**Espaços nos quais todo Fechado
é um Conjunto de Pontos Fixos**

Irene Castro Pereira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Geral e Conjuntística**
Orientador: **Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CAPES

-São Paulo, julho de 1998-

**Espaços nos quais todo Fechado
é um Conjunto de Pontos Fixos**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Irene Castro
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, setembro de 1998.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP
- Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa - FFLCH-USP

RESUMO

Um espaço X é dito ter a propriedade da invariância completa (CIP) se todo subconjunto fechado não vazio de X é um conjunto de pontos fixos. Neste trabalho vemos que a CIP não é preservada por auto-produto de variedades não métricas ou espaços zero-dimensionais. Vemos também condições suficientes para um produto infinito de espaços ter CIP. Mostramos que o produto não enumerável do intervalo unitário (o cubo de Tychonoff) não tem CIP e que o cubo de Hilbert e o cubo de Cantor tem a propriedade da invariância completa com respeito a homeomorfismos (CIPH).

ABSTRACT

A space X is said to have the complete invariance property (CIP) if every nonempty closed subset of X is the fixed point set of some self-mapping of X . In this work we see that CIP need not be preserved by self-products of non-metric manifolds or zero-dimensional spaces. We also see sufficient conditions for an infinite product of spaces to have CIP. We show that uncountable powers of the unit interval do not have CIP and that the Hilbert cube and the Cantor cube have the complete invariance property with respect to homeomorphisms (CIPH).

A mis sobrinos.

Agradecimentos:

Aos meus pais e irmãos que sempre me incentivaram a estudar e que ainda estando longe me deram a força necessária para chegar até aqui.

Ao meu orientador, o professor Artur H. Tomita, pelo apoio e paciência constantes.

A professora Elza Gomide, pelo apoio na preparação dos exames de qualificação.

Aos proferssores Avivah Gilboy, Julio Borghi e Artigas Barreiro de Uruguai, porque com eles aprendí a estudar matemática.

As minhas amigas da graduação: Paula, Margui, Patricia, Ximena, Andrea.

A Marcelo e Jorge que me receberam de braços abertos em São Paulo. A Cecilia, Jorge, Fernando, Daniela, Irene, Nelson, Marquitos que também formaram parte da minha família paulista.

Aos meus amigos da pos-graduação: Barbara, Raul, Daniel, Samuel, Roberto, Sidney, Fernando, Marcio, Claus, Liane, Fernando, Regina.

Aos meus amigos de sempre: “la barra de la escuela 180 y del liceo 20” e Laura Castro, claro.

Ao Ze, amigo de todas as horas, pela paciência e a força sem as quais todo teria sido mais difícil.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	6
1.1 Conceitos básicos	6
1.2 Limite Inverso	14
2 Conjuntos de pontos fixos em espaços métricos e não métricos	17
2.1 Produto de espaços metrizáveis	18
2.2 Exemplos em espaços não métricos	20
2.3 Condições suficientes para espaços produto	29
2.4 Resultados independentes	43
3 A CIP em produtos não enumeráveis de espaços lineares	46
3.1 Algumas definições	46
3.2 Lemas Geométricos	48
3.3 Construção de um conjunto splitting	54

4	Conjuntos de pontos fixos de homeomorfismos : dois exemplos	60
4.1	CIPH no cubo de Hilbert	60
4.2	CIPH no cubo de Cantor	65
	Apêndice	79
	Referências Bibliográficas	85

INTRODUÇÃO

Um subconjunto K de um espaço X é chamado *conjunto de pontos fixos de X* se existe uma função contínua $f : X \rightarrow X$ tal que $f(x) = x$ se e somente se $x \in K$.

Em 1967 H. Robbins [Rob67] trabalhou com conjuntos de pontos fixos de funções contínuas e de homeomorfismos na bola fechada B^n de dimensão n . Embora não foi possível chegar a uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto A de B^n seja conjunto de pontos fixos de um homeomorfismo, Robbins mostrou que o problema tem uma solução simples para o caso das funções contínuas: a CIP (“complete invariance property” ou “propriedade da invariância completa”). O nome de CIP foi dado por L.E. Ward em 1973 [War73] à seguinte propriedade:

Um espaço X tem a CIP se todo subconjunto fechado não vazio de X é um conjunto de pontos fixos de X .

A pesquisa a respeito da CIP centrou-se em dois tópicos:

Quais espaços tem a CIP? ;

Como se comporta a CIP com relação as construções geométricas? (por exemplo: produtos cartesianos).

Em [War73], Ward mostrou que todo subconjunto convexo X de um espaço linear normado tem CIP. Em 1979 J.R. Martin e S.B. Nadler Jr. provaram que todo grupo topológico metrizável localmente compacto tem CIP. Temos também um resultado de n -variedades publicado por H. Shirmer em 1981 [Sch81] que diz que toda n -variedade topológica compacta, com ou sem bordo tem CIP. Estes são, então, alguns espaços com CIP.

Quanto ao comportamento da propriedade com relação ao produto de espaços, em [Sch81], Shirmer mostra a existência de um espaço X com CIP tal que o produto $X \times I$ não tem CIP. ($I = [0, 1]$).

Para o problema de determinar em que condições um subconjunto A da bola B^n é o conjunto de pontos fixos de um homeomorfismo, em 1968 [Sch69] Shirmer deu

algumas respostas:

(i) Se n é par, todo subconjunto fechado não vazio A de B^n é o conjunto de pontos fixos de um homeomorfismo $f : B^n \rightarrow B^n$ i.e. B^n tem a CIPH (*complete invariance property with respect to homeomorphisms*).

(ii) Se n é ímpar a solução depende de $A \cap \partial B^n = \emptyset$ ou $A \cap \partial B^n \neq \emptyset$.

Sabemos que se n é ímpar, então B^n não tem a CIPH. Robbins [Rob67] mostrou a existência de um subconjunto fechado de B^{2n+1} que não é conjunto de pontos fixos de nenhum homeomorfismo $f : B^{2n+1} \rightarrow B^{2n+1}$.

Este trabalho começou com o estudo em profundidade do artigo [Kos92] que demonstra que o cubo de Tychonoff não tem CIP. Foi esse nosso primeiro contato com esta propriedade. Na introdução de [Kos92] se fez referência ‘a CIP no cubo de Hilbert. Surge então uma pergunta: o que faz que a CIP funcione no cubo de Hilbert e não no cubo de Tychonoff?. Obviamente o fato do primeiro espaço ser métrico e o segundo não, deve ter alguma coisa a ver. Em busca de respostas recorreremos ao artigo [MW84] onde a existência da CIP em espaços métricos, espaços não métricos e espaços produto é analisada. A seguir consideramos o cubo de Hilbert e o cubo de Cantor, ambos espaços com CIP, um métrico e outro não métrico. Será que a propriedade se conserva para homeomorfismos?. Achamos a resposta relativa ao cubo de Hilbert no artigo [Mar88], e a resposta a respeito do cubo de Cantor no artigo [CM97]

No primeiro capítulo fazemos um resumo dos conceitos e propriedades conjuntísticas e topológicas que serão úteis nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo começamos a abordar a propriedade da invariância completa em espaços produto. Vemos por exemplo que a reta longa (L) e a reta de Sorgenfrey (K) tem CIP, porém $L \times L$ e $K \times K$ não tem, logo a CIP não é preservada por auto-produtos. Agora, em que condições um espaço produto tem CIP?. Temos dois tipos de espaços produto a ser considerados. Por um lado, apresentamos

condições suficientes para o produto enumerável de espaços métricos ter CIP, e por outro condições suficientes para um produto infinito de espaços ter CIP.

Vemos também que $\beta\mathbb{N}$ (compactificado de Stone Čech do conjunto dos inteiros $\mathbb{N}$) não tem CIP, enquanto que $(\beta\mathbb{N})^{\mathfrak{c}}$ tem, onde $\mathfrak{c}$ denota o cardinal do contínuo.

Por último, vemos que se K é a reta de Sorgenfrey, K^λ tem CIP para todo cardinal $\lambda \geq \mathfrak{c}$ e que o fato de K^{ω_1} ter ou não ter CIP é independente de (ZFC).

O terceiro capítulo é dedicado a mostrar que se κ é um cardinal infinito não enumerável e para cada $\alpha < \kappa$, X_α é um subespaço compacto e convexo de algum espaço linear normado, então $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ não tem CIP. Em particular, o cubo de Tychonoff não tem CIP.

No quarto capítulo nos concentramos, em dois teoremas:

- o cubo de Hilbert tem CIPH;
- o cubo de Cantor tem CIPH.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos básicos

Apresentamos neste capítulo algumas definições e propriedades básicas de *Teoria dos conjuntos* e de *Topologia Geral*, que serão usados com familiaridade nos capítulos seguintes.

Teoria dos conjuntos:

A referência utilizada para os conceitos conjuntistas é o livro do Kunen [Kun80]. Trabalharemos no contexto da axiomática de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC).

Denotaremos a diferença entre dois conjuntos A e B por $A - B$.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, usaremos as seguintes notações: $\text{dom}(f)$ para o domínio da função, e $\text{im}(f)$ para a imagem. Se $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ então $f(A)$ indica a imagem de A por f , e $f^{-1}(B)$ a pre-imagem de B por f . A restrição da função f ao conjunto A será denotada por $f|_A$, ou seja que $f|_A : A \rightarrow Y$ e $f|_A(x) = f(x) \forall x \in A$.

