Representações de álgebras de Artin
projetivamente estáveis

Cecilia Tosar Escuder

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

*A mi familia,
en especial a mis padres.*

Agradecimentos

A todos com quem de uma forma ou outra comparti estes três últimos anos.

A Daniella, Fernando e Marquitos, Irene e Zé, Jorge B., Jorge G., Nelson, Evelyne, Leyla, Maraye e Renata, pelos bons momentos que vivemos juntos.

Aos que compartimos a sala 154: Bárbara, Carolina, Fernando, Daniel e Liane, Paulo, Raul, Regina, Samuel e Sidney. E junto a eles, aos que compartimos os jogos de volley, cinema, reuniões...: Ayumi, Claus e Fátima, Marcelo e Renata, Marcio e Adriana, Marco Aurelio e Eliany, Pablo.

A Héctor e todos meus “irmãos, primos e tios” representanteiros.

Em especial a Aida, Cecilia, Irene M. e Marcelo por sempre poder contar com eles.

E por último a Flávio, por ser excelente orientador e uma ótima pessoa.

Resumo

Este trabalho está baseado nos artigos [JK1], [JK2] e [JK3] escritos por Jagadeeshan e Kleiner. Nosso objetivo é estudar uma classe de álgebras de Artin, a saber as *álgebras projetivamente estáveis*, e descrever as categorias de módulos finitamente gerados sobre elas. Para tanto analisamos a estrutura de tais álgebras e descrevemos o quiver de Auslander-Reiten correspondente. Tal classe de álgebras surge naturalmente tendo em vista a noção de categoria projetivamente estável e a definição do funtor Tr (transposta). Quanto à estrutura, provamos que uma tal álgebra é serial ou é o pullback de uma álgebra hereditária e uma serial sobre uma semisimples. Como consequência desse resultado vemos que obtemos o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra projetivamente estável a partir do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra hereditária e de certa álgebra serial. Por último, como aporte pessoal ao trabalho, comparamos as álgebras estudadas com outras classes de álgebras de Artin: as quase-inclinadas, as shod e as $\mathcal{P}_1$ -hereditárias.

Abstract

This work is based on the papers [JK1], [JK2] and [JK3] written by Jagadeeshan and Kleiner. Our main aim is to introduce a class of Artin algebras, the *projectively stable algebras*, and to describe the categories of finitely generated modules over them. For this, we analyze the structure of such algebras and we describe their Auslander-Reiten quivers. That class of algebras appears naturally taking into account the notion of projectively stable category and the definition of the functor Tr (transpose). With regard to the structure, we show that such an algebra is either serial, or the pullback of a hereditary algebra and a serial algebra over a semisimple algebra. As a consequence of this result it is shown that one can obtain the Auslander-Reiten quiver of a projectively stable algebra from the Auslander-Reiten quiver of a hereditary algebra and of certain serial algebra. Finally, as a personal contribution to the work, we compare the studied algebras with other classes of Artin algebras: the quasetilted, the shod and the $\mathcal{P}_1$ -hereditary.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos básicos	4
1.1 Álgebras de Artin	5
1.2 Quivers e representações de quivers	8
1.3 Teoria de Auslander-Reiten	13
2 Anéis artinianos projetivamente estáveis	21
2.1 Categorias projetivamente estáveis	22
2.2 Definição de anel artiniano projetivamente estável	23
2.3 O funtor Tr	25
2.4 Caracterização dos anéis estáveis	28
2.5 A dimensão global dos anéis estáveis	33
3 Estrutura das álgebras de Artin projetivamente estáveis	42
3.1 Pullbacks e álgebras quocientes	43
3.2 Álgebras estáveis com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$	55

3.3	Álgebras estáveis com $P = 0$ e $Q \neq 0$	71
4	O quiver de Auslander-Reiten	73
4.1	Álgebras estáveis com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$	74
4.2	Álgebras estáveis com $P = 0$ e $Q \neq 0$	87
5	Relações com outras classes de álgebras	97
5.1	Dimensões homológicas	97
5.2	Álgebras estáveis quase-inclinadas ou shod	106
5.3	Álgebras estáveis e álgebras $\mathcal{P}_1$ -hereditárias	110
	Apêndice A	115
	Apêndice B	118
	Referências Bibliográficas	126

Introdução

O objetivo deste trabalho é introduzir uma classe de álgebras de Artin chamadas de *álgebras projetivamente estáveis* e descrever as categorias de módulos finitamente gerados sobre tais álgebras, isto é, descrever a teoria de representações dessas álgebras. Faremos este estudo através da análise do quiver de Auslander-Reiten das álgebras de Artin projetivamente estáveis (o quiver mencionado descreve a categoria $\text{mod } \Lambda$, onde Λ é uma álgebra de Artin, através de seus módulos indecomponíveis e morfismos irredutíveis). Para tanto, deveremos analisar a estrutura das álgebras em questão. A característica que tem uma tal álgebra Λ é que a categoria $\text{mod } \Lambda$ “muda o mínimo” ao passar à categoria projetivamente estável $\underline{\text{mod}} \Lambda$. De fato, as categorias $\text{mod}_P \Lambda$ (subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ formada pelos módulos sem somandos diretos projetivos) e $\underline{\text{mod}} \Lambda$ são equivalentes. Daí a denominação de álgebras projetivamente estáveis.

Estas álgebras foram introduzidas por Jagadeeshan e Kleiner em [JK1] e [JK2]. Foram vários os motivos que os levaram a estudá-las. Em primeiro lugar está a relação existente entre as categorias $\text{mod } \Lambda$ e $\underline{\text{mod}} \Lambda$. Como consequência dessa relação, surge um segundo motivo que tem a ver com a aplicação transposta Tr . A aplicação entre módulos $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ é importante na teoria de representações, especialmente para a existência das sequências que quase cindem sobre uma álgebra de Artin. Tais sequências são utilizadas para a construção do quiver de Auslander-Reiten da álgebra. A aplicação $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ em geral não é um funtor, pois não é possível defini-lo nos morfismos. Acontece que Tr é um funtor se e somente se a álgebra Λ^{op} é projetivamente estável. Por fim, outra razão para estudar essas álgebras é que estas são uma generalização das álgebras hereditárias, álgebras cuja estrutura e teoria de representação são bem conhecidas (ver [ARS] ou [CLS]).

Em [JK1], além de definir as álgebras projetivamente estáveis, é apresentada uma caracterização delas em termos dos seus módulos projetivos, mostra-se a propriedade da aplicação Tr já anunciada, é calculada a dimensão global dessas

álgebras e descreve-se as que têm dimensão global ∞ . Todos esses resultados aparecem no capítulo 2 deste trabalho, mas, com uma diferença: a definição e os resultados enquadram-se na classe mais geral dos anéis artinianos à esquerda. Isso é devido a que Kleiner percebeu que os resultados que tinham sobre álgebras de Artin projetivamente estáveis podiam ser estendidos aos anéis artinianos projetivamente estáveis à esquerda.

Em [JK2] é estudada a estrutura de tais anéis. O resultado mais importante é que um anel artiniano indecomponível projetivamente estável à esquerda é serial à esquerda ou é o pullback de um anel hereditário à esquerda e certo anel serial à esquerda sobre um anel semisimples. Desse artigo extraímos o necessário para descrever a categoria $\text{mod } \Lambda$, onde Λ é uma álgebra de Artin projetivamente estável. Os resultados extraídos estão expostos no capítulo 3. Desta vez, devido ao nosso objetivo e para facilitar algumas demonstrações, optamos por restringir o estudo às álgebras de Artin. Alguns dos resultados importantes de [JK2] que não incluímos neste trabalho são outras caracterizações dos anéis projetivamente estáveis (equivalentes à dada em [JK1]) e a prova de que uma álgebra de Artin projetivamente estável é estavelmente equivalente a uma álgebra de Artin hereditária.

Existe também um preprint ([JK3]) onde é mostrado que a teoria de representações das álgebras de Artin projetivamente estáveis reduz-se à teoria de representações das álgebras hereditárias e de certas álgebras seriais. Também são descritos o quiver ordinário com relações e o quiver de Auslander-Reiten das álgebras nas quais estamos interessados e é provado que as duas aplicações $\text{Tr:mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ e $\text{Tr:mod } \Lambda^{op} \rightarrow \text{mod } \Lambda$ são funtores se e somente se Λ é serial e projetivamente estável. No capítulo 4 apresentamos a matéria relacionada com a descrição do quiver de Auslander-Reiten.

Por último, no capítulo 5, como aporte pessoal, aplicamos os resultados dos capítulos anteriores para comparar as álgebras estudadas com outras classes de álgebras de Artin: as álgebras quase-inclinadas, as shod e as $\mathcal{P}_1$ -hereditárias. As primeiras têm tido ultimamente um papel importante na teoria de representações e vêm sendo estudadas, entre outros, por Happel, Reiten e Smalø. As álgebras quase-inclinadas

enquadram-se na teoria *tilting* (ver [As]) mas têm uma caracterização homológica (ver [HRS]). As álgebras shod são uma generalização das primeiras e seu estudo é mais recente (ver [CL1] e [CL2]). Para comparar as álgebras projetivamente estáveis com estas duas classes de álgebras vamos ter que fazer algumas observações sobre as dimensões homológicas de seus módulos. As álgebras $\mathcal{P}_1$ -hereditárias (ver [A]) envolvem a noção de módulos pós-projetivos (ver [AS]). Vamos ver que as álgebras projetivamente estáveis estão incluídas nessa classe de álgebras.

Como a teoria de representações de álgebras de Artin vai ser fundamental ao longo do trabalho, incluímos no capítulo 1 as noções básicas desta teoria.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Este capítulo tem como objetivo apresentar um resumo das noções básicas da teoria de representações de álgebras que serão utilizadas neste trabalho. A maioria dos resultados enunciados encontram-se em [CLS], [ARS] e [ASS]. Assumimos conhecidos os conceitos e resultados básicos da teoria de categorias e álgebra homológica, que podem ser encontrados em [AF], [B] e [R], entre outros.

Todos os anéis considerados neste trabalho tem identidade e todos os módulos são módulos à esquerda.

Apresentamos algumas das notações que serão utilizadas:

- $\text{Mod } \Lambda$ é a categoria dos módulos sobre o anel Λ .
- $\text{mod } \Lambda$ é a categoria dos Λ -módulos finitamente gerados.
- $\text{ind } \Lambda$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ formada por um conjunto completo de Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos.
- $\mathcal{P}(\Lambda)$ é a subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ formada pelos módulos projetivos.
- Λ^{op} é o anel oposto do anel Λ .
- r é o radical de Jacobson de Λ .

- $\text{Soc } M$ é o socle de um Λ -módulo M .

1.1 Álgebras de Artin

Definição 1.1. *Uma álgebra Λ sobre um anel A é uma álgebra de Artin se A é um anel artiniano comutativo e Λ é finitamente gerada como A -módulo.*

Observação 1.2. 1. Toda álgebra de Artin é um anel artiniano (à esquerda e à direita). Portanto todos os resultados conhecidos sobre anéis artinianos aplicam-se às álgebras de Artin.

2. Toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo k é uma k -álgebra de Artin.

Seja Λ uma álgebra de Artin sobre A . Dado um conjunto completo de A -módulos simples não isomorfos dois a dois $\{S_1, \dots, S_n\}$, consideramos as envoltentes injetivas $I(S_i)$ em $\text{Mod } A$ para cada $i = 1, \dots, n$, e o A -módulo $J = \bigoplus_{i=1}^n I(S_i)$. Observe que se Λ é uma álgebra de Artin sobre um corpo k , então $J = k$.

Teorema 1.3. *O funtor $D = \text{Hom}_A(-, J) : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ é uma dualidade.*

Se Λ é uma álgebra de Artin, por ser um anel artiniano verificam-se as seguintes propriedades (entre outras):

1. Todo módulo $M \in \text{mod } \Lambda$ tem uma cobertura projetiva (única a menos de isomorfismos).
2. Um epimorfismo $P \xrightarrow{\pi} M$ em $\text{mod } \Lambda$ com $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$ é uma cobertura projetiva se e só se $\text{Ker } \pi \subset r.P$.
3. Para cada $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$, a projeção natural $P \rightarrow \frac{P}{r.P}$ é uma cobertura projetiva.
4. Sejam $P, P' \in \mathcal{P}(\Lambda)$, então $P \cong P'$ se e só se $\frac{P}{r.P} \cong \frac{P'}{r.P'}$.
5. Um módulo $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$ é indecomponível se e só se $\frac{P}{r.P}$ é simples.

Para a álgebra de Artin Λ também valem as seguintes propriedades duais, onde a existencia da dualidade $D : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ é essencial para a validade da propriedade 1:

1. Todo módulo $M \in \text{mod } \Lambda$ tem uma envolvente injetiva (única a menos de isomorfismos).
2. Um monomorfismo $M \xrightarrow{i} I$ em $\text{mod } \Lambda$ com I injetivo é uma envolvente injetiva se e só se $\text{Soc } I \subset \text{Im } i$.
3. Para cada módulo injetivo $I \in \text{mod } \Lambda$, a inclusão natural $\text{Soc } I \rightarrow I$ é uma envolvente injetiva.
4. Sejam os módulos injetivos $I, I' \in \text{mod } \Lambda$, então $I \cong I'$ se e só se $\text{Soc } I \cong \text{Soc } I'$.
5. Um módulo injetivo $I \in \text{mod } \Lambda$ é indecomponível se e só se $\text{Soc } I$ é simples.

Proposição 1.4. *Seja Λ uma álgebra de Artin e $1=e_1 + \dots + e_n$ a decomposição de 1 como soma de idempotentes ortogonais primitivos centrais de Λ . Então $\Lambda = \Lambda.e_1 \times \dots \times \Lambda.e_n$ é uma decomposição de Λ como produto finito de álgebras indecomponíveis $\Lambda_i = \Lambda.e_i$ com identidade e_i . Além disso, essa decomposição é única.*

Cada álgebra indecomponível Λ_i é chamada de *bloco* de Λ . Se M é um Λ -módulo indecomponível, então existe um único i tal que $M = e_i.M$ e $e_j.M = 0$ se $j \neq i$. Neste caso, dizemos que M pertence ao bloco Λ_i e a decomposição de Λ em blocos fornece uma partição dos Λ -módulos indecomponíveis. Em particular, obtemos uma partição dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis. A seguinte proposição será utilizada na hora de determinar se uma álgebra de Artin é indecomponível ou não.

Proposição 1.5. *Seja Λ uma álgebra de Artin. Dois Λ -módulos projetivos indecomponíveis P e P' pertencem ao mesmo bloco de Λ se e só se existe uma cadeia*

$$P = P_1 \text{ — } P_2 \text{ — } \dots \text{ — } P_{n-1} \text{ — } P_n = P'$$

de Λ -módulos projetivos indecomponíveis, com morfismos não nulos de P_i para P_{i+1} ou de P_{i+1} para P_i , $i = 1, \dots, n-1$.

O estudo da categoria $\text{mod } \Lambda$ reduz-se ao estudo das categorias $\text{mod } \Lambda_i$ onde Λ_i é um bloco de Λ . Portanto, em geral vamos trabalhar com álgebras de Artin indecomponíveis.

Uma álgebra de Artin Λ é *básica* se e só se ${}_{\Lambda}\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ onde $P_1, \dots, P_n$ são não isomorfos dois a dois. Duas álgebras Λ e Λ' são *equivalentes (no sentido de Morita)* se as categorias $\text{Mod } \Lambda$ e $\text{Mod } \Lambda'$ são equivalentes. Como toda álgebra de Artin é equivalente (no sentido de Morita) a uma álgebra de Artin básica, vamos trabalhar com álgebras básicas.

Uma álgebra de Artin é de *tipo de representação finito*, ou de *tipo finito*, se o número de classes de isomorfismos dos módulos indecomponíveis em $\text{mod } \Lambda$ é finito; caso contrário dizemos que a álgebra é de *tipo de representação infinito*, ou de *tipo infinito*.

Neste trabalho, vão ter um papel importante duas classes de álgebras de Artin: as hereditárias e um tipo de álgebras seriais.

Dizemos que um módulo projetivo é *hereditário* se todos seus submódulos são projetivos. Uma álgebra de Artin Λ é *hereditária* se todo Λ -módulo projetivo é hereditário (ou equivalentemente, todo quociente de cada Λ -módulo injetivo é injetivo). Claramente vale que a dimensão global de uma álgebra de Artin hereditária é menor ou igual do que 1. Existem álgebras de Artin hereditárias de tipo finito e de tipo infinito. Por exemplo, se k é um corpo então as seguintes duas álgebras de matrizes

$$\begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} k & k^2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

são álgebras de Artin hereditárias tais que a primeira é de tipo finito e a segunda de tipo infinito. Indicamos o capítulo VIII de [ARS] para mais informações sobre álgebras de Artin hereditárias.

Dizemos que um módulo é *uniserial* se a sua série de composição é única. Uma álgebra de Artin Λ é *serial* (ou *álgebra de Nakayama*) se todo Λ -módulo indecomponível é uniserial ou, equivalentemente, todo Λ -módulo projetivo ou injetivo indecomponível

é uniserial. Toda álgebra de Artin serial é de tipo finito. Se Λ é uma álgebra de Artin serial indecomponível então o conjunto completo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois $\{P_1, \dots, P_n\}$ pode ser ordenado de tal maneira que P_i seja cobertura projetiva de $r.P_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, e se $r.P_1 \neq 0$ então P_n é cobertura projetiva de P_1 . Se $r.P_1 = 0$, o conjunto ordenado $\{P_1, \dots, P_n\}$ é único a menos de isomorfismos e é chamado de *série de Kupisch de Λ* . Se $r.P_1 \neq 0$, o conjunto é único a menos de isomorfismos e de permutações cíclicas, e é chamado de *série de Kupisch cíclica de Λ* .

1.2 Quivers e representações de quivers

No decorrer do trabalho vamos apresentar exemplos de álgebras de Artin dadas por quivers. Vamos descrever esta construção, introduzida na teoria de representações por Gabriel (ver [1]), e indicamos o texto [CLS] para mais detalhes.

Um *quiver* $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ é um grafo orientado onde Δ_0 é o conjunto de vértices e Δ_1 é o conjunto de flechas entre os vértices. Um quiver Δ é dito *finito* se os conjuntos Δ_0 e Δ_1 são finitos.

Para cada flecha α de um vértice i para um vértice j , definimos $s(\alpha) = i$ e $e(\alpha) = j$. A cada vértice $i \in \Delta_0$ associamos o símbolo e_i que chamamos de *caminho trivial de i* , e definimos $s(e_i) = e(e_i) = i$. Um *caminho* no quiver Δ é uma sequência de flechas $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ tal que $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t < n$, ou um caminho trivial e_i , $i \in \Delta_0$. Para todo caminho não trivial $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ definimos $s(p) = s(\alpha_1)$ e $e(p) = e(\alpha_n)$, e se $s(p) = e(p)$ dizemos que p é um *ciclo orientado*.

Um quiver Δ é dito *conexo* se para qualquer par de vértices $i, j \in \Delta_0$ existe uma sequência de flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$s(\alpha_1) = i \text{ ou } e(\alpha_1) = i,$$

$$s(\alpha_n) = j \text{ ou } e(\alpha_n) = j \text{ e}$$

$$\{s(\alpha_t), e(\alpha_t)\} \cap \{s(\alpha_{t+1}), e(\alpha_{t+1})\} \neq \emptyset \text{ para todo } 1 < t < n.$$

(isto é, duas flechas consecutivas têm um extremo comum).

Dado um corpo k denotamos por $k\Delta$ o k -espaço vetorial que tem como base o conjunto

de caminhos de Δ . Podemos definir naturalmente em $k\Delta$ uma estrutura de k -álgebra: se $p = \alpha_n \dots \alpha_1$ e $q = \beta_m \dots \beta_1$ são caminhos em Δ , então definimos

$$p.q = \begin{cases} \alpha_n \dots \alpha_1 \beta_m \dots \beta_1 & \text{se } s(\alpha_1) = e(\beta_m) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A álgebra $k\Delta$ assim definida é chamada de *álgebra de caminhos de Δ sobre k* . Como estamos interessados em álgebras de dimensão finita sobre k só vamos considerar quivers finitos.

Se Δ é um quiver finito e k é um corpo, então $\Lambda = k\Delta$ satisfaz:

1. Λ é hereditária.
2. Λ é uma k -álgebra de dimensão finita se e só se Δ não tem ciclos orientados.
3. Λ é uma álgebra indecomponível se e só se Δ é um quiver conexo.
4. Λ é uma álgebra básica.
5. O conjunto $\{e_i / i \in \Delta_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $k\Delta$.

Dados um quiver finito Δ e um corpo k , se J é o ideal da álgebra $k\Delta$ gerado por Δ_1 , dizemos que um ideal I de $k\Delta$ é *admissível* se existir um $n > 0$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$. Dados um corpo k , um quiver finito Δ e um ideal admissível I da álgebra $k\Delta$, é possível descrever os elementos do ideal I a partir de certos elementos de $k\Delta$.

Proposição 1.6. *Se I é um ideal admissível da álgebra $k\Delta$ então I tem um conjunto gerador finito R , tal que todo elemento de R é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois e com os mesmos vértices iniciais e finais.*

Nas condições da proposição, dizemos que (Δ, R) é um *quiver com relações* e a álgebra $\frac{k\Delta}{\langle R \rangle} = \frac{k\Delta}{I}$ é dita *álgebra de caminhos de (Δ, R) sobre k* .

Dada uma álgebra de caminhos $\Lambda = \frac{k\Delta}{I}$, com Δ finito, k corpo qualquer e I ideal admissível, então:

1. Λ é uma k -álgebra de dimensão finita.
2. Λ é uma álgebra indecomponível se e só se Δ é um quiver conexo.
3. Λ é uma álgebra básica.
4. O conjunto $\{\bar{e}_i / i \in \Delta_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ .
5. Se $\bar{J}$ é a imagem de J pela projeção $k\Delta \rightarrow \frac{k\Delta}{I}$, então $\bar{J} = r$ (radical de Jacobson de Λ).

Uma *representação* (V, f) de um quiver Δ sobre um corpo k é uma sequência de k -espaços vetoriais de dimensão finita $V = (V_i)_{i \in \Delta_0}$ e um conjunto de transformações lineares $f = \{f_\alpha : V_i \rightarrow V_j / \alpha : i \rightarrow j \text{ é uma flecha de } \Delta_1\}$.

Dado um caminho não trivial $p = \alpha_n \dots \alpha_1$, definimos a transformação linear $f_p : V_{s(p)} \rightarrow V_{e(p)}$ como sendo a composta $f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}$. Podemos estender esta definição por linearidade a todo elemento da álgebra $k\Delta$.

Uma *representação de um quiver com relações* (Δ, R) é uma representação (V, f) do quiver Δ tal que para todo elemento $\sigma \in R$ verifica-se que $f_\sigma = 0$.

Um *morfismo* $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ entre duas representações de (Δ, R) sobre k é uma sequência de transformações lineares $h = (h_i)_{i \in \Delta_0}$, onde $h_i : V_i \rightarrow V'_i$, tal que para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Δ_1 o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ h_i \downarrow & & \downarrow h_j \\ V'_i & \xrightarrow{f'_\alpha} & V'_j \end{array}$$

A composta de morfismos é definida naturalmente coordenada a coordenada.

Desta forma obtemos uma k -categoria, chamada de *categoria das representações de* (Δ, R) , e que será denotada por $\text{Rep}(\Delta, R)$.

Teorema 1.7. *Sejam k um corpo, (Δ, R) um quiver finito com relações e $\Lambda = \frac{k\Delta}{\langle R \rangle}$ a k -álgebra de caminhos de (Δ, R) . Então as k -categorias $\text{Rep}(\Delta, R)$ e $\text{mod } \Lambda$ são equivalentes.*

Como consequência deste teorema identificamos os módulos e morfismos de $\text{mod } \Lambda$ com as representações e morfismos de $\text{Rep}(\Delta, R)$. O conjunto de vértices Δ_0 determina três conjuntos completos de módulos simples, projetivos indecomponíveis e injetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois

$$\{S_i / i \in \Delta_0\}, \{P_i / i \in \Delta_0\}, \{I_i / i \in \Delta_0\}$$

respectivamente, tais que para cada $i \in \Delta_0$, P_i é a cobertura de S_i e I_i é a envolvente injetiva de S_i .

Exemplo 1.8. Seja k um corpo.

(1) Dado o quiver

$$\Delta : 3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$$

temos que $k\Delta$ é uma k -álgebra de dimensão finita (serial hereditária) com k -base

$$\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \beta\alpha\}.$$

Vamos denotar as representações (V, f) de Δ da seguinte maneira:

$$V_3 \xrightarrow{f_\alpha} V_2 \xrightarrow{f_\beta} V_1.$$

Exibiremos a seguir todas as representações simples, projetivas indecomponíveis e injetivas indecomponíveis de Δ (a menos de isomorfismos). Não vamos indicar as transformações lineares que sejam obviamente nulas.

Representações simples:

$$S_1 = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \quad S_2 = 0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 \quad S_3 = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Representações projetivas:

$$P_1 \cong S_1 \quad P_2 = 0 \longrightarrow k \xrightarrow{1} k \quad P_3 = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

Representações injetivas:

$$I_1 \cong P_3 \quad I_2 = k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0 \quad I_3 \cong S_3.$$

(2) Se consideramos o quiver com relações (Δ, R) , onde Δ é o quiver do exemplo (1) e $R = \{\beta\alpha\}$, o ideal $I = \langle R \rangle$ é admissível, portanto $\Lambda = \frac{k\Delta}{I}$ é uma álgebra de dimensão finita sobre k (serial não hereditária).

A k -base da álgebra Λ é

$$\{\overline{\epsilon_1}, \overline{\epsilon_2}, \overline{\epsilon_3}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}\}.$$

Às vezes, vamos utilizar a seguinte forma de descrever o quiver com relações (Δ, R) :

$$3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$$

onde a linha curva do vértice 3 ao vértice 1 indica que $\overline{\beta\alpha} = 0$ em Λ .

Neste caso temos que:

$$S_1 = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \quad S_2 = 0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 \quad S_3 = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$P_1 \cong S_1 \quad P_2 = 0 \longrightarrow k \xrightarrow{1} k \quad P_3 = k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0.$$

$$I_1 \cong P_3 \quad I_2 = k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0 \quad I_3 \cong S_3.$$

(3) Dado o quiver

$$\Delta : \quad 1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2$$

temos que $k\Delta$ é uma k -álgebra de dimensão finita (hereditária e de tipo infinito) com base

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha, \beta\}.$$

Neste caso temos que:

$$S_1 = k \xrightarrow{\quad} 0 \quad S_2 = 0 \xrightarrow{\quad} k$$

$$P_1 = k \xrightleftharpoons[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} k^2 \quad P_2 \cong S_2$$

$$I_1 \cong S_1 \quad I_2 = k^2 \xrightleftharpoons[\begin{pmatrix} 01 \end{pmatrix}]{\begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}} k.$$

1.3 Teoria de Auslander-Reiten

Nesta seção vamos fazer um apanhado geral da chamada teoria de Auslander-Reiten, introduzida por estes matemáticos na década de 70 e que tem se mostrado muito importante na teoria de representações. Todo o material discutido aqui pode ser encontrado no livro [ARS] que contém também outras referências mais específicas. Seja Λ uma álgebra de Artin sobre A . Para descrever a categoria $\text{mod } \Lambda$ devemos estudar tanto os módulos quanto os morfismos entre eles. No estudo dos módulos, os indecomponíveis têm um papel muito importante devido ao teorema de Krull-Schmidt. Enquanto ao trabalhar com morfismos, surge a noção de morfismos irreduzíveis.

Definição 1.9. Um morfismo $f : M \rightarrow N$ em $\text{mod } \Lambda$ é dito de irreduzível se:

- (i) f não é secção nem retração, e
- (ii) se $f = f_1 \cdot f_2$, então f_1 é retração ou f_2 é secção.

Vamos denotar o conjunto dos morfismos irreduzíveis de M para N em $\text{mod } \Lambda$ por $\text{Irr}(M, N)$.

Observação 1.10. (a) É fácil ver que todo morfismo irreduzível em $\text{mod } \Lambda$ é um monomorfismo ou um epimorfismo próprio. Basta considerar a fatorização natural através de sua imagem.

- (b) Um morfismo em $\text{mod } \Lambda$ é irreduzível se e só se é um morfismo que não tem uma fatorização não trivial.

A classe dos morfismos irreduzíveis inclui um tipo de morfismos, os minimais que quase cindem, que são de fundamental importância na teoria de representações. Vamos definí-los.

Definição 1.11. Sejam $f : L \rightarrow M$ e $g : M \rightarrow N$ morfismos em $\text{mod } \Lambda$.

- (i) O morfismo f é minimal à esquerda se cada $h \in \text{End}_\Lambda M$ tal que $h \cdot f = f$ é um automorfismo.
- (ii) Dizemos que f quase cinde à esquerda se:

- (a) f não é secção, e
- (b) para cada morfismo $u : L \rightarrow U$ que não é secção existe $u' : M \rightarrow U$ tal que $u' \cdot f = u$.
- (iii) O morfismo f é minimal que quase cinde à esquerda se é minimal à esquerda e quase cinde à esquerda.
- (iv) O morfismo g é minimal à direita se cada $l \in \text{End}_\Lambda M$ tal que $g \cdot l = g$ é um automorfismo.
- (v) Dizemos que o morfismo g quase cinde à direita se:
- (a) g não é retração, e
- (b) para cada morfismo $v : V \rightarrow N$ que não é retração, existe $v' : V \rightarrow M$ tal que $g \cdot v' = v$.
- (vi) O morfismo g é minimal que quase cinde à direita se é minimal à direita e quase cinde à direita.

Exemplo 1.12. (1) Se $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$ é indecomponível não simples, então a inclusão natural $r.P \rightarrow P$ é um morfismo minimal que quase cinde à direita.

(2) Se $I \in \text{mod } \Lambda$ é injetivo indecomponível não simples, então a projeção natural $I \rightarrow \frac{I}{\text{Soc } I}$ é um morfismo minimal que quase cinde à esquerda.

Teorema 1.13. (i) Seja $f : L \rightarrow M$ um morfismo minimal que quase cinde à esquerda. Então f é irredutível e L é indecomponível.

Além disso, um morfismo $f' : L \rightarrow M'$ é irredutível se e só se $M' \neq 0$, $M \cong M' \oplus M''$ e existe $f'' : L \rightarrow M''$ tal que

$$\begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : L \rightarrow M' \oplus M''$$

é minimal que quase cinde à esquerda.

(ii) Seja $g : M \rightarrow N$ um morfismo minimal que quase cinde à direita. Então g é irredutível e N é indecomponível.

Além disso, um morfismo $g' : M' \rightarrow N$ é irredutível se e só se $M' \neq 0$, $M \cong M' \oplus M''$ e existe $g'' : M'' \rightarrow N$ tal que

$$(g' \ g'') : M' \oplus M'' \rightarrow N$$

é minimal que quase cinde à direita.

Isto é, podemos considerar os morfismos irredutíveis como componentes de morfismos minimais que quase cindem. Estes últimos determinam um tipo especial de sequências exatas curtas:

Definição 1.14. *Uma sequência exata curta em $\text{mod } \Lambda$*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

é dita de sequência que quase cinde se:

- (i) f é minimal que quase cinde à esquerda, e
- (ii) g é minimal que quase cinde à direita.

Proposição 1.15. *Toda sequência da forma (1.1) que quase cinde verifica:*

1. L não é injetivo e N não é projetivo.
2. a sequência está unicamente determinada (a menos de isomorfismos) por L ou N .

A prova da existência de sequências que quase cindem em $\text{mod } \Lambda$, onde Λ é uma álgebra de Artin, deve-se a Auslander e Reiten. Para tal prova é importante a existência de duas aplicações, τ e τ^{-1} , entre módulos da categoria $\text{mod } \Lambda$, chamadas de *translações de Auslander-Reiten*, que têm as seguintes propriedades:

Proposição 1.16. *Sejam $M, N \in \text{ind } \Lambda$. Então:*

1. $\tau M = 0 \Leftrightarrow M$ é projetivo.
 $\tau^{-1}N = 0 \Leftrightarrow N$ é injetivo.
2. M não é projetivo $\Rightarrow \tau M$ é indecomponível não injetivo e $\tau^{-1}\tau M \cong M$.
 N não é injetivo $\Rightarrow \tau^{-1}N$ é indecomponível não projetivo e $\tau\tau^{-1}N \cong N$.
3. M e N não são projetivos, então: $M \cong N \Leftrightarrow \tau M \cong \tau N$.
 M e N não são injetivos, então: $M \cong N \Leftrightarrow \tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$.

As definições das translações τ e τ^{-1} serão dadas no próximo capítulo, depois de definir o funtor Tr .

