $\{|X|, |A|\}$ é a categoria que procuramos.

Se $|A| = 0$, então $\|\tau X_1\| = 1$ e $ker|\varphi| = Im|\psi|$.

Além disso, $\delta' = \delta''\varphi$ e $\delta'' : X_1 \rightarrow \tau Y$ é tal que $|\delta''|$ é isomorfismo logo

$$ker|\delta'| = ker|\delta''\varphi| = ker|\varphi| = Im|\psi| = \langle x_1 \rangle$$

Como não existe outro caminho de τX_1 a Y , então $Hom(|\tau X_1|, |Y|) = 0$ (pois de τX_1 sai uma única flecha na categoria $\mathbb{K}$) e temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

C2) Se $X \cong \tau E_1$, por dimensões temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & T_1 & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ X & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & E_1 & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & \tau Y & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & Y \\ & & & \searrow & \nearrow & & \\ & & & & E_3 & & \end{array}$$

Veremos que neste caso, $dim Hom(|X|, |Y|) \geq 3$.

Suponhamos $\{x_1, x_2\}$ base de $|X|$, $\{y_1, y_2\}$ base de $|Y|$, $\{e_i\}$ base de E_i tal que: $f_1(e_1) = y_1$ e $f_2(e_2) = y_2$.

Como há 3 somandos na ARS que começa em X , temos dois morfismos li de X a E_1 e podemos supor que sejam da forma:

$$\psi_1 : \begin{cases} x_1 \rightarrow e_1 \\ x_2 \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi : \begin{cases} x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow e_1 \end{cases}$$

Como $|f_1|$ é injetora, então $|f_1\psi_1|$ e $|f_1\psi_2|$ são linearmente independentes.

Mas por outro lado, existe $\bar{\psi} : X \rightarrow E_2$ $Im|\bar{\psi}| = \langle e_2 \rangle$ e $|f_2\bar{\psi}|$ tem imagem $\langle y_2 \rangle$ logo $|f_2\bar{\psi}|$ é li com $|f_1\psi_1|$ e $|f_1\psi_2|$, portanto $dim Hom(|X|, |Y|) \geq 3$ contradição.

Vejam os 2) δ' não é um caminho seccional.

Dividimos em casos:

A) Se $\|\tau Y\| = 2$, temos o resultado pelo lema 2.2.15.

B) Se $\|\tau Y\| = 1$, e δ' é não seccional, se $Hom(|X|, |\tau Y|) = 0$, temos o resultado pelo teorema 2.2.11, então podemos supor $dim Hom(|X|, |\tau Y|) = 1$ ou 2. Vejam os que podemos supor que todo morfismo de X a Y passa por τY .

Seja $\varphi : X \rightarrow Y$, φ não é epimorfismo que cinde logo φ se levanta a $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, isto é:

$$\varphi = f\bar{\varphi} : X \xrightarrow{\bar{\varphi}} E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \xrightarrow{f} Y.$$

Suponhamos que existe uma função de X a Y que não passa por τY , então existe i tal que $\|Hom(|X|, |E_i|)\| \geq 2$.

Temos então duas ou mais funções de X em Y passando por E_1 e pelo menos uma passando por E_j (que tem imagem diferente das funções acima) logo $dim Hom(|X|, |Y|) \geq 3$ contradição.

Pelo mesmo argumento acima se $dim Hom(|X|, |\tau Y|) = 2$, teremos $dim Hom(|X|, |Y|) \geq 3$, contradição.

Logo supomos que toda função de X a Y passa por τY e que $\|Hom(|X|, |\tau Y|)\| = 1$.

Neste caso, $\delta' : X \rightarrow \tau Y$ é tal que $|\delta'|$ é sobrejetora mas não injetora e temos novamente uma subcategoria de tipo D^{OP} .

Olhando os sucessores diretos de X , podemos supor que todos são tais que $\|Z_i\| \leq 1$ e além disso que são no máximo 3.

Se temos apenas um sucessor direto de X com $\|Z\| \neq 0$, então usando o mesmo argumento de δ' seccional, existe τZ com $\|\tau Z\| = 1$, $\text{Hom}(|\tau Z|, |Y|) = 0$ e temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Suponhamos que X tem dois ou mais sucessores diretos Z_i com $|Z_i| \neq 0$.

Se para algum i , tem-se $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau Y|) = 0$, então $\text{Hom}(|Z_i|, |Y|) = 0$ e novamente pelo teorema 2.2.11, temos o resultado.

Suponhamos então que $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau Y|) \neq 0$ e neste caso:

$|\delta'| = |\varphi_1 \gamma_1| = |\varphi_2 \gamma_2|$ e temos então $|\varphi_1|$ e $|\varphi_2|$ são isomorfismos e $\ker |\delta'| = \ker |\gamma_1| = \ker |\gamma_2|$.

Mas neste caso, temos o resultado pelo lema 3.1.4

C) Se $|\tau Y| = 0$ e δ' não é seccional, temos:

Com $\|E_1\| = \|E_2\| = 1$.

Se $\text{Hom}(|X|, |E_i|) = 0$ para algum i , (temos a categoria de tipo D) e temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Supomos então $\text{Hom}(|X|, |E_i|) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Pelo lema 3.1.4, podemos também supor que $\text{Im}|\beta_1| \neq \text{Im}|\beta_2|$. Seja $\{y_1, y_2\}$ uma base de Y tal que $\langle y_1 \rangle = \text{Im}|\beta_1|$, $\langle y_2 \rangle = \text{Im}|\beta_2|$.

Se para algum i , $\dim \text{Hom}(|X|, |E_i|) > 1$, teríamos $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) > 2$, contra-dição.

Então supomos $\dim \text{Hom}(|X|, |E_i|) = 1 \ \forall i = 1, 2$.

Vejam os sucessores diretos de X .

Se houvesse apenas um sucessor direto Z com $|Z| \neq 0$ temos duas possibilidades ou $\|Z\| = 2$ e temos o resultado pelo teorema 2.2.11 ou $\|Z\| = 1$, mas neste caso Z não é projetivo e temos a ARS

$$0 \rightarrow \tau Z \rightarrow X \oplus W \rightarrow Z \rightarrow 0.$$

Se $|W| \neq 0$, $\{|X|, |W|\}$ é a categoria que procuramos. Se $|W| = 0$, então $\|\tau Z\| = 1$ e $\text{Hom}(|\tau Z|, |Y|) = 0$, novamente temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Podemos supor que temos 2 ou 3 sucessores de X . (Pois 4 é o caso visto no lema 2.2.15).

Se X não é injetivo e $|\tau^{-1}X| \neq 0$ temos

Pelo lema 3.1.4, podemos supor que os $|\alpha'_i|$ tem kerneis distintos.

Pelo teorema 2.2.11, podemos supor $\text{Hom}(|\tau^{-1}X|, |Y|) \neq 0$, isto é, existe $f : \tau^{-1}X \rightarrow Y$ tal que $|f| \neq 0$.

Como f não é epimorfismo que cinde, f se levanta a $E_1 \oplus E_2$. Portanto, para algum i , $\text{Hom}(|\tau^{-1}X|, |E_i|) \neq 0$ isto é, existe $f_i : \tau^{-1}X \rightarrow E_i$ tal que $|f_i|$ é isomorfismo.

Mas $\dim \text{Hom}(|X|, |\tau^{-1}X|) = 2$, logo $\dim \text{Hom}(|X|, |E_i|) = 2$, o que já vimos contraria a hipótese de que $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) = 2$.

Suponhamos $|\tau^- X| = 0$, X possui dois sucessores diretos não nulos na categoria (podemos supor $\ker|\alpha_1| \neq \ker|\alpha_2|$).

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_1 & \cdots & E_1 \\ & \nearrow \alpha_1 & & & \searrow \\ X & & & & Y \\ & \searrow \alpha_2 & & & \nearrow \\ & & Z_2 & \cdots & E_2 \end{array}$$

Como $\text{Hom}(|X|, |E_i|)$ tem dimensão 1, podemos supor que

$$\text{Hom}(|Z_i|, |E_i|) \neq 0, \quad i, j = 1, 2.$$

$$\text{Hom}(|Z_i|, |E_j|) = 0.$$

Mas neste caso temos duas funções $\varphi_i : X \rightarrow Y$, $|\varphi_i| \neq 0$ e são da forma

$$\varphi_1 : X \rightarrow Z_1 \rightarrow E_1 \rightarrow Y$$

$$\varphi_2 : X \rightarrow Z_2 \rightarrow E_2 \rightarrow Y$$

isto é, existe uma base $\{x_1, x_2\}$ e uma base $\{y_1, y_2\}$ tal que

$$[\varphi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varphi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é fácil ver que esta categoria não é isomorfa às categorias D (pois em D ambos os morfismos tem a mesma imagem) ou D^{op} (onde os morfismos tem o mesmo kernel).

Além disso, esta categoria não pode ser isomorfa à categoria B .

Portanto, para as categorias B , D , D^{op} , conseguimos provar o resultado. $\square$

→ Observação: A categoria de tipo B não apareceu em nenhum dos casos estudados.

Suponhamos agora que $\mathbb{K}$ satisfaz a condição $\hat{D}$. Temos então:

Lema 3.1.6 Sejam $|X|$ e $|Y|$ em $L\mathbb{K}$, $V \in P^1(X)$,

$U \in P^1(Y)$ tais que $\text{Hom}(|X|, |Y|)(V) = U$ e $S_{X,V} \cap S^{Y,U} \neq \emptyset$. Então $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena uma subcategoria da forma:

$$X \rightrightarrows A \rightrightarrows Y$$

$\|A\| = 1, \|X\| = \|Y\| = 2$ com os morfismos dados por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(1, 0) : |X| \rightarrow |A|$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : |A| \rightarrow |Y|$, isto é, existem $U \in P^1(X)$, $V \in P^1(Y)$ tal que $|\varphi|(U) \subset V \forall |\varphi| : |X| \rightarrow |Y|$ e $\ker(X \rightarrow A) = U$, $\text{Im}(A \rightarrow Y) = V$.

Além disso:

Proposição 3.1.7 Seja $\mathbb{K}$ como acima e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena a categoria dada por

$$X \rightleftarrows A \rightrightarrows Y$$

$\|A\| = 1, \|X\| = \|Y\| = 2$ com os morfismos dados por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(1, 0) : |X| \rightarrow |A|$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : |A| \rightarrow |Y|$, isto é, existem $U \in P^1(X)$, $V \in P^1(Y)$ tais que $|\varphi|(U) \subset V \forall |\varphi| : |X| \rightarrow |Y|$ e $\ker(X \rightarrow A) = U$, $\text{Im}(A \rightarrow Y) = V$.

Então $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena uma das categorias da lista A^* .

Demonstração: Faremos a indução em $n(\delta) = \text{comprimento dos caminhos } \delta \text{ (com } |\delta| \neq 0)$ entre A e Y .

Suponhamos que $\delta : A \rightarrow Y$ é uma flecha.

Sabemos (pela proposição 2.2.5) que os caminhos de X a Y não podem ser dados por caminhos seccionais. Supomos $X < A < Y, U, V$ fixados com as condições acima. Como $\|A\| = 1$ e $\|Y\| = 2$, Y tem outro antecessor direto B com $\|B\| \neq 0$.

Se $\|B\| = 2$ e B é indecomponível, temos que a categoria $\{|B|, |A|\}$ é caminho-incomparável.

Suponhamos então que os somandos diretos de B tem dimensão 1.

Pelo lema 2.2.6, Y não é projetivo e temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow & \beta_0 \searrow & & \\
 X & \rightarrow & \tau Y & & Y \\
 & \searrow & \beta_1 \nearrow & & \\
 & & B & &
 \end{array}$$

Em primeiro lugar, vejamos se B é indecomponível, com $\|B\| = 1$.

Se $\text{Hom}(|X|, |B|) = 0$, temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Suponhamos então que $\dim \text{Hom}(|X|, |B|) = 2$.

Como $\text{Im}|\beta_0| = V$, pelo lema 3.1.4, podemos supor que $\text{Im}|\beta_1| \neq V$.

Mas então, temos $|\psi_1|, |\psi_2|$ li para $\psi_i : X \rightarrow B$ com $|\beta_1 \psi_i|(U) \subset V$.

Como $\text{Im}|\beta_1| \neq V$ e $|\beta_1|$ é injetora então $U \subset \ker |\psi_i|$ para $i = 1, 2$, mas então, $|\psi_1|$ e $|\psi_2|$ são ld, contradição.

Se por outro lado tivéssemos $\dim \text{Hom}(|X|, |B|) = 1$ teríamos $\dim \text{Hom}(|X|, |Y|) = 2$ já que $\dim \text{Hom}(|X|, |A|) = 1$ por hipótese. Contradição.

Supomos B decomponível (com dois somandos, pelo lema 2.2.15) e pelo mesmo argumento anterior, $\dim \text{Hom}(|X|, |B_i|) = 1$.

Além disso, por dimensões temos $\|\tau Y\| = 1$.

Se $\text{Hom}(|X|, |\tau Y|) = 0$, vale o resultado pelo teorema 2.2.11.

Se $\dim \text{Hom}(|X|, |\tau Y|) = 2$ teríamos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow^{\alpha_0} & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\delta^*} & \tau Y & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \rightarrow & Y \\
 & \searrow_{\alpha_2} & & \nearrow & \\
 & & B_2 & &
 \end{array}$$

Como $|\alpha_0|$ é isomorfismo, que $\dim \text{Hom}(|X|, |A|) = 2$ contradição.

Portanto $\dim \text{Hom}(|X|, |\tau Y|) = 1$.

Mas isso significa que todo morfismo de $|X|$ a $|Y|$ se fatora por $|\tau Y|$ pois $\dim \text{Hom}(|X|, |A|) = \dim \text{Hom}(|X|, |B_i|) = 1$ para $i = 1, 2$, todo morfismo de X a Y se fatora por $A \oplus B_1 \oplus B_2$ pois não é epimorfismo que cinde, mas todo morfismo de $|X|$ em $|A|$ (e similarmente em B_i) é ld com $|\alpha_0 \delta^*|$ (similarmente $|\alpha_i \delta^*|$).

Neste caso, porém $\{|X|, |Y|\}$ é uma subcategoria de tipo D , pois todos os morfismos de X a Y tem o mesmo kernel (o kernel de δ^* que é o próprio U) e isto termina o caso $n(\delta) = 1$.

Suponhamos válido para $n(\delta) < n$ e seja

$$\delta : A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow Y.$$

Podemos supor $|A_i| \neq 0 \ \forall i$ e $\|A_n\| = 1$, portanto existe outro antecessor direto de Y , digamos B . Como $\delta = \beta_0 \delta_0$ e $\text{Im}|\delta| = V = \text{Im}|\beta_0 \delta_0|$

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \searrow^{\delta_0} & & \\
 & A_n & \\
 & \searrow^{\beta_0} & \\
 & & Y \\
 & \nearrow_{\beta_1} & \\
 & B &
 \end{array}$$

e $|\delta_0|$ é isomorfismo, então $V = \text{Im}|\beta_0|$.