Um conjunto A é dito *transitivo* se cada elemento de A é também um subconjunto de A . Um conjunto A é um *ordinal* se é transitivo e bem ordenado por ϵ . Observamos

que os elementos de um ordinal são também ordinais. Usaremos as letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ para designar ordinais. Se α e β são ordinais e $\alpha \in \beta$ dizemos que $\alpha < \beta$ e estas duas expressões são equivalentes.

Se X é um conjunto de ordinais, então $\sup(X) = \cup X$ e se $X \neq \emptyset$, $\min(X) = \cap X$.

Seja α um ordinal. Se define $S(\alpha)$ ou $\alpha + 1$ como o ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ chamado ordinal sucessor de α . Um ordinal α é dito *ordinal sucessor* se existe um ordinal β tal que $\alpha = S(\beta)$; e α é dito *ordinal limite* se $\alpha \neq 0$ e α não é sucessor.

Dois conjuntos A e B são equipotentes se existe uma função $f : A \rightarrow B$ bijetora. Se A é um conjunto bem ordenado, se define a *cardinalidade de A* ($|A|$) como o menor ordinal α equipotente com A . Sob o Axioma da Escolha, todo conjunto é bem ordenado e portanto $|A|$ é definido para todo conjunto A . A cardinalidade do conjunto dos números naturais é ω , o menor ordinal limite. Um *cardinal* é um ordinal α tal que $\alpha = |\alpha|$, i.e. α não é equipotente a nenhum ordinal menor que o próprio α . Usaremos as letras gregas λ, κ para designar cardinais.

Se λ é um cardinal, λ^+ é o menor cardinal maior que λ . Dizemos que κ é um *cardinal sucessor* se $\kappa = \lambda^+$ para algum cardinal λ ; κ é um cardinal limite se $\kappa > \omega$ e não é um cardinal sucessor. Define-se

$$(i) \omega_0 = \omega$$

$$(ii) \omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$$

$$(iii) \text{ para } \gamma \text{ limite, } \omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

E temos as seguintes propriedades (cap1, 10.19 [Kun80]):

- (i) Cada ω_α é um cardinal,
- (ii) Cada cardinal infinito é igual a ω_α , para algum ordinal α ,
- (iii) Se $\alpha < \beta$, então $\omega_\alpha < \omega_\beta$,
- (iv) ω_α é cardinal limite (sucessor) sse α é ordinal limite (sucessor).

Se A é um conjunto e λ um cardinal, se definem os seguintes conjuntos:

$$[A]^\lambda = \{B \subseteq A : |B| = \lambda\} \quad \text{e} \quad [A]^{<\lambda} = \{B \subseteq A : |B| < \lambda\}$$

A Hipòtese do Contínuo (CH) é a asserção $2^\omega = \omega_1$. Usaremos também a notação c para 2^ω .

Sejam α, β ordinais. Uma função $f : \alpha \rightarrow \beta$ é cofinal em β se $\text{im}(f)$ é não limitada em β i.e. se $\sup(\text{im}(f)) = \beta$. A *cofinalidade* de β ($\text{cf}(\beta)$) é o menor ordinal α tal que existe uma função cofinal $f : \alpha \rightarrow \beta$. Então $\text{cf}(\beta) \leq \beta$ e se β é sucessor $\text{cf}(\beta) = 1$. Um ordinal β é dito *regular* se é ordinal limite e $\text{cf}(\beta) = \beta$. Valem os seguintes fatos respeito da cofinalidade:

- (i) se α é regular então α é um cardinal,
- (ii) κ^+ é regular para todo cardinal infinito κ ,
- (iii) se α é um ordinal limite, então $\text{cf}(\omega_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$.

Se μ é um ordinal limite, um conjunto $C \subset \mu$ é *fechado* em μ sse para todo ordinal limite $\delta < \mu$, se $C \cap \delta$ é não limitado em δ então $\delta \in C$. C é c.u.b em μ sse C é fechado e não limitado em μ (sse C é fechado e $\sup(C) = \mu$). Tem-se o seguinte resultado respeito aos conjuntos c.u.b:

Se $\lambda = \text{cf}(\mu) > \omega$, então a intersecção de qualquer família de menos do que λ c.u.b's em μ é também c.u.b em μ .

Se $\text{cf}(\mu) > \omega$, um conjunto $S \subset \mu$ é *estacionário* em μ se $S \cap C \neq \emptyset$ para cada conjunto C c.u.b em μ .

Pressing-down lemma (cap2, 6.15 [Kun80]): *Sejam $\kappa > \omega$ um cardinal regular. $S \subseteq \kappa$ um conjunto estacionário e $f : S \rightarrow \kappa$ uma função tal que $f(\gamma) < \gamma \forall \gamma \in S$; então existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\alpha\})$ é estacionário.*

$MA(\kappa)$ é a asserção:

Se $(\mathbb{P}, \leq)$ é uma ordem parcial não vazia, c.c.c, e $\mathcal{D}$ é uma família de $\leq \kappa$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, então existe um filtro G em $\mathbb{P}$ tal que $\forall D \in \mathcal{D} (G \cap D \neq \emptyset)$.

O Axioma de Martin (MA) é a asserção : $\forall \kappa < 2^\omega (MA(\kappa))$.

A respeito do Axioma de Martin, o seguinte resultado será muito útil:

$MA(\kappa) \Rightarrow 2^\kappa = 2^\omega$.

Topologia Geral:

Foram utilizados como referências básicas para os conceitos topológico o livro de Engelking [Eng89] e as Notas de aula [TJ97].

Um espaço topológico é um par $\langle X, \tau \rangle$, onde X é o conjunto-suporte e τ a topologia definida no conjunto X . Quando no houver dúvidas respeito a topologia nos referiremos ao espaço $\langle X, \tau \rangle$ por *espaço topológico* X ou *espaço* X .

Assumiremos conhecidos os conceitos básicos da Topologia Geral, como por exemplo: conjunto aberto, conjunto fechado, vizinhanças de um ponto, base para o espaço, base para um ponto, fecho de um conjunto, axiomas de enumerabilidade e separação (espaços T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$). Assumiremos que os espaços T_i são T_1 para todo $i \geq 1$.

Se A é um subconjunto do espaço X , denotamos por $Cl_X(A)$ ou $\overline{A}$ o fecho de A em X .

Usaremos também os termos *Hausdorff* para T_2 , *regular* para T_3 , *Tychonoff* e *completamente regular* para $T_{3\frac{1}{2}}$, *normal* para T_4 .

Um subconjunto fechado de um espaço X é dito um G_δ se é a interseção de uma família enumerável de abertos de X . Um subconjunto aberto de um espaço X é dito um F_σ se é a união de uma família enumerável de fechados de X .

Vale a seguinte propriedade respeito a espaços normais:

Um subconjunto A de um espaço normal X é um fechado G_δ (aberto F_σ) se e somente se existe uma função contínua $f : X \rightarrow I$ tal que $A = f^{-1}(0)$ ($A = f^{-1}(]0, 1])$), onde I é o intervalo real $[0, 1]$.

Um subconjunto A de um espaço X é dito *zero-set* (*cozero-set*) se $A = f^{-1}(0)$ ($A = f^{-1}(]0, 1])$) para alguma função contínua $f : X \rightarrow I$.

Pela propriedade anterior temos que num espaço normal, zero-sets (cozero-sets) coincidem com os G_δ (F_σ).

Um espaço X , T_1 , é completamente regular se e somente se a família de todos os

cozero-sets do espaço formam uma base para X . Um espaço topológico X é *perfeitamente normal* se X é um espaço normal e todo subconjunto fechado de X é um G_δ (ou se todo aberto é um F_σ). Temos o seguinte teorema respeito de espaços perfeitamente normais:

Teorema de Vedenisoff:

Para todo espaço T_1 as seguintes condições são equivalentes:

- (i) O espaço X é perfeitamente normal,
- (ii) subconjuntos fechados de X são zero-sets,
- (iii) subconjuntos abertos de X são cozero-sets,
- (iv) para cada par de subconjuntos fechados disjuntos $A, B \subset X$ existe uma função contínua $f : X \rightarrow I$ tal que $f^{-1}(0) = A$ e $f^{-1}(1) = B$.

Seja X um conjunto linearmente ordenado por $<$, contendo no mínimo dois pontos. Para $a, b \in X$ satisfazendo $a < b$ sejam

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in X : a < x < b\} \\]\leftarrow, a[&= \{x \in X : x < a\} \\]a, \rightarrow[&= \{x \in X : a < x\} \end{aligned}$$

Os conjuntos acima definidos são chamados intervalos em X . A família de todos os intervalos em X são uma base de abertos para uma topologia. Esta topologia se denomina *topologia da ordem* em X . Alguns exemplos de topologia da ordem são:

Reta longa (Long line) : Seja W_0 o conjunto de todos os ordinais enumeráveis. No conjunto $V_0 = W_0 \times [0, 1[$ consideramos a ordem linear $<$ definida por:

$$(\alpha_1, t_1) < (\alpha_2, t_2) \text{ se } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ou } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } t_1 < t_2$$

O conjunto V_0 com a topologia induzida por $<$ é chamado de *reta longa* (**L**).