Teorema 1.17. *Seja Λ uma álgebra de Artin.*

(i) *Se M é um Λ -módulo indecomponível não projetivo então existe uma sequência que quase cinde em $\text{mod } \Lambda$*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(ii) *Se N é um Λ -módulo indecomponível não injetivo então existe uma sequência que quase cinde em $\text{mod } \Lambda$*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1} N \longrightarrow 0$$

As sequências que quase cindem são conhecidas também por *sequências de Auslander-Reiten*, e para abreviar, vamos chamá-las de sequências de AR.

A existencia de tais sequências permitem definir um tipo de quiver associado a uma álgebra de Artin, que ajuda a “visualizar” a categoria $\text{ind } \Lambda$. Se Λ é uma A -álgebra de Artin, definimos um quiver associado a Λ , que denotamos por Γ_Λ , como segue:

1. os vértices de Γ_Λ estão em correspondência biunívoca com os módulos $M \in \text{ind } \Lambda$ e são denotados por $[M]$.
2. existe uma flecha $[M] \rightarrow [N]$ se e só se $\text{Irr}(M, N) \neq 0$.
3. a flecha $[M] \rightarrow [N]$ tem associado um par ordenado (a, b) de inteiros positivos se existe um morfismo minimal que quase cinde à direita $a.M \oplus X \rightarrow N$ onde M não é somando de X , e um morfismo minimal que quase cinde à esquerda $M \rightarrow b.N \oplus Y$ onde N não é somando de Y .

No caso particular em que Λ é uma álgebra de Artin sobre um corpo k algebricamente fechado temos que $a = b = \dim_k \text{Irr}(M, N)$ e, em vez de associar à flecha $[M] \rightarrow [N]$ o par (a, a) , definimos no quiver Γ_Λ a flechas entre $[M]$ e $[N]$.

Os vértices correspondentes a módulos projetivos são chamados de *vértices projetivos*,

e aqueles que correspondem a módulos injetivos são chamados de *vértices injetivos*. Então a translação de AR, $\tau : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda$, induz uma aplicação entre vértices não projetivos e vértices não injetivos, que também vamos denotar por τ . Análogamente, a translação de AR τ^{-1} induz uma aplicação entre vértices não injetivos e vértices não projetivos. As aplicações τ e τ^{-1} entre vértices são chamadas de *translações do quiver* Γ_Λ . O quiver Γ_Λ munido da translação τ é chamado de *quiver de Auslander-Reiten de Λ* ou, para abreviar, *quiver de AR de Λ* . Este conceito foi introduzido por C. Ringel no final dos anos 70 com o objetivo de se descrever melhor a categoria $\text{ind } \Lambda$ (ver [Ri]).

Se existe uma flecha $[M] \rightarrow [N]$, dizemos que $[M]$ é *predecessor imediato* de $[N]$, ou que $[N]$ é *sucessor imediato* de $[M]$.

- Observação 1.18.**
1. O quiver Γ_Λ é localmente finito, isto é, cada vértice do quiver tem somente um número finito de predecessores e sucessores imediatos.
 2. O quiver Γ_Λ não tem laços, isto é, não existem flechas do tipo $\bullet \rightarrow \bullet$.
 3. Se Λ é de tipo finito, então o quiver Γ_Λ tem um número finito de vértices.
 4. Se Λ é uma álgebra sobre um corpo e é de tipo finito, então Γ_Λ não tem flechas múltiplas.
 5. Se Λ é indecomponível de tipo finito, então o quiver Γ_Λ é conexo.
 6. Se Λ é indecomponível de tipo infinito, então toda componente conexa de Γ_Λ é infinita.

Uma componente conexa do quiver de AR de Λ é dita de:

- (i) *componente pós-projetiva* se não tiver ciclos orientados e para cada vértice $[M]$ da componente existe $n \geq 0$ tal que $\tau^n[M]$ é um vértice projetivo.
- (ii) *componente pré-injetiva* se não tiver ciclos orientados e para cada vértice $[M]$ da componente existe $m \geq 0$ tal que $\tau^{-m}[M]$ é um vértice injetivo.
- (iii) *componente regular* se não contiver vértices projetivos nem injetivos.

Se Λ é uma álgebra de Artin indecomponível hereditária de tipo finito, então a única componente do quiver Γ_Λ é pós-projetiva e pré-injetiva.

Se Λ é uma álgebra de Artin indecomponível hereditária de tipo infinito então o quiver Γ_Λ tem uma componente pós-projetiva, uma componente pré-injetiva e infinitas componentes regulares.

Em geral, podemos esquematizar o quiver de AR de uma álgebra de Artin hereditária indecomponível da seguinte forma:

onde $\mathcal{P}$ representa a componente pós-projetiva, $\mathcal{I}$ a componente pré-injetiva e $\mathcal{R}$ o conjunto das componentes regulares. Se a álgebra é de tipo finito então $\mathcal{R}$ não existe e $\mathcal{P}$ coincide com $\mathcal{I}$.

Se Λ é uma álgebra de Artin indecomponível serial hereditária com série de Kupisch $\{P_1, \dots, P_n\}$, então $r.P_1 = 0$, P_n é um Λ -módulo projetivo injetivo tal que

$$0 \subsetneq r^{n-1}.P_n \subsetneq r^{n-2}.P_n \subsetneq \dots \subsetneq r^2.P_n \subsetneq r.P_n \subsetneq P_n$$

é a sua série de composição e

$$r^i.P_n \cong P_{n-i}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

O seguinte é o conjunto de módulos em $\text{ind } \Lambda$:

$$\left\{ \frac{r^i.P_n}{r^j.P_n} \mid 0 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Se $i \neq 0$, então $\frac{r^i.P_n}{r^j.P_n}$ não é um módulo injetivo e a sequência de AR começando nele é:

$$0 \longrightarrow \frac{r^i.P_n}{r^j.P_n} \xrightarrow{\binom{\pi}{i}} \frac{r^i.P_n}{r^{j-1}.P_n} \oplus \frac{r^{i-1}.P_n}{r^j.P_n} \xrightarrow{(i' \ \pi')} \frac{r^{i-1}.P_n}{r^{j-1}.P_n} \longrightarrow 0$$

onde i, i' são inclusões naturais e π, π' são projeções naturais. Então o quiver de AR de Λ é da forma:

onde $*$ indica que o módulo é projetivo, o indica que o módulo é injetivo e as flechas $--\rightarrow$ indicam a translação τ .

Exemplo 1.19. Vamos construir os quivers de AR das álgebras dadas no exemplo (1.8).

(1) Dado o quiver $\Delta : 3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$, a álgebra $\Lambda = k\Delta$ é serial hereditária com série de Kupisch $\{P_1, P_2, P_3\}$. O quiver de AR de Λ é:

onde $\frac{P_2}{r.P_2} \cong S_2$, $\frac{P_3}{r.P_3} \cong S_3$ e $\frac{P_3}{r^2.P_3} \cong I_2$.

(2) Dado o quiver com relações (Δ, R) :

$$3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$$

(with a dashed curved arrow from 3 to 1)

a álgebra $\Lambda = \frac{k\Delta}{\langle R \rangle}$ é serial não hereditária e seu quiver de AR é:

(3) Se Λ é a k -álgebra dada pelo quiver $\Delta: 1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2$, então Λ é uma álgebra hereditária de tipo infinito e o quiver Γ_Λ é:

Capítulo 2

Anéis artinianos projetivamente estáveis

Neste capítulo, os anéis são anéis artinianos à esquerda. Se Λ é um anel artiniano à esquerda, $\text{mod } \Lambda$ denota a categoria dos Λ -módulos à esquerda finitamente gerados, e $\text{mod}_P \Lambda$ denota a subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ que consiste dos módulos sem somandos diretos projetivos não nulos.

Vamos definir um tipo de anéis artinianos, os anéis projetivamente estáveis, e vamos estudar algumas de suas propriedades (estes resultados estão feitos em [JK1] para álgebras de Artin). A definição surge com muita naturalidade se consideramos a categoria projetivamente estável associada a um anel, categoria introduzida por Auslander e Reiten. Por isso é que começamos o capítulo definindo essas categorias. Vamos ver quando é possível definir o funtor contravariante $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$. Apresentaremos uma caracterização dos anéis projetivamente estáveis em função dos seus módulos projetivos indecomponíveis e, por último, estudaremos a dimensão global de tais anéis. Uma referência aos assuntos básicos analisados aqui encontram-se em [ARS].

2.1 Categorias projetivamente estáveis

Vamos construir uma nova categoria associada à categoria $\text{mod } \Lambda$.

Dados M, N em $\text{mod } \Lambda$, seja $\mathcal{P}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_\Lambda(M, N) \mid f \text{ se fatora através de um módulo projetivo}\}$.

É fácil ver que $\mathcal{P}(M, N)$ é um subgrupo do grupo abeliano $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$, onde são verificadas as seguintes duas propriedades:

- i) $f \in \mathcal{P}(M, N), g \in \text{Hom}_\Lambda(N, L) \Rightarrow gf \in \mathcal{P}(M, L)$
- ii) $f \in \text{Hom}_\Lambda(M, N), g \in \mathcal{P}(N, L) \Rightarrow gf \in \mathcal{P}(M, L)$.

Então podemos considerar a nova categoria chamada *categoria projetivamente estável*, que denotamos por $\underline{\text{mod}} \Lambda$. A categoria $\underline{\text{mod}} \Lambda$ está definida da seguinte maneira:

- i) Os objetos de $\underline{\text{mod}} \Lambda$ são os objetos de $\text{mod } \Lambda$.
- ii) Dados M, N em $\underline{\text{mod}} \Lambda$, definimos

$$\text{Hom}_{\underline{\text{mod}} \Lambda}(M, N) = \underline{\text{Hom}}_\Lambda(M, N) = \frac{\text{Hom}_\Lambda(M, N)}{\mathcal{P}(M, N)}$$

onde para $\bar{f} \in \underline{\text{Hom}}_\Lambda(M, N)$ e $\bar{g} \in \underline{\text{Hom}}_\Lambda(N, L)$,

$$\bar{g} \cdot \bar{f} = [g + \mathcal{P}(M, N)] \cdot [f + \mathcal{P}(N, L)] = \overline{g \cdot f}$$

É fácil ver, pela definição e as propriedades de $\mathcal{P}(M, N)$ com M, N em $\text{mod } \Lambda$, que $\underline{\text{mod}} \Lambda$ é efetivamente uma categoria.

Podemos observar que se f se fatora através de um projetivo em $\text{mod } \Lambda$, então $\bar{f}$ é um morfismo nulo em $\underline{\text{mod}} \Lambda$. Também temos que todo módulo projetivo P em $\text{mod } \Lambda$, é isomorfo ao módulo nulo em $\underline{\text{mod}} \Lambda$, pois $\underline{\text{Hom}}_\Lambda(P, P) = \{0\}$. Mais geralmente, como todo X em $\text{mod } \Lambda$ tem uma única decomposição (a menos de isomorfismos) da forma $X = X_P \oplus X'$, onde $X_P \in \text{mod}_P \Lambda$ e X' é projetivo, temos que $X \cong X_P$ em $\underline{\text{mod}} \Lambda$. O funtor inclusão $\text{mod}_P \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda$, induz o funtor $\underline{\text{mod}}_P \Lambda \rightarrow \underline{\text{mod}} \Lambda$, que é uma equivalência, pelas últimas observações feitas. Isto é, ao trabalhar em $\underline{\text{mod}} \Lambda$ podemos “esquecer” os módulos projetivos e os morfismos que se fatoram através deles.

No caso particular em que Λ é uma A -álgebra de Artin, temos que $\mathcal{P}(M, N)$ é um A -submódulo de $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$, para todo M, N em $\text{mod } \Lambda$, e $\underline{\text{mod}} \Lambda$ é uma A -categoria. Analogamente constrói-se a categoria injetivamente estável, cuja notação é $\overline{\text{mod}} \Lambda$. Para obter mais informações sobre as categorias projetiva o injetivamente estáveis pode-se consultar [ARS] (capítulo IV, seção 1) ou [ASS] (capítulo III, seção 2).

2.2 Definição de anel artiniano projetivamente estável

Ao trabalhar em $\text{mod}_P \Lambda$, estamos eliminando os módulos projetivos, mas em geral não acontece o mesmo com os morfismos que se fatoram através deles, como vemos no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Seja Λ a k -álgebra de caminhos dada pelo quiver

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

com $R = \{\gamma\beta\alpha\}$.

O quiver de AR de Λ é:

$$\begin{array}{ccccccc} [P_4] = [S_4] & \leftarrow & [S_3] & \leftarrow & [S_2] & \leftarrow & [S_1] = [I_1] \\ & \searrow & \nearrow & & \nearrow & \searrow & \\ & [P_3] & & [r.P_1] & & [I_2] & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ & [P_2] = [I_4] & & [P_1] = [I_3] & & & \end{array}$$

(Note: Dashed arrows connect $[P_4] \leftarrow [P_3] \leftarrow [P_2]$, $[S_4] \leftarrow [S_3] \leftarrow [S_2]$, $[I_4] \leftarrow [r.P_1] \leftarrow [I_2]$, and $[P_3] \leftarrow [r.P_1] \leftarrow [I_2]$. Solid arrows connect $[P_3] \rightarrow [P_2]$, $[S_3] \rightarrow [r.P_1]$, $[S_2] \rightarrow [I_2]$, $[r.P_1] \rightarrow [P_1]$, and $[I_2] \rightarrow [P_1]$. Labels i and π are on arrows $[r.P_1] \rightarrow [P_1]$ and $[I_2] \rightarrow [P_1]$ respectively.)

Os módulos indecomponíveis de $\text{mod}_P \Lambda$ são (a menos de isomorfismos):

$$S_1, S_2, S_3, r.P_1 \text{ e } I_2.$$

Existe um morfismo $f : r.P_1 \rightarrow I_2$ não nulo que se fatora através de um projetivo. De fato, se $i : r.P_1 \rightarrow P_1$ é a inclusão natural e $\pi : P_1 \rightarrow I_2$ é o morfismo isomorfo à projeção natural $I_3 \rightarrow \frac{I_3}{\text{Soc } I_3} \cong I_2$, então $f = \pi \cdot i$ é não nulo, pois $\text{Im } i = r.P_1 \not\subset \text{Ker } \pi = \text{Soc } P_1 = S_3$.

Este exemplo mostra que as categorias $\text{mod}_P \Lambda$ e $\underline{\text{mod}} \Lambda$ em geral não são equivalentes. Agora vamos definir um tipo de anel artiniano onde isso sim acontece.

Definição 2.2. Um anel artiniano Λ é projetivamente estável se para todos M e N em $\text{mod}_P \Lambda$, todo morfismo $f: M \rightarrow N$ que se fatora através de um projetivo é nulo.

Observação 2.3. Um anel artiniano Λ é projetivamente estável se e somente se as categorias $\text{mod}_P \Lambda$ e $\underline{\text{mod}} \Lambda$ são equivalentes.

Exemplo 2.4. Todo anel artiniano hereditário à esquerda é projetivamente estável. De fato, dados M e N em $\text{mod}_P \Lambda$, com Λ anel artiniano hereditário à esquerda, e $f: M \rightarrow N$ que se fatora através de um projetivo P , temos que $f = hg$, onde $g: M \rightarrow \text{Im} g$ é um epimorfismo com $\text{Im} g \subset P$. Portanto $\text{Im} g$ é projetivo e g cinde, o que implica que $\text{Im} g$ é isomorfo a um somando direto de M . Como $M \in \text{mod}_P \Lambda$, temos que $\text{Im} g = 0$. Isto é, $f = 0$.

Mas nem todo anel artiniano projetivamente estável é hereditário, como vemos no próximo exemplo.

Exemplo 2.5. A k -álgebra de caminhos Λ dada pelo quiver $3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$ do exemplo (1.19) não é hereditária. Seu quiver de AR é:

Os únicos módulos indecomponíveis não projetivos (a menos de isomorfismos) são S_2 e S_3 . Não existem morfismos não nulos entre eles (por serem módulos simples não isomorfos). Portanto Λ é uma álgebra projetivamente estável não hereditária.

Para abreviar, daqui em diante, vamos nos referir aos anéis artinianos projetivamente estáveis, como anéis estáveis.

2.3 O funtor Tr

As categorias projetivamente estáveis são necessárias na hora de se definir o funtor transposição Tr . Este funtor é muito importante na teoria de representações (por exemplo, para se definir as translações de AR τ e τ^{-1}).

Vamos lembrar a definição do funtor Tr , e a necessidade das categorias projetivamente estáveis. Dados um anel artiniano Λ , e $M \in \text{mod } \Lambda$, seja

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

uma apresentação projetiva minimal de M . Aplicando o funtor contravariante e exato à esquerda $^* = \text{Hom}_\Lambda(, \Lambda) : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ em (2.1), obtemos uma seqüência exata em $\text{mod } \Lambda^{op}$:

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} P_0^* \xrightarrow{f_1^*} P_1^* \longrightarrow \text{Coker } f_1^* \longrightarrow 0$$

Chamamos *transposta do módulo M* a $\text{Tr}M = \text{Coker } f_1^*$, que está unicamente determinado a menos de isomorfismos. É fácil ver que M é projetivo se e somente se $\text{Tr}M = 0$. Temos então definida uma aplicação Tr dos objetos de $\text{mod } \Lambda$ para os objetos de $\text{mod } \Lambda^{op}$. Mas, em geral, não é possível definir um funtor que, restringido aos objetos, coincida com Tr . O problema está nos morfismos, como já vamos ver. Conseguimos sim construir um funtor se considerarmos a categoria estável $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$. Isto é, existe um funtor, que vamos chamar de *funtor transposição* e denotamos por Tr , de $\text{mod } \Lambda$ para $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$, que coincide com a aplicação Tr definida antes nos objetos.

Vamos ver como definir Tr nos morfismos, e a importância de se considerar $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$. Dado $f : M \rightarrow N$ em $\text{mod } \Lambda$, sejam

$$P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad Q_1 \xrightarrow{h_1} Q_0 \xrightarrow{h_0} N \longrightarrow 0$$

as apresentações projetivas minimais de M e N , respectivamente. Observe que existem $f_0 : P_0 \rightarrow Q_0$ e $f_1 : P_1 \rightarrow Q_1$ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{g_1} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ Q_1 & \xrightarrow{h_1} & Q_0 & \xrightarrow{h_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.2)$$

Se restringirmos $*$ = $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ à $\mathcal{P}(\Lambda)$, subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ determinada pelos módulos projetivos, obtemos a dualidade $*$: $\mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda^{op})$ (ver [ARS], cap. II, prop. 4.3). Aplicando o funtor $*$ ao quadrado esquerdo do diagrama (2.2), obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^* & \xrightarrow{h_1^*} & Q_1^* & \longrightarrow & \text{Tr} N & \longrightarrow & 0 \\ f_0^* \downarrow & & f_1^* \downarrow & & \downarrow f' & & \\ P_0^* & \xrightarrow{g_1^*} & P_1^* & \longrightarrow & \text{Tr} M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aqui o Λ^{op} -morfismo $f' : \text{Tr} N \rightarrow \text{Tr} M$ fica determinado pelo par (f_0^*, f_1^*) , isto é, por (f_0, f_1) . Portanto f' não está univocamente determinado por f , e é por isso que, em geral, não podemos definir $\text{Tr} f = f'$. Mas $\overline{f'} : \text{Tr} N \rightarrow \text{Tr} M$ em $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$ é independente do par (f_0, f_1) escolhido.

Vamos provar esta última afirmação. Seja (k_0, k_1) outro par de morfismos tal que

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{g_1} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ k_1 \downarrow & & k_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ Q_1 & \xrightarrow{h_1} & Q_0 & \xrightarrow{h_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.3)$$

é um diagrama comutativo. A partir dos diagramas (2.2) e (2.3) construímos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{g_1} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ f_1 - k_1 \downarrow & \swarrow w & \downarrow f_0 - k_0 & & \downarrow 0 & & \\ Q_1 & \xrightarrow{h_1} & Q_0 & \xrightarrow{h_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

É fácil ver que existe $w : P_0 \rightarrow Q_1$ tal que $h_1 \cdot w = f_0 - k_0$. Aplicando o funtor $*$ ao quadrado esquerdo do último diagrama, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^* & \xrightarrow{h_1^*} & Q_1^* & \longrightarrow & \text{Tr} N & \longrightarrow & 0 \\ f_0^* - k_0^* \downarrow & \swarrow w^* & \downarrow f_1^* - k_1^* & \searrow v^* & \downarrow f' - k' & & \\ P_0^* & \xrightarrow{g_1^*} & P_1^* & \longrightarrow & \text{Tr} M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde $w^* : Q_1^* \rightarrow P_0^*$ é tal que $w^* \cdot h_1^* = f_0^* - k_0^*$. Portanto, temos que

$$g_1^* \cdot w^* \cdot h_1^* = g_1^* \cdot (f_0^* - k_0^*) = (f_1^* - k_1^*) \cdot h_1^*.$$

Então $(g_1^* \cdot w^* - (f_1^* - k_1^*)) \cdot h_1^* = 0$ e, por propriedade do Coker (ver [B], pag. 20), existe $v^* : \text{Tr} N \rightarrow P_1^*$ tal que $v^* \cdot \text{Coker} h_1^* = g_1^* \cdot w^* - (f_1^* - k_1^*)$. Daí temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Coker} g_1^* \cdot v^* \cdot \text{Coker} h_1^* &= \text{Coker} g_1^* \cdot (g_1^* \cdot w^* - (f_1^* - k_1^*)) = \\ &= - \text{Coker} g_1^* \cdot (f_1^* - k_1^*) = -(f' - k') \cdot \text{Coker} h_1^* \end{aligned}$$

Como $\text{Coker} h_1^*$ é epimorfismo, temos que $\text{Coker} g_1^* \cdot v^* = k' - f'$, portanto $k' - f' \in \mathcal{P}(\text{Tr} N, \text{Tr} M)$. Isso quer dizer que $\overline{f'} = \overline{k'}$, que é o que queríamos provar.

A aplicação Tr definida nos objetos e nos morfismos de $\text{mod } \Lambda$ para $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$ é efetivamente um funtor (ver [ARS], capítulo IV, seção 1).

Observação 2.6. *Se Λ^{op} é um anel artiniano projetivamente estável então $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ é um funtor contravariante.*

Segue da observação (2.3), identificando $\underline{\text{mod}} \Lambda^{op}$ com $\text{mod}_P \Lambda^{op}$ (subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda^{op}$).

Esta última observação, é uma propriedade dos anéis hereditários à esquerda, que é possível estender aos anéis estáveis.

Em [JK1] (proposição 2.2) prova-se que se a aplicação $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ definida nos objetos e nos morfismos é um funtor (isto é, se Tr está bem definida nos morfismos) então Λ^{op} é estável. Não incluímos aqui essa prova pois ocuparia bastante espaço e não é de nosso interesse caracterizar os anéis projetivamente estáveis através da aplicação Tr .

Agora podemos definir as translações de AR τ e τ^{-1} , mencionadas no capítulo 1. A translação $\tau: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda$ é a composição da aplicação $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ entre módulos e a dualidade $D: \text{mod } \Lambda^{op} \rightarrow \text{mod } \Lambda$, e escrevemos $\tau = D\text{Tr}$. A translação $\tau^{-1}: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda$ é a composição da dualidade $D: \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$ e a aplicação $\text{Tr}: \text{mod } \Lambda^{op} \rightarrow \text{mod } \Lambda$, e escrevemos $\tau^{-1} = \text{Tr}D$.

2.4 Caracterização dos anéis estáveis

A próxima propriedade será muito utilizada no que segue do trabalho.

Proposição 2.7. *Seja P um Λ -módulo projetivo indecomponível tal que todo submódulo de P é projetivo ou simples. Então:*

(a) *P é uniserial $\Leftrightarrow \text{Soc } P$ é simples.*

(b) *P é não hereditário $\Leftrightarrow P$ é uniserial com série de composição da forma $0 \subsetneq \text{Soc } P \subsetneq Q_1 \subsetneq \dots \subsetneq Q_t = P$, onde $\text{Soc } P$ é simples não projetivo e, para todo j , Q_j é projetivo indecomponível.*

Prova: (a)($\Rightarrow$) É obvio.

($\Leftarrow$) Se $\text{Soc } P$ é simples, é o único submódulo minimal de P . Portanto todo submódulo não nulo de P é indecomponível, pois não existem submódulos com intersecção vazia. É suficiente mostrar que se P_1 e P_2 são submódulos de P não nulos e não simples, então $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

Os módulos P_1 , P_2 e $P_1 + P_2$ são projetivos indecomponíveis (pois são não nulos e não simples).

O epimorfismo natural $P_1 \oplus P_2 \rightarrow P_1 + P_2 \rightarrow 0$ cinde e $P_1 + P_2$ é somando direto

indecomponível de $P_1 \oplus P_2$, portanto, pelo teorema de Krull-Schmidt, $P_1 + P_2 \cong P_1$ ou $P_1 + P_2 \cong P_2$. Então $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

(b)($\Leftarrow$) É óbvio.

($\Rightarrow$) Como P é não hereditário, tem um submódulo S não nulo não projetivo, que tem que ser simples. Portanto S é somando direto de $\text{Soc } P$ e $\text{Soc } P$ é não projetivo. Então $\text{Soc } P$ é simples não projetivo. Por (a) P é uniserial, e o resto do enunciado é claro. ■

Lema 2.8. *Sejam S um submódulo simples próprio de um módulo indecomponível $M \in \text{Mod } \Lambda$, e $I(S)$ a sua envolvente injetiva. Se todo submódulo de $I(S)$ é projetivo ou simples, então M é isomorfo a um submódulo projetivo de $I(S)$.*

Prova: Sejam $i : S \rightarrow M$ e $j : S \rightarrow I(S)$ as inclusões naturais. Por ser $I(S)$ injetivo, existe $h : M \rightarrow I(S)$ morfismo não nulo, tal que $j = hi$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow j & \nearrow h & \\ & & I(S) & & \end{array}$$

Vamos ver que $\text{Im } h$ não é simples. Observe que $S \cong \text{Soc } I(S)$ é o único submódulo simples de $I(S)$, pela Proposição (2.7). Se $\text{Im } h$ fosse simples, temos que $\text{Im } h \cong S$. Então a composição de morfismos $S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} \text{Im } h \cong S$ é monomorfismo, pois $hi = j$ e j é monomorfismo; e é epimorfismo pois $\text{Im}(hi)$ é não nulo portanto $\text{Im}(hi) = \text{Im } h$. Isto é, existe um morfismo $h' : M \rightarrow S$ tal que $h'i : S \rightarrow S$ é isomorfismo. Nesse caso, $M = \text{Ker } h' \oplus \text{Im } i = \text{Ker } h' \oplus S$, o que é impossível pois M é indecomponível e S é submódulo próprio de M . Portanto $\text{Im } h$ não é simples.

Por hipótese, $\text{Im } h$ tem que ser projetivo, e como M é indecomponível $\text{Ker } h$ tem que ser nulo. Isto é, h é monomorfismo e $M \cong \text{Im } h \subset I(S)$. ■

Lema 2.9. *Se $M \in \text{mod } \Lambda$ é indecomponível e N é um submódulo não nulo de M , então M/N não tem somandos diretos projetivos.*

Prova: Suponhamos que M/N tenha algum somando direto projetivo P . A composição das projeções canônicas $\pi : M \rightarrow M/N$ e $\theta : M/N \rightarrow P$ é um epimorfismo que cinde. Como M é indecomponível, teríamos que $M \cong P$ e $l(M) = l(P)$. Mas $l(M) > l(M/N) \geq l(P)$ e obtemos uma contradição. ■

Definição 2.10. Dizemos que um Λ -módulo M é sem torção se é isomorfo a um submódulo de um Λ -módulo projetivo.

Definição 2.11. Dizemos que um Λ -módulo é de torção se não é um Λ -módulo sem torção.

Teorema 2.12. Um anel artiniano Λ é estável se e somente se satisfaz as seguintes duas condições:

- (A) Todo submódulo de um módulo projetivo indecomponível é projetivo ou simples.
- (B) A envolvente injetiva de todo módulo simples sem torção não projetivo é projetivo.

Prova: ($\Rightarrow$) Vamos provar que Λ satisfaz (A). Seja P um Λ -módulo projetivo indecomponível. Se M é um submódulo de P que não é projetivo nem simples, então $M = M' \oplus Q$, onde Q é projetivo e $0 \neq M' \in \text{mod}_P \Lambda$. Vamos provar que nesse caso M tem um submódulo L , $0 \neq L \neq M$, tal que a composição da inclusão natural $j : M' \rightarrow P$ e a projeção natural $\pi : P \rightarrow P/L$ é não nula.

i) Se M' não é simples, L é qualquer submódulo próprio não nulo de M' . Pois se a composição fosse nula, então $M' = \text{Im } j \subset \text{Ker } \pi = L$, portanto $M' \subseteq L$ e chegamos a uma contradição.

ii) Se M' é simples, então $Q \neq 0$ pois M não é simples. Então L é qualquer submódulo não nulo de Q . Como $\text{Im } j = M' \not\subseteq L = \text{Ker } \pi$, temos que $\pi j \neq 0$.

Como P é indecomponível, pelo Lema (2.9), $P/L \in \text{mod}_P \Lambda$. Então temos M' e P/L em $\text{mod}_P \Lambda$ e $\pi j : M' \rightarrow P/L$ morfismo não nulo que se fatora através de P . Isto contradiz o fato de Λ ser estável. Portanto M é projetivo ou simples e Λ satisfaz (A). Agora provaremos que Λ satisfaz (B). Seja S um submódulo simples não projetivo de um módulo projetivo P . Como Λ satisfaz (A), pela proposição (2.7), $S = \text{Soc } P$. Então a envolvente injetiva $I(S)$ de S é indecomponível e igual à envolvente injetiva $I(P)$ de P . Como $I(S)$ é uma extensão essencial de S , temos que para todo

submódulo X de $I(S)$, $S \cap X \neq 0$, isto é, $S \subset X$. Portanto todo submódulo X não simples de $I(S)$, é indecomponível.

Em princípio sabemos que $I(S) \in \text{Mod } \Lambda$. Vamos ver que $I(S)$ pertence especificamente a $\text{mod } \Lambda$ (esta parte da demonstração não é necessária se Λ é uma álgebra de Artin). Suponhamos que isso não acontece, isto é, $l(I(S)) = \infty$. Se $f : P \rightarrow I(S)$ é a envolvente injetiva de P ; temos que $P \cong f(P) \subsetneq I(S)$. Portanto existe $0 \neq x_1 \in I(S) - f(P)$. Seja $f(P) + \Lambda.x_1 = X_1 \subset I(S)$. Como $l(f(P)) < \infty$ e $l(\Lambda.x_1) < \infty$, obviamente $l(X_1) < \infty$. Então existe $0 \neq x_2 \in I(S) - X_1$, e $X_1 + \Lambda.x_2 = X_2 \subset I(S)$ onde $l(X_2) < \infty$. Desta forma, obtemos uma sequência infinita $P \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq I(S)$, onde X_i é indecomponível para todo $i \in \mathbb{N}$, por ser submódulos não simples de $I(S)$. Como existe só um número finito de módulos projetivos indecomponíveis em $\text{mod } \Lambda$, segue que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $X = X_j$ não é projetivo. Então temos que as inclusões naturais $S \xrightarrow{i} P$ e $P \xrightarrow{h} X$, determinam um morfismo não nulo $hi : S \rightarrow X$, com S e X em $\text{mod}_P \Lambda$, que se fatora através de P . Isso contradiz o fato de Λ ser estável. Portanto $I(S) \in \text{mod } \Lambda$.

Agora vamos ver que $I(S)$ é projetivo. Da composição da inclusão natural $i : S \rightarrow P$ e a envolvente injetiva $f : P \rightarrow I(S)$, obtemos o morfismo não nulo $fi : S \rightarrow I(S)$ que se fatora através de P , com $S \in \text{mod}_P \Lambda$. Como Λ é estável, $I(S) \notin \text{mod}_P \Lambda$, isto é, $I(S)$ é indecomponível projetivo. Portanto Λ satisfaz (B).

($\Leftarrow$) Sejam M e $N \in \text{mod}_P \Lambda$ e um morfismo $f : M \rightarrow N$ tal que $f = gh$ onde $h : M \rightarrow P, g : P \rightarrow N$ e P é projetivo.

