**Sobre existência de soluções para
Equações Integrais Lineares
com respeito a Integrais de gauge**

Márcia Cristina A. Braz Federson

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTORA EM MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Ricardo Bianconi**

Áreas de concentração: **Teoria de Integração de Kurzweil-Henstock /
Equações Integrais Lineares**

- São Paulo, Brasil -

- Julho de 1998 -

Durante parte do estudo e realização deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES.

Sobre existência de Soluções para Equações Integrais Lineares com respeito a Integrais de Gauge

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e devidamente corrigida por Márcia Cristina A. Braz Federson e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 24 de agosto de 1998.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi (presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Luciano Barbanti - IME-USP
- Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas - ICMSC-USP
- Prof. Dr. Antônio Fernandes Izé - DM-UFSCar
- Prof. Dr. José Luis Boldrini - IMECC-Unicamp

a Deus

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua onipotência e misericórdia. Agradeço ao meu marido, Fernando, por seu amor, compreensão e sabedoria, e ao meu filho, Felipe, pelo carinho e paciência.

Agradeço aos professores Dr. Luciano Barbanti, Dra. Marina Pizzotti, Dr. Luis Fichmann e pelas diversas sugestões bem como pela leitura e correção de vários trechos do trabalho.

Agradeço aos professores Dr. Plínio Quirino Simões, Dr. Roberto Costa e Dr. Michael Forger pela ajuda com os problemas burocráticos e também pelo encorajamento, confiança e oportunidade de prosseguir com meu trabalho.

Agradeço aos amigos Prof. Leônidas O. Brandão e Prof^a. Anarosa A. F. Brandão. Obrigada por tudo!

Finalmente, sou grata ao meu orientador, o professor Dr. Ricardo Bianconi, pela paciência, atenção, sugestões, correção e leitura de cada linha deste trabalho, mas principalmente por ter topado esta parada.

ABSTRACT

In this work we study conditions for the existence (and in some occasions unicity) of solutions for the linear integral equations of Fredholm

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

and of Volterra

$$(V) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

in the sense of the Banach space-valued Kurzweil integral. For equation (V), we also consider the multidimensional case.

RESUMO

Este trabalho visa estabelecer condições para existência (e, em alguns casos, a unicidade) de soluções para as equações integrais lineares de Fredholm

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e de Volterra

$$(V) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

com respeito à integral de Kurzweil a valores em espaços de Banach. Para a equação (V), nós também consideramos o caso multidimensional.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	i
<i>Parte A: Introdução Teórica</i>	1
<i>Capítulo 1: Integrais unidimensionais de gauge</i>	2
1. Definições e terminologia	3
2. Propriedades básicas	6
2.1 O Lema de Saks-Henstock	6
2.2 O Teorema Fundamental do Cálculo	6
2.3 Propriedades da integral indefinida	8
2.4 Fórmulas de Integração por Partes e por Substituição	8
2.5 Outras propriedades	11
Observações finais	13
<i>Capítulo 2: Integrais multidimensionais de gauge</i>	15
1. Definições e terminologia	17
2. Propriedades básicas	20
2.1 Propriedades adicionais da integral multidimensional de Henstock	22
3. Teoremas de existência	23
Observação final	27
<i>Parte B: Resultados</i>	28
<i>Capítulo 3: Estudo da equação de Fredholm</i>	
$x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b],$ <p>quando x e f são funções gauge integráveis</p>	29

1. Pré-requisitos	31
2. A Alternativa de Fredholm	
e a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil	39
Uma aplicação	42

Capítulo 4: Estudo da equação de Fredholm-Stieltjes e de Volterra-Stieltjes

$$x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s)x(s)dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s)x(s)dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

quando x e f são funções gauge integráveis 45

1. Pré-requisitos	47
2. A equação integral linear de Volterra-Kurzweil-Henstock-Stieltjes	56
3. A Alternativa de Fredholm para a	
integral de Kurzweil-Henstock-Stieltjes	58

Capítulo 5: Estudo da equação multidimensional de Volterra

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

quando α é uma função gauge integrável 62

1. O Princípio da Contração	63
2. Equações integrais lineares unidimensionais	64
2.1 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue	64
2.2 A equação integral linear de Volterra-Henstock	67
3. Equações integrais lineares multidimensionais	72
3.1 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue	72
3.2 A equação integral linear de Volterra-Henstock	73
Observações finais	75

Capítulo 6: A equação multidimensional de Volterra

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

como limite de sistemas discretos,

onde α é uma função gauge integrável 76

1. O caso unidimensional 77

1.1 As equações integrais lineares
de Volterra-Kurzweil-Stieltjes e de Volterra-Stieltjes 77

1.2 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue 81

1.3 A equação integral linear de Volterra-Henstock 83

2. O caso multidimensional 85

2.1 Equações de Stieltjes discretas 86

2.2 Equações de Stieltjes contínuas 88

2.3 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue 93

2.4 A equação integral linear de Volterra-Henstock 94

Apêndice A: Demonstrações adicionais 97

Apêndice B: Exemplos 105

QUADROS-RESUMOS 111

REFERÊNCIAS 117

ÍNDICE DE NOTAÇÃO 119

ÍNDICE ALFABÉTICO 121

INTRODUÇÃO

Motivação e justificativa

Jaroslav Kurzweil (em 1957) e, independentemente, Ralph Henstock (em 1961) deram uma definição riemanniana para as integrais equivalentes de Denjoy e de Perron introduzidas no início deste século (1912-14). A integral de Kurzweil-Henstock, conhecida também por *Integral de Riemann Generalizada* ou *Integral de Riemann Completa*, é mais geral do que as integrais de Riemann e de Lebesgue e contém suas integrais impróprias. A integral estocástica de Kurzweil-Henstock generaliza a integral de Itô.

Apesar de não ser completo, o espaço das classes de equivalência das funções que são Kurzweil-Henstock integráveis munido da norma de Alexiewicz tem boas propriedades funcional analíticas: nele valem, por exemplo, o Princípio da Limitação Uniforme e os Teorema de Banach-Stainhauss, do Gráfico Fechado, da Aplicação Aberta. Tal espaço também apresenta boas propriedades de convergência.

Desde a sua criação, vários assuntos que dizem respeito a integrais estão sendo revistos para a integral de Kurzweil-Henstock. Muito da análise já tem sido estudado para a integral de Kurzweil-Henstock, especialmente a análise real. Entretanto, pouco tem sido desenvolvido para a aplicação às ciências em geral, principalmente porque a Teoria de Integração de Kurzweil-Henstock é ainda recente e pouco divulgada. Propomo-nos, então, a dar algumas aplicações do uso da integral de Kurzweil-Henstock com a finalidade de chamar a atenção de mais pesquisadores para o potencial desta teoria. Para tanto, escolhemos estudar Equações Integrais. Mas por que?

Muitos problemas de física, engenharia, e ciências biológicas e sociais podem ser descritos direta e naturalmente por equações integrais. Além disso, muitas equações diferenciais podem ser reduzidas a equações integrais. As equações diferenciais foram e têm sido largamente estudadas e, por isso, são mais conhecidas e usadas em comparação às equações integrais. As equações integrais, por sua vez, têm sido pesquisadas principalmente nos sentidos das integrais de Riemann, de Dushnik e de Bochner-Lebesgue. Porém tais

integrais apresentam deficiências. A integral de Riemann, por exemplo, é muito pobre; já a integral de Lebesgue apresenta uma definição de difícil manuseio além de não conter suas integrais impróprias. A integral vetorial de Dushnik ou interior, apesar de mais geral que a integral de Riemann, pode não coincidir em termos de valor da integral com a integral vetorial de Kurzweil-Henstock a qual é mais geral que ambas as integrais de Riemann e de Lebesgue. É muito provável, portanto, que o estudo das equações integrais tenha se desenvolvido em menores proporções comparativamente àquele das equações diferenciais devido à fragilidade e às dificuldades das integrais envolvidas.

Por outro lado, podemos considerar equações integrais no sentido da integral de Kurzweil-Henstock com suas já tão conhecidas e bem estudadas boas propriedades e cuja definição por somas riemannianas é muito simples. Neste caso, muitos problemas antes descritos por equações integrais com respeito à integral de Riemann, de Dushnik ou de Bochner-Lebesgue também serão descritos por equações integrais com respeito à integral de Kurzweil-Henstock tendo, conseqüentemente, algumas "condições de fronteira" extendidas em muito e, ainda assim, admitindo solução. Posto isto, acreditamos que estudando equações integrais levando em conta a integral de Kurzweil-Henstock possamos cooperar de maneira decisiva para aplicações dos resultados nas diversas ciências.

A estrutura do trabalho

Abel, em 1823-26, foi um dos primeiros a formular e resolver problemas na forma de equações integrais. Um dos problemas estudados por Abel descreve a forma de um arame num plano vertical ao longo do qual uma conta escorrega. Tal problema é descrito por uma equação integral linear do tipo Volterra, ou seja, por uma equação

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^* \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde usamos o símbolo $\int^*$ para denotar a integral de Riemann (no exemplo de Abel) ou qualquer integral do tipo gauge (de Kurzweil, de Henstock, de McShane, extensiva, etc).

Neste trabalho, estudamos somente equações integrais lineares. Além das equações integrais lineares de Volterra do tipo (V) acima, estudamos também as equações integrais lineares de Fredholm do tipo

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^* \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b].$$

A função α das equações (V) e (F) é chamada núcleo da equação integral. Quando $\alpha(t,s) = 0$ para todo $t > s$ em (F), obtemos (V). Portanto, a equação (V) é um caso particular da equação (F). Quando a função f é identicamente nula dizemos que a respectiva equação é homogênea.

Dividimos o trabalho em duas partes:

- ♦ Parte A: *Introdução teórica*
- ♦ Parte B: *Resultados*

A Parte A consiste dos Capítulos 1 e 2 e a Parte B dos Capítulos 3 a 6. Nos dois primeiros capítulos da Parte B, são impostas condições sobre o núcleo α para que, dada uma função gauge integrável, tenhamos uma solução também gauge integrável. Entretanto, tratamos somente do caso unidimensional. Já nos demais capítulos (Capítulos 5 e 6) vamos fazer o inverso. Vamos tomar o núcleo α da equação integral linear gauge integrável, e vamos restringir o espaço ao qual ambas a função f e a solução x_f pertencem a um espaço de Banach X (por exemplo o espaço das funções contínuas munido da norma do supremo). Então, dado um núcleo α gauge integrável e uma função $f \in X$, mostramos que existe solução $x_f \in X$ para a equação integral linear tanto no caso unidimensional como no caso multidimensional.

A seguir, descrevemos mais detalhadamente o conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 1:

O Capítulo 1 apresenta integrais unidimensionais de gauge e suas principais propriedades.

Capítulo 2:

Este capítulo apresenta as integrais de gauge e suas propriedades básicas no caso multidimensional.

Capítulo 3:

Este capítulo completa o estudo feito pelo Prof. Dr. Chaim Samuel Hönl em 1990 e apresentado no 32º Seminário Brasileiro de Análise. Naquela ocasião, foram estudadas equações integrais lineares de segunda ordem de Fredholm-Kurzweil e de Volterra-Kurzweil unidimensionais

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde f e x são funções Kurzweil integráveis, e os resultados estabelecidos foram os seguintes:

A) *sob determinadas circunstâncias para a função α , se f é Kurzweil integrável e existe uma única solução Kurzweil integrável x_f , então a função $f \mapsto x_f$ é bicontínua e a equação (F) tem resolvente com representação integral similar (veja [H-6], Teor. 3.2 ou veja o Teorema 2.2 do Capítulo 3 a seguir);*

e

B) *sob determinadas circunstâncias para a função α , existe uma única solução Kurzweil integrável para a equação (V) com resolvente dado pela série de Neumann (veja [H-6], Teor. 3.5).*

Assim, notamos que foram obtidos resultados sobre

- ♦ a existência e unicidade de uma solução explícita para a equação (V)
- ♦ uma solução explícita para a equação (F), caso exista uma única solução.

faltando então resultados sobre

- ♦ a existência e unicidade de uma solução para a equação (F)

É este portanto o nosso objetivo no Capítulo 3: a obtenção de um resultado sobre a existência e unicidade de soluções para a equação (F). E para atingirmos este objetivo, foi-nos necessário responder a uma conjectura feita por Hönl em 1978 (veja [H-4]) que em caso afirmativo implicaria na Alternativa de Fredholm para as equações integrais concernentes à integral de Riemann-Stieltjes

$$(1) \quad \lambda x(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) \cdot x(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e sua correspondente equação homogênea

$$(1_0) \quad \lambda u(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) \cdot u(s) = 0, \quad t \in [a,b]$$

Nossa resposta então foi afirmativa (veja o Teorema 1.2 do Capítulo 3) e a demonstração requereu a mais importante ferramenta da Teoria de Integração de Kurzweil-Henstock:

O LEMA DE SAKS-HENSTOCK.

A partir daí, provamos a Alternativa de Fredholm para a integral de Kurzweil, ou seja, demonstramos que

C) *sob determinadas circunstâncias para a função α , ou para cada f Kurzweil integrável a equação (F) admite uma única solução Kurzweil integrável, ou a correspondente equação homogênea admite soluções não triviais. No segundo caso, são dadas condições para a existência de soluções para a equação (F)* (veja o Teorema 2.3 do Capítulo 3).

Este último resultado portanto, vem dar um fechamento ao estudo sobre equações integrais lineares iniciado em 1990.

Capítulo 4:

No Capítulo 4, estendemos os resultados **A)**, **B)** e **C)** acima para o caso vetorial onde são consideradas as seguintes equações integrais lineares unidimensionais

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

ambas no contexto real.

Observações:

O aspecto interessante dos resultados dos Capítulos 3 e 4 que dizem respeito à existência de soluções é que, enquanto por um lado os métodos convencionais para a

verificação de existência de soluções fazem uso de Teoremas do Ponto Fixo os quais, por sua vez, requerem uma certa completitude dos espaços em questão, por outro lado, as equações integrais lineares de Fredholm-Kurzweil e de Volterra-Kurzweil admitem soluções apesar da não completitude do espaço das funções Kurzweil integráveis. A fim de chegarmos aos teorema principais, foi-nos necessário demonstrar várias isometrias de espaços de Banach (método aplicado em [H-6]) e foram usadas as Fórmulas de Integração por Partes e por Substituição para a integral de Kurzweil-Henstock (veja a dissertação de Mestrado desenvolvida pela autora).

Capítulo 5:

Neste capítulo estudamos tanto o caso unidimensional como o caso multidimensional da equação de Volterra

$$(V_*) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^* \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]$$

onde $\int^*$ denota uma das integrais de Bochner-Lebesgue ou de Henstock. Tomamos α num espaço de funções gauge integráveis (de Bochner-Lebesgue ou de Henstock) e f num espaço completo. Os resultados para a equação (V_L) segue de Teoremas do Ponto fixo. Para a equação (V_H) , aplicamos o fato conhecido de que

♦ se α é uma função Henstock integrável, então existe uma sequência não-decrescente de fechados X_n cuja reunião tende para o domínio de integração e a restrição de α a cada um destes fechados é Lebesgue integrável.

Deste modo, podemos determinar a existência de uma solução para a equação (V_H) a partir de equações do tipo (V_L) .

Capítulo 6:

Aqui estudamos a equação de Volterra

$$(V_*) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^* \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]$$

com respeito à ambas as integrais de Bochner-Lebesgue e de Henstock como limite de equações a tempo discreto. Para isto, nós fazemos a equivalência da equação (V_*) com a

equação de Volterra-Stieltjes a tempo contínuo

$$(L) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^* d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

no sentido das integrais de Riemann e de Kurzweil através de Fórmulas de Integração por Partes. Em dimensão um a equação (L) é tratada como limite de sistemas discretos por Barbanti (veja [Ba]) e a generalização deste fato para dimensão maior que um é feita neste capítulo. Em seguida, determinamos os resultados para a equação (V_L) pelo uso de Teoremas do Ponto Fixo, e para a equação (V_H) pela transmissão de resultados para equações do tipo (V_L) - método aplicado no Capítulo 5.

Observações:

Ainda como trabalho na direção de aplicações da Teoria de Integração de Kurzweil-Henstock às equações integrais, convém destacar o artigo do Prof. Dr. Stefan Schwabik:

- ♦ "The Perron integral in ordinary differential equations", Diff. and Integral Eq., 6(4), (1993), 863-882.

Neste artigo, Schwabik estuda condições de existência de soluções para a equação integral unidimensional real

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s, x(s)) ds = x(a), \quad t \in [a, b]$$

proveniente do seguinte problema de condição de contorno: $\dot{x} = f(t, x)$, $x(a) = v$.

Quando um conceito é introduzido ou comentado pela primeira vez, as palavras que o definem estão **sublinhadas e em negrito**. Quando da introdução de uma notação, usamos **negrito** tão somente. Indicamos o final de uma demonstração com o símbolo “■” e o final de um exemplo com o símbolo “□”. Para outros símbolos e notações, consulte o *ÍNDICE DE NOTAÇÃO*.

No final do trabalho podem ser encontrados *QUADROS-RESUMOS* separados por capítulos e que servem para relembrar rapidamente as principais definições de cada capítulo. Podem ser encontrados também o *ÍNDICE ALFABÉTICO* e as *REFERÊNCIAS* utilizadas no texto.

Parte A:

Introdução teórica

Capítulo 1:

Integrais unidimensionais de gauge

Sejam $[a,b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, X e Y espaços de Banach, E e F espaços normados, e $L(E,F)$ o espaço vetorial das funções lineares contínuas $\alpha: E \rightarrow F$ munido da norma $\|\alpha\| = \sup\{\|\alpha(x)\|; x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Nós escrevemos $E' = L(E, \mathbb{R})$ e $L(E) = L(E, E)$ e temos que $L(E, Y)$ é um espaço de Banach. Seja $\mathcal{C}([a,b], X)$ o espaço de Banach das funções contínuas $f: [a,b] \rightarrow X$ munido da norma do sup, isto é,

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\|; t \in [a,b]\}.$$

Se $f \in \mathcal{C}([a,b], X)$ e $f(c) = 0$, com $c \in [a,b]$, então escrevemos $f \in \mathcal{C}_c([a,b], X)$. Se $X = \mathbb{R}$, então escrevemos simplesmente $\mathcal{C}([a,b])$ e $\mathcal{C}_c([a,b])$.

1.1 Definições e terminologia

Nós dizemos que $d = (\xi_i, t_i)$ é uma **divisão marcada** de $[a,b]$ se (t_i) é uma divisão de $[a,b]$ e $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada i . Denotamos por $\mathbf{TD}_{[a,b]}$ o conjunto das divisões marcadas de $[a,b]$. Qualquer subconjunto de uma divisão marcada de $[a,b]$ é dito uma **divisão parcial marcada** de $[a,b]$ e escrevemos $d \in \mathbf{TPD}_{[a,b]}$. Um **gauge** (do inglês) ou calibre de um conjunto $E \subset [a,b]$ é uma função $\delta: E \rightarrow]0, \infty[$, e dizemos que $d = (\xi_i, t_i) \in \mathbf{TPD}_{[a,b]}$ é **δ -fina** se $[t_{i-1}, t_i] \subset \mathbf{B}_{\delta(\xi_i)}(\xi_i) = \{t \in [a,b]; \|t - \xi_i\| < \delta(\xi_i)\}$ para cada i .

Consideremos as funções $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X, Y)$ e $f: [a,b] \rightarrow X$.

Nós dizemos que f é **Kurzweil α -integrável** (escrevemos $f \in \mathbf{K}^\alpha([a,b], X)$) e que $I \in Y$ é sua integral (escrevemos $I = \mathbf{K} \int_{[a,b]} d\alpha f$) se dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $[a,b]$ tal que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in \mathbf{TD}_{[a,b]}$ δ -fina,

$$\left\| I - \sum_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon.$$

Analogamente, dizemos que uma função α é **Kurzweil f -integrável** (escrevemos $\alpha \in \mathbf{K}_f([a,b], L(X, Y))$) e $I \in Y$ é sua integral (escrevemos $I = \mathbf{K} \int_{[a,b]} \alpha df$) se dado $\varepsilon > 0$, existe

um gauge δ de $[a,b]$ tal que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina,

$$\left\| 1 - \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon.$$

Nós podemos nos referir a $\int_{[a,b]} \alpha \, df$ e $\int_{[a,b]} d\alpha \, f$ como **integrais vetoriais de Kurzweil** ou **integrais de Kurzweil-Stieltjes**. Em particular, quando δ é constante, obtemos as **integrais de Riemann-Stieltjes** as quais denotamos por $\int_{[a,b]} \alpha \, df$ e $\int_{[a,b]} d\alpha \, f$ e escrevemos $\alpha \in R_f([a,b], L(X, Y))$ e $f \in R^\alpha([a,b], X)$ respectivamente.

Nós dizemos que f é **Henstock α -integrável** (escrevemos $f \in H^\alpha([a,b], X)$) se existe uma função $F^\alpha: [a,b] \rightarrow Y$ tal que dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $[a,b]$ tal que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina,

$$\sum_i \|F^\alpha(t_i) - F^\alpha(t_{i-1}) - [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i)\| < \varepsilon.$$

Dizemos que $F^\alpha: [a,b] \rightarrow Y$ é a **função associada** de $f \in H^\alpha([a,b], X)$. De modo análogo, definimos $H_f([a,b], L(X, Y))$ e para $\alpha \in H_f([a,b], L(X, Y))$, a função $A_f: [a,b] \rightarrow Y$ denota sua função associada.

É imediato que $H^\alpha([a,b], X) \subset K^\alpha([a,b], X)$. Para $f \in K^\alpha([a,b], X)$, definimos a **integral indefinida** de f em relação a α por $\tilde{f}^\alpha(t) = \int_{[a,t]} d\alpha \, f$, para cada $t \in [a,b]$. Daí, se $f \in H^\alpha([a,b], X)$, então $\tilde{f}^\alpha(t) = F^\alpha(t) - F^\alpha(a)$, onde F^α é a função associada de f . Analogamente, $H_f([a,b], L(X, Y)) \subset K_f([a,b], L(X, Y))$ com **integral indefinida** dada por $\tilde{\alpha}_f(t) = \int_{[a,t]} \alpha \, df = A_f(t) - A_f(a)$, para cada $t \in [a,b]$, onde A_f é a função associada de $\alpha \in H_f([a,b], L(X, Y))$.

Nós dizemos que uma função $f: [a,b] \rightarrow X$ satisfaz a **Condição Forte de Lusin** (escrevemos $f \in SL([a,b], X)$) se dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset [a,b]$ com $m(A) = 0$, existe um gauge δ de A tal que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TPD_{[a,b]}$ δ -fina com $\xi_i \in A$ para todo i , temos que

$$\sum_i \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < \varepsilon.$$

É imediato que $SL([a,b], X)$ é um subespaço de $\mathcal{C}([a,b], X)$ e, em $SL([a,b], X)$, consideramos a norma induzida por $\mathcal{C}([a,b], X)$, isto é, a norma do sup. Se $X = \mathbb{R}$, então escrevemos

simplesmente $SL([a,b])$.

Seja m a medida de Lebesgue. Dadas funções $f \in SL([a,b],X)$, $\alpha \in H_f([a,b],L(X,Y))$ e $\beta: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ tal que $\beta = \alpha$ m -quase sempre (escrevemos **m-qs**), então $\beta \in H_f([a,b],L(X,Y))$ e $\tilde{\beta}_f(t) = \tilde{\alpha}_f(t)$, para todo $t \in [a,b]$ (veja [F-3]). Com uma demonstração análoga, pode-se provar que dadas funções $f \in SL([a,b],X)$, $\alpha \in K_f([a,b],L(X,Y))$ e $\beta: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ tal que $\beta = \alpha$ m -qs, então $\beta \in K_f([a,b],L(X,Y))$ e $\tilde{\beta}_f(t) = \tilde{\alpha}_f(t)$, para todo $t \in [a,b]$. Sob estas considerações, dada $f \in SL([a,b],X)$, denotamos por $\mathbf{H}_f([a,b],L(X,Y))$ e por $\mathbf{K}_f([a,b],L(X,Y))$ o espaço das classes de equivalência das funções de $H_f([a,b],L(X,Y))$ e de $K_f([a,b],L(X,Y))$ respectivamente, e munimos estes novos espaços com a norma de Alexiewicz

$$\|\alpha\|_{A,f} = \sup\{\|\int_{[a,t]}^K \alpha \, df\|; t \in [a,b]\} = \|\tilde{\alpha}_f\|.$$

1.1 Observação

i) Se $X = \mathbb{R} = Y$ e $f: [a,b] \rightarrow X$, então $K_f([a,b],L(Y,X)) = K_f([a,b],L(\mathbb{R})) \cong K_f([a,b],\mathbb{R})$ que denotamos simplesmente por $\mathbf{K}_f([a,b])$ (ou $\mathbf{H}_f([a,b])$) - pois neste contexto $K_f([a,b]) = H_f([a,b])$. Também escrevemos $\mathbf{H}_f([a,b])$ ou $\mathbf{K}_f([a,b])$ em lugar de $\mathbf{H}_f([a,b],L(X,Y))$ e $\mathbf{K}_f([a,b],L(X,Y))$.

ii) Se $Y = X$ e para todo $t \in [a,b]$, $\alpha(t) = t$, então escrevemos simplesmente $\mathbf{K}([a,b],X)$ e $\mathbf{H}([a,b],X)$ em vez de $\mathbf{K}^\alpha([a,b],X)$ e $\mathbf{H}^\alpha([a,b],X)$ respectivamente. Neste caso, $\tilde{f}(t) = \int_{[a,t]}^K f = \tilde{f}^\alpha(t)$ para todo $t \in [a,b]$, e a norma de Alexiewicz de $f \in K([a,b],X)$ é dada por

$$\|f\|_A = \sup\{\|\int_{[a,t]}^K f\|; t \in [a,b]\} = \|\tilde{f}\|.$$

iii) Em casos particulares as notações para as integrais de Riemann-Stieltjes seguem o padrão dos itens anteriores. Assim por exemplo, escrevemos $\mathbf{R}([a,b],X)$ em lugar de $\mathbf{R}^\alpha([a,b],X)$ quando $Y = X$ e $\alpha(t) = t$, para todo $t \in [a,b]$.

2. Propriedades básicas

2.1 O Lema de Saks-Henstock

Um resultado muito importante, conhecido como **Lema de Saks-Henstock** e necessário às demonstrações de resultados estruturais da teoria de integração de Kurzweil-Henstock é dado a seguir.

Denotando por $I_f([a,b], L(X,Y))$ um dos espaços $K_f([a,b], L(X,Y))$ ou $R_f([a,b], L(X,Y))$ e por $\int_{[a,b]}^* \alpha df$ a integral de $\alpha \in I_f([a,b], L(X,Y))$, podemos enunciar o

2.1 Lema (Lema de Saks-Henstock - veja [He], [F-2], 2.3, ou ainda [F-1], Lema 2.1.6) *Dadas funções $f: [a,b] \rightarrow X$ e $\alpha \in I_f([a,b], L(X,Y))$, sejam $\varepsilon > 0$, e δ o gauge de $[a,b]$ da definição de $\alpha \in I_f([a,b], L(X,Y))$. Então, para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TPD_{[a,b]}$ δ -fina,*

$$\left\| \sum_i \left\{ \int_{[t_{i-1}, t_i]}^* \alpha df - \alpha(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Para a integral vetorial de Henstock temos

2.2 Lema (Lema de Saks-Henstock - veja [He], [F-2], 3.3, [F-1], Lema 2.2.3 ou ainda [F-1], Teor. 1.3.7) *Dadas funções $f: [a,b] \rightarrow X$ e $\alpha \in H_f([a,b], L(X,Y))$, sejam $\varepsilon > 0$, e δ o gauge de $[a,b]$ da definição de $\alpha \in H_f([a,b], L(X,Y))$. Então para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TPD_{[a,b]}$ δ -fina,*

$$\sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]}^K \alpha df - \alpha(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon.$$

2.2 O Teorema Fundamental do Cálculo

As funções que são integrais de funções Henstock integráveis ou Henstock-Stieltjes integráveis do tipo $\int_{[a,b]}^K d\alpha f$ podem ser caracterizadas, o que se faz por meio de

Teoremas Fundamentais do Cálculo (consulte [F-3] para a caracterização de $\int_{[a,b]}^K f \, d\alpha$). Todavia, o mesmo não se pode esperar das funções que são integrais de funções Kurzweil, pois podemos ter $f \in R([a,b])$ tal que $(\tilde{f})'(t) \neq f(t)$ para m -quase todo $t \in [a,b]$. Basta tomarmos, por exemplo, $[a,b] = [0,1]$ and $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/q$, se $t = p/q$, com $q \neq 0$ e p ambos racionais e primos entre si, e $f(t) = 0$ caso contrário. Mesmo no caso das funções que são integrais de funções Henstock-Stieltjes integráveis do tipo $\int_{[a,b]}^K f \, d\alpha$, não temos precisamente uma caracterização, apesar de termos Teoremas Fundamentais do Cálculo para estas integrais (veja [F-3]).

2.3 Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $F \in \mathcal{F}([a,b],X)$. Se para todo $t \in [a,b]$ existe $F'(t) = f(t)$, então $f \in H([a,b],X)$ com $\int_{[a,b]}^K f = F(b) - F(a)$.*

Prova (basta adaptar a prova de [H-9], Teor. 1.1 para o caso a valores em espaços de Banach).

2.4 Teorema (veja [H-7], 3.5) *Se $f \in H([a,b],X)$, então existe $\tilde{f}'(t) = f(t)$, para m -quase todo $t \in [a,b]$.*

Mais geralmente temos

2.5 Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo - veja [F-3]) *Sejam $f \in SL([a,b],X)$ e $A \in SL([a,b],Y)$ ambas diferenciáveis e seja $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ tal que $A' = \alpha \cdot f'$ m -qs. Então $\alpha \in H_f([a,b],L(X,Y))$ e $A = \tilde{\alpha}_f$.*

2.6 Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo - veja [F-3]) *Sejam $f \in SL([a,b],X)$ diferenciável e $\alpha \in H_f([a,b],L(X,Y))$ limitada. Então $\tilde{\alpha}_f \in SL([a,b],Y)$ e existe $(\tilde{\alpha}_f)'(t) = \alpha(t) \cdot f'(t)$ para m -quase todo $t \in [a,b]$.*

2.7 Corolário *Sejam $f \in SL([a,b],X)$ não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$ e diferenciável, $\alpha \in H_f([a,b])$ limitada e $\tilde{\alpha}_f = 0$. Então $\alpha = 0$ m-quase sempre.*

Vale ressaltarmos que quando $g(t) = t$ no Teorema 2.6 (e portanto também no Corolário 2.7), então f não precisa ser limitada (veja [H-7]).

2.3 Propriedades da integral indefinida

2.8 Proposição (veja [F-2], Corolário depois de Teor. 2.1.9) *Se $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$ e $\alpha \in K_f([a,b],L(X,Y))$, então $\tilde{\alpha}_f \in \mathcal{C}([a,b],Y)$.*

2.9 Proposição (veja [F-3]) *Se $f \in SL([a,b],X)$ e $\alpha \in H_f([a,b],L(X,Y))$, então $\tilde{\alpha}_f \in SL([a,b],Y)$.*

Denotando por $AC([a,b],X)$ o espaço das funções de $[a,b]$ em X que são absolutamente contínuas e por $\mathcal{C}^{(1)}([a,b],X)$ o subespaço de $\mathcal{C}([a,b],X)$ das funções diferenciáveis, segue dos fatos de que $AC([a,b],X) \subset SL([a,b],X) \subset \mathcal{C}([a,b],X)$ e que $\mathcal{C}^{(1)}([a,b],X)$ e $AC([a,b],X)$ são densos em $\mathcal{C}([a,b],X)$ que

2.10 Teorema *Dada $f \in SL([a,b],X)$ não-constante, a aplicação*

$$\alpha \in \mathbf{I}_f([a,b],L(X,Y)) \mapsto \tilde{\alpha}_f \in \mathcal{C}_a([a,b],Y),$$

onde $\mathbf{I}_f([a,b],L(X,Y))$ denota um dos espaços $\mathbf{K}_f([a,b],L(X,Y))$ ou $\mathbf{H}_f([a,b],L(X,Y))$, é uma isometria (i.e., $\|\tilde{\alpha}_f\| = \|\alpha\|_{\mathbf{I}_f}$) sobrejetora num subespaço denso de $\mathcal{C}_a([a,b],Y)$.

2.4 Fórmulas de Integração por Partes e por Substituição

Primeiramente, vamos dar algumas definições de espaços de funções limitadas.