Segmento longo (Long segment): Seja $V = V_0 \cup \{\omega_1\}$ com $x < \omega_1 \forall x \in V_0$. O conjunto V com a topologia induzida pela ordem linear $<$ é chamado de *long segment* (**L***).

Para cada $x_0 \in V_0$, o subespaço $M = \{x \in V_0 : x \leq x_0\}$ de V_0 é homeomorfo ao

intervalo $[0, 1]$. (ver exemplo 3.12.19 [Eng89]).

Se f é uma função contínua, definida de um espaço X num espaço de Hausdorff Y , então f está determinada pelos valores num subconjunto denso de X .

Esta propriedade é consequência da seguinte proposição:

Sejam D um subespaço denso de X e f uma função contínua de D num espaço de Hausdorff Y . Então se f pode ser estendida para X , a extensão é única.

Se $\{X_s : s \in S\}$ é uma família de conjuntos, então o produto cartesiano desta família será o conjunto de todas as funções $f : S \rightarrow \bigcup_{s \in S} X_s$ tal que para cada $s \in S$ temos $f(s) \in X_s$.

Seja $\mathcal{F} = \{X_s : s \in S\}$ uma família de espaços topológicos. A topologia gerada pela base

$$\begin{aligned} & \left\{ \pi_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \dots \cap \pi_{s_k}^{-1}(U_{s_k}) : s_1 \dots s_k \in S \text{ e } U_{s_j} \text{ é aberto de } X_{s_j} \right\} = \\ & = \left\{ \prod_{s \in S} U_s : U_s \text{ é aberto de } X_s \text{ e } \{s \in S : U_s \neq X_s\} \text{ é finito} \right\} \end{aligned}$$

é o produto de Tychonoff da família $\mathcal{F}$ e denotado por $\prod_{s \in S} X_s$.

Seja X um espaço topológico e $\{Y_s : s \in S\}$ uma família de espaços topológicos. Para cada $s \in S$ seja $f_s : X \rightarrow Y_s$ uma função contínua. Definimos a função contínua $\Delta_{s \in S} f_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$ por $\Delta_{s \in S} f_s(x) = (f_s(x))_{s \in S} \forall x \in X$. Chamamos esta função de *função diagonal*.

Um espaço topológico X é chamado *zero-dimensional* se X é um espaço T_1 não vazio e possui uma base de conjuntos abertos-e-fechados (clopens). Todo espaço zero-dimensional é completamente regular.

Um exemplo de espaço zero-dimensional é a Reta de Sorgenfrey que denotaremos por K . Este espaço tem como conjunto suporte os números reais. Um subconjunto A de K é um aberto na topologia da Reta de Sorgenfrey sse para cada ponto $x \in A$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon[$ está contido em A .

A família $\mathcal{F} = \{[x, x + \varepsilon[: x \in K \text{ e } \varepsilon > 0\}$ formam uma base de clopens para K .

Um espaço X é dito *conexo* se não existem subconjuntos abertos não vazios U e

V de X tais que $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$. Os seguintes teoremas serão muito úteis neste trabalho:

(1) *Seja f uma função contínua de um espaço X em um espaço Y . Se A é um subconjunto conexo de X , então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y .*

(2) *Se um subespaço C de um espaço X é conexo, então para cada par X_1, X_2 de subconjuntos de X tais que $X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset$, $\overline{X_1} \cap X_2 = \emptyset$ e $C \subset X_1 \cup X_2$, temos que $C \subset X_1$ ou $C \subset X_2$.*

A *componente conexa* de um ponto x num espaço X é a união de todos os subespaços conexos de X que contém o ponto x . As componentes conexas de dois pontos diferentes de X coincidem ou são disjuntas.

A *quase-componente* de um ponto x num espaço X , é a interseção de todos os subconjuntos abertos-e-fechados de X que contém o ponto x . As quase-componentes de dois pontos distintos de X coincidem ou são disjuntas. Um espaço X é dito *totalmente desconexo* se a quase-componente de cada ponto $x \in X$ é o conjunto unitário $\{x\}$. Todo espaço zero-dimensional é totalmente desconexo.

Seja X um espaço topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$. O ponto x é chamado um *ponto de acumulação completo* de A se para toda vizinhança aberta U de x vale que $|U \cap A| = |A|$.

Para um espaço X são equivalentes:

- (i) X é compacto,
- (ii) toda família de subconjuntos fechados com a propriedade da interseção finita em X tem interseção não vazia,
- (iii) todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação completo.

Um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ é *metrizável* se existe uma métrica ρ definida em X tal que a topologia induzida por ρ em X coincide com τ . ρ é chamada métrica no espaço X .

Duas métricas ρ_1, ρ_2 definidas num conjunto X são equivalentes se induzem a mesma

topologia em X . Se (X, ρ) é um espaço métrico, então existe uma métrica ρ_1 em X que é equivalente com ρ e é limitada por 1.

As seguintes propriedades referentes a espaço métricos serão de grande utilidade:

Um espaço compacto X é metrizável se e somente se a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ é um G_δ no produto cartesiano $X \times X$. (ver exercício 4.2.B do Engelking)

O produto cartesiano $M \times Y$ de um espaço métrico M e um espaço perfeitamente normal Y , é perfeitamente normal. (ver exercício 4.5.16 do Engelking)

Um espaço topológico X é chamado *homogêneo* se para todo par de pontos $x, y \in X$, existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ com $h(x) = y$.

Um exemplo de espaço homogêneo é o Cubo de Hilbert que é o produto cartesiano de ω cópias do intervalo real $[-1, 1]$.

Usaremos as seguintes funções cardinais:

$$\begin{aligned} \text{peso } w(X) &= \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base para } X\} + \omega \\ \text{densidade } d(X) &= \min\{|S| : S \subseteq X, \overline{S} = X\} + \omega \end{aligned}$$

Teorema (Hewitt, Marzewski, Pondiczery) ([Hod84])

Se $X = \prod_{t \in T} X_t$, onde $|T| \leq 2^\kappa$ e $d(X_t) \leq \kappa$ para todo $t \in T$, então $d(X) \leq \kappa$.

$\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais com a topologia discreta. $\beta\mathbb{N}$ é o compactificado de Stone-Čech do espaço $\mathbb{N}$.

Seja S o conjunto de todos os ultrafiltros em $\mathbb{N}$. Para cada conjunto $E \subseteq \mathbb{N}$, seja $V(E)$ o conjunto de todos os ultrafiltros em $\mathbb{N}$ aos quais E pertence. Consideramos a topologia em S gerada pela base $\{V(E) : E \subseteq \mathbb{N}\}$. $\beta\mathbb{N}$ é homeomorfo ao espaço S . (ver [Rud56])

As seguintes são algumas propriedades do espaço $\beta\mathbb{N}$ as quais faremos referência no trabalho:

(i) $V(\mathbb{N} - E) = \beta\mathbb{N} - V(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{N}$, portanto $\{V(E) : E \subseteq \mathbb{N}\}$ é uma base de clopen e $\beta\mathbb{N}$ é um espaço zero-dimensional. ([Rud56])

- (ii) Todo subconjunto fechado infinito de $\beta\mathbb{N}$ contém um subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. ([Eng89])
- (iii) $d(\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) = \mathfrak{c}$. ([Hod84])

Por $\mathbb{R}$ denotamos o conjunto dos números reais e por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.2 Limite Inverso

Em mais de uma demonstração vamos usar sistemas inversos e limites inversos para construir conjuntos em espaços produto ou funções entre espaços produto. Fazemos nesta seção um pequeno resumo das propriedades de limite inverso que serão úteis nos capítulos seguintes.

Seja X um conjunto e $\leq$ uma relação em X . Dizemos que X é dirigido por $\leq$ se possui as seguintes propriedades:

- (1) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$,
- (2) para cada $x \in X$, $x \leq x$,
- (3) para todo $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Seja Σ um conjunto dirigido pela relação $\leq$. Suponhamos que a cada $\sigma \in \Sigma$ corresponde um espaço topológico X_σ , e que para cada par $\sigma, \rho \in \Sigma$ satisfazendo $\rho \leq \sigma$ está definida uma função contínua $\pi_\rho^\sigma : X_\sigma \rightarrow X_\rho$. Suponhamos também que $\pi_\tau^\rho \pi_\rho^\sigma = \pi_\tau^\sigma \forall \sigma, \rho, \tau \in \Sigma$ satisfazendo $\tau \leq \rho \leq \sigma$, e que $\pi_\sigma^\sigma = id_{X_\sigma} \forall \sigma \in \Sigma$. Nestas condições dizemos que a família $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ é um *sistema inverso* dos espaços X_σ .

Seja $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ um sistema inverso. Um elemento $\{x_\sigma\}$ do produto cartesiano $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ é chamado *thread* de S se $\pi_\rho^\sigma(x_\sigma) = x_\rho \forall \sigma, \rho \in \Sigma$ satisfazendo $\rho \leq \sigma$. O subespaço formado por todos os *threads* de S é chamado *limite inverso* de S e é denotado por $\varprojlim S$ ou $\varprojlim \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$.