Vamos mostrar que $f = 0$. Para isso é suficiente considerar o caso em que $h \neq 0, g \neq 0$ e P é indecomponível. Como $M \in \text{mod}_P \Lambda$, $\text{Im } h$ não é projetivo e portanto P não é simples. Por (A) e Proposição (2.7), $\text{Im } h = \text{Soc } P$. Como $\text{Soc } P$ está contido em todo submódulo não nulo de P , se mostramos que $\text{Ker } g \neq 0$, teremos que $\text{Im } h \subset \text{Ker } g$, isto é, que $gh = 0$. Se $\text{Ker } g = 0$, g é monomorfismo e $g(P) \subset N$ é indecomponível. Isto é, existe N_1 , somando direto indecomponível de N , tal que $g(P) \subset N_1$. O morfismo $g_1 : P \rightarrow N_1$, induzido por g , é monomorfismo. Como P não é simples, $g_1(\text{Soc } P) \cong \text{Soc } P$ é um submódulo próprio de N_1 . Por (B), a envolvente injetiva de $\text{Soc } P$ e $g_1(\text{Soc } P)$ é projetiva. Por (A) e o lema (2.8) aplicados a $g_1(\text{Soc } P)$ e N_1 ,

temos que N_1 é projetivo, em contradição com $N \in \text{mod}_P \Lambda$. Portanto $\text{Ker } g \neq 0$ e $f = gh = 0$. ■

Observação 2.13. O teorema (2.12) é uma caracterização muito importante dos anéis estáveis, pois vai ser aplicado tanto nas provas das propriedades dos anéis estáveis como para determinar se um anel é estável ou não. No exemplo (2.1) temos que $r.P_1$ não é projetivo nem simples. Por outro lado, a álgebra Λ do exemplo (1.19) (2) claramente satisfaz as propriedades (A) e (B).

Vamos utilizar muito os resultados da próxima proposição sobre morfismos entre módulos indecomponíveis.

Proposição 2.14. *Sejam Λ um anel artiniano satisfazendo (A) e $f : X \rightarrow P$ um morfismo entre módulos indecomponíveis $X, P \in \text{Mod } \Lambda$, onde P é projetivo. Então:*

- (a) $f \neq 0$ não é monomorfismo $\Rightarrow P$ não é hereditário e $\text{Im } f = \text{Soc } P$.
- (a') $\text{Hom}_\Lambda(X, P) \neq 0 \Leftrightarrow$ i) X é isomorfo a um submódulo de P , ou ii) P não é hereditário e $\text{Soc } P$ é isomorfo a um submódulo de X/rX .
- (b) P é hereditário e X não é isomorfo a um submódulo de $P \Rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, P) = 0$.
- (c) P não é hereditário e X não é isomorfo a um submódulo de $P \Rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, P) = \text{Hom}_\Lambda(X, \text{Soc } P)$.
- (c') P não hereditário, X projetivo hereditário e $f \neq 0 \Rightarrow X$ é cobertura projetiva de $\text{Soc } P$.
- (d) X é projetivo, X/rX é módulo de torção e $f \neq 0 \Rightarrow f$ é monomorfismo.

Prova: (a) Como $\text{Ker } f \neq 0$ e X é indecomponível, $\text{Im } f$ não é projetivo e portanto P não é hereditário. Pela Proposição (2.7(b)), $\text{Im } f = \text{Soc } P$.

(a')($\Rightarrow$) Seja $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(X, P)$. Se f é monomorfismo vale i). Se f não é monomorfismo, por (a), P não é hereditário e $\text{Im } f = \text{Soc } P$. Falta provar que $\text{Soc } P$ é isomorfo a um submódulo de X/rX . Mas o epimorfismo $f : X \rightarrow \text{Im } f = \text{Soc } P$ induz o epimorfismo $f' : X/rX \rightarrow \text{Soc } P$. Como X/rX é semisimples, existe um submódulo S/rX de X/rX simples tal que $f'' : S/rX \rightarrow \text{Soc } P$, restrição de f' a S/rX , é não nulo. Por ser S/rX e $\text{Soc } P$ simples, f'' é um isomorfismo.

($\Leftarrow$) Se vale i) o resultado é obvio. Se vale ii), como X/rX é semisimples, $\text{Soc } P$ é isomorfo a S/rX , somando direto de X/rX . Então da composição das projeções canônicas $\pi : X \rightarrow X/rX$ e $\theta : X/rX \rightarrow S/rX \cong \text{Soc } P$, obtemos um morfismo não nulo de X para P .

(b) Se existe $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, P)$, $f \neq 0$, com P hereditário, temos por (a) que f tem que ser um monomorfismo. Então X é isomorfo a um submódulo de P , o que não é possível. Portanto $f = 0$ e $\text{Hom}_\Lambda(X, P) = 0$.

(c) Claramente $\text{Hom}_\Lambda(X, \text{Soc } P) \subset \text{Hom}_\Lambda(X, P)$. Como X não é isomorfo a um submódulo de P , se $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(X, P)$, f não é monomorfismo. Então, por (a), $\text{Im } f = \text{Soc } P$, isto é, $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, \text{Soc } P)$. Portanto, $\text{Hom}_\Lambda(X, P) \subset \text{Hom}_\Lambda(X, \text{Soc } P)$.

(c') De (c) temos que $\text{Im } f = \text{Soc } P$. Também temos que $\text{Ker } f \subset rX$. Portanto $X \xrightarrow{f} \text{Soc } P \rightarrow 0$ é uma cobertura projetiva.

(d) Se f não é monomorfismo, (a') implica que $\text{Soc } P$ é isomorfo a um submódulo de X/rX . Como X é projetivo indecomponível, X/rX é simples, portanto $\text{Soc } P \cong X/rX$. Mas isso é uma contradição, pois $\text{Soc } P$ é um módulo sem torção e X/rX é um módulo de torção. ■

2.5 A dimensão global dos anéis estáveis

Vamos ver agora uma propriedade dos anéis hereditários à esquerda (que vamos chamar anéis hereditários), que não se estende aos anéis estáveis. Um anel Λ é hereditário se e somente se a dimensão global $dgl \Lambda \leq 1$. Mas existem anéis estáveis com dimensão global maior do que 1. Mais ainda, existem anéis estáveis com dimensão global n , para todo $n \in \mathbb{N}$, e também com dimensão global ∞ .

Exemplo 2.15. Dado $n \geq 1$, seja $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o quiver com $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, $\Delta_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, tal que o diagrama subjacente de Δ é o diagrama euclidiano $\tilde{A}_n$, e todas as flechas estão orientadas no mesmo sentido. A álgebra $\Lambda = \frac{kQ}{\langle R \rangle}$ sobre um corpo k , onde $R = \{\alpha_{i+1} \cdot \alpha_i \mid i = 1, \dots, n-1\}$, é uma álgebra estável com dimensão

global n .

As representações dos módulos projetivos indecomponíveis são:

Para $i = 1, \dots, n-1$, os submódulos próprios de P_i , são claramente $rP_i \cong S_{i+1}$, isto é, são simples. Os submódulos próprios de P_n são isomorfos a S_2 ou P_1 . Portanto Λ satisfaz (A).

$\{S_2, S_3, \dots, S_n\}$ é um conjunto completo de módulos simples sem torção não projetivos. As suas envoltentes injetivas são, respectivamente,

$$I_2 \cong P_n, I_3 \cong P_2, \dots, I_n \cong P_{n-1}$$

Portanto Λ também satisfaz (B), e é, então, estável.

Uma resolução projetiva de S_1 é:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} S_1 \longrightarrow 0$$

onde $\text{Ker } f_1 = rP_1 = S_2$, $\text{Ker } f_2 = rP_2 = S_3, \dots$, $\text{Ker } f_n = rP_n = P_1$. Então $\text{dp } S_1 = n$, $\text{dp } S_2 = n-1, \dots, \text{dp } S_n = 1$. Portanto $\text{dgl } \Lambda = n$.

Exemplo 2.16. Seja $\Lambda' = \frac{k\Delta}{\langle R' \rangle}$ a k -álgebra onde Δ é como no exemplo anterior e $R' = R \cup \{\alpha_1, \alpha_n\}$ onde R é como acima. Então Λ' é uma álgebra estável com dimensão global ∞ .

As únicas diferenças com o exemplo anterior são as representações de P_n e I_2 :

Mas, neste caso, Λ' claramente satisfaz (A) e (B). Por outro lado, a resolução projetiva de S_1 é:

$$\dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f} P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

onde $\text{Ker } f \cong S_1$. Isto é, $\text{dp } S_1 = \infty$, portanto $\text{dgl } \Lambda' = \infty$.

Para as álgebras de Artin estáveis com dimensão global ∞ , temos várias caracterizações. Para ver isso vamos precisar de alguns resultados prévios.

Seja $\mathcal{Q}$ a subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ dos módulos projetivos indecomponíveis não hereditários de comprimento 2. Isto é, $Q \in \mathcal{Q}$ se e somente se Q é projetivo indecomponível tal que $\text{Soc } Q$ é o único submódulo próprio de Q , e é simples não projetivo. Se Λ é um anel não hereditário satisfazendo (A), então $\mathcal{Q} \neq 0$ e todo caminho em $\mathcal{Q}$

$$Q_0 \xrightarrow{f_1} Q_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{t-1} \xrightarrow{f_t} Q_t$$

com f_i não isomorfismo, é tal que f_i não é monomorfismo pela proposição (2.14 (c)), e portanto também não epimorfismo, pois se fosse, teríamos $Q_{i-1} \cong \text{Ker } f_i \oplus Q_i$ decomponível, o que é uma contradição.

Proposição 2.17. *Sejam Λ um anel artiniano satisfazendo (A), S um Λ -módulo simples tal que $\text{dp } S \geq 2$ e*

$$\dots P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} S \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de S . Então para todo $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r \leq \text{dp } S - 2$ temos que $P_r \in \mathcal{Q}$.

Prova: Vamos provar por indução sobre r .

i) Se $r = 0$, P_0 , P_1 e P_2 são não nulos.

$\text{Ker} f_0 = r.P_0$ não é projetivo, pois $P_2 \neq 0$. Como Λ satisfaz (A) e P_0 é indecomponível, $r.P_0$ é simples. Então P_0 é um módulo projetivo indecomponível não hereditário de comprimento 2.

ii) Se a afirmação vale para $r = t - 1$, vamos provar que vale para $r = t$.

Como $dp S \geq t + 2 > (t - 1) + 2$, a hipótese de indução implica que $P_0, \dots, P_{t-1} \in \mathcal{Q}$. Temos que provar que $P_t \in \mathcal{Q}$. Como $dp S > t + 1$, $P_{t+2} \neq 0$ e portanto $\text{Ker} f_{t-1}$ e $\text{Ker} f_t$ não são projetivos. Como P_{t-1} é indecomponível, a propriedade (A) implica que $\text{Ker} f_{t-1}$ é simples. Isto quer dizer que P_t é indecomponível, por ser cobertura projetiva de um módulo simples. Então $r.P_t$ é simples, pois $r.P_t = \text{Ker} f_t$ é não projetivo e podemos aplicar a propriedade (A) a P_t . Então P_t é projetivo indecomponível não hereditário de comprimento 2. Isto é, $P_t \in \mathcal{Q}$. ■

Proposição 2.18. *Seja Λ um anel satisfazendo (A) e*

$$Q_0 \xrightarrow{f_1} Q_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{r-1} \xrightarrow{f_r} Q_r$$

um caminho em $\mathcal{Q}$ de comprimento $r \geq 0$, tal que f_i não é isomorfismo, $i = 1, \dots, r$. Então o caminho é uma seqüência exata e $\text{Coker } f_r$ é um módulo simples tal que $dp(\text{Coker } f_r) \geq r + 2$.

Prova: Pela proposição (2.14 (c)), $\text{Im} f_i = \text{Soc } Q_i$. Por outro lado, temos que $0 \neq \text{Ker} f_i = \text{Soc } Q_{i-1} = r.Q_{i-1}$ é o único submódulo próprio de Q_{i-1} . Então, para todo i , $1 \leq i < r$, $\text{Ker} f_{i+1} = \text{Im} f_i$. Isto é, o caminho é uma seqüência exata. E também temos que $f_i : Q_{i-1} \rightarrow \text{Soc } Q_i = r.Q_i$ é cobertura projetiva.

Então $\text{Coker } f_r \cong \frac{Q_r}{\text{Im} f_r} = \frac{Q_r}{r.Q_r}$ e $\text{Ker} f_1 = \text{Soc } Q_0$ são módulos simples, onde $\text{Soc } Q_0$ não é projetivo. Então a resolução projetiva minimal de $\text{Coker } f_r$ é da forma

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{f_1} Q_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{r-1} \xrightarrow{f_r} Q_r \longrightarrow \text{Coker } f_r \longrightarrow 0$$

onde P_1 e P_2 são não nulos. Então $dp \text{Coker } f_r \geq r + 2$. ■

Teorema 2.19. *Se Λ é um anel artiniano não hereditário satisfazendo (A), então $dgl \Lambda = \sup\{\text{comprimento dos caminhos em } \mathcal{Q}\} + 2$.*

Prova: Como Λ não é hereditário, $dgl \Lambda > 1$.

Vamos denotar $\sup\{\text{comprimento dos caminhos em } \mathcal{Q}\}$ por K .

Seja S um submódulo simples com dimensão projetiva máxima. Então temos que $dgl \Lambda = pd S > 1$ (ver [DK], corolário 11.4.6).

Se $dgl \Lambda = \infty$, pela proposição (2.17), da resolução projetiva minimal de S , obtemos um caminho em $\mathcal{Q}$ de comprimento infinito. Então $K = \infty$ e vale a afirmação.

Se $dgl \Lambda = dp S = l + 2$, com $0 \leq l < \infty$, pela proposição (2.17), existe um caminho em $\mathcal{Q}$ de comprimento l . Portanto $K \geq l$. Se $K > l$, existiria um caminho em $\mathcal{Q}$ de comprimento maior do que l . Isso implicaria, pela proposição (2.18), que existe um módulo simples S' em $\text{mod } \Lambda$ com $dp S' > l + 2$, o que é uma contradição. Portanto $K = l$, e $dgl \Lambda = K + 2$. ■

Lema 2.20. *Se Λ é um anel artiniano serial e X é um módulo em $\text{ind } \Lambda$ que contém um módulo projetivo P não nulo, então X é projetivo.*

Prova: Seja $f : Q \rightarrow X$ uma cobertura projetiva de X . Como Λ é serial e X é indecomponível, X é uniserial. Então $r.X$ é o único submódulo maximal de X . Portanto $\frac{Q}{r.Q} \cong \frac{X}{r.X}$ é simples, e $r.Q$ é um submódulo maximal de Q . Isto quer dizer que Q é um módulo projetivo indecomponível, e portanto, uniserial. Se $i : P \rightarrow X$ é a inclusão natural, seja $h : P \rightarrow Q$ um morfismo tal que $fh = i$.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow h & \downarrow i & \\ Q & \xrightarrow{f} X & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como i é monomorfismo, h é monomorfismo.

Se $\text{Im} h \subset \text{Ker} f$, então $0 = fh = i$, o que é impossível. Como Q é uniserial, temos que $\text{Ker} f \subset \text{Im} h$. Da sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker} f \longrightarrow \text{Im} h \xrightarrow{f} f(\text{Im} h) \longrightarrow 0$$

temos que $l(\text{Ker} f) = l(\text{Im} h) - l(f(\text{Im} h))$. Como h é monomorfismo, $l(\text{Im} h) = l(P)$. Além disto, $l(f(\text{Im} h)) = l(\text{Im} fh) = l(\text{Im} i) = l(P)$. Então $l(\text{Ker} f) = 0$, isto é, $\text{Ker} f = 0$ e f é um isomorfismo. Portanto $X \cong Q$, e X é projetivo. ■

Definição 2.21. *Seja Λ uma álgebra de Artin. A dimensão projetiva finitística de Λ é*

$$\text{dpf } \Lambda = \sup\{\text{dp } M \mid M \in \text{ind } \Lambda \text{ e } \text{dp } M < \infty\}$$

Agora estamos em condições de dar as diferentes caracterizações das álgebras de Artin estáveis com dimensão global ∞ .

Proposição 2.22. *Seja Λ uma álgebra de Artin indecomponível. São equivalentes:*

- (a) Λ é estável e todo Λ -módulo projetivo indecomponível é não hereditário de comprimento 2.
- (b) Λ é não semisimples, autoinjetiva, e tal que $r^2 = 0$.
- (c) Λ é não semisimples, estável e autoinjetiva.
- (d) Λ é estável, não hereditária e $\text{dpf } \Lambda = 0$.
- (e) Λ é estável e $\text{dgl } \Lambda = \infty$.
- (f) Λ é serial com série de Kupisch cíclica e tal que $r^2 = 0$.

Prova: (a) $\Rightarrow$ (b) Se P é um módulo projetivo indecomponível, por (a) é não hereditário de comprimento 2 (isto é, Λ não é semisimples). Pela proposição (2.7 (b)), $\text{Soc } P$ é o único submódulo de P simples não projetivo, e como Λ satisfaz (B), a envolvente injetiva I de P é um módulo projetivo indecomponível. Por (a), $l(I) = l(P) = 2$, portanto $I \cong P$ e P é injetivo. Então Λ é autoinjetiva.

Como $r.P = \text{Soc } P$, temos que $r^2 = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Só temos que provar que Λ é estável.

Como Λ é autoinjetiva, os módulos projetivos e injetivos coincidem, portanto Λ satisfaz (B).

Seja P um módulo projetivo indecomponível. Vamos ver que P não é simples. Suponhamos o contrário. Por ser Λ não semisimples, $\Lambda \cong P^n \oplus P'$ onde P' é projetivo não

semisimples e sem somandos diretos isomorfos a P . Então $\text{Hom}_\Lambda(P, P')=0$, pois se existir $f : P \rightarrow P'$ não nulo, este tem que ser monomorfismo. Então temos $f(P) \subset P'$ com $P \cong f(P)$ injetivo, por ser Λ autoinjativa. Logo $f(P)$ seria um somando direto de P' isomorfo a P , uma contradição. De maneira similar, temos que $\text{Hom}_\Lambda(P, P')=0$. Mas isso é impossível, por ser Λ indecomponível. Portanto P não é simples.

Como $r^2=0$, r é semisimples, então $r.P$ é simples. Logo $l(P)=2$. Isto quer dizer que P tem um único submódulo próprio (a menos de isomorfismos), que é simples. Então Λ satisfaz (A).

(c) $\Rightarrow$ (d) Seja P um módulo indecomponível não simples, e $S \subset P$ um submódulo simples. Se S fosse projetivo, como Λ é autoinjativa, S também é injetivo e seria somando direto de P . Como P é indecomponível, teríamos $S = P$, o que não é possível. Então S não é projetivo e P não é hereditário. Em particular, Λ não é hereditária.

Agora vamos calcular $dpf \Lambda$. Seja X um módulo não projetivo, então $dp X \geq 1$. Se $dp X = n < \infty$, temos que uma resolução projetiva minimal de X é da forma

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0$$

onde $\text{Ker } f_{n-2}$ é não nulo e não projetivo. Como P_n também é um módulo injetivo, a sequência exata

$$0 \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \text{Ker } f_{n-2} \longrightarrow 0$$

cinde. Portanto $\text{Ker } f_{n-2}$ é somando direto de P_{n-1} , isto é, $\text{Ker } f_{n-2}$ é projetivo. Chegamos a uma contradição. Isto quer dizer que $dp X = \infty$, e portanto $dpf \Lambda = 0$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Λ é não hereditária, então existe X módulo não projetivo. Como $dpf \Lambda=0$, temos que $dp X = \infty$. Isto é, $dgl \Lambda = \infty$.

(e) $\Rightarrow$ (f) Por (e) e o teorema (2.19), não existe cota para os comprimentos dos caminhos em $\mathcal{Q}$. Como existe só um número finito de módulos projetivos indecomponíveis

não isomorfos, existe um caminho $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{l-1} \xrightarrow{f_l} M_l$ em $\mathcal{Q}$ com $M_0 = M_l$. Se, além disso, assumirmos que o caminho é de comprimento mínimo, teríamos que os módulos $M_0, M_1, \dots, M_{l-1}$ são não isomorfos dois a dois. Como para $i = 1, \dots, l$, f_i não é monomorfismo, pela proposição (2.14 (a)) $\text{Im } f_i = \text{Soc } M_i$. Então M_i é cobertura projetiva de $\text{Soc } M_{i-1}$.

Vamos mostrar que $M_0, \dots, M_{l-1}$ é um conjunto completo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos. Suponhamos que não é certo. Como Λ é indecomponível, existem um módulo projetivo indecomponível P , $P \not\cong M_i$ para $i = 0, \dots, l-1$, e um morfismo não nulo da forma i) $g : P \rightarrow M_j$, $1 \leq j \leq l$ ou ii) $h : M_j \rightarrow P$, $0 \leq j < l$.

Vamos ver que não pode ser da forma i). Como $l(M_j) = 2$ e $\text{Soc } M_j$ é não projetivo, g não é monomorfismo. Pela proposição (2.14 (a)), $\text{Im } g = \text{Soc } M_j$, então P é cobertura projetiva de $\text{Soc } M_j$. Isto é, $P \cong M_{j-1}$, o que é uma contradição.

Agora provaremos que um morfismo do tipo ii) também não é possível. Primeiro vamos ver que M_j é injetivo, $0 \leq j < l$. Consideremos a cobertura projetiva de $f_{j+1} : M_j \rightarrow \text{Soc } M_{j+1}$. Sejam $i : \text{Soc } M_{j+1} \rightarrow I$ e $j : M_j \rightarrow J$ envoltentes injetivas de $\text{Soc } M_{j+1}$ e M_j , respectivamente. Por (B), I e J são projetivos indecomponíveis. Seja $k : J \rightarrow I$ tal que $if_{j+1} = kj$. Como i, j são monomorfismos, mas f_{j+1} não, k também não é monomorfismo. Pela proposição (2.14 (a)), J é cobertura projetiva de $\text{Soc } I \cong \text{Soc } M_{j+1}$. Portanto $M_j \cong J$. Então M_j é injetivo.

Como M_j é injetivo, P é indecomponível e $P \not\cong M_j$, h não é monomorfismo. Então, pela proposição (2.14 (a)), P é módulo projetivo não hereditário, e M_j é cobertura projetiva de $\text{Soc } P$. Como M_j também é cobertura projetiva de $\text{Soc } M_{j+1}$, temos que $\text{Soc } P \cong \text{Soc } M_{j+1}$. Como M_{j+1} é injetivo, M_{j+1} é envolvente injetiva de P . Isto é, P é isomorfo a um submódulo projetivo de M_{j+1} . Então $P \cong M_{j+1}$, e chegamos a uma contradição.

Portanto $\{M_0, \dots, M_{l-1}\}$ é um conjunto completo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos (e também são injetivos). Para $j = 0, \dots, l-1$, M_j é uniserial e $r.M_j \neq 0$, então Λ é serial e a série de Kupisch é cíclica.

Λ é estável e todo Λ -módulo projetivo indecomponível é não hereditário de compri-

mento 2, então, de (a) $\Rightarrow$ (b), temos que $r^2 = 0$.

(f) $\Rightarrow$ (a) Seja P um módulo projetivo indecomponível. Por ser Λ serial com série de Kupisch cclica, $r.P \neq 0$ e existe P' indecomponvel, cobertura projetiva de $r.P$. Como $r^2=0$, temos que $\frac{P'}{r.P'} \cong r.P$, isto , $r.P$ simples. Portanto $l(P) = 2$, e P no hereditrio (pois $r.P$ no projetivo).

Falta provar que Λ estvel. bvio que Λ satisfaz (A). Vamos provar que tambm satisfaz (B). Sejam S um mdulo sem toro no projetivo simples, e P um mdulo projetivo indecomponvel tal que $S \subset P$. Como Λ satisfaz (A), pela proposio (2.7 (b)), P uniserial. Ento $S = \text{Soc } P$, e a envolvente injetiva I de S , tambm envolvente injetiva de P . Ento I indecomponvel e tal que contm um mdulo projetivo no nulo. Do lema (2.20), temos que I projetivo, e portanto Λ satisfaz (B). ■

Capítulo 3

Estrutura das álgebras de Artin projetivamente estáveis

Neste capítulo, que está baseado no artigo [JK2], vamos estudar a estrutura das álgebras de Artin indecomponíveis básicas projetivamente estáveis. Para abreviar, vamos chamá-las de álgebras estáveis. Para tal estudo podemos supor que as álgebras são não hereditárias, pois a estrutura das álgebras de Artin hereditárias é bem conhecida. Isto é, vamos supor que existem módulos projetivos não hereditários sobre Λ . Em quanto aos módulos projetivos hereditários, podem existir ou não. Ou seja, se considerarmos a decomposição de Λ como Λ -módulo

$$\Lambda = P \oplus Q$$

onde os somandos diretos indecomponíveis de P são módulos projetivos hereditários e os somandos diretos indecomponíveis de Q são módulos projetivos não hereditários, temos que $Q \neq 0$ e

1. $P \neq 0$ ou
2. $P = 0$.

Exemplo. No exemplo (2.5) $P \neq 0$ pois P_2 é hereditário. Nesse caso temos

$$P = P_1 \oplus P_2 \quad \text{e} \quad Q = P_3.$$

Nos exemplos (2.15) e (2.16) $P = 0$ pois não existem módulos projetivos hereditários.

O resultado fundamental deste capítulo é que se Λ é uma álgebra de Artin indecomponível básica projetivamente estável com

1. $P \neq 0$ e $Q \neq 0$, então Λ é o pullback de uma álgebra hereditária e uma serial estável sobre uma álgebra semisimples.
2. $P = 0$ e $Q \neq 0$, então Λ é serial.

Na realidade, também vale que o pullback de uma álgebra hereditária e uma serial estável sobre uma álgebra semisimples, ou uma álgebra serial com certas restrições, é uma álgebra de Artin projetivamente estável (ver [JK2], teorema 3.3 e corolário 3.15).

3.1 Pullbacks e álgebras quocientes

Nesta seção estudaremos alguns fatos que vamos precisar sobre pullbacks e sobre álgebras quocientes.

Definição 3.1. *Dados $f_1 : A_1 \rightarrow B$ e $f_2 : A_2 \rightarrow B$ morfismos numa categoria abeliana $\mathcal{C}$, um pullback de (f_1, f_2) é um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

tal que se

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h_1} & A_1 \\ h_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

é outro diagrama comutativo contendo f_1 e f_2 , então existe um único morfismo $k : D \rightarrow C$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} D & & & & \\ & \searrow h_1 & & & \\ & & C & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ & \searrow h_2 & \downarrow g_2 & & \\ & & A_2 & & \end{array}$$

é um diagrama comutativo.

Para simplificar, quando ficar claro quais são os morfismos envolvidos, dizemos que C é um pullback de A_1 e A_2 sobre B . Dualizando a definição anterior obtemos a definição de *pushout*.

Exemplo 3.2. (a) Dados os morfismos $f_i : A_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

onde $C = \{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 / f_1(a_1) = f_2(a_2)\}$ e g_i é a projeção natural, $i = 1, 2$, é um pullback. Este diagrama é chamado de *pullback canônico*.

(b) Dados os morfismos $f_i : B \rightarrow A_i$, $i = 1, 2$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ A_2 & \xrightarrow{g_2} & C \end{array}$$

onde $C = \frac{A_1 \oplus A_2}{W}$, $W = \{(f_1(b), -f_2(b)) \mid b \in B\}$, $g_1(a_1) = (a_1, 0) + W$ e $g_2(a_2) = (0, a_2) + W$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, é um pushout. Este diagrama é chamado de *pushout canônico*.

Observação 3.3. Nos pullback e pushout canônicos, valem as seguintes afirmações:

i) f_1 é monomorfismo $\Rightarrow g_2$ é monomorfismo

ii) f_1 é epimorfismo $\Rightarrow g_2$ é epimorfismo

Para pullbacks valem:

iii) $\text{Ker} f_1 \cong \text{Ker} g_2$

iv) f_1 é epimorfismo que cinde $\Rightarrow g_2$ é epimorfismo que cinde

Para pushouts valem:

v) $\text{Coker } f_1 \cong \text{Coker } g_2$

vi) f_1 é monomorfismo que cinde $\Rightarrow g_2$ é monomorfismo que cinde

Vamos trabalhar com pullbacks na categoria das álgebras de Artin sobre um corpo k e na categoria $\text{mod } \Lambda$, onde Λ é uma álgebra de Artin. Mas os resultados que seguem valem, na realidade, para qualquer anel artiniano.

Exemplo 3.4. Se J_1 e J_2 são ideais bilaterais de uma álgebra Λ tais que $J_1 \cap J_2 = 0$, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{g_1} & \frac{\Lambda}{J_1} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \frac{\Lambda}{J_2} & \xrightarrow{f_2} & \frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \end{array} \quad (3.1)$$

onde todos os morfismos são projeções naturais, é um pullback.

Prova: Vamos considerar o pullback canônico

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda} & \xrightarrow{h_1} & \frac{\Lambda}{J_1} \\ h_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \frac{\Lambda}{J_2} & \xrightarrow{f_2} & \frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \end{array}$$

Isto é, $\bar{\Lambda} = \{(\lambda + J_1, \lambda' + J_2) \in \frac{\Lambda}{J_1} \oplus \frac{\Lambda}{J_2} \mid \lambda - \lambda' \in J_1 + J_2\}$.

Como o diagrama (3.1) é comutativo, existe um único morfismo $\theta : \Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$ tal que

$h_i \cdot \theta = g_i$, $i = 1, 2$. Se $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, onde $\theta_i : \Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{J_i}$, temos que $h_i \cdot \theta = \theta_i$, isto é, $\theta_i = g_i$, $i = 1, 2$. Portanto, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos $\theta(\lambda) = (\lambda + J_1, \lambda + J_2) \in \overline{\Lambda}$.

Vamos provar que θ é um isomorfismo. Temos que

$$\text{Ker}\theta = \{\lambda \in \Lambda / (\lambda + J_1, \lambda + J_2) = 0\} = J_1 \cap J_2 = 0.$$

Isto é, θ é monomorfismo e portanto $\Lambda \cong \theta(\Lambda) \subset \overline{\Lambda}$.

Por outro lado, como f_i é epimorfismo, pela observação (3.3) ii) e iii), h_i também é epimorfismo, $i = 1, 2$, e $\text{Ker}f_1 \cong \text{Ker}h_2$ e $\text{Ker}f_2 \cong \text{Ker}h_1$.

Como $J_1 \cap J_2 = 0$ temos que

$$\text{Ker}f_1 = \{\lambda + J_1 \in \frac{\Lambda}{J_1} / \lambda \in J_1 + J_2\} = \frac{J_1 + J_2}{J_1} \cong J_2.$$

Analogamente, $\text{Ker}f_2 \cong J_1$. Portanto $\text{Ker}h_i \cong J_i$, $i = 1, 2$. Então, da sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}h_i \longrightarrow \overline{\Lambda} \xrightarrow{h_i} \frac{\Lambda}{J_i} \longrightarrow 0$$

temos que $l(\overline{\Lambda}) = l(\text{Ker}h_i) + l(\frac{\Lambda}{J_i}) = l(J_i) + l(\frac{\Lambda}{J_i}) = l(\Lambda)$. Portanto $\Lambda \cong \overline{\Lambda}$ e θ é um isomorfismo. Agora fica fácil ver que o diagrama (3.1) é um pullback. ■

O resto desta seção será dedicado a ver o que acontece com as categorias de módulos sobre as álgebras de um pullback e sobre álgebras quocientes.

Proposição 3.5.

- i) Se $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ é um morfismo de álgebras então $\text{Mod } \Lambda'$ é uma subcategoria de $\text{Mod } \Lambda$.
- ii) Se ϕ é epimorfismo, então $\text{Mod } \Lambda'$ é uma subcategoria plena de $\text{Mod } \Lambda$ e $\text{mod } \Lambda'$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$.

Prova: i) Se M é um Λ' -módulo, então M é um Λ -módulo onde a estrutura de Λ -módulo de M é induzida pelo morfismo ϕ . Isto é, se $\lambda \in \Lambda$ e $m \in M$, definimos $\lambda.m = \phi(\lambda).m$.

Também temos que se M e N são módulos sobre Λ' , então $\text{Hom}_{\Lambda'}(M, N) \subset \text{Hom}_{\Lambda}(M, N)$ pois:

$$f \in \text{Hom}_{\Lambda'}(M, N) \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, \forall m \in M, f(\lambda.m) = f(\phi(\lambda).m) = \phi(\lambda).f(m) = \lambda.f(m)$$

ii) Dados $M, N \in \text{Mod } \Lambda'$ temos que $\text{Hom}_{\Lambda}(M, N) \subset \text{Hom}_{\Lambda'}(M, N)$:

dados $f \in \text{Hom}_{\Lambda}(M, N)$, $m \in M$ e $\lambda' \in \Lambda'$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\phi(\lambda) = \lambda'$ e

$$f(\lambda'.m) = f(\phi(\lambda).m) = f(\lambda.m) = \lambda.f(m) = \phi(\lambda).f(m) = \lambda'.f(m)$$

Também temos que se $M \in \text{mod } \Lambda'$ então

$$M = \sum_{m \in M} \Lambda.m = \sum_{m \in M} \phi(\Lambda).m = \sum_{m \in M} \Lambda'.m = \sum_{i=1}^n \Lambda'.m_i = \sum_{i=1}^n \phi(\Lambda).m_i = \sum_{i=1}^n \Lambda.m_i$$

onde $\{m_i \in M, i = 1, \dots, n\}$ é um conjunto de geradores do módulo M . Portanto $M \in \text{mod } \Lambda$. ■

Corolário 3.6. Se J é um ideal bilateral de uma álgebra Λ então $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$ é uma subcategoria plena de $\text{Mod } \Lambda$ e $\text{mod } \frac{\Lambda}{J}$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$.