Nós dizemos que $d: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ é uma **divisão** de $[a,b]$, com $|d| = n$, e escrevemos $d = (t_i)$. A **variação** $V(f)$ de uma função $f: [a,b] \rightarrow X$ é o menor $p \in [0, \infty]$ tal que para qualquer divisão (t_i) de $[a,b]$, temos

$$\sum_i \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq p.$$

Se $V(f) < \infty$, então nós dizemos que f é de **variação limitada** e escrevemos $f \in \mathbf{BV}([a,b],X)$. Se $f \in \mathbf{BV}([a,b],X)$ e $f(c) = 0$, para $c \in [a,b]$, então $f \in \mathbf{BV}_c([a,b],X)$ o qual é um espaço de Banach quando munido da norma $\|f\| = V(f)$ (veja [H-1], I.2.3). Quando $X = \mathbb{R}$, nós escrevemos simplesmente $\mathbf{BV}([a,b])$ e $\mathbf{BV}_c([a,b])$.

A **semivariação** $SV(f)$ de uma função $f: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ é o menor $p \in [0,\infty]$ tal que para toda divisão (t_i) de $[a,b]$,

$$\left\| \sum_i [f(t_i) - f(t_{i-1})] x_i \right\| \leq p \sup_i \{\|x_i\|\}, \quad x_i \in X.$$

Se $SV(f) < \infty$, então dizemos que f é de **semivariação limitada** e escrevemos $f \in \mathbf{SV}([a,b],L(X,Y))$. Se $f \in \mathbf{SV}([a,b],L(X,Y))$ e $f(c) = 0$, com $c \in [a,b]$, então $f \in \mathbf{SV}_c([a,b],L(X,Y))$ o qual é um espaço de Banach quando munido da norma $\|f\| = SV(f)$ (veja [H-1], I.3.3). Se $X = \mathbb{R}$, então escrevemos $W(h)$ em lugar de $SV(f)$ e $\mathbf{BW}([a,b],Y)$ em lugar de $\mathbf{SV}([a,b],L(\mathbb{R},Y))$. Nós dizemos que $W(h)$ é a **variação fraca** de f e que f é de **variação fraca limitada** se $W(f) < \infty$. Quando $Y = L(X,W)$, onde W é um espaço de Banach, segue das definições anteriores que $\mathbf{BV}([a,b],L(X,W)) \subset \mathbf{SV}([a,b],L(X,W)) \subset \mathbf{BW}([a,b],L(X,W))$. Além disso, $\mathbf{BV}([a,b],X) = \mathbf{BW}([a,b],X)$ se e somente se X é de dimensão finita (veja [R]). Também temos que $\mathbf{SV}([a,b],L(X,\mathbb{R})) = \mathbf{BV}([a,b],X')$. De fato. Basta notar que, para cada divisão (t_i) de $[a,b]$,

$$\sup \left\{ \left\| \sum_i \langle f(t_i) - f(t_{i-1}), x_i \rangle \right\|; x_i \in X, \|x_i\| < 1 \right\} = \sum_i \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

Por fim, toda função de variação limitada, de semivariação limitada, ou de variação fraca limitada também é limitada. Para mais propriedades sobre estes espaços, uma boa referência é [H-1].

O resultado seguinte é bem conhecido. Ele dá a **Fórmula de Integração por Partes** para as integrais de Riemann-Stieltjes.

2.11 Teorema (veja, por exemplo, [H-1], I.3.4, I.4.5 e [F-1], Teor. 1.4.1) *Existem as integrais de Riemann-Stieltjes $\int_{[a,b]} d\alpha f$ e $\int_{[a,b]} \alpha df$ e tem-se que*

$$\int_{[a,b]} d\alpha f + \int_{[a,b]} \alpha df = \alpha(b) \cdot f(b) - \alpha(a) \cdot f(a)$$

se uma das seguintes condições é satisfeita:

- i) $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$ e $f \in \mathcal{E}([a,b], X)$;
- ii) $\alpha \in \mathcal{E}([a,b], L(X,Y))$ e $f \in BW([a,b], X)$.

Dada uma função $f: [a,b] \rightarrow X$, denotemos novamente por $I_f([a,b], L(X,Y))$ um dos espaços $K_f([a,b], L(X,Y))$ ou $R_f([a,b], L(X,Y))$ com integral indefinida de $\alpha \in I_f([a,b], L(X,Y))$ denotada por $\tilde{\alpha}_f(t) = \int_{[a,t]} \alpha df$, $t \in [a,b]$. Seja W um espaço de Banach. A seguir, apresentamos a **Fórmula de Integração por Substituição** para as integrais de Kurzweil-Stieltjes e de Riemann-Stieltjes.

2.12 Teorema (veja [F-2], Teor. 2.5 ou [F-1], Teor. 2.1.14 e veja [F-1], Teor. 1.4.5) *Sejam $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$, $f: [a,b] \rightarrow W$, $\beta \in I_f([a,b], L(W,X))$ e $\gamma = \tilde{\beta}_f$. Então $\alpha \in I_{\gamma}([a,b], L(X,Y))$ se e só se $\alpha \cdot \beta \in I_f([a,b], L(W,Y))$. Neste caso, $\int_{[a,b]} \alpha d\gamma = \int_{[a,b]} \alpha \cdot \beta df$ com*

$$\left\| \int_{[a,b]} \alpha \cdot \beta df \right\| \leq [SV(\alpha) + \|\alpha(a)\|] \|\beta\|_{A,f}$$

2.13 Corolário *Se $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$, $f \in \mathcal{E}([a,b], W)$, $\beta \in I_f([a,b], L(W,X))$ e $\gamma = \tilde{\beta}_f$, então $\alpha \cdot \beta \in I_f([a,b], L(W,Y))$ com $\int_{[a,b]} \alpha \cdot \beta df = \int_{[a,b]} \alpha d\gamma$ e*

$$\left\| \int_{[a,b]} \alpha \cdot \beta df \right\| \leq [SV(\alpha) + \|\alpha(a)\|] \|\beta\|_{A,f}$$

Prova (segue diretamente usando a Proposição 2.8 e o Teorema 2.11).

Para a integral de Henstock-Stieltjes temos a seguinte Fórmula de Integração por Substituição:

2.14 Teorema (veja [F-2], Teor. 3.5 ou [F-1], Teor. 2.2.7) *Consideremos as funções $f: [a,b] \rightarrow W$, $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ limitada, $\beta \in H_f([a,b], L(W,X))$ e $\gamma = \tilde{\beta}_f$. Então $\alpha \in H_f([a,b], L(X,Y))$ se e somente se $\alpha \cdot \beta \in H_f([a,b], L(W,Y))$. Neste caso,*

$${}^K \int_{[a,b]} \alpha \cdot \beta \, df = {}^K \int_{[a,b]} \alpha \, d\gamma.$$

O próximo teorema dá uma Fórmula de Integração por Partes para a Integral de Henstock.

2.15 Teorema *Sejam $\alpha \in BV([a,b], L(X,Y))$ e $f \in H([a,b], X)$. Então $\alpha \cdot f \in H([a,b], Y)$ com ${}^K \int_{[a,b]} \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} \alpha \, d\tilde{f}$ e ${}^K \int_{[a,b]} \alpha \cdot f \leq |V(\alpha)| + \|\alpha(a)\| \|f\|_A$.*

Prova (veja [F-1], Teor. 2.2.6).

2.5 Outras Propriedades

2.16 Teorema $\mathcal{C}_a([a,b], X)$ é $\|\cdot\|_A$ -denso em $\mathbf{K}([a,b], X)$.

Prova Seja $f \in \mathbf{K}([a,b], X)$. É sabido que $\mathcal{C}_a^{(1)}([a,b], X) = \{f \in \mathcal{C}_a([a,b], X); \text{ existe } \tilde{f} \text{ e } \tilde{f} \text{ é contínua}\}$ é denso em $\mathcal{C}_a([a,b], X)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe uma sequência de funções $h_n \in \mathcal{C}_a^{(1)}([a,b], X)$ tais que h_n converge uniformemente para $\tilde{f} \in \mathcal{C}_a([a,b], X)$ (veja a Proposição 2.8). Pelo Teorema 2.3, $h_n' \in H([a,b], X) \subset K([a,b], X)$ com ${}^K \int_{[a,t]} h_n' = h_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $t \in [a,b]$. Observe que $h_n(a) = 0$, qualquer que seja n .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos uma função $f_n: [a,b] \rightarrow X$ tal que $f_n = h_n'$. Logo,

$${}^K \int_{[a,t]} f_n = h_n(t) \rightarrow \tilde{f}(t) = {}^K \int_{[a,t]} f, \text{ para todo } t \in [a,b],$$

o que significa que $\|f_n - f\|_A \rightarrow 0$. ■

2.17 Corolário $E([a,b], X)$ é $\|\cdot\|_A$ -denso em $\mathbf{K}([a,b], X)$, onde $E([a,b], X)$ denota o espaço das funções escada $f: [a,b] \rightarrow X$.

Prova Seja $f \in \mathbf{K}([a,b],X)$. Do teorema, dado $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathcal{C}_a([a,b],X)$ tal que $\|h - f\|_A < \varepsilon$. Mas, como qualquer função contínua pode ser aproximada por uma função escada na norma do sup, então existe $p \in E([a,b],X)$ tal que $\|p - h\| < \varepsilon$. Assim, temos que

$$\|p - f\|_A \leq \|p - h\|_A + \|h - f\|_A < \|p - h\|(b - a) + \varepsilon < \varepsilon(b - a) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

2.18 Lema (Straddle Lema - veja [[H-7], 3.4]) *Sejam $f, F: [a,b] \rightarrow X$ funções tais que existe $F'(\xi) = f(\xi)$, para algum ponto $\xi \in [a,b]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\xi) > 0$ tal que $\|F(t) - F(s) - f(\xi)(t - s)\| < \varepsilon(t - s)$, sempre que $\xi - \delta(\xi) < s < \xi < t < \xi + \delta(\xi)$.*

2.19 Teorema *Seja $f \in SL([a,b],W)$ diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$. Então $\mathcal{C}_a([a,b],L(W,X))$ é $\|\cdot\|_{A,f}$ -denso em $\mathbf{K}_f([a,b],L(W,X))$.*

Prova Seja $\alpha \in \mathbf{K}_f([a,b],L(W,X))$. Pela Proposição 2.8, $\tilde{\alpha}_f \in \mathcal{C}_a([a,b],X)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função $h \in \mathcal{C}_a^{(1)}([a,b],X)$ tal que $\|h - \tilde{\alpha}_f\| < \varepsilon$, uma vez que $\mathcal{C}_a^{(1)}([a,b],W)$ é denso em $\mathcal{C}_a([a,b],W)$. Por hipótese, $f \in SL([a,b],W) \subset \mathcal{C}([a,b],W)$ e f é diferenciável. Logo, pelo Teorema 2.3, $f' \in H([a,b],W) \subset K([a,b],W)$ e $h' \in H([a,b],X) \subset K([a,b],X)$ com $\int_{[a,t]} h' = h(t)$, qualquer que seja $t \in [a,b]$.

Seja β uma função definida em $[a,b]$ tal que $\beta(t) \cdot f'(t) = h'(t)$ para cada $t \in [a,b]$. Como consequência do Teorema de Hahn-Banach, podemos prolongar cada $\beta(t)$ a uma forma linear contínua de W em X , ou seja, $\beta: [a,b] \rightarrow L(W,X)$. E, como h' é contínua, então existe $\int_{[a,b]} \beta \cdot f'$ e

$$(1) \quad \int_{[a,t]} \beta \cdot f' = h(t) \rightarrow \tilde{\alpha}_f(t) = \int_{[a,t]} \alpha \, df, \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Por outro lado, existe $\int_{[a,b]} \beta \, df$ com

$$(2) \quad \int_{[a,b]} \beta \, df = \int_{[a,b]} \beta \cdot f'.$$

De fato. Seja δ_1 o gauge da definição de $\int_{[a,b]} \beta \cdot f' = \int_{[a,b]} \beta \cdot f'$ e, para cada $\xi \in [a,b]$, seja $\delta_2(\xi) > 0$ tal que se $\xi - \delta_2(\xi) < s < \xi < t < \xi + \delta_2(\xi)$, então

$$(3) \quad \|f(t) - f(s) - f'(\xi)(t - s)\| < \varepsilon(t - s) \text{ (veja Lema 2.18).}$$

Tomemos um gauge δ de $[a, b]$ tal que $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$ para cada $\xi \in [a, b]$. Então, dada $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina, temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_i \beta(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] - \int_{[a, b]}^K \beta \cdot f' \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_i \beta(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] - \sum_i \beta(\xi_i) \cdot f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| + \\ & \quad + \left\| \sum_i \beta(\xi_i) \cdot f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{[a, b]}^K \beta \cdot f' \right\| < \\ & < \|\beta\| \sum_i \|f(t_i) - f(t_{i-1}) - f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| < \|\beta\| \varepsilon (b - a) + \varepsilon, \end{aligned}$$

por (3) e pela Kurzweil integrabilidade de $\beta \cdot f$. Daí, como consequência de β ser fracamente contínua, segue que β é limitada e, portanto, $\|\beta\| < \infty$.

Segue então de (1) e (2) que $\int_{[a, b]}^K \beta \, df$ converge para $\int_{[a, b]}^K \alpha \, df$, ou seja, que $\|\beta - \alpha\|_{A, f} \rightarrow 0$. ■

2.20 Corolário *Seja $f \in SL([a, b], W)$ diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a, b]$. Então $E([a, b], L(W, X))$ é $\|\cdot\|_{A, f}$ -denso em $K_f([a, b], L(W, X))$, onde $E([a, b], L(X, Y))$ denota o espaço das funções escada $f: [a, b] \rightarrow L(X, Y)$.*

Observações finais

A idéia devida a E. J. McShane (veja [M]) de considerar divisões (t_i) de $[a, b]$ com marcas ("tags" do inglês) $\xi_i \in [a, b]$ tais que $[t_{i-1}, t_i] \subset B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ para todo i , mas tais que ξ_i não pertence necessariamente à $[t_{i-1}, t_i]$, originou integrais mais restritivas do que aquelas de Kurzweil e de Henstock. Quando usamos este conceito de McShane nas definições das integrais de Kurzweil e de Henstock, obtemos respectivamente as integrais de Kurzweil-McShane e de Henstock-McShane e muitos dos resultados da Teoria de Integração de

Kurzweil-Henstock também valem para as integrais de McShane. Entre eles, destacamos as Fórmulas de Integração por Substituição e o Lemma de Saks-Henstock.

O aspecto mais importante destas modificações é o fato de que o espaço das funções Henstock-McShane integráveis e o espaço das funções Bochner-Lebesgue integráveis com integral finita coincidem bem como suas integrais. Assim, a integral de Henstock-McShane dá uma caracterização riemanniana para a integral de Bochner-Lebesgue (veja [Go] e [H-8]).

Capítulo 2:

Integrais multidimensionais de gauge

Dedicamos este capítulo às definições, considerações e propriedades básicas de algumas integrais do tipo gauge, integrais estas de funções definidas num intervalo (ou retângulo) compacto do $\mathbb{R}^n$.

Para tornar as demonstrações mais simples e de fácil compreensão, nós vamos considerar bidimensional com uma notação e uma formulação tais que seja imediata a passagem para $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Então, seja R um intervalo compacto de $\mathbb{R}^2$, ou seja, R é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados. Dados pontos $t, s \in \mathbb{R}^2$ com $t \leq s$ (i.e., $t_i \leq s_i$, $i = 1, 2$), denotamos por $[t, s]$ o intervalo correspondente como ilustra figura seguinte.

Escrevemos $|[t, s]| = m([t, s])$, onde lembramos que m é a medida de Lebesgue.

Uma das propriedades das integrais unidimensionais que usam a noção de gauge é o fato de podermos caracterizar as funções que são integrais de Kurzweil-Henstock (no caso real) e de Henstock (no caso a valores em espaços de Banach) relacionando, desta forma, a integral com sua primitiva m -quase sempre. Esta relação é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo (veja o Capítulo 2 às páginas 6 e 7) para o qual precisamos da noção de derivada. Entretanto, devido a um resultado de Saks (veja [S-1]), sabemos que não é possível estendermos o Teorema Fundamental do Cálculo para o caso multidimensional com a definição usual de derivada. Deste modo, uma derivada mais geral chamada derivada regular, bem como a respectiva integral regular foram introduzidas. Tais novas definições requerem que os subintervalos de uma divisão marcada tenham lados tais que a razão entre o menor e o maior lado não seja inferior a um determinado valor. Grosseiramente falando, a regularidade dos subintervalos impede que eles sejam demasiadamente compridos e fininhos. Para saber mais sobre este assunto, o leitor pode consultar [K] e [F-3].

Por outro lado, várias propriedades tais como a continuidade da integral indefinida, a existência de uma sequência de conjuntos fechados em cada um dos quais a função integrável é Lebesgue integrável, o Lema de Saks-Henstock e outras, ainda valem para certos espaços de funções integráveis que não fazem uso de regularidade. Esta seção então, se propõe a apresentar integrais multidimensionais do tipo gauge não-regulares e a valores em espaços de Banach e suas propriedades principais.

1. Definições e terminologia

Qualquer conjunto de intervalos fechados $J_i \subset \mathbb{R}$ com interiores dois a dois disjuntos e tais que $\cup J_i = \mathbb{R}$ é chamado uma **divisão** de $\mathbb{R}$ que denotamos por (J_i) . Denotamos por $\mathbf{D}_{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as divisões de $\mathbb{R}$. Uma **divisão marcada** de $\mathbb{R}$ é um par $\mathbf{d} = (\xi_i, J_i)$, onde (J_i) é uma divisão de $\mathbb{R}$ e $\xi_i \in J_i$ para cada i . Nós dizemos que ξ_i é uma **marca** (no inglês "tag") de J_i e denotamos por $\mathbf{TD}_{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as divisões marcadas de $\mathbb{R}$. Uma **divisão parcial marcada** $\mathbf{d}$ de $\mathbb{R}$ é qualquer subconjunto de uma divisão marcada de $\mathbb{R}$ e escrevemos $\mathbf{d} \in \mathbf{TPD}_{\mathbb{R}}$. Analogamente ao caso unidimensional, um **gauge** de um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é uma função $\delta: E \rightarrow]0, \infty[$ e $\mathbf{d} = (\xi_i, J_i) \in \mathbf{TPD}_{\mathbb{R}}$ é **δ -fina** se $J_i \subset B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$, para cada i , onde $B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i) = \{t \in \mathbb{R}; \|t - \xi_i\| < \delta(\xi_i)\}$.

Sejam $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ o conjunto dos intervalos fechados de $\mathbb{R}$. Uma função $F: \mathfrak{I}_{\mathbb{R}} \rightarrow X$ é chamada uma **função aditiva de intervalos** (escrevemos $F \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}, X)$) se para quaisquer J, J_1 e $J_2 \in \mathfrak{I}_{\mathbb{R}}$ tais que J_1 e J_2 têm interiores disjuntos e $J = J_1 \cup J_2$, temos que

$$F(J) = F(J_1) + F(J_2).$$

Dadas funções $\alpha \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_{\mathbb{R}}, L(X, Y))$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow X$, nós dizemos que f é **Kurzweil α -integrável** (escrevemos $f \in \mathbf{K}^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$) se existe $I \in Y$ (escrevemos $I = \mathbf{K} \int_{\mathbb{R}} d\alpha f$) tal que dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $\mathbb{R}$ tal que para toda $\mathbf{d} = (\xi_i, J_i) \in \mathbf{TD}_{\mathbb{R}}$ δ -fina,

$$\left\| I - \sum_i \alpha(J_i) \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon.$$

E dizemos que f é **Henstock α -integrável** (escrevemos $f \in \mathbf{H}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X})$), se existe $\mathbf{F}^\alpha \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{Y})$ chamada **função associada** a f tal que dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $\mathbf{R}$ tal que para toda $d = (\xi_i, J_i) \in \mathbf{TD}_R$ e δ -fina,

$$\sum_i \left\| \mathbf{F}^\alpha(J_i) - \alpha(J_i) \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon.$$

Agora, consideremos as funções $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ e $f \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{X})$. Então α é **Kurzweil f -integrável** (escrevemos $\alpha \in \mathbf{K}_f(\mathbf{R}, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$), se existe $\mathbf{I} \in \mathbf{Y}$ (escrevemos $\mathbf{I} = \mathbf{K} \int_{\mathbf{R}} \alpha \, d\mathbf{f}$) tal que dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $\mathbf{R}$ tal que para toda $d = (\xi_i, J_i) \in \mathbf{TD}_R$ e δ -fina,

$$\left\| \mathbf{I} - \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot f(J_i) \right\| < \varepsilon.$$

Também temos que α **Henstock f -integrável** (escrevemos $\alpha \in \mathbf{H}_f(\mathbf{R}, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$), se existe $\mathbf{A}_f \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{Y})$ chamada **função associada** a α tal que dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ de $\mathbf{R}$ tal que para toda $d = (\xi_i, J_i) \in \mathbf{TD}_R$ e δ -fina, temos

$$\sum_i \left\| \mathbf{A}_f(J_i) - \alpha(\xi_i) \cdot f(J_i) \right\| < \varepsilon.$$

Seja $\mathbf{R} = [a, b]$. Dados $f \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{X})$ e $\alpha \in \mathbf{K}_f(\mathbf{R}, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, definimos $\tilde{\alpha}_f(t) = \mathbf{K} \int_{[a, t]} \alpha \, d\mathbf{f}$, para cada $t \in \mathbf{R}$. Analogamente, se $\alpha \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ e $f \in \mathbf{K}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X})$, então definimos $\tilde{f}^\alpha(t) = \mathbf{K} \int_{[a, t]} \alpha \, d\mathbf{f}$, para cada $t \in [a, b] = \mathbf{R}$. Quando $f \in \mathbf{K}(\mathbf{R}, \mathbf{X})$, escrevemos simplesmente $\tilde{f}(t) = \mathbf{K} \int_{[a, t]} f$ em lugar de $\tilde{f}^\alpha(t)$.

Se $\alpha \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, $f \in \mathbf{H}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X})$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ e $\alpha(J)$ é a identidade em $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, para todo $J \in \mathfrak{I}_R$, dizemos que f é **Henstock integrável** e escrevemos $f \in \mathbf{H}(\mathbf{R}, \mathbf{X})$ com função associada denotada por $\mathbf{F}$. Analogamente, se $\alpha \in \mathbf{A}(\mathfrak{I}_R, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, $f \in \mathbf{K}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X})$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ e $\alpha(J)$ é a identidade em $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, para todo $J \in \mathfrak{I}_R$, então f é **Kurzweil integrável** (escrevemos $f \in \mathbf{K}(\mathbf{R}, \mathbf{X})$) com integral $\mathbf{K} \int_{\mathbf{R}} f$.

1.1 Observação

i) É fácil de ver que $\mathbf{H}_f(\mathbf{R}, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \subset \mathbf{K}_f(\mathbf{R}, \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ e $\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X}) \subset \mathbf{K}^\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{X})$.

ii) Quando X e Y têm dimensão finita e f e α são funções que não são nulas m-qs, então $H^\alpha(R, X) = K^\alpha(R, X)$ e $H_f(R, L(X, Y)) = K_f(R, L(X, Y))$. Nestes casos, escrevemos simplesmente $K_f(R)$, $K^\alpha(R)$, ou $H_f(R)$, $H^\alpha(R)$ conforme queiramos dar ênfase às diferentes definições, e dizemos que tratam-se das integrais vetoriais multidimensionais de Kurzweil-Henstock.

iii) Se X ou Y não têm dimensão finita, então podemos ter $H_f(R, L(X, Y)) \neq K_f(R, L(X, Y))$, $H^\alpha(R, X) \neq K^\alpha(R, X)$ ou mesmo $H(R, X) \neq K(R, X)$.

iv) Pela definição multidimensional de McShane (análoga àquela do Capítulo 1 - Observações finais) temos que $\mathcal{L}_1(R, X) \subset H(R, X)$, onde $\mathcal{L}_1(R, X)$ denota o espaço das funções $f: R \rightarrow X$ que são Bochner-Lebesgue integráveis com $\|f\|_1 = \int_R \|f(\cdot)\| < \infty$. Mais geralmente, as integrais vetoriais de Henstock contém as integrais vetoriais de Bochner-Lebesgue.

v) Quando consideramos gauges constantes nas definições das integrais vetoriais multidimensionais de Kurzweil, reduzimo-nos aos espaços de funções integráveis no sentido da integral de Riemann. Neste caso, em lugar de $K^\alpha(R, X)$, $K_f(R, L(X, Y))$, $K^\alpha(R)$, $K_f(R)$ e $K(R)$ escrevemos, respectivamente, $R^\alpha(R, X)$, $R_f(R, L(X, Y))$, $R^\alpha(R)$, $R_f(R)$, e $R(R)$, e dizemos que f é Riemann integrável com respeito a α , que α é Riemann integrável com respeito a f , etc, conforme o caso.

1.2 Observação Seja $I(R, X)$ qualquer dos espaços de funções integráveis $f: R \rightarrow X$ que definimos. São verdadeiras e de verificação imediata as seguintes afirmações:

- i) se $f \in I(R, X)$ e $J \in \mathfrak{I}_R$, então $f \in I(J, X)$ (integrabilidade nos subintervalos);
- ii) se $f \in I(R, X)$ e J, J_1 e $J_2 \in \mathfrak{I}_R$ são tais que $J = J_1 \cup J_2$ e J_1 e J_2 têm interiores disjuntos, então $F(J) = F(J_1) + F(J_2)$, onde F denota a integral indefinida de f . Portanto $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$, ou seja, F é uma função aditiva de intervalos (aditividade da integral indefinida);
- iii) se J_1 e $J_2 \in \mathfrak{I}_R$ têm interiores disjuntos e $J_1 \cup J_2 = R$, então $f \in I(J_1, X) \cap I(J_2, X)$ implica que $f \in I(R, X)$ (aditividade).

Esta última afirmação pode ser demonstrada usando o Critério de Cauchy que vale quando

não há regularidade.

1.3 Observação Dados $R = [a, b]$, $f \in K(R, X)$ e $\tilde{f}: R \rightarrow X$ dada por $\tilde{f}(t) = {}^K \int_{[a, t]} f$, para cada $t \in [a, b] = R$, é possível associarmos a função $\tilde{f}$ a uma função de intervalos de R a qual continuamos a chamar de $\tilde{f}$. Neste caso, definimos

$$\tilde{f}([t, s]) = \tilde{f}(s) - \tilde{f}((t_1, s_2)) - \tilde{f}((s_1, t_2)) + \tilde{f}(t).$$

Reciprocamente, é possível associarmos uma função $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ a uma função de R em X a qual ainda denotamos por F . Fazemos isto da seguinte maneira: dado $R = [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, escrevemos

$$F(t) = F([a, t]) - F([a, (a_1, t_2)]) - F([a, (t_1, a_2)]) + F([a, a]).$$

Com esta notação, é fácil ver que

$$F((a_1, t_2)) = F((t_1, a_2)), \text{ qualquer que seja } t = (t_1, t_2) \in R,$$

e escrevemos $F \in A_0(\mathfrak{I}_R, X)$. Logo, podemos associar a cada $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ uma função de $F_0 \in A_0(\mathfrak{I}_R, X)$ com $F_0(J) = F(J)$, para todo $J \in \mathfrak{I}_R$.

2. Propriedades básicas

Primeiramente damos as versões do Lema de Saks-Henstock que correspondem às integrais de Kurzweil e de Henstock respectivamente. As demonstrações seguem a rotina usual.

2.1 Lema (Lema de Saks-Henstock) Dada $f \in K(R, X)$, seja F sua integral indefinida (i.e., $F(J) = \int_J f(s) ds$, para todo $J \in \mathfrak{I}_R$) e sejam $\varepsilon > 0$ e δ o gauge da definição de $f \in K(R, X)$. Então, para toda $d = (\xi_i, J_i) \in TPD_R$ δ -fina, temos que

$$\left\| \sum_i [F(J_i) - f(\xi_i) |J_i|] \right\| < \varepsilon.$$

2.2 Lema (Lema de Saks-Henstock) *Dada $f \in H(R, X)$, seja F sua integral indefinida e sejam $\varepsilon > 0$ e δ o gauge da definição de $f \in H(R, X)$. Então, para toda $d = (\xi_i, J_i) \in TPD_R$ δ -fina, temos que*

$$\sum_i \| [F(J_i) - f(\xi_i)J_i] \| < \varepsilon.$$

Assim como em dimensão um (veja [F-1] ou [F-2]) também são válidos os Lemas de Saks-Henstock para cada uma das integrais vetoriais multidimensionais de Kurzweil e de Henstock bem como para as integrais de Riemann e de McShane.

Nós denotamos por $A \Delta B$ a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B e dizemos que uma função aditiva de intervalos $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ é **contínua** em $J \in \mathfrak{I}_R$ se e só se dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para todo $I \in \mathfrak{I}_R$ com $m(J \Delta I) \leq \eta$, temos que

$$\| F(J) - F(I) \| \leq \varepsilon.$$

Se $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ é contínua em cada $J \in \mathfrak{I}_R$, então dizemos que F é uma **função contínua de intervalos** ou simplesmente **função contínua** e escrevemos $F \in \mathcal{C}^A(\mathfrak{I}_R, X)$. No caso de uma função de pontos $f: R \rightarrow X$ tratamos da definição usual de continuidade e escrevemos $f \in \mathcal{C}(R, X)$. No caso de F ser contínua em todo $J \in \mathfrak{I}_R$ tal que $J \subset \text{int}(R)$, onde $\text{int}(A)$ denota o interior de um conjunto A , vamos escrever $F \in \mathcal{C}^A(\mathfrak{I}_{\text{int}(R)}, X)$. Temos então

2.3 Teorema *Sejam $f \in K(R, X)$ e F sua integral indefinida. Então $F \in \mathcal{C}^A(\mathfrak{I}_{\text{int}(R)}, X)$. Se além disso $f \in H(R, X)$, então $F \in \mathcal{C}^A(\mathfrak{I}_R, X)$.*

Prova (para a primeira parte, veja [K], Th. 2.5; a segunda parte segue do Teorema 2.6 a seguir e do Lema A.4 do Apêndice).

Nós dizemos que uma função f aditiva de intervalos e a valores em um espaço de Banach X , $f \in A(\mathfrak{I}_R, X)$, satisfaz a **Condição Forte de Lusin** (escrevemos $F \in \text{SL}(\mathfrak{I}_R, X)$) se dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset R$ com $m(A) = 0$, existe um gauge δ de A tal que

$$\sum_i \| F(J_i) \| < \varepsilon,$$

qualquer que seja $d = (\xi_i, J_i) \in \text{TPD}_R$ δ -fina com $\xi_i \in A$ para todo i . Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $\text{SL}(\mathfrak{I}_R)$. É verdadeira a afirmação de que $\text{SL}(\mathfrak{I}_R, X) \subset \mathcal{C}^\lambda(\mathfrak{I}_R, X)$ (veja a Proposição A.1 do Apêndice A).

2.4 Teorema (veja [F-3]) *Sejam $\alpha \in \text{SL}(\mathfrak{I}_R, L(X, Y))$ e $f: R \rightarrow X$ com $f = 0$ m-q.s. Então $f \in H^\alpha(R, L(X, Y))$ e $\tilde{f}^\alpha = 0$.*

Seja $I^\alpha(R, X)$ um dos espaços $K^\alpha(R, X)$ ou $H^\alpha(R, X)$. Então,

2.5 Corolário *Se $\alpha \in \text{SL}(\mathfrak{I}_R, L(X, Y))$, $f \in I^\alpha(R, X)$ e $h: [a, b] \rightarrow X$ é tal que $h = f$ m-q.s, temos que $h \in I^\alpha(R, X)$ com $\tilde{h}^\alpha = \tilde{f}^\alpha$.*

Concluimos então que a integral vetorial de Kurzweil ou de Henstock é invariante sobre conjuntos de m-medida nula, se a função com respeito a qual devemos integrar satisfaz a Condição Forte de Lusin.

2.6 Teorema (veja [F-3]) *Se $\alpha \in \text{SL}(\mathfrak{I}_R, L(X, Y))$ e $f \in H^\alpha(R, L(X, Y))$, então $\tilde{f}^\alpha \in \text{SL}(\mathfrak{I}_R, Y)$.*

2.1 Propriedades adicionais da integral multidimensional de Henstock

Dentre as integrais multidimensionais não-regulares que definimos destaca-se, por suas qualidades, a integral de Henstock. Para esta integral são verdadeiros os resultados que vêm a seguir.

2.7 Teorema *Se $f \in H(R, X)$ e F é a sua integral indefinida, então*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{F(Q(\xi, r))}{|Q(\xi, r)|} = f(\xi),$$

para m-quase todo $\xi \in R$, onde $Q(\xi, r)$ denota o quadrado de centro ξ e raio $r > 0$.

Prova (análoga ao caso a valores reais - veja [K], Teor. 2.5 e aplique a segunda parte do Teorema 2.3 acima).