Neste trabalho o conjunto dirigido Σ va a ser em todos os casos um ordinal limite. Temos então que se μ é nosso conjunto dirigido e $\alpha \leq \beta \in \mu$, $\alpha \subset \beta$, logo

$X_\beta = \prod_{\alpha \in \beta} X_\alpha$ para cada $\beta \in \mu$. Temos também que para cada par $\alpha, \beta \in \mu$ satisfazendo $\alpha \leq \beta$, as funções $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ são a restrição dos elemetos de X_β ao ordinal α .

Seja $S = \{X_\beta, \pi_\alpha^\beta, \mu\}$ um sistema inverso e seja $X = \varprojlim S$. Para cada $\beta < \mu$ a função contínua $\pi_\beta : X \longrightarrow X_\beta$ é a projeção $\prod_{\alpha \in \mu} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$. Se $\alpha, \beta \in \mu$ com $\alpha \leq \beta$, as projeções π_α e π_β satisfazem a igualdade $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$.

Proposição *Seja $S = \{X_\beta, \pi_\alpha^\beta, \mu\}$ um sistema inverso e $X = \varprojlim S$. Para cada subconjunto A de X a família $S_A = \{\overline{A_\beta}, \hat{\pi}_\alpha^\beta, \mu\}$ onde $A_\beta = \pi_\beta(A)$ e $\hat{\pi}_\alpha^\beta(x) = \pi_\alpha^\beta(x)$ para $x \in \overline{A_\beta}$, é um sistema inverso e $\varprojlim S_A = \overline{A} \subset X$.*

Corolário *Todo subespaço fechado A do limite inverso de $S = \{X_\beta, \pi_\alpha^\beta, \mu\}$ é o limite inverso do sistema inverso $S_A = \{\overline{A_\beta}, \hat{\pi}_\alpha^\beta, \mu\}$ de subespaços fechados $\overline{A_\beta}$ de X_β .*

Sejam dois sistemas inversos $S = \{X_\beta, \pi_\alpha^\beta, \mu\}$ e $S' = \{Y_\beta, \hat{\pi}_\alpha^\beta, \mu\}$. Uma aplicação de S em S' é uma família $\{f_\beta\}$ de funções contínuas $f_\beta : X_\beta \longrightarrow Y_\beta$ definida para cada $\beta \in \mu$ tais que :

$$\hat{\pi}_\alpha^\beta f_\beta = f_\alpha \pi_\alpha^\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mu \text{ com } \alpha \leq \beta.$$

ou seja que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & Y_\beta \\ \pi_\alpha^\beta \downarrow & & \downarrow \hat{\pi}_\alpha^\beta \\ X_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y_\alpha \end{array}$$

Toda aplicação de um sistema inverso S num sistema inverso S' induz uma função $f : \varprojlim S \longrightarrow \varprojlim S'$. Esta função f se define da seguinte forma: seja $X = \varprojlim S$ e seja $x = \{x_\beta\}_{\beta \in \mu}$ um elemento de X . Então $f(x) = y$ onde $y = \{y_\beta\}_{\beta \in \mu}$ e $y_\beta = f_\beta(x_\beta)$ para cada $\beta \in \mu$. A função f assim definida é contínua e é chamada *função limite* de

$\{f_\beta\}$ denotada por $\varprojlim f_\beta$.

Proposição *Seja $\{f_\beta\}_{\beta \in \mu}$ uma função do sistema inverso $S = \{X_\beta, \pi_\alpha^\beta, \mu\}$ no sistema inverso $S' = \{Y_\beta, \hat{\pi}_\alpha^\beta, \mu\}$. Se todas as funções $f_\beta : X_\beta \longrightarrow Y_\beta$ são homeomorfismos. então a função limite $f = \varprojlim f_\beta$ é também um homeomorfismo.*

Capítulo 2

Conjuntos de pontos fixos em espaços métricos e não métricos

Neste capítulo são dadas condições que assegurem que certos espaços e grupos topológicos tenham a CIP, e também são dados exemplos de espaços produto e grupos que não tem CIP.

Em particular se mostrará que a CIP não é preservada por auto-produtos. Por exemplo, veremos que a long-line L tem CIP enquanto que $L \times L$ não.

Também vamos ver que o produto K^λ de λ cópias da reta de Sorgenfrey K , tem CIP se $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2^{\omega_0}$, porém não tem se $1 < \lambda \leq \omega_0$.

No caso de $\beta\mathbb{N}$, se mostrará que $(\beta\mathbb{N})^{\mathfrak{c}}$ tem CIP mas $\beta\mathbb{N}$ não, onde $\mathfrak{c}$ indica a cardinalidade do contínuo.

Por último, veremos exemplos de espaços topológicos nos quais a existência da CIP não pode ser provada com os axiomas usuais da teoria de conjuntos (ZFC), mas mostramos que axiomas adicionais podem ser escolhidos de forma que impliquem a existência da CIP nesses espaços.

2.1 Produto de espaços metrizáveis

Definição 2.1 *Seja X um espaço topológico. Chamamos deformação a uma função de homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$.*

Definição 2.2 *Um espaço X tem a propriedade W se para cada ponto $p \in X$ existe uma deformação $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que $H(x, t) \neq x$ se $x \neq p$ e $t > 0$.*

Se X satisfaz a condição $H(x, t) \neq x$ sempre que $t > 0$, dizemos que X tem a propriedade $W(\text{forte})$

Observação 2.3 *Se X é um espaço topológico com a propriedade $W(\text{forte})$ e se Y é um espaço qualquer, então $X \times Y$ tem a propriedade $W(\text{forte})$.*

prova: Seja $H : X \times I \longrightarrow X$ uma deformação tal que $H(x, t) \neq x \quad \forall t > 0$.

Definimos $H' : (X \times Y) \times I \longrightarrow X \times Y$ como segue:

$$H'((x, y), t) = (H(x, t), y) \quad \forall t > 0$$

De igual forma pode-se provar que se $\mathcal{F} = \{X_s : s \in S\}$ é uma família de espaços topológico e se para algum $s_0 \in S$, X_{s_0} tem a propriedade $W(\text{forte})$, então o espaço produto $\prod \{X_s : s \in S\}$ tem a propriedade $W(\text{forte})$.

Observação 2.4 *Todo espaço convexo tem a propriedade W .*

prova: Seja X um espaço convexo, e seja $p \in X$. Definimos $H : X \times I \longrightarrow X$ por:

$$H(x, t) = tp + (1 - t)x$$

Então $H(x, t) \neq x$ se $x \neq p$ e $t > 0$.

Observação 2.5 *A propriedade W é preservada por produtos arbitrários.*

prova: Seja $\mathcal{F} = \{X_s : s \in S\}$ uma família de espaços com a propriedade W e seja $p \in \prod_{s \in S} X_s$. Para cada $s \in S$ existe uma deformação $H_s : X_s \times I \longrightarrow X_s$ tal que $H_s(x_s, t) \neq x_s$ se $x_s \neq p_s$ e $t > 0$.

Definimos a função $H : \prod_{s \in S} X_s \times I \longrightarrow \prod_{s \in S} X_s$ da seguinte forma:

$$(H(x, t))_s = H_s(x_s, t) \quad \forall s \in S$$

Então $H(x, t) \neq x$ se $x \neq p$ e $t > 0$.

Lema 2.6 (de Ward) *Todo espaço X perfeitamente normal com a propriedade W tem CIP.*

Demonstração:

Seja K um subconjunto fechado não vazio de X , e seja $p \in K$. Por hipótese existe uma deformação $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que $H(x, t) \neq x$ se $x \neq p$ e $t > 0$.

Como X é perfeitamente normal, existe uma função contínua $g : X \longrightarrow I$ tal que $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$.

Definimos uma função $f : X \longrightarrow X$ por:

$$f(x) = H(x, g(x)) \quad \forall x \in X$$

Temos que f é contínua e que $fix(f) = K$, pois

$$K \subseteq \{x : f(x) = x\} \subseteq \{x : g(x) = 0\} \cup \{p\} \subseteq K \cup \{p\} = K$$

■

Observações:

(1) Da observação (2.3) e do Lema de Ward temos que o produto enumerável de espaços metrizáveis, onde pelo menos um dos espaços tem a propriedade $W(forte)$, tem CIP.

(2) Como todo espaço convexo tem a propriedade W , segue do lema que todo espaço métrico convexo tem CIP. Em particular o cubo de Hilbert tem CIP.

2.2 Exemplos em espaços não métricos

Nesta seção vamos mostrar que a reta longa L e $L \times S^1$ tem CIP, enquanto que seus compactificados de Stone-Čech, L^* e $L^* \times S^1$ não. Em particular vemos que a hipóteses do lema de Ward que diz que o espaço tem que ser perfeitamente normal é essencial, pois S^1 tem a propriedade W porém $L^* \times S^1$ não tem CIP.

Exemplo 2.7 : L tem CIP

Demonstração:

Seja K um subconjunto fechado não vazio de L com ínfimo a .

caso 1

se K tem supremo, seja $b = \sup(K)$. Então $[a, b]$ contem K e $[a, b]$ tem CIP:

Seja $f : [a, b] \rightarrow I$ homeomorfismo. Como K é subconjunto fechado de $[a, b]$, segue que $f(K)$ é fechado em I . Logo existe uma função contínua $g : I \rightarrow I$ tal que $\text{fix}(g) = f(K)$. Temos então:

$$[a, b] \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f^{-1}} [a, b]$$

$f^{-1} \circ g \circ f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma função contínua e $\text{fix}(f^{-1} \circ g \circ f) = K$. Então $[a, b]$ tem CIP.