Prova: Basta aplicar a proposição anterior ao epimorfismo canônico $\Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{J}$. ■

Observação 3.7. Se $P \in \text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$ é um Λ -módulo projetivo (ou injetivo), por ser $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$ subcategoria plena de $\text{Mod } \Lambda$, temos que P também é projetivo (ou injetivo) sobre $\frac{\Lambda}{J}$.

Observação 3.8. Dado $M \in \text{Mod } \Lambda$ é fácil ver que:

$$M \in \text{Mod } \frac{\Lambda}{J} \Leftrightarrow J \subset \text{ann}_M \Lambda = \{\lambda \in \Lambda / \lambda.m = 0, \forall m \in M\}.$$

Isto quer dizer que podemos caracterizar a categoria $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$ como a subcategoria plena de $\text{Mod } \Lambda$ determinada pelos Λ -módulos tais que $J.M = 0$.

Observemos também que se $M \in \text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$, $N \in \text{Mod } \Lambda$ e $0 \neq f \in \text{Hom}_{\Lambda}(M, N)$ então temos que $J.f(M) = f(J.M) = 0$, ou seja, $f(M)$ é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J}$.

Na próxima proposição veremos como obter módulos projetivos e injetivos sobre a álgebra quociente $\frac{\Lambda}{J}$ a partir dos projetivos e injetivos sobre Λ .

Notação: Se X é um subconjunto de Λ e M é um Λ -módulo

$$\text{ann}_X M = \{m \in M \mid X.m = 0\}$$

é o anulador de X em M .

Observação 3.9. 1. Se J é um ideal à direita de Λ então $\text{ann}_J M$ é um submódulo de M .

2. Se J é um ideal bilateral de Λ então $\text{ann}_J M$ é o submódulo maximal de M que é também $\frac{\Lambda}{J}$ -módulo.

Proposição 3.10. *Seja J um ideal bilateral de uma álgebra artiniana Λ .*

i) Se P é um Λ -módulo projetivo então $\frac{P}{J.P}$ é um $\frac{\Lambda}{J}$ -módulo projetivo.

ii) Se E é um Λ -módulo injetivo então $\text{ann}_J E$ é um $\frac{\Lambda}{J}$ -módulo injetivo.

Prova: i) É suficiente considerar os Λ -módulos projetivos indecomponíveis. Se $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ é a decomposição de Λ como Λ -módulo, então

$$\frac{\Lambda}{J} = \frac{\bigoplus_{i=1}^n P_i}{\bigoplus_{i=1}^n J.P_i} \cong \bigoplus_{i=1}^n \frac{P_i}{J.P_i}.$$

Isto é, se P_i é um Λ -módulo projetivo indecomponível, então $\frac{P_i}{J.P_i}$ é um $\frac{\Lambda}{J}$ -módulo projetivo.

ii) Seja $F = \text{ann}_J E$. Se temos o seguinte diagrama em $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & F & & \end{array}$$

então temos o seguinte diagrama comutativo em $\text{Mod } \Lambda$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & & \nearrow h \\ & & F & & \\ & & \downarrow i & & \\ & & E & & \end{array}$$

onde $i : F \rightarrow E$ é a inclusão natural. Isto é, existe $h : N \rightarrow E$ em $\text{Mod } \Lambda$ tal que $h \cdot g = f$. Mas $J \cdot \text{Im} h = J \cdot h(N) = h(J \cdot N) = 0$, ou seja, $\text{Im} h$ é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J}$. Pela maximalidade de F , temos que $\text{Im} h \subset F$. Portanto podemos considerar $h : N \rightarrow F$ tal que $h \cdot g = f$ em $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$. Isto é, F é injetivo em $\text{Mod } \frac{\Lambda}{J}$. ■

Corolário 3.11.

- i) Se P é uma cobertura projetiva de M em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J}$ e P é projetivo sobre Λ , então P é cobertura projetiva de M em $\text{mod } \Lambda$.
- ii) Se I é uma envolvente injetiva de M em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J}$ e I é injetivo sobre Λ , então I é envolvente injetiva de M em $\text{mod } \Lambda$.

Dada uma álgebra Λ com ideais bilaterais J_1 e J_2 tais que $J_1 \cap J_2 = 0$, a propriedade sobre a estrutura de pullback de Λ vista no exemplo (3.4), se transmite em certa forma aos Λ -módulos projetivos e injetivos. Isto é, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Seja Λ uma álgebra com ideais bilaterais J_1 e J_2 tais que $J_1 \cap J_2 = 0$, então:*

- i) *Se P é um Λ -módulo projetivo, então existem módulos projetivos P_1 , P_2 e $\overline{P}$ sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, $\frac{\Lambda}{J_2}$ e $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ respectivamente, e epimorfismos $f_i : P_i \rightarrow \overline{P}$, $g_i : P \rightarrow P_i$, $i = 1, 2$, tais que*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g_1} & P_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ P_2 & \xrightarrow{f_2} & \overline{P} \end{array}$$

é um pullback de Λ -módulos.

ii) Se I é um Λ -módulo injetivo, então existem módulos injetivos I_1, I_2 e $\bar{I}$ sobre $\frac{\Lambda}{J_1}, \frac{\Lambda}{J_2}$ e $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ respectivamente, e monomorfismos $f_i : \bar{I} \rightarrow I_i, g_i : I_i \rightarrow I, i = 1, 2$, tais que

$$\begin{array}{ccc} \bar{I} & \xrightarrow{f_1} & I_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ I_2 & \xrightarrow{g_2} & I \end{array}$$

é um pushout de Λ -módulos.

Prova: A prova deste teorema será feita no apêndice A.

Na seção 2 do próximo capítulo vamos trabalhar com uma álgebra quociente de Λ , onde Λ é uma álgebra de Artin indecomponível, básica e estável. Mais especificamente vamos trabalhar com a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ onde t é a componente homogênea de um módulo simples não projetivo sem torção em $\text{Soc } \Lambda$. Em seguida vamos dar a definição de componente homogênea e vamos fazer algumas observações sobre a álgebra quociente $\frac{\Lambda}{t}$.

Definição 3.13. Dada $\mathcal{U}$ uma classe de módulos e M um módulo sobre Λ o traço de $\mathcal{U}$ em M é

$$\text{tr}_{\mathcal{U}} M = \sum \{ \text{Im} h \mid h : U \rightarrow M, U \in \mathcal{U} \}.$$

Prova-se (ver proposição 8.21 de [AF]) que o traço de $\mathcal{U}$ em Λ , $\text{tr}_{\mathcal{U}} \Lambda$, é um ideal bilateral de Λ .

Vamos trabalhar no caso particular em que $\mathcal{U} = \{T\}$ onde T é um módulo simples sem torção.

Definição 3.14. Se T é um Λ -módulo simples sem torção e M é um Λ -módulo o traço $\text{tr}_T M$ de T em M é chamada de componente homogênea de T em $\text{Soc } M$.

Seja Λ uma álgebra de Artin indecomponível, básica, estável e T um Λ -módulo simples não projetivo sem torção. Vamos denotar a componente homogênea de T em $\text{Soc } \Lambda$ por $t = \text{tr}_T \Lambda$. Então t é um ideal bilateral de Λ . Se $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ onde P_i é projetivo

indecomponível, então temos que $\text{Soc } \Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \text{Soc } P_i$. Seja m a cardinalidade do conjunto

$$\{i = 1, \dots, n \mid T \cong \text{Soc } P_i\}.$$

Logo $t = \text{tr}_T \Lambda \cong m.T$.

Lembremos que $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$ é a subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ determinada pelos módulos M sobre Λ tais que $t.M = 0$. Portanto é de nosso interesse estudar $t.M$ para $M \in \text{mod } \Lambda$.

Observação 3.15. $M \in \text{mod } \Lambda \Rightarrow t.M \subset \text{tr}_T M \subset \text{Soc } M$.

A segunda inclusão é óbvia. Quanto à primeira, observe que para todo $h \in \text{Hom}_\Lambda(T, \Lambda)$ e para todo $m \in M$, existe $g_{h,m} \in \text{Hom}_\Lambda(T, M)$ tal que $g_{h,m}(x) = h(x).m$, $x \in T$. Portanto $\text{Im } h.M = \sum_{m \in M} \text{Im } g_{h,m}$. Então

$$\begin{aligned} t.M = \text{tr}_T \Lambda.M &= \sum \{ \text{Im } h.M \mid h \in \text{Hom}_\Lambda(T, \Lambda) \} \\ &= \sum_{h,m} \{ \text{Im } g_{h,m} \mid g_{h,m} \in \text{Hom}_\Lambda(T, M) \} \subset \text{tr}_T M. \end{aligned}$$

Agora vamos ver alguns casos particulares.

Lema 3.16. *Valem as seguintes afirmações:*

i) $t.T = 0$.

ii) P é Λ -módulo projetivo $\Rightarrow t.P = \text{tr}_T P$.

Seja S um Λ -módulo simples e $I(S)$ a sua envolvente injetiva.

iii) $S \not\cong T \Rightarrow t.I(S) = 0$ e $I(S)$ é envolvente injetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$.

iv) $S \cong T \Rightarrow t.I(S) \cong S$.

Prova: i) Como $t \subset r$, onde r é o radical de Jacobson de Λ , temos que $0 = t^2 \cong t.mT$ e portanto $t.T = 0$.

ii) Por ser um Λ -módulo projetivo, P é somando direto de um Λ -módulo livre, isto é

$$P \oplus Q = \Lambda^I$$

onde I é um conjunto de índices. Então

$$t.P \oplus t.Q = t.(P \oplus Q) = t.\Lambda^I = (t.\Lambda)^I = t^I = (\text{tr}_T \Lambda)^I.$$

Por outro lado, pela aditividade do traço (ver proposição 8.18 de [AF])

$$\mathrm{tr}_T P \oplus \mathrm{tr}_T Q = \mathrm{tr}_T \Lambda^I = (\mathrm{tr}_T \Lambda)^I.$$

Então $t.P = \mathrm{tr}_T P$.

iii) Como $\mathrm{Soc} I(S) \cong S$ temos que $\mathrm{tr}_T I(S) \subset \mathrm{Soc} I(S) \cong S$. Mas $S \not\cong T$ implica que $\mathrm{tr}_T I(S) = 0$ e portanto $t.I(S) = 0$. Então $I(S)$ e S são $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos e portanto $I(S)$ é envolvente injetiva de S em $\mathrm{mod} \frac{\Lambda}{t}$.

iv) Como T é sem torção e $S \cong T$, S também é sem torção e portanto existe um Λ -módulo projetivo indecomponível P tal que $S \subset P$. Por ii) $S \subset t.P = \mathrm{tr}_T P$. Sejam $S \xrightarrow{h} P$ e $S \xrightarrow{i} I(S)$ as inclusões naturais e $P \xrightarrow{k} I(S)$ o morfismo que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{h} & P \\ & & \downarrow i & \nearrow k & \\ & & I(S) & & \end{array}$$

Então $S \cong \mathrm{Im} i = \mathrm{Im} k h = k(S) \subset k(t.P) = t.k(P) \subset t.I(S) \subset \mathrm{Soc} I(S) \cong S$. Portanto $t.I(S) \cong S$. ■

Pela proposição (3.10) se $\{P_i, i = 1, \dots, n\}$ é um conjunto completo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois, então $\{\frac{P_i}{t.P_i}, i = 1, \dots, n\}$ é um conjunto de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos.

Observação 3.17.

i) $\forall i, \frac{P_i}{t.P_i}$ é indecomponível.

Como $t \subset r$, o radical de Jacobson de $\frac{\Lambda}{t}$ é $r.\frac{\Lambda}{t} = \frac{r}{t}$. Portanto $\frac{r}{t}.\frac{P_i}{t.P_i} = \frac{r.P_i}{t.P_i}$ e

$$\frac{\frac{P_i}{t.P_i}}{\frac{r.P_i}{t.P_i}} \cong \frac{P_i}{r.P_i}$$

é simples. Isto é, $\frac{P_i}{t.P_i}$ é indecomponível.

$$ii) P_i \not\cong P_j \Rightarrow \frac{P_i}{t.P_i} \not\cong \frac{P_j}{t.P_j}.$$

Se $\frac{P_i}{t.P_i} \cong \frac{P_j}{t.P_j}$ então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & P_i & \\ \swarrow f & \downarrow \pi_i & \\ P_j & \xrightarrow{\pi_j} \frac{P_j}{t.P_j} \cong \frac{P_i}{t.P_i} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde f é um epimorfismo. Pois se $\text{Im } f \subsetneq P_j$ então $\text{Im } f \subset r.P_j$ e $\text{Im } \pi_j f \subset \frac{r.P_j}{t.P_j} \not\cong \text{Im } \pi_i$. Logo P_i é cobertura projetiva de P_j e portanto teríamos que $P_i \cong P_j$.

iii) De i), ii), e a proposição (3.10) temos que $\{\frac{P_i}{t.P_i}, i = 1, \dots, n\}$ é um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois.

Da próxima proposição obtemos mais informações sobre a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ e seus módulos projetivos indecomponíveis.

Proposição 3.18. *Seja P um Λ -módulo projetivo indecomponível. Então valem as seguintes afirmações:*

- i) P é hereditário $\Rightarrow t.P = 0$ e P é $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo hereditário.
- ii) $\text{Soc } P \cong T \Rightarrow \frac{P}{t.P}$ é $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo indecomponível hereditário.
- iii) P não hereditário e $\text{Soc } P \not\cong T \Rightarrow t.P = 0$ e P é $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo indecomponível tal que todo submódulo é projetivo ou simples.
- iv) Nenhum $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo simples não projetivo sem torção é isomorfo a T .
- v) $\frac{\Lambda}{t}$ é estável e tem um módulo projetivo hereditário.
- vi) T é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo injetivo.

Prova: i) Por ser P hereditário sobre Λ , todo submódulo Q de P é projetivo sobre Λ e portanto $T \not\subset \text{Soc } Q$. Isso quer dizer que $\text{tr}_T Q = 0$. Então pelo lema (3.16)i) $t.Q = 0$, e pela proposição (3.10) Q é $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo. Portanto P é $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo hereditário.

ii) Se $\text{Soc } P \cong T$ então $\text{tr}_T P = \text{Soc } P$. Pelo lema (3.16)ii) temos que $t.P =$

$\text{Soc } P \neq 0$. Já sabemos que $\frac{P}{t.P}$ é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo indecomponível, só falta verificar que é hereditário. Por hipótese, P não é hereditário sobre Λ , então pela proposição (2.7) P é uniserial e todo submódulo Q de P , que contém $\text{Soc } P$, é um Λ -módulo projetivo indecomponível tal que $\text{Soc } Q = \text{Soc } P$. Novamente pelo lema (3.16)ii) $t.Q = \text{tr}_T Q = \text{Soc } Q \neq 0$. Então todo submódulo não nulo de $\frac{P}{t.P}$ é da forma $\frac{Q}{t.Q}$, isto é, é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo. Portanto $\frac{P}{t.P}$ é hereditário sobre $\frac{\Lambda}{t}$.

iii) Se P não é hereditário sobre Λ , então é uniserial com $\text{Soc } P$ simples. Como $\text{Soc } P \not\cong T$, pelo lema (3.16)ii) temos que $t.P = \text{tr}_T P = 0$ e portanto, da proposição (3.10), P é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo indecomponível.

Também temos que todo submódulo Q de P é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo, e é Λ -módulo projetivo ou simples por ser Λ estável. Portanto Q também é projetivo ou simples sobre $\frac{\Lambda}{t}$.

iv) De i), ii) e iii) temos que $\frac{\Lambda}{t}$ satisfaz a propriedade (A). Se S é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo simples não projetivo sem torção, temos $S = \text{Soc } (\frac{P}{t.P})$ onde P é um Λ -módulo projetivo indecomponível. Como $\frac{P}{t.P}$ é não hereditário sobre $\frac{\Lambda}{t}$, por i) temos que P não é hereditário sobre Λ , e por ii) $S \not\cong T$ (observe que iii) implica $t.P = 0$).

v) Em iv) observamos que $\frac{\Lambda}{t}$ satisfaz a propriedade (A). Então temos que provar que $\frac{\Lambda}{t}$ também satisfaz a propriedade (B). Seja S um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo simples não projetivo sem torção, então de iv) temos $S \not\cong T$. Pela última observação feita em iv) temos que $S \cong \text{Soc } P$ onde P é um Λ -módulo projetivo não hereditário. Portanto S também é simples não projetivo sem torção sobre Λ . Consideremos a envolvente injetiva $I(S)$ de S em $\text{mod } \Lambda$. Pelo lema (3.16)iii) $t.I(S) = 0$ e portanto $I(S)$ também é envolvente injetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$. Como Λ é estável, Λ satisfaz a propriedade (B), isto é, $I(S)$ é projetivo sobre Λ , e portanto também sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Então $\frac{\Lambda}{t}$ também satisfaz a propriedade (B) e é estável. Que $\frac{\Lambda}{t}$ tem um módulo projetivo hereditário é consequência de ii).

vi) Do lema (3.16)i) temos que T é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo. Seja a envolvente injetiva $I(T)$ de T em $\text{mod } \Lambda$. Como T é simples não projetivo sem torção sobre Λ , que é estável, $I(T)$

é projetivo não hereditário sobre Λ . De (3.10) temos que a envolvente injetiva $E(T)$ de T em $\text{mod } \frac{\Lambda}{I}$ é $E(T) = \text{ann}_I I(T) \subset I(T)$. Pela proposição (2.7) todo submódulo Q de $I(T)$ não isomorfo a T é projetivo indecomponível sobre Λ com $\text{Soc } Q \cong T$. Como pelo lema (3.16)ii) $t.Q = \text{tr}_T Q = \text{Soc } Q \neq 0$, temos então que $E(T) \cong T$. Isto é, T é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{I}$. ■

3.2 Álgebras estáveis com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$

Seja Λ uma álgebra de Artin indecomponível básica e estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$. O primeiro objetivo nesta seção é construir dois ideais bilaterais J_1 e J_2 de Λ , tais que $J_1 \cap J_2 = 0$.

Se

$$\Lambda = P \oplus Q$$

é a decomposição estabelecida no início deste capítulo, sejam

$$\{P_1, \dots, P_m\} \text{ e } \{Q_1, \dots, Q_n\}$$

os conjuntos não vazios dos somandos diretos indecomponíveis de P e Q respectivamente. Isto é, P_i é projetivo indecomponível hereditário, $i = 1, \dots, m$, e Q_j é projetivo indecomponível não hereditário, $j = 1, \dots, n$.

Observe que como Λ é estável, satisfaz a propriedade (A) do teorema (2.12), portanto vale a proposição (2.7) e todo Q_j é uniserial tal que todo submódulo não simples é projetivo indecomponível e $\text{Soc } Q_j$ é um módulo simples não projetivo sem torção. Reciprocamente, todo módulo simples não projetivo sem torção é isomorfo a $\text{Soc } Q_j$, para algum j .

Proposição 3.19. *Existe um Λ -módulo projetivo indecomponível não hereditário Q_j , tal que $\text{Soc } Q_j$ tem como cobertura projetiva um módulo projetivo hereditário P_i .*

Prova: Como Λ é indecomponível, existem P_i e Q_j módulos projetivos indecomponíveis e um morfismo não nulo $P_i \rightarrow Q_j$ ou $Q_j \rightarrow P_i$. Pela proposição (2.14)(b), o

último caso não é possível. Como P_i não é isomorfo a um submódulo de Q_j , aplicando novamente a proposição (2.14)(c'), temos que P_i é cobertura projetiva de $\text{Soc } Q_j$. ■

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de Λ -módulos simples não projetivos sem torção com cobertura projetiva hereditária, não isomorfos dois a dois. Da última proposição temos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e vamos denotar os módulos simples do conjunto $\mathcal{S}$ como

$$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_r\}, \quad r > 0.$$

Temos que se $S_i \in \mathcal{S}$ então $S_i \cong \text{Soc } Q_j$ para algum j .

Vamos decompor P da seguinte maneira:

$$P = P' \oplus P''$$

onde

- P_i é somando direto de P' se P_i é cobertura projetiva de algum módulo simples não projetivo sem torção.
- P_i é somando direto de P'' caso contrário.

Observe que se P_i é somando direto de P' então, reenumerando os módulos simples de $\mathcal{S}$, temos que $\frac{P_i}{r.P_i} \cong S_i \cong \text{Soc } Q_j$ para algum j . No caso em que P_i é somando direto de P'' , temos que P_i é simples projetivo ou $\frac{P_i}{r.P_i}$ é um módulo simples de torção. Da Proposição (3.19) temos que $P' \neq 0$. Se $P_i \neq 0$ é somando direto de P' , então $\text{Soc } P_i$ é um módulo simples projetivo, o que implica que $P'' \neq 0$.

Exemplo. No exemplo (2.5) tínhamos $P = P_1 \oplus P_2$ e $Q = P_3$.

A série de composição de P_3 é $0 \subsetneq S_2 \subsetneq P_3$. Portanto S_2 é (a menos de isomorfismos) o único módulo simples não projetivo sem torção, e a cobertura projetiva de S_2 é o módulo projetivo hereditário P_2 . Então temos

$$\mathcal{S} = \{S_2\}$$

$$P' = P_2$$

$$P'' = P_1.$$

Exemplo 3.20. Seja Λ a k -álgebra de caminhos dada pelo quiver com relações

O quiver de AR de Λ é:

Os módulos projetivos P_1 , P_5 , P_7 e P_8 são hereditários.

Os módulos projetivos P_2 , P_3 , P_4 e P_6 não são hereditários, mas os seus submódulos são projetivos ou simples. Portanto Λ satisfaz a propriedade (A).

Os módulos simples não projetivos sem torção são S_1 , S_3 e S_5 . As suas envoltentes injetivas são, respectivamente, $I_1 \cong P_3$, $I_3 \cong P_4$ e $I_5 \cong P_6$. Então Λ satisfaz a propriedade (B).

Temos, portanto, que Λ é estável.

As coberturas projetivas dos módulos simples sem torção S_1 , S_3 e S_5 são respectivamente P_1 , P_3 e P_5 (dos quais P_1 e P_5 são hereditários). Portanto, com a notação definida anteriormente temos:

$$P = P_1 \oplus P_5 \oplus P_7 \oplus P_8$$

$$Q = P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6$$

$$S = \{S_1, S_5\}$$

$$P' = P_1 \oplus P_5$$

$$P'' = P_7 \oplus P_8$$

Os somandos diretos indecomponíveis de Q são uniseriais. As suas séries de composição são:

$$0 \subsetneq S_1 \subsetneq P_2 \subsetneq P_3$$

$$0 \subsetneq S_3 \subsetneq P_4$$

$$0 \subsetneq S_5 \subsetneq P_6$$

Observação 3.21. Nas seguintes afirmações usamos a propriedade de aditividade do funtor Hom (ver §16 de [AF]).

$$1. \text{Hom}_\Lambda(Q, P) = 0.$$

$$\text{Pois } \text{Hom}_\Lambda(Q, P) = \text{Hom}_\Lambda(\bigoplus_j Q_j, \bigoplus_i P_i) \cong \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_\Lambda(Q_j, P_i)$$

Mas da proposição (2.14)(b), temos que $\text{Hom}_\Lambda(Q_j, P_i) = 0$.

$$2. \text{Hom}_\Lambda(P', Q) = \text{Hom}_\Lambda(P', \text{Soc } Q) \text{ e } \text{Hom}_\Lambda(P'', Q) = 0.$$

Da proposição (2.14)(c), temos que $\text{Hom}_\Lambda(P_i, Q_j) = \text{Hom}_\Lambda(P_i, \text{Soc } Q_j)$.

Se $\text{Hom}_\Lambda(P_i, \text{Soc } Q_j) \neq 0$, então P_i é uma cobertura projetiva de $\text{Soc } Q_j$, portanto P_i é somando direto de P' . Daí sai a primeira igualdade e também o fato de que se P_i é somando direto de P'' , então $\text{Hom}_\Lambda(P_i, \text{Soc } Q_j) = 0$ (e portanto verifica-se a segunda igualdade). Em particular, temos também que se $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(P_i, Q_j)$ então f não é monomorfismo.

3. Se P_i é somando direto de P'' , P_i é simples projetivo ou $\frac{P_i}{r.P_i}$ é um módulo simples de torção. Portanto, pela proposição (2.14)(d), temos que se $f \in \text{Hom}_\Lambda(P_i, \Lambda)$ é não nulo, então f é monomorfismo.

4. Dado $f \in \text{End } {}_{\Lambda}\Lambda$, $f : P' \oplus P'' \oplus Q \rightarrow P' \oplus P'' \oplus Q$, escrevemos

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

onde (pelas observações anteriores) $f_{13} = f_{23} = f_{32} = 0$, f_{12} e f_{22} são monomorfismos e $\text{Im} f_{31} \subset \text{Soc } Q$.

Definimos agora os candidatos a ideais bilaterais de Λ :

$$\boxed{J_1 = r.P' + P'' \quad \text{e} \quad J_2 = Q}$$

Proposição 3.22. *Valem as seguintes afirmações:*

- i) J_1 e J_2 são ideais bilaterais de Λ .
- ii) $J_1 \cap J_2 = 0$ e $J_1 + J_2 \neq \Lambda$.

Prova: i) P e Q são ideais à esquerda de Λ , portanto J_1 e J_2 também. Vamos ver que J_1 e J_2 são ideais à direita, isto é, que $J_i \cdot \lambda \subset J_i$ para todo $\lambda \in \Lambda$, $i = 1, 2$. Mas isso é equivalente a provar que $f(J_i) \subset J_i$ para todo $f \in \text{End } {}_{\Lambda}\Lambda$, $i = 1, 2$ (ver proposição 4.11 de [AF]).

Da observação (3.21), temos que

$$f(J_2) = f(Q) = f_{33}(Q) \subset Q = J_2.$$

Por outro lado temos que

$$f(J_1) = f(r.P' + P'') = r.f(P') + f(P'').$$

Vamos ver o que acontece com $f(P')$ e $f(P'')$.

Sabemos que $f(P'') = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}(P'') \subset P' + P''$, com f_{12} e f_{22} monomorfismos. Se P_i é somando direto indecomponível de P'' , então $P_i \cong f_{12}(P_i) \subset P'$. Logo $f_{12}(P_i)$ não é somando direto de P' , e portanto $f_{12}(P_i) \subset r.P'$.

Então

$$f(P'') \subset r.P' + P'' = J_1.$$

Por outro lado

$$f(P') = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} (P') \subset P' + P'' + \text{Soc } Q.$$

Logo, como $\text{Soc } Q$ é semisimples e portanto $r.\text{Soc } Q = 0$, temos

$$r.f(P') \subset r.P' + r.P'' \subset r.P' + P'' = J_1$$

Concluimos então que

$$f(J_1) = r.f(P') + f(P'') \subset J_1.$$

ii) Como $J_1 \subset P$, $J_2 = Q$ e $P \cap Q = 0$, temos que $J_1 \cap J_2 = 0$. Portanto $J_1 + J_2 \cong J_1 \oplus J_2$. Se $J_1 + J_2 = \Lambda$ então $\Lambda \cong J_1 \oplus J_2$ e como J_1, J_2 são ideais bilaterais teríamos que Λ é uma álgebra decomponível (ver [AF] prop. 7.6 e corol. 7.7), o que contradiz a hipótese de trabalho. ■

Dada uma álgebra indecomponível básica e estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$, daqui em diante J_1 e J_2 sempre vão denotar os ideais da proposição (3.22). Então, pelo exemplo (3.4), temos que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{g_1} & \frac{\Lambda}{J_1} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \frac{\Lambda}{J_2} & \xrightarrow{f_2} & \frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \end{array} \quad (3.2)$$

é um pullback de álgebras onde todos os morfismos são projeções naturais.

Exemplo. Se Λ é a álgebra do exemplo (2.5) temos que

$$J_1 = r.P' \oplus P'' = r.P_2 \oplus P_1 \cong S_1 \oplus P_1$$

$$J_2 = Q = P_3.$$

Portanto

$$\frac{\Lambda}{J_1} \cong \frac{P_2}{r.P_2} \oplus P_3 \cong S_2 \oplus P_3$$

$$\frac{\Lambda}{J_2} \cong P_1 \oplus P_2$$

$$\frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \cong \frac{P_2}{r.P_2} \cong S_2.$$

Na álgebra Λ do exemplo (3.20) temos

$$J_1 = r.P_1 \oplus r.P_5 \oplus P_7 \oplus P_8 \cong S_7 \oplus S_7 \oplus P_7 \oplus P_8$$

$$J_2 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6.$$

Portanto

$$\frac{\Lambda}{J_1} \cong \frac{P_1}{r.P_1} \oplus \frac{P_5}{r.P_5} \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6 \cong S_1 \oplus S_5 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6$$

$$\frac{\Lambda}{J_2} \cong P_1 \oplus P_5 \oplus P_7 \oplus P_8$$

$$\frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \cong \frac{P_1}{r.P_1} \oplus \frac{P_5}{r.P_5} \cong S_1 \oplus S_5.$$

Observe que nos dois exemplos os módulos projetivos indecomponíveis

1. sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ são os Λ -módulos simples de $\mathcal{S}$ e os Λ -módulos projetivos não hereditários.
2. sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ são os Λ -módulos projetivos hereditários.
3. sobre $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$ são os Λ -módulos simples de $\mathcal{S}$.

O próximo objetivo desta seção é estudar as estruturas das álgebras $\frac{\Lambda}{J_1}$, $\frac{\Lambda}{J_2}$ e $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$. Vamos começar determinando os módulos projetivos indecomponíveis sobre cada uma dessas álgebras. De fato, a observação feita no último exemplo é um resultado geral.

Proposição 3.23. *Valem as seguintes afirmações:*

- i) Em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$, $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2} \cong \bigoplus_{i=1}^r S_i$.

ii) Em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}, \frac{\Lambda}{J_1} \cong (\oplus_{i=1}^r S_i) \oplus Q$.

iii) Em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}, \frac{\Lambda}{J_2} \cong P$.

Prova: Em $\text{mod } \Lambda$ temos:

$$\frac{\Lambda}{J_1 + J_2} = \frac{P' \oplus P'' \oplus Q}{r.P' \oplus P'' \oplus Q} \cong \frac{P'}{r.P'} \cong \oplus_i \frac{P_i}{r.P_i}$$

onde a soma é dos módulos projetivos indecomponíveis de P' (portanto $\frac{P_i}{r.P_i} \cong S_i \in \mathcal{S}$).

Então

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{J_1 + J_2} &\cong \oplus_{i=1}^r S_i \\ \frac{\Lambda}{J_1} &= \frac{P' + P'' + Q}{r.P' + P''} \cong \frac{P' \oplus Q}{r.P'} \cong \frac{P'}{r.P'} \oplus Q \cong (\oplus_{i=1}^r S_i) \oplus Q \\ \frac{\Lambda}{J_2} &= \frac{P + Q}{Q} \cong P \end{aligned}$$

Portanto, pelo visto no corolário (3.6), valem i), ii) e iii). ■

Corolário 3.24.

i) $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$ é uma álgebra semisimples com $\mathcal{S}$ como conjunto completo de $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$ -módulos simples não isomorfos dois a dois.

ii) $\frac{\Lambda}{J_2}$ é uma álgebra hereditária.

Observação 3.25. Os Λ -módulos simples de $\mathcal{S}$ são (a menos de isomorfismos) os únicos indecomponíveis que são módulos sobre as quatro álgebras que estamos considerando.

Dado $S_i \in \mathcal{S}$, até agora sabemos o seguinte:

1. em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1 + J_2}, S_i$ é um módulo simples projetivo e injetivo.
2. em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}, S_i$ é simples projetivo (mais ainda, os módulos de $\mathcal{S}$ são os únicos $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos hereditários).
3. em $\text{mod } \Lambda, S_i$ é simples não projetivo sem torção com cobertura projetiva hereditária.