Segue do Teorema 2.7 que

2.8 Corolário *Toda $f \in H(R, X)$ é m -mensurável.*

Prova Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\xi \in R$, seja $h_n(\xi) = \frac{F(Q(\xi, \frac{1}{n}))}{|Q(\xi, \frac{1}{n})|}$. Pela continuidade de F em R (Teorema 2.3), segue que cada função h_n é contínua (veja a Observação 1.3) e portanto mensurável. Além disso, pelo Teorema 2.7 $h_n \rightarrow f$ m -qs em R . Logo, f é o limite m -quase sempre de funções mensuráveis sendo, consequentemente, mensurável. ■

Também é válido o

2.9 Teorema *Se $f \in H(R, X)$, então existe uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos fechados X_n tal que $X_n \uparrow R$ (i.e., $X_n \subset X_{n+1}$ e $\cup X_n = R$) e f é Bochner-Lebesgue integrável (com integral finita) em cada X_n . Além disso,*

$$\sup_{J \in \mathfrak{I}(R)} \left\| \int_{X_n \cap J} f - \int_J f \right\| < \frac{I}{n}.$$

Prova (para a demonstração da primeira parte, basta adaptarmos a demonstração de [Ge], Th. 2.10 para o caso a valores em espaços de Banach quando, então, deve-se usar o Corolário 2.8; para a segunda parte, basta adaptarmos a demonstração de [Y], Th. 6 para o caso a valores em espaços de Banach).

3. Teoremas de existência

Definimos a variação $V(f)$ de uma função $f \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ (i.e., f é aditiva de

intervalos) como sendo o menor $p \in [0, \infty]$ tal que para qualquer divisão (J_i) de R , temos

$$\sum_i \|f(J_i)\| < p.$$

Se $V(f) < \infty$, então nós dizemos que f é de **variação limitada** e escrevemos $f \in \mathbf{BV}(\mathfrak{T}_R, X)$.

Se $f \in \mathbf{BV}(\mathfrak{T}_R, X)$ e f se anula no intervalo degenerado $[a, a]$, então $f \in \mathbf{BV}_0(\mathfrak{T}_R, X)$. De maneira análoga define-se a variação de f num subintervalo fechado J de R (i.e., $J \in \mathfrak{T}_R$) a qual denotamos por $V_J(f)$. A partir de então, estende-se facilmente o conceito de variação para reuniões finitas de elementos de $\mathfrak{T}_R$ cujos interiores são dois a dois disjuntos.

De maneira análoga à definição unidimensional, definimos agora a semivariação de uma função bidimensional aditiva de intervalos. A **semivariação** $SV(\alpha)$ de uma função $\alpha \in A(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$ é o menor $p \in [0, \infty]$ tal que para toda divisão $d = (J_i)$ de R ,

$$\left\| \sum_i \alpha(J_i) x_i \right\| \leq p \sup_i \{\|x_i\|\}, \quad x_i \in X.$$

Se $SV(\alpha) < \infty$, então dizemos que α é de **semivariação limitada** e escrevemos $\alpha \in \mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$. Se $\alpha \in \mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$ e $\alpha([a, a]) = 0$, então $\alpha \in \mathbf{SV}_0(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$. À semivariação de α num intervalo $J \in \mathfrak{T}_R$, denotamos $SV_J(\alpha)$. Pode-se, também, definir a semivariação em reuniões finitas de elementos de $\mathfrak{T}_R$ cujos interiores são dois a dois disjuntos.

É de verificação simples a proposição seguinte.

3.1 Proposição

- i) $\alpha \in \mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$ é limitada com $\|\alpha(J)\| \leq SV_J(\alpha)$, para todo $J \in \mathfrak{T}_R$;
- ii) $\mathbf{BV}(\mathfrak{T}_R, L(X, Y)) \subset \mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, IR))$;
- iii) $\mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, IR)) = \mathbf{BV}(\mathfrak{T}_R, X')$.

Feitas estas considerações sobre variação e semivariação de funções multidimensionais, seguem resultados sobre a existência de determinadas integrais.

3.2 Teorema Se $\alpha \in \mathbf{SV}(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$ e $f \in \mathcal{E}(R, X)$, então existe a integral de Riemann-

Stieltjes

$$\int_R d\alpha f = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_i \alpha(J_i) \cdot f(\xi_i),$$

onde $\Delta d = \max\{|J_i|; i = 1, 2, \dots, d\}$.

Prova (a demonstração a seguir segue a rotina do caso unidimensional - veja [H-1]).

Analogamente, prova-se que

3.3 Teorema Se $\alpha \in \mathcal{E}(R, L(X, Y))$ e $f \in BV(\mathfrak{T}_R, X)$, então existe a integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_R \alpha df = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot f(J_i).$$

3.4 Teorema Seja $f \in H(R, X)$. Então $f \in \mathcal{L}_1(R, X)$ se e só se $F \in BV(\mathfrak{T}_R, X)$, onde F denota a integral indefinida de f . Neste caso, $V(F) = \|f\|_1$, onde $\|f\|_1 = \int_R \|f(\cdot)\|$.

Prova (análoga ao caso unidimensional - veja [H-8], 9).

Agora podemos provar o seguinte resultado:

3.5 Teorema Sejam $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X, Y))$, A a integral indefinida de α , e $f \in \mathcal{E}(R, X)$. Então $\alpha f \in \mathcal{L}_1(R, Y)$ com $\int_R \alpha \cdot f = \int_R dA f$.

Prova Primeiramente, como $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X, Y))$, então $M \cdot \alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X, Y))$, para todo $M \in \mathbb{R}$. Portanto, a função $M \cdot \|\alpha(\cdot)\|: R \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável.

Pelo fato de que $f \in \mathcal{E}(R, X)$, então existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$. Além disso, a função $\|\alpha(\cdot) \cdot f(\cdot)\|: R \rightarrow \mathbb{R}$ é m-mensurável e $\|\alpha \cdot f\| \leq M \cdot \|\alpha\|$. Daí, segue do fato de $\mathcal{L}_1(R, \mathbb{R})$ ser um reticulado que $\|\alpha \cdot f\| \in \mathcal{L}_1(R, \mathbb{R})$. Logo, $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}_1(R, Y) \subset K(R, Y)$. Resta, então, provar a igualdade.

Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X, Y)) \subset H(R, L(X, Y))$. Então, existe um gauge δ_1 de R tal que para toda $d = (\zeta_j, I_j) \in TD_R \delta_1$ -fina, temos que

$$\sum_j \|\alpha(\zeta_j) I_j - A(I_j)\| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema 3.4, $A \in BV(\mathfrak{T}_R, Y)$ e daí, pelo Teorema 3.2, existe a integral de Riemann-Stieltjes $\int_R dA f$. Logo, existe um gauge constante δ_2 de R tal que para toda $d = (\rho_k, K_k) \in TD_R \delta_2$ -fina, temos que

$$\left\| \sum_k A(K_k) \cdot f(\rho_k) - \int_R dA f \right\| < \varepsilon.$$

Agora, definindo um gauge δ de R por $\delta(\xi) \leq \delta_s(\xi)$, $s = 1, 2$, para todo $\xi \in R$, e tomando $d = (\xi_i, J_i) \in TD_R \delta$ -fina, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) J_i - \int_R dA f \right\| &\leq \sum_i \|\alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) J_i - A(J_i) f(\xi_i)\| + \\ &+ \left\| \sum_i A(J_i) f(\xi_i) - \int_R dA f \right\| < \varepsilon \|f\|_\infty + \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Dada uma função $\alpha: R \rightarrow L(X, Y)$, sejam $I^\alpha(R, L(X, Y))$ e $I(R, X)$ respectivamente os espaços $K^\alpha(R, L(X, Y))$ e $K(R, X)$ ou os espaços $H^\alpha(R, L(X, Y))$ e $H(R, X)$ e denotemos por $\int_R d\alpha f$ e por $\int_R f$ as integrais de $f \in I^\alpha(R, L(X, Y))$ e $f \in I(R, X)$ respectivamente. Então, segue imediatamente das definições que

3.6 Teorema Se $\alpha \in I(R, L(X, Y))$ e $f \in I^1(R, X)$, onde A denota a integral indefinida de α , então $\alpha f \in I(R, Y)$ com $\int_R \alpha \cdot f = \int_R dA f$.

Com a notação de teorema temos que

3.7 Corolário Se $\alpha \in I(R, L(X, Y))$, $A \in SV(\mathfrak{T}_R, L(X, Y))$, onde A é a integral indefinida de α ,

$e f \in \mathcal{Z}(R, X)$, então $\alpha f \in I(R, Y)$ com $\int_R^* \alpha \cdot f = \int_R dA f$.

Prova (segue diretamente usando o Teorema 3.2).

Observação final

Os resultados deste capítulo são generalizações dos resultados unidimensionais correspondentes. Em outras palavras, os resultados que são válidos para uma determinada integral multidimensional de gauge também valem no respectivo caso unidimensional.

Parte B:

Resultados

Capítulo 3:

Estudo da equação de Fredholm

$$x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

quando x e f são funções gauge integráveis

Em 1989, C. S. Hönig provou que o espaço das classes de equivalência das funções Kurzweil integráveis a valores em espaços de Banach, $\mathbf{K}([a,b],X)$, munido da norma de Alexiewicz, $\|\cdot\|_A$, não é completo (veja [H-5], Teor. 2.4). De igual modo, $\mathbf{H}([a,b],X)$ (veja índice de notações) não é completo. Por conseguinte, o estudo da existência de soluções de equações em tais espaços não pode fazer uso dos Teoremas do Ponto Fixo usuais, uma vez que estes requerem certa completitude dos espaços em questão. Deste modo, ao pesquisarmos as equações integrais lineares de segunda ordem de Fredholm-Kurzweil

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e, em particular, de Volterra-Kurzweil

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

vamos contornar o obstáculo da não-completitude do espaço das funções Kurzweil (ou Henstock) integráveis considerando as idéias devidas a Hönig (consulte [H-6]) de

- 1) transformar tais equações respectivamente em equações integrais lineares de Fredholm e de Volterra com respeito à integral de Riemann-Stieltjes;
- 2) com o auxílio de isometrias sobrejetoras, obter resultados sobre existência e unicidade de soluções para as equações originais.

O resultado de Hönig para a equação (V) trata da existência e unicidade de uma solução Kurzweil integrável dizendo que:

A) dada uma função Kurzweil integrável $f: [a,b] \rightarrow X$ a equação (V) tem uma e somente uma solução Kurzweil integrável x_f com resolvente dado por séries de Neumann.

Para a equação (F), entretanto, o resultado obtido por Hönig trata de dar uma solução explícita, supondo-se de antemão a existência e unicidade de uma solução Kurzweil integrável:

B) se $f: [a,b] \rightarrow X$ é função Kurzweil integrável tal que existe uma e somente uma solução Kurzweil integrável x_f , então a função $f \mapsto x_f$ é bicontínua e a equação (F) tem resolvente com representação integral similar.

Neste capítulo, vamos estabelecer o resultado que faltava sobre a existência e

unicidade de uma solução Kurzweil integrável para a equação (F). Para isto, respondemos afirmativamente a uma conjectura feita por Hönig em 1978 e que implica na Alternativa de Fredholm para integral de Riemann-Stieltjes (veja [H-4]). A partir daí, obtemos o que chamamos a “Alternativa de Fredholm para a equação integral linear de Kurzweil”:

C) dada uma função Kurzweil integrável $f: [a,b] \rightarrow X$, ou a equação (F) tem uma e somente uma solução cujo resolvente tem representação integral similar, ou a correspondente equação homogênea

$$(F_o) \quad u(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot u(s) ds = 0, \quad t \in [a,b],$$

admite soluções não triviais. Neste caso, também determinamos condições para a existência de soluções para a equação (F) (veja o Teorema 2.3 adiante).

A primeira seção deste capítulo consiste dos resultados necessários às demonstrações dos principais teoremas. Na Seção 2, apresentamos a Alternativa de Fredholm para a integral de Kurzweil e outras.

1. Pré-requisitos

Dada uma função $K: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X,Y)$, escrevemos $K(t,s) = K^t(s) = K_s(t)$. Se K satisfaz as condições C^σ e $(SV_a)^u$ abaixo:

- C^σ : para cada $s \in [a,b]$ e cada $x \in X$, é contínua a função

$$t \in [a,b] \mapsto K_s(t) \cdot x \in Y;$$

- $(SV)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $K^t \in SV([a,b], L(X,Y))$ e $SV^u(K) = \sup_{t \in [c,d]} \{SV(K^t)\} < \infty$;

então escrevemos $K \in C^\sigma \times (SV)^u$. Se além disso tivermos $K^t(a) = 0$, para todo $t \in [c,d]$, então $K \in C^\sigma \times (SV_a)^u$. Quando tomamos a variação em lugar da semivariação, escrevemos $K \in C^\sigma \times (BV)^u$ e $K \in C^\sigma \times (BV_a)^u$ ao invés de $K \in C^\sigma \times (SV)^u$ e $K \in C^\sigma \times (SV_a)^u$ respectivamente.

1.1 Teorema (Bray - veja [Br], ou [H-2], Teor. II.1.1) *Sejam $\alpha \in SV([c,d],L(Y,Z))$, $K \in C^\sigma \times (SV)^u$, $f \in \mathcal{E}([a,b],X)$, $(F_\alpha K)(t) = \int_{[a,b]} d\alpha(t) \circ K(t,s)$ e $(F_K f)(t) = \int_{[a,b]} d_s K(t,s) f(s)$. Então $F_\alpha K \in SV([a,b],L(X,Z))$ e $F_K f \in \mathcal{E}([c,d],Y)$.*

Seja $BV^+([a,b],X)$ o conjunto das funções $h \in BV([a,b],X)$ contínuas à direita e seja $BV^+_b([a,b],X) = \{h \in BV^+([a,b],X); h(b) = 0\}$.

Aplicando o Teorema 1.1 e o Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1 do Capítulo 1), podemos responder afirmativamente à conjectura feita por Hönig (veja [H-4], Observação depois do Teor. 9°). Formalmente temos o

1.2 Teorema *Seja $K \in C^\sigma \times (SV_a)^u$ tal que para todo $t \in [c,d]$ e todo $y' \in Y'$, a função*

$$s \in]a,b[\mapsto (K(t,s))^* y' \in X'$$

é contínua à direita, onde $(K(t,s))^$ denota o operador transposto de $K(t,s)$, e seja $(F_K f)(t) = \int_{[a,b]} d_s K(t,s) f(s)$, onde $f \in \mathcal{E}([a,b],X)$. Então $F_K \in L(\mathcal{E}([a,b],X), \mathcal{E}([c,d],Y))$ e o operador transposto $(F_K)^* \in L(BV^+_c([c,d],Y'), BV^+_a([a,b],X'))$ é dado por $((F_K)^* y)(s) = \int_{[c,d]} K(t,s)^* dy(t)$, para todo $s \in [a,t]$ e todo $y \in BV^+_c([c,d],Y')$.*

Prova Sejam $y \in BV^+_c([c,d],Y')$ e $(\tilde{F}_{K*} y)(s) = \int_{[c,d]} K(t,s)^* dy(t)$. Então $(\tilde{F}_{K*} y)(s) = (F_y K)(s)$, pois $\int_{[c,d]} K(t,s)^* dy(t) = \int_{[c,d]} dy(t) \circ K(t,s)$. Pelo Teorema 1.1, $\tilde{F}_{K*} y \in SV([a,b],L(X,IR)) = BV([a,b],X')$ e, portanto, $\tilde{F}_{K*} \in L(BV^+_c([c,d],Y'), BV_a([a,b],X'))$. Logo, basta provar que para todo $y \in BV^+_c([c,d],Y')$ e todo subintervalo suficientemente pequeno $[t_0, t_0+\rho]$ de $[c,d]$, temos que

$$\lim_{s \downarrow s_0} \int_{[t_0, t_0+\rho]} K(t,s)^* dy(t) = \int_{[t_0, t_0+\rho]} K(t,s_0)^* dy(t), \text{ onde } s_0 \in]a,b[.$$

Sejam $s_0 \in]a,b[$ e $s \in]s_0,b[$. Sejam, também, $\varepsilon > 0$ e δ o gauge constante de $[a,b]$ da definição de $[K(\cdot,s)^* - K(\cdot,s_0)^*] \in R_y([c,d],L(X,Y))$. Sejam $t_0 \in [c,d]$ e $0 < \rho < \delta/2$. Então $(t_0, [t_0, t_0+\rho])$ é uma divisão parcial marcada de $[c,d]$ δ -fina e portanto,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_0}^{t_0+\rho} K(t,s)^* dy(t) - \int_{t_0}^{t_0+\rho} K(t,s_0)^* dy(t) \right\| \leq \\
& \leq \left\| \int_{t_0}^{t_0+\rho} [K(t,s)^* - K(t,s_0)^*] dy(t) - [K(t_0,s)^* - K(t_0,s_0)^*] \cdot [y(t_0+\rho) - y(t_0)] \right\| + \\
& + \left\| [K(t_0,s)^* - K(t_0,s_0)^*] \cdot [y(t_0+\rho) - y(t_0)] \right\|,
\end{aligned}$$

onde o primeiro somando é menor que ε pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1 do Capítulo 1) e o segundo somando tende para zero quando $s \downarrow s_0$, pela continuidade à direita de $K(t_0, \cdot)^* \cdot [y(t_0+\rho) - y(t_0)]$. ■

Seja $\mathfrak{K}(X,Y)$ o subespaço de $L(X,Y)$ dos operadores lineares compactos e seja $\mathfrak{K}(X) = \mathfrak{K}(X,X)$. De acordo com [H-4], Observação depois do Teor. 15, é verdadeiro o seguinte

1.3 Teorema (veja [H-4], Teoremas 15', 15'' e 15 e as observações que os seguem; veja também [H-4], Apêndice 1 para uma prova geral) *Seja $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X)$ tal que $K \in C^\sigma \times (SV_a)^u$ e, para todo $t \in [a,b]$ e todo $y' \in Y'$, a função*

$$s \in]a,b[\mapsto (K(t,s))^* y' \in X'$$

é contínua à direita, onde $(K(t,s))^$ denota o operador transposto de $K(t,s)$. Suponhamos também que a função*

$$K^\square: t \in [a,b] \mapsto K^t \in SV_a([a,b], L(X,Y))$$

pertence à $\mathcal{E}([a,b], SV_a([a,b], \mathfrak{K}(X)))$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, consideramos as seguintes equações integrais:

$$(I) \quad \lambda x(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) x(s) = f(t), \quad t \in [a,b];$$

$$(I_o) \quad \lambda u(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) u(s) = 0, \quad t \in [a,b];$$

$$(I^*) \quad \lambda y(s) - \int_{[a,b]} K(t,s)^* dy(t) = g(s), \quad s \in [a,b];$$

$$(I_o^*) \quad \lambda z(s) - \int_{[a,b]} K(t,s)^* dz(t) = 0, \quad s \in [a,b];$$

Então temos a Alternativa de Fredholm: ou dada $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$, a equação (1) admite uma e somente uma solução e o mesmo se aplica à equação (1^*) , ou (1_0) admite soluções não triviais e o mesmo se aplica à equação (1^*_0) . No segundo caso, (1) (respectivamente (1^*)) admite uma solução se e somente se $\int_{[a,b]} f(t) dz(t) = 0$ (resp. $\int_{[a,b]} u(t) dg(t) = 0$) para toda solução z de (1^*_0) (resp. u de (1_0)) e o espaço vetorial das soluções de (1_0) tem dimensão finita igual àquela do espaço vetorial das soluções de (1^*_0) , a qual é igual a codimensão de $(\lambda I - F_K)\mathcal{C}([a,b],X)$ em $\mathcal{C}([a,b],X)$ e a codimensão de $(\lambda I - (F_K)^*)BV_b^+([a,b],X')$ em $BV_b^+([a,b],X')$.

Denotamos por $G([a,b],X)$ o espaço de Banach munido da norma do sup de todas as funções $f: [a,b] \rightarrow X$ que são regradas (i.e., para todo $t \in [a,b[$, existem $f(t+) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(t+\varepsilon)$ e, para todo $t \in]a,b]$, existe $f(t-) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(t-\varepsilon)$).

Dadas uma função $f: [a,b] \rightarrow X$ e uma divisão $d = (t_i)$ de $[a,b]$ definimos

$$\omega_i^*(f) = \sup\{\|f(t) - f(s)\|; t, s \in]t_{i-1}, t_i[\} \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, |d|,$$

e

$$\omega_d^*(f) = \sup\{\omega_i^*(f); i = 1, 2, \dots, |d|\},$$

e dizemos que $E \subset G([a,b],X)$ é um conjunto equiregrado se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma divisão d de $[a,b]$ tal que para toda função $f \in E$, temos que $\omega_d^*(f) < \varepsilon$.

1.4 Observação É de fácil verificação que

i) $\mathcal{C}([a,b],X) \subset G([a,b],X)$;

ii) $E \subset \mathcal{C}([a,b],X)$ é equiregrado se e somente se E é equicontínuo.

Um subconjunto A de X é dito relativamente compacto se $cl(A)$ é compacto, onde $cl(A)$ denota o fecho de A em X .

1.5 Lema (veja [H-4], Teor. 4 d)) Sejam $\alpha \in SV([a,b],L(X,Y))$, $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$ e $F_\alpha(f) = \int_{[a,b]} d\alpha f$. Então F_α leva subconjuntos limitados e equiregrados de $\mathcal{C}([a,b],X)$ em

subconjuntos relativamente compactos de Y se e só se $\alpha(t) \in \mathcal{K}(X, Y)$, para todo $t \in [a, b]$.

Como consequência obtemos o

1.6 Lema *Sejam $K \in C^\sigma \times (SV_a^+)^u$, $f \in \mathcal{E}([a, b], X)$ e $(F_K f)(t) = \int_{[a, b]} d_s K(t, s) f(s)$. Se para todo subconjunto limitado e equiregrado E de $\mathcal{E}([a, b], X)$, o subconjunto $(F_K E)(t)$ de Y é relativamente compacto para cada $t \in [c, d]$, então $K(t, s) \in \mathcal{K}(X, Y)$, para todo $(t, s) \in [c, d] \times [a, b]$.*

Se $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, então para todo $t \in [a, b]$ existe um e somente um elemento $\alpha(t^+) \in L(X, Y'')$ tal que para cada $x \in X$ e cada $y' \in Y'$,

$$(*) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle \alpha(t + \varepsilon) \cdot x, y' \rangle = \langle \alpha(t^+) \cdot x, y' \rangle$$

(veja [H-2], Corolário depois da Prop. I.3.6). Dada uma função $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, escrevemos $\alpha^+(a) = \alpha(a)$ e $\alpha^+(t) = \alpha(t^+)$ para $t \in]a, b[$. A função α^+ assim definida é de semivariação limitada e, se $\alpha(a^+) = \alpha(a)$, então escrevemos $\alpha^+ \in SV^+([a, b], L(X, Y''))$. Se além disso, $\alpha^+(b) = 0$, escrevemos $\alpha^+ \in SV_b^+([a, b], L(X, Y''))$.

Dada uma função $\alpha: [c, d] \times [a, b] \rightarrow L(X, Y'')$, escrevemos $\alpha(t, s) = \alpha^t(s) = \alpha_s(t)$. Se α satisfaz as condições $\tilde{C}^\sigma$ e $(SV_b^+)^u$ abaixo

▫ $\tilde{C}^\sigma$: para cada $s \in [a, b]$ e cada $x \in X$, é contínua a função

$$t \in [c, d] \mapsto \int_{[a, s]} \alpha(t, \sigma) \cdot x \, d\sigma;$$

▫ $(SV_b^+)^u$: para cada $t \in [c, d]$, $\alpha^t \in SV_b^+([a, b], L(X, Y''))$ e $SV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c, d]} \{SV(\alpha^t)\} < \infty$;

então escrevemos $\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (SV_b^+)^u$ e, quando consideramos a variação em lugar da semivariação, então escrevemos $\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (BV_b^+)^u$.

1.7 Teorema *Dada $\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (BV_b^+)^u$ tal que para todo $t \in [c, d]$ e todo $x \in X$, $\alpha^t(a) \in L(X, Y)$ e $\int_{[c, t]} \alpha(\sigma, x) \, d\sigma \in Y$, seja $K: [c, d] \times [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ uma função tal que $K(t, s) \cdot x =$*

$= \int_{[a,s]} \alpha(t, \rho) \cdot x d\rho$, para todo $x \in X$. Então $K \in C^\sigma([c,d], L(X, Y))$ e, para todo $t \in [c,d]$ e todo $y' \in Y'$, a função

$$s \in [a,b] \mapsto (K(t,s))^* y' \in X'$$

é contínua, onde $(K(t,s))^*$ denota o operador transposto de $K(t,s)$. Além disso,

$$\int_{[a,b]} d_s K(t,s) y(s) = \int_{[a,b]} \alpha'(s) \cdot y(s) ds,$$

para todo $y \in \mathcal{E}([a,b], X)$ e todo $t \in [c,d]$. Supondo ainda mais que para todo $t \in [c,d]$, $\alpha' \in SV([a,b], \mathcal{K}(X, Y))$, então a função

$$K^\square: t \in [c,d] \mapsto K^t \in SV_a([a,b], L(X, Y))$$

pertence à $\mathcal{E}([c,d], SV_a([a,b], \mathcal{K}(X, Y)))$.

Prova Seja $s \in [a,b]$. Como $\alpha_s \in \tilde{C}^\sigma([c,d], L(X, Y))$, então $K_s \in C^\sigma([c,d], L(X, Y))$, para cada $s \in [a,b]$.

Seja $d = (s_i)$ uma divisão de $[a,b]$. Então, para cada $t \in [c,d]$ temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i [K^t(s_i) - K^t(s_{i-1})] \cdot x_i \right\| &= \left\| \sum_i \left[\int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t, \rho) \cdot x_i d\rho \right] \right\| = \left\| \int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t, \rho) \cdot x_i d\rho \right\| \leq \\ &\leq V(\alpha^t) \|x_i\| (b - a), \end{aligned}$$

onde cada $x_i \in X$ e, segue que $K^t \in SV_a([a,b], L(X, Y))$.

Para cada $t \in [c,d]$ e cada $x \in X$, $K^t(\cdot) \cdot x$ é contínua em $[a,b]$, pois é uma integral indefinida (veja a Proposição 2.8 do Capítulo 1). Assim, dados $t \in [c,d]$ e $y' \in Y'$, $(K^t(\cdot))^* \cdot y'$ é contínua em $[a,b]$.

$K^\square \in \mathcal{E}([c,d], SV_a([a,b], L(X, Y)))$. De fato. Sejam $t_0 \in [c,d]$ e $d = (s_i)$ uma divisão de $[a,b]$. Então,

$$\begin{aligned} \|K^t - K^{t_0}\| &= SV(K^t - K^{t_0}) = \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \sum_i [(K^t - K^{t_0})(s_i) - (K^t - K^{t_0})(s_{i-1})] \cdot x \right\| = \\ &= \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \sum_i \left[\int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t, \rho) \cdot x d\rho - \int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t_0, \rho) \cdot x d\rho \right] \right\| = \end{aligned}$$

$$= \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \int_{[a,b]} \alpha(t, \rho) \cdot x d\rho - \int_{[a,b]} \alpha(t_0, \rho) \cdot x d\rho \right\| = \sup_{d, \|x\| \leq 1} \|K(t, b) \cdot x - K(t_0, b) \cdot x\| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow t_0$, pois $K_s \in C^\sigma([c,d], L(X,Y))$ para cada $s \in [a,b]$ e, em particular, $K_b \in C^\sigma([c,d], L(X,Y))$.

Sejam $y \in \mathcal{C}([a,b], X)$, $t \in [c,d]$ e $\beta = \tilde{y}$. Pelo Corolário 2.13 do Capítulo 1, $\alpha' \cdot y$ é Riemann integrável e

$$(1) \quad \int_{[a,b]} \alpha'(s) \cdot y(s) ds = \int_{[a,b]} \alpha'(s) d\beta(s) = - \int_{[a,b]} d_s(\alpha'(s)) \beta(s),$$

onde usamos o Teorema 2.11 do Capítulo 1 para obtermos a última igualdade. Ainda pelo Teorema 2.11 do Capítulo 1, a integral de Riemann-Stieltjes, $\int_{[a,b]} d_s K(t,s) \cdot y(s)$, existe para cada t , pois $K' \in SV([a,b], L(X,Y))$ e $y \in \mathcal{C}([a,b], X)$.

Agora, como $\alpha'(\cdot) \cdot x \in H([a,b], Y)$ (veja o Teorema 2.15 do Capítulo 1) e $K(t,s) \cdot x = \int_{[a,s]} \alpha'(\rho) \cdot x d\rho$, para cada $x \in X$ e cada $(t,s) \in [c,d] \times [a,b]$, então, segue do Teorema 2.4 do Capítulo 1, que existe $d_s(K(t,s) \cdot x) = d_s \int_{[a,s]} \alpha'(\rho) \cdot x d\rho$ com $d_s \int_{[a,s]} \alpha'(\rho) \cdot x d\rho = \alpha'(s) \cdot x$ para m -quase todo $s \in [a,b]$. Logo, para cada $x \in X$ e cada $t \in [c,d]$, $\int_{[a,b]} d_s K(t,s) \cdot x = \int_{[a,b]} \alpha'(s) \cdot x ds$, uma vez que a integral de Kurzweil e, em particular, a integral de Riemann, é invariante sob conjuntos de m -medida nula. Segue, portanto, que

$$(2) \quad \int_{[a,b]} d_s K(t,s) g(s) = \int_{[a,b]} \alpha'(s) \cdot g(s) ds,$$

para toda função escada $g: [a,b] \rightarrow X$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como toda função contínua pode ser aproximada na norma do sup por uma função escada, tomamos uma função escada $g: [a,b] \rightarrow X$ tal que $\|g - y\| < \varepsilon/N$, onde $N = \max\{SV(K'), V(\alpha')\}$.

Sejam δ_1 e δ_2 gauges constantes de $[a,b]$ das definições das integrais

$$\int_{[a,b]} d_s K(t,s) [y(s) - g(s)] \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot [y(s) - g(s)] ds$$

respectivamente. Definamos $\delta = \min\{\delta_i; i = 1, 2\}$ e seja $d = (\xi_i, s_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina. Então,

$$\left\| \int_{[a,b]} d_s K(t,s) y(s) - \int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot y(s) ds \right\| \leq \left\| \int_{[a,b]} d_s K(t,s) [y(s) - g(s)] \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{[a,b]} d_s K(t,s) g(s) - \int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot g(s) ds \right\| + \left\| \int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot [g(s) - y(s)] ds \right\|,$$

onde o segundo somando é igual a zero por (2), o primeiro somando é menor que

$$\left\| \int_{[a,b]} d_s K(t,s) [y(s) - g(s)] - \sum_i [K(t, s_i) - K(t, s_{i-1})] \cdot [y(\xi_i) - g(\xi_i)] \right\| + \\ + \left\| \sum_i [K(t, s_i) - K(t, s_{i-1})] \cdot [y(\xi_i) - g(\xi_i)] \right\| \leq \varepsilon + SV(K') \|y - g\| < 2\varepsilon,$$

e o terceiro somando é menor que $V(\alpha') \|g - y\| < \varepsilon$. Portanto, temos que

$$(3) \quad \int_{[a,b]} d_s K(t,s) y(s) = \int_{[a,b]} \alpha'(s) \cdot y(s) ds,$$

para qualquer função $y \in \mathcal{C}([a,b], X)$. E daí, segue de (1) que

$$(4) \quad \int_{[a,b]} d_s K(t,s) y(s) = - \int_{[a,b]} d_s (\alpha'(s)) \tilde{y}(s).$$

Vamos, agora, provar que $K(t,s) \in \mathcal{K}(X, Y)$, para todo par $(t,s) \in [c,d] \times [a,b]$. Dado $y \in \mathcal{C}([a,b], X)$, definimos

$$(F_K y)(t) = \int_{[a,b]} d_s K(t,s) y(s) \quad \text{e} \quad F_{\alpha'}(y) = \int_{[a,b]} d_s (\alpha'(s)) y(s).$$

Seja $E \subset \mathcal{C}([a,b], X)$ equiregrado e limitado. Então existe $M > 0$ tal que $\|y\| < M$ para todo $y \in E$. Seja $A = \{\tilde{y} ; y \in E\} \subset \mathcal{C}([a,b], X)$. Então A é equiregrado. De fato. Pela Observação 1.4, basta provarmos que A é equicontínuo o que é verdade: sejam $s \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$ e $\delta = \varepsilon/M > 0$, então para qualquer $\tilde{y} \in A$ e qualquer $r \in [a,b]$ com $0 < |s - r| < \delta$, temos que

$$\|\tilde{y}(s) - \tilde{y}(r)\| \leq \int_{[r,s]} \|y(p)\| dp < M |s - r| < \varepsilon.$$

Daí, conforme a equação (4) acima, temos que

$$(F_K E)(t) = \{(F_K y)(t); y \in E\} = \{-F_{\alpha'}(\tilde{y}); y \in E\},$$

para cada $t \in [c,d]$. Portanto, $(F_K E)(t) = -F_{\alpha'}(A)$ é relativamente compacto pelo Lema 1.5 e

finalmente, pelo Lema 1.6, segue que $K(t,s) \in \mathcal{K}(X, Y)$ para cada $(t,s) \in [c,d] \times [a,b]$. ■

2. A Alternativa de Fredholm e a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil

2.1 Teorema (veja [H-6], Teor. 2.6) *A aplicação*

$$\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (SV^+)_b \mapsto H_\alpha \in L(\mathbf{K}([a,b],X), \mathcal{E}([c,d],Y)),$$

onde $\alpha'(a) \in L(X,Y)$ para todo $t \in [c,d]$, $\int_{[c,t]} \alpha(t,\sigma) \cdot x \, d\sigma \in Y$ para todo $t \in [c,d]$ e todo $x \in X$, e $(H_\alpha(f))(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot f(s) \, ds$ para todo $t \in [c,d]$, é uma isometria (i.e., $\|H_\alpha\|_1 = \|SV^+(\alpha)\|$) sobrejetora. Além disso, para cada $s \in [a,b]$, cada $t \in [c,d]$ e cada $x \in X$, temos que $\int_{[a,s]}^K \alpha(t,\sigma) \cdot x \, d\sigma = (H_\alpha(\chi_{[a,s]}x))(t)$.