Também vemos que $[a, b]$ é um retrato de L :

seja $h : L \rightarrow L$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq a \\ b & \text{se } x \geq b \\ x & \text{se } x \in [a, b] \end{cases}$$

Então $h(L) = [a, b]$ e h é contínua. A função $j = f^{-1} \circ g \circ f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é tal que $\text{fix}(j) = K$. Seja $j \circ h : L \rightarrow L$

$$L \xrightarrow{h} [a, b] \xrightarrow{j} [a, b] \hookrightarrow L$$

Temos que :

1. $\forall x \in K, j \circ h(x) = x$.

2. Se $x \notin K$ então $x \in [a, b] - K$ ou $x \notin [a, b]$.

Caso $x \in [a, b] - K$ então $h(x) = x$ mas $j(x) \neq x$ e portanto $j \circ h(x) \neq x$.

Caso $x \notin [a, b]$ então $h(x) = a$ ou $h(x) = b$. Em qualquer caso $j \circ h(x) \neq x$.

De 1 e 2 segue que $\text{fix}(j \circ h) = K$.

caso 2:

Se K é não limitado em L , então $L - K$ é a união de uma família disjunta de intervalos $\{]a_\alpha, b_\alpha[: \alpha \in \Lambda \}$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, seja f_α um autohomeomorfismo de $[a_\alpha, b_\alpha]$ com $\text{fix}(f_\alpha) = \{a_\alpha, b_\alpha\}$.

Definimos a função $f : L \rightarrow L$ por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq a \\ x & \text{se } x \in K \\ f_\alpha(x) & \text{se } x \in]a_\alpha, b_\alpha[\text{ para algum } \alpha \in \Lambda \end{cases}$$

A função f é contínua em L :

Seja $x \in L$. Se $x \in L - K$, então $x \in]a_\alpha, b_\alpha[$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Como f_α é contínua e $f = f_\alpha$ em $]a_\alpha, b_\alpha[$, f é contínua em x .

Se $x \in K$, seja $V =]c, d[$ uma vizinhança aberta de x . Pode acontecer

(i) $V \subset K$ e então $f|_V = \text{id}$ e f é contínua em x , ou

(ii) $V \not\subset K$. Temos as seguintes possibilidades:

(1) $x \neq a_\alpha \forall \alpha \in \Lambda$. Neste caso, se existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x < a_\alpha < d$, seja $A = [x, a_\alpha[$ senão seja $A = [x, d[$. Então se $y \in A$, $f(y) = y$ ou $f(y) \in]a_\beta, b_\beta[\subset [x, a_\alpha[\subset [x, d[$. Logo $f(A) \subset [x, d[$.

(2) $x = a_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Se $b_\alpha < d$, seja $A = [x, b_\alpha[$. Senão como f_α é contínua e $f_\alpha(a_\alpha) = a_\alpha$, existe $\epsilon \in [a_\alpha, d[$ tal que $f_\alpha([a_\alpha, \epsilon]) \subset [a_\alpha, d[$, seja, então, $A = [x, \epsilon[$. Igual que no caso anterior temos $f(A) \subset [x, d[$.

(3) $x \neq b_\beta \forall \beta \in \Lambda$. Se existe $\beta \in \Lambda$ tal que $c < b_\beta < x$, seja $B =]b_\beta, x]$, senão seja $B =]c, x]$. Nos dois casos temos $f(B) \subset]c, x]$.

(4) $x = b_\beta$ para algum $\beta \in \Lambda$. Seja $k = \max\{c, a_\beta\}$, como f_β é contínua e $f(b_\beta) = b_\beta$, existe $\epsilon \in]k, b_\beta]$ tal que $f_\alpha(]e, b_\beta]) \subset]c, b_\beta]$. Seja então $B =]e, x]$.

Em todos os casos $A \cup B$ é uma vizinhança aberta de x , e $f(A \cup B) \subset V$.

Falta provar que $\text{fix}(f) = K$. Observemos que $] \leftarrow, a[\subseteq L - K$ e que para cada $\alpha \in \Lambda$ temos que $\{a_\alpha, b_\alpha\} \subseteq K$ e $]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq L - K$.

Seja $x \in L$,

(i) Se $x \in K$, então $f(x) = x$ por definição de f

(ii) Se $x \notin K$ quer dizer que $x < a$ ou $x \in]a_\alpha, b_\alpha[$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Em ambos casos $f(x) \neq x$.

Temos então que para todo subconjunto fechado $K \subseteq L$, existe uma função contínua $f : L \rightarrow L$ tal que $\text{fix}(f) = K$. Logo L tem CIP. ■

Exemplo 2.8 : L^* não tem CIP.

Demonstração:

Vamos provar que o conjunto $K = \{0, \omega_1\}$ não é um conjunto de pontos fixos de L^* .

Suponhamos $f : L^* \rightarrow L^*$ uma função contínua tal que $\text{fix}(f) = K$.

Como $f(\omega_1) = \omega_1$ e f é contínua temos que $f^{-1}(\{0\})$ é limitado em ω_1 . Seja $\alpha_1 \in \omega_1$ tal que $f^{-1}(\{0\}) \subset [0, \alpha_1[$, temos que $f(\beta) > 0 \forall \beta \geq \alpha_1$.

Seja agora $\alpha_2 > \alpha_1 \in \omega_1$ tal que $f^{-1}([0, \alpha_1]) \subset [0, \alpha_2[$, então $f(\beta) \geq \alpha_1 \forall \beta \geq \alpha_2$.

Continuando com este procedimento, obtemos uma sequência $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ tal que para cada n $f^{-1}([0, \alpha_n]) \subset [0, \alpha_{n+1}[$.

Seja $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ $\alpha < \omega_1$ pois $cf(\omega_1) = \omega_1$.

afirmação 1: $f^{-1}([0, \alpha]) \subset [0, \alpha[$

se não, seja $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \in f^{-1}([0, \alpha])$. Então $f(\beta) \in [0, \alpha[$.

Como $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ existe n_0 tal que $f(\beta) < \alpha_{n_0} \leq \alpha$ i.e. $f(\beta) \in [0, \alpha_{n_0}[$. Logo $\beta < \alpha_{n_0+1} \leq \alpha$ o que é uma contradição.

Seja $\gamma_1 = \alpha$

$f([0, \gamma_1[)$ é limitado em L^* pois $cf(\omega_1) = \omega_1$ e $cf(\gamma_1)$ é enumerável para cada $\mu \leq \gamma_1$. Seja então $\gamma_2 \in \omega_1$ tal que $f([0, \gamma_1[) \subset [0, \gamma_2[$. De igual forma $f([0, \gamma_2[)$ é limitado em L^* . logo existe $\gamma_3 > \gamma_2$ tal que $f([0, \gamma_2[) \subset [0, \gamma_3[$. Seja $(\gamma_n)_{n \in \omega}$ uma sequência tal que $\gamma_n < \omega_1$ e $f([0, \gamma_n[) \subset [0, \gamma_{n+1}[\forall n \in \omega$.

Seja $\gamma = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$ temos que $\gamma < \omega_1$ pela cofinalidade de ω_1 .

afirmação 2: $f([0, \gamma[) \subset [0, \gamma[$

se não seja $\beta < \gamma$ tal que $f(\beta) \geq \gamma$. Como $\gamma = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$, existe n_0 tal que $\beta < \gamma_{n_0} < \gamma$ logo $\beta \in [0, \gamma_{n_0}[$ e portanto $f(\beta) \in [0, \gamma_{n_0+1}[$ o que é uma contradição.

Das afirmações 1 e 2 temos que $f([0, \gamma[) \subset [0, \gamma[$.

Por ser $[0, \gamma[$ homeomorfo ao intervalo real $[0, 1]$ e pelo teorema do valor intermediário para funções reais temos que existe $x \in [0, \gamma[$ tal que $f(x) = x$ contradizendo $fix(f) = K$. ■

Exemplo 2.9 : $L^* \times S^1$ não tem CIP.

Demonstração:

Sejam $q \in S^1$ e $h : L^* \longrightarrow L^* \times S^1$ a imersão definida por $h(x) = (x, q) \forall x \in L^*$

Seja $K = \{h(0), h(\omega_1)\}$ fechado em $L^* \times S^1$. Vamos provar que K não é um conjunto de pontos fixos de $L^* \times S^1$. Suponhamos, por contradição que existe uma função contínua $f : L^* \times S^1 \longrightarrow L^* \times S^1$ tal que $fix(f) = K$.

A ideia é usar argumentos similares aos usados para provar que L^* não tem CIP. Porém para isto é necessário fazer algumas transformações pois tais argumentos estão baseados na ordem de L^* .

Sejam $V_1, V_2, \dots$ uma sequência decrescente de intervalos abertos em S^1 tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \{q\}$ e seja $\pi : L^* \times S^1 \longrightarrow S^1$ a projeção na segunda coordenada.

Consideramos a função $\pi \circ f \circ h : L^* \longrightarrow S^1$.