Para S_i em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ temos a seguinte proposição:

Proposição 3.26. *Se $S_i \in \mathcal{S}$ então S_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo i) não projetivo, ii) de torção e iii) injetivo.*

Prova: i) Seja $P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$ uma cobertura projetiva de S_i em $\text{mod } \Lambda$, isto é, P_i é somando direto de P' , portanto de P . Então pela proposição (3.23)iii), P_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo projetivo e $P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$ também é cobertura projetiva de S_i em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. Como $P_i \not\cong S_i$, temos que S_i não é projetivo em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.

ii) Como $\frac{\Lambda}{J_2}$ é uma álgebra hereditária (corolário (3.24)) e, como acabamos de ver, S_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo não projetivo, temos que S_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo de torção.

iii) Sejam $0 \rightarrow S_i \rightarrow I(S_i)$ uma envolvente injetiva em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e $0 \rightarrow S_i \rightarrow E$ uma envolvente injetiva em $\text{mod } \Lambda$. Pela proposição (3.10) sabemos que $I(S_i) = \text{ann}_{J_2} E$. Por ser estável, Λ satisfaz a propriedade (B) do teorema (2.12), e portanto E é um Λ -módulo projetivo indecomponível não hereditário, isto é, $E \cong Q_j$ para algum j . Segue que todo submódulo X de E não nulo e não simples é também um somando direto de $Q = J_2$. Isto é, X não é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo.

Como $I(S_i)$ é um submódulo de E não nulo que é $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo, temos que $I(S_i)$ é simples. Portanto $I(S_i) \cong S_i$ e S_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo injetivo. ■

A próxima propriedade será utilizada em várias demonstrações.

Proposição 3.27. *Seja $M \in \text{ind } \Lambda$ tal que contém um submódulo proprio simples S , $S \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i . Então $M \cong Q_j$ para algum j e $\text{Soc } M = S$.*

Prova: Seja a envolvente injetiva $I(S)$ de S em $\text{mod } \Lambda$. Por ser Λ estável, satisfaz a propriedade (B), então $I(S)$ é um Λ -módulo projetivo indecomponível. De fato, é projetivo indecomponível não hereditário, portanto, pela proposição (2.7), $I(S)$ é uniserial. O lema (2.8) implica que M é isomorfo a um submódulo projetivo de $I(S)$. Portanto M é um Λ -módulo projetivo indecomponível não hereditário, isto é, $M \cong Q_j$ para algum j . Também temos que M é uniserial, portanto $\text{Soc } M = S$. ■

Proposição 3.28. *Os Λ -módulos P_i não são $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos e os Λ -módulos Q_j não são $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulos.*

Prova: Se P_i fosse um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, pela observação (3.7), teria que ser $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo projetivo indecomponível. Como $P_i \not\cong Q_j$ para todo j , P_i seria projetivo simples sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, portanto também seria um $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ -módulo simples. Mas isso contradiz a proposição (3.26). ■

Da proposição (3.23) é fácil ver que todo Λ -módulo projetivo indecomponível é projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$. Também que todos os projetivos indecomponíveis sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$ são projetivos sobre Λ ou $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$. Vamos ver que o mesmo acontece como os injetivos.

Proposição 3.29.

- i) *Todo Λ -módulo injetivo indecomponível é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$.*
- ii) *Todo módulo injetivo indecomponível sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$ é injetivo sobre Λ ou $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$.*

Prova: i) Seja E um Λ -módulo injetivo indecomponível. Então temos que E é um pushout

$$\begin{array}{ccc} \overline{E} & \xrightarrow{f_1} & E_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ E_2 & \xrightarrow{g_2} & E \end{array}$$

como no teorema (3.12).

Como E é indecomponível, $\text{Soc } E$ é simples. Os morfismos do pushout são monomorfismos, portanto os socles de E_1 , E_2 e $\overline{E}$ são nulos ou simples. Isto é, E_1 , E_2 e $\overline{E}$ são nulos ou indecomponíveis.

Se $\overline{E} \neq 0$, por ser $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ semisimples temos que $\overline{E}$ é simples e isomorfo a $\text{Soc } E_1$ e $\text{Soc } E_2$. Portanto E_i é envolvente injetiva de $\overline{E}$ em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_i}$, $i = 1, 2$. Mas da proposição (3.26) temos que $\overline{E}$ é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, portanto $\overline{E} \cong E_2$. Então $E \cong E_1$ e portanto é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$.

Se $\overline{E} = 0$ então $E = E_1 \oplus E_2$. Como E é indecomponível, temos que $E \cong E_i$ para algum i e portanto é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_i}$.

ii) Seja E um módulo injetivo indecomponível sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ mas não injetivo sobre Λ . Seja $0 \rightarrow E \rightarrow I$ a envolvente injetiva de E em $\text{mod } \Lambda$. Então I é indecomponível e não é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$. Então pela parte i) I é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto E

também é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo, o que implica que é um $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ -módulo (injetivo, por ser $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ semisimples). ■

Já sabemos que $\frac{\Lambda}{J_2}$ é uma álgebra hereditária. Os próximos três resultados tem como objetivo provar que a indecomponibilidade de Λ implica a de $\frac{\Lambda}{J_2}$.

Lema 3.30. *Seja*

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{u-1} \xrightarrow{f_{u-1}} X_u \quad (3.3)$$

uma cadeia de comprimento mínimo entre Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois com extremos fixos X_0 e X_u . Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 < r \leq u$.

i) Se $\text{Dom}(f_{r-1}) = X_{r-1}$ ($f_{r-1} : X_{r-1} \rightarrow X_r$) e f_{r-1} não é monomorfismo então f_r não é monomorfismo e $\text{Dom}(f_r) = X_r$ ($f_r : X_r \rightarrow X_{r+1}$).

ii) Se $\text{Dom}(f_{r-1}) = X_{r-1}$ e $\text{Dom}(f_r) = X_{r+1}$ ($f_{r-1} : X_{r-1} \rightarrow X_r$ e $f_r : X_{r+1} \rightarrow X_r$) então f_{r-1} e f_r são monomorfismos.

Prova: i) Como $f_{r-1} : X_{r-1} \rightarrow X_r$ não é monomorfismo, pela proposição (2.14)(a), X_r é somando direto de Q e $\text{Im } f_{r-1} = \text{Soc } X_r$. Como $\text{Soc } X_r$ é simples não projetivo, X_{r-1} é cobertura projetiva de $\text{Soc } X_r$.

Suponhamos que f_r seja monomorfismo. Se $\text{Dom}(f_r) = X_r$ teríamos $X_r \xrightarrow{f_r} X_{r+1}$ e poderíamos substituir a sequência $X_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} X_r \xrightarrow{f_r} X_{r+1}$ por $X_{r-1} \xrightarrow{f_r \cdot f_{r-1}} X_{r+1}$ (pois $f_r \cdot f_{r-1} \neq 0$) e a cadeia (3.3) não seria de comprimento mínimo. Portanto o monomorfismo f_r é $X_{r+1} \xrightarrow{f_r} X_r$ e temos que $\text{Soc } X_{r+1} \subset \text{Soc } X_r$. Como $\text{Soc } X_r$ é simples, temos que $\text{Soc } X_{r+1} \cong \text{Soc } X_r$. Da composição da cobertura projetiva $X_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \text{Soc } X_r$ com o isomorfismo $\text{Soc } X_r \xrightarrow{i} \text{Soc } X_{r+1}$ e a inclusão natural $\text{Soc } X_{r+1} \xrightarrow{j} X_{r+1}$ obtemos um morfismo $g : X_{r-1} \rightarrow X_{r+1}$ não nulo e uma cadeia

$$X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{r-1} \xrightarrow{g} X_{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_u$$

de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois com extremos X_0 e X_u de comprimento menor que a cadeia inicial. Isto é uma contradição. Portanto f_r não é monomorfismo.

Suponhamos agora que $\text{Dom}(f_r) = X_{r+1}$ ($X_{r+1} \xrightarrow{f_r} X_r$). Então teríamos novamente $\text{Im} f_r = \text{Soc } X_r$ e X_{r+1} seria uma cobertura projetiva de $\text{Soc } X_r$, o que implicaria a contradição $X_{r-1} \cong X_{r+1}$. Portanto f_r é $X_r \xrightarrow{f_r} X_{r+1}$.

ii) Por i), f_{r-1} tem que ser monomorfismo. Olhando a cadeia em sentido inverso, novamente por i), temos que f_r tem que ser monomorfismo. ■

Proposição 3.31. *Seja $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{u-1} \xrightarrow{f_{u-1}} X_u$ uma cadeia de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. Se X_0 e X_u são somandos diretos de P então X_i é somando direto de P para todo $i = 1, \dots, u-1$.*

Prova: Suponha o contrário, isto é, que existam cadeias de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos, com extremos X_0 e X_u somandos diretos de P e algum termo somando direto de Q . Dessas cadeias, considere uma de comprimento mínimo. Sejam i e j , respectivamente, o mínimo e máximo do conjunto de índices

$$\{r = 1, \dots, u-1 \mid X_r \text{ é somando direto de } Q\}.$$

Então $0 < i \leq j < u$ e X_{i-1}, X_{j+1} são somandos diretos de P . Da observação (3.21), temos $X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i$ e $X_{j+1} \xrightarrow{f_j} X_j$ não são monomorfismos. Observe que na verdade $i < j$, pois se $i = j$ a proposição (2.14)(c') implicaria que $X_{i-1} \cong X_{j+1}$, o que é uma contradição.

A cadeia $X_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} \cdots \longrightarrow X_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} X_j$ é de comprimento mínimo com Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos e com extremos X_0 e X_j (por ser de comprimento mínimo a cadeia inicial). Como $X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i$ não é monomorfismo, pelo lema (3.30) i), temos que $X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1}$ não é monomorfismo, e aplicando sucessivamente o lema (3.30) i) concluímos que $X_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} X_j$ não é monomorfismo.

Então temos a cadeia

$$X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} X_j \xleftarrow{f_j} X_{j+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_u$$

de comprimento mínimo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos com extremos X_i e X_u , onde f_{j-1} e f_j não são monomorfismos. Isso contradiz o lema

(3.30) *ii*). Portanto, não existem cadeias de Λ -módulos projetivos indecomponíveis com extremos X_0 e X_u com termos somandos diretos de Q . Isto é, X_i é somando direto de P para todo $i = 1, \dots, u - 1$. ■

Teorema 3.32. *A álgebra $\frac{\Lambda}{J_2}$ é indecomponível.*

Prova: Vamos provar que dados dois módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos P_i e P_j sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, existe uma cadeia de morfismos não nulos de $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulos projetivos indecomponíveis com P_i e P_j como extremos.

Como P_i e P_j são projetivos sobre Λ e Λ é indecomponível, existe uma cadeia

$$P_i = X_0 \text{ — } X_1 \text{ — } \dots \text{ — } X_{u-1} \text{ — } X_u = P_j$$

com X_i Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. Como P_i e P_j são somandos diretos de P , pela proposição (3.31) temos que X_i é somando direto de P para todo i . Isto é, X_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo projetivo indecomponível para todo i e portanto temos a cadeia que buscávamos. ■

Agora vamos estudar a decomposição de $\frac{\Lambda}{J_1}$ como álgebra.

Teorema 3.33. *Cada bloco de $\frac{\Lambda}{J_1}$ contém algum módulo de $\mathcal{S}$.*

Prova: Suponhamos que exista um bloco de $\frac{\Lambda}{J_1}$ que não contenha nenhum módulo de $\mathcal{S}$ e seja $\{X_1, \dots, X_s\}$ um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos do bloco. A menos de isomorfismos temos que cada X_i é somando direto de Q . Seja X um Λ -módulo projetivo indecomponível tal que $X \not\cong X_i$ para todo $i = 1, \dots, s$.

Se X é um $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo, X não pertence ao bloco considerado, portanto $\text{Hom}_{\frac{\Lambda}{J_1}}(X_i, X) = \text{Hom}_{\frac{\Lambda}{J_1}}(X, X_i) = 0$ para todo i . Pelo visto no exemplo (3.6), temos que $\text{Hom}_{\Lambda}(X_i, X) = \text{Hom}_{\Lambda}(X, X_i) = 0$ para todo i o que contradiz o fato de Λ ser indecomponível.

Se X não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, então X é isomorfo a um somando direto de P e, pela observação (3.21), $\text{Hom}_{\Lambda}(X_i, X) = 0$ para todo i . Da proposição (2.14)c) temos que se $0 \neq f \in \text{Hom}_{\Lambda}(X, X_i)$ então X é cobertura projetiva de $\text{Soc } X_i$. Então $\text{Soc } X_i$

é isomorfo a um módulo de $\mathcal{S}$ e portanto é um $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo simples projetivo. Como $\text{Soc } X_i \subset X_i$, $\text{Soc } X_i$ pertence ao bloco que estamos considerando, o que contradiz a suposição feita no começo, o que prova o resultado. ■

Teorema 3.34. *Se S_i e S_j são dois módulos não isomorfos de $\mathcal{S}$ então S_i e S_j pertencem a diferentes blocos de $\frac{\Lambda}{J_1}$.*

Prova: Suponhamos o contrário. Isto é, que exista uma cadeia

$$S_i = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \cdots \cdots X_{u-1} \xrightarrow{f_{u-1}} X_u = S_j$$

de $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos. Podemos supor que para todo i , $0 < i < u$, X_i não é simples (caso contrário, trabalharíamos com uma subcadeia da anterior). Então X_i é isomorfo a um somando direto de Q , $0 < i < u$. Por ser X_0 e X_u $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos simples temos que $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1$ e $X_u \xleftarrow{f_{u-1}} X_{u-1}$ são monomorfismos. Sejam $P_i \xrightarrow{h_i} S_i$ e $P_j \xrightarrow{h_j} S_j$ as coberturas projetivas de S_i e S_j respectivamente em mod $\frac{\Lambda}{J_2}$ (e também em mod Λ). Observe que P_i e P_j são somandos diretos de P . Então existe uma cadeia

$$P_i \xrightarrow{f_0 \cdot h_i} X_1 \cdots \cdots X_{u-1} \xleftarrow{f_{u-1} \cdot h_j} P_j$$

de Λ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos com extremos somandos diretos de P . Pela proposição (3.31) X_i é somando direto de P , $0 < i < u$, e chegamos a uma contradição. ■

Dos dois teoremas anteriores temos que a álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ tem tantos blocos quanto a cardinalidade do conjunto $\mathcal{S}$.

Proposição 3.35. *Os blocos de $\frac{\Lambda}{J_1}$ não são semisimples.*

Prova: Dado um bloco de $\frac{\Lambda}{J_1}$ seja $S_i \in \mathcal{S}$ o $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo projetivo simples que pertence a ele. Como $S_i \cong \text{Soc } Q_j$ onde Q_j é algum somando direto de Q , temos que Q_j pertence ao bloco que estamos considerando. Sabemos que Q_j não é simples, portanto o bloco não é semisimples. ■

Exemplo. Se Λ é a álgebra estável do exemplo (2.5), vimos que $\frac{\Lambda}{J_1} \cong S_2 \oplus P_3$, onde $S_3 \cong r.P_3$, portanto a álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ é indecomponível e não semisimples. Se Λ é a álgebra do exemplo (3.20), $\frac{\Lambda}{J_1} \cong S_1 \oplus S_5 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6$, isto é, $\frac{\Lambda}{J_1}$ tem 2 blocos não semisimples:

$$\Theta_1 \cong S_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$$

$$\Theta_5 \cong S_5 \oplus P_6.$$

Os próximos dois teoremas referem-se à estrutura de $\frac{\Lambda}{J_1}$.

Teorema 3.36. *A álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ é estável.*

Prova: Provaremos que a álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ satisfaz as condições (A) e (B) do teorema (2.12).

Para a condição (A) é suficiente considerar os $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos indecomponíveis não simples Q_j . Já sabemos que todo submódulo não simples X de Q_j é projetivo indecomponível não hereditário sobre Λ . Isto é, X é somando direto de Q . Então X é um $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo projetivo e $\frac{\Lambda}{J_1}$ satisfaz a propriedade (A).

Agora seja S um $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo simples não projetivo sem torção. Por ser não projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, S não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$. Por outro lado, é claro que S é um Λ -módulo simples não projetivo. Como S é sem torção sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, podemos considerar $S \subset Q_j$ para algum j . Portanto S também é sem torção sobre Λ .

Seja $I(S)$ a envolvente injetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. Vamos ver que $I(S)$ também é a envolvente injetiva de S em $\text{mod } \Lambda$. Pelo corolário (3.11) é suficiente ver que $I(S)$ é injetivo sobre Λ . Temos que $I(S)$ não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$, pois se fosse, por ser indecomponível, seria simples e portanto isomorfo a S , que não é um $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ -módulo. Então pela proposição (3.29) $I(S)$ é injetivo sobre Λ .

Temos então que $I(S)$ é envolvente injetiva do Λ -módulo simples não projetivo sem torção S . A álgebra Λ satisfaz a propriedade (B) pois é estável. Portanto $I(S)$ é projetivo sobre Λ e claramente não hereditário. Portanto $I(S)$ é isomorfo a um somando direto de Q e é projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$. Então a álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ satisfaz também a

propriedade (B). ■

Vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema 3.37. *Se Λ é uma álgebra estável com módulos projetivos não hereditários e P é um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível, então todo módulo quociente de P de torção é injetivo.*

Prova: A prova deste teorema está feita no apêndice B.

Teorema 3.38. *A álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ é serial.*

Prova: Provaremos que os módulos projetivos indecomponíveis e os injetivos indecomponíveis sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ são uniseriais.

Já sabemos que os $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulos projetivos indecomponíveis não simples Q_j são uniseriais.

Seja agora um $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo injetivo indecomponível L . Temos três possibilidades para o $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo simples $S = \text{Soc } L$: i) é projetivo, ii) é não projetivo sem torção e iii) é não projetivo de torção.

No caso ii), como $\frac{\Lambda}{J_1}$ é estável, já sabemos que L é projetivo indecomponível não hereditário, e portanto uniserial.

No caso i), sabemos que S é um Λ -módulo simples não projetivo sem torção. Seja $I(S)$ a envolvente injetiva de S em $\text{mod } \Lambda$. Então $I(S)$ é projetivo indecomponível não hereditário sobre a álgebra estável Λ , portanto é uniserial. Do lema (2.8) temos que $L \subset I(S)$. Então L é uniserial.

No caso iii), por ser S simples não projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, S não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$. Então temos

$$0 \neq (J_1 + J_2).S = J_1.S + J_2.S = J_2.S$$

e portanto S não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Isso implica que S é um Λ -módulo de torção, pois se $S \subset X$ onde X é projetivo indecomponível sobre Λ , X não pode ser projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ (pois S não é $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo) nem projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ (pois S é $\frac{\Lambda}{J_1}$ -módulo de torção), o que é uma contradição.

Seja Q_j a cobertura projetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ (portanto também em $\text{mod } \Lambda$) e $I(Q_j)$ a envolvente injetiva de Q_j em $\text{mod } \Lambda$. Como $\text{Soc } Q_j$ é um Λ -módulo simples não projetivo sem torção, $I(Q_j)$ é um Λ -módulo projetivo indecomponível não hereditário, ou seja, isomorfo a um somando direto de Q . Portanto $I(Q_j)$ é uniserial e temos que em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ (e em $\text{mod } \Lambda$)

$$\text{Soc } \frac{I(Q_j)}{r \cdot Q_j} = \frac{Q_j}{r \cdot Q_j} \cong S$$

é um módulo de torção. Pelo teorema (3.37) $\frac{I(Q_j)}{r \cdot Q_j}$ é injetivo em $\text{mod } \Lambda$, e portanto também em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. Então $\frac{I(Q_j)}{r \cdot Q_j}$ é envolvente injetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e é uniserial. ■

Observação 3.39. Em resumo, da álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ podemos dizer que é um produto de r álgebras indecomponíveis não semisimples serias estáveis $\Theta_1, \dots, \Theta_r$, $r > 0$, tais que S_i é o único (a menos de isomorfismos) Θ_i -módulo projetivo simples.

3.3 Álgebras estáveis com $P = 0$ e $Q \neq 0$

Se Λ é uma álgebra de Artin estável sem módulos projetivos hereditários então os ideais definidos na seção anterior são $J_1 = 0$ e $J_2 = \Lambda$, e portanto $\Lambda = \frac{\Lambda}{J_1}$. A única diferença entre as álgebras $\frac{\Lambda}{J_1}$ da seção anterior e Λ desta seção, é que Λ não tem módulos projetivos simples. Portanto podemos provar que Λ (com $P = 0$) é serial de forma análoga a como foi provado no teorema (3.38).

Teorema 3.40. *Se Λ é uma álgebra de Artin estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$ então Λ é serial.*

Prova: Como os Λ -módulos projetivos indecomponíveis são não hereditários, pela proposição (2.7) são uniserials. Seja I um Λ -módulo injetivo indecomponível. Como o módulo simples $S = \text{Soc } I$ é não projetivo, só temos duas possibilidades: i) S é sem torção ou ii) S é de torção.

No caso i), como Λ é estável, I é projetivo indecomponível e portanto uniserial.

No caso ii), seja Q_j a cobertura projetiva de S e $I(Q_j)$ a envolvente injetiva de

Q_j . Como $\text{Soc } Q_j$ é um módulo simples não projetivo sem torção, $I(Q_j)$ é um módulo projetivo indecomponível. Portanto $I(Q_j)$ é uniserial e temos que $\text{Soc } \frac{I(Q_j)}{r.Q_j} = \frac{Q_j}{r.Q_j} \cong S$ é um módulo de torção. Pelo teorema (3.37) $\frac{I(Q_j)}{r.Q_j}$ é injetivo. Então $\frac{I(Q_j)}{r.Q_j}$ é envolvente injetiva de S e $I \cong \frac{I(Q_j)}{r.Q_j}$ é uniserial. ■

Capítulo 4

O quiver de Auslander-Reiten

Como no capítulo 3, vamos trabalhar com álgebras de Artin indecomponíveis básicas projetivamente estáveis, e vamos chamá-las de álgebras estáveis. Se Λ é uma tal álgebra vamos construir o quiver de Auslander-Reiten Γ_Λ . Para isso vamos determinar os módulos em $\text{ind } \Lambda$ e os morfismos irredutíveis entre eles. Consideramos novamente a decomposição $\Lambda = P \oplus Q$ onde os somandos diretos indecomponíveis de P são módulos projetivos hereditários e os somandos diretos indecomponíveis de Q são módulos projetivos não hereditários. Lembramos que como estamos interessados nas álgebras não hereditárias temos que $Q \neq 0$. Estudaremos por separado os dois casos:

1. $P \neq 0$ e $Q \neq 0$
2. $P = 0$ e $Q \neq 0$

Para o primeiro caso vamos ver que o quiver Γ_Λ é obtido “colando-se” quivers de AR de determinadas álgebras de Artin hereditárias. Quanto ao quiver Γ_Λ de uma álgebra do segundo caso, sabemos que corresponde ao quiver de uma álgebra serial e vamos descrevê-lo utilizando o quiver de AR de uma álgebra estável do caso 1. O exposto neste capítulo encontra-se no artigo [JK3].

4.1 Algebras estáveis com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$

Sabemos que a álgebra Λ que estamos considerando é um pullback, das álgebras $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$ sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$, definido na seção 2 do capítulo anterior. Vamos ver que é possível construir o quiver de AR de Λ a partir dos quivers de $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$. O quiver de AR de $\frac{\Lambda}{J_2}$ é conhecido, por ser $\frac{\Lambda}{J_2}$ uma álgebra hereditária. O quiver de AR de $\frac{\Lambda}{J_1}$ vai ser descrito nesta mesma seção.

Módulos indecomponíveis e morfismos irredutíveis em $\text{mod } \Lambda$

Da proposição (3.23) temos que todo Λ -módulo projetivo indecomponível é projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$. Na proposição (3.29) vimos que o mesmo acontece com os injetivos indecomponíveis. Em geral, para qualquer módulo indecomponível em $\text{mod } \Lambda$ temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Seja $X \in \text{ind } \Lambda$. Então X é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\frac{\Lambda}{J_2}$.*

Prova: Primeiro vamos ver que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_1} & \frac{X}{J_1 \cdot X} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \frac{X}{J_2 \cdot X} & \xrightarrow{f_2} & \frac{X}{J_1 \cdot X + J_2 \cdot X} \end{array} \quad (4.1)$$

onde f_i e g_i são projeções naturais, $i = 1, 2$, é um pullback de Λ -módulos.

É claro que o diagrama é comutativo. Para provar que é um pullback só é necessário mostrar que $J_1 \cdot X \cap J_2 \cdot X = 0$, pois repetindo a demonstração feita no exemplo (3.4) obtemos que o diagrama (4.1) é um pullback. Seja a envolvente injetiva E de X em $\text{mod } \Lambda$. Pela proposição (3.29), todo somando direto indecomponível de E é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto $E = E_1 \oplus E_2$ onde $E_i \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_i}$, $i = 1, 2$. Podemos considerar $X \subset E$, então

$$J_1 \cdot X \subset J_1 \cdot E = J_1 \cdot (E_1 \oplus E_2) = J_1 \cdot E_1 \oplus J_1 \cdot E_2 = J_1 \cdot E_2 \subset E_2.$$

Analogamente $J_2.X \subset E_1$. Logo $J_1.X \cap J_2.X \subset E_1 \cap E_2 = 0$.

Como $\frac{X}{J_1.X + J_2.X}$ é um módulo sobre a álgebra semisimples $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$, pelo visto na proposição (3.23), $\frac{X}{J_1.X + J_2.X}$ é um módulo projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$. Isso quer dizer que o epimorfismo f_1 cinde, e portanto o epimorfismo g_2 também cinde. Como X é indecomponível temos que $\frac{X}{J_2.X} \cong X$ ou $\frac{X}{J_2.X} = 0$. Se $\frac{X}{J_2.X} \cong X$ então X é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Se $\frac{X}{J_2.X} = 0$ então $X = J_2.X$. Portanto $J_1.X = J_1.(J_2.X) = 0$, pois $J_1 \cap J_2 = 0$, e então X é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$. ■

Lembre que os únicos (a menos de isomorfismos) Λ -módulos indecomponíveis que pertencem às duas categorias $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ são os módulos do conjunto completo de $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$ -módulos simples não isomorfos dois a dois $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$. Portanto, como consequência da proposição (4.1), temos a seguinte partição dos Λ -módulos indecomponíveis:

Observação 4.2. *Todo módulo $X \in \text{ind } \Lambda$ satisfaz uma e só uma das seguintes propriedades:*

- i) $X \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i .
- ii) $X \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $X \not\cong S_i$ para todo i .
- iii) $X \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e $X \not\cong S_i$ para todo i .

Exemplo. Se Λ é a álgebra do exemplo (2.5) é claro que S_2 é o único módulo em $\mathcal{S}$, $S_3, P_3 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $S_1, P_2 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$.

Vamos ver quais são os morfismos entre módulos indecomponíveis das diferentes categorias $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.

Proposição 4.3. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo não nulo entre módulos de $\text{ind } \Lambda$ tal que $X \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $Y \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. Então f é um isomorfismo e $X \cong Y \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i .*

Prova: Da observação (3.8) temos que $\text{Im } f$ é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ e sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1 + J_2}$. Então, pela proposição (3.26), $\text{Im } f$ é um módulo

injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Como $0 \neq \text{Im} f \subset Y$ em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e Y é indecomponível, temos que $\text{Im} f \cong Y$. Isso quer dizer que Y é um módulo indecomponível sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$, ou seja, $Y \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i .

Pela proposição (3.23) Y é um módulo simples projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$. Então $X \xrightarrow{f} Y$ é um epimorfismo que cinde em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. Como X é indecomponível temos que $X \cong Y$. ■

Seja agora $Y \rightarrow X$ um morfismo em $\text{mod } \Lambda$ com X e Y como na proposição anterior. Se $X \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i , então $X \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e $Y \rightarrow X$ é de fato um morfismo em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. O interessante é ver o que acontece se X não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, isto é, se $X \not\cong S_i \in \mathcal{S}$ para todo i .

Proposição 4.4. *Seja $g : Y \rightarrow X$ um morfismo não nulo entre módulos de $\text{ind } \Lambda$ tal que $Y \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$, $X \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $X \not\cong S_i \in \mathcal{S}$ para todo i . Então X é um Λ -módulo projetivo não hereditário e $\text{Im} g = \text{Soc } X \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i .*

Prova: De maneira análoga à feita na proposição anterior, temos que $\text{Im} g$ é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$. Como $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ é semisimples e $\mathcal{S}$ é um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ -módulos simples não isomorfos, existe $S \cong S_i$ para algum i tal que $S \subset \text{Im} g \subset X$. De fato, por hipótese, $S \subsetneq X$ e usando a proposição (3.27) temos que X é um Λ -módulo projetivo não hereditário tal que $\text{Soc } X \cong S_i \in \mathcal{S}$. Além disso, pela proposição (2.7), $\text{Im} g = \text{Soc } X$ ou é um Λ -módulo projetivo não hereditário. Mas como $\text{Im} g$ é um $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$ -módulo, pela proposição (3.26) não é projetivo sobre Λ , então $\text{Im} g = \text{Soc } X$. ■

Para determinar os morfismos irredutíveis em $\text{mod } \Lambda$ vamos ter que estudar as sequências de AR em $\text{mod } \Lambda$. Lembremos que se

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

é uma tal sequência, então L e N são módulos indecomponíveis, f é um morfismo minimal que quase cinde à esquerda e g é um morfismo minimal que quase cinde à direita. Da proposição (4.1) sabemos que L é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ ou sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Vamos ver o que acontece em cada caso.

Proposição 4.5. *Dada uma sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$ da forma (4.2) tal que $L \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$, então a sequência é de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$.*

Prova: Temos que $L \xrightarrow{f} M$ é um morfismo minimal que quase cinde à esquerda em $\text{mod } \Lambda$. Se $M = \bigoplus_{j=1}^n M_j$ é uma soma direta de módulos indecomponíveis então

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

onde $f_j : L \rightarrow M_j$ é irredutível, $j = 1, \dots, n$. Se $M_j \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$, para algum j , então pela proposição (4.3) f_j é um isomorfismo, o que é impossível por ser f_j irredutível. Portanto M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ e f é um morfismo minimal que quase cinde à esquerda em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. Além disso, como g é um epimorfismo, da observação (3.8) temos que $N \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. Então (4.2) é uma sequência de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$. ■

Se $L \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ é tal que $L \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i , então $L \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e estamos nas condições da proposição anterior. É por isso que na próxima proposição consideramos $L \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ tal que $L \not\cong S_i \in \mathcal{S}$ para todo i .

Proposição 4.6. *Dada uma sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$ da forma (4.2) tal que $L \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e $L \not\cong S_i \in \mathcal{S}$ para todo i , então a sequência é de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.*

Prova: Consideramos as decomposições de M e f feitas na proposição anterior. Se M_j não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, para algum j , então M_j é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$ mas não sobre $\frac{\Lambda}{J_1+J_2}$, portanto $M_j \not\cong S_i \in \mathcal{S}$ para todo i . Então, da proposição (4.4), temos que M_j é um Λ -módulo projetivo não hereditário e $\text{Im} f_j = \text{Soc } M_j \cong S_i \in \mathcal{S}$ para algum i . Observe que f_j é um monomorfismo, por ser irredutível e não epimorfismo. Logo $L \cong \text{Im} f_j \cong S_i \in \mathcal{S}$, o que contradiz a hipótese da proposição. Portanto M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$. Concluimos, de forma análoga à proposição anterior, que a sequência (4.2) é uma sequência de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. ■

Das últimas duas proposições segue que toda sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$ é uma sequência de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.

Exemplo. Se Λ é a álgebra do exemplo (3.20) temos que $S_1, S_5 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$, portanto, como consequência da proposição (4.5) podemos determinar as sequências de AR dos dois blocos Θ_1 e Θ_5 da álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$ e os respectivos quivers de AR. Estes são:

Por outro lado, como $S_7 \cong P_7 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e $S_7 \notin \mathcal{S}$, pela proposição (4.6) $\tau^{-1}S_7 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e claramente $\tau^{-1}S_7 \notin \mathcal{S}$. Aplicando novamente a proposição (4.6) temos que $I_7 \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. Então obtemos o quiver de AR da álgebra $\frac{\Lambda}{J_2}$:

Neste exemplo obtivemos os quivers de AR das álgebras $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$ a partir do quiver de AR de Λ . Mas o resultado que estamos procurando é como obter o quiver de AR de Λ a partir dos quivers de AR de $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto vamos ver que se verificam as proposições recíprocas correspondentes a (4.5) e (4.6).

Proposição 4.7. *Dada uma sequência de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_i}$ ($i = 1, 2$)*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

então a sequência é de AR em $\text{mod } \Lambda$.

Prova: Como L é um módulo não injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_i}$ temos que L não é injetivo sobre Λ . Portanto existe a sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$ começando em L

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow 0 \quad (4.4)$$

Mas pelas proposições (4.5) e (4.6) a sequência (4.4) é de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_i}$. Portanto (4.3) e (4.4) são sequências isomorfas e (4.3) é sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$. ■

Finalmente temos o resultado correspondente aos morfismos irredutíveis.