Pelo lema 3.1.4, podemos supor $\text{Im}|\beta_1| \neq V$.

Como $\dim \text{Hom}(|A|, |Y|) = 1$ temos $\text{Hom}(|A|, |B|) = 0$ (e assim, supomos $\|B\| = 1$).

Dividimos em casos:

1) Se $\|A_1\| = 2$

2) Se $\|A_1\| = 1$.

Vejamos 1

Como $\|A_1\| = 2$, podemos supor $\|A_2\| = 1$ e também que $|gh| \neq 0$ onde:

$$A_0 \xrightarrow{h} A_1 \xrightarrow{g} A_2 \xrightarrow{\varphi_i} Y$$

logo $|gh|$ é isomorfismo. Se $\dim \text{Hom}(|A_2|, |Y|) > 1$ teríamos $|\varphi_i gh| \neq 0, \forall \varphi_i : A_2 \rightarrow Y$ com $|\varphi_i| \neq 0$ logo $\dim \text{Hom}(|A|, |Y|) > 1$, contradição.

Supomos $\dim \text{Hom}(|A_2|, |Y|) = 1$ e além disso $\forall |\varphi| : |A_2| \rightarrow |Y|$ tem imagem V (novamente porque $|gh|$ é isomorfismo). Por outro lado:

$$X \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{h} A_1 \xrightarrow{g} A_2$$

temos $|gh| |\psi|$ uma função não nula que tem kernel U .

Então se $\dim \text{Hom}(|X|, |A_2|) = 1$, temos que a categoria $\{|X|, |A_2|, |Y|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos $\dim \text{Hom}(|X|, |A_2|) = 2$ e portanto existe $f' : X \rightarrow A_2$ com $|f'| (U) \neq 0$.

Como f' não é epimorfismo que cinde, e A_2 não é projetivo (pois g é epimorfismo), podemos considerar a ARS:

$$0 \rightarrow \tau A_2 \rightarrow A_1 \oplus W \rightarrow A_2 \rightarrow 0$$

Se existe W com $|W| \neq 0$, então $\{|A_1|, |W|\}$ é a categoria que procuramos. Suponhamos $|W| = 0$ e $\|\tau A_2\| = 1$. Se $A_0 = \tau A_2$, teríamos $|gh| = 0$

Então A_1 não é projetivo pelo lema 2.2.6 e os morfismos de X em A_2 passam necessariamente por A_1 . Novamente consideramos a ARS.

$$0 \rightarrow \tau A_1 \rightarrow A_0 \oplus \tau A_2 \oplus T \rightarrow A_1 \rightarrow 0$$

e os morfismos de X a A_1 não são epimorfismos que cindem. Se tivéssemos $|T| = 0$, teríamos

$$X \rightarrow A_0 \oplus \tau A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$$

os únicos morfismos de X em A_2 , seriam da forma: $X \rightarrow A_0 \rightarrow A_2$ com kernel U e $X \rightarrow \tau A_2 \rightarrow A_2$ que é nula.

Supomos então $\|T\| = 1$, T indecomponível e temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & A_0 & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 X & \dashrightarrow & \tau A_1 & \rightarrow & \tau A_2 & \rightarrow & A_1 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & & T & & & A_2
 \end{array}$$

Como $\dim \text{Hom}(|X|, |A_0|) = 1$, temos $\dim \text{Hom}(|X|, |\tau A_1|) = 1$. Mas $\dim \text{Hom}(|X|, |T|) > 1$ pois existe $\hat{f} : X \rightarrow T$ tal que $f' = gh\hat{f}$ e $\ker|\hat{f}| \neq U$.

Se $A_2 = A_n$, e se $A_1 \cong \tau Y$ vale o resultado pelo lema 2.2.15, se $A_1 \not\cong \tau Y$ então A_1 e B são caminho-incomparáveis.

Suponhamos $A_n \not\cong A_2$ e $\text{Hom}(|A_1|, |B|) \neq 0$.

Os caminhos de X a Y passando por B são:

$$X \xrightarrow{\bar{\alpha}} A_0 \oplus \tau A_2 \oplus T \xrightarrow{\bar{\beta}} A_1 \xrightarrow{\bar{g}} B \xrightarrow{\beta} Y$$

Se $|\bar{g}| \neq 0$, $|\beta\bar{g}| \neq 0$ pois $|\beta|$ é injetora.

Como $|\bar{\beta}|$ é sobrejetora, $|\beta g \bar{\beta}| \neq 0$ e $|\bar{\beta} \bar{\alpha}|$ é não nula pois existe uma função não nula de $|X|$ em $|A_1|$, temos a função: $|\beta \bar{g} \bar{\beta} \bar{\alpha}|(U) \subset V$.

Como $Im|\beta| \neq V$, temos $|\beta \bar{g} \bar{\beta} \bar{\alpha}|(U) = 0$ mas $|\beta|$ é injetora, $|\bar{g} \bar{\beta} \bar{\alpha}|(U) = 0$

isto é, $|\bar{\beta} \bar{\alpha}|(U) \subset \ker \bar{g}$ para toda $\psi : X \rightarrow A_1$, $|\psi|(U) \subset \ker |\bar{g}|$.

Seja $V_1 = \ker |\bar{g}|$ então $(Hom|X|, |A_1|)(U) = V_1$ e $\ker(|X| \rightarrow |A|) = U$.

Veremos que $Im(|A| \rightarrow |A_1|) = V_1$ pois como $Hom(|A|, |B|) = 0$, temos $|\bar{g}h| = 0$
 $A \xrightarrow{h} A_1 \xrightarrow{\bar{g}} B$ logo $Im|h| \subset \ker |\bar{g}| = V_1$ e assim recaímos no caso anterior com a categoria $\{|X|, |A|, |A_1|\}$.

Vejamos 2), isto é $\|A_1\| = 1$.

com $|\psi| = (1, 0)$

Então existe outro antecessor direto de Y , B com $\|B\| = 1$ e podemos supor pelo lema 3.1.4 que $Im|\beta| \neq V$.

Se $\dim Hom(|A_1|, |Y|) > 1$ teríamos, como $|f_1|$ é isomorfismo, $\dim Hom(|A|, |Y|) > 1$ contradição.

Então, temos $\dim Hom(|A_1|, |Y|) = 1$ e $Im(|A_1| \rightarrow |Y|) = V$.

Se $\dim_k Hom(|X|, |A_1|) = 1$, para qualquer $g : X \rightarrow A_1$, $|g|$ é ld com $|f_1\psi|$ e portanto tem kernel U , logo a categoria $\{|X|, |A_1|, |Y|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos $\dim Hom(|X|, |A_1|) > 1$ (logo $=2$) então existe $\bar{\psi} : X \rightarrow A_1$ tal que $|\bar{\psi}|$ é li com $|f_1\psi|$ logo $\bar{\psi}$ não se levanta por A , mas $\bar{\psi}$ não é epimorfismo que cinde, então existe outro antecessor de A_1 , digamos B_1 tal que $\bar{\psi}$ se levanta por B_1 . Se B_1 é indecomponível de dimensão 2, temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Se B_1 fosse indecomponível de dimensão 1, pela comutatividade da malha, teríamos $\dim \text{Hom}(|X|, |A_1|) = 1$.

Então consideremos B_1 decomponível e $\|\tau A_1\| = 2$

e para qualquer $\hat{\psi} : X \rightarrow \tau A_1$, $|g\hat{\psi}|$ tem kernel U , $|g\hat{\psi}|(U) = 0$ isto é, ou $|\hat{\psi}|(U) = 0$ ou $|\hat{\psi}|(U) \subset \ker |g|$. Seja $V_1 = \ker |g|$.

Se $\text{Hom}(|\tau A_1|, |B|) = 0$, vale o teorema 2.2.11 pois $\|\tau A_1\| = 2$.

Suponhamos $x : \tau A_1 \rightarrow B$, $|x| \neq 0$ então $|\beta x| : |\tau A_1| \rightarrow |B| \rightarrow |Y|$ e $|\beta x \hat{\psi}| : |X| \rightarrow |Y|$.

Como $\text{Im} |\beta| \neq V$, $|\beta x \hat{\psi}|(U) = 0$ e $|\hat{\psi}|(U) \subset V_1$ então: $|\beta x|(V_1) = 0$ mas $|\beta|$ é injetora, logo $|x|(V_1) = 0$ isto é $|x|$ tem o mesmo kernel que $|g|$. Como $\text{Hom}(|A|, |B|) = 0$, x não se fatora por A e existe outro sucessor direto de τA_1 , digamos B_1 , pelo qual x se fatora.

Mas neste caso

$$\tau A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{t} B$$

$x = t\alpha_1$ e como $\|B\| = \|B_1\| = 1$, $|t|$ é isomorfismo a $\ker |x| = \ker |t\alpha_1| = \ker |\alpha_1| = \ker |g|$ o que contraria o lema 3.1.4. $\square$

3.2 Categorias de tipo $\hat{E}$

Suponhamos que $\mathbb{K}$ satisfaz a condição $\hat{E}$ do teorema 3.1.1, tem-se então que $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena uma das categorias abaixo:

com $\|X\| = 2$, $\|Z_i\| = 1$, $Im|\varphi_i| = U \in P^1(X)$; (respec. $ker|\varphi_i| = U \in P^1(X)$;
 $Hom(|Z_i|, |Z_j|) = 0 \forall i, j$ nos casos $\hat{E}1$ e $\hat{E}3$ e

$$Hom(|Z_2|, |Z_3|) = Hom(|Z_1|, |Z_3|) = Hom(|Z_3|, |Z_1|) = \\ Hom(|Z_3|, |Z_2|) = 0 \text{ nos casos } \hat{E}2 \text{ e } \hat{E}4.$$

Se φ_i são morfismos irredutíveis, temos o resultado por 3.1.4. Além disso, para as categorias de tipo $\hat{E}1$ e $\hat{E}2$ temos uma resposta afirmativa.

Antes do próximo resultado, precisamos do seguinte:

Definição 3.2.1 [MP] Seja $\rho(\mathbb{K})$ a subcategoria de $\mathbb{K}$ definida pelos objetos $\{|X| \in \mathbb{K} \mid dim_k |Y| \leq 1 \forall Y \text{ tal que existe um caminho em } \mathcal{C} \text{ de } Y \text{ a } X\}$.

Proposição 3.2.2 [MP]

Seja $\mathcal{C}$ uma componente dirigida, *standard*, de tipo árvore, com $M \in \mathcal{C}$ e $\mathbb{K} = Hom(M, \mathcal{C}) = Hom(M, B - mod)$, $\mathbb{K}$ finita. Sejam X e Y em $\mathcal{C}$ tais que $|X|, |Y| \in \rho(\mathbb{K})$. Então existe um caminho de X a Y em $\mathcal{C}$ se e somente se $|X| \leq |Y|$ em $\rho(\mathbb{K})$

Observação 3.2.3 Essa proposição foi enunciada no artigo para $\mathcal{C}$ componente pré-injetiva de tipo árvore, mas a demonstração permanece a mesma com essas mudanças de hipóteses.

Observação 3.2.4 Pela proposição se $|X|$ e $|Y|$ são objetos de dimensão 1 ligados por um caminho nulo, pelo menos um deles tem um antecessor de dimensão maior do que 1.

Proposição 3.2.5 Seja $\mathbb{K}$ como acima e suponhamos que $\mathbb{K}$ contém, como uma subcategoria plena uma categoria da forma:

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \\ & \searrow & \\ Z_2 & \xrightarrow{\phi_2} & X \\ & \nearrow & \\ Z_3 & \xrightarrow{\phi_3} & \end{array}$$

com $\|X\| = 2$, $\|Z_i\| = 1$, $Im|\varphi_i| = U \in P^1(X)$; $Hom(|Z_i|, |Z_j|) = 0 \forall i, j$.

Então $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena uma das categorias selvagens da lista A^* .

Demonstração: Faremos a demonstração por indução da soma dos comprimentos dos caminhos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (chamado de $n(\varphi)$).

Pelo lema 3.1.4, vale o resultado para $n(\varphi) = 3$. Pelo mesmo lema, podemos supor que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se fatoram pelo mesmo antecessor imediato de X , E (o qual, pelo teorema 2.2.11, podemos supor de dimensão 1).

Suponhamos válido para $n(\varphi) < n$ e seja $\{|X|, |Z_1|, |Z_2|, |Z_3|\}$ uma categoria com $n(\varphi) = n$.

Suponhamos, além disso, que comprimento de φ_1 seja maior ou igual ao comprimento de φ_2 e de φ_3 .

Podemos afirmar que $Z_i \not\cong \tau X$ pois se $|\tau X| \neq 0$, então $\dim Hom(|\tau X|, |X|) > 1$ mas $\dim Hom(|Z_i|, |X|) = 1$.

Seja T sucessor imediato de Z_1 com $|T| \neq 0$.

Dividimos em casos:

a) $\|T\| = 2$

b) $\|T\| = 1$

Vejamos a).

Se para algum i , temos:

$$\dim \operatorname{Hom}(|T|, |Z_i|) + \dim \operatorname{Hom}(|Z_i|, |T|) = 0,$$

vale o resultado pelo teorema 2.2.11.

Podemos supor 3 possibilidades

$$\begin{array}{c} Z_1 \\ \searrow f_1 \\ Z_2 \xrightarrow{f_2} T \xrightarrow{\psi} X \\ \nearrow f_3 \\ Z_3 \end{array}$$

f_1, f_2, f_3 morfismos irredutíveis por causa da maximalidade do caminho φ_1 .

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 & & & & \\ & \searrow f_1 & & & \\ & & T & & \\ & \nearrow f_2 & \searrow \psi & & \\ Z_2 & & \downarrow & & X \\ & & \nearrow \psi_3 & & \\ & & Z_3 & & \end{array}$$

f_1, f_2 morfismos irredutíveis.

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & & \\ & \searrow f_1 & \\ & & T \\ & & \downarrow \\ & & Z_2, Z_3 \longrightarrow X \end{array}$$

Vejam os a_1

Então para $\forall \psi : T \longrightarrow X$ com $|\psi| \neq 0$ e $\forall f_i : Z_i \longrightarrow T$, $Im|\psi f_i| = U$.

Se para todo ψ , tem-se $Im(\psi) = U$ então $\{|T|, |X|\}$ é uma categoria de tipo D e temos o resultado pela proposição 3.1.5.

Suponhamos que não, então $\exists \bar{\psi} : T \longrightarrow X$ com $Im|\bar{\psi}| \neq 0$, mas $|\bar{\psi} f_i|$ é injetora (e tem imagem U) ou é nula para todo i .