Temos que:

$$(\pi \circ f \circ h)^{-1}(q) = (\pi \circ f \circ h)^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\pi \circ f \circ h)^{-1}(V_i)$$

Por outro lado temos também :

$$\begin{aligned} * (\pi \circ f \circ h)^{-1}(q) &= h^{-1} \circ f^{-1}(L^* \times \{q\}) \\ * f(h(\omega_1)) &= h(\omega_1) = (\omega_1, q) \in L^* \times \{q\} \end{aligned}$$

Portanto $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\pi \circ f \circ h)^{-1}(q)$ pode se escrever como a interseção de uma família enumerável de vizinhanças abertas de ω_1 . Como $\{\omega_1\}$ não é um G_δ em L^* , existe $\alpha \in L$ tal que $[\alpha, \omega_1] \subset (\pi \circ f \circ h)^{-1}(q)$.

Então $f \circ h([\alpha, \omega_1]) \subset \pi^{-1}(q) = L^* \times \{q\} h(L^*)$.

Com a ordem de L^* em $L^* \times \{q\}$ e argumentos similares aos usados no exemplo (2.8), achamos $p \in]\alpha, \omega_1[$ tal que $f(h(p)) = h(p)$. Esta contradição prova que $L^* \times S^1$ não tem CIP. ■

Exemplo 2.10 : $L \times S^1$ tem CIP.

Demonstração:

Seja $K \subset L \times S^1$ um conjunto fechado não vazio.

caso 1: K compacto

Seja $\pi_1 : L \times S^1 \longrightarrow L$ a projeção na primeira coordenada. Como π_1 é contínua, $\pi_1(K)$ é um subconjunto compacto de L . Logo $\pi_1(K) \subset [a, b] \subset L$.

$[a, b] \times S^1$ é um retrato de $L \times S^1$ homeomorfo a $I \times S^1$. Pelo lema de Ward $I \times S^1$ tem CIP, então $[a, b] \times S^1$ tem CIP.

$K \subset [a, b] \times S^1$, portanto K é um conjunto de pontos fixos de $L \times S^1$.

caso 2: K não é compacto

Seja $Y = \{y \in S^1 : \{x : (x, y) \in K\} \text{ é não limitado em } L\}$

afirmação 1: Existe $\alpha_0 \in \omega_1$ tal que se $x > \alpha_0$ e $(x, y) \in K$ então $y \in Y$.

Prova:

Suponhamos por contradição que para cada $\alpha \in \omega_1$, existem elementos $x_\alpha > \alpha$ e $y_\alpha \notin Y$ tais que $(x_\alpha, y_\alpha) \in K$.

O conjunto $\{y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ é não enumerável. (pois senão, existe $y \in \{y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que $\{\beta \in \omega_1 : y = y_\beta\}$ é não enumerável e portanto não limitado em ω_1 . Então $\{x_\beta : (x_\beta, y) \in K\}$ seria não limitado em L e nesse caso $y \in Y$)

Logo, como S^1 é compacto e tem base enumerável, existe $q \in \{y_\alpha : \alpha \in \omega\}$ ponto de acumulação completo de $\{y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$.

Seja $\beta_0 \in \omega_1$. Para cada $n \in \omega$, escolhemos $\beta_{n+1} > \beta_n$ tal que :

$$(i) \quad x_{\beta_{n+1}} > x_{\beta_n}$$

$$(ii) \quad \|q - y_{\beta_{n+1}}\| < 1/n + 1 \text{ onde } \| \cdot \| \text{ é a norma usual de } \mathbb{R}^2.$$

Seja agora, $x = \sup\{x_{\beta_n} : n \in \omega\}$

$(x_{\beta_n}, y_{\beta_n}) \in K \quad \forall n \in \omega$ e (x, q) é ponto de acumulação de $\{(x_{\beta_n}, y_{\beta_n}) : n \in \omega\}$.

Como K é fechado, segue que $(x, q) \in K$.

β_0 é arbitrário e $x > \beta_0$, portanto $q \in Y$, contra a suposição.

afirmação 2: Existe um conjunto fechado não limitado $C \subseteq \omega_1 - \alpha_0$ tal que para todo par $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ tem-se $\{y : (\alpha_1, y) \in K\} = \{y : (\alpha_2, y) \in K\}$

Prova:

Seja D um subconjunto denso enumerável de Y . Para cada $y \in D$, o conjunto $C_y = \{\alpha \in \omega_1 : (\alpha, y) \in K\}$ é fechado, e não limitado em ω_1 . Fechado pois K é fechado e não limitado por definição de Y .

O conjunto $C = (\omega_1 - \alpha_0) \cap (\bigcap \{C_y : y \in D\})$ é fechado e não limitado em ω_1 :

$\omega_1 - \alpha_0$ é fechado e não limitado em ω_1 ,

$|D| = \omega$, $cf(\omega_1) = \omega_1$ e para cada $y \in D$ C_y é c.u.b em ω_1 , logo $\bigcap \{C_y : y \in D\}$ é c.u.b em ω_1 .

Para cada $\alpha \in C$ e $y \in D$, $(\alpha, y) \in K$, então $D \subseteq \{y : (\alpha, y) \in K\}$.

Se $\alpha \in C$ e $(\alpha, y) \in K$, pela afirmação 1 temos que $y \in Y$ pois $\alpha > \alpha_0$. Portanto $\{y : (\alpha, y) \in K\} \subset Y$.

Temos então $D \subset \{y : (\alpha, y) \in K\} \subset Y$ e $\overline{D} = \overline{Y}$. Como $\{y : (\alpha, y) \in K\}$ é fechado, segue que é o próprio Y .

Vamos considerar agora um subconjunto $\{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de C , isomorfo a ω_1 .

Para cada $\alpha \in \omega_1$ existe um homeomorfismo h_α entre $L_\alpha = [c_\alpha, c_{\alpha+1}]$ e I . Seja ρ_α a métrica definida em L_α por:

$$\rho_\alpha(x, y) = \|h_\alpha(x) - h_\alpha(y)\| \quad \forall x, y \in L_\alpha$$

Para cada $\alpha \in \omega_1$, consideramos a deformação $H_\alpha : L_\alpha \times I \longrightarrow L_\alpha$ definida por:

$$H_\alpha(x, t) = h_\alpha^{-1}((1-t)h_\alpha(x) + t(h_\alpha(x))^2) \quad \forall (x, t) \in L_\alpha \times I$$

Observamos que para cada $t > 0$, o conjunto dos pontos fixos de $H_\alpha(., t)$ é $\{c_\alpha, c_{\alpha+1}\}$

Seja $K_0 = K \cap ([0, c_0] \times S^1)$ e seja ρ uma métrica em S^1 limitada por 1.

Definimos uma deformação $G : S^1 \times I \longrightarrow S^1$ como segue:

$$G(e^{i\theta}, t) = e^{i(\theta+t)} \quad \forall (e^{i\theta}, t) \in S^1 \times I$$

Definimos também as seguintes métricas:

(1) d em $[0, c_0] \times S^1$ como $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{\rho'(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), 1\}$ onde $\rho'(x, y) = \|h(x) - h(y)\|$ com $h : [0, c_0] \longrightarrow I$ um homeomorfismo.

(2) d_α , em $[c_\alpha, c_{\alpha+1}] \times S^1$ como $d_\alpha((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{\rho_\alpha(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), 1\}$

Seja $f : L \times S^1 \longrightarrow L \times S^1$ definida por :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, G(y, d((x, y), K_0))) & \text{se } (x, y) \in [0, c_0] \times S^1 \\ (H_\alpha(x, d_\alpha((x, y), K)), G(y, d((c_0, y), K_0))) & \text{se } (x, y) \in L_\alpha \times S^1 \text{ com } \alpha \in \omega_1 \end{cases}$$

* A função f é contínua pois G, d, H_α, d_α são funções contínuas.

* $\text{fix}(f) = K$:

$$(x, y) \in K \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in K_0 \\ \text{ou} \\ (x, y) \in L_\alpha \times S^1 \text{ (logo } x > \alpha_0 \text{ e } y \in Y) \end{cases}$$

Seja $(x, y) \in [0, c_0] \times S^1$

$d((x, y), K_0) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in K_0$, logo $G(y, d((x, y), K_0)) = y \Leftrightarrow (x, y) \in K_0$.

Seja agora $(x, y) \in L_\alpha \times S^1$ para algum $\alpha \in \omega_1$.

$$H_\alpha(x, d_\alpha((x, y), K)) = x \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in K \\ \text{ou} \\ x \in \{c_\alpha, c_{\alpha+1}\} \end{cases}$$

No caso em que $x \in \{c_\alpha, c_{\alpha+1}\}$:

se $(c_\alpha, y) \notin K$ então pela afirmação 2, $(c_0, y) \notin K_0$ e portanto $G(y, d((c_0, y), K_0)) \neq y$

se $(c_\alpha, y) \in K$, então $(c_0, y) \in K_0$.

No caso em que $(x, y) \in K$, como $x \in L_\alpha$ temos que $x > \alpha_0$. Logo $y \in Y$ e $(c_0, y) \in K_0$. ■

Olhando os exemplos precedentes podemos ser tentados a concluir que toda variedade não métrica tem CIP. Mas no exemplo que segue vemos que isso não é verdade e também que a CIP não é preservada por produtos.

Exemplo 2.11 *O produto $L \times L$ da reta longa L não tem CIP.*

Demonstração:

Seja $K = L \times \{0\} \cup \{0\} \times L$.