O próximo teorema é o resultado de Hönig para a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil.

2.2 Teorema (veja [H-6], Teor. 3.2) *Dado $H \in L(\mathbf{K}([a,b],X), \mathcal{E}([a,b],X))$, consideremos $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X,X'')$ o núcleo correspondente pelo Teorema 2.1 (i.e., $H = H_\alpha$). Suponhamos que H é tal que dado $f \in \mathbf{K}([a,b],X)$, a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil*

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) \, ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

(i.e., a equação $x - H(x) = f$) admite uma e somente uma solução $x_f \in \mathbf{K}([a,b],X)$. Então, existe um e somente um núcleo $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X,X'')$ com $\rho \in \tilde{C}^\sigma \times (SV^+)_b$, $\rho'(a) \in L(X)$ para todo $t \in [a,b]$, e $\int_{[c,t]} \rho(t,\sigma) \cdot x \, d\sigma \in Y$ para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, tal que dado $f \in \mathbf{K}([a,b],X)$,

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,b]}^K \rho(t,s) \cdot f(s) \, ds, \quad t \in [a,b]$$

Segue, agora, o principal resultado deste capítulo que diz respeito à existência de uma ou mais soluções para a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil.

2.3 Teorema *Seja $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X, X'')$ tal que $\alpha \in \tilde{C}^{\sigma} \times (BV^+_b)^u$ e tal que, para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, $\alpha'(a) \in L(X)$, $\int_{[a,t]} \alpha(t, \sigma) \cdot x \, d\sigma \in X$ e $\alpha' \in SV([a,b], \mathcal{Z}(X))$. Seja também $f \in \mathbf{K}([a,b], X)$ e consideremos a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil*

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t, s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]$$

e sua equação homogênea

$$(F_o) \quad u(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t, s) \cdot u(s) ds = 0, \quad t \in [a, b]$$

Consideremos também as equações integrais

$$(F^*) \quad y(s) - \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t, s) * dy(t) \right] ds = g(s), \quad s \in [a, b]$$

e

$$(F^*_o) \quad z(s) - \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t, s) * dz(t) \right] ds = 0, \quad s \in [a, b]$$

Então, ou

a) *dado $f \in \mathbf{K}([a,b], X)$, a equação (F) tem uma e somente uma solução $x_f \in \mathbf{K}([a,b], X)$ e existe um e somente um núcleo $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X, X'')$ com $\rho \in \tilde{C}^{\sigma} \times (SV^+_b)^u$, $\rho'(a) \in L(X)$ para todo $t \in [a,b]$, e $\int_{[a,t]} \rho(t, \sigma) \cdot x \, d\sigma \in X$ para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, tal que dado $f \in \mathbf{K}([a,b], X)$,*

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,b]}^K \rho(t, s) \cdot f(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

e dado $g \in \mathcal{E}([a,b], X)$, a equação (F*) tem uma e somente uma solução $y_g \in \mathcal{E}([a,b], X)$;

ou

b) *as equações (F_o) e (F*_o) admitem soluções não triviais em $\mathbf{K}([a,b], X)$ e em $\mathcal{E}([a,b], X')$ respectivamente. Neste caso, a equação (F) (respectivamente a equação (F*)) admite solução se e somente se para toda solução $z \in \mathcal{E}([a,b], X')$ de (F*_o) (resp. para toda solução $u \in \mathbf{K}([a,b], X)$ de (F_o),*

$$\int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]}^K \alpha(t, s) \cdot f(s) ds \right] dz(t) = 0 \quad \left(\text{resp.} \quad \int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]}^K \alpha(t, s) \cdot u(s) ds \right] dg(t) = 0 \right).$$

Prova Sejam $v = x - f$ e $h(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot f(s) ds$. Então $v(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds$ e, pelo Teorema 2.1, segue que $h, v \in \mathcal{C}([a,b], X)$, já que $H_\alpha \in L(\mathbf{K}([a,b], X), \mathcal{C}([a,b], X))$ e que $h(t) = (H_\alpha(f))(t)$ e $v(t) = (H_\alpha(x))(t)$, com $f, x \in \mathbf{K}([a,b], X)$. Logo, a equação (F) é equivalente à equação

$$(F_1) \quad v(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot v(s) ds = h(t), \quad t \in [a, b]$$

Mas, de acordo com o Corolário 2.13 do Capítulo 1, a equação (F_1) é de fato

$$(F_1) \quad v(t) - \int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot v(s) ds = h(t), \quad t \in [a, b]$$

Seja $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X)$ tal que para cada $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ e cada $x \in X$, $K(t,s) \cdot x = \int_{[a,s]} \alpha^t(\rho) \cdot x d\rho$. Pelo Teorema 1.7, temos que

$$\int_{[a,b]} d_s K(t,s) v(s) = \int_{[a,b]} \alpha^t(s) \cdot v(s) ds,$$

e a equação (F_1) é equivalente à seguinte equação

$$(F_2) \quad v(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) v(s) = h(t), \quad t \in [a, b]$$

Ainda pelo Teorema 1.7 temos que $K \in C^\sigma \times (SV_a)^u$ e, para todo $t \in [a,b]$ e todo $y' \in X'$, a função

$$s \in]a,b[\mapsto (K(t,s))^* y' \in X'$$

é contínua à direita, onde $(K(t,s))^*$ denota o operador transposto de $K(t,s)$, e a função $K^- \in \mathcal{C}([a,b], SV_a([a,b], \mathcal{L}(X)))$, onde $K^\square(t) = K^t$. Portanto, pela Alternativa de Fredholm (Teorema 1.3), segue que ou

a_o) para todo $h \in \mathcal{C}_a([a,b], X)$, a equação (F_2) tem uma e somente uma solução $v_h \in \mathcal{C}_a([a,b], X)$ e, para todo $g \in \mathcal{C}_a([a,b], X')$, a equação

$$(F_2)^* \quad y(s) - \int_{[a,b]} K(t,s)^* dy(t) = g(s), \quad s \in [a, b]$$

tem uma e somente uma solução $y_g \in \mathcal{C}_a([a,b], X)$,

ou

b_o) as equações

$$(F_2)_o \quad r(t) - \int_{[a,b]} d_s K(t,s) r(s) = 0, \quad t \in [a,b]$$

e

$$(F_2)^*_o \quad z(s) - \int_{[a,b]} K(t,s) * dz(t) = 0, \quad s \in [a,b]$$

têm soluções não triviais e, neste caso, (F_2) (respectivamente $(F_2)^*$) tem solução se e somente se para toda solução $z \in \mathcal{C}_a([a,b], X')$ de $(F_2)^*_o$ (resp. para toda solução $r \in \mathcal{C}_a([a,b], X)$ de $(F_2)_o$), temos que $\int_{[a,b]} h(t) dz(t) = 0$ (resp. $\int_{[a,b]} r(t) dg(t) = 0$).

Agora, como $K(t,s) * x' = \int_{[a,s]} \alpha(t,\rho) * x' d\rho$ para cada $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ e cada $x' \in X'$, então é de fácil verificação que

$$\int_{[a,b]} K(t,s) * dy(t) = \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t,s) * dy(t) \right] ds$$

e o resultado segue.

A parte que falta para o item a) segue de imediato do Teorema 2.2. ■

2.4 Observação

- i) O Teorema 2.3 também vale para a integral de Henstock com $\mathbf{H}([a,b], X)$ em lugar de $\mathbf{K}([a,b], X)$.
- ii) Sejam $R^2([a,b], X)_A$ o espaço munido da norma de Alexiewicz das classes de equivalência das funções $f: [a,b] \rightarrow X$ que são Riemann impróprias integráveis com um número finito de singularidades, e $L_1([a,b], X)_A$ o espaço munido da norma de Alexiewicz das classes de equivalência das funções $f: [a,b] \rightarrow X$ que são Bochner-Lebesgue integráveis com integral finita. Então o Teorema 2.3 é verdadeiro para $R^2([a,b], X)_A$ ou para $L_1([a,b], X)_A$ ao invés de $\mathbf{K}([a,b], X)$.

Uma aplicação - Problema geral de valor de fronteira

É sabido que o problema geral de valor de fronteira dado por

$$(*) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + A(t) \frac{dx}{dt} + B(t)x = g(t), \quad x(a) = c_1, \quad x(b) = c_2$$

pode ser representado pela seguinte equação integral linear de Fredholm (veja [J])

$$(**) \quad x(t) - \int_{[a,b]} \alpha(t,s) x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde

$$f(t) = c_1 + \int_{[a,t]} (t-s)g(s)ds + \frac{t-a}{b-a} \left[c_2 - c_1 - \int_{[a,b]} (b-s)g(s)ds \right],$$

$$\alpha(t,s) = \frac{t-b}{b-a} \{A(s) - (a-s)[A'(s) - B(s)]\}, \quad \text{se } t > s \text{ e}$$

$$\alpha(t,s) = \frac{t-a}{b-a} \{A(s) - (b-s)[A'(s) - B(s)]\}, \quad \text{se } t < s.$$

Afirmamos que se g é Kurzweil-Henstock integrável, então f é contínua. De fato. Fixemos $t \in [a,b]$ e seja $h(s) = t - s$, para cada $s \in [a,b]$. Então h é contínua e de variação limitada em $[a,t]$. Por conseguinte, $h \cdot g$ é Kurzweil-Henstock integrável com

$$\int_{[a,t]}^K h(s)g(s)ds = \int_{[a,t]} d\tilde{h}(s)g(s),$$

para cada $t \in [a,b]$ (para uma demonstração deste fato, veja [F-2], Teor. 2.4, ou [F-1], Teor. 2.1.15). Além disso, pelo fato de $\tilde{h}$ ser contínua, então a função $\tilde{g}^{\tilde{h}}$ definida por

$$\tilde{g}^{\tilde{h}}(t) = \int_{[a,t]} d\tilde{h}(s)g(s) = \int_{[a,t]}^K d\tilde{h}(s)g(s)$$

também é contínua em $[a,b]$ (veja a Proposição 2.8 do Capítulo 1; veja também [F-1], Teor. 2.1.10 e o Corolário que o segue para uma prova deste fato). Portanto, f é uma função contínua. Assim, se g é Kurzweil-Henstock integrável, então f é contínua e, por conseguinte, Riemann integrável. Também temos que se as funções A, A', B pertencem a $BV_b^+([a,b])$, então $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\alpha \in \tilde{C}^{\sigma \times} (BV_b^+)^u$. Segue portanto do análogo do Teorema 2.3 para a integral de Riemann (vide Observação 2.4 ii)) que, dados $g \in K([a,b])$ e funções A, A' e $B \in BV_b^+([a,b])$, então ou $(**)$ tem solução única $x_f = x_g \in R^2([a,b], \mathbb{R})_A$ dada por

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,b]} \rho(t,s) f(s) ds, \quad t \in [a,b]$$

com núcleo único $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \in \tilde{C}^{\sigma \times} (BV_b^+)^u$, ou a equação integral

homogênea correspondente a (**) admite soluções não triviais. Neste último caso, (**) admite solução (não necessariamente única ou R^2 -integrável) se e somente se

$$\int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t,s) f(s) ds \right] dz(t) = 0,$$

para toda solução $z \in \mathcal{C}_a([a,b])$ da equação

$$z(s) - \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t,s) * dz(t) \right] ds = 0, \quad s \in [a,b] \quad \square$$

Capítulo 4:

Estudo das equações de Fredholm-Stieltjes e de Volterra-Stieltjes

$$x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s)x(s)dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s)x(s)dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

quando x e f são funções gauge integráveis

O propósito deste capítulo é "estender" o Teorema 2.3 do Capítulo 3 sobre a equação de Fredholm-Kurzweil

$$x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

e o resultado de Hönig sobre a equação de Volterra-Kurzweil (veja [H-6])

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$

para o caso vetorial, ou seja, vamos estudar as equações integrais lineares de Fredholm-Stieltjes

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

e de Volterra-Stieltjes

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) \cdot x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

no sentido da integral de Kurzweil. Entretanto, trataremos das funções a valores reais pois devemos usar o fato de que, neste contexto, os espaços das funções Kurzweil e Henstock integráveis coincidem. Vamos portanto considerar as equações (F) e (V) acima onde $\alpha: [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, e $x, f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ são Kurzweil-Henstock integráveis. Chamamos as equações (F) e (V) de equações integrais lineares de Kurzweil-Henstock-Stieltjes.

Conforme foi visto no Capítulo 1, dada uma função $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a Condição Forte de Lusin (escrevemos $g \in SL([a,b])$) e que é não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$, podemos definir o espaço das classes de equivalência das funções que são Kurzweil-Henstock integráveis em relação a g . Seria interessante, portanto, que uma tal função g junto uma função real α satisfazendo as propriedades determinadas no capítulo anterior (i.e., $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \in \tilde{C}^{\sigma \times (BV_b^+)^u}$) fossem suficientes para a obtenção de resultados sobre existência de uma solução Kurzweil-Henstock integrável para cada uma das equações (V) e (F) acima. Todavia, devemos supor ainda que g é diferenciável. Desta forma, estaremos tomando g num subespaço denso de $SL([a,b])$,

subespaço este equivalente ao tão conhecido espaço das funções ACG* (veja [S-2] e [L]).

Na primeira seção deste capítulo, nós apresentamos os resultados básicos ou pré-requisitos necessários para a obtenção dos principais teoremas. E isto será feito no contexto mais geral de espaços de Banach. Na Seção 2, estabelecemos condições para a existência e unicidade de uma solução Kurzweil-Henstock integrável para a equação (V). Finalmente a equação (F) é estudada na Seção 3.

1. Pré-requisitos

O leitor deve-se reportar aos Quadros-Resumos no final do trabalho para lembrar-se das definições que deseje.

1.1 Teorema (veja [H-6], Teor1.5) A aplicação

$$\alpha \in SV_b^+([a,b], L(X, Y')) \mapsto F_\alpha \in L(\mathcal{E}_a([a,b], X), Y),$$

onde $\alpha(a) \in L(X, Y)$, $\int_{[a,t]} \alpha(\sigma) \cdot x \, d\sigma \in Y$, para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, e $(F_\alpha f) = \int_{[a,b]} d\alpha(s) f(s)$, é uma isometria sobrejetora.

Como consequência imediata deste teorema segue o

1.2 Corolário Dado $F \in L(\mathcal{E}_a([a,b], X), Y)$, existe uma e somente uma função $\alpha \in SV_b^+([a,b], L(X, Y'))$ com $\alpha(a) \in L(X, Y)$, $\int_{[a,t]} \alpha(\sigma) \cdot x \, d\sigma \in Y$, para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, tal que $F = F_\alpha$.

1.3 Teorema (veja [H-6], Teor1.6) A aplicação

$$\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (SV_b^+)^n \mapsto F_\alpha \in L(\mathcal{E}_a([a,b], X), \mathcal{E}([c,d], Y)),$$

onde $\alpha'(a) \in L(X, Y)$ e $\int_{[c,t]} \alpha(t, \sigma) \cdot x \, d\sigma \in Y$, para todo $t \in [c,d]$ e todo $x \in X$, e $(F_\alpha f)(t) =$

$= \int_{[a,b]} d_s \alpha(t,s) f(s)$ para cada $t \in [c,d]$, é uma isometria (i.e., $\|F_{\alpha}\| = SV^u(\alpha)$) sobrejetora. Além disso, temos que $\alpha(t,a) \cdot x = (-F_{\alpha}(\chi_{[a,b]}x))(t)$ e, definindo para cada $t \in [a,b]$ e cada $x \in X$ a função $g_{t,x}: [a,b] \rightarrow X$ onde $g_{t,x}(s) = (s-a)x$ se $s \in [a,t]$, e por $g_{t,x}(s) = (t-a)x$ se $s \in [t,b]$, temos que $\int_{[a,b]} \alpha(t,\sigma) x d\sigma = -F_{\alpha}(g_{t,x})(t)$.

E, fazendo uso do Teorema 1.3, podemos provar que

1.4 Teorema Dada $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$, temos que a aplicação

$$\alpha \in BV^+_b([a,b], X') \mapsto H_{\alpha,g} \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R}, X)), \mathbb{R}),$$

onde $H_{\alpha,g}(f) = \int_{[a,b]} \alpha(s) f(s) dg(s)$, é uma isometria (i.e., $\|H_{\alpha,g}\| = V(\alpha)$) sobrejetora e, para cada $t \in [a,b]$ e cada $x \in L(\mathbb{R}, X)$, vale $\int_{[a,t]} \alpha(s) \cdot x dg(s) = H_{\alpha,g}(\chi_{[a,t]}x)$.

Prova A aplicação é claramente linear.

A aplicação é injetiva. De fato. Dados $\rho \in [a,b]$ e $x \in L(\mathbb{R}, X)$, definamos uma função $f_{\rho,x}: [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R}, X)$ por $f_{\rho,x}(s) = x$, se $s \in [a,\rho]$, e $f_{\rho,x}(s) = 0$ caso contrário. Então é imediato que $f_{\rho,x} \in R_g([a,b], L(\mathbb{R}, X))$ (veja o Teorema 2.11 do Capítulo 1) e $H_{\alpha,g}(f_{\rho,x}) = \int_{[a,\rho]} \alpha(s) \cdot x dg(s)$. Como, para cada $x \in L(\mathbb{R}, X)$, a função $\alpha(\cdot) \cdot x: [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ é tal que $\alpha(\cdot) \cdot x \in R_g([a,b], L(\mathbb{R})) \subset K_g([a,b], L(\mathbb{R})) = H_g([a,b], L(\mathbb{R}))$, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 2.5 do Capítulo 1), existe $d_{\rho}(\int_{[a,\rho]} \alpha(s) \cdot x dg(s)) = \alpha(\rho) \cdot x \cdot g'(\rho)$ para m-quase todo $\rho \in [a,b]$.

Se $\alpha \neq 0$, então existem $\underline{\rho} \in [a,b]$ e $\underline{x} \in L(\mathbb{R}, X)$ tais que $\alpha(\underline{\rho}) \cdot \underline{x} \neq 0$. Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g'(\underline{\rho}) \neq 0$ (pela invariância da integral sobre conjuntos de m-medida nula). De fato. Por [F-3] temos que $\int_{[a,\rho]} \alpha(s) \cdot x dg(s) = \int_{[a,\rho]} \alpha(s) \cdot x \cdot g'(s)$ qualquer que seja $\rho \in [a,b]$. Além disso, a integral de Kurzweil-Stieltjes e, em particular, a integral de Riemann-Stieltjes é invariante sob conjuntos de medida nula. Logo, não alteramos a integral $\int_{[a,\underline{\rho}]} \alpha(s) \cdot \underline{x} \cdot g'(s)$ e, portanto, a integral $\int_{[a,\underline{\rho}]} \alpha(s) \cdot \underline{x} dg(s)$ e a derivada

$d_p(\int_{[a,p]} \alpha(s) \cdot x dg(s)) = \alpha(p) \cdot x \cdot g'(p)$. Portanto, $\alpha(p) \cdot x \cdot g'(p) \neq 0$ (já que $g'(p)$ é um escalar não-nulo) o que implica que $H_{\alpha,g}(f_{p,x}) = \int_{[a,p]} \alpha(s) \cdot x dg(s)$ não é constante sendo, conseqüentemente, diferente de zero. Segue, assim, a injetividade da aplicação.

Lembrando que $SV([a,b], L(X, \mathbb{R})) = BV([a,b], X')$, segue pelo Corolário 2.13 do Capítulo 1 que $\|H_{\alpha,g}\| \leq V(\alpha)$.

Sejam $f \in \mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R}, X))$ e $H \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R}, X)), \mathbb{R})$ e definamos $\hat{H}(\tilde{f}_g) = -H(f)$. Pelo Teorema 2.10 do Capítulo 1, existe uma única extensão contínua de $\hat{H}$ a $\mathcal{C}_a([a,b], X)$ a qual nós ainda denotamos por $\hat{H}$. Então o novo operador $\hat{H}$ pertence a $L(\mathcal{C}_a([a,b], X), \mathbb{R})$. E, se α representa $\hat{H}$, então pelo Teorema 1.1, segue que $\hat{H}(\tilde{f}_g) = \int_{[a,b]} d\alpha \tilde{f}_g$ e $\|\hat{H}\| = V(\alpha)$. Além disso,

$$H(f) = -\hat{H}(\tilde{f}_g) = -\int_{[a,b]} \alpha d\tilde{f}_g = \int_{[a,b]} d\alpha \tilde{f}_g = \int_{[a,b]} \alpha \cdot f dg,$$

onde aplicamos o Teorema 2.11 e o Corolário 2.13 ambos do Capítulo 1 a fim de obtermos as duas últimas igualdades. Como por definição $\|f\|_g = \|\tilde{f}_g\|$, então $\|H\| = \|\hat{H}\| = V(\alpha)$ e daí segue o resultado. ■

Seja $g \in SL([a,b], W)$. Dada uma função $\alpha: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X, Y'')$, escrevemos $\alpha(t,s) = \alpha^t(s) = \alpha_s(t)$. Consideremos as condições abaixo:

□ $\tilde{C}_g^\sigma$: para cada $s \in [a,b]$ e cada $x \in L(W, X)$, é contínua a função

$$t \in [c,d] \mapsto \int_{[a,s]} \alpha(t,\sigma) \cdot x dg(\sigma) \in Y;$$

□ $(SV_b^+)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $\alpha^t \in SV_b^+([a,b], L(X, Y''))$ e $SV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c,d]} \{SV(\alpha^t)\} < \infty$.

Quando α satisfaz as condições $\tilde{C}_g^\sigma$ e $(SV_b^+)^u$, então escrevemos $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (SV_b^+)^u$. Se em lugar da semivariação considerarmos a variação, então escrevemos $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV_b^+)^u$ ao invés de $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (SV_b^+)^u$.

Com demonstração análoga àquela do Teorema 1.4 porém usando o Teorema 1.3 em lugar do Teorema 1.1 obtemos o

1.5 Teorema Se $\alpha: [c,d] \times [a,b] \rightarrow X'$ é uma função e $g \in SL([a,b], IR)$ é diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$, então a aplicação

$$\alpha \in \widetilde{C}^{\sigma_g} \times (BV^+_b)^u \mapsto H_{\alpha g} \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(IR, X)), \mathcal{E}([c,d])),$$

onde $(H_{\alpha g}(\beta))(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t, s) \cdot \beta(s) dg(s)$ para cada $t \in [c,d]$, é uma isometria (i.e., $\|H_{\alpha g}\| = V^u(\alpha)$) sobrejetora. Além disso, para cada $s \in [a,b]$, cada $t \in [c,d]$ e cada $x \in L(IR, X)$, $\int_{[a,s]}^K \alpha(t, \sigma) \cdot x dg(\sigma) = (H_{\alpha g}(\chi_{[a,s]}x))(t)$.

Utilizando o Corolário 2.20 do Capítulo 1, podemos provar que

1.6 Corolário Sob as hipóteses do Teorema 1.5, para cada $s \in [a,b]$, cada $t \in [c,d]$ e cada $\beta \in \mathbf{K}_g([a,b], L(IR, X))$, temos que $(H_{\alpha g}(\chi_{[a,s]} \beta))(t) = \int_{[a,s]}^K \alpha(t, \sigma) \cdot \beta(\sigma) dg(\sigma)$.

1.7 Lema Dadas funções $g \in SL([a,b], W)$ diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$, $\beta \in \mathbf{K}_g([a,b], L(W, X))$ e $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X, Y')$ com $\alpha \in \widetilde{C}^{\sigma_g} \times (SV^+_b)^u$ e tal que $\alpha'(a) \in L(X, Y)$ e $\int_{[a,t]}^K \alpha(t, \sigma) \cdot x d\sigma \in Y$, para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$, então é contínua a função

$$t \in [a,b] \mapsto \int_{[a,t]}^K \alpha(t, s) \cdot \beta(s) dg(s) \in Y.$$

Prova Como $E([a,b], L(W, X))$ é $\|\cdot\|_g$ -denso em $\mathbf{K}_g([a,b], L(W, X))$ (veja o Corolário 2.20 do Capítulo 1), então basta provar o resultado para toda função escada $\beta: [a,b] \rightarrow L(W, X)$.

Seja $x \in L(W, X)$. Então a função

$$t \in [a,b] \mapsto \int_{[a,t]}^K \alpha(t, s) \cdot x dg(s) \in Y$$

é contínua. De fato. Dados $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$, temos que

$$\int_{[a, t+\rho]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s) = \int_{[a, t]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s) + \int_{[t, t+\rho]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s),$$

onde $\int_{[a, t]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s) \rightarrow \int_{[a, t]}^K \alpha(t, s) \cdot x dg(s)$ quando $\rho \rightarrow 0$ pela hipótese de $\widetilde{C}^{\sigma_g}$ sobre

α .

Seja δ o gauge da definição de $\int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) \cdot x dg(s)$ e suponhamos que $(\xi, [t, t+\rho]) \in \text{TPD}_{[a,b]}$ é δ -fina (i.e., $\rho < \delta(\xi)$). Então,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{[t, t+\rho]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_{[t, t+\rho]}^K \alpha(t+\rho, s) \cdot x dg(s) - \alpha(t+\rho, \xi) \cdot x \cdot [g(t+\rho) - g(t)] \right\| + \\ & + \left\| \alpha(t+\rho, \xi) \cdot x \cdot [g(t+\rho) - g(t)] \right\| < \varepsilon + SV^u(\alpha) \|x\| \|g(t+\rho) - g(t)\|, \end{aligned}$$

onde aplicamos o Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1 do Capítulo 1) para o primeiro somando. Daí, pela continuidade de g , segue que a função

$$t \in [a, b] \mapsto \int_{[a,t]}^K \alpha(t, s) \cdot x dg(s) \in Y$$

é contínua a direita e, de modo análogo, prova-se a continuidade a esquerda. ■

Seja $g \in SL([a,b])$. Um operador $H \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R})), \mathcal{E}([a,b]))$ é dito **causal** se dados $f \in \mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R})) \cong \mathbf{K}_g([a,b])$ e $t \in [a,b]$, então $f|_{[a,t]} = 0$ implica que $H(f)|_{[a,t]} = 0$.

1.8 Teorema *Sejam $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante e $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\alpha(t,s) = 0$ para todo $s > t$. Então a aplicação*

$$\alpha \in \widetilde{C}^{\sigma}_g(BV^+_b)^u \mapsto H_{\alpha,g} \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R})), \mathcal{E}([a,b])),$$

onde $(H_{\alpha,g}(f))(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) f(s) dg(s)$, para cada $t \in [a,b]$, é uma isometria (i.e.,

$\|H_{\alpha,g}\| = V^u(\alpha)$) sobrejetora sobre o subespaço dos operadores causais.

Prova Pelo Teorema 1.5, basta provar a sobrejeção.

Seja $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \in \widetilde{C}^{\sigma}_g \times BV^+_b$ e $\alpha(t,s) = 0$ para todo $s > t$. Então pelo Lema 1.7, $H_{\alpha,g}$ é causal.

Reciprocamente, seja $H \in L(\mathbf{K}_g([a,b], L(\mathbb{R})), \mathcal{E}([a,b]))$ causal. Pelo Teorema 1.5, existe um único $\alpha \in \widetilde{C}^{\sigma}_g \times BV^+_b$ tal que $H = H_{\alpha,g}$. Pela causalidade de $H = H_{\alpha,g}$, temos que

$0 = (H_{\alpha, g}(\chi_{[t, b]}x))(t) = \int_{[t, b]} \alpha(t, \sigma) \cdot x dg(\sigma)$, para cada $t \in [a, b]$ e cada $x \in L(\mathbb{R})$. Além disso, $\alpha'(\cdot) \cdot x \in R_g([a, b], L(\mathbb{R})) \subset K_g([a, b], L(\mathbb{R})) = H_g([a, b], L(\mathbb{R}))$ e daí, segue do Corolário 2.7 do Capítulo 1 que $\alpha(t, s) = 0$ para todo $s > t$. ■

1.9 Teorema Dadas $g \in SL([a, b])$ diferenciável e não-constante e $\alpha: [c, d] \times [a, b] \rightarrow X'$ tal que $\alpha \in \tilde{C}^\sigma_g(BV^+_b)^n$, seja $K_g: [c, d] \times [a, b] \rightarrow X'$ uma função tal que $K_g(t, s)x = \int_{[a, s]} \alpha(t, \rho) \cdot x dg(\rho)$, para cada $x \in L(\mathbb{R}, X)$. Então $K_g \in C^\sigma_g(SV_a)^n$ e, para todo $t \in [c, d]$ e todo $y' \in Y'$, a função

$$s \in [a, b] \mapsto (K(t, s))^* y' \mapsto X'$$

é contínua, onde $(K(t, s))^*$ denota o operador transposto de $K(t, s)$. Além disso,

$$\int_{[a, b]} d_s K_g(t, s) \beta(s) = \int_{[a, b]} \alpha'(s) \cdot \beta(s) dg(s),$$

para toda função $\beta \in \mathcal{E}([a, b], L(\mathbb{R}, X))$ e todo $t \in [c, d]$. Supondo ainda que $\alpha' \in SV([a, b], \mathcal{K}(X, \mathbb{R}))$, para cada $t \in [c, d]$, então a função

$$K_g^\square: t \in [c, d] \mapsto K_g(t, \cdot) \in SV_a([a, b], X')$$

pertence a $\mathcal{E}([c, d], SV_a([a, b], \mathcal{K}(X, \mathbb{R})))$.

Prova Como $\alpha_s \in \tilde{C}^\sigma_g([c, d], X')$, então $K_g(\cdot, s) \in C^\sigma_g([c, d], X')$, para cada $s \in [a, b]$.

Sejam $x \in L(\mathbb{R}, X)$ e $d = (s_i)$ uma divisão de $[a, b]$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i [K_g^t(s_i) - K_g^t(s_{i-1})] \cdot x \right\| &= \left\| \sum_i \left[\int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t, \rho) \cdot x dg(\rho) \right] \right\| = \left\| \int_{[a, b]} \alpha(t, \rho) \cdot x dg(\rho) \right\| \leq \\ &\leq V(\alpha^t) \|x\| \|g(b) - g(a)\|, \end{aligned}$$

e portanto $K_g^t = K_g(t, \cdot) \in SV([a, b], X')$, para cada $t \in [c, d]$.

Para cada $t \in [c, d]$ e cada $x \in L(\mathbb{R}, X)$, $K_g^t(\cdot) \cdot x$ é contínua em $[a, b]$, pois é uma integral indefinida (veja a Proposição 2.8 do Capítulo 1). Portanto, dados $t \in [c, d]$ e $y' \in L(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, a função $(K_g^t(\cdot))^* \cdot y'$ é contínua em $[a, b]$.

$K_g^\square \in \mathcal{E}([c, d], SV_a([a, b], X'))$. De fato. Sejam $t_0 \in [c, d]$ e $d = (s_i)$ uma divisão de

$[a, b]$. Então,

$$\begin{aligned}
 \|K_g^t - K_g^{t_0}\| &= SV(K_g^t - K_g^{t_0}) = \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \sum_i \left[(K_g^t - K_g^{t_0})(s_i) - (K_g^t - K_g^{t_0})(s_{i-1}) \right] \cdot x \right\| = \\
 &= \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \sum_i \left[\int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t, \rho) \cdot x \, dg(\rho) - \int_{[s_{i-1}, s_i]} \alpha(t_0, \rho) \cdot x \, dg(\rho) \right] \right\| = \\
 &= \sup_{d, \|x\| \leq 1} \left\| \int_{[a, b]} \alpha(t, \rho) \cdot x \, dg(\rho) - \int_{[a, b]} \alpha(t_0, \rho) \cdot x \, dg(\rho) \right\| = \\
 &= \sup_{d, \|x\| \leq 1} \|K_g(t, b) \cdot x - K_g(t_0, b) \cdot x\| \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow t_0$, pois $K_g(\cdot, s) \in C^\sigma([c, d], X')$, para cada $s \in [a, b]$, e em particular, $K_g(\cdot, b) \in C^\sigma([c, d], X')$.