Corolário 4.8. *Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\text{mod } \Lambda$ com X e Y indecomponíveis é irredutível se e somente se f é irredutível em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.*

Prova: Se f é irredutível em $\text{mod } \Lambda$ com X e Y indecomponíveis, então f é uma componente de um morfismo minimal que quase cinde em $\text{mod } \Lambda$. Isto é, f é uma componente de um morfismo em uma sequência de AR em $\text{mod } \Lambda$. Pelas proposições (4.5) e (4.6) essa sequência é de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto f é irredutível em $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ ou $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$.

A demonstração no outro sentido é análoga, usando a proposição (4.7). ■

Colagem de quivers

As proposições (4.5), (4.6) e (4.7) sugerem, como acontece com o quiver de AR do exemplo (3.20), que podemos obter o quiver de AR de Λ “colando” os correspondentes quivers de $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$ nos módulos simples de $\mathcal{S}$. Portanto vamos formalizar a idéia de obter um quiver “colando” dois quivers dados em certos vértices, e logo apresentamos a construção do quiver de AR de Λ .

Definição 4.9. Dados dois quivers $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ e dois vértices $i \in \Gamma_0$, $j \in \Delta_0$, o quiver $\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta$ é tal que:

i) o conjunto de vértices de $\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta$ é

$$(\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta)_0 = \Gamma_0 \cup \Delta_0 \cup \{i \vee j\} - \{i, j\}$$

onde $i \vee j$ é um novo vértice.

ii) o conjunto de flechas de $\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta$ é

$$(\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta)_1 = \Gamma_1 \cup \Delta_1$$

onde os vértices i e j são substituídos por $i \vee j$.

Exemplo 4.10. Dados os quivers

$$\Gamma : c_1 \xrightarrow{\gamma_1} c_2 \xrightarrow{\gamma_2} c_3 \quad \text{e} \quad \Delta :$$

então o quiver $\Gamma \bigvee_{c_2=d_3} \Delta$ é

Observação 4.11. Dados os quivers Γ , Δ , Ω e os vértices $i \in \Gamma_0$, $j \in \Delta_0$, $k \in (\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta)_0$, $l \in \Omega_0$, vamos escrever

$$(\Gamma \bigvee_{i=j} \Delta) \bigvee_{k=l} \Omega \quad \text{como} \quad \Gamma \bigvee_{i=j} \Delta \bigvee_{k=l} \Omega.$$

Para a construção do quiver de AR de Λ vamos apresentar algumas notações. Lembremos (observação (3.39)) que $\frac{\Lambda}{J_1} = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_r$ é um produto de álgebras indecomponíveis não semisimples seriais e estáveis onde $S_i \in \mathcal{S}$ é o único (a menos de isomorfismos) Θ_i -módulo projetivo simples, $i = 1, \dots, r$.

Notações

- * $\Gamma_\Lambda = ((\Gamma_\Lambda)_0, (\Gamma_\Lambda)_1)$ é o quiver de AR de Λ .
- * τ_Λ é a translação de Γ_Λ .
- * Os quivers de AR das álgebras Θ_i e $\frac{\Lambda}{J_2}$ e as correspondentes translações serão denotadas de forma similar.
- * u_i são os vértices no quiver Γ_{Θ_i} correspondentes aos Θ_i -módulos projetivos simples S_i .
- * v_i são os vértices no quiver $\Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}}$ correspondentes aos $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulos injetivos simples S_i .

Teorema 4.12.

- i) $\Gamma_\Lambda = \Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}} \vee_{v_1=u_1} \Gamma_{\Theta_1} \vee_{v_2=u_2} \Gamma_{\Theta_2} \vee \dots \vee \Gamma_{\Theta_{r-1}} \vee_{v_r=u_r} \Gamma_{\Theta_r}$.
- ii) Se x é um vértice de Γ_Λ então:

$$\tau_\Lambda(x) = \begin{cases} \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}}(v_i) & \text{se } x = v_i \vee u_i \\ \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}}(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } \Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}}, x \neq v_i \\ \tau_{\Theta_i}(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } \Gamma_{\Theta_i}, x \neq u_i \text{ e } \tau_{\Theta_i}(x) \neq u_i \\ v_i \vee u_i & \text{se } x \text{ é vértice de } \Gamma_{\Theta_i}, x \neq u_i \text{ e } \tau_{\Theta_i}(x) = u_i \end{cases}$$

Prova: i) Seja X um Λ -módulo indecomponível. Vamos denotar por x o vértice em Γ_Λ correspondente ao módulo X . Sabemos que X é um módulo indecomponível sobre Λ se e somente se X é um módulo indecomponível sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ ou sobre Θ_i para algum i . Portanto x é um vértice de Γ_Λ se e somente se x é um vértice em $\Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}}$ ou em Γ_{Θ_i} para algum i . Se para $X \cong S_i \in \mathcal{S}$ escrevemos $x = v_i \vee u_i$, temos que os conjuntos de vértices em ambos quivers são iguais.

Sejam X, Y dois Λ -módulos indecomponíveis. Do corolário (4.8) temos que

$$\text{Irr}_\Lambda(X, Y) = \text{Irr}_{\frac{\Lambda}{J_2}}(X, Y) \quad \text{ou} \quad \text{Irr}_\Lambda(X, Y) = \text{Irr}_{\Theta_i}(X, Y)$$

para algum i . Portanto os conjuntos das flechas em ambos quivers também são iguais.

ii)

1. Se $x = v_i \vee u_i$ então $X \cong S_i$. Como S_i é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo não projetivo existe a sequência de AR

$$0 \rightarrow \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}} S_i \rightarrow M \rightarrow S_i \rightarrow 0$$

em mod $\frac{\Lambda}{J_2}$. Pela proposição (4.7) a sequência é de AR em mod Λ . Portanto $\tau_{\Lambda} S_i = \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}} S_i$. Isto é, $\tau_{\Lambda}(v_i \vee u_i) = \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}}(v_i)$.

2. Se x é vértice de $\Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}}$, $x \neq v_i$ então X é indecomponível sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, $X \not\cong S_i$ para todo i . Portanto se X não é projetivo sobre Λ , pela proposição (3.23), X não é projetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ e existe a sequência de AR

$$0 \rightarrow \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}} X \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0$$

em mod $\frac{\Lambda}{J_2}$. Novamente pela proposição (4.7) a sequência é de AR em mod Λ e portanto $\tau_{\Lambda} X = \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}} X$. Isto é, $\tau_{\Lambda}(x) = \tau_{\frac{\Lambda}{J_2}}(x)$.

3. Se x é vértice de Γ_{Θ_i} , $x \neq u_i$ e $\tau_{\Theta_i}(x) \neq u_i$ então X é indecomponível sobre Θ_i tal que $X \not\cong S_i$ e $\tau X \not\cong S_i$. Se X não é projetivo sobre Λ , como $X \not\cong S_i$, pela proposição (3.23) X não é projetivo sobre Θ_i . Então existe a sequência de AR

$$0 \rightarrow \tau_{\Theta_i} X \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0$$

em mod Θ_i . Pela proposição (4.7) a sequência é de AR em mod Λ , portanto $\tau_{\Lambda} X = \tau_{\Theta_i} X$ e $\tau_{\Lambda}(x) = \tau_{\Theta_i}(x)$.

4. Se x é vértice de Γ_{Θ_i} , $x \neq u_i$ e $\tau_{\Theta_i}(x) = u_i$ então X é um módulo indecomponível sobre Θ_i tal que $X \not\cong S_i$ mas $\tau_{\Theta_i} X \cong S_i$. Como no último caso $\tau_{\Lambda} X = \tau_{\Theta_i} X \cong S_i$. Portanto $\tau_{\Lambda}(x) = v_i \vee u_i$.

■

Exemplo. Se Λ é a álgebra do exemplo (3.20) e denotamos os vértices correspondentes a S_1 e S_5 em Γ_{Θ_1} e Γ_{Θ_5} como u_1 e u_5 , e em $\Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}}$ como v_1 e v_5 , temos que, efetivamente

$$\Gamma_{\Lambda} = \Gamma_{\frac{\Lambda}{J_2}} \vee_{v_1=u_1} \Gamma_{\Theta_1} \vee_{v_5=u_5} \Gamma_{\Theta_5}$$

e se verifica a condição *ii*) do teorema (4.12).

O quiver de $\frac{\Lambda}{J_1}$

Para completar a descrição do quiver de AR de Λ vamos analisar o quiver de AR de $\frac{\Lambda}{J_1}$, isto é, o quiver das álgebras Θ_i . Se Θ_i é hereditária, é serial hereditária e o quiver de AR de tais álgebras foi descrito no capítulo 1. Se Θ_i não é hereditária então é um tipo especial de álgebra indecomponível básica estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$: as que também são seriais. Se Λ é uma tal álgebra podemos acrescentar o seguinte sobre as álgebras quocientes $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$:

Proposição 4.13. *Se a álgebra indecomponível estável Λ é serial então:*

- i) a álgebra indecomponível hereditária $\frac{\Lambda}{J_2}$ é serial.*
- ii) a álgebra serial estável $\frac{\Lambda}{J_1}$ é indecomponível.*

Prova: *i)* Como os $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulos projetivos indecomponíveis são módulos projetivos sobre Λ , e Λ é serial, então os $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulos projetivos indecomponíveis são uniserais. Seja I um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo injetivo indecomponível não simples. Pela proposição (3.29), como I não é simples, I é injetivo sobre Λ , portanto é uniserial.

ii) Lembre que $\frac{\Lambda}{J_1}$ tem tantos blocos quanto a cardinalidade do conjunto $\mathcal{S}$. Por outro lado, pela proposição (3.26), se $S \in \mathcal{S}$ então S é um $\frac{\Lambda}{J_2}$ -módulo injetivo simples. Mas por ser $\frac{\Lambda}{J_2}$ indecomponível serial hereditário, como acabamos de ver em *i*), $\frac{\Lambda}{J_2}$ tem um único (a menos de isomorfismos) módulo injetivo simples. Portanto $\frac{\Lambda}{J_1}$ é indecomponível. ■

Observação 4.14. Denotemos a álgebra indecomponível serial e estável $\frac{\Lambda}{J_1}$ por Σ_1 , a álgebra $\frac{\Lambda}{J_2}$ por Φ_0 e o único (a menos de isomorfismos) módulo simples projetivo sobre

Σ_1 é injetivo sobre Φ_0 por T_1 . Se Σ_1 é uma álgebra não hereditária, podemos repetir o feito com Λ e temos que Σ_1 é o pullback de uma álgebra indecomponível serial hereditária, que vamos chamar de Φ_1 , e uma indecomponível serial estável Σ_2 , sobre uma simples Ψ_2 (isomorfa como Λ -módulo a um módulo simples T_2). Continuamos repetindo este procedimento até obter uma álgebra indecomponível serial Σ_n que seja hereditária. Isto é, obtemos a seguinte sequência de pullbacks:

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda & \longrightarrow & \frac{\Lambda}{J_1} = \Sigma_1 & & \Sigma_1 & \longrightarrow & \Sigma_2 & \dots & \Sigma_{n-1} & \longrightarrow & \Sigma_n = \Phi_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\Lambda}{J_2} = \Phi_0 & \longrightarrow & \frac{\Lambda}{J_1+J_2} (\cong T_1) & & \Phi_1 & \longrightarrow & \Psi_2 (\cong T_2) & & \Phi_{n-1} & \longrightarrow & \Psi_n (\cong T_n) \end{array}$$

Efetivamente, o procedimento acaba, pois estamos trabalhando com álgebras de comprimento finito tais que $l(\Sigma_i) > l(\Sigma_{i+1})$. A última álgebra indecomponível serial hereditária Σ_n obtida será denotada por Φ_n . Então a álgebra indecomponível serial e estável Λ tem associada uma sequência de álgebras indecomponíveis seriais hereditárias $(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ tais que Φ_i tem a T_i como único módulo projetivo simples e a T_{i+1} como único módulo injetivo simples (a menos de isomorfismos), $i = 0, \dots, n$.

Utilizando-se a notação do teorema (4.12), temos que:

- * u_i são os vértices dos quivers Γ_{Φ_i} correspondentes aos Φ_i -módulos projetivos T_i , $i=0, \dots, n$.
- * v_{i+1} são os vértices dos quivers Γ_{Φ_i} correspondentes aos Φ_i -módulos injetivos T_{i+1} , $i=0, \dots, n$.

Exemplo. Se Λ é a álgebra de exemplo (3.20) os blocos de $\frac{\Lambda}{J_1}$

$$\Theta_1 = S_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \quad \text{e} \quad \Theta_5 = S_5 \oplus P_6$$

são álgebras indecomponíveis seriais e estáveis. A álgebra Θ_5 é hereditária, mas Θ_1 não (pois $\text{Soc } P_4 \cong S_3$ não é projetivo sobre Θ_1). Então para a álgebra Θ_1 temos

$$P = S_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \quad Q = P_4 \quad \mathcal{S} = \{S_3\}$$

Portanto $\Sigma_1 \cong S_3 \oplus P_4$ e $\Phi_0 \cong S_1 \oplus P_2 \oplus P_3$.

Como Σ_1 é uma álgebra hereditária o procedimento acaba aqui e $\Sigma_1 = \Phi_1$.

Os Φ_0 -módulos projetivos e injetivos simples são S_1 e S_3 respectivamente.

Os módulos projetivos e injetivos simples sobre Φ_1 são S_3 e S_4 .

O quiver de AR de Φ_0 é

O quiver de AR de Φ_1 é

Se aplicamos o teorema (4.12) obtemos novamente o quiver de Θ_1 :

$$\Gamma_{\Theta_1} = \Gamma_{\Phi_0} \vee_{v_1=u_1} \Gamma_{\Phi_1}$$

com τ_{Θ_1} como no teorema (4.12)ii).

Em geral, para uma álgebra Λ indecomponível básica serial estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.15.

- i) $\Gamma_{\Lambda} = \Gamma_{\Phi_0} \vee_{v_1=u_1} \Gamma_{\Phi_1} \vee \dots \vee \Gamma_{\Phi_{n-1}} \vee_{v_n=u_n} \Gamma_{\Phi_n}$
- ii) Se x é um vértice de Γ_{Λ} então:

$$\tau_{\Lambda}(x) = \begin{cases} \tau_{\Phi_{i-1}}(v_i) & \text{se } x = v_i \vee u_i, \tau_{\Phi_{i-1}}(v_i) \neq u_{i-1} \\ v_{i-1} \vee u_{i-1} & \text{se } x = v_i \vee u_i, \tau_{\Phi_{i-1}}(v_i) = u_{i-1} \\ \tau_{\Phi_i}(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } \Gamma_{\Phi_i}, x \neq v_{i+1}, \tau_{\Phi_i}(x) \neq u_i \\ v_i \vee u_i & \text{se } x \text{ é vértice de } \Gamma_{\Phi_i}, x \neq v_{i+1}, \tau_{\Phi_i}(x) = u_i \end{cases}$$

Prova: O resultado é consequência de aplicar sucessivamente o teorema (4.12) às álgebras Λ e Σ_i . ■

Conclusão

Se representamos o quiver de AR de uma álgebra indecomponível serial hereditária por

então do teorema (4.15) temos que o quiver de AR de uma álgebra indecomponível serial estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$ é da forma

Do teorema (4.12) temos que o quiver de AR de uma álgebra Λ indecomponível estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$ é da forma

onde $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{R}$ representam as componentes pós-projetivas, pré-injetivas e regulares do quiver de AR da álgebra hereditária $\frac{\Lambda}{J_2}$.

Concluimos também que a álgebra estável Λ é de tipo finito se e somente se a álgebra hereditária $\frac{\Lambda}{J_2}$ é de tipo finito. Se Λ é de tipo finito vale a propriedade das álgebras hereditárias que diz que a única componente do quiver Γ_Λ é pós-projetiva e pré-injetiva. Se Λ é de tipo infinito vale que o quiver Γ_Λ tem uma componente pós-projetiva, uma componente pré-injetiva e infinitas componentes regulares, com a

propriedade que a componente pós-projetiva e as regulares são as correspondentes componentes pós-projetiva e regulares da álgebra hereditária $\frac{\Lambda}{J_2}$.

4.2 Algebras estáveis com $P = 0$ e $Q \neq 0$

No teorema (3.40) vimos que se Λ é uma álgebra de Artin estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$ então Λ é serial. Observe que a única diferença entre a álgebra Λ e as álgebras seriais estáveis Θ_i estudadas na seção anterior é que Λ não tem módulos projetivos hereditários. Mas se consideramos um Λ -módulo simples T sem torção (obviamente não projetivo) e o ideal t , traço de T em Λ , na proposição (3.18)v) vimos que a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ é estável e tem módulos projetivos hereditários. Vamos ver que o quiver de AR de $\frac{\Lambda}{t}$ é conhecido, e que a partir dele podemos obter o quiver de AR de Λ .

A álgebra $\frac{\Lambda}{t}$

Quando Λ é uma álgebra serial e sem módulos projetivos hereditários podemos acrescentar informações sobre a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$.

Com a notação introduzida no capítulo 2, temos que

$$\Lambda = \bigoplus_{j=1}^n Q_j$$

onde Q_j é projetivo indecomponível não hereditário, $j = 1, \dots, n$. Já tínhamos observado que cada Q_j é um módulo uniserial tal que todo submódulo não simples é projetivo indecomponível e $\text{Soc } Q_j$ é um módulo simples não projetivo sem torção. Dado o Λ -módulo simples T sem torção, temos que $T \cong \text{Soc } Q_j$ para algum j . Vamos supor $T = \text{Soc } Q_j$. Da observação (3.17) e a proposição (3.18) temos uma descrição completa dos $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis.

Seja I a envolvente injetiva de T em $\text{mod } \Lambda$. Observe que I é um Λ -módulo projetivo indecomponível pois Λ é estável e satisfaz a propriedade (B). Isso quer dizer que I é a envolvente injetiva de todo Q_j tal que $\text{Soc } Q_j \cong T$. Portanto todo Q_j com $\text{Soc } Q_j \cong T$ é isomorfo a um submódulo de I . Então podemos re-enumerar os

Λ -módulos projetivos indecomponíveis $\{Q_j, j = 1, \dots, n\}$ de forma que a série de composição de I seja (a menos de isomorfismos):

$$0 \subsetneq T = \text{Soc } I \subsetneq Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \dots \subsetneq Q_l = I, \quad l \leq n$$

e a série de Kupisch cíclica de Λ seja

$$\{Q_1, Q_2, \dots, Q_l, Q_{l+1}, \dots, Q_n\}.$$

Isto é, Q_j é cobertura projetiva de $r.Q_{j+1}$ para $j < n$ e Q_n é cobertura projetiva de $r.Q_1$.

Observe então que

$$\left\{ \frac{Q_1}{t.Q_1}, \frac{Q_2}{t.Q_2}, \dots, \frac{Q_l}{t.Q_l}, Q_{l+1}, \dots, Q_n \right\}$$

é um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois, onde $t.Q_j = \text{Soc } Q_j \cong T$ para $j \leq l$.

Exemplo 4.16. Seja Λ a k -álgebra de caminhos dada pelo quiver

com $R = \{\alpha_5 \cdot \alpha_6\}$.

A álgebra Λ é estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$.

O Λ -módulo $T = \text{Soc } Q_6 \cong S_6$ é o único simples não projetivo sem torção, e temos que $T \cong \text{Soc } Q_i$ para $i = 1, \dots, 6$.

A envolvente injetiva de S_6 é Q_6 e a série de composição de Q_6 é (a menos de isomorfismos)

$$0 \subsetneq T = \text{Soc } Q_6 \subsetneq Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq Q_3 \subsetneq Q_4 \subsetneq Q_5 \subsetneq Q_6.$$

Portanto $\{\frac{Q_i}{t.Q_i}, i = 1, \dots, 6\}$ é um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois, onde $t.Q_i = \text{Soc } Q_i \cong T$ para todo i .

Observe que a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ é indecomponível serial hereditária.

Exemplo 4.17. Seja Λ a k -álgebra de caminhos dada pelo quiver

com $R = \{\alpha_2 \cdot \alpha_3, \alpha_3 \cdot \alpha_4, \alpha_5 \cdot \alpha_6\}$.

A álgebra Λ é estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$.

Seja o Λ -módulo simples não projetivo sem torção $T = \text{Soc } Q_3 \cong S_6$.

Temos que

$$\text{Soc } Q_1 \cong \text{Soc } Q_2 \cong \text{Soc } Q_3 \cong S_6 \cong T$$

$$\text{Soc } Q_4 \cong S_3$$

$$\text{Soc } Q_5 \cong \text{Soc } Q_6 \cong S_4.$$

A envolvente injetiva de S_6 é Q_3 .

A série de composição de Q_3 é (a menos de isomorfismos)

$$0 \subsetneq T = \text{Soc } Q_3 \subsetneq Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq Q_3.$$

e a série de Kupisch cíclica de Λ é

$$\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}.$$

Portanto

$$\left\{ \frac{Q_1}{t.Q_1}, \frac{Q_2}{t.Q_2}, \frac{Q_3}{t.Q_3}, Q_4, Q_5, Q_6 \right\}$$

é um conjunto completo de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois, onde $t.Q_i = \text{Soc } Q_i \cong T$ para $i = 1, 2, 3$.

O quiver ordinário de $\frac{\Lambda}{t}$ é

$$a_6 \longrightarrow a_5 \xrightarrow{\quad} a_4 \xrightarrow{\quad} a_3 \xrightarrow{\quad} a_2 \longrightarrow a_1$$

Isto é, a álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ é estável e tem módulos projetivos hereditários (como já foi observado) mas também é indecomponível e serial. Portanto, aplicando o teorema (4.15), o quiver de AR de $\frac{\Lambda}{t}$ é

Na próxima proposição provaremos que o resultado dos exemplos é geral. Isto é, para as álgebras Λ que estamos considerando nesta seção, $\frac{\Lambda}{t}$ é indecomponível e serial. Isso vai implicar que $\frac{\Lambda}{t}$ é uma álgebra serial hereditária (como no exemplo (4.16)) , ou uma álgebra serial estável com módulos projetivos hereditários (como no exemplo (4.17)), caso que foi tratado na seção anterior. Portanto o quiver de AR de $\frac{\Lambda}{t}$ está determinado.

Proposição 4.18. *A álgebra $\frac{\Lambda}{t}$ é indecomponível e serial.*

Prova: Primeiro vamos provar que $\frac{\Lambda}{t}$ é indecomponível. Em $\text{mod } \Lambda$ temos a cadeia de morfismos

$$Q_1 \xrightarrow{f_1} Q_2 \dots Q_{l-1} \xrightarrow{f_{l-1}} Q_l \xrightarrow{f_l} Q_{l+1} \dots Q_n \xrightarrow{f_n} Q_1$$

onde f_j é a composição das coberturas projetivas com as inclusões naturais.

Se $j < l$, $f_j : Q_j \rightarrow Q_{j+1}$ é um monomorfismo (pois $Q_j = r.Q_{j+1}$). Então $f_j(\text{Soc } Q_j) = \text{Soc } Q_{j+1} = T$ e portanto f_j induz o morfismo $\overline{f_j} : \frac{Q_j}{t.Q_j} \rightarrow \frac{Q_{j+1}}{t.Q_{j+1}}$.

Se $l < n$ temos $f_l : Q_l \rightarrow Q_{l+1}$ onde Q_l não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Observe que f_l não é um monomorfismo, pois se fosse teríamos $f_l(\text{Soc } Q_l) = \text{Soc } Q_l = T \not\cong \text{Soc } Q_{l+1}$, o que é uma contradição. Então pela proposição (2.14)(a) $\text{Im } f_l = \text{Soc } Q_{l+1} \not\cong T$. Portanto $f_l(\text{Soc } Q_l) = 0$, isto é, $\text{Soc } Q_l \subset \text{Ker } f_l$. Então existe $\overline{f_l} : \frac{Q_l}{t.Q_l} \rightarrow Q_{l+1}$. Logo, $\frac{\Lambda}{t}$ é indecomponível.

Agora provaremos que $\frac{\Lambda}{t}$ é serial. É claro que os $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis são uniserials. Pela proposição (3.18)vi) T é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo injetivo. Se S é um Λ -módulo simples tal que $S \not\cong T$ e $I(S)$ é a sua envolvente injetiva em $\text{mod } \Lambda$, por ser Λ serial, $I(S)$ é uniserial. Pelo lema (3.16)iii), $I(S)$ é a envolvente injetiva de S em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$. Portanto todos os $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos injetivos indecomponíveis são uniserials. Isto é, $\frac{\Lambda}{t}$ é serial. ■

Módulos indecomponíveis e morfismos irredutíveis em $\text{mod } \Lambda$

Como $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$, temos que ver quais são os módulos X de $\text{ind } \Lambda$ que não são módulos sobre $\frac{\Lambda}{t}$, ou seja, que satisfazem $t.X \neq 0$.

Proposição 4.19. *Seja $X \in \text{ind } \Lambda$ tal que $t.X \neq 0$. Então X é um Λ -módulo projetivo com $\text{Soc } X \cong T$.*

Prova: Seja $P \xrightarrow{f} X$ a cobertura projetiva de X em $\text{mod } \Lambda$. Como $f(t.P) = t.f(P) = t.X \neq 0$, temos que $t.P \neq 0$. Então, pelo lema (3.16)ii), $t.P = \text{tr}_P T \cong T^n \neq 0$, $n > 0$. Portanto podemos supor (considerando isomorfismos) que $0 \neq t.X = f(t.P) = f(T^n) = f(T)^n$, $n > 0$. Como T é simples e $f(T) \neq 0$, tem que ser $T \cong f(T) \subset t.X$. Isto é, T é isomorfo a um submódulo próprio de X .

Seja I a envolvente injetiva de T em $\text{mod } \Lambda$. Como Λ é estável, satisfaz a propriedade (B), portanto I é um Λ -módulo projetivo indecomponível. Então o lema (2.8) implica que X é isomorfo a um submódulo projetivo de I . Como I é uniserial com $\text{Soc } I \cong T$, temos que $\text{Soc } X \cong T$. ■

Isto é, os únicos módulos em $\text{ind } \Lambda$ que não são módulos sobre $\frac{\Lambda}{t}$ são

$$\{Q_j, 1 \leq j \leq l\}.$$

Exemplo. No exemplo (4.16), os módulos em $\text{ind } \Lambda$ que não são $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos são $\{Q_i, i = 1, \dots, 6\}$; e no exemplo (4.17) são $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

Vamos determinar agora os morfismos irredutíveis entre módulos de $\text{ind } \Lambda$. Para isso vamos estudar as sequências de AR em $\text{mod } \Lambda$. Observe que se

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

é uma tal sequência, então N não é projetivo, portanto da última proposição temos que N é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Isto é, todas as sequências de AR em $\text{mod } \Lambda$ tem como último termo um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Se o termo do meio M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$ então o mesmo acontece com o módulo L e portanto a sequência é de AR em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$. Portanto temos que estudar as sequências de AR em $\text{mod } \Lambda$ tais que o termo do meio M não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Nesse caso existe Q_j , $1 \leq j \leq l$ somando direto de M , e um morfismo irredutível $L \rightarrow Q_j$. Vamos, portanto, estudar quais são os morfismos irredutíveis chegando a Q_j , $1 \leq j \leq l$.

Proposição 4.20. *Seja $f : L \rightarrow Q_j$ um morfismo irredutível em $\text{mod } \Lambda$ com L indecomponível e $1 \leq j \leq l$. Então $L = r.Q_j$ e f é a inclusão natural (a menos de isomorfismos).*

Prova: Por ser f irredutível com L indecomponível e Q_j projetivo indecomponível, L tem que ser isomorfo a um somando direto de $r.Q_j$ (ver exemplo 1.12). Mas Q_j é uniserial com todos os seus submódulos indecomponíveis, portanto $L \cong r.Q_j$. ■

Agora que determinamos o módulo indecomponível L no caso em que $t.M \neq 0$, vamos ver quais são os outros somandos diretos de M (não isomorfos a Q_j). Daqui em diante, para facilitar a notação, vamos considerar iguais módulos que sejam isomorfos.

Vamos supor primeiro $j = 1$. Nesse caso $L = r.Q_1 = T$. Se $T \rightarrow X$ é um morfismo irredutível com X indecomponível, por ser T simples o morfismo é um monomorfismo. Portanto $T \subset \text{Soc } X$. Como $T \neq X$, $T \subsetneq X$, portanto pelo lema (2.8), temos que $X = Q_j$, $1 \leq j \leq l$. Mas pela proposição (4.20) $T = r.Q_j$, portanto $X = Q_1$. Então a sequência de AR começando em T tem como termo do meio o módulo indecomponível

$M = Q_1$, e a sequência é:

$$0 \rightarrow T \rightarrow Q_1 \rightarrow \frac{Q_1}{r.Q_1} \rightarrow 0.$$

Suponhamos agora $1 < j \leq l$. Então $L = r.Q_j = Q_{j-1}$. Se X é somando direto de M indecomponível não isomorfo a Q_j , é claro que X não é um Λ -módulo projetivo, isto é, X é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Portanto vamos ver quais são os morfismos irredutíveis $f : Q_{j-1} \rightarrow X$ tais que $t.X = 0$.

Proposição 4.21. *Seja $f : Q_{j-1} \rightarrow X$ um morfismo irredutível em $\text{mod } \Lambda$, com X indecomponível tal que $t.X = 0$ e $1 < j \leq l$. Então $X \cong \frac{Q_{j-1}}{t.Q_{j-1}}$.*

Prova: Temos a sequência de AR começando em Q_{j-1} :

$$0 \rightarrow Q_{j-1} \rightarrow M \rightarrow \tau^{-1}Q_{j-1} \rightarrow 0$$

onde $M = Q_j \oplus M'$, $t.M' = 0$ e X é somando direto indecomponível de M' . Como X não é projetivo existe o Λ -módulo τX e um morfismo irredutível $\tau X \rightarrow Q_{j-1}$.

Pela proposição anterior $\tau X = r.Q_{j-1} = Q_{j-2}$ e $\tau X \rightarrow Q_{j-1}$ é a inclusão natural (a menos de isomorfismos). Isto é, X é o único somando direto de M' e $X = \tau^{-1}Q_{j-2}$. Vamos determinar os módulos $\tau^{-1}Q_{j-2}$ para $1 < j \leq l$, por indução em j .

Se $j = 2$, temos que $X = \tau^{-1}Q_0 = \tau^{-1}T = \frac{Q_1}{t.Q_1}$. Assumimos que $\tau^{-1}Q_{j-2} = \frac{Q_{j-1}}{t.Q_{j-1}}$ para $2 < j < k$.

Se $j = k$, então $X = \tau^{-1}Q_{k-2}$. A sequência de AR começando em Q_{k-2} é:

$$0 \longrightarrow Q_{k-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}} Q_{k-1} \oplus \frac{Q_{k-2}}{t.Q_{k-2}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f'_1 & g'_1 \end{pmatrix}} \tau^{-1}Q_{k-2} \longrightarrow 0.$$

Temos que $l(Q_{k-2}) = k - 1$, $l(Q_{k-1}) = k$, $l(\frac{Q_{k-2}}{t.Q_{k-2}}) = k - 2$, portanto $l(\tau^{-1}Q_{k-2}) = k - 1$. Isso quer dizer que o morfismo irreduzível $Q_{k-1} \xrightarrow{f'_1} \tau^{-1}Q_{k-2}$ é um epimorfismo, logo $\tau^{-1}Q_{k-2} = \frac{Q_{k-1}}{\text{Ker } f'_1}$. Como $l(\text{Ker } f'_1) = 1$ e Q_{k-1} é uniserial, temos que $\text{Ker } f'_1 = \text{Soc } Q_{k-1} = t.Q_{k-1}$. Então $\tau^{-1}Q_{k-2} = \frac{Q_{k-1}}{t.Q_{k-1}}$.

Assim sucessivamente temos que para $1 < j \leq l$, $X \cong \tau^{-1}Q_{j-2} = \frac{Q_{j-1}}{t.Q_{j-1}}$. ■

Observação 4.22. Do visto até agora sobre as sequências de AR em mod Λ da forma

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

podemos concluir:

1. Se M é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo então a sequência é de AR em mod $\frac{\Lambda}{t}$.
2. Caso contrário, podemos visualizar as sequências de AR (e os morfismos irreduzíveis) de mod Λ que não estão em mod $\frac{\Lambda}{t}$ no seguinte diagrama:

Proposição 4.23. Toda sequência de AR em mod $\frac{\Lambda}{t}$ é uma sequência de AR em mod Λ .