Logo, $Im|f_i| \subset ker|\bar{\psi}|$, $\forall i$.

Seja $V = ker|\bar{\psi}|$, então $Im|f_i| = V$ para todo i , e temos o resultado pelo lema 3.1.4.

Para o caso a_2 repetimos os argumentos do caso a_1 .

Vejam os a_3

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & & \\ & \searrow & \\ & T & \\ & \downarrow & \searrow \psi \\ & Z_2, Z_3 & \longrightarrow X \end{array}$$

Seja $g_i : T \longrightarrow Z_i$ para $i = 2, 3$ $\psi_i : Z_i \longrightarrow X$.

Para qualquer $\psi : T \longrightarrow X$, $|\psi f_1|$ tem imagem U . Seja $Im|f_1| = V$ então $|\psi|(V) \subset U$. Além disso, $\varphi_2 : Z_2 \longrightarrow X$ é tal que $Im|\varphi_2| = U$

Como $Hom(|Z_1|, |Z_2|) = 0$, $|g_2 f_1| = 0 \forall g_2 : T \longrightarrow Z_2$ logo $Im|f_1| \subset ker|g_2|$, isto é, $V = ker|g_2|$ e a categoria $\{|T|, |Z_2|, |X|\}$ é subcategoria plena de tipo $\hat{D}$ e temos o resultado pela proposição 3.1.7.

Vejam os b , isto é, $\|T\| = 1$.

Neste caso, $\forall \psi : T \longrightarrow X$, como $|f_1|$ é isomorfismo, tem-se $Im|\psi| = Im|\psi f_1| = U$.

Se $Hom(|T|, |Z_i|) \neq 0$ para algum $i = 2, 3$ teríamos: $Z_1 \xrightarrow{f_1} T \xrightarrow{g_i} Z_i$, $|g_i f_1|$ um isomorfismo, contradição.

Se $Hom(|Z_2|, |T|) = 0$ e $Hom(|Z_3|, |T|) = 0$, a subcategoria plena $\{|X|, |T|, |Z_2|, |Z_3|\}$ é uma categoria com a soma dos comprimentos dos caminhos menor do que n e temos o resultado pela hipótese de indução.

Se $Hom(|Z_i|, |T|) \neq 0$, temos duas possibilidades:

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z_1 & & & \\
 & \searrow & & & \\
 b_1) & Z_2 & \longrightarrow & T & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & Z_3 & & & X
 \end{array}$$

f_1, f_2, f_3 morfismos irredutíveis pela maximalidade do caminho f_1 .

ou

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z_1 & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & T & & \\
 b_2) & \nearrow & & \searrow & \\
 & Z_2 & & & X \\
 & & \nearrow & & \\
 & & Z_3 & &
 \end{array}$$

com f_2 morfismo irredutível e $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) = 0$.

Vejamos b_1 .

$$\begin{array}{ccc}
 Z_1 & & \\
 & \searrow^{f_1} & \\
 Z_2 & \xrightarrow{f_2} & T \\
 & \nearrow_{f_3} & \\
 Z_3 & &
 \end{array}$$

Como f_1, f_2, f_3 são irredutíveis e $\|Z_i\| = 1$, pela proposição 2.2.6, T não é projetivo e por dimensões $\|\tau T\| = 2$.

Mas todo morfismo de τT a X não é monomorfismo que cinde, logo se estende a $Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3$ portanto, para todo morfismo $h : \tau T \rightarrow X$ com $|h| \neq 0$, tem-se $\text{Im}|h| = U$, logo $\{|\tau T|, |X|\}$ é categoria de tipo D e tem-se o resultado pela proposição 3.1.5.

Vejamos b_2 .

com $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) = 0$

Seja W um sucessor direto de Z_3 com $|W| \neq 0$ (Z_3 não pode ser isomorfo a E).

Se $\|W\| = 2$, e se houvesse um caminho $W \rightarrow Z_i \rightarrow T \rightarrow X$ teríamos um caminho $Z_3 \rightarrow W \rightarrow Z_i \rightarrow T$ o que contraria a maximalidade do comprimento de φ_1 .

Se $\text{Hom}(|Z_i|, |W|) = 0$ para algum $i = 1, 2$, tem-se o resultado pelo teorema 2.2.11.

Suponhamos $\text{Hom}(|Z_i|, |W|) \neq 0$.

então para toda $\psi : W \rightarrow X$, tem-se $\text{Im}|\psi f_i| = U$, se existe $V \in P^1(W)$ tal que $\text{Im}f_i = V$ para todo i , a categoria $\{|W|, |Z_1|, |Z_2|, |Z_3|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Se para algum i e j com $i \neq j$, $\text{Im}f_i \neq \text{Im}f_j$, com $\text{Im}|\psi f_i| = \text{Im}|\psi f_j| = U$ para toda ψ , temos que para toda $\psi : W \rightarrow X$, $\text{Im}|\psi| = U$, isto é, $\{|W|, |X|\}$ é uma categoria de tipo D .

Suponhamos $\|W\| = 1$.

Novamente se $\text{Hom}(|W|, |Z_i|) \neq 0$, teríamos $Z_3 \rightarrow W \rightarrow Z_i$ contradição.

Por outro lado se $\text{Hom}(|Z_1|, |W|) = \text{Hom}(|Z_2|, |W|) = 0$, como, para qualquer $\psi' : W \rightarrow X$ com $|\psi'| \neq 0$, $\text{Im}|\psi'| = U$ pois $|f_3| : |Z_3| \rightarrow |W|$ é isomorfismo, a categoria $\{|X|, |Z_1|, |Z_2|, |W|\}$ satisfaz a hipótese de indução. Temos então duas possibilidades:

(*) Se $\text{Hom}(|Z_1|, |W|) = 0$ e $\text{Hom}(|Z_2|, |W|) \neq 0$, então existe um caminho:

$$Z_2 \longrightarrow A \longrightarrow W \text{ com } A \neq Z_3$$

pois $\text{Hom}(|Z_2|, |Z_3|) = 0$. Observamos que A pode ser igual a Z_2 .

Se $\|A\| = 2$, $\{|A|, |Z_3|\}$ é caminho-incomparável.

Se $\|A\| = 1$ e se $\text{Hom}(|Z_1|, |A|) \neq 0$, teríamos $\text{Hom}(|Z_1|, |W|) \neq 0$ o que contraria a nossa hipótese (*).

Além disso, se houvesse uma função $h : A \longrightarrow X$ talque $\text{Im}|h| \neq U$, como $Z_2 \xrightarrow{h_2} A \xrightarrow{h} X$ $|h_2|$ é isomorfismo teríamos $|hh_2| : |Z_2| \longrightarrow |X|$ uma função com imagem $\neq U$, contradição, logo se $A \neq Z_2$, a categoria plena $\{|X|, |Z_1|, |A|, |Z_3|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos agora que $A = Z_2$.

Se T ou W tem outro antecessor direto com a mesma propriedade dos $Z'_i S$, novamente,

teríamos:

$\|\tau W\| = 2$ e todos os morfismos de τW a X , teriam a mesma imagem, logo a subcategoria plena $\{|\tau W|, |X|\}$ é uma categoria de tipo D .

Vejamos a outra extremidade do caminho.

Como $\|E\| = 1$, existem outros antecessores diretos de X , e neste caso $|B| \neq 0$ e X não é projetivo pelo lema 2.2.6.

Dividimos em casos:

- 1) $\|\tau X\| \neq 0$
- 2) $\|\tau X\| = 0$

Vejamos 1)

Como $\|\tau X\| \neq 0$, pelo lema 2.2.15 podemos supor $\|\tau X\| = 1$ e existem B, C antecessores diretos de X e pelo lema 3.1.4, $\text{Hom}(|Z_i|, |B|) = \text{Hom}(|Z_i|, |C|) = 0$.

Se $\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |B|, |C|\}$ são caminho-incomparáveis, temos o resultado pelo teorema 2.2.4.

Suponhamos então que para algum i e para B ou C exista um caminho (nulo) $Z_i \rightarrow B$.

Veremos que isto nos leva a uma contradição.

Temos então dois caminhos de Z_i a X .

$$\begin{aligned} Z_i &\rightarrow E \rightarrow X \text{ não nulo} \\ Z_i &\rightarrow B \rightarrow X \text{ nulo} \end{aligned}$$

Portanto nenhum desses caminhos pode ser seccional e além disso, o caminho não nulo não pode passar por τX pois $\dim \text{Hom}(|\tau X|, |X|) > 1$.

Logo existe outro antecessor de E por onde passa esse caminho (como T e W são caminho-incomparáveis, nenhum deles pode ser E) então temos:

Se $\|E_1\| = 2$ e E_1 indecomponível, então $\{|E_1|, |B|\}$ é caminho-incomparável e temos o resultado pelo teorema 2.2.4.

Se $\|E_1\| = 1$, temos $\|\tau E\| = 1$ (E não é projetivo pelo lema 2.2.6).

Se $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau E|) \neq 0$, ou um dos morfismos irredutíveis f entre τE e B é tal que $|f| = 0$ e neste caso temos o resultado pelo lema 2.2.17 ou um caminho não nulo entre Z_i e B o que é uma contradição.

Logo esse caminho não passa por τE e existe E_2 antecessor direto de E_1 e um caminho

este caminho é seccional e começamos novamente.

Se $E_1 = E'_1 \oplus E''_1$ então

Neste caso, $\|\tau E\| = 2$ e pelo teorema 2.2.11, $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau E|) \neq 0$

Então, temos

$$Z_i \xrightarrow{f_1} \tau E \xrightarrow{\psi} X$$

Para $\forall \psi : \tau E \rightarrow X$, $|\psi f_i|$ tem imagem U , logo ou $\text{Im}|\psi| = U \forall \psi$ o que já vimos não pode ocorrer (por construção) ou existe alguma $\bar{\psi} : \tau E \rightarrow X$ talque $\text{Im}|\bar{\psi}| \neq U$. Mas como $|\bar{\psi} f_i|$ tem imagem U , $\text{Im}|\bar{\psi}|$ é a mesma para todo i , isto é, existe $V \in P^1(\tau E)$ tal que $\text{Im}|\bar{\psi}| = V \forall i$ e portanto vale a hipótese de indução.

E assim, ou temos o resultado ou obtemos mais um passo de um caminho seccional, mas o caminho não pode ser seccional, logo não pode continuar assim indefinidamente.

Se por acaso, T e W são antecessores diretos de E .

teríamos $\|\tau E\| = 2$ e $\{|\tau E|, |Z_i|\}$ caminho incomparáveis.

Similarmente se T e W são antecessores diretos de E_i para algum E_i no caminho seccional

em todos os passos, vimos que $\|\tau E_{i-1}\| \neq 0$ se $\tau E_{i-1} = W$, temos um caminho não nulo de Z_2 a B , contradição.

Se $\tau E_{i-1} \neq W$, temos:

$\|\tau E_i\| = 2$ e $\{|\tau E_i|, |Z_i|\}$ caminho-incomparáveis.

Vejamos agora 2), isto é $|\tau X| = 0$.

Temos então:

e existe um antecessor direto de B_0 digamos B_1 com $\| B_1 \| \neq 0$.

Se $\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |B_1| \longrightarrow |B_0|\}$ são caminho-incomparáveis, temos o resultado pelo teorema 2.2.4.

Suponhamos que existe um caminho (nulo) de Z_i a B_j .

Se T e W são antecessores diretos de E , temos

e se $Z_2 = \tau E$, existe o caminho nulo $Z_2 \longrightarrow \tau X \longrightarrow B_0$.

Mas B_0 não é projetivo, (pois apesar de $|\tau X| = 0$, existe um caminho de M a τX).

Se $|\tau B_0| = 0$ existe B_2 antecessor direto de B_1 , com $\| B_2 \| \neq 0$ e neste caso, $\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_2|, |B_2| \longrightarrow |B_1|\}$ são caminho-incomparáveis.

Se $|\tau B_0| \neq 0$, podemos supor que existe B'_1 , com $\|B'_1\| = 1$ e novamente, $\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |B'_1|, |B_1|\}$ são caminho-incomparáveis.

Suponhamos então que existe um caminho $Z_i \rightarrow B_j$. Então existem novamente dois caminhos de Z_i a X e portanto nenhum deles pode ser seccional.

Porém o caminho $Z_i \rightarrow B_j$ é nulo, pois se não, teríamos um morfismo não nulo $|f| : |Z_i| \rightarrow |B_j| \rightarrow |X|$ com $Im|f| \neq U$, contradição.

Mas, neste caso, pela proposição 3.2.2, ou $|Z_i|$ ou $|B_j|$ tem algum antecessor de dimensão 2 (podemos descartar as dimensões maiores).

Mas por argumentos anteriores, se tivéssemos $Z_i \rightarrow Y \rightarrow B_j$, com $\|Y\| = 2$, vale a hipótese de indução.

Portanto, podemos supor Y antecessor de ambos.

Além disso, pelo teorema 2.2.11, $Hom(|Y|, |Z_i|) \neq 0, \forall i$, $Hom(|Y|, |B_j|) \neq 0 \forall j$ e temos

então existem dois caminhos de Y a X , nenhum deles pode ser seccional e temos um caminho

$$Y \rightarrow B_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow \cdots B_i \rightarrow \cdots B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow X$$

com $|B_j| \neq 0, \forall j$, não nulo e não seccional de Y a X .

Podemos afirmar que existe um j tal que existe caminho de Z_i a B_j , mas não existe caminho de Z_i a B_{j+1} e então a categoria:

$$\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |B_{j+2}| \rightarrow |B_{j+1}|\}$$

é caminho-incomparável.

Vejamos que não pode haver caminho de B_{j+1} a Z_i pois teríamos, nesse caso:

$$B_{j+1} \longrightarrow Z_i \longrightarrow B_j$$

e um caminho seccional $B_{j+1} \longrightarrow B_j$.

Por outro lado, suponhamos que existe um caminho $B_{j+2} \longrightarrow Z_i$. Pelo mesmo argumento acima, o caminho $B_{j+2} \longrightarrow B_{j+1} \longrightarrow B_j$ não pode ser seccional logo

$$\begin{array}{ccc} B_{j+2} = \tau B_j & & B_j \\ & \searrow & \nearrow \\ & B_{j+1} & \end{array}$$

Como $|B_{j+2}| \neq 0$, existe B'_{j+1} com $|B'_{j+1}| \neq 0$ e

$$\begin{array}{ccccc} & & B'_{j+1} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \tau B_j = B_{j+2} & & & & B_j \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & B_{j+1} & & \end{array}$$

Neste caso, B_{j+1} não pode ser Z_i , pois se fosse, teríamos um morfismo não nulo $Z_i \longrightarrow B_0 \longrightarrow X$ isto é, um morfismo de Z_i em X com imagem diferente de U , contradição.