Sejam $\beta \in \mathcal{C}([a, b], L(\mathbb{R}, X))$, $t \in [c, d]$ e $\gamma = \tilde{\beta}_g$. De acordo com o Teorema 2.19 e com o Corolário 2.12 ambos do Capítulo 1, temos que $\alpha^t \cdot \beta \in K_g([a, b], L(\mathbb{R}))$ com

$$(1) \quad {}^K \int_{[a, b]} \alpha^t(s) \cdot \beta(s) \, dg(s) = \int_{[a, b]} \alpha^t(s) \, d\gamma(s) = - \int_{[a, b]} d_s \left(\alpha^t(s) \right) \gamma(s),$$

onde usamos o Teorema 2.11 do Capítulo 1 para obtermos a última igualdade. Como $K_g(t, s) \cdot x = \int_{[a, s]} \alpha^t(\rho) \cdot x \, dg(\rho)$ com $K_g^t \in SV([a, b], X')$, para cada $t \in [c, d]$, então existe a integral de Riemann-Stieltjes $\int_{[a, b]} d_s K_g(t, s) \beta(s)$, para cada $t \in [c, d]$ e cada $\beta \in \mathcal{C}([a, b], L(\mathbb{R}, X))$ (veja o Teorema 2.11 do Capítulo 1). Além disso, afirmamos que

$$(2) \quad \int_{[a, b]} d_s K_g(t, s) \beta(s) = {}^K \int_{[a, b]} \alpha^t(s) \cdot \beta(s) \, dg(s),$$

para todo $t \in [c, d]$ e todo $\beta \in \mathcal{C}([a, b], L(\mathbb{R}, X))$. De fato. Basta demonstrarmos que vale (2) quando γ é uma função escada, uma vez que podemos aproximar qualquer função contínua por uma função escada na norma do sup. Em outras palavras, é suficiente mostrarmos que, para cada $t \in [c, d]$ e cada $x \in L(\mathbb{R}, X)$, temos

$$(3) \quad \int_{[a, b]} d_s K_g(t, s) x = \int_{[a, b]} \alpha^t(s) \cdot x \, dg(s).$$

Como $\alpha^t(\cdot) \cdot x \in R_g([a, b], L(\mathbb{R}))$ (veja o Teorema 2.11 do Capítulo 1) e $R_g([a, b], L(\mathbb{R})) \subset K_g([a, b], L(\mathbb{R})) = H_g([a, b], L(\mathbb{R}))$, então segue do Teorema Fundamental

do Cálculo (Teorema 2.6 do Capítulo 1) que existe $d_s \int_{[a,s]} \alpha^l(\rho) \cdot x dg(\rho) = \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s)$ m-q.s em $[a,b]$. Portanto, dados $t \in [c,d]$ e $x \in L(\mathbb{R}, X)$, temos que $d_s K_g(t,s) \cdot x = d_s(K_g(t,s) \cdot x) = d_s \int_{[a,s]} \alpha^l(\rho) \cdot x dg(\rho) = \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s)$ para m-quase todo $s \in [a,b]$ e, pela invariância da integral sob conjuntos de m-medida nula, segue que

$$(4) \quad \int_{[a,b]} d_s K_g(t,s) x = \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s) ds.$$

Agora, vamos provar que $\int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s) ds = \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x dg(s)$, de onde, junto com (4), conclui-se (3).

Dados $\varepsilon > 0$, $t \in [c,d]$ e $x \in L(\mathbb{R}, X)$, sejam δ_1 e δ_2 gauges constantes de $[a,b]$ respectivamente das definições de $\int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot x dg(s)$ e de $\int_{[a,b]} \alpha(t,s) \cdot x \cdot g'(s) ds$. Dado $\xi \in [a,b]$, seja $\delta_3(\xi) > 0$ tal que

$$(5) \quad |g(v) - g(s) - g'(\xi)(v - s)| < \varepsilon(v - s)$$

sempre que $\xi - \delta_3(\xi) < s < \xi < v < \xi + \delta_3(\xi)$ (veja o Lema 2.18 do Capítulo 1) e seja $\delta(\xi) = \min\{\delta_i(\xi); i = 1, 2, 3\}$. Então, para toda $d = (\xi_i, s_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina, temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x dg(s) - \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s) ds \right\| = \\ & = \left\| \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x dg(s) - \sum_i \alpha^l(\xi_i) \cdot x \cdot [g(s_i) - g(s_{i-1})] \right\| + \\ & + \left\| \sum_i \alpha^l(\xi_i) \cdot x \cdot [g(s_i) - g(s_{i-1})] - \sum_i \alpha^l(\xi_i) \cdot x \cdot g'(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) \right\| + \\ & + \left\| \sum_i \alpha^l(\xi_i) \cdot x \cdot g'(\xi_i)(s_i - s_{i-1}) - \int_{[a,b]} \alpha^l(s) \cdot x \cdot g'(s) ds \right\| < \\ & < \varepsilon + \sum_i V(\alpha^l) \|x\| |g(s_i) - g(s_{i-1}) - g(\xi_i)(s_i - s_{i-1})| + \varepsilon < 2\varepsilon + V(\alpha^l) \|x\| \varepsilon (b - a), \end{aligned}$$

pela integrabilidade em relação a g de $\alpha^l(\cdot) \cdot x$, pela integrabilidade de $\alpha^l(\cdot) \cdot x \cdot g'(\cdot)$ e por (5).

Provemos, finalmente, que $K_g(t,s) \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ quaisquer que sejam $(t,s) \in [c,d] \times [a,b]$. De (1) e (2), obtemos

$$(6) \quad \int_{[a,b]} d_s K_g(t,s) \beta(s) = - \int_{[a,b]} d_s (\alpha^t(s)) \tilde{\beta}(s).$$

Dado $\beta \in \mathcal{C}([a,b], L(\mathbb{R}, X))$, definimos

$$(F_{K_g} \beta)(t) = \int_{[a,b]} d_s K_g(t,s) \beta(s) \quad \text{e} \quad F_{\alpha^t}(\beta) = \int_{[a,b]} d_s (\alpha^t(s)) \beta(s).$$

Dado $E \subset \mathcal{C}_a([a,b], L(\mathbb{R}, X))$ equiregrado e limitado, seja $M > 0$ tal que $\|y\| < M$ para todo $\beta \in E$. Seja $A_g = \{\tilde{\beta}_g; y \in E\} \subset \mathcal{C}_a([a,b], X)$. Então A_g é equiregrado. De fato. Pela Observação 1.4 ii) do Capítulo 3, basta mostrarmos que A_g é equicontínuo o que é verdade, pois

$$\|\tilde{\beta}_g(s) - \tilde{\beta}_g(r)\| = \left\| \int_{[r,s]} \beta \, dg \right\| \leq M |g(s) - g(r)| \rightarrow 0,$$

quando $s \rightarrow r$, pela continuidade de g . Pela equação (6) acima, para cada $t \in [c,d]$,

$$(F_{K_g} E)(t) = \{(F_{K_g} \beta)(t); \beta \in E\} = \{F_{\alpha^t}(\tilde{\beta}_g); \beta \in E\}$$

Portanto, $(F_{K_g} E)(t) = F_{\alpha^t}(A_g)$ que é relativamente compacto pelo Lema 1.5 do Capítulo 3 e, pelo Lema 1.6 do Capítulo 3, segue que $K_g(t,s) \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$, qualquer que seja $(t,s) \in [c,d] \times [a,b]$. ■

1.10 Teorema (veja [H-3], Teor.'s 3.8 e 3.4) *Seja $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X)$ tal que $K \in C^\sigma \times (SV)''$ e $K(t,s) = 0$ para $s > t$, e suponhamos que existe uma divisão $d = (s_i)$ de $[a,b]$ tal que $\sup \{SV_{[s_{i-1}, t]}(K^t); t \in [s_{i-1}, s_i]\} < 1$, para cada $i = 1, 2, \dots, |d|$, onde $SV_{[s_{i-1}, t]}(K^t)$ denota a semivariação da função $K(t, \cdot)$ no intervalo $[s_{i-1}, t]$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *para cada $t \in [a,b]$, o operador $I - K(t, \cdot, t)$ é inversível, onde I é a identidade em $L(X)$;*
- (ii) *para cada $h \in \mathcal{C}([a,b], X)$, a equação*

$$y(t) - \int_{[a,t]} d_s K(t,s) y(s) = h(t), \quad t \in [a,b]$$

admite uma e somente uma solução $y_h \in \mathcal{C}([a,b], X)$ e o operador $h \mapsto y_h$ é causal.

1.11 Teorema (veja [Br] ou [H-3], Teor. 3.9) *Seja $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(X)$ tal que $K \in C^\sigma \times (SV)^u$ e $K(t,s) = 0$ para $s > t$, e suponhamos que existe uma divisão $d = (s_i)$ de $[a,b]$ tal que $\sup \{SV_{[s_{i-1}, t]}(K^t); t \in [s_{i-1}, s_i]\} < 1$, para cada $i = 1, 2, \dots, d$. Então K tem resolvente dado pela série de Neumann.*

1.12 Teorema (veja [H-6], Teor. 3.1) *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach tal que $F \subset E$ com imersão contínua. Suponhamos que $H \in L(E, F)$ é tal que para todo $f \in E$ a equação $x - Hx = f$ admite uma e somente uma solução $x_f \in E$. Então a aplicação*

$$f \in E \mapsto x_f \in E$$

é bicontínua. Se além disso a série de Neumann $I + H + H^2 + H^3 + \dots = (I - H)^{-1}$ converge em $L(F)$, então ela também converge em $L(E)$.

2. A equação integral linear de Volterra-Kurzweil-Henstock-Stieltjes

Lembramos ao leitor que os espaços $SV([a,b], L(\mathbb{R}))$ e $BV([a,b], L(\mathbb{R}))$ coincidem e são isomorfos a $BV([a,b])$.

2.1 Teorema *Dadas funções $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante, $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ e $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \in \tilde{C}^\sigma_g \times (BV^+_b)^u$ e $\alpha(t,s) = 0$ para $s > t$, então a equação integral linear de Volterra-Kurzweil-Henstock-Stieltjes*

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

admite uma e somente uma solução $x_f \in \mathbf{K}_g([a,b])$. Além disso, o operador $H_{\alpha,g} \in L(\mathbf{K}_g([a,b]), \mathcal{E}([a,b]))$ dado por $(H_{\alpha,g}(f))(t) = \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) f(s) dg(s)$, para cada $t \in [a,b]$, é

causal bem como a bijeção $f \mapsto x_f$ a qual pode ser escrita como

$$(\rho) \quad x_f(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \rho(t,s) f(s) dg(s), \quad t \in [a,b],$$

com $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\rho \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV^+_b)^u$ e $\rho(t,s) = 0$ para $s > t$, e a série de Neumann $I - H_{\rho,g} = I + H_{\alpha,g} + H_{\alpha,g}^2 + H_{\alpha,g}^3 + \dots$ converge em $L(\mathbf{K}_g([a,b]))$.

Prova Sejam $y = x - f$ e $h(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) f(s) dg(s)$. Então ambas as funções h e y são contínuas, uma vez que $h = H_{\alpha,g}(\chi_{[a,t]} f)$ e $y = H_{\alpha,g}(\chi_{[a,t]} x)$ (veja o Corolário 1.6), com $\chi_{[a,t]} f$ e $\chi_{[a,t]} x \in \mathbf{K}_g([a,b], X)$, e $H_{\alpha,g} \in L(\mathbf{K}_g([a,b]), \mathcal{C}([a,b]))$ (veja o Teorema 1.8). Logo, a equação (V) é equivalente à equação (V₁) abaixo:

$$(V_1) \quad y(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(t,s) y(s) dg(s) = h(t), \quad t \in [a,b]$$

Seja $K_g: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $K_g(t,s) \cdot x = \int_{[a,s]} \alpha^t(\rho) x dg(\rho)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 1.9, temos que

$$\int_{[a,t]} d_s K_g(t,s) y(s) = \int_{[a,t]}^K \alpha^t(s) y(s) dg(s)$$

Portanto, a equação (V₁) é equivalente à seguinte equação

$$(V_2) \quad y(t) - \int_{[a,t]} d_s K_g(t,s) y(s) = h(t), \quad t \in [a,b]$$

Pelo Teorema 1.9, $K_g \in C^\sigma \times (SV)^u$, e como $\alpha(t,s) = 0$ para $s > t$, então $K_g(t,s) = 0$ para $s > t$. Assim, de acordo com o Teorema 1.10, para provarmos que dado $h \in \mathcal{C}([a,b])$, a equação (V₂) admite uma e somente uma solução $y_h \in \mathcal{C}([a,b])$ e o operador $h \mapsto y_h$, basta que mostremos que valem

1) existe uma divisão $d = (s_i)$ de $[a,b]$ tal que $\sup_{t \in [s_{i-1}, s_i]} \{SV_{[s_{i-1}, t]}(K_g^t)\} < 1$, qualquer que seja

$i = 1, 2, \dots, |d|$;

2) para cada $t \in [a,b]$, o operador $I - K_g(t, \cdot, t)$ é inversível.

Prova de 2). Pela continuidade de g , dados $\xi \in [a,b]$ e $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < 1/2V^u(\alpha)$, existe $\delta(\xi) > 0$ tal que $|g(t) - g(\xi)| < \varepsilon$, qualquer que seja $t \in [a,b]$ com $0 < |t - \xi| < \delta(\xi)/2$.

Logo,

$$\|K_g(t + \rho, t) x\| = \left\| \int_{[t, t+\rho]} \alpha(t + \rho, \sigma) x \, dg(\sigma) \right\| \leq V^u(\alpha) |x| |g(t + \rho) - g(t)| \rightarrow 0,$$

quando $\rho \downarrow 0$, donde segue que $K_g(t^+, t) = 0$ e $I - K_g(t^+, t)$ é inversível.

Prova de 1). Consideremos o gauge δ de $[a, b]$ definido como acima e seja $d = (\xi_i, s_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina. Fixados $i \in \{1, 2, \dots, |d|\}$ e $t \in [s_{i-1}, s_i]$, seja $d_i = (r^j)$ uma divisão de $[s_{i-1}, t]$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j [K_g^t(r^j) - K_g^t(r^{j-1})] x_j \right\| &= \left\| \sum_j \int_{[r^{j-1}, r^j]} \alpha^t(\rho) x_j \, dg(\rho) \right\| = \left\| \int_{[s_{i-1}, t]} \alpha^t(\rho) x_j \, dg(\rho) \right\| \leq \\ &\leq V^u(\alpha) |x_j| |g(t) - g(s_{i-1})| < V^u(\alpha) |x_j| \varepsilon < \frac{|x_j|}{2}. \end{aligned}$$

E, portanto, $SV_{[s_{i-1}, t]}(K_g^t) \leq \frac{1}{2}$, donde segue 1).

Finalmente, a afirmação sobre a série de Neumann é verdadeira para o resolvente da equação (V_2) em $L(\mathcal{E}([a, b]))$ pelo Teorema 1.11. Além disso, o operador F_{K_g} definido por $(F_{K_g} y)(t) = \int_{[a, t]} d_s K_g(t, s) y(s)$ é causal bem como $(F_{K_g})^n$ e portanto $(I - F_{K_g})^{-1}$. E pelo Teorema 1.12, o mesmo se aplica ao resolvente da equação (V_2) em $L(\mathbf{K}_g([a, b]))$. Assim, pelo fato de que $F_{K_g} = H_{\alpha, g}$ (veja os Teoremas 1.9 e 1.8) segue que $I - H_{\rho, g} = (I - H_{\alpha, g})^{-1}$ é causal. ■

3. A Alternativa de Fredholm para a integral de Kurzweil-Henstock-Stieltjes

3.1 Teorema *Dados $g \in SL([a, b])$ diferenciável e não constante e $H \in L(\mathbf{K}_g([a, b]), \mathcal{E}([a, b]))$, seja $\alpha: [a, b] \times [a, b] \rightarrow L(IR)$ o núcleo correspondente pelo Teorema 1.5 (i.e., $H = H_{\alpha, g}$). Suponhamos que H é tal que para cada $f \in \mathbf{K}_g([a, b])$, a equação*

integral linear de Fredholm-Kurzweil-Henstock-Stieltjes

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

(i.e., a equação $x - H(x) = f$) admite uma única solução $x_f \in \mathbf{K}_g([a,b])$. Então existe um único núcleo $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\rho \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV^+_b)^u$ e, para cada $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$,

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,b]}^K \rho(t,s) f(s) dg(s), \quad t \in [a,b]$$

Prova (análoga à demonstração do Teor. 3.2 de [H-6] aplicando-se os Teoremas 1.9 e 1.5 e escrevendo $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ em lugar de $f \in \mathbf{K}([a,b], X)$; $H_{\alpha,g}$ em lugar de H_α ; etc).

3.2 Teorema Dadas funções $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante, $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ e $\alpha: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ tal que $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV^+_b)^u$ e $\alpha' \in SV([a,b], \mathcal{Z}(\mathbb{R}))$, para cada $t \in [a,b]$, consideremos a equação integral linear de Fredholm-Kurzweil-Henstock-Stieltjes

$$(F) \quad x(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a,b]$$

e sua equação homogênea correspondente

$$(F_o) \quad u(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) u(s) dg(s) = 0, \quad t \in [a,b]$$

Consideremos também as seguintes equações integrais

$$(F^*) \quad y(s) - \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t,s) dy(t) \right] dg(s) = w(s), \quad s \in [a,b]$$

e

$$(F_o^*) \quad z(s) - \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,b]} \alpha(t,s) dz(t) \right] dg(s) = 0, \quad s \in [a,b]$$

Então, ou

a) para cada $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$, a equação (F) admite uma única solução $x_f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ e existe único núcleo $\rho: [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ com $\rho \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV^+_b)^u$ e tal que para cada $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$,

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,b]}^K \rho(t,s) f(s) dg(s), \quad t \in [a,b],$$

e para cada $w \in \mathcal{E}([a,b])$, a equação (F^*) admite uma única solução $y_g \in \mathcal{E}([a,b])$;

ou

b) a equação (F_o) admite soluções não triviais em $\mathbf{K}_g([a,b])$. Neste caso, a equação (F) (respectivamente a equação (F^*)) admite uma solução se e somente se para cada solução $z \in \mathcal{E}([a,b])$ de (F^*_o) (resp. para cada solução $u \in \mathbf{K}_g([a,b])$ de (F_o)), temos que

$$\int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) f(s) dg(s) \right] dz(t) = 0$$

$$\left(\text{resp.} \quad \int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) u(s) dg(s) \right] dw(t) = 0 \right).$$

Prova Sejam $h(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) f(s) dg(s)$ e $v = x - f$. Então, $v(t) = \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) x(s) dg(s)$ e, pelo Teorema 1.5, $h, v \in \mathcal{E}([a,b])$. Por conseguinte, a equação (F) é equivalente à equação

$$(F_1) \quad y(t) - \int_{[a,b]}^K \alpha(t,s) y(s) dg(s) = h(t), \quad t \in [a,b]$$

Seja $K_g : [a,b] \times [a,b] \rightarrow L(\mathbb{R})$ uma função tal que $K_g(t,s) \cdot x = \int_{[a,s]} \alpha^t(\rho) x dg(\rho)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. De acordo com o Teorema 1.9, $K_g \in C^\sigma \times (SV_a)^u$ e, para todo $t \in [a,b]$ e todo $y' \in X'$, a função

$$s \in]a,b[\mapsto (K_g(t,s))^* y' \in X'$$

é contínua à direita, onde $(K_g(t,s))^*$ denota o operador transposto de $K_g(t,s)$, a função

$$K_g^\square : t \in [a,b] \mapsto K_g^t \in SV_a([a,b], L(\mathbb{R}))$$

é tal que $K_g^\square \in \mathcal{E}([a,b], BV_a([a,b], \mathcal{Z}(\mathbb{R})))$ e

$$\int_{[a,b]} d_s K_g(t,s) v(s) = \int_{[a,b]}^K \alpha^t(s) v(s) dg(s)$$

Logo, (F_1) é equivalente à seguinte equação

$$(F_2) \quad v(t) - \int_{[a,b]} d_s K_g(t,s) v(s) = h(t), \quad t \in [a,b]$$

e pela Alternativa de Fredholm (veja o Teorema 1.3 do Capítulo 3), ou para cada $h \in \mathcal{E}([a,b])$ a equação (F_2) admite uma única solução e portanto, para cada $f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ a

equação (F) admite uma única solução, ou a equação homogênea correspondente a (F_2) (respectivamente (F)) admite soluções não triviais. No segundo caso, como $\mathbb{R}' = L(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, então podemos tomar o operador transposto K_g^* igual a K_g . Dai, a equação (F) (respectivamente a equação (F^*)) admite uma solução (não necessariamente em $\mathbf{K}_g([a,b])$) se e somente se para cada solução $z \in \mathcal{C}([a,b])$ de (F_o^*) , $\int_{[a,b]} [\int_{[a,b]}^K \alpha(t,s)f(s)dg(s)]dz(t) = 0$ (resp. para cada solução $u \in \mathbf{K}_g([a,b])$ de (F_o)) vale $\int_{[a,b]} [\int_{[a,b]}^K \alpha(t,s)u(s)dg(s)]dw(t) = 0$.

A afirmação que falta para obtermos a) segue de imediato do Teorema 3.1. ■

3.3 Observação Seja $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante.

- i) Os Teoremas 2.1 e 3.2 deste capítulo também valem para a integral vetorial de Henstock pondo-se $\mathbf{H}_g([a,b],X)$ em lugar de $\mathbf{K}_g([a,b],X)$.
- ii) Seja $\mathbf{R}_g^2([a,b],X)_A$ o espaço munido da norma de Alexiewicz das classes de equivalência das funções $f: [a,b] \rightarrow X$ que são Riemann impróprias integráveis com relação a g (ou Riemann g -integráveis no sentido impróprio) e com um número finito de singularidades, e seja $\mathbf{L}_{1,g}([a,b],X)_A$ o espaço munido da norma de Alexiewicz das classes de equivalência das funções $f: [a,b] \rightarrow X$ que são Bochner-Lebesgue integráveis com relação a g e têm integral finita. Então os Teoremas 2.1 e 3.2 são verdadeiros para $\mathbf{R}_g^2([a,b],X)_A$ ou para $\mathbf{L}_{1,g}([a,b],X)_A$ ao invés de $\mathbf{K}_g([a,b],X)$.

Capítulo 5:

Estudo da equação multidimensional de Volterra

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

quando α é uma função gauge integrável

Nossa intenção neste capítulo é estudar a seguinte equação integral linear multidimensional do tipo Volterra

$$(V^*) \quad x(t) + \int_{[a,t]} \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

no sentido das integrais de Bochner-Lebesgue e de Henstock.

Na Seção 1, relembramo-nos do Princípio da Contração. Na Seção 2, são apresentados os resultados sobre existência de soluções para a equação acima no caso unidimensional, isto é, quando $[a, b]$ é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, e na Seção 3, tratamos do caso multidimensional quando $[a, b]$ é um intervalo compacto de $\mathbb{R}^2$ por simplicidade e facilidade de notação.

1. O Princípio da Contração

Não só nesta seção mas em todo o capítulo conservamos a notação adotada no início do trabalho (Capítulos 1 e 2). Assim, por exemplo, X continua sendo um espaço de Banach.

Dizemos que uma função $h: X \rightarrow X$ satisfaz a **condição de Lipschitz** ou é uma **função lipschitziana** com constante K se, para todo x e $y \in X$, temos que

$$\|h(x) - h(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Em particular, quando $K < 1$, dizemos que h é uma **contração**.

O resultado que segue é chamado de **Princípio da Contração** ou **Teorema do Ponto Fixo de Banach**.

1.1 Teorema (veja [I], Th. 3.1.2) *Se $h: X \rightarrow X$ é uma contração, então existe um único ponto fixo x_0 de h (i.e., $x_0 \in X$ e $h(x_0) = x_0$).*

1.2 Teorema (veja [I], Th. 7.1.2) *Seja $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações de X em X tal que cada aplicação possui um ponto fixo $x_n = T_n(x_n)$, seja $T: X \rightarrow X$ tal que para algum*

inteiro m , T^m é uma contração, onde T^m é a composição de T m vezes, e suponhamos que $T_n \rightarrow T$ uniformemente. Então $x_n \rightarrow x_0 = T(x_0)$.

2. Equações integrais lineares unidimensionais

Dados $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ e $x \in X$, consideremos a função

$$\varphi_x: t \in [a,b] \mapsto \alpha(t) \cdot x \in Y.$$

Nós dizemos que α é uma função **fracamente regrada** (escrevemos $\alpha \in G^\sigma([a,b], L(X,Y))$) se para cada $x \in X$, a função φ_x é regrada. Da mesma forma, dizemos que α é uma função **fracamente contínua** (escrevemos $\alpha \in C^\sigma([a,b], L(X,Y))$) se para cada $x \in X$, a função φ_x é contínua. Então,

2.1 Proposição (veja [F-1], Teor. 2.1.10 e o Corolário que o segue) *São verdadeiras as afirmações:*

i) se $\alpha \in G^\sigma([a,b], L(X,Y))$ e $f \in K^\alpha([a,b], X)$, então $\tilde{f}^\alpha \in G([a,b], Y)$;

ii) $\alpha \in C^\sigma([a,b], L(X,Y))$ e $f \in K^\alpha([a,b], X)$, então $\tilde{f}^\alpha \in \mathcal{C}([a,b], Y)$;

onde $\tilde{f}^\alpha(t) = \int_{[a,t]}^\mathbb{K} d\alpha(s) f(s)$, para cada $t \in [a,b]$.

O resultado seguinte é devido a Schwabik e dá uma condição de existência para a integral vetorial de Kurzweil, $\int_{[a,b]}^\mathbb{K} d\alpha f$.

2.2 Teorema (veja [Sw-2], Th. 19) Se $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y)) \cap G^\sigma([a,b], L(X,Y))$ e $f \in G([a,b], X)$, então $f \in K^\alpha([a,b], X)$.

2.1 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

Para uma função $h: [a,b] \rightarrow X$ Bochner-Lebesgue integrável e tal que $\|h\|_1 =$

$= \int_{[a,b]} \|h(\cdot)\| < \infty$, nós escrevemos $h \in \mathcal{L}_1([a,b], X)$.

O próximo resultado é o análogo unidimensional do Teorema 3.5 do Capítulo 2. Para uma demonstração, deve-se aplicar o Teorema 2.2 anterior em lugar do Teorema 3.2 do Capítulo 2.

2.3 Teorema Se $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X,Y))$ e $f \in G([a,b], X)$, então $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}_1([a,b], Y)$ com

$$\int_{[a,b]} \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} d\tilde{\alpha} f.$$

Aplicando o Teorema 3.4 do Capítulo 2 obtemos o

2.4 Corolário Se $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X,Y))$ e $f \in BV([a,b], X)$, então $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}_1([a,b], Y)$ com

$$\int_{[a,b]} \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} d\tilde{\alpha} f.$$

E aplicando o Teorema 3.2 do Capítulo 2 obtemos o

2.5 Corolário Se $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X,Y))$ e $f \in \mathcal{C}([a,b], X)$, então $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}_1([a,b], Y)$ com

$$\int_{[a,b]} \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} d\tilde{\alpha} f.$$

Assim, em vista do Teorema 2.3 e seus corolários, podemos tratar da equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]} \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

em cada um dos seguintes contextos:

- a) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X,Y))$ e $x, f \in G([a,b], X)$;
- b) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$ e $x, f \in BV_a([a,b], X)$;
- c) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X,Y))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$.

Contexto a):

2.6 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $x, f \in G([a,b], X)$. Se $\|\alpha\|_1 < 1$, então dado $f \in G([a,b], X)$, existe um único $x \in G([a,b], X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Pelo Teorema 2.3, podemos considerar a aplicação contínua $T: G([a,b], X) \rightarrow G([a,b], X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a,b].$$

Para cada $x \in G([a,b], X)$, Tx realmente pertence a $G([a,b], X)$ já que f é regrada e a integral indefinida é contínua (Proposição 2.1 ii)). A continuidade de T segue de $\|\alpha\|_1 < \infty$.

Dados $x, y \in G([a,b], X)$, então $\|Tx - Ty\| = \sup\{\|Tx(t) - Ty(t)\|; t \in [a,b]\}$ e

$$\|Tx(t) - Ty(t)\| = \left\| \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot (x - y)(s) ds \right\| \leq \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty.$$

Portanto, $\|Tx - Ty\| \leq \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty$ e a tese segue pelo Teorema 1.1. ■

Contexto b):

2.7 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $x, f \in BV_a([a,b], X)$. Se $\|\alpha\|_1 < 1$, então dado $f \in BV_a([a,b], X)$, existe um único $x \in BV_a([a,b], X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Pelo Corolário 2.4, podemos considerar a aplicação contínua $T: BV_a([a,b], X) \rightarrow BV_a([a,b], X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a,b]$$

Dado $x \in BV_a([a,b],X)$, certamente Tx pertence a $BV_a([a,b],X)$. De fato, pois f é de variação limitada bem como a integral indefinida (pelo análogo unidimensional do Teorema 3.4 do Capítulo 2).

Por outro lado, como $\|\alpha\|_1 < 1$, então T é uma contração. De fato. Dados $x, y \in BV_a([a,b],X)$, temos que $\|Tx - Ty\| = V(Tx - Ty)$ e

$$\sum_i \|(Tx - Ty)(t_i) - (Tx - Ty)(t_{i-1})\| = \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha(s) \cdot (x - y)(s) ds \right\| \leq \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty,$$

para qualquer divisão $d = (t_i)$ de $[a,b]$.

A tese segue então do Princípio da Contração (Teorema 1.1). ■

Contexto c):

2.8 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b],L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $x, f \in \mathcal{C}([a,b],X)$. Se $\|\alpha\|_1 < 1$, então dado $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$, existe um único $x \in \mathcal{C}([a,b],X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Pelo Corolário 2.5, podemos considerar a aplicação contínua $T: \mathcal{C}([a,b],X) \rightarrow \mathcal{C}([a,b],X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a,b].$$

O restante da demonstração segue de modo análogo àquela do Teorema 2.6. ■

2.2 A equação integral linear de Volterra-Henstock

2.9 Teorema Sejam $\alpha \in H([a,b],L(X,Y))$. Então $\alpha \cdot f \in H([a,b],Y)$ se uma das condições seguintes é satisfeita

- i) $f \in BV([a,b],X)$;
- ii) $\tilde{\alpha} \in SV([a,b],L(X,Y))$ e $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$.

Em qualquer dos casos, $\int_{[a,b]}^K \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} d\tilde{\alpha} \cdot f$.

Prova (para i), veja [F-1], Teor. 2.2.8; para ii), veja o Corolário 3.7 do Capítulo 2).

De posse do Teorema 2.9, podemos considerar a equação integral linear de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]$$

onde ou $\alpha \in H([a,b], L(X))$ e $x, f \in BV_a([a,b], X)$, ou $\alpha \in H([a,b], L(X))$ é tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b], L(X))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$.

O próximo teorema é um resultado específico do caso unidimensional da Teoria de Integração de Kurzweil-Henstock e estabelece uma condição necessária para a existência da integral de Henstock. O leitor deve compará-lo com o Teorema 2.9 do Capítulo 2.

2.10 Teorema Se $f \in H([a,b], X)$, então existe uma sequência de conjuntos fechados $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \uparrow [a,b]$ e $f \in \mathcal{L}_1(X_n, X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n \cap [a,t]}^L f = \int_{[a,t]}^K f$$

uniformemente para todo $t \in [a,b]$.

Prova (basta adaptar a demonstração de Gengian em [G] para o caso a valores em espaços de Banach).

Através do Teorema 2.10, é possível fazermos inferências sobre a equação (V_H) a partir de equações do tipo (V_L) . De fato. Dado $\alpha \in H([a,b], L(X))$, pelo Teorema 2.10 existe uma sequência de fechados $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \uparrow [a,b]$ e $\alpha \in \mathcal{L}_1(X_n, L(X))$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a função $\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot): [a,b] \rightarrow L(X)$ é Bochner-Lebesgue integrável com

$$\|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\|_1 = \int_{[a,b]} \|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\| < \infty \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos, então, analisar a equação (V_H) em cada um dos contextos seguintes:

a) $\alpha \in H([a,b], L(X))$ é limitada e $x, f \in BV_a([a,b], X)$;

b) $\alpha \in H([a,b],L(X))$ é tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b],L(X))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a,b],X)$.