Prova: Seja $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência de AR em mod $\frac{\Lambda}{t}$. Então $M \xrightarrow{g} N$ é um morfismo minimal que quase cinde à direita em mod $\frac{\Lambda}{t}$. Então g é minimal à direita e não é retração em mod Λ . Vamos ver que g é um morfismo que

quase cinde à direita em $\text{mod } \Lambda$. Seja $V \xrightarrow{v} N$ um morfismo não nulo em $\text{mod } \Lambda$ que não é retração com V indecomponível. Se V não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{I}$ então pela proposição (4.19) V é um Λ -módulo projetivo. Portanto, para qualquer V indecomponível existe $v' : V \rightarrow M$ tal que $g \cdot v' = v$ e g é um morfismo que quase cinde à direita em $\text{mod } \Lambda$. Isto é, a sequência dada é de AR em $\text{mod } \Lambda$. ■

Construção de Γ_Λ

Determinadas todas as sequências de AR em $\text{mod } \Lambda$, fica fácil construir o quiver de AR correspondente.

Notação:

- * u_j são os vértices no quiver $\Gamma_{\frac{\Lambda}{I}}$ correspondentes aos $\frac{\Lambda}{I}$ -módulos projetivos $\frac{Q_j}{I \cdot Q_j}$, $1 \leq j \leq l$.
- * x_0 é o vértice no quiver $\Gamma_{\frac{\Lambda}{I}}$ correspondente ao $\frac{\Lambda}{I}$ -módulo simples injetivo T .
- * x_j são os vértices no quiver Γ_Λ correspondentes aos Λ -módulos projetivos Q_j , $1 \leq j \leq l$.

Teorema 4.24.

- i) $(\Gamma_\Lambda)_0 = (\Gamma_{\frac{\Lambda}{I}})_0 \cup \{x_1, \dots, x_l\}$.
- ii) $(\Gamma_\Lambda)_1 = (\Gamma_{\frac{\Lambda}{I}})_1 \cup \{\alpha_j, \beta_j, 1 \leq j \leq l\}$ onde $x_{j-1} \xrightarrow{\alpha_j} x_j$ e $x_j \xrightarrow{\beta_j} u_j$ são novas flechas.
- iii) Se x é um vértice de Γ_Λ então:

$$\tau_\Lambda(x) = \begin{cases} x_{j-1} & \text{se } x = u_j \text{ para algum } j, 1 \leq j \leq l \\ \tau_{\frac{\Lambda}{I}}(x) & \text{se } x \neq u_j \text{ para todo } j, 1 \leq j \leq l \end{cases}$$

Prova: i) É consequência da proposição (4.19).

ii) Segue da observação (4.22) e da proposição (4.23).

iii) Se $x = u_j$ então $X \cong \frac{Q_j}{I \cdot Q_j}$ para algum j . Da observação (4.19) temos que se $j = 1$ então $\tau(\frac{Q_1}{I \cdot Q_1}) = T$ e se $1 < j \leq l$ então $\tau(\frac{Q_j}{I \cdot Q_j}) = Q_{j-1}$. Portanto $\tau_\Lambda(x) = x_{j-1}$. Se $x \neq u_j$ então $X \not\cong \frac{Q_j}{I \cdot Q_j}$, para todo $j = 1, \dots, l$. Então a sequência de AR que

termina em X , novamente pela observação (4.22). é uma sequência de AR em mod $\frac{\Lambda}{t}$. Portanto $\tau X = \tau_{\frac{\Lambda}{t}} X$ e $\tau_{\Lambda}(x) = \tau_{\frac{\Lambda}{t}}(x)$. ■

Exemplo O quiver de AR de Λ no exemplo (4.17) é

Conclusão

Em geral, o quiver de AR de uma álgebra indecomponível estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$ é da forma

onde os extremos x_0 coincidem.

Capítulo 5

Relações com outras classes de álgebras

Vamos comparar as álgebras de Artin projetivamente estáveis com as álgebras quase-inclinadas, as shod e as $\mathcal{P}_1$ -hereditárias. Como as duas primeiras são caracterizadas pelas dimensões homológicas dos seus módulos, começamos o capítulo estudando tais dimensões sobre uma álgebra estável.

5.1 Dimensões homológicas

Dada uma álgebra estável não hereditária Λ , vamos determinar as dimensões projetivas e injetivas de cada módulo em $\text{ind } \Lambda$ e a dimensão global de Λ .

Para tanto consideraremos novamente os dois tipos de álgebras estáveis:

1. com módulos projetivos hereditários ($P \neq 0$ e $Q \neq 0$)
2. sem módulos projetivos hereditários ($P = 0$ e $Q \neq 0$)

onde $\Lambda = P \oplus Q$ é a decomposição tal que P é um módulo projetivo hereditário e Q é um módulo projetivo sem somandos diretos indecomponíveis projetivos hereditários.

Se Λ é uma álgebra do tipo 1, então $\frac{\Lambda}{J_1}$ e $\frac{\Lambda}{J_2}$ são as álgebras quocientes determinadas na seção 3.2 e $\mathcal{S}$ é um conjunto completo de Λ -módulos simples não isomorfos não projetivos sem torção e com cobertura projetiva hereditária. No que segue desta seção Λ é uma álgebra de Artin indecomponível estável, M é um módulo em $\text{ind } \Lambda$ e

$$P(M) \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0, \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{i} I(M)$$

a sua cobertura projetiva e envolvente injetiva, respectivamente, em $\text{mod } \Lambda$. Vamos começar determinando as possíveis dimensões projetivas e injetivas de M . No caso da dimensão projetiva vamos supor que M não seja projetivo. Da mesma forma, para determinar a dimensão injetiva consideramos M não injetivo.

Observação 5.1. *Seja Λ uma álgebra estável com $P \neq 0$, $Q \neq 0$ e M não projetivo. Então temos que*

$$dp \, M = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2} \\ \text{ou} \\ M \notin \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2} \text{ e } M \not\cong \frac{P(M)}{\text{Soc } P(M)}. \end{cases}$$

Caso contrário, $dp \, M = dp(\text{Soc } P(M)) + 1 > 1$.

Prova: Se M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ então $dp \, M = 1$ pois, pelo corolário (3.11), $P(M) \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ e portanto é um Λ -módulo projetivo hereditário.

Se M não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, então $P(M)$ também não o será. Logo $P(M)$ é projetivo indecomponível sobre a álgebra serial estável $\frac{\Lambda}{J_1}$, e portanto é uniserial não hereditário com $\text{Soc } P(M)$ simples como único submódulo não projetivo em $\text{mod } \Lambda$. Como vale que $dp \, M = dp \, \text{Ker } \pi + 1$, temos que $dp \, M = 1$ se e só se $dp \, \text{Ker } \pi = 0$, isto é, se e só se $\text{Ker } \pi \neq \text{Soc } P(M)$. Portanto $dp \, M = 1$ se e só se $M \not\cong \frac{P(M)}{\text{Soc } P(M)}$. Logo, se $M \cong \frac{P(M)}{\text{Soc } P(M)}$ temos que

$$dp \, M = dp(\text{Soc } P(M)) + 1 > 1.$$

■

Usando um argumento dual, vamos determinar a dimensão injetiva de M . Na observação anterior utilizamos o fato de que $\text{mod } \frac{\Lambda}{J_2}$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ tal que $\frac{\Lambda}{J_2}$ é uma álgebra hereditária e todos os seus módulos projetivos são projetivos sobre Λ . Agora vamos querer uma subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ com a “característica dual”, isto é, que seja uma categoria de módulos sobre uma álgebra hereditária e tal que todos os seus módulos injetivos sejam injetivos sobre Λ . Veremos que existe uma álgebra com essa característica.

Se $\frac{\Lambda}{J_1} = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_r$ é um produto de álgebras seriais estáveis indecomponíveis, cada álgebra Θ_i tem associada uma sequência de álgebras seriais hereditárias

$$(\Phi_{i,0}, \dots, \Phi_{i,n(i)})$$

(ver observação (3.39)). Denotamos por Φ o produto das álgebras $\Phi_{1,n(1)}, \dots, \Phi_{r,n(r)}$. É fácil ver que Φ é uma álgebra hereditária com as características desejadas, isto é, $\text{mod } \Phi$ é uma subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ tal que todos os seus módulos injetivos são injetivos sobre Λ .

Observação 5.2. *Seja Λ uma álgebra estável com $P \neq 0$, $Q \neq 0$ e M não injetivo. Então temos que*

(i)

$$di\ M = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{mod } \Phi, \text{ ou} \\ M \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}, M \notin \text{mod } \Phi \text{ e } M \not\cong r.I(M), \text{ ou} \\ M \notin \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1} \text{ e } \text{Coker}(g) \text{ não tem somandos diretos em } \mathcal{S}. \end{cases}$$

(ii)

$$M \in \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}, M \notin \text{mod } \Phi \text{ e } M \cong r.I(M) \Rightarrow di\ M = di\ \frac{I(M)}{r.I(M)} + 1 > 1.$$

(iii) $M \notin \text{mod } \frac{\Lambda}{J_1}$ e $\text{Coker}(g)$ tem somandos diretos em $\mathcal{S} \Rightarrow$

$$1 < di\ M = di(\text{Coker}(g)) + 1 \leq \max\{di\ S_i / S_i \in \mathcal{S}\} + 1.$$

Prova: Se M é um módulo sobre Φ , pelo argumento dual ao utilizado na observação anterior temos que $di\ M = 1$. Se M é um módulo sobre Θ mas não sobre Φ , temos

que o mesmo acontece com $I(M)$. Portanto $I(M)$ é uniserial com $\frac{I(M)}{r.I(M)}$ simples como único módulo quociente não injetivo. Sabemos que $di\ M = di(\text{Cokerg}) + 1$. Então $di\ M = 1$ se e só se $di(\text{Cokerg}) = 0$, isto é, se e só se $\text{Cokerg} \neq \frac{I(M)}{r.I(M)}$. Logo $di\ M = 1$ se e só se $M \not\cong r.I(M)$. Portanto se $M \cong r.I(M)$ temos que $di\ M = di(\frac{I(M)}{r.I(M)}) + 1 > 1$. Se M não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, então $I(M)$ também não o será. Logo $I(M)$ é injetivo sobre a álgebra hereditária $\frac{\Lambda}{J_2}$. Portanto Cokerg é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, mas não necessariamente sobre Λ . Temos que Cokerg é injetivo sobre Λ se e só se Cokerg não tem somandos diretos em $\mathcal{S}$. Nesse caso $di\ M = 1$. No caso contrário

$$1 < di\ M = di(\text{Cokerg}) + 1 \leq \max \{di\ S_i / S_i \in \mathcal{S}\} + 1$$

■

Exemplo 5.3. Nos seguintes quivers de AR de álgebras estáveis Λ , no lugar do vértice correspondente a cada módulo M em $\text{ind } \Lambda$, vamos indicar as respectivas dimensões projetivas e injetivas da seguinte forma: $dp\ M/di\ M$.

(1) No exemplo (3.20) temos:

Nos próximos exemplos, que correspondem a álgebras estáveis indecomponíveis Λ com módulos projetivos hereditários, não representamos a componente pós-projetiva

nem as componentes regulares de Γ_Λ e indicamos somente as dimensões dos módulos sobre a álgebra $\frac{\Lambda}{J_1}$, que consideramos indecomponível.

(2)

(3)

(4)

(5)

Observação 5.4. Seja Λ estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$.

Se M não é projetivo temos que

$$dp\ M = 1 \Leftrightarrow M \not\cong \frac{P(M)}{Soc\ P(M)}.$$

Caso contrário, $dp\ M = dp(Soc\ P(M)) + 1 > 1$.

Se M não é injetivo então

$$di\ M = 1 \Leftrightarrow M \not\cong r.I(M)$$

Caso contrário. $di\ M = di(\frac{I(M)}{r.I(M)}) + 1 > 1$.

Prova: Temos que $P(M)$ é um Λ -módulo projetivo indecomponível com $Soc\ P(M)$ como único submódulo não projetivo, e $I(M)$ é um Λ -módulo injetivo indecomponível com $\frac{I(M)}{r.I(M)}$ como único quociente não injetivo. Portanto, com o mesmo argumento das observações (5.1) e (5.2), temos os resultados enunciados. ■

Exemplo 5.5. Seja Λ a k -álgebra de caminhos dada pelo quiver com relações

A álgebra Λ é estável com $P = 0$ e seu quiver Γ_Λ é

Novamente, no lugar dos vértices colocamos as correspondentes dimensões projetivas e injetivas. Lembremos que neste caso os vértices extremos coincidem.

Exemplo 5.6. Se Λ tem $P = 0$ e todos os seus módulos projetivos indecomponíveis têm comprimento 2 (isto é, $r^2 = 0$), então o quiver de AR de Λ é da forma

onde claramente todo Λ -módulo M indecomponível é um módulo projetivo injetivo ($\bullet$) ou é simples com $dp\ M = di\ M = \infty$ ($\circ$).

De fato, se Λ é uma álgebra estável não hereditária, temos que

$$P = 0 \text{ e } r^2 = 0 \Leftrightarrow dgl\ \Lambda = \infty,$$

resultado que já tinha sido enunciado na proposição (2.22). Outra forma de expressar esse resultado é

$$P \neq 0 \text{ ou } (P = 0 \text{ e } r^2 \neq 0) \Leftrightarrow dgl\ \Lambda < \infty.$$

Neste último caso, dado qualquer par de inteiros positivos (m, n) podemos construir uma álgebra estável Λ que tenha um módulo $M \in \text{ind } \Lambda$ tal que $dp\ M = m$ e $di\ M = n$.

No teorema (2.19) apresentamos uma forma de calcular a dimensão global de um anel artiniano satisfazendo a propriedade (A) sem considerar as dimensões homológicas dos Λ -módulos. Reescrevemos aqui o enunciado do teorema, adaptado às álgebras estáveis:

Teorema. *Se Λ é uma álgebra estável não hereditária então*

$$dgl\ \Lambda = \sup \{ \text{comprimento dos caminhos em } \mathcal{Q} \} + 2$$

onde $\mathcal{Q}$ é a subcategoria plena de $\text{mod } \Lambda$ formada pelos módulos projetivos indecomponíveis não hereditários com comprimento 2.

Vamos interpretar o resultado do teorema em função da estrutura conhecida de Λ e do quiver Γ_Λ .

Observe que no caso em que Λ tem $P \neq 0$, a subcategoria $\mathcal{Q}$ é, de fato, uma subcategoria plena de $\text{mod } \frac{\Lambda}{I_1}$. Nesse caso consideramos um bloco Θ da álgebra $\frac{\Lambda}{I_1}$ e a sequência de álgebras seriais hereditárias associada $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$. Cada álgebra Φ_i

tem um único (a menos de isomorfismos) módulo projetivo indecomponível de comprimento 2, que vamos denotar por Q_i . Portanto $(Q_0, \dots, Q_n)$ é uma sequência dos Θ -módulos projetivos que estão em $\mathcal{Q}$ (a menos de isomorfismos).

No caso em que a álgebra Λ tem $P = 0$, ela é serial com série de Kupisch cíclica $\{P_1, \dots, P_t\}$. Seja $\{Q_0, \dots, Q_n\}$, $n \leq t-1$, o subconjunto ordenado de $\{P_1, \dots, P_t\}$ tal que $Q_i \in \mathcal{Q}$ e onde a ordem está dada pela série.

Portanto, a cada bloco Θ de $\frac{\Lambda}{J_1}$, no caso em que $P \neq 0$, ou à álgebra Λ no caso em que $P = 0$, podemos associar-lhe uma sequência de módulos de $\mathcal{Q}$. No primeiro caso, a sequência é finita. No segundo, consideramos a sequência infinita $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1}, \dots)$, onde $Q_{n+i} = Q_j$ se $j \equiv n+i \pmod{n}$.

Exemplo 5.7. (1) O seguinte é o quiver de AR de uma álgebra serial estável indecomponível com $P \neq 0$ ou $P = 0$ (no último caso os vértices extremos coincidem):

Temos que a sequência associada de módulos de $\mathcal{Q}$ é

(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) se $P \neq 0$.

$(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_0, Q_1, \dots)$ se $P = 0$.

(2) No exemplo (3.20), $\mathcal{Q}$ consiste dos módulos P_2, P_4 e P_6 , onde

(P_2, P_4) é a sequência associada ao bloco Θ_1 e

(P_6) é a sequência associada ao bloco Θ_5 .

Proposição 5.8. *Seja Λ uma álgebra estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$. Existe um caminho de comprimento l em $\mathcal{Q}$ se e só se existe um bloco Θ de $\frac{\Lambda}{J_1}$ cuja sequência*

de módulos de $\mathcal{Q}$, $(Q_0, \dots, Q_n)$, tem uma subsequência com l termos Q_i consecutivos tal que $i < n$ e Q_i é injetivo.

Prova: ($\Rightarrow$) Dado um caminho de comprimento l em $\mathcal{Q}$, obviamente é um caminho num bloco Θ de $\frac{\Lambda}{J_1}$. Seja $f : Q_i \rightarrow Q_j$ um morfismo do caminho. É claro que tem que ser $i < j$. Pela proposição (2.14) temos que $\text{Im } f = \text{Soc } Q_j$. Portanto $\text{Ker } f = \text{Soc } Q_i$ (pois f não pode ser monomorfismo), o que implica que Q_i é cobertura projetiva de $\text{Soc } Q_j = r.Q_j$. Isso quer dizer que Q_i é injetivo e que $j = i + 1$. Logo o caminho tem que ser da forma

$$Q_i \xrightarrow{f_1} Q_{i+1} \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{l-1}} Q_{i+l-1} \xrightarrow{f_l} Q_{i+l} \quad (5.2)$$

onde cada Q_{i+j} , $j < l$, é projetivo e injetivo. Então $(Q_i, \dots, Q_{i+l-1})$ é uma subsequência de comprimento l de $(Q_0, \dots, Q_n)$, com $i + l - 1 < n$, de módulos injetivos.

($\Leftarrow$) dada uma subsequência $(Q_i, \dots, Q_{i+l-1})$, $i + l - 1 < n$, nas condições da hipótese, construímos o caminho (5.2) onde $f_j : Q_{i+j-1} \rightarrow Q_{i+j}$ é a composição da projeção natural $Q_{i+j-1} \rightarrow \frac{Q_{i+j-1}}{\text{Soc } Q_{i+j-1}} \cong \text{Soc } Q_{i+j}$ e a inclusão natural $\text{Soc } Q_{i+j} \rightarrow Q_{i+j}$. ■

Proposição 5.9. *Seja Λ uma álgebra estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$. Existe um caminho de comprimento l em $\mathcal{Q}$ se e só se a sequência infinita de módulos de $\mathcal{Q}$ $(Q_0, \dots, Q_n, Q_{n+1}, \dots)$ tem uma subsequência com l termos Q_i consecutivos tal que Q_i é injetivo.*

Prova: É análoga à prova da proposição anterior. ■

Dada uma álgebra estável Λ com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$ definimos

$$L = \max \{ \text{comprimentos das subsequências nas condições da proposição (5.8)} \}.$$

Se Λ tem $P = 0$ e $Q \neq 0$, definimos

$$L = \sup \{ \text{comprimentos das subsequências nas condições da proposição (5.9)} \}.$$

Observação 5.10. Do teorema (2.19) e as proposições (5.8) e (5.9) temos que

$$dgl \Lambda = L + 2.$$

Exemplo 5.11. Com este último critério, ou considerando as dimensões homológicas dos módulos em $\text{ind } \Lambda$, as dimensões globais das álgebras dadas no exemplo (5.3) são: 2, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

A álgebra Λ do exemplo (5.5) tem $dgl \Lambda = 5$.

Observação 5.12. Se Λ é uma álgebra estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$, na seção 4.1 concluímos que o fato de Λ ser de tipo finito ou infinito depende da álgebra $\frac{\Lambda}{J_2}$. Com respeito à dimensão global de Λ , pelo visto nas observações (5.1) e (5.2), vale que $dgl \Lambda = dgl \frac{\Lambda}{J_1}$ ou $dgl \Lambda = dgl \frac{\Lambda}{J_1} + 1$, isto é, $dgl \Lambda$ está determinada em certa forma por $dgl \frac{\Lambda}{J_1}$.

5.2 Álgebras estáveis quase-inclinadas ou shod

Determinadas as dimensões projetivas e injetivas dos módulos das álgebras estáveis, podemos comparar tais álgebras com outras álgebras de Artin cujas definições envolvem dimensões homológicas.

As álgebras de Artin chamadas de *álgebras inclinadas* (*tilted algebras*) têm um papel importante na teoria de representações. Sua definição envolve conceitos da teoria *tilting*, que está fora do contexto do nosso trabalho (ver [As]). Happel, Reiten e Smalø, em [HRS], estenderam essa classe de álgebras para as chamadas *álgebras quase inclinadas*, envolvendo a teoria *tilting* para categorias mais gerais. Para estas últimas álgebras existe a seguinte caracterização homológica.

Teorema 5.13. *Uma álgebra de Artin Λ é quase-inclinada se e só se satisfaz as seguintes duas condições:*

- (i) $dgl \Lambda \leq 2$.
- (ii) Para todo $M \in \text{ind } \Lambda$, $dp M \leq 1$ ou $di M \leq 1$.

As condições (i) e (ii) do teorema são independentes (ver [HRS]), mas temos o seguinte resultado:

Proposição 5.14. *Se Λ é uma álgebra de Artin tal que para todo $M \in \text{ind } \Lambda$ vale que $\text{dp } M \leq 1$ ou $\text{di } M \leq 1$, então $\text{dgl } \Lambda \leq 3$.*

Este resultado motivou o estudo da seguinte generalização das álgebras quase-inclinadas feita por Coelho-Lanzilotta ([CL1],[CL2]):

Definição 5.15. *Uma álgebra de Artin Λ é shod (de small homological dimensions álgebras) se para todo $M \in \text{ind } \Lambda$ vale que $\text{dp } M \leq 1$ ou $\text{di } M \leq 1$.*

Pela proposição (5.14) temos que toda álgebra shod Λ verifica que $\text{dgl } \Lambda \leq 3$. Vamos caracterizar as álgebras estáveis que são quase-inclinadas ou shod.

Exemplos.

(i) No exemplo (5.3) temos que:

- (1) não é shod pois $\text{dp } S_2 = \text{di } S_2 = 2$.
- (2) é quase inclinada.
- (3) é shod mas não quase inclinada pois $\text{dgl } \Lambda = 3$.
- (4) e (5) não são shod pois têm dimensões globais 4 e 5, respectivamente.

(ii) A álgebra Λ do exemplo (5.5) não é shod pois $\text{dgl } \Lambda = 5$.

(iii) Nenhuma álgebra estável não hereditária Λ com $P = 0$ e $r^2 = 0$ é shod pois $\text{dgl } \Lambda = \infty$.

Proposição 5.16. *Nenhuma álgebra estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$ é shod.*

Prova: Seja Λ uma álgebra estável com $P = 0$ e $Q \neq 0$.

Se $r^2 = 0$, é claro que Λ não é shod.

Se $r^2 \neq 0$ existe um módulo projetivo injetivo indecomponível X tal que $l(X) \geq 3$.

Portanto o Λ -módulo $Y = \frac{r.X}{\text{Soc } X}$ não é projetivo nem injetivo. Como $P(Y) = r.X$ e

$l(Y) = \frac{X}{\text{Soc } X}$, pela observação (5.4), temos que $dp Y > 1$ e $di Y > 1$. Então Λ não é shod. ■

Proposição 5.17. *Seja Λ uma álgebra estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$. Então Λ é shod se e só se $\frac{\Lambda}{J_1} = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_r$ é tal que, para cada i , Θ_i é serial hereditária ou Θ_i é o pullback de Φ_0 e Φ_1 seriais hereditárias com $l(\Phi_0) = 3$.*

Prova: ($\Rightarrow$) Observe que se existe em $\frac{\Lambda}{J_1}$ um bloco Θ com a sequência associada de álgebras seriais hereditárias $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$, tal que $l(\Phi_j) > 3$ para algum $j < n$, então o Φ_j -módulo projetivo injetivo X é tal que $l(X) \geq 3$. Portanto, como já vimos na proposição anterior, o módulo $Y = \frac{r.X}{\text{Soc } X}$ é tal que $dp Y > 1$ e $di Y > 1$, o que contradiz a hipótese. Logo, para cada bloco Θ de $\frac{\Lambda}{J_1}$, a sequência $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ é tal que para todo $j < n$, $l(\Phi_j) = 3$.

Seja Θ um bloco de $\frac{\Lambda}{J_1}$ não hereditário. Então sua sequência $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ é tal que $n > 0$.

Se $n > 1$, pela observação feita acima, temos que $l(\Phi_0) = l(\Phi_1) = 3$. O quiver de AR de Λ vai ser da seguinte forma:

Se Q_1 é o Φ_1 -módulo projetivo injetivo então $dp(\text{Soc } Q_1) = 2$ e $di(\text{Soc } Q_1) = di(\text{Soc } Q_2) + 1 \geq 2$, o que é impossível pois estamos supondo Λ shod. Portanto $n = 1$ e a sequência associada a Θ é (Φ_0, Φ_1) , com $l(\Phi_0) = 3$.

($\Leftarrow$) Seja Λ uma álgebra com $\frac{\Lambda}{J_1}$ nas condições da hipótese, e seja M um Λ -módulo indecomponível. Se M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$ então, pela observação (5.1), $dp M \leq 1$. Se M não é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, pela observação (5.2), temos que $di M \leq 1$. Então temos que Λ é shod. ■

Proposição 5.18. *Seja Λ uma álgebra estável com $P \neq 0$ e $Q \neq 0$. Então Λ é quase-inclinada se e só se $\frac{\Lambda}{J_1}$ é serial hereditária.*

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\frac{\Lambda}{J_1}$ não seja hereditária. Então existe um bloco Θ de $\frac{\Lambda}{J_1}$ que não é hereditário. Por ser Λ quase-inclinada, é shod. então pela proposição anterior Θ tem uma sequência associada de álgebras seriais hereditárias (Φ_0, Φ_1) com $l(\Phi_0) = 3$. Logo o bloco Θ tem associado também a sequência de módulos de $\mathcal{Q}$, (Q_0, Q_1) , onde Q_0 é injetivo. Portanto $L = 1$ e $dgl \Lambda = 3$. Isso contradiz a condição (i) do teorema (5.13). Portanto todos os blocos de $\frac{\Lambda}{J_1}$ são hereditários e $\frac{\Lambda}{J_1}$ é hereditária.

($\Leftarrow$) Dada uma álgebra Λ com $\frac{\Lambda}{J_1}$ hereditária, seja M um Λ -módulo indecomponível. Se M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_1}$, pelas observações (5.1) e (5.2), $dp M \leq 2$ e $di M \leq 1$. Se M é um módulo sobre $\frac{\Lambda}{J_2}$, $dp M \leq 1$ e $di M \leq 2$. Portanto Λ é quase-inclinada. ■

Para terminar esta seção apresentamos um exemplo de álgebra quase-inclinada que não é estável.

Exemplo 5.19. Seja $\Lambda = \frac{k\Delta}{\langle R \rangle}$ onde o quiver Δ é

e $R = \{\alpha\beta - \gamma\delta\}$.

Os projetivos e seus radicais são:

Os injetivos e seus quocientes pelos socles são:

$$I_1 \cong P_4 \quad I_2 = \begin{array}{ccc} & k & 1 \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & & k \\ & \swarrow & \searrow \\ & 0 & \end{array} \quad I_3 = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & & k \\ & \swarrow & \searrow \\ & k & 1 \end{array} \quad I_4 \cong S_4$$

$$\frac{I_1}{S_1} = \begin{array}{ccc} & k & 1 \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & & k \\ & \swarrow & \searrow \\ & k & 1 \end{array} \quad \frac{I_2}{S_2} \cong \frac{I_3}{S_3} \cong S_4$$

O quiver de AR Γ_Λ é:

É fácil ver que o único módulo indecomponível com dimensão projetiva maior do que 1 é $I_4 \cong S_4$. Mas $dp\ I_4 = 2$ e $di\ I_4 = 0$. Por outro lado, o único módulo com dimensão injetiva maior do que 1 é $P_1 \cong S_1$. Nesse caso temos $di\ P_1 = 2$ e $dp\ P_1 = 0$. Portanto Λ é quase-inclinada (na realidade, ela é inclusive inclinada).

Claramente Λ não é estável, pois existe um morfismo não nulo $r.P_4 \rightarrow \frac{I_1}{S_1}$ em $\text{mod}_P\ \Lambda$, que se fatora através de P_4 . Outra forma de ver que Λ não é estável é observando que como o radical de P_4 não é simples nem projetivo, então Λ não satisfaz a propriedade (A) do teorema (2.12). Também temos que o quiver Γ_Λ não corresponde a um quiver de AR de uma álgebra estável.

5.3 Álgebras estáveis e álgebras $\mathcal{P}_1$ -hereditárias

Auslander e Smalø provaram em [AS] que toda álgebra de Artin Λ tem subcategorias plenas $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n, \dots, \mathcal{P}_\infty$ de $\text{ind}\ \Lambda$, unicamente determinadas, com as seguintes propriedades:

(i) Para cada n , $\mathcal{P}_n$ é fechado sob isomorfismos, e tem um número finito de módulos não isomorfos se $n < \infty$.

- (ii) $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i = \text{ind } \Lambda$ e $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$ se $i \neq j$.
- (iii) Dado $n < \infty$, $\mathcal{P}_n$ é uma cobertura minimal de $\mathcal{C}_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{P}_i$.

Uma *cobertura* de uma categoria $\mathcal{C} \subset \text{ind } \Lambda$ é uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tal que para cada $X \in \mathcal{C}$, existe um epimorfismo $Y \rightarrow X$ onde Y é uma soma direta de módulos em $\mathcal{D}$. Além disso, $\mathcal{D}$ é uma *cobertura minimal* se nenhuma das suas subcategorias próprias for uma cobertura.

A coleção $\{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{\infty}\}$ é dita de *partição pós-projetiva* de $\text{ind } \Lambda$, e os módulos em $\bigcup_{i < \infty} \mathcal{P}_i$ são chamados de *módulos pós-projetivos*. Claramente, os módulos em $\mathcal{P}_0$ são os módulos projetivos indecomponíveis. A seguinte proposição, provada em [AS, 10.5], fornece uma descrição dos módulos em $\mathcal{P}_1$:

Proposição 5.20. *Seja $C \in \text{ind } \Lambda$ não projetivo. Então são equivalentes:*

- (a) $C \in \mathcal{P}_1$.
- (b) *Existe um morfismo irredutível $P \rightarrow C$ com P projetivo.*

Para generalizar algumas das propriedades dos módulos pós-projetivos sobre álgebras hereditárias à outras álgebras, Angeleri-Hügel introduziu a noção de álgebras de Artin $\mathcal{P}_1$ -hereditárias em [A].

Definição 5.21. *Uma álgebra de Artin Λ é dita $\mathcal{P}_1$ -hereditária se para todo $C \in \mathcal{P}_1$ e para todo $X \in \text{ind } \Lambda$ tais que $\text{Hom}_{\Lambda}(X, C) \neq 0$, então $X \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$.*

A seguinte caracterização das álgebras $\mathcal{P}_1$ -hereditárias está provada em [A, 2.1].

Teorema 5.22. *São equivalentes:*

- (a) Λ é $\mathcal{P}_1$ -hereditária.
- (b) Λ satisfaz as seguintes duas condições:
 1. Se $C \in \mathcal{P}_1$ e X é um Λ -módulo indecomponível tal que $\text{Irr}(X, C) \neq 0$, então $X \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$.
 2. Se $C \in \mathcal{P}_1$, $\gamma : P \rightarrow C$ é um morfismo irredutível com $P \in \mathcal{P}_0$, e X é um submódulo de P tal que $X \not\subset \text{Ker } \gamma$, então $X \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$.

O próximo resultado é conhecido pelos especialistas mas sua demonstração ainda não apareceu publicada.

Proposição 5.23. *Toda álgebra de Artin estável é $\mathcal{P}_1$ -hereditária.*

Prova: Vamos provar que se Λ é uma álgebra estável então satisfaz as condições 1 e 2 do teorema (5.22).

Seja $C \in \mathcal{P}_1$ e X um Λ -módulo indecomponível tais que $\text{Irr}(X, C) \neq 0$. Como C não é projetivo existe a sequência de AR terminando em C

$$0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow M = P \oplus M' \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Como $C \in \mathcal{P}_1$ existem $P \in \mathcal{P}_0$, somando direto de M , e um morfismo irreduzível $\tau C \rightarrow P$. Portanto τC é um somando direto de $r.P$.

Como $\text{Irr}(X, C) \neq 0$, temos que $\text{Irr}(\tau C, X) \neq 0$.

Se $\tau C \in \mathcal{P}_0$ então $X \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$.