Além disso, não é possível um caminho $Z_i \longrightarrow B'_{j+1}$ (pois existe $B_{j+2} \longrightarrow Z_i$) e tampouco $B'_{j+1} \longrightarrow Z_i$ (pois existe $Z_i \longrightarrow B_j$).

Neste caso, podemos considerar a categoria caminho-incomparável $\{|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |B'_{j+1}|, |B_{j+1}|\}$.

Suponhamos que $B_{j+2} \cong Y$, neste caso teríamos,

$$\begin{array}{ccc} & & Z_i \\ & \nearrow & \searrow \\ Y = B_{j+2} = \tau B_j & & B_j \\ & \searrow & \nearrow \\ & & B_{j+1} \end{array}$$

Como o caminho $Z_i \longrightarrow B_j$ é nulo, se fosse um morfismo irredutível, teríamos o resultado pelo lema 2.2.17, se não é uma flecha, como a componente *standard*, teria de passar por outro módulo, absurdo. Portanto, para esta situação temos o resultado. Só nos resta analisar o caso

(**) $\text{Hom}(|Z_1|, |W|) \neq 0$ e $\text{Hom}(|Z_2|, |W|) \neq 0$.

Novamente, esses morfismos não se fatoram por Z_3 , então existe outro antecessor direto de W , digamos A , por onde esses morfismos se fatoram.

Se $A = A_1 \oplus A_2$ com $\text{Hom}(|Z_1|, |A_1|) \neq 0$ e $\text{Hom}(|Z_2|, |A_2|) \neq 0$, teremos que para todo $h_i : A_i \rightarrow X$ $\text{Im}|h_i| = U$ e neste caso, W não é projetivo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & A_1 & & & \\
 \nearrow & & \searrow & & \\
 \tau W & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & W \longrightarrow X \\
 \searrow & & \nearrow & & \\
 & Z_2 & & &
 \end{array}$$

$\|\tau W\| = 2$ e $\{|\tau W|, |X|\}$ é uma subcategoria plena de tipo D . Podemos então supor que esses morfismos de Z_1 e Z_2 a W se fatoram através do mesmo A (de dimensão 1).

Se $\text{Hom}(|T|, |A|) = 0$, como $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) = 0$, a categoria $\{|X|, |T|, |A|, |Z_3|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos $\text{Hom}(|T|, |A|) \neq 0$.

Se $T = A$, teríamos:

Como W não é projetivo, $\exists \tau W$ e $\tau W \neq Z_i$ $i = 1, 2$ (Se não haveria um caminho de $\tau W = Z_i$ a Z_3 , se o caminho é não nulo, contraria a hipótese de $\text{Hom}(|Z_i|, |Z_3|) = 0$, se o caminho é nulo, temos o resultado pelo lema 2.2.17, pois o caminho $\tau W \rightarrow Z_3$ é uma flecha). Temos então o seguinte diagrama:

Agora, se $\|\tau W\| = 2$, $\{|\tau W|, |Z_2|\}$ é a categoria que procuramos.

Se $\|\tau W\| = 1$, (observe que não pode ser zero por dimensões) toda função de τW em X se fatora por T ou por Z_3 , logo toda função de τW em X tem imagem U .

Mas, neste caso, T não é projetivo, $\|\tau T\| = 2$ e novamente $\{|\tau T|, |X|\}$ é subcategoria plena de tipo D .

Suponhamos $T \neq A$, então existe um caminho

Com $\text{Hom}(|Z_1|, |\tau W|) = \text{Hom}(|Z_2|, |\tau W|) = \text{Hom}(|T|, |\tau W|) = 0$, (senão teríamos $T \longrightarrow \tau W \longrightarrow Z_3$, contradição) e portanto $A_{n-1} \not\cong \tau W$.

Podemos supor $\|A_{n-1}\| = \|\tau W\| = 1$ (pois se algum deles tivesse dimensão 2, $\{|A_{n-1}|, |\tau W|\}$ é a categoria que procuramos).

Mas, então A_n não é projetivo e temos novamente:

$$\text{Hom}(|Z_i|, |\tau A|) = \text{Hom}(|T|, |\tau A|) = 0.$$

logo $A_{n-2} \neq \tau A$, e novamente podemos supor ambos de dimensão 1 e repetimos o processo até alcançarmos τA_1 .

Outra vez temos $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau A_1|) = 0$ e portanto $Z_i \neq \tau A_1$ e temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \tau T & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \tau A_1 & &
 \end{array}$$

T não é projetivo, e $\|\tau T\| = 2$.

Se existe algum morfismo $\gamma : \tau A_1 \longrightarrow X$ com $\text{Im}|\gamma| \neq U$, como γ não pode se fatorar por T , (pois todo morfismo de T em X tem imagem U), γ se fatora por τA_2 , mas fazendo agora o caminho inverso, esse morfismo se fatora por $A \oplus Z_3$, contradição (pois todo morfismo de A em X e de Z_3 em X tem a mesma imagem U).

Portanto a categoria $\{|\tau T|, |X|\}$ é uma subcategoria plena de tipo D . $\square$

Proposição 3.2.6 Seja $\mathbb{K}$ como acima e suponha que $\mathbb{K}$ contém, como uma subcategoria plena uma categoria da forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_2 & & \\
 & & \searrow^{\varphi_2} & & \\
 & & & Z_1 & \\
 & & & \searrow^{\varphi_1} & \\
 & & & & X \\
 & & & \nearrow_{\varphi_3} & \\
 & & & & Z_3
 \end{array}$$

com $\|X\| = 2$, $\|Z_i\| = 1$, $\forall i$.

$\text{Im}|\varphi_1| = \text{Im}|\varphi_2| = U \in P^1(X)$

$\text{Hom}(|Z_2|, |Z_3|) = \text{Hom}(|Z_1|, |Z_3|) = \text{Hom}(|Z_3|, |Z_1|) =$

$\text{Hom}(|Z_3|, |Z_2|) = 0$ e $\dim \text{Hom}(|Z_i|, |X|) = 1$.

Então $\mathbb{K}$ contém, como subcategoria plena uma das categorias (caminho-incomparáveis) da lista A^* .

Demonstração: Faremos a demonstração por indução na soma dos comprimentos dos caminhos φ_1 e φ_3 . Veremos inicialmente que podemos supor que φ_2 é um morfismo irredutível.

Suponhamos que comprimento de φ_2 é maior do que 1 e considere $Z_2 \rightarrow T \rightarrow Z_1$ com T antecessor direto de Z_1 .

Obviamente podemos supor $|T| \neq 0$ e portanto

A) Se $\|T\| = 2$

B) Se $\|T\| = 1$,

Vejamos B, isto é, $\|T\| = 1$.

Se $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) \neq 0$, teríamos $Z_2 \rightarrow T \rightarrow Z_3$ um isomorfismo, contradição, logo $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) = 0$.

Se, por outro lado, tivéssemos $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) \neq 0$, teríamos $Z_3 \rightarrow T \rightarrow Z_1$ isomorfismo, contradição, logo $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) = 0$.

Agora, seja $h : T \rightarrow X$ um morfismo tal que $|h| \neq 0$ e suponhamos que h é tal que $\text{Im}|h| \neq U$ então a função $|h \varphi'_2|$ onde $Z_2 \xrightarrow{\varphi'_2} T \xrightarrow{h} X$, tem imagem diferente de U , pois φ'_2 é isomorfismo, contradição. Assim a categoria $\{|X|, |Z_3|, |T| \rightarrow |Z_1|\}$ satisfaz as hipóteses.

Suponhamos então A isto é $\|T\| = 2$.

Se $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) + \text{Hom}(|Z_3|, |T|) = 0$, temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Dividimos novamente em casos

A1) $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) \neq 0$

A2) $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) \neq 0$

Começamos por A2, suponhamos $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) \neq 0$.

Como $\text{Hom}(|Z_3|, |Z_1|) = 0$, temos $\text{Im } f_3 = \ker f_1$ mas $\text{Im } f_2 \neq \text{Im } f_3$.

Podemos então supor $V_1 = \text{Im } f_3$,

$$V_2 = \text{Im } f_2 \text{ e } |T| = V_1 \oplus V_2$$

logo para toda $\psi : T \rightarrow X$ teremos que $\text{Im } \psi \subset U$, (pois $\dim \text{Hom}(|Z_i|, |X|) = 1$) e portanto $\{|T|, |X|\}$ é categoria de tipo D e temos o resultado por 3.1.5.

Vejamos A1, isto é, $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) \neq 0$

Seja $\varphi : T \rightarrow X$ com $|\varphi| \neq 0$ então $|\varphi f_2|$ tem imagem U .

Seja V a imagem de f_2 , então temos:

- 1) toda $\varphi : T \rightarrow X$ é tal que $|\psi|(V) \subset U$.
- 2) Além disso, para toda $g : T \rightarrow Z_3$, $\ker |g| = \text{Im } |f_2| = V$.
- 3) Por hipótese, $\text{Im } |\varphi_3| = U$ logo temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \longrightarrow & & \\
 T & \longrightarrow & Z_3 & \longrightarrow & X \\
 & & \longrightarrow & &
 \end{array}$$

uma categoria de tipo $\hat{D}$ e temos resultado pela proposição 3.1.7.

Por isso, podemos supor que φ_2 é um morfismo irredutível.

Chamamos de $n(\varphi)$ à soma dos comprimentos dos caminhos φ_1 e φ_3 .

Para $n(\varphi) = 2$, tem-se o resultado pelo lema 3.1.4. Além disso, podemos supor que existe E um antecessor direto de X com $\|E\| = 1$ e φ_1 e φ_3 se fatorando através de E .

Suponhamos válido para $n(\varphi) \leq n$ e seja $\{|X|, |Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|\}$ uma subcategoria com $n(\varphi) = n + 1$.

Sabemos também que $\tau X \not\cong Z_i, \forall i$,

Seja T um antecessor direto de Z_1

Podemos ter $T = E$)

Dividimos em casos:

a) $\|T\| = 2$

b) $\|T\| = 1$

Vejamos a, $\|T\| = 2$.

Se $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) + \text{Hom}(|Z_3|, |T|) = 0$, temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Dividimos novamente

a1) $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) \neq 0$

a2) $\text{Hom}(|Z_3|, |T|) \neq 0$

Começamos por a1) $\text{Hom}(|T|, |Z_3|) \neq 0$

Para qualquer $\psi : T \rightarrow X$ com $|\psi| \neq 0$, temos $Im|\psi f_1| = U$, além disso, $|f_2 f_1| = 0$ pois $Hom(|Z_1|, |Z_3|) = 0$, logo $ker|f_2| = Im|f_1| = U_1 \in P^1(T)$ e $|\psi|(U_1) \subset U$ para qualquer $\psi : T \rightarrow X$. Mais ainda, para todo $\varphi : Z_3 \rightarrow X$, com $|\varphi| \neq 0$, temos $Im|\varphi| = U$ por hipótese e para toda $f : T \rightarrow Z_3$, com $|f| \neq 0$ temos $ker|f| = U_1$ pois $|f f_1| = 0$.

Assim sendo, a subcategoria plena $\{|T|, |Z_3|, |X|\}$ é uma categoria de tipo $\hat{D}$ e temos o resultado pela proposição 3.1.7.

a2) $Hom(|Z_3|, |T|) \neq 0$

Se $Im|f_1| = Im|f_3|$ então a categoria $\{|T|, |Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos $Im|f_1| \neq Im|f_3|$. Nesse caso, para toda $\psi : T \rightarrow X$, $Im|\psi f_i| = U$, logo para toda $\psi : T \rightarrow X$, com $|\psi| \neq 0$ tem-se $Im|\psi| = U$ e assim a subcategoria plena $\{|T|, |X|\}$ é uma categoria de tipo D e temos o resultado pela proposição 3.1.5.

b) Suponhamos $\|T\| = 1$.

Para todo $h : T \rightarrow X$ com $|h| \neq 0$, temos que $Im|h f_1| = U$ e como $|f_1|$ é isomorfismo, $Im|h| = U$. Se $Hom(|T|, |Z_3|) \neq 0$, teríamos $Z_1 \xrightarrow{f_1} T \xrightarrow{g} Z_3$ $|g f_1|$ isomorfismo, contradição, pois $Hom(|Z_1|, |Z_3|) = 0$.

Por outro lado, se $Hom(|Z_3|, |T|) = 0$, então a subcategoria plena $\{|X|, |Z_1| \rightarrow |T|, |Z_3|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Suponhamos que $Hom(|Z_3|, |T|) \neq 0$.

Como $Hom(|Z_3|, |Z_1|) = 0$, existe outro antecessor direto de T , (digamos B) tal que $|B| \neq 0$ e $Z_3 \rightarrow B \rightarrow T$. Se $Z_1 \not\cong B$, e se $\|B\| = 2$ e é indecomponível, então $\{|B|, |Z_1|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos.

Se $\|B\| = 1$, pelos mesmos argumentos anteriores, para toda função $h : B \rightarrow X$ com

$|h| \neq 0$, teremos $Im|h| = U$. Além disso,

$$Hom(|B|, |Z_1|) = Hom(|Z_1|, |B|) = 0.$$

Assim sendo, a subcategoria plena $\{|X|, |Z_3| \rightarrow |B|, |Z_1|\}$ satisfaz a hipótese de indução.

Vejamos o que ocorre quando $Z_3 = B$. Temos então:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_2 & & \\ & & \searrow & & \\ & & & Z_1 & \\ \nearrow & & & \searrow & \\ \tau T & \rightarrow & W & \rightarrow & T \\ \searrow & & & \nearrow & \\ & & Z_3 & & \end{array}$$

T não é projetivo e $|\tau T| \neq 0$.

Suponhamos que existe W , $|W| \neq 0$ com $W \neq Z_i$, somando direto do termo do meio da *ARS*:

$$\tau T \rightarrow Z_1 \oplus Z_3 \oplus W \rightarrow T.$$

Então, $\|\tau T\| = 2$ e $\{|\tau T|, |Z_2|\}$ é a categoria caminho-incomparável que procuramos.

Podemos supor então que não existe W naquelas condições, $\|\tau T\| = 1$ e sabemos que há pelo menos outro antecessor direto de X , digamos A , e que podemos supor $\|A\| = 1$ e $Im(A \rightarrow X) \neq U$.

Assim, X não é projetivo.

Temos 2 possibilidades:

b1) $\|\tau X\| = 1$

b2) $\|\tau X\| = 0$

(Lembrando que se $\|\tau X\| = 2$, temos o resultado pelo lema 3.1.4).

Vejam os b1.

Se $\{|Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|, |E_2|, |E_3|\}$ é uma subcategoria plena caminho-incomparável, temos o resultado (aliás se $T = E$, a categoria acima é de fato caminho-incomparável). Suponhamos então que a categoria não seja caminho-incomparável.