Contexto a):

Sejam $\alpha \in H([a,b],L(X))$ limitada e $f \in BV_a([a,b],X)$. Pelo Teorema 2.10 e pelo Corolário 2.4, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar a aplicação contínua $T_n: BV_a([a,b],X) \rightarrow BV_a([a,b],X)$ dada por

$$(T_n x)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Pelo o Teorema 2.9 ii), também podemos considerar a aplicação $T: BV_a([a,b],X) \rightarrow BV_a([a,b],X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Dado $x \in BV_a([a,b],X)$, certamente Tx pertence a $BV_a([a,b],X)$. De fato. Seja $d = (t_i)$ uma divisão de $[a,b]$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_i \|Tx(t_i) - Tx(t_{i-1})\| &\leq \sum_i \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds \right\| \leq \\ &\leq V(f) + (b-a) \|\alpha\|_\infty \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Também é verdade que se $(b-a) \|\alpha\|_\infty < 1$, então T é uma contração.

Contexto b):

Seja $\alpha \in H([a,b],L(X))$ tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b],L(X))$ e seja $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$. Pelo Teorema 2.10 e pelo Corolário 2.5, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar a aplicação contínua $T_n: \mathcal{C}([a,b],X) \rightarrow \mathcal{C}([a,b],X)$ dada por

$$(T_n x)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Consideremos também a aplicação $T: \mathcal{C}([a,b],X) \rightarrow \mathcal{C}([a,b],X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

(veja o Teorema 2.9 ii) e a Proposição 2.1 ii)).

Assim como no contexto a), se $\|\chi_{X_n}(\cdot) \alpha(\cdot)\|_1 < 1$, então T_n é uma contração e se

$\|b - a\| \|\alpha\|_\infty < 1$, então T é uma contração. Além disso, se α é limitada, então T é contínua.

Conservando a notação das considerações que acabamos de fazer, as demonstrações dos próximos teoremas seguem facilmente.

2.11 Teorema Dado $\alpha \in H([a, b], L(X))$ limitada (respectivamente $\alpha \in H([a, b], L(X))$) tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a, b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a, t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

as equações integrais lineares de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_{L_n}) \quad x(t) + \int_{[a, t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

obtidas através do Teorema 2.10, e a aplicação $T: BV_a([a, b], X) \rightarrow BV_a([a, b], X)$ (resp. $T: \mathcal{C}([a, b], X) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], X)$) definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a, t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

onde em todos os casos $x, f \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $x, f \in \mathcal{C}([a, b], X)$) e $n \in \mathbb{N}$. Se $\|\chi_{X_n}(s) \alpha(s)\|_1 < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então dado $f \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$), cada equação (V_{L_n}) admite uma única solução $x_n = x_n(f) \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $x_n \in \mathcal{C}([a, b], X)$). Suponhamos ainda que uma das seguintes condições é satisfeita

i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $x_0 \in \mathcal{C}([a, b], X)$);

ii) α é limitada e T^m é uma contração para algum $m > 1$, onde T^m é a composição de T m vezes.

Então dado $f \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$), existe $x \in BV_a([a, b], X)$ (resp. $x \in \mathcal{C}([a, b], X)$) que satisfaz a equação (V_H) .

Prova Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $\|\chi_{X_n}(s) \alpha(s)\|_1 < 1$, então T_n é uma contração. Logo, pelo Princípio da Contração (Teorema 1.1), T_n tem um único ponto fixo x_n , ou seja, dado $f \in$

$BV_a([a,b],X)$ (resp. $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$), existe um único $x_n = x_n(f) \in BV_a([a,b],X)$ (resp. $x_n \in \mathcal{C}([a,b],X)$) que satisfaz a equação $(V_{1,n})$.

Provemos agora que x_0 é solução de (V_H) , isto é, que x_0 é ponto fixo da aplicação T .

i) Dado $n_k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|x_0 - Tx_0\| \leq \|x_0 - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - T_{n_k}x_{n_k}\| + \|T_{n_k}x_{n_k} - T_{n_k}x_0\| + \|T_{n_k}x_0 - Tx_0\|,$$

onde o primeiro somando tende a zero quando $k \rightarrow \infty$ (pela convergência da subsequência), o segundo somando é igual a zero (pois x_{n_k} é ponto fixo de T_{n_k}), o terceiro somando é menor que $\|\chi_{x_{n_k}}(\alpha)\| \|x_{n_k} - x_0\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (pois $\|\chi_{x_n}(\alpha)\|_1 < 1$, para todo n , e pela convergência da subsequência), e o quarto somando tende a zero quando $k \rightarrow \infty$ (pelo Teorema 2.10).

ii) Como α é limitada, então T e T_n são aplicações contínuas e segue que

$$\|T_n - T\| = \sup\{\|T_nx - Tx\|; x \in BV_a([a,b],X)\}$$

$$(\text{resp. } \|T_n - T\| = \sup\{\|T_nx - Tx\|; x \in \mathcal{C}([a,b],X)\})$$

e portanto, segue do Teorema 2.10 que

$$\sup_x \|T_nx - Tx\| = \sup_x \left\| \int_{[a,t]}^L \chi_{x_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds \right\| \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde o supremo é tomado para todos os $x \in BV_a([a,b],X)$ (resp. $x \in \mathcal{C}([a,b],X)$). Daí, pelo Teorema 1.2 temos que $x_n \rightarrow x_0 = Tx_0$. ■

Por fim, temos o

2.12 Teorema Dada $\alpha \in H([a,b],L(X))$ limitada (respectivamente $\alpha \in H([a,b],L(X))$) tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b],L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $x, f \in BV_a([a,b],X)$ (resp. $x, f \in \mathcal{C}([a,b],X)$). Se $(b-a) \cdot \alpha_x < 1$, então dado $f \in BV_a([a,b],X)$ (resp. $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$), existe um único $x \in BV_a([a,b],X)$ (resp. $x \in \mathcal{C}([a,b],X)$) que satisfaz a equação (V_H) .

Prova (segue diretamente do Princípio da Contração (Teorema 1.1) para a aplicação T).

3. Equações integrais lineares multidimensionais

Nesta seção, vamos estudar a equação integral linear de Volterra

$$(V_*) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^* \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\int^*$ denota a integral multidimensional de Bochner-Lebesgue ou a integral multidimensional de Henstock.

É evidente que, quando estamos em dimensão $n > 1$, não tem sentido falarmos por exemplo em função regradada ou em variação para funções de pontos de $\mathbb{R}^n$. Tratamos então de espaços de funções contínuas (de pontos e de intervalos) e de função de intervalos que são de variação limitada.

3.1 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

Pelo Teorema 3.5 do Capítulo 2, podemos considerar a equação integral linear multidimensional de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $\alpha: R \rightarrow L(X)$ é Bochner-Lebesgue integrável e $\|\alpha\|_1 = \int_{[a,b]}^L \|\alpha(s)\| ds < \infty$ (escrevemos $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X))$) e onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$.

3.1 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$. Se $\|\alpha\|_1 = \int_{[a,b]}^L \|\alpha(s)\| ds < 1$, então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, existe um único $x \in \mathcal{C}(R, X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Consideremos a aplicação contínua $T: \mathcal{C}(R, X) \rightarrow \mathcal{C}(R, X)$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Dado $x \in \mathcal{C}(R, X)$, Tx realmente pertence a $\mathcal{C}(R, X)$. Basta notarmos que, definindo

$$A(t) = \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b] = R,$$

podemos tomar A como uma função aditiva de intervalos e outra vez como função de pontos de R (veja a Observação 1.3 do Capítulo 2). Quando tomamos A como função aditiva de intervalos, então A se torna uma integral indefinida. Daí, segue do Teorema 2.3 do Capítulo 2, que $A \in \mathcal{C}^{-1}(\mathfrak{I}_R, X)$. E, novamente como função de pontos, decorre a continuidade de A . Claramente T é contínua.

Dados $x, y \in \mathcal{C}(R, X)$, então $\|Tx - Ty\| = \sup\{\|Tx(t) - Ty(t)\|; t \in [a, b]\}$ e

$$\|Tx(t) - Ty(t)\| = \left\| \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot (x - y)(s) ds \right\| \leq \|\alpha\|_1 \|x - y\|_{\infty}.$$

Logo, como $\|\alpha\|_1 < 1$, então T é uma contração e a tese segue diretamente do Princípio da Contração (Teorema 1.1). ■

3.2 A equação integral linear de Volterra-Henstock

Pelo Corolário 3.7 do Capítulo 2, dado $\alpha \in H(R, L(X))$ tal que $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, onde A denota a integral indefinida de α , podemos considerar a **equação integral linear multidimensional de Volterra-Henstock**

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R$$

onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$.

De modo análogo ao que fizemos em dimensão um, vamos obter resultados para a equação multidimensional (V_H) por meio de equações multidimensionais do tipo (V_L) . Dado $\alpha \in H(R, L(X))$, pelo Teorema 2.9 do Capítulo 2, existe uma sequência de fechados $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \uparrow R$ e $\alpha \in \mathcal{L}_1(X_n, L(X))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a função

$$\chi_{X_n}(\cdot) \alpha(\cdot): R \rightarrow L(X)$$

é Bochner-Lebesgue integrável com $\|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\|_1 = \int_R \|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\|_1 < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 3.5 do Capítulo 2, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar a aplicação contínua $T_n: \mathcal{C}(R, X) \rightarrow \mathcal{C}(R, X)$ definida por

$$(T_n x)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $f \in \mathcal{C}(R, X)$. É fácil de ver que se $\|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\|_1 < 1$, então T_n é uma contração (veja a demonstração do Teorema 3.1 deste capítulo).

Suponhamos agora que $\alpha \in H(R, L(X))$ é tal que $\tilde{\alpha} \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e $f \in \mathcal{C}(R, X)$, e consideremos a aplicação $T: \mathcal{C}(R, X) \rightarrow \mathcal{C}(R, X)$ dada por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b] = R,$$

(veja o Teorema 2.3 do Capítulo 2). Se α é limitada então T é contínua e, se $\|R\| \|\alpha\|_\infty < 1$, então T é uma contração.

Vamos então aos resultados sobre existência de soluções para a equação integral multidimensional de Volterra-Henstock. O primeiro resultado que apresentamos é o análogo multidimensional do Teorema 2.11.

3.2 Teorema *Dado $\alpha \in H(R, L(X))$ tal que $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, onde A denota a integral indefinida de α , consideremos a equação integral linear de Volterra-Henstock*

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

e as equações integrais lineares multidimensionais de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_{L_n}) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R$$

obtidas através do Teorema 2.9 do Capítulo 2, onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\|\chi_{X_n}(\cdot)\alpha(\cdot)\|_1 < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, cada equação (V_{L_n}) admite uma única solução $x_n = x_n(f) \in \mathcal{C}(R, X)$. Suponhamos ainda que uma das condições seguintes é satisfeita:

- i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathcal{C}(R, X)$;

ii) α é limitada e T^m é uma contração para algum $m > 1$, onde T^m é a composição de T m vezes.

Então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, existe $x \in \mathcal{C}(R, X)$ que satisfaz a equação (V_H) .

Prova (a demonstração do Teorema 3.9 é análoga àquela do Teorema 2.11, porém em lugar do Teorema 2.10 devemos aplicar o Teorema 2.9 do Capítulo 2).

Finalmente, temos o análogo multidimensional do Teorema 2.12.

3.3 Teorema Dado $\alpha \in H(R, L(X))$ limitada com $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, onde A denota a integral indefinida de α , consideremos a equação integral linear multidimensional de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R$$

onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$. Se $\|R\| \|\alpha\|_\alpha < 1$, então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, existe um único $x \in \mathcal{C}(R, X)$ que satisfaz a equação (V_H) .

Prova (segue do Princípio da Contração - Teorema 1.1 - para a aplicação T).

Observações finais

- i) Se $\|\chi_{X_n}(\alpha)\|_1 < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sup_n \{\|\chi_{X_n}(\alpha)\|_1\} = \|R\| \|\alpha\|_\alpha \leq 1$ o que não implica que T é uma contração.
- ii) Em ambos os contextos a) e b) desta subseção, pode-se mostrar que T^m é uma contração se $\|R\|(\|\alpha\|_\alpha)^m < 1$.
- iii) Quando a dimensão de X é finita, então a equação (V_H) é exatamente a equação (V_L) visto que nesta condição os espaços $SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e $BV(\mathfrak{I}_R, L(X))$ coincidem e devido ao Teorema 3.4 do Capítulo 2.

Capítulo 6:

A equação multidimensional de Volterra

$$x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

como limite de sistemas discretos, onde α é uma função gauge integrável

No capítulo anterior tratamos da existência de soluções para a equação integral linear multidimensional de Volterra

$$(V_*) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^* \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

no sentido de cada uma das integrais de Bochner-lebesgue e de Henstock. Neste capítulo, vamos estudar a equação (V_*) como limite de equações discretas. Assim, a partir dos resultados que estabeleceremos, poder-se-á estudar as propriedades de (V_*) através da transmissão de propriedades dos sistemas discretos.

Para atingirmos nosso objetivo, vamos primeiramente estudar a equação integral linear multidimensional do tipo Volterra-Stieltjes

$$(V-S) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^* d\alpha(s) \cdot x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

no sentido das integrais de Kurzweil (para dimensão um) e de Riemann (para $n \geq 2$) a partir das idéias de Barbanti (veja [Ba]). A seguir, vamos fazer a equivalência de $(V-S)$ com a equação

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\int^L$ denota a integral de Bochner-Lebesgue, através de Fórmulas de Integração por Partes. Finalmente, a equação multidimensional de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]$$

é estudada a partir dos resultados obtidos para uma sequência de equações do tipo (V_L) tal qual fizemos no Capítulo 5.

1. O caso unidimensional

1.1 As equações integrais lineares de Volterra-Kurzweil-Stieltjes e de Volterra-Stieltjes

Seja $G^-([a,b],X) = \{h \in G([a,b],X); h \text{ é contínua à esquerda}\}$ e seja $G^{\sigma^-}([a,b],L(X,Y)) = \{\alpha \in G^\sigma([a,b],L(X,Y)); \text{ para todo } x \in X, \varphi_x \text{ é contínua à esquerda}\}$, onde para cada $x \in X, \varphi_x: t \in [a,b] \mapsto \alpha(t) \cdot x \in Y$. Então,

1.1 Proposição (veja [F-1], Teor. 2.1.10) *Se $\alpha \in G^{\sigma^-}([a,b],L(X,Y))$ e $f \in K^\alpha([a,b],X)$, então $\tilde{f}^\alpha \in G^-([a,b],Y)$, onde $\tilde{f}^\alpha(t) = \int_{[a,t]}^\kappa d\alpha(s) f(s)$, para cada $t \in [a,b]$.*

Pela Proposição 1.1 acima e pelo Teorema 2.2 do Capítulo 5, dada $\alpha \in BV([a,b],L(X)) \cap G^{\sigma^-}([a,b],L(X))$, podemos definir o operador linear contínuo F_α que aplica funções de $G^-([a,b],X)$ em $G^-([a,b],X)$ por

$$(F_\alpha f)(t) = \int_{[a,t]}^\kappa d\alpha(s) f(s), \quad t \in [a,b].$$

É de fácil verificação que realmente $F_\alpha \in L(G^-([a,b],X))$ (veja o Apêndice A, Proposição A.1).

Consideremos a equação integral linear do tipo Volterra-Stieltjes no sentido da integral de Kurzweil e que chamamos de **equação integral linear de Volterra-Kurzweil-Stieltjes**

$$(V-S) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^\kappa d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $\alpha \in BV([a,b],L(X)) \cap G^{\sigma^-}([a,b],L(X))$ e $x, f \in G^-([a,b],X)$.

Seja $T: X \rightarrow Y$ um operador linear limitado para o qual escrevemos $T \in \mathbf{B}(X,Y)$. Denotamos por $\mathbf{Ker}(T)$ e por $\mathbf{Im}(T)$ respectivamente o núcleo e a imagem de T e dizemos que $T \in \mathbf{B}(X,Y)$ é um **operador de Fredholm** se e só se $\mathbf{Im}(T)$ é fechado em Y e as dimensões de $\mathbf{Ker}(T)$ e de $\mathbf{Ker}(T^*)$, onde T^* denota o operador adjunto de T , são finitas.

O próximo resultado sobre existência de soluções regradas para a equação (V-S) foi apresentado por Barbanti em [Ba].

1.2 Teorema (veja [Ba], Teor. 3.2) *Dado $\alpha \in BV([a,b],L(X)) \cap G^{\sigma^-}([a,b],L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Kurzweil-Stieltjes*

$$(V - S) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in G([a, b], X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\alpha(t_1) - \alpha(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_\alpha) \in L(G([a, b], X))$ é um operador de Fredholm, onde I é o operador identidade em $G([a, b], X)$ e $(F_\alpha x)(t) = \int_{[a,t]}^K d\alpha(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b]$. Então dado $f \in G([a, b], X)$, existe $x \in G([a, b], X)$ que satisfaz a equação (V-S).

Convém dizer que, se $(F_\alpha)^m$ é um operador compacto para algum $m \geq 1$, então $(I + F_\alpha)$ é um operador de Fredholm (consulte [Se]).

Através do análogo unidimensional do Teorema 3.1 do Capítulo 2, podemos considerar a **equação integral linear de Volterra-Stieltjes**

$$(V - S) \quad x(t) + \int_{[a,t]} d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\alpha \in \text{SV}([a, b], L(X, Y))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a, b], X)$. Neste caso, estamos tratando da equação integral linear de Volterra-Stieltjes no sentido da integral de Riemann.

Com um procedimento análogo àquele feito por Barbanti em [Ba] para a obtenção de Teorema 2.3, pode-se demonstrar os próximos dois resultados: os Teoremas 1.3 e 1.4.

1.3 Teorema Dado $\alpha \in BV([a, b], L(X)) \cap C^\sigma([a, b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Stieltjes

$$(V - S) \quad x(t) + \int_{[a,t]} d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in \mathcal{C}([a, b], X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\alpha(t_1) - \alpha(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_\alpha) \in L(\mathcal{C}([a, b], X))$ é um operador de Fredholm, onde I é o operador identidade em $\mathcal{C}([a, b], X)$ e $(F_\alpha x)(t) = \int_{[a,t]} d\alpha(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b]$. Então dado $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$, existe $x \in \mathcal{C}([a, b], X)$ que satisfaz a equação (V-S).

Conforme a notação adotada no Capítulo 1, $BV_a([a,b],X)$ denota o espaço das funções de $[a,b]$ em X de variação limitada e que se anulam em $t = a$. O espaço $BV_a([a,b],X)$ é completo quando munido da norma dada pela variação. Seja $BV^-_a([a,b],X)$ o espaço das funções $f \in BV_a([a,b],X)$ tais que f é contínua à esquerda. Então $BV^-_a([a,b],X)$ é completo quando munido da norma dada pela variação.

Seja $A: [a,b] \rightarrow L(X)$ a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b],L(X))$. Então $A \in BV([a,b],L(X)) \cap \mathcal{C}([a,b],L(X))$ pelo análogo unidimensional do Teorema 3.4 do Capítulo 2 e pela Proposição 2.1 do Capítulo 5. Sob estas condições, consideremos o operador linear contínuo F_A que aplica funções de $BV^-_a([a,b],X)$ em $BV^-_a([a,b],X)$ dado por

$$(F_A f)(t) = \int_{[a,t]} dA(s) f(s), \quad t \in [a,b].$$

É realmente verdade que $F_A \in L(BV^-_a([a,b],X))$ (veja o Apêndice A, Proposição A.3).

Assim como os Teoremas 1.2 e 1.3, pode-se também demonstrar o

1.4 Teorema *Seja A a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b],L(X))$ e consideremos a equação integral linear de Volterra-Stieltjes*

$$(V - S) \quad x(t) + \int_{[a,t]} dA(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

onde $x, f \in BV^-_a([a,b],X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [A(t_1) - A(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_A) \in L(BV^-_a([a,b],X))$ é um operador de Fredholm, onde I é o operador identidade em $BV^-_a([a,b],X)$ e $(F_A x)(t) = \int_{[a,t]} dA(s) x(s)$, para cada $t \in [a,b]$. Então dado $f \in BV^-_a([a,b],X)$, existe $x \in BV^-_a([a,b],X)$ que satisfaz a equação (V-S).

Devemos salientar que

1.5 Observação O aspecto importante dos Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4 é que cada uma das equações neles tratada é o limite de sistemas discretos (veja o Teor. 3.1 de [Ba], ou o

Teorema 2.4 da Seção 2 seguinte). Isto quer dizer que podemos estudar as propriedades de tais equações através da transmissão de propriedades dos respectivos sistemas discretos.

1.2 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

No Capítulo 5, tratamos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

quando $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X, Y))$ e ou $x, f \in G([a,b], X)$, ou $x, f \in BV_a([a,b], X)$, ou $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$. Neste capítulo, nos interessa estudar a equação (V_L) nos seguintes contextos:

- a) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X, Y))$ e $x, f \in G^+([a,b], X)$;
- b) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$ e $x, f \in BV^-_a([a,b], X)$;
- c) $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X, Y))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$;

em cada um dos quais vamos fazer a equivalência da equação

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

com a equação

$$(V-S) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^* d\tilde{\alpha}(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

através do Teoremas 2.3 do Capítulo 5 ou de um de seus corolários, onde $\int^*$ denota uma das integrais de Kurzweil ou de Riemann e $\tilde{\alpha}$ denota a integral indefinida de α . Depois, vamos aplicar algum resultado da subseção anterior (Subseção 1.1) para a equação $(V-S)$ a fim de obtermos os resultados para a equação (V_L) .

Pelo análogo unidimensional do Teorema 3.4 do Capítulo 2, se $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$, então $\tilde{\alpha} \in BV([a,b], L(X))$ com $V(\tilde{\alpha}) = \|\alpha\|_1$. Logo, $\|\alpha\|_1 < 1$ se e somente se $V(\tilde{\alpha}) < 1$. Feitas estas considerações, os resultados sobre existência de soluções para a equação (V_L) são imediatos.

Contexto a):

1.6 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de

Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in G^-([a, b], X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\tilde{\alpha}(t_1) - \tilde{\alpha}(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_{\tilde{\alpha}}) \in L(G^-([a, b], X))$ é um operador de Fredholm, onde I é a identidade em $G^-([a, b], X)$ e $(F_{\tilde{\alpha}}x)(t) = \int_{[a,t]}^K d\tilde{\alpha}(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b]$. Então dado $f \in G^-([a, b], X)$, existe $x \in G^-([a, b], X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Pelo Teorema 2.3 do Capítulo 5, a equação (V_L) é equivalente à equação

$$x(t) + \int_{[a,t]}^K d\tilde{\alpha}(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\tilde{\alpha} \in BV([a, b], L(X)) \cap \mathcal{C}([a, b], L(X))$ (veja o Teorema 3.4 do Capítulo 2 e a Proposição 2.1 ii) do Capítulo 5). Portanto $\tilde{\alpha} \in SV([a, b], L(X)) \cap G^{\sigma-}([a, b], L(X))$ e a tese segue diretamente do Teorema 1.2. ■

Contexto b):

1.7 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a, b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in BV_a([a, b], X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\tilde{\alpha}(t_1) - \tilde{\alpha}(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_{\tilde{\alpha}}) \in L(BV_a([a, b], X))$ é um operador de Fredholm, onde I é a identidade em $BV_a([a, b], X)$ e $(F_{\tilde{\alpha}}x)(t) = \int_{[a,t]} d\tilde{\alpha}(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b]$. Então dado $f \in BV_a([a, b], X)$, existe $x \in BV_a([a, b], X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova Pelo Corolário 2.4 do Capítulo 5, a equação (V_L) é equivalente à equação

$$x(t) + \int_{[a,t]} d\tilde{\alpha}(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\tilde{\alpha} \in BV([a,b], L(X)) \cap \mathcal{C}([a,b], L(X))$. A tese segue, portanto, do Teorema 1.4. ■

E finalmente, estudamos a equação (V_L) no

Contexto c):

1.8 Teorema Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\tilde{\alpha}(t_1) - \tilde{\alpha}(t_2)])^* = \{0\}, \quad \text{para quaisquer } a \leq t_1 \leq t_2 \leq b,$$

e que $(I + F_{\tilde{\alpha}}) \in L(\mathcal{C}([a,b], X))$ é um operador de Fredholm, onde I é a identidade em $\mathcal{C}([a,b], X)$ e $(F_{\tilde{\alpha}} x)(t) = \int_{[a,t]} d\tilde{\alpha}(s) x(s)$, para cada $t \in [a,b]$. Então dado $f \in \mathcal{C}([a,b], X)$, existe $x \in \mathcal{C}([a,b], X)$ que satisfaz a equação (V_L) .

Prova (análoga àquela do Teorema 1.6 usando o Corolário 2.5 do Capítulo 5 e o Teorema 1.3 em lugar do Teorema 2.3 do Capítulo 5 e do Teorema 1.2 respectivamente).

1.3 A equação integral linear de Volterra-Henstock

No Capítulo 5, vimos que é possível estudarmos a equação integral linear de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

em cada um dos seguintes contextos:

- a) $\alpha \in H([a,b], L(X))$ é limitada e $x, f \in BV_a([a,b], X)$;
- b) $\alpha \in H([a,b], L(X))$ é tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b], L(X))$ e $x, f \in \mathcal{C}([a,b], X)$.

Assim como fizemos no Capítulo 5, podemos fazer inferências sobre a equação (V_H) a partir de equações do tipo (V_L) através do Teorema 2.10 daquele capítulo. E temos

1.9 Teorema Dado $\alpha \in H([a,b], L(X))$ limitada (respectivamente $\alpha \in H([a,b], L(X))$) tal que $\tilde{\alpha} \in SV([a,b], L(X))$, consideremos a equação integral linear de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

as equações integrais lineares multidimensionais de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_{L_n}) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

obtidas através do Teorema 2.10 do Capítulo 5, e consideremos também a aplicação $T: BV_a([a,b], X) \rightarrow BV_a([a,b], X)$ (resp. $T: \mathcal{E}([a,b], X) \rightarrow \mathcal{E}([a,b], X)$) definida por

$$(Tx)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

onde $x, f \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $x, f \in \mathcal{E}([a,b], X)$) e $n \in \mathbb{N}$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [a, b]$, seja $\tilde{\alpha}_n(t) = \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) ds$, isto é, $\tilde{\alpha}_n$ é a integral indefinida da função $\chi_{X_n}(\alpha)$, e suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + [\tilde{\alpha}_n(t_1) - \tilde{\alpha}_n(t_2)])^* = \{0\}, \quad a \leq t_1 \leq t_2 \leq b, \quad n \in \mathbb{N}$$

e que $(I + F_{\tilde{\alpha}_n}) \in L(BV_a([a,b], X))$ (resp. $(I + F_{\tilde{\alpha}_n}) \in L(\mathcal{E}([a,b], X))$) é um operador de Fredholm, onde I é a identidade em $BV_a([a,b], X)$ (resp. em $\mathcal{E}([a,b], X)$) e $(F_{\tilde{\alpha}_n}x)(t) = \int_{[a,t]} d\tilde{\alpha}_n(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b]$. Então dado $f \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $f \in \mathcal{E}([a,b], X)$), cada equação (V_{L_n}) admite uma solução $x_n = x_n(f) \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $x_n \in \mathcal{E}([a,b], X)$). Suponhamos ainda que uma das condições seguintes é satisfeita:

i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $x_0 \in \mathcal{E}([a,b], X)$);

ii) α é limitada e T^m é uma contração para algum $m > 1$, onde T^m é a composição de T m vezes.

Então dado $f \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $f \in \mathcal{E}([a,b], X)$), existe um único $x \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $x \in \mathcal{E}([a,b], X)$) que satisfaz a equação (V_H) .

Prova Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação contínua $T_n: BV_a([a,b], X) \rightarrow BV_a([a,b], X)$

definida por

$$(T_n x)(t) = f(t) - \int_{[a,t]} \chi_{x_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Pelo Teorema 2.10 do Capítulo 5, $T_n \rightarrow T$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema 1.7 (respestivamente pelo Teorema 1.8), cada equação (V_{L_n}) admite uma solução $x_n \in BV_a([a,b], X)$ (resp. $x_n \in \mathcal{C}([a,b], X)$). O restante da demonstração é análogo às provas dos itens i) e ii) do Teorema 2.11 do Capítulo 5. ■

A observação que segue é muito importante.

1.10 Observação Sob as hipóteses do Teorema 1.9, segue através do Teorema 2.10 do Capítulo 5 que cada equação (V_H) é o limite uniforme de equações (V_L) cada uma das quais é o limite de equações discretas do tipo (V_L) . Decorre então que (V_H) é o limite de equações discretas do tipo (V_L) , e isto implica que conclusões sobre (V_H) podem ser tiradas a partir da transmissão de propriedades dos sistemas discretos do tipo (V_L) .

2. O caso multidimensional

Nesta seção, vamos estudar a equação integral linear de Volterra

$$(V_*) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^* \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\int^*$ denota a integral multidimensional de Bochner-Lebesgue ou a integral multidimensional de Henstock.

Primeiramente então, vamos estender o Teorema 1.4 da seção anterior para o caso multidimensional obtendo, deste modo, um teorema sobre existência de soluções para a equação integral linear multidimensional de Volterra-Stieltjes

$$(V-S) \quad x(t) + \int_{[a,t]} d\alpha(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

no sentido da integral de Riemann. Neste caso, em lugar de $(V-S)$, vamos escrever (L) e

teremos que (L) será o limite de sistemas discretos.

Para o estudo da equação (L), vamos seguir de perto aquilo que foi feito por Barbanti em [1] no caso unidimensional fazendo, porém, as adaptações concernentes à linguagem multidimensional. Em [1] são consideradas inicialmente equações lineares de Stieltjes a tempo discreto e depois é feita a transição daquelas para equações lineares de Stieltjes a tempo contínuo. É o análogo desta transição para o caso multidimensional que apresentamos nas próximas linhas.

Em segundo lugar, vamos estabelecer os análogos multidimensionais dos resultados sobre existência de soluções para a equação de Volterra com respeito à integral de Bochner-Lebesgue e depois com respeito à integral de Henstock.

2.1 Equações de Stieltjes discretas

Sejam $N \in \mathbb{N}$, e X^N o conjunto das N -uplas em X , onde X é um espaço de Banach. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N$, seja $Q_m \in L(X)$. A partir dos operadores Q_m , obtemos funções $K_{p,q}: X^N \rightarrow X$, $p, q \in \mathbb{N}$, dadas por

$$K_{p,p} = 0$$

$$K_{p,q}x = \sum_{s=p+1}^q Q_s x_s, \quad p < q \text{ e } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Assim, definimos a **equação linear de Stieltjes discreta** em X^N por

$$(L_N) \quad (\pi_q + K_{p,q})x = \pi_q u, \quad x, u \in X^N, \quad 0 \leq p \leq q \leq N,$$

onde π_q ($0 \leq q \leq N$) denota a projeção linear usual sobre X^N , isto é, $\pi_q(x_1, \dots, x_N) = x_q$.

O teorema seguinte trata da existência de soluções para a equação linear de Stieltjes discreta (L_N) .

2.1 Teorema (veja [Ba], Teor. 2.2 e as observações que o seguem) *Consideremos a equação linear de Stieltjes discreta em X^N*

$$(L_N) \quad (\pi_q + K_{p,q})x = \pi_q u, \quad x, u \in X^N, \quad 0 \leq p \leq q \leq N.$$

Em particular temos que

$$(L_N) \quad (\pi_r + K_{0,r})x = \pi_r u, \quad x, u \in X^N, \quad 0 \leq r \leq N.$$

Suponhamos que vale

$$(H_N) \quad \text{Ker}(\pi_r + K_{r-1,r})^* = \{0\}, \quad 1 \leq r \leq N$$

e $\text{Im}(\pi_r + K_{r-1,r})$ é fechada para todo r . Então dado $u \in X^N$, existe $x \in X^N$ que satisfaz a equação (L_N) .

Segundo a notação e definições adotadas no Capítulo 2, $R = [a, b]$ é um intervalo compacto de $\mathbb{R}^2$, D_R é o conjunto de todas as divisões $d = (J_i)$ de R , $|d|$ é o número de intervalos da divisão d , e $\mathfrak{I}_R$ é o conjunto dos intervalos fechados contidos em R .