Se $\tau C \notin \mathcal{P}_0$ então P não é hereditário. Como Λ é estável P tem que ser um módulo uniserial tal que todos os seus submódulos não simples sejam projetivos indecomponíveis. Portanto, $r.P$ é simples não projetivo ou projetivo indecomponível. Por ser τC um somando direto indecomponível não projetivo de $r.P$, este último não pode ser projetivo. Então temos que $\tau C = r.P$ é simples não projetivo sem torção. Logo, (ver capítulo 1), a sequência de AR começando em τC é

$$0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow P \longrightarrow \frac{P}{r.P} \longrightarrow 0.$$

Isso quer dizer que $X \cong P$, portanto $X \in \mathcal{P}_0$. Com isto provamos que Λ satisfaz a condição 1.

Seja agora $C \in \mathcal{P}_1$, $\gamma : P \rightarrow C$ um morfismo irreduzível com $P \in \mathcal{P}_0$, e X um submódulo de P tal que $X \not\subseteq \text{Ker } \gamma$. Se X não é projetivo, por ser Λ estável temos que $X = \text{Soc } P$ é um módulo simples não projetivo sem torção, e P é uniserial. Como $X \not\subseteq \text{Ker } \gamma$, temos que $\text{Ker } \gamma \subsetneq X$. Mas X é simples, logo $\text{Ker } \gamma = 0$. Então o morfismo irreduzível $\gamma : P \rightarrow C$ é monomorfismo. Da descrição do quiver de AR de Λ feita no capítulo 3 temos que $C \in \mathcal{P}_0$, o que é uma contradição. Portanto $X \in \mathcal{P}_0$

e Λ satisfaz a condição 2 . ■

No próximo exemplo mostramos uma álgebra $\mathcal{P}_1$ -hereditária que não é estável.

Exemplo 5.24. Seja $\Lambda = \frac{k\Delta}{\langle R \rangle}$ onde o quiver Δ é

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xleftarrow{\gamma} 3$$

com $R = \{\alpha\beta, \beta\gamma\}$.

Os projetivos e seus radicais são:

$$P_1 = k^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{(10)} \\ \xleftarrow{(01)^t} \end{array} k \longleftarrow 0 \quad P_2 = k \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{array} k \longleftarrow 0 \quad P_3 = 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} k \xleftarrow{1} k$$

$$r.P_1 \cong P_2 \quad r.P_2 \cong S_1 \quad r.P_3 \cong S_2$$

Os injetivos e os quocientes pelos socles são:

$$I_1 \cong P_1 \quad I_2 = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{0} \end{array} k \xleftarrow{1} k \quad I_3 \cong S_3$$

$$\frac{I_1}{S_1} = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{0} \end{array} k \longleftarrow 0 \quad \frac{I_2}{S_2} \cong S_1 \oplus S_3$$

Então o quiver Γ_Λ é:

onde temos que identificar as duas copias de S_1 .

Claramente $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $\mathcal{P}_1 = \{S_2, \frac{I_1}{S_1}, I_2\}$.

É fácil ver que Λ é uma álgebra $\mathcal{P}_1$ -hereditária:

$$\text{Hom}(X, S_2) \neq 0 \Rightarrow X \cong P_2$$

$$\text{Hom}(X, \frac{I_1}{S_1}) \neq 0 \Rightarrow X \cong P_1, P_2 \text{ ou } S_2$$

$$\text{Hom}(X, I_2) \neq 0 \Rightarrow X \cong P_1, P_2, P_3, S_2 \text{ ou } \frac{I_1}{S_1}$$

portanto nos três casos $X \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$.

Podemos ver de diferentes formas que Λ não é estável:

- 1) existe um morfismo não nulo $S_2 \rightarrow I_2$ em $\text{mod}_P \Lambda$ que se fatora através do projetivo P_3 .
- 2) a álgebra Λ não satisfaz a propriedade (B) do teorema (2.12), pois S_2 é um módulo simples não projetivo sem torção mas a sua envolvente injetiva I_2 não é um módulo projetivo.
- 3) o quiver Γ_Λ não corresponde a um quiver de AR de uma álgebra estável.

Apêndice A

Vamos provar o teorema (3.12). A parte *i*) do teorema é um caso particular do seguinte (a prova está baseada no feito em [M] p. 19-24).

Teorema A.1. *Seja um pullback de álgebras*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{g_1} & \Lambda_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \Lambda_2 & \xrightarrow{f_2} & \overline{\Lambda} \end{array}$$

onde todos os morfismos são epimorfismos. Se P é um Λ -módulo projetivo então existem módulos projetivos P_1 , P_2 e $\overline{P}$ sobre Λ_1 , Λ_2 e $\overline{\Lambda}$ respectivamente e epimorfismos $f_i^* : P_i \rightarrow \overline{P}$, $g_i^* : P \rightarrow P_i$, $i = 1, 2$, tais que

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g_1^*} & P_1 \\ g_2^* \downarrow & & \downarrow f_1^* \\ P_2 & \xrightarrow{f_2^*} & \overline{P} \end{array}$$

é um pullback de Λ -módulos.

Prova: Os morfismos g_i induzem em Λ_i uma estrutura de Λ -módulo à direita tal que se $\lambda_i \in \Lambda_i$ e $\lambda \in \Lambda$ então $\lambda_i \cdot \lambda = \lambda_i \cdot g_i(\lambda)$.

Seja o produto tensorial de Λ_i e P

$$P_i = \Lambda_i \otimes_{\Lambda} P.$$

Claramente P_i tem uma estrutura de Λ_i -módulo:

$$\lambda_i, \mu_i \in \Lambda_i \text{ e } p \in P \Rightarrow \lambda_i.(\mu_i \otimes p) = \lambda_i.\mu_i \otimes p.$$

Vamos ver que P_i é um Λ_i -módulo projetivo. Por ser P projetivo sobre Λ , P é somando direto de um módulo livre sobre Λ , isto é $P \oplus P' = \Lambda^J$ onde J é um conjunto de índices.

É fácil ver que $\Lambda_i \otimes_{\Lambda} \Lambda^J$ é um módulo livre sobre Λ_i :

$$\Lambda_i \otimes_{\Lambda} \Lambda^J \cong (\Lambda_i \otimes_{\Lambda} \Lambda)^J = (\Lambda_i \otimes_{\Lambda} 1_{\Lambda})^J \cong (\Lambda_i)^J.$$

Então temos que P_i é um Λ_i -módulo projetivo, pois é somando direto de $\Lambda_i \otimes_{\Lambda} \Lambda^J$:

$$\Lambda_i \otimes_{\Lambda} \Lambda^J = \Lambda_i \otimes_{\Lambda} (P \oplus P') \cong (\Lambda_i \otimes_{\Lambda} P) \oplus (\Lambda_i \otimes_{\Lambda} P').$$

Da mesma forma obtemos os $\bar{\Lambda}$ -módulos projetivos

$$\bar{P}_i = \bar{\Lambda} \otimes_{\Lambda_i} P_i = \bar{\Lambda} \otimes_{\Lambda_i} (\Lambda_i \otimes_{\Lambda} P), \quad i = 1, 2.$$

Dado $\bar{\lambda} \otimes (\lambda_i \otimes p) \in \bar{\Lambda} \otimes (\Lambda_i \otimes P)$, temos que:

$$\bar{\lambda} \otimes (\lambda_i \otimes p) = \bar{\lambda} \otimes \lambda_i.(1_i \otimes p) = \bar{\lambda}.\lambda_i \otimes (1_i \otimes p) = \bar{\lambda}.f_i(\lambda_i)(\bar{1} \otimes (1_i \otimes p)).$$

onde 1_i é a unidade de Λ_i , $i = 1, 2$ e $\bar{1}$ é a unidade de $\bar{\Lambda}$.

Isto é $\{\bar{1} \otimes (1_i \otimes p) / p \in P\}$ é um conjunto de geradores do $\bar{\Lambda}$ -módulo $\bar{P}_i$. Observe também que $\bar{1} \otimes (1_i \otimes p) = 0$ se e somente se $p = 0$.

Vamos definir um morfismo $h : \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_2$ em $\text{Mod } \bar{\Lambda}$. Basta definir h nos geradores. Seja $h(\bar{1} \otimes (1_1 \otimes p)) = \bar{1} \otimes (1_2 \otimes p)$. Vamos ver que h é um isomorfismo. Seja $x \in \bar{P}_1$, então $x = \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i.(\bar{1} \otimes (1_1 \otimes p))$ onde $\bar{\lambda}_i \in \bar{\Lambda}$ e a soma é finita. Portanto $h(x) = \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i.(\bar{1} \otimes (1_2 \otimes p)) = 0$ se e somente se $\bar{\lambda}_i = 0$ para todo i , ou seja, se e somente se $x = 0$. Isto é, h é monomorfismo. É obvio que h também é epimorfismo. Portanto de agora em diante vamos identificar $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$ via o isomorfismo h e vamos denotar $\bar{P} = \bar{P}_1 \cong \bar{P}_2$.

Então temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g_1^*} & P_1 \\ g_2^* \downarrow & & \downarrow f_1^* \\ P_2 & \xrightarrow{f_2^*} & \bar{P} \end{array} \quad (\text{A.1})$$

onde $g_i^*(p) = 1_i \otimes p$ e $f_i^*(1_i \otimes p) = \bar{1} \odot (1_1 \otimes p)$, é comutativo e todos os morfismos são epimorfismos. Agora só falta provar que o diagrama (A.1) é um pullback de Λ -módulos. Seja o pullback canônico

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h_1} & P_1 \\ h_2 \downarrow & & \downarrow f_1^* \\ P_2 & \xrightarrow{f_2^*} & \bar{P} \end{array}$$

Isto é, $M = \{(p_1, p_2) \in P_1 \oplus P_2 / f_1^*(p_1) = f_2^*(p_2)\}$.

Sabemos que existe um único morfismo $\theta : P \rightarrow M$ tal que $h_i \cdot \theta = g_i^*$. Se $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, onde $\theta_i : P \rightarrow P_i$, temos $h_i \cdot \theta = \theta_i$, isto é, $\theta_i = g_i^*$. Portanto para todo $p \in P$ temos que $\theta(p) = (1_1 \otimes p, 1_2 \otimes p)$.

Vamos ver que θ é um isomorfismo. Temos que

$$\text{Ker } \theta = \{p \in P / (1_1 \otimes p, 1_2 \otimes p) = 0\} = 0.$$

Isto é, θ é monomorfismo. Por outro lado se $(x, y) \in M$, onde $x = \sum_i \lambda_i \cdot (1_1 \otimes p_i)$, então $y = \sum_i \mu_i \cdot (1_2 \otimes p_i)$, $\lambda_i \in \Lambda_1$, $\mu_i \in \Lambda_2$ e ambas somas finitas, temos $f_1^*(x) = f_2^*(y)$. Isto é, $\sum_i f_1(\lambda_i) \cdot (\bar{1} \odot (1_1 \otimes p_i)) = \sum_i f_2(\mu_i) \cdot (\bar{1} \odot (1_1 \otimes p_i))$, e portanto $f_1(\lambda_i) = f_2(\mu_i)$ para todo i .

Mas existe $\eta_i \in \Lambda$ tal que $g_1(\eta_i) = \lambda_i$ e $g_2(\eta_i) = \mu_i$. Portanto $(x, y) = \sum_i \eta_i \cdot (1_1 \otimes p_i, 1_2 \otimes p_i)$. Então $\theta(\sum_i \eta_i p_i) = \sum_i \eta_i \cdot \theta(p_i) = \sum_i \eta_i \cdot (1_1 \otimes p_i, 1_2 \otimes p_i) = (x, y)$. Portanto θ também é um epimorfismo.

Então o diagrama (A.1) é um pullback. ■

A parte *ii*) do teorema ((3.12)) segue da parte *i*) aplicando a dualidade $D : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{op}$.

Apêndice B

Neste apêndice, Λ é uma álgebra indecomponível básica e projetivamente estável. Também vamos supor que Λ tem módulos projetivos não hereditários, mas não vamos considerar a decomposição $\Lambda = P \oplus Q$ utilizada nos capítulos 2, 3 e 4.

Nosso objetivo aqui é provar o seguinte teorema:

Teorema B.1. *Se Λ é uma álgebra estável com módulos projetivos não hereditários e P é um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível, então todo módulo quociente de P de torção é injetivo.*

Definição B.2. *Um módulo projetivo indecomponível hereditário P é hereditário maximal se todo morfismo não nulo $P \rightarrow Q$, onde Q é projetivo hereditário, é um isomorfismo.*

Vamos precisar da seguinte proposição:

Proposição B.3. *Se Λ é uma álgebra estável e $P \xrightarrow{\pi} S$ é uma cobertura projetiva de um módulo S simples não projetivo sem torção, então:*

- i) π se fatora através de um módulo injetivo indecomponível.*
- ii) P não é hereditário $\Rightarrow P$ é injetivo.*
- iii) P é hereditário $\Rightarrow P$ é hereditário maximal.*

Prova: Sejam $S \xrightarrow{i} I(S)$ e $P \xrightarrow{j} I(P)$ as envolventes injetivas de S e P respectivamente.

i) Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{j} & I(P) \\
 & & \downarrow \pi & & \searrow k \\
 & & S & & \\
 & & \downarrow i & & \\
 & & I(S) & &
 \end{array}$$

Isto é, existe um morfismo $I(P) \xrightarrow{k} I(S)$ tal que $i\pi = kj$, onde $i\pi \neq 0$. A idéia é achar uma fatorização de π a partir desta fatorização de $i\pi$. Consideremos a decomposição de $I(P)$ como soma de módulos injetivos indecomponíveis

$$I(P) = I_1 \oplus \dots \oplus I_n.$$

Então

$$j = \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix}$$

onde $j_i : P \rightarrow I_i$ e

$$k = (k_1 \dots k_n)$$

onde $k_i : I_i \rightarrow I(S)$ para $i = 1, \dots, n$. Portanto $kj = \sum_{i=1}^n k_i j_i \neq 0$. Isto é, $k_i j_i \neq 0$ para algum i . Suponhamos $k_1 j_1 \neq 0$. Vamos ver que $\text{Im} k_1 \cong S$. Como $I(S)$ é a envolvente injetiva de um módulo simples não projetivo sem torção e Λ é estável, temos que $I(S)$ é projetivo indecomponível (pela propriedade (B)) e não hereditário. Pela proposição (2.7), $\text{Soc } I(S) \cong S$ é o único submódulo não projetivo de $I(S)$. Suponhamos que $\text{Im} k_1 \not\cong S$. Então $\text{Im} k_1$ é projetivo e como I_1 é indecomponível, temos que $\text{Ker} k_1 = 0$. Isto é, $I_1 \cong \text{Im} k_1$ e $I(S)$ tem um submódulo injetivo. Mas como $I(S)$ é indecomponível tem que ser $I_1 \cong I(S)$. Portanto k_1 é um isomorfismo e $\text{Soc } I_1 \cong S$. Também temos que $\text{Soc } P \cong \text{Soc } I(P) = \text{Soc } I_1 \oplus \dots \cong \text{Soc } I_n$. Isto é, S é isomorfo a um submódulo de $\text{Soc } P$. Isto quer dizer que P não é hereditário e pela proposição (2.7) $\text{Soc } P \cong S$. Portanto $I(P) \cong I(S) \cong I_1$ e $k = k_1$ é um isomorfismo.

Então $\text{Ker}kj = 0$, mas $\text{Ker}i\pi = \text{Ker}\pi \neq 0$, em contradição com o fato de que $i\pi = kj$. Portanto $\text{Im}k_1 \cong S$.

Observe que o epimorfismo $P \xrightarrow{k_1j_1} S$ é uma cobertura projetiva que se fatora através do injetivo indecomponível I_1 . Isto quer dizer que π também se fatora através de um injetivo indecomponível.

ii) Se P não é hereditário, então pela proposição (2.7) $\text{Soc } P$ é simples não projetivo sem torção, e portanto a envolvente injetiva $I(P)$ de P é um projetivo indecomponível (pois Λ satisfaz a propriedade (B)).

Vamos ver que $P \cong I(P)$, para isso provaremos que $I(P)$ também é cobertura projetiva de S . Por i) sabemos que $P \xrightarrow{\pi} S$ se fatora através de um injetivo somando direto de $I(P)$. Como $I(P)$ é indecomponível, π se fatora através de $I(P)$. Isto é, existe um morfismo $I(P) \xrightarrow{h} S$ tal que $\pi = hj$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j} & I(P) \\ \pi \downarrow & \swarrow h & \\ S & & \end{array}$$

Obviamente h é epimorfismo, e por ser $I(P)$ projetivo indecomponível, h é cobertura projetiva de S .

iii) Se P é hereditário e é isomorfo a um submódulo de um módulo projetivo hereditário indecomponível P' , vamos provar que $P \cong P'$. Seja $P \xrightarrow{u} P'$ a inclusão natural. Por i), $\pi = kj$ onde $j : P \rightarrow I$ e $k : I \rightarrow S$ com I injetivo indecomponível. Logo temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{u} & P' \\ & & j \downarrow & \swarrow v & \\ & & I & & \end{array}$$

Então o morfismo $h = kv : P' \rightarrow S$ é tal que $hu = (kv)u = kj = \pi$. Portanto h é um epimorfismo, e por ser P' projetivo indecomponível, h é uma cobertura projetiva de S . Portanto $P \cong P'$. ■

O teorema (B.1) envolve um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível P . Observe que P não pode ser simples pois Λ é indecomponível e tem outros módulos projetivos indecomponíveis (por exemplo os não hereditários). Por ser P injetivo indecomponível, $\text{Soc } P$ é simples. Então temos que P é projetivo indecomponível com $\text{Soc } P$ simples sobre uma álgebra estável, portanto a proposição (2.7) implica que P é uniserial. Vamos denotar a série de composição de P como

$$0 \subsetneq \text{Soc } P = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \dots \subsetneq Q_l = P$$

onde Q_i é projetivo indecomponível para $i = 1, \dots, l$ e $\text{Soc } P$ é projetivo ou não, dependendo de P ser hereditário ou não. Estamos interessados nos módulos quocientes de P . Se Z é um módulo quociente de P então $Z = \frac{P}{Q_i}$ onde $i = 0, \dots, l-1$. Observe que

$$\text{Soc } Z = \text{Soc } \frac{P}{Q_i} = \frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \frac{Q_{i+1}}{r \cdot Q_{i+1}}, \quad i < l.$$

Observação B.4. Para i tal que $0 < i < l$, temos que $\frac{Q_i}{r \cdot Q_i}$ é um módulo de torção sobre Λ .

Como Q_i é projetivo indecomponível não simples para $i > 0$, então $\frac{Q_i}{r \cdot Q_i}$ é simples não projetivo. Se $\frac{Q_i}{r \cdot Q_i}$ fosse sem torção, aplicando a proposição (B.3), teríamos que:

a) se Q_i é não hereditário então é injetivo, o que contradiz o fato de P ser injetivo indecomponível.

b) se Q_i é hereditário então é hereditário maximal, o que também é uma contradição, pois teríamos $Q_i \subsetneq P$ com P hereditário.

A respeito do módulo quociente $\frac{P}{r \cdot P}$ temos duas possibilidades:

1. $\frac{P}{r \cdot P}$ é um Λ -módulo de torção.
2. $\frac{P}{r \cdot P}$ é um Λ -módulo sem torção.

Portanto vamos dividir o teorema (B.1) em dois. No primeiro demostramos o teorema (B.1) para o caso 1. Mas vamos demonstrá-lo sem supor que Λ é indecomponível pois

depois vamos ter que aplicá-lo para uma álgebra nas mesmas condições que Λ excepto pela indecomponibilidade.

Teorema B.5. *Seja Λ uma álgebra estável (não necessariamente indecomponível) e P um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível tal que $\frac{P}{r.P}$ é um módulo de torção. Então:*

i) Se P é hereditário então $\Lambda = \Gamma \times \Theta$ é produto direto de álgebras onde Γ é hereditária indecomponível com o conjunto completo de Γ -módulos projetivos indecomponíveis $\{Q_i, i = 0, \dots, l\}$.

ii) Se P não é hereditário e $t = \text{tr}_{\text{Soc } P} \Lambda$ é a componente homogênea de $\text{Soc } P$ em $\text{Soc } \Lambda$ então $\frac{\Lambda}{t} = \Sigma \times \Phi$ é produto direto de álgebras onde Σ é serial hereditária indecomponível com o conjunto completo de Σ -módulos projetivos indecomponíveis $\{\frac{Q_i}{\text{Soc } P}, i = 1, \dots, l\}$.

iii) Todo módulo quociente de P é injetivo.

Prova: *i)* Como P é hereditário, temos que Q_i é hereditário para todo i . Seja Q um módulo projetivo indecomponível tal que $Q \not\cong Q_i$ para todo i . Da proposição (2.14)(b) temos que $\text{Hom}_\Lambda(Q, Q_i) = 0$ para todo i . Da observação anterior e da hipótese temos que $\frac{Q_i}{r.Q_i}$ é um módulo de torção para $i > 0$. Aplicando a parte (d) da proposição (2.14) temos que todo morfismo não nulo da forma $Q_i \rightarrow Q$ é um monomorfismo. Se existe tal morfismo temos que $\text{Soc } P = \text{Soc } Q_i$ é isomorfo a um submódulo próprio de Q . Como P é a envolvente injetiva de $\text{Soc } P$, o lema (2.8) implica que Q é isomorfo a um submódulo de P , o que é uma contradição. Portanto $\text{Hom}_\Lambda(Q_i, Q) = 0$. Então $\Lambda = \Gamma \times \Theta$ com $\{Q_i, i = 0, \dots, l\}$ como conjunto completo de Γ -módulos projetivos indecomponíveis e Γ é hereditária.

ii) Da observação (3.17), $\{\frac{Q_i}{t.Q_i}, i = 1, \dots, l\}$ é um conjunto de $\frac{\Lambda}{t}$ -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos (não necessariamente completo). Como $\text{Soc } Q_i = \text{Soc } P$, a proposição (3.18)ii) implica que $\frac{Q_i}{t.Q_i}$ é hereditário sobre $\frac{\Lambda}{t}$, para $i > 0$. Pelo lema (3.16) $t.Q_i = \text{tr}_{\text{Soc } P} Q_i = \text{Soc } P$.

Agora vamos provar que o conjunto $\{\frac{Q_i}{\text{Soc } P}, i = 1, \dots, l\}$ determina um bloco (hereditário) da álgebra $\frac{\Lambda}{t}$. Seja Z um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo indecomponível tal que

$Z \not\cong \frac{Q_i}{\text{Soc } P}$ para $i > 0$. A proposição (2.14)(b) implica que $\text{Hom}_{\Lambda}(\frac{Q_i}{\text{Soc } P}, Z) = 0$. Vamos ver agora que $\text{Hom}_{\Lambda}(\frac{Q_i}{\text{Soc } P}, Z) = 0$. Suponhamos que exista um morfismo $\frac{Q_i}{\text{Soc } P} \xrightarrow{f} Z$ não nulo. Nesse caso vamos ver que Z é um Λ -módulo não projetivo. Suponhamos Z projetivo e consideremos a seguinte composição não nula

$$Q_i \xrightarrow{\pi} \frac{Q_i}{\text{Soc } P} \xrightarrow{f} Z$$

onde π é a projeção natural. Temos que $f\pi$ não é monomorfismo, pois π não é. Pela proposição (2.14)(a) Z não é hereditário e $\text{Im } f\pi = \text{Soc } Z$. Isto é, Q_i é cobertura projetiva de $\text{Soc } Z$ em $\text{mod } \Lambda$. Portanto $\frac{Q_i}{r.Q_i} \cong \text{Soc } Z$ é um Λ -módulo sem torção, em contradição com a observação (B.4). Então Z não é projetivo sobre Λ .

Como Z é projetivo sobre $\frac{\Lambda}{t}$, pela observação (3.17) $Z \cong \frac{Q}{t.Q}$ onde Q é um Λ -módulo projetivo indecomponível. Como $Z \not\cong Q$ temos que $t.Q \neq 0$ e portanto, da proposição (3.18) i), ii) e iii), $\text{Soc } Q \cong \text{Soc } P$ (então $t.Q = \text{Soc } Q$). A envolvente injetiva $0 \rightarrow Q \rightarrow P$ em $\text{mod } \Lambda$ induz o morfismo $0 \rightarrow \frac{Q}{\text{Soc } Q} \rightarrow \frac{P}{\text{Soc } P}$, portanto $\frac{Q}{\text{Soc } Q}$ é isomorfo a um submódulo de $\frac{P}{\text{Soc } P}$. Isso contradiz o fato de que $Z \not\cong \frac{Q_i}{\text{Soc } P}$, $i > 0$. Portanto $\text{Hom}_{\Lambda}(\frac{Q_i}{\text{Soc } P}, Z) = 0$.

Como Σ é hereditária e serial à esquerda com série de Kupisch $\{\frac{P}{\text{Soc } P}, \dots, \frac{Q_1}{\text{Soc } P}\}$, temos que Σ é serial.

iii) Se Z é um módulo quociente próprio de P , então $Z = \frac{P}{Q_i}$, $i < l$. Observe que $\frac{P}{\text{Soc } P}$ é um Σ -módulo injetivo. Portanto $\frac{P}{\text{Soc } P}$ também é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Como Σ é hereditário, todo módulo quociente de $\frac{P}{\text{Soc } P}$ vai ser injetivo sobre Σ , portanto também sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Então Z é injetivo sobre $\frac{\Lambda}{t}$.

Já vimos que $\text{Soc } Z = \frac{Q_{i+1}}{r.Q_{i+1}}$, $i < l$. Então $\text{Soc } Z$ é um Λ -módulo simples de torção, pois por hipótese e pela observação (B.4) $\frac{Q_i}{r.Q_i}$ é de torção para $i < l$. Isso implica que $\text{Soc } Z \not\cong \text{Soc } P$. Seja a envolvente injetiva $I(Z)$ de Z em $\text{mod } \Lambda$. Pelo lema (3.16)iii), $I(Z)$ é a envolvente injetiva de Z em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$. Portanto $Z \cong I(Z)$ e Z é injetivo sobre Λ . ■

Antes de demonstrar o teorema (B.1) para o caso 2 vamos provar a seguinte proposição:

Proposição B.6. *Se P é um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível então $\frac{P}{r.P} \not\cong \text{Soc } P$.*

Prova: Vamos ver que se $\frac{P}{r.P} \cong \text{Soc } P$ então Λ não tem módulos projetivos hereditários, contradizendo as suposições feitas sobre Λ .

Se $\frac{P}{r.P} \cong \text{Soc } P$, por ser P indecomponível, temos que $\text{Soc } P$ não pode ser projetivo. Portanto Q_i é projetivo não hereditário para $i > 0$.

Seja Q um Λ -módulo projetivo indecomponível não isomorfo a Q_i , $i > 0$. Pela proposição (2.14)(c) $\text{Hom}_\Lambda(Q, Q_i) = \text{Hom}_\Lambda(Q, \text{Soc } P)$. Pela proposição (2.14)(c') $\text{Hom}_\Lambda(Q, \text{Soc } P) = 0$ pois estamos supondo que P é cobertura projetiva de $\text{Soc } P$, e $Q \not\cong P$.

Agora vamos ver que $\text{Hom}_\Lambda(Q_i, Q) = 0$. Observemos que se $f \in \text{Hom}_\Lambda(Q_i, Q)$ então f não é monomorfismo. Pois se fosse teríamos $\text{Soc } P = \text{Soc } Q_i \subsetneq Q$ com P envolvente injetiva de $\text{Soc } P$. Então o lema (2.8) implica que Q é isomorfo a um submódulo projetivo de P , o que é uma contradição.

Como $\frac{Q_i}{r.Q_i}$ é um módulo de torção para $0 < i < l$, pela proposição (2.14)(d) temos que $\text{Hom}_\Lambda(Q_i, Q) = 0$ para $0 < i < l$.

Se $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(P, Q)$, pela proposição (2.14)(a), temos que $\text{Im } f = \text{Soc } Q$, e portanto P é cobertura projetiva de $\text{Soc } Q$. Como estamos supondo $\frac{P}{r.P} \cong \text{Soc } P$, temos que $\text{Soc } Q \cong \text{Soc } P$. Mas P também é envolvente injetiva de $\text{Soc } P$, portanto P é envolvente injetiva de Q . Isso contradiz o fato já provado de que $\text{Hom}_\Lambda(Q, P) = 0$. Portanto $\text{Hom}_\Lambda(P, Q) = 0$.

Então $\{Q_i, i > 0\}$ é um conjunto completo de Λ -módulos projetivos indecomponíveis e portanto Λ não tem módulos projetivos hereditários. ■

Teorema B.7. *Se P é um Λ -módulo projetivo injetivo indecomponível tal que $\frac{P}{r.P}$ é um módulo sem torção então todo módulo quociente de P de torção é injetivo.*

Prova: Vamos denotar o módulo simples não projetivo sem torção $\frac{P}{r.P}$ por T . Da proposição anterior temos que $\text{Soc } P \not\cong T$. Seja t a componente homogênea de T em $\text{Soc } \Lambda$. Da proposição (3.18)i) e iii) temos que P é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo injetivo indecomponível. Das partes v) e vi) da mesma proposição temos que $\frac{\Lambda}{t}$ é estável e T

é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo injetivo. Como T não é projetivo sobre Λ , também não o é sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Vamos ver que T é de torção sobre $\frac{\Lambda}{t}$. Se $T \subset Q$ onde Q é projetivo indecomponível em $\frac{\Lambda}{t}$, por ser T injetivo teríamos $T \cong Q$. Isto é, T seria projetivo em $\text{mod } \frac{\Lambda}{t}$ e portanto $T \cong P$, o que é uma contradição.

Como $\frac{\Lambda}{t}$ é estável e P é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo projetivo injetivo indecomponível tal que $T = \frac{P}{r.P}$ é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo de torção, podemos aplicar o teorema (B.5) e temos que todo módulo quociente Z de P é um $\frac{\Lambda}{t}$ -módulo injetivo. Temos que $Z = \frac{P}{Q_i}$ onde $i = 0, \dots, l-1$. Se $Z = \frac{P}{Q_{l-1}} = \frac{P}{r.P}$ então é sem torção sobre Λ . Vamos descartar esse caso. Se $Z = \frac{P}{Q_i}$ onde $i < l-1$ então $\text{Soc } Z = \frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \frac{Q_{i+1}}{r.Q_{i+1}}$ onde $i+1 < l$. Portanto, pela observação (B.4), $\text{Soc } Z$ é de torção sobre Λ . Então Z também é de torção sobre Λ e, da mesma forma como foi mostrado na parte *iii*) do teorema (B.5), Z é um Λ -módulo injetivo. ■

Referências Bibliográficas

- [A] L. Angeleri Hügel. $\mathcal{P}_1$ -hereditary artin algebras. *J. Algebra* 176 (1995), 460-479.
- [AF] F. W. Anderson e K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Math., 13, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten e S. O. Smalø. *Representation theory of artin algebras*. Cambridge University Press (1995).
- [As] I. Assem. *Tilting theory - an introduction*. Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol. 26, PWN, Warsaw (1990), 127-180.
- [AS] M. Auslander e S. O. Smalø. *Preprojective modules over artin algebras*. *J. Algebra* 66 (1980), 61-122.
- [ASS] I. Assem, D. Simson e A. Skowronski. *Elements of representation theory of associative algebras*. Em preparação.
- [B] D. J. Benson. *Representations and cohomology I*. Cambridge Univ. Press, 30, Cambridge (1991).
- [CL1] F. U. Coelho e M. Lanzilotta. *Algebras with small homological dimensions*. Preprint (1998).
- [CL2] F. U. Coelho e M. Lanzilotta. *Auslander-Reiten quiver for algebras with small homological dimensions*. Em preparação.

- [CLS] C. Cibils, F. Larrión e L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. México, UNAM (1982).
- [DK] Y. Drozd e V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag (1994).
- [G] P. Gabriel. *Unzerlegbare Darstellungen I*. Manuscripta Math., 6 (1972) 71-103.
- [HRS] D. Happel, I. Reiten e S. Smalø. *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*. Memoirs Amer. Math. Soc., 575, vol. 120 (1996).
- [JK1] S. Jagadeeshan e M. Kleiner. *Stable artin algebras: The transpose and the global dimension*. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, vol. 18 (1996), 343-351.
- [JK2] S. Jagadeeshan e M. Kleiner. *Structure of Projectively Stable Artinian Rings*. J. Algebra 197 (1997), 92-126.
- [JK3] S. Jagadeeshan e M. Kleiner. *Projectively stable artin algebras: Representation theory and quivers with relations*. Por aparecer em Communications in Algebra.
- [M] J. W. Milnor. *Introduction to Algebraic K-Theory*. Annals of Mathematics Studies, vol. 72, Princeton Univ. press, NJ (1971).
- [R] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Academic Press (1979).
- [Ri] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*. Lecture Notes in Math., 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1984).