Como não é possível um caminho $E_j \rightarrow Z_i \rightarrow X$ (pois contraria a unicidade do caminho seccional), podemos supor que existe um caminho (nulo por causa das imagens) $Z_i \rightarrow E_j$, $j \neq 1$.

Assim sendo, temos 2 caminhos

$Z_i \rightarrow E_1 \rightarrow X$ não nulo e

$Z_i \rightarrow E_j \rightarrow X$ nulo ($j \neq 1$)

portanto nenhum deles podem ser um caminho seccional.

Em particular, o caminho não nulo não pode ser seccional, mas não pode passar de τX (pois $\dim \text{Hom}(|\tau X|, |X|) > 1$) logo existe um antecessor direto de E , (digamos A_1) que podemos supor $\|A_1\| = 1$, e tal que o caminho não nulo $Z_i \rightarrow E_1$ se fatora por A_1 :

Novamente, E_1 não é projetivo e por dimensões $|\tau E_1| \neq 0$.

Se $\|\tau E_1\| = 2$, repetindo os argumentos usados no caso $\|T\| = 2$, teremos o resultado.

Se $\|\tau E_1\| = 1$ e tivéssemos $\text{Hom}(|Z_i|, |\tau E_1|) = 0$ teríamos um isomorfismo $Z_i \rightarrow$

$\tau E_1 \longrightarrow E_2$ e portanto, teríamos um morfismo de $|Z_i|$ em $|X|$ com imagem diferente de U , contradição.

Novamente, temos que existe outro antecessor direto de A_1 , digamos A_2 com $\|A_2\| = 1$, novamente $\|\tau A_1\| = 1$ e se $Hom(|Z_i|, |\tau A_1|) \neq 0$, teríamos novamente uma função de $|Z_i|$ em $|X|$, com imagem diferente de U e assim sucessivamente, continuamos.

Mas então, o caminho $Z_i \rightarrow T \rightarrow E_1$ é seccional e portanto não pode haver caminho $Z_i \rightarrow E_j$ para $j \neq 1$ e a categoria $\{Z_2 \rightarrow Z_1, Z_3, E_2, E_3\}$ é caminho-incomparável.

Analisemos b2, isto é, $|\tau X| = 0$.

Como $\|X\| = 2$, sabemos que há pelo menos dois caminhos distintos de M a X e portanto nenhum deles pode ser seccional.

Então o caminho

$$M \longrightarrow E_2 \longrightarrow X$$

não é nulo, não é seccional e não passa por τX .

Podemos supor então que há um caminho não nulo (e portanto todos os seus objetos são não nulos) e não seccional:

$$M \longrightarrow A_{j+1} \begin{array}{l} \nearrow A'_j \\ \searrow A''_j \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} A_{j-1} \longrightarrow E_2 \longrightarrow X$$

Seja j tal que os caminhos

$$A'_j \longrightarrow E_2 \longrightarrow X \text{ e } A''_j \longrightarrow E_2 \longrightarrow X$$

sejam seccionais:

Se $\|A'_j\|$ ou $\|A''_j\| = 2$, teremos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Supomos então que $\|A'_j\| = \|A''_j\| = 1$.

Se a categoria $\{|Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|, |A'_j|, |A''_j|\}$ é caminho-incomparável, temos o resultado.

Como o caminho $A'_j \longrightarrow E_2 \longrightarrow X$ é seccional, não é possível haver um caminho $A'_j \longrightarrow Z_i \longrightarrow X$.

Suponhamos então que há um caminho nulo $Z_i \rightarrow A'_j \rightarrow X$.

Pela proposição 3.2.2, existe um objeto $|Y|$ tal que $\|Y\| = 2$, e Y é antecessor de Z_i ou de A'_j (pois o caminho $Z_i \rightarrow A'_j$ é nulo e ambos tem dimensão 1).

Mas se existe $Z_i \rightarrow Y \rightarrow A'_j$, novamente, repetindo os argumentos do caso $\|T\| = 2$, teremos o resultado. Portanto, podemos supor que Y é antecessor a ambos. Além disso, se $\text{Hom}(|Y|, |Z_i|) = 0$ ou $\text{Hom}(|Y|, |A_i|) = 0$, temos o resultado pelo teorema 2.2.11.

Então temos

Consideremos o caminho

$$Y \rightarrow A_t \rightarrow A_{t-1} \rightarrow \cdots A_j \rightarrow \cdots A_0 \rightarrow E_2.$$

Seja t o menor índice tal que o caminho $Y \rightarrow A_t$ é seccional (claro que $t \geq j$).

Temos então

Como o caminho $Y \rightarrow A_t$ é seccional, não podemos ter um caminho

$$Y \rightarrow Z_i \rightarrow A_t.$$

Se $\{|Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|, |A_t|, |A'_t|\}$ é caminho-incomparável então temos o resultado.

Suponhamos então que existe um caminho $A_t \rightarrow Z_i$, para algum i temos então 2 caminhos:

$$A_t \rightarrow Z_i \rightarrow A_j$$

caminho nulo e um caminho não nulo

$$A_t \rightarrow A_j.$$

Consideremos agora t^* índice tal que:

$\exists$ caminho $A_{t^*} \rightarrow Z_i$, mas não existe caminho de $A_{t^*+1} \rightarrow Z_i$ e de maneira semelhante, seja j^* tal que

$\exists$ caminho $Z_i \rightarrow A_{j^*}$, mas não existe caminho de Z_i a A_{j^*+1} .

Como a componente é dirigida e de tipo árvore, obrigatoriamente $t^* > j^*$ e assim, temos 2 caminhos

(o caminho $A_{t^*} \rightarrow Z_i \rightarrow A_{j^*}$ é nulo porque o caminho $Z_i \rightarrow A_{j^*}$ é nulo por causa das imagens) logo nenhum desses caminhos pode ser seccional e portanto no caminho não nulo, temos pelo menos uma malha

e neste caso, a categoria $\{|Z_2| \rightarrow |Z_1|, |Z_3|, |B_1|, |B_2|\}$ é caminho-incomparável. $\square$

Para as categorias de tipo $\hat{E}3$ e $\hat{E}4$ temos resultados apenas parciais e acreditamos que seu estudo requer outras ferramentas.

Para concluir, observamos que as subcategorias que satisfazem as condições $\hat{F}$ e $\hat{G}$ do teorema 3.1.2 e o poset $\{A < B > C < D > A, S, T\}$ da condição $\hat{H}$ são mansas. Além disso, se $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena de tipo A , descrita em 3.1.3, então $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria que satisfaz a condição $\hat{F}$. Conjecturamos, também, que se $\mathbb{K}$ contém um *poset* selvagem e satisfaz as condições b, e, g do teorema 3.1.1, teremos que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena da lista A^* (e as da lista A serão caminho-incomparáveis).

Capítulo 4

Módulos da família tubular separante

Veremos neste capítulo a situação em que M é um B -módulo indecomponível, mas não é dirigido. Nos concentramos no caso em que B é uma álgebra inclinada de tipo euclideano.

Observamos que a proposição 4.1.10 é muito próxima do resultado obtido em [T], porém não exigimos que B seja uma boa álgebra, mas sim que a componente pré-injetiva de B seja de tipo árvore.

Exemplo. Como exemplo, vemos em [AL2] a álgebra dada pelo quiver

com as relações: $\alpha\delta = 0$, $\gamma\epsilon = 0$, $\beta\delta = \beta\epsilon$

B é uma álgebra inclinada de tipo $\tilde{D}_4$, tem uma fatia completa na componente pré-injetiva, mas a componente pós-projetiva de B é a mesma de $\tilde{A}_1$ (e portanto, não é livre de $\tilde{A}_n$). B não é boa álgebra nem fortemente simplesmente conexa.

4.1 Álgebras inclinadas de tipo tubular doméstico

Definição 4.1.1 [[R2], 4.5] Seja $\mathcal{T}$ um tubo estável e $M \in \mathcal{T}$. Diremos que M é um módulo-raio se existe um caminho seccional (infinito)

$$M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_i \rightarrow \dots$$

com M_i 's não isomorfos e tal que para cada i o caminho $M \rightarrow M_i$ é o único caminho seccional de comprimento i que começa em M . Dualmente definimos um módulo-co-raio.

Proposição 4.1.2 [[R2], 4.4]

Seja $A = k\Delta$ onde Δ é o quiver A_n , linearmente ordenado e seja T um A -módulo inclinante. Então $R = \text{End}_A(T)$ é um ramo de comprimento n em a , onde a corresponde ao único A -módulo projetivo e injetivo.

Além disso, todo ramo em a , de comprimento n , ocorre dessa maneira.

Definição 4.1.3 [R2] Dados um tubo $\mathcal{T}$, um módulo-raio M e um ramo R , chamamos de tubo insertado em M por R ao quiver de translação $\mathcal{T}[M, R]$ obtido por inserções por raios do tubo $\mathcal{T}$. Dualmente definimos tubos co-insertados, a partir de um módulo-co-raio.

Definição 4.1.4 [T] Seja $\mathcal{T}$ um tubo insertado. Diremos que os módulos-raios tem nível 1 e para $M \in \mathcal{T}$ diremos que M tem nível n se existe um caminho seccional em $\mathcal{T}$ de comprimento $n-1$ da forma $M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 = E$ com E um módulo-raio. Dualmente no caso em que $\mathcal{T}$ é um tubo co-insertado.

Proposição 4.1.5 [[R2], 4.5] Seja $\mathcal{C}$ uma componente standard de $B_0\text{-mod}$, V um módulo-raio em $\mathcal{C}$ e R um ramo não nulo. Seja $A = B_0[V, R]$ e seja $\Gamma\mathcal{C}' = (\Gamma\mathcal{C})[v, R]$ então $\mathcal{C}'$ é uma componente *standard* de A e se M é um A -módulo indecomponível não pertencente a $\mathcal{C}'$, então nenhum somando indecomponível de sua restrição a B_0 pertence a $\mathcal{C}$.

Lema 4.1.6 [[R2], 4.6] Se Γ é um tubo e v um vértice-raio em Γ e R um ramo então $\Gamma[v, R]$ é novamente um tubo.

Definição 4.1.7 [PT] Seja $\mathcal{T}$ um tubo. Um vértice v de $\mathcal{T}$ é chamado de back vértice se não há flechas apontando para o infinito que terminam em v . Em um tubo insertado os vértices raios são back vértices. Dualmente podemos definir front vértices.

Proposição 4.1.8 [PT] Seja $\mathcal{T}$ uma componente conexa e suponha que $\mathcal{T}$ é um tubo insertado.

Sejam $M_1, M_2, \dots, M_t$ os back vértices de $\mathcal{T}$. Então para todo $M \in \mathcal{T}$, $\exists j_1, \dots, j_s$ tal que $M = M_j[s]$ e $\underline{\dim} M = \sum_{i=1}^s \underline{\dim} M_{j_i}$.

Este primeiro resultado independe da estrutura da álgebra B e de qualquer componente dirigida.

Lema 4.1.9 Seja $\mathcal{T}$ um tubo (insertado ou co-insertado ou ambos) de posto n . Então para qualquer módulo M de nível $\geq 2n + 1$, existe um I injetivo indecomponível tal que $\dim \text{Hom}(M, I) \geq 3$.

Demonstração: Seja M de nível $t \geq 2n + 1$ então $M = M_j[t]$ para algum M_j back vértice (ou front vértice, se $\mathcal{T}$ for tubo coinsertado) então existe pelo menos um injetivo I tal que $\text{Hom}(M_j, I) \neq 0$. Mas $\underline{\dim} M = \sum_{i=1}^t \underline{\dim} M_{j_i}$.

Como $t \geq 2n + 1$ o back vértice M_j comparece tres vezes nessa soma logo $\dim \text{Hom}(M, I) \geq 3$.

Como isso vale para qualquer tubo (insertado, ou co-insertado) de qualquer álgebra, no caso em que Λ é inclinada mansa, tem-se então

$$q_{\Lambda[M]}(\underline{\dim} I + \underline{\dim} S_e) = \chi_{\Lambda[M]}(\underline{\dim} I + \underline{\dim} S_e) + \dim \text{Ext}^2(M, I).$$

Mas $\dim \text{Ext}^2(M, I) = 0$ e $\chi_{\Lambda[M]}(\underline{\dim} I + \underline{\dim} S_e) = -1$ (Ver 1.4.7). Como I é injetivo e B é inclinada mansa então I pode estar:

1) Na componente pré-injetiva e então

$$\dim_k \text{Hom}(I, I) = 1, \quad \text{Ext}^i(I, I) = 0.$$

2) Na componente de conexão e também aqui (pois a componente é *standard* e dirigida) temos

$$\text{Hom}(I, I) = k, \quad \text{Ext}^i(I, I) = 0.$$

3) Num tubo co-insertado, que também é uma componente *standard* e portanto novamente temos

$$\text{Hom}(I, I) = k, \quad \text{Ext}^i(I, I) = 0.$$

Assim

$$\chi_B(\dim I) = 1$$

□

Vejamos então o caso em que B é de tipo tubular doméstico.

Seja B mansa inclinada de tipo euclideano com

- 1) fatia completa no componente pré-injetiva.
- 2) componente pré-injetiva de tipo árvore.

Seja M indecomponível, na família tubular separante.

Proposição 4.1.10 Nas condições acima, se $B[M]$ é selvagem então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Para provar a proposição precisamos de alguns resultados.

Lema 4.1.11 [T]

Seja $B = \text{End}_A(T)$ com T um A -módulo inclinante e $M = \sum_T X = \text{Hom}(T, X)$ com $X \in \mathcal{G}(T)$. Então existe um $A[X]$ -módulo inclinante T' talque $B[M] = \text{End}_{A[X]}(T')$.

Demonstração: Seja w o vértice da extensão de $A[X]$. Então $T' = T \oplus Pw$ é um módulo inclinante e $B[M] = \text{End}_{A[X]}(T')$. $\square$

Lema 4.1.12 Seja $B = \text{End}_H(T)$ com H uma álgebra hereditária de tipo euclidiano e T um H -módulo inclinante sem somandos diretos pré-injetivos. Seja M um B -módulo indecomponível na família tubular separante. Então $B[M] = \text{End}_{H[R]}(T')$ com $M = \text{Hom}(T, R)$ e T' é separador.

Demonstração: Como T não tem somandos pré-injetivos, B tem uma fatia completa na componente pré-injetiva e M pertence à família tubular então $M \in \mathcal{Y}(T)$, logo existe $R \in \mathcal{G}(T)$ com $M = \text{Hom}(T, R)$.

Pelo lema acima, temos $T' = T \oplus Pw$ é um $H[R]$ -módulo inclinante.

Queremos provar que T' é separador.

Mas $\mathcal{F}(T') = \{Y \text{ } H[R]\text{-módulos tais que } \text{Hom}_{H[R]}(T', Y) = 0\}$.