Dados $s = (s_1, s_2)$ e $t = (t_1, t_2) \in R$, nós denotamos o intervalo semi-fechado $]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$ por $]s, t]$. Dizemos que uma função $h: R \rightarrow X$ limitada é uma **função escada** (escrevemos $h \in \mathbf{E}(R, X)$) se existe $d = (J_i) \in D_R$, onde $J_i = [s^i, t^i]$, $s^i, t^i \in R$, tal que $h|_{]s^i, t^i]}$ é constante para cada i . Com isto, dada $d = (J_i) \in D_R$, podemos identificar uma função escada sobre d , digamos x_d , com um elemento $(x_1, \dots, x_{|d|}) \in X^{|d|}$ obtido da seguinte forma:

$$x_i = x_d|_{]s^i, t^i]}, \quad i = 1, \dots, |d|.$$

Sejam $A: \mathfrak{I}_R \rightarrow L(X)$ uma função limitada (i.e., $\sup\{\|A(J)\|; J \in \mathfrak{I}_R\} < \infty$) e $d = (J_i) \in D_R$. Fazendo $N = |d|$ e $Q_m = Q_m(d)$ dada por

$$Q_m = A(J_m), \quad m = 1, 2, \dots, |d|,$$

e tomando $K_{p,q} = K_{p,q}(d)$, $K_{p,q}: X^{|d|} \rightarrow X$ como os definidos anteriormente à página 87, obtemos a equação linear de Stieltjes (L_N) que denotaremos por (L_d) :

$$(L_d) \quad (\pi_r + K_{0,r})x = \pi_r u, \quad x, u \in X^{|d|}, \quad 0 \leq r \leq |d|$$

através da identificação $m \mapsto J_m$. Com isto, podemos substituir a hipótese

$$(H_N) \quad \text{Ker}(\pi_r + K_{r-1,r})^* = \{0\}, \quad 1 \leq r \leq N$$

do Teorema 2.1 por uma outra

$$(H) \quad \text{Ker}(I + A(J))^* = \{0\}, \quad J \in \mathfrak{I}_R,$$

que independe de $d \in D_R$ e onde I denota a identidade em $L(X)$.

Dados $x \in X$ e $\alpha \in \text{SV}(\mathfrak{I}_R, L(X))$, temos que $\int_J d\alpha x = \alpha(J) \cdot x$, para cada $J \in \mathfrak{I}_R$. Em particular, $\int_{[a,t]} d\alpha x = \alpha([a,t]) \cdot x$, para cada $t \in [a, b] = R$. Dada $d = (J_i) \in D_R$, com $J_i = [s^i, t^i]$,

para cada i , definimos

$$A(J_i)x = \alpha(J_i) \cdot x, \text{ para cada } i.$$

Então, da arbitrariedade na escolha de d segue que

$$A(J) = \alpha(J), \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R.$$

Assim, a hipótese (H) para a equação de Stieltjes (L_d) correspondente pode ser escrita como

$$(H) \quad \text{Ker}(I + \alpha(J))^* = \{0\}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R,$$

e a equação (L_d) pode ser escrita como

$$(L_d) \quad x_r + \sum_{i=1}^r \int_{|s^i, t^i|} d\alpha(s) x_i = u_r, \quad 1 \leq r \leq |d|,$$

ou ainda (e da forma como vamos usar) como

$$(L_d) \quad x_d(t^r) + \sum_{i=1}^r \int_{|s^i, t^i|} d\alpha(s) x_d(s) = u_d(t^r), \quad 1 \leq r \leq |d|,$$

onde x_d e u_d são funções escada sobre d , com $x_d|_{|s^i, t^i|} = x_i$ e $u_d|_{|s^i, t^i|} = u_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, |d|$, e $t^0 = a$. Quando $t^0 = a$ e $r = 0$ a equação (L_d) é degenerada e vamos dispensá-la.

Com a notação anterior e devido ao Teorema 2.1, podemos enunciar o

2.2 Teorema *Dados $\alpha \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e $d = (J_i) \in D_R$, com $J_i = [s^i, t^i]$, para cada i , consideremos a equação linear de Stieltjes em $E(R, X)$*

$$(L_d) \quad x_d(t^r) + \sum_{i=1}^r \int_{|s^i, t^i|} d\alpha(s) x_d(s) = u_d(t^r), \quad 1 \leq r \leq |d|,$$

onde $x_d, u_d \in E(R, X)$ são funções escada sobre d . Suponhamos que vale

$$(H) \quad \text{Ker}(I + \alpha(J))^* = \{0\}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R,$$

e que $\text{Im}(\alpha(J))$ é fechada para cada $J \in \mathfrak{I}_R$. Então dado u_d existe x_d que satisfaz (L_d) .

2.2 Equações de Stieltjes contínuas

Se $A: \mathfrak{I}_R \rightarrow L(X)$ é a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e $x \in \mathcal{C}(R, X)$, então existe a integral multidimensional de Riemann-Stieltjes $\int_R dA x$ (veja o

Teorema 3.4 e o Teorema 3.2 ambos do Capítulo 2). Sob estas condições, podemos considerar o operador linear contínuo linear $F_A: \mathcal{C}(R, X) \rightarrow \mathcal{C}(R, X)$ dado por

$$(F_A x)(t) = \int_{[a, t]} dA(s) x(s), \quad t \in [a, b] = R.$$

bem como a equação integral linear multidimensional de Volterra-Stieltjes

$$(L) \quad x(t) + \int_{[a, t]} dA(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $f \in \mathcal{C}(R, X)$.

É realmente verdade que $F_A \in L(\mathcal{C}(R, X))$ (veja a Proposição A.5 do Apêndice A).

Para realizarmos a transição de equações do tipo (L_d) a tempo discreto definidas na subseção anterior para equações a tempo contínuo do tipo (L) acima, vamos precisar de um teorema que extenda as soluções da equação (L_d) ao intervalo todo, ou seja, que mostre que a equação integral linear de Volterra-Stieltjes a tempo contínuo pode ser aproximada por equações discretas. E é este resultado que apresentamos a seguir.

2.3 Teorema *Seja $\alpha \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X)) \cap SL(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existe $d = (J_i) \in D_R$, com $J_i = [s^i, t^i]$ para cada i , tal que se x_d e u_d são funções escada de R em X sobre d com*

$$\left\| x_d(t^r) + \sum_{i=1}^r \int_{J_i} d\alpha(s) x_d(s) - u_d(t^r) \right\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } 1 \leq r \leq |d|,$$

temos que

$$\left\| x_d(t) + \int_J d\alpha(s) x_d(s) - u_d(t) \right\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } J = [s, t] \in \mathfrak{I}_R.$$

Em particular,

$$\left\| x_d(t) + \int_{[a, t]} d\alpha(s) x_d(s) - u_d(t) \right\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [a, b] = R.$$

Prova Sejam $\varepsilon > 0$ e $F(J) = \int_J d\alpha(s) x(s)$ para todo $J \in \mathfrak{I}_R$. Como $\alpha \in SL(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e $x \in H^\alpha(R, X)$, segue do Teoremas 2.6 do Capítulo 2 e do Lema A.4 do Apêndice A que $F \in \mathcal{C}^\lambda(\mathfrak{I}_R, X)$. Logo, dado $J \in \mathfrak{I}_R$, existe $0 < \eta < 1$, tal que $\|F(J) - F(I)\| < \varepsilon$, sempre que $I \in \mathfrak{I}_R$ é tal que $m(I \Delta J) < \eta$.

Seja $R = [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e tomemos $d = (J_i) \in D_R$, com $J_i = [s^i, t^i]$ para cada i , tal que se $J_i \cap J_j = \emptyset$, então $\text{dist}(J_i, J_j) < \lambda\eta$, onde

$$\lambda < \min \left\{ 1, \frac{1}{4(\max\{b_i - a_i; i = 1, 2\} + 1)} \right\}.$$

Observe que se $J_i \cap J_j \neq \emptyset$, então $\text{dist}(J_i, J_j) < \lambda\eta$, com muito mais razão.

Dado $J = [s, t] \in \mathfrak{T}_R$, seja $A = \{i; J_i \cap J \neq \emptyset\}$. Então $J \subset \bigcup_{i \in A} J_i$ e podemos supor,

sem perda de generalidade, que $\bigcup_{i \in A} J_i$ é do tipo $\bigcup_{i=1}^r J_r$, para algum r , $1 \leq r \leq |d|$. Daí, pelo

fato de F ser uma função aditiva de intervalos decorre da continuidade de F que

$$(1) \quad \text{se } m\left(\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J\right) < \eta, \text{ então } \left\| F\left(\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J\right) \right\| \leq \sum_{i \in A} \|F(J_i) - F(J)\| < v\varepsilon,$$

onde v denota o número de elementos de A . É claro que $v \leq |d|$.

Sejam x_d e $u_d \in E(R, X)$ sobre d com $x_i = x_d|_{[s^i, t^i]}$, e $u_i = u_d|_{[s^i, t^i]}$, $i = 1, \dots, |d|$,

e tais que

$$\left\| x_d(t^r) + \sum_{i=1}^r \int_{[s^i, t^i]} d\alpha(s) x_d(s) - u_d(t^r) \right\| < \varepsilon$$

(uma tal d existe pelo Teorema 2.2) e seja $j \in A$ tal que $t \in [s^j, t^j]$. Então $u_d(t) = u_j = u_d(t^j)$ e $x_d(t) = x_j = x_d(t^j)$. Logo, para demonstrarmos a tese, basta que provemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^r \int_{[s^i, t^i]} d\alpha(s) x_d(s) - \int_J d\alpha(s) x_d(s) \right\|$$

é suficientemente pequeno. Entretanto,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r \int_{[s^i, t^i]} d\alpha(s) x_d(s) - \int_J d\alpha(s) x_d(s) \right\| &= \left\| \int_{\bigcup_{i \in A} J_i} d\alpha(s) x_d(s) - \int_J d\alpha(s) x_d(s) \right\| = \\ &= \left\| \int_{\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J} d\alpha(s) x_d(s) \right\| = \left\| F\left(\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J\right) \right\|. \end{aligned}$$

Assim, diante de (1), basta que provemos que $m\left(\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J\right) < \eta$. Mas este fato segue diretamente da escolha de d . De fato. Sejam, então, k e h os valores dos lados do intervalo J

como mostra a figura a seguir.

Podemos ilustrar também que

onde E está contido na união dos intervalos J_i de d tais que $i \notin A$. Então,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i \in A} J_i \setminus J\right) &< (k + 2\lambda\eta)(h + 2\lambda\eta) - |J| = 2\lambda\eta(k + h) + 4\lambda^2\eta^2 < \\ &< 2\lambda\eta(k + h) + 4\lambda\eta < 4\lambda\eta(\max\{b_i - a_i; i = 1, 2\} + 1) < \eta \end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. ■

O lema abaixo é a base da demonstração do teorema que o segue.

2.4 Lema (veja [Se], Th. V.1.4) *Se $T: X \rightarrow Y$ é um operador de Fredholm, então existe um subespaço fechado X_o de X tal que*

$$X = X_o \oplus \text{Ker}(T)$$

e existe um subespaço Y_o de Y de dimensão igual a dimensão de $\text{Ker}(T^)$ tal que*

$$Y = \text{Im}(T) \oplus Y_o.$$

Além disso, existe um operador $T_o \in B(Y, X)$ tal que

- i) $\text{Ker}(T_o) = Y_o$;
- ii) $\text{Im}(T_o) = X_o$;
- iii) $T_o T = I$ em X_o ;
- iv) $TT_o = I$ em $\text{Im}(T)$;

onde I denota a identidade.

O resultado que apresentamos agora é o análogo multidimensional do Teorema 1.3.

2.5 Teorema *Seja A a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{I}_R, L(X))$ e consideremos a equação integral linear multidimensional de Volterra-Stieltjes*

$$(L) \quad x(t) + \int_{[a,t]} dA(s)x(s) = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $x, f \in \mathcal{E}(R, X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + A(J))^* = \{0\}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R,$$

e que $T = I + F_A$ é um operador de Fredholm, onde $(F_A x)(t) = \int_{[a,b]} dA(s)x(s)$, para cada $t \in [a, b] = R$, e I é o operador identidade em $\mathcal{E}(R, X)$. Então, dado $f \in \mathcal{E}(R, X)$, existe $x \in \mathcal{E}(R, X)$ que satisfaz (L).

Prova Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $E(R, X)$ que converge para f na norma do sup. Devido à hipótese (H) e pelo fato de que $A \in BV(\mathfrak{I}_R, L(X)) \cap SL(\mathfrak{I}_R, L(X))$ (veja os Teoremas 3.4 e 2.3 ambos do Capítulo 2), então pelos Teoremas 2.2 e 2.3 podemos definir equações

$$(L_n) \quad x_n(t) + \int_{[a,t]} d\alpha(s)x_n(s) = f_n(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

cada uma das quais admite uma solução $x_n \in E(R, X)$. Além disso, $Tx_n = (I + F_\alpha)x_n = f_n$ e, como $f_n \rightarrow f$, segue

$$(1) \quad Tx_n \rightarrow f.$$

Denotemos por $\dim(B)$ a dimensão de um conjunto B . Como $T \in L(\mathcal{E}(R, X))$ é um operador de Fredholm, então segue do Lema 2.4 que

a) existe um subespaço fechado X_o de $\mathcal{E}(R, X)$ tal que vale

$$(2) \quad \mathcal{E}(R, X) = X_o \oplus \text{Ker}(T);$$

b) existe um subespaço Y_o de $\mathcal{E}(R, X)$ tal que valem

$$(3) \quad \dim(Y_o) = \dim(\text{Ker}(T^*))$$

$$(4) \quad \mathcal{E}(R, X) = \text{Im}(T) \oplus Y_o;$$

c) existe um operador $T_o \in B(\mathcal{E}(R, X), \mathcal{E}(R, X))$ tal que valem

$$(5) \quad \text{Ker}(T_o) = Y_o;$$

$$(6) \quad \text{Im}(T_o) = X_o;$$

$$(7) \quad T_o T = I \text{ em } X_o;$$

$$(8) \quad T T_o = I \text{ em } \text{Im}(T);$$

onde I denota a identidade e T^* é o operador adjunto de T .

Por (3) e pela hipótese (H), temos que $\dim(Y_o) = 0$. Daí, segue de (4) que $\dim(\mathcal{E}(R, X)) = \dim(\text{Im}(T))$ e, portanto, $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ (usando uma propriedade básica da Álgebra Linear). Deste modo, $\dim(\mathcal{E}(R, X)) = \dim(X_o)$ (por (2)) e, como $X_o \subset \mathcal{E}(R, X)$ é fechado, então $X_o = \mathcal{E}(R, X)$.

Pelo fato de termos $f_n \rightarrow f$ e T_o limitado, segue

$$(9) \quad T_o f_n \rightarrow T_o f.$$

Para cada n , temos através de (L_n) que $f_n = T x_n$ e, portanto, $T_o f_n = T_o T x_n$, donde, por (7), segue

$$(10) \quad T_o f_n = x_n.$$

Daí, por (9) e (10) vem

$$(11) \quad x_n \rightarrow T_o f$$

e, fazendo $x = T_o f$, temos que $x \in \mathcal{E}(R, X)$, pois $\mathcal{E}(R, X)$ é completo. Resta provar que x é solução de (L). Mas isto é imediato por (8), pois $T T_o f = f$ e, portanto, $T x = f$. ■

2.3 A equação integral linear de Volterra-Bochner-Lebesgue

Assim como no capítulo anterior, vamos considerar a equação integral linear multidimensional de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X))$ e $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$.

A partir do Teorema 2.5, vamos demonstrar o seguinte resultado de existência de soluções para a equação (V_L) :

2.6 Teorema *Dado $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X))$ consideremos a equação integral linear multidimensional de Volterra-Bochner-Lebesgue*

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$. Suponhamos que

$$(H) \quad \text{Ker}(I + A(J))^* = \{0\}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R,$$

onde A denota a integral indefinida de α , e que $(I + F_A) \in L(\mathcal{C}(R, X))$ é um operador de Fredholm, onde I é o operador identidade em $\mathcal{C}(R, X)$ e $(F_A x)(t) = \int_{[a,t]}^K dA(s) x(s)$, para cada $t \in [a, b] = R$. Então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, existe $x \in \mathcal{C}(R, X)$ que satisfaz (V_L) .

Prova Pelo Teorema 3.5 do Capítulo 2, a equação (V_L) é equivalente à equação

$$x(t) + \int_{[a,t]} dA(s) x(s) = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

e a tese segue do Teorema 2.5. ■

2.7 Observação Sob as hipóteses do Teorema 2.6, a equação (V_L) é equivalente à equação de Stieltjes contínua que, por sua vez, é o limite de equações discretas (L_d) . Segue, portanto, que (V_L) é o limite de equações discretas (L_d) .

2.4 A equação integral linear de Volterra-Henstock

Consideremos a equação integral linear multidimensional de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R$$

onde $\alpha \in H(R, L(X))$ é tal que $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, com A denotando a integral indefinida de α , e $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$ (veja o Capítulo 5, Subseção 3.1).

O próximo resultado é o análogo multidimensional do Teorema 1.9.

2.8 Teorema *Dado $\alpha \in H(R, L(X))$ tal que $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, onde A denota a integral indefinida de α , consideremos a equação integral linear de Volterra-Henstock*

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R,$$

bem como as equações integrais lineares multidimensionais de Volterra-Bochner-Lebesgue

$$(V_{L_n}) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] = R$$

obtidas através do Teorema 2.9 do Capítulo 2, onde $x, f \in \mathcal{C}(R, X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que vale

$$(H) \quad \text{Ker}(I + A_n(J))^* = \{0\}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{I}_R, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $A_n(J) = \int_J^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds$, para cada $J \in \mathfrak{I}_R$, e que $(I + F_{A_n}) \in L(\mathcal{C}(R, X))$ é um operador de Fredholm, onde I é a identidade em $\mathcal{C}(R, X)$ e, para cada $t \in [a, b] = R$, $(F_{A_n} x)(t) = \int_{[a,t]}^L dA_n(s) x(s)$. Então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, cada equação (V_{L_n}) admite uma solução $x_n = x_n(f) \in \mathcal{C}(R, X)$. Suponhamos ainda que uma das condições seguintes é satisfeita:

i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathcal{C}(R, X)$;

ii) α é limitada e T^m é uma contração para algum $m > 1$, onde T^m é a composição de T m vezes.

Então dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, existe $x \in \mathcal{C}(R, X)$ que satisfaz a equação (V_H) .

Prova Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação contínua $T_n: \mathcal{C}(R, X) \rightarrow \mathcal{C}(R, X)$ dada por

$$(T_n x)(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^L \chi_{X_n}(s) \alpha(s) \cdot x(s) ds, \quad t \in [a, b] = R.$$

Pelo Teorema 2.6, dado $f \in \mathcal{C}(R, X)$, cada equação (V_{L_n}) admite uma solução $x_n = x_n(f) \in$

$\mathcal{C}(R, X)$. O restante da demonstração segue os passos da prova do Teorema 2.11 do Capítulo 5, aplicando-se porém o Teorema 2.9 do Capítulo 2. ■

2.9 Observação Dada $\alpha \in H(R, L(X))$ tal que $A \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X))$, onde A denota a integral indefinida de α , seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de fechados de R obtida pelo Teorema 2.9 do Capítulo 2. Então, dados $J_0 \in \mathfrak{I}_R$, $n \in \mathbb{N}$, e $x \in \mathcal{C}(R, X)$, temos que

$$\left\| \int_{X_n \cap J_0}^L \alpha \cdot x - \int_{J_0}^K \alpha \cdot x \right\| \leq \sup_{J \in \mathfrak{I}_R} \left\| \int_{X_n \cap J}^L \alpha \cdot x - \int_J^K \alpha \cdot x \right\| < \frac{1}{n}.$$

Sejam $I_n = X_n \cap J_0$ e $\alpha_n = \chi_{I_n} \alpha$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\left\| \int_{J_0}^L \alpha_n \cdot x - \int_{J_0}^K \alpha \cdot x \right\| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $\int_{J_0}^L \alpha_n \cdot x = \int_{J_0} dA_n x$ (pelo Teorema 3.5 do Capítulo 2) e $A_n \in BV(\mathfrak{I}_R, L(X)) \cap SL(\mathfrak{I}_R, L(X))$ onde, para cada n , A_n é a integral indefinida de α_n . Segue então do Teorema 2.3 e sua demonstração que, sob as hipóteses do Teorema 2.8, a equação (V_H) pode ser aproximada por um sistema de equações discretas (L_d) .

Apêndice A:

Demonstrações adicionais

Por sugestão do Prof. Dr. José Luis Boldrini da Comissão Julgadora, foram adicionadas demonstrações de determinadas afirmações feitas no trabalho.

Proposição A.1 *Seja $\alpha \in BV([a, b], L(X)) \cap G^{\sigma^-}([a, b], L(X))$. Então F_α definido por*

$$(F_\alpha f)(t) = \int_{[a, t]}^K d\alpha(s) f(s), \quad t \in [a, b]$$

é um operador linear contínuo sobre $G^-([a, b], X)$ (i.e., $F_\alpha \in L(G^-([a, b], X))$).

Prova Como $\alpha \in G^{\sigma^-}([a, b], L(X))$, então $F_\alpha f \in G^-([a, b], X)$ (pela Proposição 1.1 do Capítulo 6). A linearidade de F_α segue da linearidade da integral.

Agora, provemos a continuidade de F_α . Dados $f, g \in G^-([a, b], X)$ e $t \in [a, b]$, sejam $\varepsilon > 0$ e δ o gauge de $[a, b]$ da definição de $(f - g) \in K^\alpha([a, b], X)$. Então, pelo Lema de Saks-Henstock segue que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, t]}$ δ -fina,

$$\begin{aligned} \|F_\alpha(f - g)\| &= \sup_{t \in [a, b]} \|F_\alpha(f - g)(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \left\| \int_{[a, t]}^K d\alpha(f - g) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \left\| \int_{[a, t]}^K d\alpha(f - g) - \sum_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot (f - g)(\xi_i) \right\| + \\ &+ \sup_{t \in [a, b]} \left\| \sum_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot (f - g)(\xi_i) \right\| < \varepsilon + \sup_{t \in [a, b]} \{V_{[a, t]}(\alpha) \|f - g\|\} \leq \varepsilon + V(\alpha) \|f - g\|, \end{aligned}$$

onde $V_{[a, t]}(\alpha)$ denota a variação de α no intervalo $[a, t]$. Logo, $\|f - g\| \rightarrow 0$ implica que $\|F_\alpha f - F_\alpha g\| \rightarrow 0$. ■

De modo análogo, prova-se que

Proposição A.2 *Seja $\alpha \in BV([a, b], L(X)) \cap C^\sigma([a, b], L(X))$. Então F_α definido por*

$$(F_\alpha f)(t) = \int_{[a, t]} d\alpha(s) f(s), \quad t \in [a, b]$$

é um operador linear contínuo sobre $\mathcal{C}([a, b], X)$ (i.e., $F_\alpha \in L(\mathcal{C}([a, b], X))$).

Proposição A.3 Se $A \in BV([a,b],L(X))$ é a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b],L(X))$, então F_A definido por

$$(F_A f)(t) = \int_{[a,t]} dA(s) f(s), \quad t \in [a,b]$$

é um operador linear contínuo sobre $BV_a([a,b],X)$ (i.e., $F_A \in L(BV_a([a,b],X))$).

Prova

1) Provemos que $F_A f \in BV_a([a,b],X)$.

Pela Proposição 2.1 ii), $A \in \mathcal{C}([a,b],L(X))$ e $F_A f \in \mathcal{C}([a,b],X)$. Além disso, $F_A f(a) = 0$. Falta mostrar que $F_A f \in BV([a,b],X)$.

Afirmção: $f \in H^\wedge([a,b],X)$. De fato. Como $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b],L(X)) \subset H([a,b],L(X))$ e $f \in BV([a,b],X)$, segue do Teorema 2.9 i) do Capítulo 5 que $\alpha \cdot f \in H([a,b],X)$ com

$$K \int_{[a,b]} \alpha \cdot f = \int_{[a,b]} dA f.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e δ o gauge de $[a,b]$ tal que para toda $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina

$$\sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha - \alpha(\xi_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| < \varepsilon$$

e

$$\sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha \cdot f - \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| < \varepsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} dA f - [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| &= \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha \cdot f - [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| \leq \\ &\leq \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha \cdot f - \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| + \sum_i \left\| \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) [t_i - t_{i-1}] - [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| < \\ &< \varepsilon + \sum_i \left\| \alpha(\xi_i) [t_i - t_{i-1}] - \int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha \right\| \|f\| < \varepsilon + \varepsilon \|f\| \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

Agora, dados $\varepsilon > 0$ e δ o gauge de $[a,b]$ da definição de $f \in H^\wedge([a,b],X)$, seja $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina. Então,

$$\begin{aligned}
 \sum_i \|F_\Lambda f(t_i) - F_\Lambda f(t_{i-1})\| &= \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} dA f \right\| \leq \\
 &\leq \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} dA f - [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| + \sum_i \| [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \| < \\
 &< \varepsilon + V(A) \|f\|
 \end{aligned}$$

o que implica que $F_\Lambda f \in BV([a, b], X)$ uma vez que $V(A) < \infty$ (pelo análogo unidimensional do Teorema 3.4 do Capítulo 2).

2) A linearidade de F_Λ segue da linearidade da integral.

3) Provemos a continuidade de F_Λ . Dados $f, g \in BV_a([a, b], X)$, sejam $\varepsilon > 0$ e δ o gauge de $[a, b]$ da definição de $(f - g) \in H^\Lambda([a, b], X)$. Então, dada $d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina, temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_i \|F_\Lambda(f - g)(t_i) - F_\Lambda(f - g)(t_{i-1})\| &= \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} dA (f - g) \right\| \leq \\
 &\leq \sum_i \left\| \int_{[t_{i-1}, t_i]} dA (f - g) - [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot (f - g)(\xi_i) \right\| + \sum_i \| [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot (f - g)(\xi_i) \| < \\
 &< \varepsilon + V(A) \|f - g\|.
 \end{aligned}$$

Logo, $\|f - g\| \rightarrow 0$ implica que $\|F_\Lambda f - F_\Lambda g\| = \|F_\Lambda(f - g)\| = V(F_\Lambda(f - g)) \rightarrow 0$. ■

Lema A.4 $SL(\mathfrak{I}_R, X) \subset \mathcal{E}^A(\mathfrak{I}_R, X)$.

Prova Seja $F \in SL(\mathfrak{I}_R, X)$. Portanto, dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset \mathbb{R}$ com $m(A) = 0$, existe um gauge δ de A tal que para toda $d = (\xi_i, J_i) \in TPD_R$ δ -fina com $\xi_i \in A$ para todo i , temos que

$$(*) \quad \sum_i \|F(J_i)\| < \varepsilon.$$

Dada $J \in \mathfrak{I}_R$, seja $A = \partial J$, onde ∂B denota a fronteira de um conjunto B . Seja também $d = (\xi_i, J_i) \in TPD_R$ δ -fina tal que $\xi_i \in A$, $(J_i \cap J) \subset \partial J$ e $J_i \cap \text{int}(J) = \emptyset$, para todo i (isto é, os J_i 's estão "colados" a J pelo lado de fora). Então $m(A) = 0$ e vale (*).

Para cada i , sejam l_i e h_i os comprimentos dos lados de J_i e tomemos $\eta > 0$ tal que

$\eta < \min\{l_i, h_i; i = 1, 2, \dots, |d|\}$. Portanto, se $K \in \mathfrak{I}_R$ é tal que $K \cap J \neq \emptyset$ e $K \cap \text{int}(J) = \emptyset$ e $m(K) \leq \eta$, então existem $i, j \in \{1, 2, \dots, |d|\}$ tal que $K \subset (J_i \cup J_j)$, ou seja, $K \subset \cup J_i$.

Agora, seja $I \in \mathfrak{I}_R$ tal que $m(I \Delta J) < \eta$. Pela escolha de η existe um número finito de intervalos K_i cada um dos quais é do tipo K do parágrafo acima tais que $(I \Delta J) \subset \cup K_i$. Logo $(I \Delta J) \subset \cup J_i$ o que implica que

$$\|F(I) - F(J)\| \leq \sum \|F(J_i)\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Proposição A.5 *Seja A a integral indefinida de uma função $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X))$. Então F_A definido por*

$$(F_A f)(t) = \int_{[a,t]} dA(s) f(s), \quad t \in [a, b] = R$$

é um operador linear contínuo sobre $\mathcal{C}(R, X)$ (i.e., $F_A \in L(\mathcal{C}(R, X))$).

Prova

1) Como $\alpha \in \mathcal{L}_1(R, L(X)) \subset H(R, L(X))$, segue do Teorema 2.6 do Capítulo 2 e do Lema A.4 que $A \in SL(\mathfrak{I}_R, L(X)) \subset \mathcal{C}^\Delta(\mathfrak{I}_R, L(X))$. Também temos que $A \in BV(\mathfrak{I}_R, L(X))$ (veja o Teorema 3.4 do Capítulo 2).

2) Afirmação: $f \in H^\Delta(R, X)$. De fato. Sabemos que $f \in R^\Delta(R, X)$ (Teorema 3.2 do Capítulo 2). Então pelo Teorema 3.7 do Capítulo 2, $\alpha \cdot f \in H(R, X)$ com

$$K \int_R \alpha \cdot f = \int_R dA f.$$

Sejam, então, $\varepsilon > 0$ e δ o gauge de R tal que para toda $d = (\xi_i, J_i) \in TD_R$ δ -fina

$$\sum_i \left\| \int_{J_i} \alpha - \alpha(\xi_i) |J_i| \right\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_i \left\| \int_{J_i} \alpha \cdot f - \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) |J_i| \right\| < \varepsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_i \left\| \int_{J_i} dA f - A(J_i) \cdot f(\xi_i) \right\| &= \sum_i \left\| \int_{J_i} \alpha \cdot f - A(J_i) \cdot f(\xi_i) \right\| \leq \\ &\leq \sum_i \left\| \int_{J_i} \alpha \cdot f - \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) |J_i| \right\| + \sum_i \left\| \alpha(\xi_i) \cdot f(\xi_i) |J_i| - A(J_i) \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon + \varepsilon \|f\| \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

3) Seja $\tilde{f}^\wedge(t) = \int_{[a,t]} dA f$, para cada $t \in R = [a,b]$. Com um argumento análogo àquele da Observação 1.3 do Capítulo 2, podemos olhar a função $\tilde{f}^\wedge$ como função de intervalos de R . Daí, por 1), pelo Teorema 2.6 do Capítulo 2 e pelo Lema A.4 segue que $\tilde{f}^\wedge \in \mathcal{C}^\wedge(\mathfrak{I}_R, X)$. E este fato implica na continuidade de $\tilde{f}^\wedge$ como função de pontos de R . De fato. Dados $t, s \in R = [a,b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, então

$$\tilde{f}^\wedge(t) - \tilde{f}^\wedge(s) = \int_{[a,t]} dA(s)f(s) - \int_{[a,s]} dA(s)f(s).$$

Consideremos a figura 1) a seguir:

1)

Então

$$\int_{[a,t]} dA f - \int_{[a,s]} dA f = \int_{[(t_1, a_2), s]} dA f + \int_{[(a_1, s_2), t]} dA f.$$

Mas $|t - s| \rightarrow 0$ implica que

$$[(t_1, a_2), s] \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad [(a_1, s_2), t] \rightarrow 0.$$

Segue então da continuidade da integral indefinida (i.e., da continuidade de $\tilde{f}^\wedge$ como função de intervalos de R) que

$$\|\tilde{f}^A([(t_1, a_2), s])\| \rightarrow 0 \text{ e } \|\tilde{f}^A([(a_1, s_2), t])\| \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\|\tilde{f}^A(t) - \tilde{f}^A(s)\| \rightarrow 0 \text{ quando } |t - s| \rightarrow 0,$$

Consideremos agora a figura 2):

2)

As ilustrações 1) e 2) anteriores mostram as possíveis posições dos pontos t e s .