Vamos supor que K é o conjunto dos pontos fixos de uma função contínua

$f : L \times L \longrightarrow L \times L$. Demonstraremos uma sequência de afirmações que nos levarão a uma contradição.

Sejam f_1, f_2 funções tais que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ e seja $\Delta = \{(x, x) : x \in L\}$

afirmação 1: *pelo menos uma das funções f_1, f_2 é limitada em Δ*

Suponhamos que nenhuma das funções f_1, f_2 é limitada em Δ . Vamos demonstrar que f tem ponto fixo fora de K .

Como cada f_i é não limitada em Δ , é possível obter uma sequência monótona estritamente crescente $\{x_n : n \in \omega\}$ tal que:

$$(i) \quad f_2(x_{2n+2}, x_{2n+2}) > x_{2n+1} > f_2(x_{2n}, x_{2n})$$

$$(ii) \quad x_{2n+2} > f_1(x_{2n+1}, x_{2n+1}) > x_{2n}$$

Seja $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Então $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$ e $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$.

Da construção da sequência $\{x_n\}$ temos que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n+i}, x_{2n+i})$ para $i = 1, 2$.

Logo pela continuidade da função f temos que $f(p, p) = (p, p) \notin K$.

Sem perda de generalidade vamos supor que f_1 é limitada em Δ por $\beta \in \omega_1$.

Para cada ordinal limite $\alpha \in \omega_1$, consideramos um ordinal $\phi(\alpha) < \alpha$ tal que $f_1(\alpha, \phi(\alpha)) < \beta + 1$. observamos que este $\phi(\alpha)$ existe pois $f_1(\alpha, \alpha) < \beta + 1$ e f_1 é contínua.

Usando o Pressing Down lemma, obtemos um conjunto não enumerável $A \subset \omega_1$ e um ordinal $\gamma \in \omega_1$ tais que para cada $\alpha \in A$, $\phi(\alpha) = \gamma$. Então $f_1(\alpha, \gamma) < \beta + 1 \quad \forall \alpha \in A$.

afirmação 2: *o conjunto $\{x \in L : f_1(x, \gamma) > \beta + 2\}$ é limitado.*

Suponhamos que $\{x \in L : f_1(x, \gamma) > \beta + 2\}$ é não limitado. Então é possível obter sequências $\{x_n\} \subset L$ e $\{\alpha_n\} \subset A$ tais que :

$$x_0 < \alpha_0 < x_1 < \alpha_1 < x_2 < \dots < \alpha_n < x_{n+1} < \alpha_{n+1} < \dots$$

$$\text{para cada } n, \quad f_1(x_n, \gamma) > \beta + 2 \quad \text{e} \quad f_1(\alpha_n, \gamma) < \beta + 1$$

mas $\sup_{n \in \omega} \{x_n\} = \sup_{n \in \omega} \{\alpha_n\}$, então f_1 não seria contínua.

afirmação 3: *a função f_1 é limitada em $L \times \{\gamma\}$*

Pela afirmação 2, existe $a \in L$ tal que $f_1(x, \gamma) \leq \beta + 2 \quad \forall x \geq a$.

Como $[0, a] \times \{\gamma\}$ é compacto segue que f_1 é limitada em $L \times \{\gamma\}$.

Seja agora b um elemento de L tal que $b = \inf\{\gamma \in L : f_1 \text{ é limitado em } L \times \{\gamma\}\}$.

afirmação 4: a função f_1 é limitada em $L \times \{b\}$

Seja $\{b_n : n \in \omega\} \subset \{\gamma \in L : f_1 \text{ é limitado em } L \times \{\gamma\}\}$ uma sequência monótona decrescente convergindo para b . Para cada $n \in \omega$, seja m_n um limite superior para f_1 em $L \times \{b_n\}$. Então $\sup_{n \in \omega} \{m_n\}$ é um limite superior para f_1 em $L \times \{b\}$.

Notemos que $b > 0$ pois a função f é a identidade em $L \times \{0\}$, portanto f_1 é não limitada em $L \times \{0\}$.

afirmação 5: a função f_1 é não limitada em $L \times \{b\}$.

Sejam $\lambda \in \omega_1$ arbitrário e $\{b_n\}$ uma sequência monótona crescente convergendo para b . Para cada n , f_1 é não limitada em $L \times \{b_n\}$.

O conjunto $\{x \in L : f_1(x, b_n) \geq \lambda\}$ é fechado e não limitado em L . Fechado pois $\{x \in L : f_1(x, b_n) < \lambda\}$ é aberto em L pela continuidade de f_1 . Não limitado porque senão, existiria $x_0 \in L$ tal que $\forall x > x_0$, $f_1(x, b_n) < \lambda$. E como $[0, x_0] \times \{b_n\}$ é compacto, teríamos f_1 limitada em $L \times \{b_n\}$.

Portanto pela continuidade de f_1 , o conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : f_1(\alpha, b_n) \geq \lambda\}$ é um subconjunto fechado e não limitado de L i.e. $\{\alpha \in \omega_1 : f_1(\alpha, b_n) \geq \lambda\}$ é c.u.b em ω_1 . Logo $\bigcap_{n \in \omega_0} \{\alpha \in \omega_1 : f_1(\alpha, b_n) \geq \lambda\}$ é um subconjunto fechado e não limitado de ω_1 . De novo pela continuidade de f_1 temos que para cada α nesse conjunto $f_1(\alpha, b) \geq \lambda$. Como λ é arbitrário segue que f_1 é não limitada em $L \times \{b\}$. ■

2.3 Condições suficientes para espaços produto

Embora as propriedades W e $W(\text{forte})$ são preservadas por produtos arbitrários, não acontece o mesmo para o produto de espaços perfeitamente normais. Consequentemente o lema de Ward não pode ser usado para determinar se tal produto tem CIP. O seguinte teorema apresenta condições suficientes para que um produto infinito tenha CIP.

Teorema 2.12 *Seja λ um cardinal infinito. Para cada $\alpha \in \lambda$, seja Y_α um espaço topológico com base $\{B(\alpha, \gamma) : \gamma \in \lambda\}$ (i.e. $w(Y_\alpha) \leq \lambda$).*

Suponha que para cada par de subconjuntos finitos F e G de λ tais que $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ e cada $\beta \in \lambda$ não nulo, existe uma função contínua

$$h : Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow Y_\beta$$

tal que para $x \in Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$, $h(x) = \pi_{\{\beta\}}(x)$ se e somente se $\pi_F(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$. Então $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP.

Demonstração:

Seja $\{(F_\beta, G_\beta) : \beta \in \lambda\}$ uma enumeração do conjunto :

$$\{(F, G) : F \text{ e } G \text{ são subconjuntos finitos de } \lambda\}$$

tal que $F_\beta \subset \beta \ \forall \beta \in \lambda$.

Seja K um subconjunto fechado de $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Vamos construir uma função contínua $f : Y \longrightarrow Y$ tal que $\text{fix}(f) = K$. A construção será por limite inverso.

Para cada β com $1 \leq \beta \leq \lambda$, $f_\beta : \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \beta\} \longrightarrow \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \beta\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} (i) \quad \pi_\mu^\beta f_\beta(x) &= f_\mu \pi_\mu^\beta(x) \quad \forall \mu < \beta, \forall x \in \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \beta\} \\ (ii) \quad f_\beta(x) &= x \quad \forall x \in \pi_\beta(K) \end{aligned}$$

onde π_μ^β é a restrição dos elementos de $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \beta\}$ a $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mu\}$, e π_β é a restrição dos elementos de Y a $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \beta\}$.

- No nível 1, seja $f_1 : Y_0 \longrightarrow Y_0$ a identidade.
- No nível $\delta \leq \lambda$ com δ ordinal limite, supomos que f_β é uma função contínua satisfazendo (i) e (ii) para todo $\beta < \delta$.

Para cada $x \in \prod\{Y_\alpha : \alpha < \delta\}$, definimos f_δ tal que :

$$(vi) \quad \pi_{\{\beta\}}^\delta f_\delta(x) = \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} f_{\beta+1} \pi_{\beta+1}^\delta(x)$$

Então $\pi_\beta^\delta f_\delta(x) = (\pi_{\{\alpha\}}^{\alpha+1} f_\delta(x))_{\alpha < \beta} = (\pi_{\{\alpha\}}^{\alpha+1} f_{\alpha+1} \pi_{\alpha+1}^\delta(x))_{\alpha < \beta} = f_\beta \pi_\beta^\delta(x)$ e (i) se verifica.