Seja $Y \in \mathcal{F}(T')$ então $\text{Hom}(T \oplus Pw, Y) = 0$ logo $\text{Hom}(T, Y) = 0$ e $\text{Hom}(Pw, Y) = 0$ portanto Y é um H -módulo e $Y \in \mathcal{F}(T)$ e como T é separador $\text{id}_H(Y) = 1$.

Consideramos $(Y, 0, 0)$ $H[R]$ -módulo e vejamos que $\text{id}(Y, 0, 0) = 1$.

Consideramos a resolução injetiva minimal de Y relativamente à H .

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f_1} \bar{I}_0 \xrightarrow{g_1} \bar{I}_1 \longrightarrow 0$$

com $\bar{I}_0 = \oplus I_i$ I_i injetivos indecomponíveis e seja $\hat{I}_0 = \oplus (I_i, \text{Hom}(R, I_i), 1_{\text{Hom}})$ o injetivo correspondente em $H[R]$ então:

$$0 \longrightarrow (Y, 0, 0) \xrightarrow{(f_1, f_2)} \hat{I}_0$$

é envolvente injetiva pois $\text{soc}(Y, 0, 0) = (\text{soc } Y, 0, 0)$.

Coker (f_1, f_2) é dado pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & \text{Hom}(R, Y) \\
\downarrow & & \downarrow \text{Hom}(R, f_1) \\
\text{Hom}(R, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, I_0) \\
\downarrow & & \downarrow \text{Hom}(R, g_1) \\
\text{Hom}(R, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, I_1)
\end{array}$$

(Por [M2])

Coker $(f_1, f_2) = (\bar{I}_1, \text{Hom}(R, \bar{I}_0), \zeta) = \oplus(I_i, \text{Hom}(R, I_i), 1) \oplus nSe$ que é novamente injetivo, pois $\zeta = \text{Hom}(R, g_1)$ é sobrejetora, logo $\text{id}_{H[R]}(Y, 0, 0) = 1$ e portanto T' é separador, por 1.5.7. $\square$

Demonstração da proposição: Seja $B[M]$ selvagem, como $B[M] = \text{End}_{H[R]}(T')$ e T' é separador temos que $H[R]$ é selvagem.

Como a componente pré-injetiva de B é de tipo árvore, H é mansa, euclideana e livre de $\tilde{A}_n$ logo por [P1] existem $V_1, V_2, \dots, V_n$, H -módulos pré-injetivos com $q_{H[R]}(\dim(\oplus V_i \oplus n S'e)) < 0$ e cada $V_i \in \mathcal{G}(T)$, logo seja $W_i = \text{Hom}(T, V_i)$, W_i é um B -módulo pré-injetivo que pertence a $\mathcal{Y}(T)$.

Calculamos:

$$\chi_{B[M]}(\underline{\dim} \oplus W_i \oplus n Se) = \chi_B(\underline{\dim} \oplus W_i) + n^2 - n < \underline{\dim} M, \underline{\dim} \oplus W_i >_B$$

(por [R2] pg 175) temos uma isometria

$$\sigma_T = \mathbb{K}_0(H) \longrightarrow \mathbb{K}_0(B)$$

tal que: $\sigma_T(\underline{\dim} V_i) = \underline{\dim} W_i$ e $\sigma_T(\underline{\dim} R) = \underline{\dim} M$

logo:

$$\chi_H(\underline{\dim} \oplus V_i) = \chi_B(\underline{\dim} \oplus W_i)$$

e $< \underline{\dim} M, \underline{\dim} \oplus W_i >_B = < \underline{\dim} R, \underline{\dim} \oplus V_i >_H$ logo temos:

$$\chi_{H[R]}(\underline{\dim}(\oplus V_i \oplus n S'e)) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim}(\oplus W_i \oplus n Se)) < 0$$

por [P1]. Mas $q_{B[M]}(\underline{dim}(\oplus W_i + n Se)) = \chi_{B[M]}(\underline{dim}(\oplus W_i + n Se) + n \dim_k Ext_B^2(M, \oplus W_i))$ e novamente, como $Hom(M, W_i) \neq 0 \forall i$ e W_i é módulo dirigido, tem-se: $Ext^2(M, \oplus W_i) = 0$ logo $q_{B[M]}(\underline{dim}(\oplus W_i + n Se)) < 0$ e claramente, $\underline{dim}(\oplus W_i + n Se)$ é um vetor de coordenadas positivas. $\square$

4.2 Extensões tubulares

Reunimos nesta secção definições e resultados preliminares que irão pavimentar o caminho do nosso próximo resultado.

Lema 4.2.1 Seja R uma subcategoria convexa de B e suponhamos que $supp M \subset R$. Então $R[M]$ é subcategoria convexa de $B[M]$.

Demonstração: Seja R uma subcategoria convexa de B e seja x o vértice associado à extensão por M . x é uma fonte e qualquer caminho que começa em x , digamos $x \rightarrow x_1 \rightarrow y$ é tal que $x_1 \in R$, pois se há uma flecha $x \rightarrow x_1$, então existe uma função não nula $f : P_{x_1} \rightarrow P_x$, isto é $Hom(P_{x_1}, P_x) \neq 0$ e neste caso $x_1 \in supp P_x$, como $x_1 \neq x$, $x_1 \in supp M$ (pois P_x é o novo projetivo e $M = rad(P_x)$) e como $supp M \subset R$, tem-se $x_1 \in R$ logo qualquer caminho que começa em x é da forma $x \rightarrow x_1 \rightarrow y$ com $x_1 \in R$.

Se $y \in R$, o caminho $x_1 \rightarrow y$ está inteiramente contido em R (pois R é convexa) e portanto o caminho $x \rightarrow y$ está inteiramente contido em $R[M]$. Assim, $R[M]$ é convexa em $B[M]$. $\square$

Lema 4.2.2 Seja $\mathcal{C}$ uma componente dirigida e *standard* do A-R quiver de uma álgebra C tal que de cada módulo saem no máximo duas flechas e chegam no máximo duas flechas. Então para todo $M, N \in \mathcal{C}$, tem-se:

$$\dim_k Hom(M, N) \leq 1.$$

4.2.1 Padrões

Nesta secção definimos uma relação de equivalência para certas categorias vectoriais infinitas, veja em [R1], pag 229. Este método permitiu classificar famílias de extensões tubulares muito importantes.

Definição 4.2.3 [[R1], pag 229] Dizemos que duas categorias vectoriais $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ pertencem ao mesmo padrão, se existem funtores fiéis, plenos e co-finitos

$$\varphi : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2 \text{ e } \psi : \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_1$$

Se $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ pertencem ao mesmo padrão, então existem funtores fiéis e plenos

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{U}(\mathbb{K}_1) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{K}_2) \text{ e } \tilde{\psi} : \mathcal{U}(\mathbb{K}_2) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{K}_1)$$

Como em [R1] serão consideradas apenas as categorias vectoriais infinitas para as quais existe um funtor fiel, co-finito $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\cap \varphi^n(\mathbb{K})$ é finita.

Consideremos então, uma álgebra hereditária H de tipo euclideano e R um H -módulo regular. Vemos em [[R1], lema 2, pag 232] que para σ um funtor de reflexão, as categorias vectoriais $Hom(R, H - mod)$ e $Hom(\sigma R, \sigma H - mod)$ pertencem ao mesmo padrão. Além disso, se R é um módulo de período n , os diferentes H -módulos de período n podem ser obtidos de R por funtores de reflexão, então novamente, $Hom(R, H - mod)$ e $Hom(\tau^i R, H - mod)$ pertencem ao mesmo padrão.

4.2.2 Álgebras iteradas tubulares

O processo de extensões por ramos pode ser iterado, sob certas condições. Definimos (veja em [PT]) as álgebras tubulares iteradas por um processo construtivo.

Definição 4.2.4 [PT] Seja Λ_0 uma álgebra tubular ou co-tubular doméstica, isto é, uma co-extensão por ramos de uma álgebra A_0 , mansa oculta e sejam $E_1, E_2, \dots, E_t$ módulos-raios ortogonais na família tubular separante de Λ_0 . A restrição dos E_i 's a A_0 nos dá novamente módulos-raios ortogonais na família tubular separante de A_0 . Sejam R_i ramos e suponhamos que a extensão $A = A_0[E_i|_{A_0}, R_i]_{i=1}^t$ é uma álgebra tubular ou tubular doméstica. Neste caso, a extensão $\Lambda = \Lambda_0[E_i, R_i]_{i=1}^t$ é dita álgebra tubular 1-iterada. Se

A é tubular podemos repetir o processo e obter uma álgebra tubular 2-iterada. Indutivamente, definimos uma álgebra tubular n -iterada.

Observamos que essas álgebras tem uma descrição muito útil.

Definição 4.2.5 [PT] Dizemos que uma álgebra Λ tem projetivos aceitáveis se o A-R quiver de Λ tem componente $\mathcal{P}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ com as seguintes propriedades:

- 1) Todo Λ -módulo projetivo indecomponível está em $\mathcal{P}$ ou em algum $\mathcal{C}_i$.
- 2) $\mathcal{P}$ é uma componente pós-projetiva de Γ_Λ sem injetivos.
- 3) Cada $\mathcal{C}_i$ é um tubo standard insertado-coinsertado.
- 4) Se $\text{Hom}(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \neq 0$ então $i \leq j$.

Teorema 4.2.6 [[PT], 3.4] Seja Λ uma álgebra com projetivos aceitáveis.

São equivalentes:

- a) Λ é uma álgebra tubular iterada.
- b) Λ é mansa.
- c) q_Λ é fracamente não negativa.

4.2.3 Espirais

Iremos definir as álgebras de espirais, que tem sido muito investigadas nos últimos anos, em particular, um resultado surpreendente nos diz que uma álgebra fortemente simplesmente conexa é de crescimento polinomial se e somente se é uma álgebra de multiespirais ([S2])

As álgebras de espirais são dadas por um processo construtivo, o que as torna ainda mais interessantes. Todos os resultados dessa seção podem ser encontrados em [AS].

Definição 4.2.7 Uma espiral é um quiver de translação construído indutivamente a partir de um tubo estável, por uma sequência de operações chamadas de admissíveis. Sejam (ao longo desta seção) A uma álgebra e Γ uma componente standard de Γ_A . Para um módulo

indecomponível X em Γ chamado pivot a operação admissível que pode ser aplicada a Γ depende do suporte $S(X)$ de $Hom_A(X, -)|_\Gamma$

(ad1) Suponhamos que $S(X)$ consiste de um caminho seccional infinito começando em X e para t um inteiro positivo, seja D a álgebra das matrizes $t \times t$, tais que $a_{i,j} = 0$ se $i \leq j$, seja Y o único D -módulo indecomponível projetivo e injetivo. Definimos então a álgebra modificada A^* de A pela extensão por um ponto

$$A^* = (A \times D)[X \oplus Y]$$

Ao inteiro t chamamos de parâmetro da operação.

(ad2) Suponhamos que $S(X)$ consiste em dois caminhos seccionais começando em X $Y_t \leftarrow \dots \leftarrow Y_1 \leftarrow X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \dots$ um infinito e outro finito com pelo menos uma flecha e com $t \geq 1$. Em particular X é injetivo. Definimos a álgebra modificada A^* de A pela extensão por um ponto

$$A^* = A[X].$$

Ao inteiro t chamamos de parâmetro da operação.

(ad3) Suponhamos que $S(X)$ consiste em dois caminhos seccionais paralelos, o primeiro, infinito começando em X e outro finito, com no mínimo uma flecha.

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Y_2 & \dots & Y_{t-1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \dots & X_{t-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

com $t \geq 2$. Em particular X_{t-1} é injetivo. Definimos a álgebra modificada A^* de A pela extensão por um ponto

$$A^* = A[X]. \text{ Ao inteiro } t \text{ chamamos de parâmetro da operação.}$$

Dualmente definimos (ad1*), (ad2*), (ad3*). Estas seis operações são chamadas operações admissíveis.

Diremos que uma componente Γ é uma espiral se existe uma sequência de quivers de translação, $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_n = \Gamma$ onde Γ_0 é um tubo estável e Γ_{i+1} é obtido de Γ_i por uma operação admissível.

De maneira similar, dada uma álgebra A , seja $\mathcal{T} = \cup_{i \in I} \mathcal{T}_i$ uma família tubular separante em $A\text{-mod}$, diremos que $\hat{A}$ é um alargamento por espirais de A usando módulos da

família tubular separante, se existe uma sequência de álgebras modificadas como acima. Além disso, o tipo espiral de $\hat{A}$, é um par de funções, $c_{\hat{A}}^+, c_{\hat{A}}^- : I \rightarrow \mathbb{N}$ tais que

$c_{\hat{A}}^+(i)$ e $c_{\hat{A}}^-(i)$ medem o posto do tubo $\mathcal{T}_i$ mais respectivamente o número de raios ou co-raios inseridos pela sequência de operações admissíveis.

Vemos então

Proposição 4.2.8 [AS] Corolário 6

Seja A uma álgebra mansa oculta, seja $\mathcal{T}$ sua família tubular separante. Seja $\hat{A}$ um alargamento por espirais de A , usando módulos de $\mathcal{T}$. São equivalentes:

- 1) $\hat{A}$ é mansa
- 2) $\hat{A}^+$ e $\hat{A}^-$ são mansas.

4.3 Álgebras de tipo co-tubular doméstico

Veremos agora, que o mesmo resultado visto em 4.1.10 vale para as álgebras de tipo euclideo, com uma fatia completa na componente pós-projetiva.

Temos então:

Teorema 4.3.1 Seja B uma álgebra inclinada de tipo euclideo com componente pré-injetiva de B de tipo árvore e seja M um B -módulo indecomponível da família tubular separante tal que a extensão $B[M]$ é selvagem.

Então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Demonstração : Como B é de tipo euclideo, B tem uma fatia completa na componente pré-injetiva, e nesse caso temos o resultado por 4.1.10, ou B tem uma fatia completa na componente pós-projetiva. Vejamos então o caso em que B satisfaz

- 1) fatia completa na componente pós-projetiva.
- 2) Componente pré-injetiva de B de tipo árvore.

Da propriedade 1, por [[R2], 4.9 teoremas 1 e 2] sabemos que B é uma co-extensão por ramos de uma álgebra mansa oculta B_0 e além disso, a componente pré-injetiva de B é a mesma componente pré-injetiva de B_0 , e assim, por 2), temos que B_0 é livre de $\tilde{A}_n$.

Suponhamos que B é da forma

$$B = \sum_{i=1}^t [E_i, R_i] B_0$$

onde E_i é B_0 -módulo-raio e R_i um ramo, para todo i .

Vamos analisar separadamente as situações seguintes:

- A) $M_0 = M|_{B_0}$ é tal que $M_0 = 0$
- B) $M_0 = M|_{B_0}$ é tal que $M_0 \neq 0$

Vejamoinicialmente o caso A:

$$M_0 = M|_{B_0}, \quad M_0 = 0.$$

Neste caso M é um módulo cujo suporte está inteiramente contido em um ramo R , pois como M é indecomponível, não pode estar em dois ramos.