Para a figura 2) temos que

$$\int_{[a, t]} dA f - \int_{[a, s]} dA f = \int_{[(s_1, a_2), (t_1, s_2)]} dA f + \int_{[(a_1, s_2), (s_1, t_2)]} dA f + \int_{[s, t]} dA f$$

Mas $|t - s| \rightarrow 0$ implica que

$$[(s_1, a_2), (t_1, s_2)] \rightarrow 0, [(a_1, s_2), (s_1, t_2)] \rightarrow 0 \text{ e } [s, t] \rightarrow 0$$

e daí, segue da continuidade da integral indefinida com respeito à A , $\tilde{f}^A$, que

$$\|\tilde{f}^A([(s_1, a_2), (t_1, s_2)])\| \rightarrow 0, \|\tilde{f}^A([(a_1, s_2), (s_1, t_2)])\| \rightarrow 0 \text{ e } \|\tilde{f}^A([s, t])\| \rightarrow 0$$

o que implica que

$$\|\tilde{f}^A(t) - \tilde{f}^A(s)\| \rightarrow 0 \text{ quando } |t - s| \rightarrow 0$$

e terminamos a prova da continuidade de $\tilde{f}^A$ como função de pontos. Segue, portanto, que

$$F_{\Lambda} f = \tilde{f}^{\Lambda} \in \mathcal{C}(R, X).$$

- 4) A linearidade de $\tilde{f}^{\Lambda}$ segue da linearidade da integral.
- 5) Provemos a continuidade de F_{Λ} . Dados $f, g \in \mathcal{C}(R, X)$ e $t \in R$, sejam $\varepsilon > 0$ e δ da definição de $(f - g) \in R^{\Lambda}(R, X)$, e $d = (\xi_i, J_i) \in TD_{[a, t]}$ δ -fina. Então, pelo Lema de Saks-Henstock para a integral de Riemann-Stieltjes e pelas propriedades da variação segue que

$$\begin{aligned} \|F_{\Lambda} f(t) - F_{\Lambda} g(t)\| &= \left\| \int_{[a, t]} dA(s)(f - g)(s) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{[a, t]} dA(s)[f(s) - g(s)] - \sum_i A(J_i)[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \right\| + \left\| \sum_i A(J_i)[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \right\| < \\ &< \varepsilon + V_{[a, t]}(A) \|f - g\| \leq \varepsilon + V(A) \|f - g\|, \end{aligned}$$

onde $V_{[a, t]}(\alpha)$ denota a variação de α no intervalo $[a, t]$. Segue, portanto, que

$$\|F_{\alpha} f - F_{\alpha} g\| = \sup_{t \in R} \|F_{\alpha} f(t) - F_{\alpha} g(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{caso } \|f - g\| \rightarrow 0$$

o que completa a demonstração. ■

Apêndice B:

Exemplos

Neste apêndice incluímos, por sugestão da Comissão Julgadora, algumas aplicações dos resultados obtidos que foram apresentadas na defesa da tese como exemplos.

Capítulo 4:

Exemplo B.1: Consideremos a equação

$$(*) \quad \dot{x} = \alpha x \dot{g} + \dot{f}, \quad x(a) = f(a)$$

onde $x, f \in \mathbf{K}_g([a,b])$, $g \in SL([a,b])$ é diferenciável e não-constante em qualquer subintervalo de $[a,b]$, e $\alpha \in BV^+_b$.

Integrando (*) obtemos a equação de Volterra-Stieltjes

$$(V) \quad x(t) - \int_{[a,t]}^K \alpha(s) x(s) dg(s) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Daí, pelo Teorema 2.1 do Capítulo 4, segue que existe uma única solução $x_f \in \mathbf{K}_g([a,b])$ dada por

$$x_f(t) = f(t) - \int_{[a,t]}^K \rho(s) f(s) dg(s), \quad t \in [a, b],$$

com núcleo $\rho \in BV^+_b$, e a série de Neumann

$$I - H_{\rho,g} = I + H_{\alpha,g} + H_{\alpha,g}^2 + H_{\alpha,g}^3 + \dots$$

onde $(H_{\alpha,g}(x))(t) = \int_{[a,t]}^K \alpha(s)x(s)dg(s)$, para todo $t \in [a,b]$, converge em $L(\mathbf{K}_g([a,b]))$. $\square$

Capítulo 5:

Para o Capítulo 5, damos aplicações tanto para Equações Diferenciais quanto para Equações Integrais.

Aplicações às Equações Diferenciais

Considemos a equação

$$(*) \quad \dot{x} = f(t, x),$$

onde $f: [a,b] \times B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, B um aberto. Dizemos que $x: J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subset [a,b]$ um intervalo,

é uma **solução de Carathéodory** (respectivamente uma **solução de Henstock**) para a equação (*) se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $x(t) \in B$ m-quase sempre em J ;

ii) $x(t) = x(c) + \int_{[c,t]}^* f(s, x(s))ds$, quaisquer que sejam $t, c \in J$;

onde $\int = {}^L\int$ (resp. $\int = {}^K\int$).

É imediato pelo Teorema Fundamental do Cálculo que se x é uma solução de Carathéodory (resp. uma solução de Henstock), então x é absolutamente contínua e diferenciável (resp. x satisfaz a Condição Forte de Lusin e é diferenciável m-quase sempre).

Exemplo B.2: Seja $F: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $F(t) = t^2 \sin \frac{1}{t^2}$, se $t \neq 0$, e $F(0) = 0$. Então, $f(t) = \dot{F}(t) = 2t \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2}$, se $t \neq 0$, e $f(0) = \dot{F}(0) = 0$, e temos que $f \in H([-1, 1]) \setminus \mathcal{L}_1([-1, 1])$.

A equação diferencial ordinária linear

$$(2) \quad \dot{x} = \lambda x + f,$$

onde λ é constante e f é como acima tem solução de Henstock geral dada por

$$x(t) = Ce^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int_{[0,t]}^K e^{-\lambda s} f(s) ds, \quad t \in [-1, 1],$$

onde a integral pode ser calculada. □

Exemplo B.3: Consideremos o problema de valor inicial

$$(3) \quad \dot{x} = \alpha x + f, \quad x(a) = 0,$$

onde $x \in C([a,b])$, $\alpha \in \mathcal{L}_1([a,b])$, $f \in H([a,b])$, $F = \tilde{f}$.

Integrando (3) obtemos a equação de Volterra-Lebesgue

$$(V_L) \quad x(t) = \int_{[a,t]}^L \alpha(s) x(s) ds + F(t), \quad t \in [a,b].$$

Pelo Teorema 2.8, se $\|\alpha\|_1 < 1$, então existe uma única solução $x \in C([a,b])$ para a equação (V_L) . Em outras palavras, se $\|\alpha\|_1 < 1$, então existe uma única solução de Carathéodory contínua para a equação (3). □

Exemplo B.4: Consideremos a equação

$$(4) \quad \dot{x} = \alpha x + \beta u, \quad x(a) = 0,$$

onde $x \in C([a,b])$, $\alpha \in H([a,b])$ lida e

ou $\beta \in H([a,b])$ e $u \in BV([a,b])$,

ou $\beta \in BV([a,b])$ e $u \in H([a,b])$.

Em qualquer caso, existe $F(t) = \int_a^t \beta(s)u(s)ds$, para cada $t \in [a,b]$ (veja [F-1] ou [F-2]).

Integrando (4) obtemos a equação de Volterra-Henstock

$$(V_H) \quad x(t) = \int_a^t \alpha(s)x(s)ds + F(t), \quad t \in [a,b],$$

e pelo Teorema 2.12, se $(b-a)\|\alpha\|_\infty < 1$, segue que existe uma única solução de Henstock contínua para a equação (4). $\square$

Exemplo B.5: O sistema dinâmico linear a tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),$$

onde A , B , C e D são matrizes 1×1 contínuas, tem solução dada por

$$x(t) = e^{\int_a^t A(s)ds} x(a) + \int_a^t e^{\int_a^t A(s)ds} B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Suponhamos que $x \in C([a,b])$, $A \in H([a,b])$ e,

ou $B \in H([a,b])$ e $u \in BV([a,b])$,

ou $B \in BV([a,b])$ e $u \in H([a,b])$.

Então,

$$x(t) = e^{\int_a^t A(s)ds} x(a) + \int_a^t e^{\int_a^t A(s)ds} B(\tau)u(\tau)d\tau$$

é uma solução de Henstock contínua para o sistema. $\square$

Aplicações às Equações Integrais

As equações integrais singulares, ou seja, aquelas cujo núcleo possui

singularidades, exercem um papel fundamental dentro da Teoria de Equações Integrais tendo aplicações importantes em diversas áreas.

Com consequência dos resultados do Capítulo 5, podemos estudar determinadas equações integrais singulares posto que as hipóteses impostas em nosso estudo sobre o núcleo α em ambas as equações integrais lineares (V_L) e (V_H) , onde

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^L \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

com f e x ambas contínuas ou de variação limitada, e

$$(V_H) \quad x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s) \cdot x(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

com f e x ambas contínuas, prevêm que os núcleos de tais equações admitam singularidades.

Exemplo B.6: Consideremos a função $\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ se $t \in]0,1]$, e a equação integral singular

$$(V_L) \quad x(t) + \int_{[0,t]}^L \alpha(s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1],$$

onde $x, f \in C([0,1])$. Como α é Lebesgue integrável em $[0,1]$ (com integral igual a 1), então $\alpha \in \mathcal{L}_1([1/n,1])$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e podemos considerar as equações

$$(V_{L_n}) \quad x(t) + \int_{[0,t]}^L \chi_{X_n}(s)\alpha(s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1],$$

onde $x, f \in C([0,1])$, e $X_n = [1/n,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, podemos obtemos a solução x_n de (V_{L_n}) por séries de Neumann através de um resultado conhecido da Teoria de Equações Integrais. Temos então:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= f(t) + \int_{[1/n,t]}^L \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{t} - \sqrt{s})^i}{2\sqrt{s}} f(s) ds = \\ &= f(t) + \int_{[1/n,t]}^L \left(-\frac{1}{2\sqrt{s}(\sqrt{t} - \sqrt{s} - 1)} \right) f(s) ds, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue e pelo Teorema 3.2 segue

que a solução para (V_L) é dada por

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = f(t) - \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \left(\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{t} - \sqrt{s} - 1)} \right) f(s) ds, \quad t \in [0,1]. \quad \square$$

Exemplo B.7: A equação integral de Voltera-Henstock de 3ª ordem

$$\beta(t)x(t) + \int_{[a,t]}^K \alpha(s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde β tem um zero em $[a,b]$, pode ser escrita como uma equação integral singular

$$X(t) + \int_{[0,t]}^K \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} X(s)ds = f(t), \quad X(t) = \beta(t)x(t), \quad t \in [0,1]. \quad \square$$

QUADROS-RESUMOS

Capítulo 1:

1. As integrais de Kurzweil e de Henstock

Quadro-Resumo - 1a

Sejam $f: [a,b] \rightarrow X$ e $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ funções. Então,

DEF: integrais vetoriais de Kurzweil

i) $f \in K^\alpha([a,b],X) \Leftrightarrow \exists I = {}^K\int_{[a,b]} d\alpha f \in Y$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a,b]$ tal que $\forall d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]} \delta$ -fina, $\left\| \sum_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - {}^K\int_{[a,b]} d\alpha f \right\| < \varepsilon$.

ii) $\alpha \in K_f([a,b],L(X,Y)) \Leftrightarrow \exists I = {}^K\int_{[a,b]} \alpha df \in Y$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a,b]$ tal que $\forall d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]} \delta$ -fina, $\left\| \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] - {}^K\int_{[a,b]} \alpha df \right\| < \varepsilon$.

DEF: integrais vetoriais de Henstock

i) $f \in H^\alpha([a,b],X) \Leftrightarrow \exists$ função $F^\alpha: [a,b] \rightarrow Y$ ($F^\alpha(t) = {}^K\int_{[a,t]} d\alpha f$) tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a,b]$ tal que $\forall d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]} \delta$ -fina,

$$\sum_i \left\| [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - {}^K\int_{[t_{i-1}, t_i]} d\alpha f \right\| < \varepsilon.$$

ii) $\alpha \in H_f([a,b],L(X,Y)) \Leftrightarrow \exists$ função $A_f: [a,b] \rightarrow Y$ ($A_f(t) = {}^K\int_{[a,t]} \alpha df$) tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a,b]$ tal que $\forall d = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]} \delta$ -fina,

$$\sum_i \left\| \alpha(\xi_i) \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] - {}^K\int_{[t_{i-1}, t_i]} \alpha df \right\| < \varepsilon.$$

Quadro-Resumo - 1b

Seja $f: [a,b] \rightarrow X$ uma função. Então,

DEF: $f \in SL([a,b],X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall A \subset [a,b]$ com $m(A) = 0, \exists \delta$ gauge de A tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in TPD_{[a,b]}$ δ -fina com $\xi_i \in A, \forall i$, temos que $\sum_i \|h(t_i) - h(t_{i-1})\| < \varepsilon$.

DEF: Se $f \in SL([a,b],X)$ e $\sim$ denota a relação de equivalência das funções de $K_f([a,b],L(X,Y))$ que são iguais a menos de um conjunto de m -medida nula, então $\mathbf{K}_f([a,b],L(X,Y)) = K_f([a,b],L(X,Y))/\sim$ munido da norma $\|\alpha\|_f = \sup\{\|\int_{[a,t]} \alpha df\|; t \in [a,b]\}$. Analogamente, define-se $\mathbf{H}_f([a,b],L(X,Y))$ com H em lugar de K .

2. Os espaços $BV([a,b],X)$ e $SV([a,b],L(X,Y))$

Quadro-Resumo - 1c

Sejam $f: [a,b] \rightarrow X$ e $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ funções. Então,

DEF: $f \in BV([a,b],X) \Leftrightarrow \sup_d \sum_{i=1}^{|d|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < \infty$.

DEF: $\alpha \in SV([a,b],L(X,Y)) \Leftrightarrow \sup_d \sup_{x_i \in X, \|x_i\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] x_i \right\| < \infty$.

Capítulo 2:

1. Funções aditivas de intervalos contínuas e fracamente contínuas

Quadro-Resumo - 2a

Seja $F: \mathfrak{I}_R \rightarrow X$ uma função.

DEF: $F \in A(\mathfrak{I}_R, X) \Leftrightarrow \forall J, J_1 \text{ e } J_2 \in \mathfrak{I}_R$ tais que $J = J_1 \cup J_2$, J_1 e J_2 com interiores disjuntos, $F(J) = F(J_1) + F(J_2)$.

DEF: $F \in \mathcal{E}^A(\mathfrak{I}_R, X) \Leftrightarrow F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$ e $\forall \varepsilon > 0, \forall J \in \mathfrak{I}_R, \exists \eta > 0$ tal que $\forall I \in \mathfrak{I}_R$ com $m(J \Delta I) \leq \eta$, temos que $\|F(J) - F(I)\| \leq \varepsilon$.

Quadro-Resumo - 2b

Sejam $F \in A(\mathfrak{I}_R, X)$, $\alpha \in A(\mathfrak{I}_R, L(X, Y))$ e $d = (J_i)$ uma divisão de R . Então,

DEF: $F \in BV(\mathfrak{I}_R, X) \Leftrightarrow \sup_d \sum_{i=1}^{|d|} \|F(J_i)\| < \infty$.

DEF: $\alpha \in SV(\mathfrak{I}_R, L(X, Y)) \Leftrightarrow \sup_d \sup_{x_i \in X, \|x_i\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \alpha(J_i) \cdot x_i \right\| < \infty$.

DEF: $F \in SL(\mathfrak{I}_R, X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall A \subset R$ com $m(A) = 0, \exists \delta$ gauge de A tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in \text{TPD}_R$ δ -fina com $\xi_i \in A, \forall i$, temos que $\sum_i \|F(J_i)\| < \varepsilon$.

2. As integrais vetoriais multidimensionais de Kurzweil e de Henstock

Quadro-Resumo - 2c

Sejam $f: R \rightarrow X$ uma função e $\alpha \in A(\mathfrak{I}_R, L(X, Y))$. Então,

DEF:

- i) $f \in K^\alpha(R, X) \Leftrightarrow \exists I = {}^K \int_R d\alpha f \in Y$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ gauge de R tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in TD_R \delta$ -fina, $\left\| \sum_i \alpha(J_i) \cdot f(\xi_i) - {}^K \int_R d\alpha f \right\| < \varepsilon$.
- ii) $f \in H^\alpha(R, X) \Leftrightarrow \exists F^\alpha \in A(\mathfrak{I}_R, Y)$ ($F^\alpha(J) = {}^K \int_J d\alpha f$) tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ gauge de R tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in TD_R \delta$ -fina, $\sum_i \left\| \alpha(J_i) \cdot f(\xi_i) - {}^K \int_{J_i} d\alpha f \right\| < \varepsilon$.

Quadro-Resumo - 2d

Sejam $\alpha: R \rightarrow L(X, Y)$ uma função e $f \in A(\mathfrak{I}_R, X)$. Então,

DEF:

- ii) $\alpha \in K_f(R, L(X, Y)) \Leftrightarrow \exists I = {}^K \int_R \alpha df \in Y$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ gauge de R tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in TD_R \delta$ -fina, $\left\| \sum_i \alpha(\xi_i) \cdot f(J_i) - {}^K \int_R \alpha df \right\| < \varepsilon$.
- ii) $\alpha \in H_f(R, L(X, Y)) \Leftrightarrow \exists$ função $A_f \in A(\mathfrak{I}_R, Y)$ ($A_f(J) = {}^K \int_J \alpha df$) tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ gauge de R tal que $\forall d = (\xi_i, J_i) \in TD_R \delta$ -fina, $\sum_i \left\| \alpha(\xi_i) \cdot f(J_i) - {}^K \int_{J_i} \alpha df \right\| < \varepsilon$.

Capítulo 3:

Quadro-Resumo - 3a

Seja $K: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ e consideremos as condições

C^σ : para cada $s \in [a,b]$ e cada $x \in X$, a função $t \in [a,b] \mapsto K_s(t) \cdot x \in Y$ é contínua;

$(SV)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $K^t \in SV([a,b], L(X,Y))$ e $SV^u(K) = \sup_{t \in [c,d]} \{SV(K^t)\} < \infty$;

$(BV)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $K^t \in BV([a,b], L(X,Y))$ e $BV^u(K) = \sup_{t \in [c,d]} \{BV(K^t)\} < \infty$.

DEF: $K \in C^\sigma \times (SV)^u \Leftrightarrow K$ satisfaz C^σ e $(SV)^u$.

DEF: $K \in C^\sigma \times (BV)^u \Leftrightarrow K$ satisfaz C^σ e $(BV)^u$.

Quadro-Resumo - 3b

Seja $\alpha: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X,Y'')$ e consideremos as condições

$\tilde{C}^\sigma$: para cada $s \in [a,b]$ e cada $x \in X$, a função $t \in [c,d] \mapsto \int_{[a,s]} \alpha(t,\sigma) \cdot x \, d\sigma$ é contínua;

$(SV_b^+)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $\alpha^t \in SV_b^+([a,b], L(X,Y''))$ e $SV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c,d]} \{SV(\alpha^t)\} < \infty$;

$(BV_b^+)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $\alpha^t \in BV_b^+([a,b], L(X,Y''))$ e $BV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c,d]} \{BV(\alpha^t)\} < \infty$.

DEF: $\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (SV_b^+)^u \Leftrightarrow \alpha$ satisfaz $\tilde{C}^\sigma$ e $(SV_b^+)^u$.

DEF: $\alpha \in \tilde{C}^\sigma \times (BV_b^+)^u \Leftrightarrow \alpha$ satisfaz $\tilde{C}^\sigma$ e $(BV_b^+)^u$.

Capítulo 4:

Quadro-Resumo - 4a

Dada $g \in SL([a,b])$ diferenciável e não-constante, consideremos a função $\alpha: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X, Y'')$ e as condições

$\tilde{C}_g^\sigma$: para cada $s \in [a,b]$ e cada $x \in X$, é contínua a função

$$t \in [c,d] \mapsto \int_{[a,s]} \alpha(t, \sigma) \cdot x \, dg(\sigma) \in Y;$$

$(SV_b^+)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $\alpha^t \in SV_b^+([a,b], L(X, Y''))$ e $SV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c,d]} \{SV(\alpha^t)\} < \infty$;

$(BV_b^+)^u$: para cada $t \in [c,d]$, $\alpha^t \in BV_b^+([a,b], L(X, Y''))$ e $BV^u(\alpha) = \sup_{t \in [c,d]} \{BV(\alpha^t)\} < \infty$.

DEF: $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (SV_b^+)^u \Leftrightarrow \alpha$ satisfaz $\tilde{C}_g^\sigma$ e $(SV_b^+)^u$.

DEF: $\alpha \in \tilde{C}_g^\sigma \times (BV_b^+)^u \Leftrightarrow \alpha$ satisfaz $\tilde{C}_g^\sigma$ e $(BV_b^+)^u$.

Capítulo 5:

1. Funções fracamente regradas e fracamente contínuas

Quadro-Resumo - 5a

Consideremos as funções $h: [a,b] \rightarrow L(X, Y)$ e $\varphi_x: t \in [a,b] \mapsto h(t) \cdot x \in Y$. Então,

DEF: $h \in G^\sigma([a,b], L(X, Y)) \Leftrightarrow \forall x \in X, \varphi_x$ é regrada.

DEF: $h \in C^\sigma([a,b], L(X, Y)) \Leftrightarrow \forall x \in X, \varphi_x$ é contínua.

REFERÊNCIAS

- [A] ARBEX, Sami E. - "*O resolvente de equações integrais de Volterra-Stieltjes com descontinuidades*", 3º Seminário Brasileiro de Análise, 1976, 9-12.
- [Ba] BARBANTI, Luciano - "*Teorema de existência de soluções regradadas para uma equação de Stieltjes linear com integrais de Riemann generalizadas*", 45º Seminário Brasileiro de Análise, (1997), 817-826.
- [Br] BRAY, H. E. - "*Elementary properties of Stieltjes integral*", Ann. Math., 20(1918-19), 177-186.
- [F-1] FEDERSON, Márcia - "*Fórmulas de Substituição para as Integrais de Gauge*", Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Univ. de São Paulo, 1993.
- [F-2] FEDERSON, Márcia - "*Substitution Formulas for the Gauge integrals*", 37º Seminário Brasileiro de Análise, (1993), 389-399.
- [F-3] FEDERSON, Márcia - "*The Fundamental Theorem of Calculus for multidimensional Banach space-valued Henstock vector integrals*", preprint, 1997.
- [Ge] GENGIAN, L. - "*On necessary conditions for Henstock integrability*", Real Anal. Exchange, 18(1992-93), 522-531.
- [Go] GORDON, Russel A. - "*The McShane integral of Banach-valued functions*", Illinois J. of Math., 34(1990), 557-567.
- [He] HENSTOCK, Ralph - "*Definition of Riemann type of the variational integrals*", Proc. London Math. Soc. 11, (1961), 402-418.
- [H-1] HÖNIG, Chaim S. - "*The abstract Riemann-Stieltjes integral and its Applications to linear differential equations with generalized boundary conditions*", Nota do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Série Matemática nº 1, 1973.
- [H-2] HÖNIG, Chaim S. - "*Volterra-Stieltjes integral equations*", Math. Studies 16, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1975.
- [H-3] HÖNIG, Chaim S. - "*Equations intégrales généralisées et applications*", Publ. Math. d'Orsay, 83-01, exposé 5, 1-50.
- [H-4] HÖNIG, Chaim S. - "*Fredholm-Stieltjes integral equations I*", IV Escuela Latinoamericana de Matemática, (1978), 126-160.

-
- [H-5] HÖNIG, Chaim S. - "There is no natural Banach space norm on the space of Kurzweil-Henstock-Denjoy-Perron integrable functions", 30º Sem. Brasileiro de Análise, (1989), 367-397.
- [H-6] HÖNIG, Chaim S. - "On linear Kurzweil-Henstock integral equations", 32º Seminário Brasileiro de Análise, (1990), 283-298.
- [H-7] HÖNIG, Chaim S. - "On a remarkable differential characterization of the functions that are Kurzweil-Henstock integrals", 33º Sem. Brasileiro de Análise, (1991), 331-341.
- [H-8] HÖNIG, Chaim S. - "A Riemannian characterization of the Bochner-Lebesgue integral", 35º Seminário Brasileiro de Análise, (1992), 351-358.
- [H-9] HÖNIG, Chaim S. - "As integrais de gauge", Minicurso, 37º Seminário Brasileiro de Análise, 1993, 1-60.
- [H-10] HÖNIG, Chaim S. - "The fundamental theorem of calculus for regular multidimensional Banach space valued Kurzweil-Henstock integrals", 37º Seminário Brasileiro de Análise, 1993, 429-438.
- [I] ISTRATESCU, Vasile I. - "Fixed Point Theory - An introduction", D. Reidel Pub. Comp., 1981.
- [J] JERRI, Abdul J. - "Introduction to integral equations with applications", Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1985.
- [K] KURZWEIL, Jaroslav, and JARNÍK, Juri - "Equiintegrability and controlled convergence of Perron-type integrable functions", Real Analysis Ex., 179(1991-92), 110-139.
- [L] LEE, P. Y. - "On ACG* functions", Real Analysis Ex., 15(1989-90), 754-756.
- [M] MCSHANE, E. J. - "A unified theory of integration", Am. Math. Monthly, 80(1973), 349-359.
- [R] ROCHA Fº, Galdino C. da - "A integral de Riemann vetorial e a geometria de espaços de Banach", Tese de Doutorado, Inst. de Matemática e Estat., Univ. de São Paulo, 1979.
- [S-1] SAKS, S. - "Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral", Fund. Math., XXII (1934), 257-261.
- [S-2] SAKS, S. - "Theory of the integral", New York, Dover, 1964.
- [Se] SCHECHTER, M. - "Principles of functional analysis", Academic Press, 1971.
- [Sw-1] SCHWABIK, Stephan - "The Perron integral in ordinary differential equations", Diff. and Integral Eq., (4), (1993), 863-882.
- [Sw-2] SCHWABIK, Stephan - "Abstract Perron-Stieltjes integral", C. Ak. Ved., Praha, preprint, 1996.
- [Y] YEOUNG, L. T., and SENG, C. T., and YEE, L. P. - "On Henstock integrability in Euclidean spaces", Real Analysis Ex., 22(1996-97), 382-389.

ÍNDICE DE NOTAÇÃO

A_f , 4, 18	$\tilde{f}^\alpha$, 4
$A(\mathfrak{I}_R, X)$, 17	F^α , 4, 18
$\alpha(t^+)$, 35	$G([a, b], X)$, 34
$\tilde{\alpha}_f$, 4	$G^-([a, b], X)$, 79
$B(X, Y)$, 79	$G^\sigma([a, b], L(X, Y))$, 64
$B_{\delta(\xi)}(\xi)$, 3, 17	$G^{\sigma^-}([a, b], L(X, Y))$, 79
$BV([a, b])$, $BV([a, b], X)$, $BV_c([a, b], X)$, 9	$H([a, b])$, $H([a, b], X)$, 5
$BV(\mathfrak{I}_R, X)$, $BV_o(\mathfrak{I}_R, X)$, 24	$H(R, X)$, 18
$BV^+([a, b], X)$, $BV^+_b([a, b], X)$, 32	$\mathbf{H}([a, b])$, $\mathbf{H}([a, b], X)$, 5
$BV^-_a([a, b], X)$, 81	$H^\alpha([a, b], X)$, 4
$BW([a, b], X)$, 9	$H_f([a, b])$, $H_f([a, b], L(X, Y))$, 4, 5
$\mathcal{C}(R, X)$, 21	$H^\alpha(R, X)$, $H_f(R, L(X, Y))$, 18
$\mathcal{C}([a, b])$, $\mathcal{C}([a, b], X)$, $\mathcal{C}_c([a, b], X)$, 3	$\mathbf{H}_g([a, b], L(X, Y))$, 5
$\mathcal{C}^\Delta(\mathfrak{I}_R, X)$, $\mathcal{C}^\Delta(\mathfrak{I}_{\text{int}(R)}, X)$, 21	$\text{Im}(T)$, 79
$\mathcal{C}^{(1)}([a, b], X)$, 8	$\text{int}(A)$, 21
$C^\sigma \times (BV)^u$, $C^\sigma \times (SV)^u$, 31	$\mathfrak{I}_R$, 17
$\tilde{C}^\sigma \times (BV^+_b)^u$, $\tilde{C}^\sigma \times (SV^+_b)^u$, 35	$\int_{[a, b]} \alpha \, df$, $\int_{[a, b]} d\alpha \, f$, 4
$\tilde{C}^\sigma \times (BV^+_b)^u$, $\tilde{C}^\sigma \times (SV^+_b)^u$, 49	${}^K \int_{[a, b]} f$, ${}^K \int_{[a, b]} \alpha \, df$, ${}^K \int_{[a, b]} d\alpha \, f$, 3, 5
$C^\sigma([a, b], L(X, Y))$, 64	${}^K \int_R f$, ${}^K \int_R \alpha \, df$, ${}^K \int_R d\alpha \, f$, 17, 18
$ d $, 8	K^* , 32, 36
$d = (\xi_i, t_i)$, 3	$K^\square$, 33, 36
$d = (\xi_i, J_i)$, 17	$\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{K}(X, Y)$, 33
D_R , 15	$K([a, b])$, $K([a, b], X)$, 5
$E(R, X)$, 88	$\mathbf{K}([a, b])$, $\mathbf{K}([a, b], X)$, 5
$\tilde{f}$, 5, 20	$K(R, X)$, 18

$K^\alpha([a,b],X)), 3$	$TD_R, TPD_R, 17$
$K^\alpha(R,X), K_f(R,L(X,Y)), 17, 18$	$V(\quad), 8, 23$
$K_f([a,b]), K_f([a,b],L(X,Y)), 3, 5$	$V_J(\quad), 24$
$\mathbf{K}_g([a,b],L(X,Y)), 5$	$V^u(\quad), 31$
$\text{Ker}(T), 79$	$W(\quad), 9$
$\mathcal{L}_1([a,b],X), 65$	$\omega^\bullet_i(\quad), 34$
$\mathcal{L}_1(R,L(X)), 73$	$\omega^\bullet_d(\quad), 34$
$L_1([a,b],X)_A, 42$	$X^N, 87$
$L_{1,g}([a,b])_A, 61$	
$m\text{-qs}, 5$	
$\ \cdot\ _A, 5$	
$\ \cdot\ _{A,f}, 5$	
$R([a,b],X), 5$	
$R_f([a,b],L(X,Y)), R^\alpha([a,b],X), 4$	
$R_f(R,L(X,Y)), R^\alpha(R,X), 19$	
$R(R,X), 19$	
$R^2([a,b],X)_A, 42$	
$R^2_g([a,b],X), 61$	
$SL([a,b]), SL([a,b],X), 4, 5$	
$SL(\mathfrak{T}_R), SL(\mathfrak{T}_R,X), 21, 22$	
$SV(\quad), 9, 24$	
$SV_J(\quad), 24$	
$SV^u(\quad), 31$	
$SV(\mathfrak{T}_R,L(X,Y)), SV_o(\mathfrak{T}_R,L(X,Y)), 24$	
$SV([a,b],L(X,Y)), SV_c([a,b],L(X,Y)), 9$	
$SV^+([a,b],L(X,Y'')), 35$	
$SV^+_b([a,b],L(X,Y'')), 35$	
$T^*, 79$	
$TD_{[a,b]}, TPD_{[a,b]}, 3$	

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Alternativa de Fredholm, 33, 39, 58

C

condição de Lipschitz, 63

Condição Forte de Lusin, 4, 21

conjunto

 equiregrado, 34

 relativamente compacto, 34

contração, 63

D

divisão, 8, 17

δ -fina, 3, 17

 marcada, 3, 17

 parcial marcada, 3, 17

E

equação integral linear de

 Fredholm-Kurzweil, 39

 Fredholm-Kurzweil-Henstock-Stieltjes, 58

 Volterra-Bochner-Lebesgue, 65, 72, 81, 94

 Volterra-Henstock, 68, 74, 84, 85

 Volterra-Stieltjes, 80

 Volterra-Kurzweil-Stieltjes, 79

 Volterra-Kurzweil-Henstock-Stieltjes, 56

 Volterra-Stieltjes, 78

equação linear de Stieltjes discreta, 87

F

Fórm. de Integração por Partes, 9, 10

Fórm. de Integração por Substit., 10

função

 aditiva de intervalos, 17

 associada, 5, 18

 Bochner-Lebesgue integrável, 13

 contínua, 3, 21

 contínua de intervalos, 21

 de semivariação limitada, 9, 24

 de variação fraca limitada, 9

 de variação limitada, 8, 24

 escada, 88

 fracamente contínua, 64

 fracamente regrada, 64

 Henstock integrável, 5, 18

 Kurzweil-Henstock integrável, 19

 Kurzweil integrável, 5, 18

 regrada, 34

 Riemann integrável, 5, 19

<i>G</i>	<i>O</i>
gauge, 3, 17	operador
	causal, 51
	de Fredholm, 79
<i>I</i>	<i>P</i>
integral	ponto fixo, 63
de Bochner-Lebesgue, 13	Princípio da Contração, 63
de Henstock-Stieltjes, 5, 18	
de Kurzweil-Henstock, 19	
de Kurzweil-Stieltjes, 4, 17, 18	
de Riemann-Stieltjes, 4, 19	
indefinida, 4, 20	
vetorial de Henstock, 4, 17, 18	
vetorial de Kurzweil, 4, 17, 18	
<i>L</i>	<i>S</i>
Lema de Saks-Henstock, 6, 20	semivariação, 9, 24
	série de Neumann, 56
	solução de Carathéodory, 105
	solução de Henstock, 105
<i>M</i>	<i>T</i>
marca, 17	Teor. Fundamental do Cálculo, 6, 7
m-qs, m-quase sempre, 5	
<i>N</i>	<i>V</i>
norma de Alexiewicz, 5	variação fraca, 9
	variação, 8, 23