Vamos calcular a categoria vectorial $Hom(M, B - mod)$, isto é, vamos determinar para que B -módulo N , tem-se $Hom(M, N) \neq 0$. Se N e M pertencem a tubos distintos, então $Hom(M, N) = 0$, pois os tubos são ortogonais.

Se N pertence à componente pré-injetiva de B , como esta componente é a componente pré-injetiva de B_0 , teremos que N é um B_0 -módulo e neste caso $supp M \cap supp N = \emptyset$ pois as categorias são disjuntas.

Logo $Hom(M, N) = 0$.

Este mesmo argumento vale para qualquer B -módulo N no mesmo tubo que M se N for um B_0 -módulo.

Portanto $Hom(M, N) \neq 0$ se N é um R -módulo ou se N é um módulo do co-raio e neste caso $supp N \cap R \neq \emptyset$ e $supp N \cap B_0 \neq \emptyset$ logo: i , o vértice da co-extensão de B_0 por E pertence ao suporte de N .

Mas o tubo é *standard* então $Hom(M, N) \neq 0$ implica que existe um caminho de morfismo irredutíveis

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_t = N.$$

Como M é um módulo do ramo e N é um módulo do co-raio, o caminho $M \rightarrow N$ dá a volta ao tubo e portanto algum M_i não é módulo do co-raio, isto é M_i é B_0 -módulo. Mas então

$\text{Hom}(M, M_i) = 0$, contradição. Assim sendo, $\text{Hom}(M, N) = 0$ se N não é um R -módulo e neste caso $\text{Hom}(M, B - \text{mod}) = \text{Hom}(M, R - \text{mod})$. Então $\text{Hom}(M, B - \text{mod})$ é selvagem e se só se $\text{Hom}(M, R - \text{mod})$ é selvagem. Pela proposição 4.1.2, R é uma álgebra inclinada da álgebra $k\Delta$ com $\Delta = A_n$ linearmente ordenado e tem portanto como A-R quiver uma única componente que é uma “asa” (isto é, um *wing*, veja [R2], pag 127).

Esse A-R quiver é tal que de cada ponto chegam ou saem no máximo duas flechas, logo para qualquer $N \in \text{Hom}(M, R - \text{mod})$, $\dim_k \text{Hom}(M, N) \leq 1$. Logo pelo teorema 2.2.4 $R[M]$ é mansa se e somente se $q_{R[M]}$ é fracamente não negativa. Como, pelo lema 4.2.1 $R[M]$ é subcategoria convexa de $B[M]$ e pelo lema 1.4.6, $q_{R[M]}$ é fortemente indefinida, então $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Vejamos o caso B.

$$M_0 = M|_{B_0} \text{ com } M_0 \neq 0.$$

Aqui novamente, podemos ter duas situações:

B1: Se $B_0[M_0]$ é selvagem

B2: Se $B_0[M_0]$ é mansa

Começemos por B1.

Se $B_0[M_0]$ é selvagem, como a componente pré-injetiva de B é a mesma componente pré-injetiva de B_0 , e esta é de tipo árvore então B_0 é mansa oculta e livre de $\tilde{A}_n$.

Portanto, por [P1], $q_{B_0[M_0]}$ é fortemente indefinida. Mas pelo lema 2.1.4, $B_0[M_0]$ é subcategoria convexa de $B[M]$ e portanto pelo lema 1.4.6, $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Vejamos então B2, isto é $B_0[M_0]$ mansa, mas $B[M]$ selvagem.

Novamente, como $B_0[M_0]$ é mansa temos duas possibilidades:

B2.1 M_0 é um módulo-raio.

B2.2 M_0 é um módulo de comprimento regular 2 no tubo de posto $n - 2$ e B_0 é mansa oculta de tipo $\tilde{D}_n$.

No caso B.2.1, temos os resultados:

Se M é módulo-raio sobre B , pelo lema 4.1.6, e pela proposição 4.1.5, a componente $\mathcal{T}[M]$ é um tubo *standard* insertado-co-insertado.

Além disso, todos os projetivos de $B[M]$ estão ou em $\mathcal{P}$, a componente pós-projetiva, ou em $\mathcal{T}[M]$ (onde está o único projetivo fora de $\mathcal{P}$) portanto, $B[M]$ é uma álgebra com

projetivos aceitáveis e neste caso, $B[M]$ é selvagem se e somente se $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Por outro lado, se $M = M_0$ e portanto, M é módulo-raio sobre B_0 , veremos que $B[M] = B[M_0]$ é uma álgebra tubular iterada e neste caso, $B[M]$ é mansa (o que contradiz nossa hipótese).

De fato, podemos considerar $B = \mathop{\mathcal{I}}\limits_{i=1}^t [E_i, R_i] B_0$ uma álgebra co-tubular doméstica, e M_0 um módulo-raio sobre B_0 .

Como estamos supondo que $B_0[M_0]$ é mansa, então $B_0[M_0]$ é tubular ou tubular doméstica. Então, por construção:

$$B[M_0] = B[M] = \left(\mathop{\mathcal{I}}\limits_{i=1}^t [E_i, R_i] B_0 \right) [M]$$

é uma álgebra tubular 1-iterada e portanto é mansa pelo teorema 4.2.6.

Podemos então supor que M não é módulo-raio sobre B e além disso que $M \neq M_0$ e portanto, existe I injetivo, indecomponível em $\mathcal{T}$, o tubo onde está M , talque $\text{Hom}(M, I) \neq 0$ e como M não é módulo-raio, há duas flechas saindo de M .

Podemos também supor, dado que M não é B_0 -módulo, que i o vértice da co-extensão pertence ao $\text{supp } M$, logo existe um morfismo $M \rightarrow I_i$.

Seja E o módulo-raio que é raiz do ramo.

Seja $B_i = [E]B_0$ e $M_i = M|_{B_i}$.

Então temos:

$$\text{Hom}_{B_i}(M_i, M_0) \neq 0, \text{ mas } \text{Hom}_{B_i}(M_0, M_i) = 0.$$

Basta ver que:

$$M_i = (M_0, k^t, \delta : D(E) \otimes M_0 \rightarrow k^t)$$

$$M_0 = (M_0, 0, 0)$$

$$I_i = (E, k, \mathcal{E} : D(E) \otimes E \rightarrow k \text{ função avaliação})$$

Os quadrados abaixo:

$$\begin{array}{ccc} D(E) \otimes M_0 & \xrightarrow{\delta} & k^t \\ \downarrow & & \downarrow 0 \text{ este comuta} \\ D(E) \otimes M_0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D(E) \otimes M_0 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{este não comuta} \\ D(E) \otimes M_0 & \rightarrow & k^t \end{array}$$

além disso,

$$\begin{array}{ccc}
 D(E) \otimes M_0 & \xrightarrow{\delta} & k^t \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 D(E) \otimes E & \xrightarrow{\epsilon} & k \\
 \downarrow id & & \downarrow 0 \\
 D(E) \otimes E & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

Se $E = M_0$, teremos $f = \text{id}$ e $t = 1$.

Se $E \neq M_0$, como ambos são módulos-raios (do mesmo tubo), temos

$$Hom(E, M_0) = 0 = Hom(M_0, E).$$

Mas para $f = 1 \otimes 0$, temos:

$$\epsilon(1 \otimes 0)(\alpha \otimes m) = \epsilon(\alpha \otimes 0) = \alpha(0) = 0.$$

Novamente duas coisas podem ocorrer:

B.2.1.1 O ramo está co-insertado em E , com $E \neq M_0$.

B.2.1.2 O ramo está co-insertado em $E = M_0$.

Vejamos inicialmente

B.2.1.1 O ramo está co-insertado em E , com $E \neq M_0$.

Como M não é módulo-raio sobre B , podemos supor que há (pelo menos) uma flecha saindo de M e apontando para a boca do tubo.

Além disso, por [[R2], 4.5] temos um caminho seccional

$$M \rightarrow M_t \rightarrow M_{t-1} \rightarrow \cdots M_0$$

e esse caminho não contém injetivos (pois o ramo está co-insertado em E , com $E \neq M_0$, e neste caso $Hom(M_0, E) = 0 = Hom(E, M_0)$).

Mas então, temos o seguinte diagrama:

Como nenhum dos M'_i s é injetivo, temos que $\tau^{-1}M_i$ (e em particular, $\tau^{-1}M_1$) são não nulos.

Como M_0 é um B_0 -módulo-raio, então $\tau^{-1}M_1$ não pode ser B_0 -módulo. Mas neste caso, isto é, se $\tau^{-1}M_1$ não é B_0 -módulo ele é um módulo do co-raio e portanto, M_0 é um módulo do co-raio. Absurdo pois M_0 é B_0 -módulo. Assim, vemos que a situação B.2.1.1 não pode ocorrer.

Vejamos a situação:

B.2.1.2 O ramo está co-insertado em $E = M_0$, $M_0 = M|_{B_0}$, M não é módulo-raio.

Novamente, podemos supor que há (pelo menos) uma flecha saindo de M e apontando para a boca do tubo. Além disso, como o ramo está co-insertado em M_0 , podemos supor um caminho seccional com I o injetivo da co-inserção. Vamos examinar a categoria

$\text{Hom}(M, B - \text{mod})$.

Esta categoria se constitui de tres partes.

Como B é inclinada, $\text{Hom}(M, X) \neq 0$ apenas para X pré-injetivo (e portanto B_0 -módulo) e para X no mesmo tubo $\mathcal{T}$ onde está M .

Seja X um B_0 -módulo, como M é um módulo co-insertado, então

$$\text{Hom}_B(M, X) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{B_0}(M_0, X) \neq 0.$$

Como B_0 é álgebra mansa oculta e M_0 um módulo-raio sobre B_0 , temos então que $\text{Hom}(M, B - \text{mod})$ contém as seguintes subcategorias:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots 0 \rightarrow$$

(raio de $\mathcal{T}$ que começa em M_0), $\text{Hom}(M_0, \mathcal{I}(B_0))$ onde $\mathcal{I}(B_0)$ é a componente pré-injetiva de

B_0 e ainda, a subcategoria dada pelos sucessores de M no tubo, que não são B_0 -módulos.

Como B_0 é mansa oculta e $B_0[M_0]$ é mansa, $\text{Hom}(M_0, \mathcal{I}(B_0))$ é dada por algum dos padrões dados em [[R1], pg 254].

Suponhamos que uma das duas situações abaixo ocorra:

M é injetivo e portanto a categoria vectorespacial restrita ao tubo é dada por 2 caminhos seccionais:

um finito apontado para a boca do tubo e um infinito (o raio) ou M não é injetivo, mas

a categoria vectorespacial restrita ao tubo é dada por dois caminhos paralelos.

Veremos que nesta situação como $B_0[M_0]$ é mansa, teremos $B[M]$ mansa, o que contradiz nossa hipótese, pois $A = B[M]$ é um alargamento por espirais de B_0 , por 4.2.8 onde $A^+ = B_0[M_0]$, $A^- = B$, como ambas são mansas, temos $A = B[M]$ mansa.

Suponhamos então que M não é injetivo e que existe um caminho seccional:

com $t \geq 1$. Em primeiro lugar, observamos que $\text{Hom}_B(Y_i, X) = 0$ para todo X pré-injetivo.

(pois suponhamos que existisse $f : Y_i \rightarrow X$ como $f \in \text{rad}^\infty(B - \text{mod})$, teríamos um caminho infinito

$$Y_i \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{g_2} Z_2 \rightarrow \dots Z_n \xrightarrow{g_{n+1}} \dots$$

com g_{n+1} morfismo irredutível e tal que $\text{Hom}(Z_j, X) \neq 0 \forall j$ (veja-se [L]).

Porém Y_i é um módulo do co-raio, à direita de M_0 , não existe um caminho infinito saindo dele, e similarmente

$\text{Hom}(\tau^{-1}M, X) = 0$ para todo X pré-injetivo.

Em particular, $\text{Hom}(Y_i, X) = \text{Hom}(\tau^{-1}M, X) = 0$ para todo X tal que $\text{Hom}(M_0, X) \neq 0$ com X na componente pré-injetiva.

Além disso $\text{Hom}(Y_i, \tau^{-1}M) = 0 = \text{Hom}(\tau^{-1}M, Y_j)$ para $\forall j \geq 1$.

Vemos então por [[R1] (pag. 254, teorema 3.1)] que podemos encontrar uma das seguintes subcategorias caminho-incomparáveis em $\mathcal{I}(B_0)$, com a única exceção do caso $(\tilde{D}_n, n-2)$.

$\mathbb{K}_1 = \{A, B, C\}$, (nos casos: $(\tilde{D}_4, 1), (\tilde{D}_6, 2), (\tilde{D}_7, 2), (\tilde{D}_8, 2), (\tilde{E}_6, 2), (\tilde{E}_7, 3), (\tilde{E}_7, 4), (\tilde{E}_8, 5)$ e $\mathbb{K}_2 = \{A, B \rightarrow C\}$ nos casos $(\tilde{D}_5, 2)$ e $(\tilde{E}_6, 3)$ (por exemplo no caso $(\tilde{D}_5, 2)$ o padrão é dado por:

consideramos os módulos marcados

com $\dim \text{Hom}(M, A) = \dim \text{Hom}(M, B) = \dim \text{Hom}(M, C) = 1$.

Assim em cada caso, acrescentando os objetos $Y_1, \tau^{-1}M$ às categorias $\mathbb{K}_1$ ou $\mathbb{K}_2$ temos que $\text{Hom}(M, B - \text{mod})$ é selvagem e $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Calculemos a forma quadrática para o caso $(\tilde{D}_5, 2)$, os outros casos são semelhantes.

Seja $\tilde{L}$ o B -módulo $\tilde{L} = 2Y_1 \oplus 2\tau^{-1}M \oplus 2A \oplus B \oplus C$ e $L = \tilde{L} \oplus 4S_e$, então

$$q_{B[M]}(\underline{\dim} L) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim} L) + 4\dim_k \text{Ext}^2(M, \tilde{L})$$

Mas $\text{Ext}^2(M, Y_1) = 0$ pois há um caminho seccional, $\text{Ext}^2(M, A) = 0$ e similarmente para os outros módulos pré-injetivos, pois são dirigidos, $\text{Ext}^2(M, \tau^{-1}M) = 0$ pois o tubo é co-insertado e *standard* e não existe caminho de $\tau^{-1}M$ a M . Assim

$$q_{B[M]}(\underline{\dim} L) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim} L) = \chi_{B[M]}(\underline{\dim} \tilde{L}) + 4^2 - 4(8) =$$

como os Ext entre eles são nulos $= 15 + 16 - 32 = -1$

Vejamos o caso $(\tilde{D}_n, n - 2)$.

Neste caso o padrão é dado por:

Se $t > 1$, então considerando

$$\mathbb{K} = \{A, B, \tau^{-1}M, Y_1 \rightarrow Y_2\}$$

é selvagem e novamente a forma quadrática é fortemente indefinida.

Por outro lado, se $t = 1$, isto é, temos duas possibilidades

Caso 1

Caso 2

No caso 1, novamente, podemos considerar a subcategoria selvagem $\{Y_1, \tau^{-1}M \rightarrow \tau^{-1}Z_1, A, B\}$ e a forma quadrática é fortemente indefinida.

Por outro lado, no caso 2, a categoria vectorespacial é de fato mansa, pelo teorema de Nazarava e então $B[M]$ é mansa.

Vejamos agora B.2.2 isto é M_0 é um módulo de comprimento regular 2 num tubo de posto $n - 2$ e B_0 é mansa oculta de tipo $\tilde{D}_n$.

Se $M = M_0$ estiver em um tubo estável, então $Hom(M, B - mod) = Hom(M_0, B_0 - mod)$ e portanto ambas são mansas ou selvagens simultaneamente.

Portanto, podemos supor que M pertence a um tubo co-insertado. Como M_0 tem comprimento regular 2, existem E_1 e E_0 módulos-raios sobre B_0 e tais que $\tau E_0 = E_1 \rightarrow M_0 \rightarrow E_0$ é a ARS para E_0 . (e para E_1).

Sejam $E_0, E_1, \dots, E_{n-3}$ os módulos-raio sobre B_0 do tubo em que M está

Dividimos novamente em possibilidades.

B.2.2.1 O ramo está co-insertado em E_0 .

B.2.2.2 O ramo está co-insertado em E_1 .

B.2.2.3 O ramo está co-insertado em E_j para $j \neq 0$ ou 1.

Antes disso, vejamos que se $M = M_0$, teremos que $Hom(M, B - mod)$ tem o mesmo padrão de $Hom(M_0, B_0 - mod)$. Se M é B_0 -módulo, então $Hom_B(M, N) \neq 0$ para os módulos N no mesmo tubo que M ou para os módulos N na componente pré-injetiva. Assim sendo, $Hom(M, N) = Hom(M_0, N_0)$ tem o padrão dado por

que é mansa, por [R1] teorema 3 pg 252. (Nesta figura indicamos apenas os módulos não nulos na categoria com ■ indicando os objetos de dimensão 2) Podemos então supor que M é um módulo pertencente a um co-raio e que existe I injetivo no tubo $\mathcal{T}$ talque $Hom(M, I) \neq 0$.

Vejamos B.2.2.1 o ramo está co-insertado em E_0 , e temos:

Se existe um caminho seccional $M \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1$, então, $Hom(M, Y_1) \neq 0$

Observe que $Y_1|_{B_0} = 0$ e $Hom(Y_1, X) = 0 \forall X$ módulo pré-injetivo e em particular, $Hom(Y_1, X_i) = 0$ para cada um dos X_i 's pré-injetivos tais que $Hom(M_0, X_i)$ tem dimensão 2.

Assim $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Suponhamos então que o maior caminho seccional saindo de M e apontando para a boca do tubo tenha comprimento 1.

(Observe que não é possível que não haja caminho seccional apontando para a boca, pois nesse caso, teríamos M_0 um B_0 -módulo raio.)

Figura 4.1: Tubo co-insertado do exemplo

Exemplo. Vejamos um exemplo

Seja B dada pelo quiver:

B é álgebra inclinada de tipo $\tilde{D}_8$, com uma fatia completa na componente pós-projetiva. Na figura temos um tubo co-insertado, consideramos as extensões pelos módulos M_0, M_1, M_2, M_3 .

Podemos ver que $\Lambda_0 = B[M_0]$, $\Lambda_2 = B[M_2]$, $\Lambda_3 = B[M_3]$, são mansas e $\Lambda_1 = B[M_1]$,

é selvagem. Além disso, $q_{\Lambda_1}(I_3 \oplus I_3 \oplus I_8 \oplus 2S_e) = -1$ e o quiver ordinário de Λ_1 é dado por:

Nenhuma das álgebras Λ_i é uma boa álgebra ou fortemente simplesmente conexa.

Apêndice A

Estivemos supondo ao longo do trabalho que algumas das componentes dirigidas de B são de tipo árvore. Como vimos no exemplo 4 isso não implica que B seja uma boa álgebra ou fortemente simplesmente conexa. Porém, certas perguntas são naturais e gostaríamos de discutir neste apêndice para que hipóteses sobre B e sobre M teremos $B[M]$ uma álgebra fortemente simplesmente conexa ou uma boa álgebra. B é uma álgebra inclinada.

Vamos então às definições

- **Definição[P3]** O projetivo indecomponível P_x tem radical separado se os suportes de seus somandos diretos indecomponíveis não isomorfos estão contidos em componentes conexas distintas do subquiver Q_x obtido de Q retirando os vértices j tais que existe um caminho de j a x . Se todos os Λ -módulos projetivos indecomponíveis tem radical separado dizemos que a álgebra B satisfaz a condição S.
- **Definição [S3]** Uma álgebra B é dita fortemente simplesmente conexa quando para toda C subcategoria plena convexa de B tem-se que C é simplesmente conexa, ou equivalentemente, se toda C subcategoria plena convexa de B satisfaz a condição S.
- **Lema A1** [lema 1.3 -[AL2]] Se B é uma álgebra fortemente simplesmente conexa então toda componente dirigida de Γ_B é de tipo árvore.
- Por outro lado temos a recíproca para B de tipo euclídeano, isto é:

Proposição A2 (2.2 do mesmo artigo) Seja B uma álgebra inclinada de tipo euclideano. Se o quiver das órbitas de cada componente dirigida de Γ_B é uma árvore então B é fortemente simplesmente conexa.

- Além disso temos:

Teorema A3[AL2] Seja B uma álgebra inclinada mansa. Então B é fortemente simplesmente conexa se e sómente se para cada subcategoria plena convexa C de B o quiver das órbitas de cada componente dirigida de Γ_C é uma árvore.

- Recebemos em março o preprint [ALP] que nos diz:

Teorema A4 Seja B uma álgebra inclinada mansa. Então B é fortemente simplesmente conexa se e sómente se o quiver das órbitas de cada componente dirigida de Γ_B é uma árvore.

Assim, tem-se uma classificação das álgebras inclinadas mansas fortemente simplesmente conexas a partir de suas componentes dirigidas.

- Em relação à extensão por um ponto:

Teorema A5 [Teorema 3.4 [AL1]] Seja B uma álgebra fortemente simplesmente conexa, então $B[M]$ é fortemente simplesmente conexa se e sómente se M é um B -módulo completamente co-separado.

Definição [AL1] Seja B uma álgebra triangular e M um B -módulo. Uma enumeração $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dos pontos de $\text{supp}M$ é chamada uma ordenação admissível dos poços se $j > i$ implica que o vértice x_j não é sucessor do vértice x_i . Como B é triangular, para cada M existe ao menos uma ordenação admissível dos poços, e para cada ordenação admissível dos poços está associada uma filtração de B por uma sequência de subcategorias plenas convexas, definidas indutivamente:

Seja $B^{(0)} = B$ e para cada i seja $B^{(i)}$ a subcategoria plena de B gerada pelos não sucessores dos pontos $x_1, x_2, \dots, x_i$. Claramente, cada $B^{(i)}$ é convexa e $B^{(n-1)} \dots \subset B^{(1)} \subset B$. Dizemos que M é completamente co-separado se para cada ordenação admissível dos poços dos pontos de $\text{supp} M$ e para cada $i, 0 \leq i < n$, a restrição $M^{(i)} = M|_{B^{(i)}}$ é separada como $B^{(i)}$ -módulo.

Podemos verificar em [AC] que, no caso em que B é uma álgebra mansa hereditária de tipo árvore temos infinitos módulos indecomponíveis que não satisfazem essa condição. Conjecturamos que o mesmo deve ocorrer para B inclinada mansa.

- Podemos também considerar o caso em que B é uma boa álgebra e perguntar-nos: para que módulos M teremos que $B[M]$ é uma boa álgebra.

Definição([P3]) Dizemos que B é uma boa álgebra se:

- 1) B é *schurian*
- 2) B satisfaz a condição S
- 3) B é livre de $\tilde{A}_n$.

Definição([D]) Dizemos que B é uma álgebra completamente separante se:

- 1) B é *schurian*
 - 2) Toda subcategoria convexa de B satisfaz a condição S
- Uma boa álgebra é fortemente simplesmente conexa, e uma álgebra fortemente simplesmente conexa, *schurian* é uma boa álgebra. Uma álgebra completamente separante é fortemente simplesmente conexa. Há álgebras completamente separantes que não são boas álgebras (veja-se [D],[S3]).

• **Lema A6**

- 1) Se B é *schurian* e M é livre de multiplicidades então $B[M]$ é *schurian*.
- 2) Se B satisfaz a condição S e M é indecomponível então $B[M]$ satisfaz a condição S.
- 3) Se B é uma boa álgebra e M é indecomponível, livre de multiplicidades e B não possui dois ou mais poços x , tais que $\text{Hom}(P_x, M) \neq 0$, então $B[M]$ é uma boa álgebra.

Demonstração. Basta provar que se B não possui dois ou mais poços x , tais que $\text{Hom}(P_x, M) \neq 0$ então $B[M]$ é livre de $\tilde{A}_n$. Seja $\underline{e}$ o vértice da extensão. Se acrescentamos uma única flecha então $B[M]$ é livre de $\tilde{A}_n$. Se acrescentamos duas ou mais flechas mas B tem um único poço digamos $\underline{b}$, como $B[M]$ é *schurian*, teremos uma relação $\underline{e} \rightarrow \underline{b}$ de modo que há um único caminho em $B[M]$ de $\underline{e} \rightarrow \underline{b}$, portanto $B[M]$ é livre de $\tilde{A}_n$. Por outro lado, se $\text{Hom}(P_x, M) = 0$ não há caminho não nulo de $\underline{e} \rightarrow \underline{x}$ e portanto $B[M]$ é livre de $\tilde{A}_n$.

Referências Bibliográficas

- [A] - Assem, I.; Tilting theory - an introduction; Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol 26 (1990) 127-180.
- [AC] - Assem, I.; Castonguay, D.; Strongly simply connected one-point extensions of tame hereditary algebras; Rapport n 207 (1997) Sherbrooke, Canada.
- [AL1] - Assem, I.; Liu, S.; Strongly simply connected algebras, Rapport n 179 (1996) Sherbrooke, Canada.
- [AL2] - Assem, I.; Liu, S.; Strongly simply connected tilted algebras, Rapport n 180 (1996) Sherbrooke, Canada.
- [ALP] - Assem, I.; Liu, S.; Peña, J.A.; The strong simple connectedness of a tame tilted algebra, Rapport n 214 (1998) Sherbrooke, Canada.
- [ARS] - Auslander, M.; Reiten, I.; Smalø, S.; Representation theory of Artin algebras; Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, 1995.
- [AS] - Assem, I.; Skowronski, A.; Multicoil Algebras; Rapport n 99 (1992) Sherbrooke, Canada.
- [BB] - Brenner, S.; Butler, M.; Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors, Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Lecture Notes in Math. 832, Springer, Berlin (1980), 103-169.

- [B1] - Bekkert, V.; Schurian vector space categories of polynomial growth; Preprint (1995).
- [B2] - Bekkert, V.; Non-domestic schurian vector space categories of polynomial growth; Preprint (1997).
- [B3] - Bekkert, V.; Sincere cycle-finite schurian vector space categories; Preprint (1997).
- [Bo] - Bongartz, K.; Algebras and quadratic forms; J. London Math. Soc.(2) 28 (1983) 461-469.
- [CB] - Crawley-Boevey, W. W.; On Tame algebras and Bocses; Proc. London Math. Soc. (3) 56 (1988) 451-483.
- [D] - Draxler, P.; Completely separating algebras; Journal of Algebra, vol 165, n 3 (1994) 550-565.
- [DR] - Dlab, V.; Ringel, C.M.; Indecomposable representations of graphs and algebras; Memoirs Amer. Math. Soc. 173 (1976).
- [HR] - Happel, D.; Ringel, C.M.; Tilted Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), N 2, 399-443.
- [K] - Kerner, O.; Tilting wild algebras; J. London Math. Soc.(2) 39 (1989) 29-47.
- [L] - Liu, S.; Tilted algebras and generalized standard Auslander Reiten components ; Arch. Math. vol 61(1993) 12-19.
- [L1] - Liu, S.; Infinite radicals in standard Auslander Reiten components; Journal of Algebra 166 (1994) 245-254.
- [M1] - Marmaridis, N.; Strongly Indefinite Quadratic Forms and Wild Algebras; Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol 26 (1990) 341-351.

- [M2] - Marmaridis, N.; Comma categories in representation theory; Communications in Algebra 11(17),1983,1919-1943.
- [MP] - Marmaridis, N.; Peña, J.A.; Quadratic Forms and Preinjective Modules; Journal of Algebra 134 (1990) 326-343.
- [P1] - Peña, J.A.; On the Representation Type of One Point Extensions of Tame Concelead Algebras; Manuscripta Math. 61, (1988) 183-194.
- [P2] - Peña, J.A.; Tame algebras with sincere directing modules; Journal of Algebra 161,(1993) 171-185.
- [P3] - Peña, J.A.; Algebras with hypercritical Tits form; Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol 26 (1990) 353-369.
- [PT] - Peña, J.A.; Tomé, B.; Iterated Tubular Algebras; Journal of Pure and Applied Algebra 64 (1990) North Holland,303-314.
- [R1] - Ringel, C.M.; Tame Algebras-on Algorithms for Solving Vector Space Problems II; Springer Lecture Notes in Mathematics 831 (1980) 137-287.
- [R2] - Ringel, C.M.; Tame Algebras and Integral Quadratic Forms; Springer Lecture Notes in Mathematics 1099.
- [R3] - Ringel, C.M.; The regular components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebras; Chin. Ann. of Math. 9B (1) (1988) 1-18.
- [Ro] - Roiter, A.V.; Representations of posets and tame matrix problems; London Math. Soc. L.N.M. 116 (1986) 91-107.
- [S] - Skowronski, A.; Tame quasitilted algebras; preprint (1996)
- [S2] - Skowronski, A.; Simply connected algebras of polynomial growth; preprint

- [S3] - Skowronski, A.; Simply connected algebras and Hochschild Cohomologies; preprint
- [T] - Tomé, B.; One point extensions of algebras with complete preprojective components having non negative Tits forms; Comm. in Algebra 22(5) (1994) 1531-1549.
- [U] - Unger, L.; Preinjective components of trees; Springer Lecture Notes in Mathematics 1177 (1984) 328-339.