Se $x \in \pi_\delta(K)$ então $f_\delta(x) = x$:

$$x \in \pi_\delta(K) \Rightarrow \pi_\beta^\delta(x) \in \pi_\beta(K) \quad \forall \beta < \delta \Rightarrow f_\beta \pi_\beta^\delta(x) = \pi_\beta^\delta(x) \quad \forall \beta < \delta \Rightarrow f_\delta(x) = x$$

• No nível $\beta + 1$ supomos f_β construída satisfazendo (i) e (ii). Temos dois casos a considerar:

caso 1:

$$F_\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, G_\beta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \text{ e } B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \cap \pi_{F_\beta}(K) \neq \emptyset.$$

$$\text{Definimos : } \pi_\beta^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = f_\beta \pi_\beta^{\beta+1}(x) \text{ e}$$

$$(v) \quad \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1}(x)$$

caso 2:

$$F_\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, G_\beta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \text{ e } B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \cap \pi_{F_\beta}(K) = \emptyset.$$

Podemos usar então a função $h : Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow Y_\beta$ da hipótese e definimos $f_{\beta+1}$ como segue : se $x \in \prod\{Y_\alpha : \alpha < \beta + 1\}$

$$(iii) \quad \pi_\beta^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = f_\beta \pi_\beta^{\beta+1}(x)$$

$$(iv) \quad \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = h \circ \pi_{F_\beta \cup \{\beta\}}^{\beta+1}(x)$$

Então, se $x \in \pi_{\beta+1}(K)$ temos que :

$$\left. \begin{array}{l} \pi_\beta^{\beta+1}(x) \in \pi_\beta(K) \\ \pi_\beta^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = f_\beta \pi_\beta^{\beta+1}(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_\beta^{\beta+1} f_{\beta+1}(x) = \pi_\beta^{\beta+1}(x); \quad (1)$$

como $F_\beta \subset \beta$, $\pi_{F_\beta}^{\beta+1}(x) \in \pi_{F_\beta}(K)$, então $\pi_{F_\beta}^{\beta+1}(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$ e

$$h \circ \pi_{F_\beta \cup \{\beta\}}^{\beta+1}(x) = \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1}(x) \quad (2)$$

De (1) e (2) temos : $\pi_{\beta+1}(x) \in K \Rightarrow f_{\beta+1}(x) = x$.

Seja $f = f_\lambda$

$f : \prod\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\} \longrightarrow \prod\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é uma função contínua tal que $f(x) = x \quad \forall x \in K$ (por construção).

Só resta provar que se $y \notin K$ então $f(y) \neq y$.

Se $y \notin K$ existe uma vizinhança de y , aberto básico, disjunta de K . Portanto existem conjuntos $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ com $F, G \subset \lambda$ tais que

$$\pi_F(y) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \subset \pi_F(Y - K)$$

Seja $\beta \in \lambda$ tal que $F = F_\beta$ e $G = G_\beta$, então $\pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} f_{\beta+1} \pi_{\beta+1}(y) = h \circ \pi_{F_\beta \cup \{\beta\}}(y)$ onde h é como em (iv). Logo $h \circ \pi_{F_\beta \cup \{\beta\}}(y) \neq \pi_{\{\beta\}}(y)$, mas $\pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} f_{\beta+1} \pi_{\beta+1}(y) = \pi_{\{\beta\}}^{\beta+1} \pi_{\beta+1} f(y) = \pi_{\{\beta\}} f(y)$.

Portanto $\pi_{\{\beta\}} f(y) \neq \pi_{\{\beta\}}(y)$ e consequentemente $f(y) \neq y$. ■

Lema 2.13 *Seja λ um cardinal infinito. Suponhamos que para cada $\alpha \in \lambda$, Y_α é um espaço localmente metrizável de peso menor ou igual a λ e com a propriedade $W(\text{forte})$. Então $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ satisfaz as hipóteses do teorema (2.12).*

Demonstração:

Y_α é localmente metrizável, logo é regular.

Para cada $x \in Y_\alpha$, existe U uma vizinhança aberta de x tal que U é metrizável. Como $\{B(\alpha, \gamma) : \gamma < \lambda\}$ é base para Y_α , existe $\gamma_0 < \lambda$ tal que $x \in B(\alpha, \gamma_0) \subset \overline{B(\alpha, \gamma_0)} \subset U$. Podemos então supor, sem perda de generalidade que $\overline{B(\alpha, \gamma)}$ é metrizável $\forall \alpha, \gamma < \lambda$. Para cada par (F, G) de subconjuntos finitos de λ tais que $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, e cada $0 < \beta < \lambda$ seja a função $d : Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x) = \begin{cases} \text{dist}(\pi_F(x), Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)) \\ \quad \text{se } \pi_F(x) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definimos então a função $h : Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow Y_\beta$ por:

$$h(x) = H_\beta \left(\pi_{\{\beta\}}(x), \frac{d(x)}{1 + d(x)} \right)$$

onde $H_\beta : Y_\beta \times I \longrightarrow Y_\beta$ é uma deformação tal que $H_\beta(y, t) = y \Leftrightarrow t = 0$.

Temos que:

$$\begin{aligned} h(x) = \pi_{\{\beta\}}(x) &\Leftrightarrow H_\beta \left(\pi_{\{\beta\}}(x), \frac{d(x)}{1 + d(x)} \right) = \pi_{\{\beta\}}(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_F(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Observações :

- As variedades não métricas com a propriedade $W(forte)$ satisfazem o lema (2.13).
- Embora foi bastante trabalhoso provar que $L \times S^1$ tem CIP, segue do teorema (2.12) e do lema (2.13) que $(L \times S^1)^\kappa$ tem CIP para todo cardinal não enumerável κ .

Teorema 2.14 *Sejam λ um cardinal infinito e $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ uma família não vazia de espaços métricos separáveis com a propriedade $W(forte)$. Então o espaço produto $\prod \{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP.*

Demonstração:

Para cada $\alpha < \lambda$, Y_α é um espaço métrico separável, portanto Y_α tem uma base enumerável (i.e. $w(Y_\alpha) = \omega \leq \lambda \forall \alpha < \lambda$).

Pelo lema (2.13) a família $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ satisfaz as hipóteses do teorema (2.12), então $\prod \{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP. ■

Observação :

- $\mathbb{R}^\kappa$ e $(S^1)^\kappa$ tem CIP para todo cardinal κ : pelo lema de Ward se κ é enumerável e por teorema (2.14) se κ é não enumerável.

Lema 2.15 *Seja λ um cardinal infinito. Suponha que para cada $\alpha \in \lambda$, Y_α é um espaço zero-dimensional não trivial com $w(Y_\alpha) \leq \lambda$. Então $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ satisfaz as hipóteses do teorema (2.12) i.e. $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP.*

Demonstração:

Para cada $\alpha \in \lambda$, seja $\{B(\alpha, \gamma) : \gamma \in \lambda\}$ uma base de subconjuntos abertos e fechados para Y_α . Sejam $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ subconjuntos finitos de λ , e seja $\beta \in \lambda$, $\beta \neq 0$.

Definimos $h : Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow Y_\beta$ como segue:

sejam U um subconjunto aberto e fechado em Y_β e a, b dois pontos de Y_β tais que $a \in U$ e $b \notin U$. Então

$$h(\pi_{F \cup \{\beta\}}(x)) = \begin{cases} \pi_{\{\beta\}}(x) & \text{se } \pi_F(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \\ a & \text{se } \pi_F(x) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \text{ e } \pi_{\{\beta\}}(x) \notin U \\ b & \text{se } \pi_F(x) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \text{ e } \pi_{\{\beta\}}(x) \in U \end{cases}$$

A função h assim definida é contínua:

vamos provar que a imagem inversa por h de todo fechado de Y_β é um fechado de $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$.

(1) $h^{-1}(a) = (B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \times Y_\beta - U) \cup (Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)) \times \{a\}$.

$h^{-1}(a)$ é fechado em $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$ pois $B(\alpha_i, \gamma_i)$ é aberto e fechado em Y_{α_i} $\forall i = 1, \dots, n$ e $\{a\}$ é fechado em Y_β .

(2) De igual forma que em (1) mostramos que $h^{-1}(b)$ é um subconjunto fechado de $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$.

(3) Seja A um subconjunto fechado de Y_β . Temos vários casos a considerar.

* Se $a \notin A$ e $b \notin A$, então

$h^{-1}(A) = (Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)) \times A$ subconjunto fechado de $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$.

* Se $a \in A$ com $A - \{a\} \neq \emptyset$ e $b \notin A$, então

$$h^{-1}(A) = ((Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)) \times A) \cup (B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \times (Y_\beta - U))$$

Os outros casos são análogos ao último acima.

Seja $x \in Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$.

Temos que $h(x) = \pi_{\{\beta\}}(x) \Leftrightarrow \pi_F(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$. ■

Corolário 2.16 *Sejam λ um cardinal infinito e $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ uma família não vazia de espaços discretos, cada um dos quais tem no máximo uma quantidade enumerável de elementos. Então $\prod \{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP.*

Teorema 2.17 *Seja M um espaço métrico conexo com a propriedade $W(\text{forte})$ e seja Y um espaço normal totalmente desconexo. Então $M \times Y$ tem CIP se e somente se Y é perfeitamente normal.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) seja Y um espaço perfeitamente normal. Como M é métrico, $M \times Y$ é perfeitamente normal e como M tem a propriedade $W(\text{forte})$ $M \times Y$ também tem a propriedade $W(\text{forte})$. Então pelo lema de Ward $M \times Y$ tem CIP.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $M \times Y$ tem CIP e que Y não é perfeitamente normal. Como Y é normal, existe um subconjunto fechado K de Y que não é um G_δ .

Seja $p \in M$ e seja $A = \{(x, y) \in M \times Y : x = p \text{ ou } y \in K\}$

$A = \{p\} \times Y \cup M \times K$, então A é fechado. Como $M \times Y$ tem CIP, existe uma função contínua $f : M \times Y \rightarrow M \times Y$ tal que $A = \text{fix}(f)$.

M é conexo portanto $M \times \{y\}$ e $f(M \times \{y\})$ são conexos $\forall y \in Y$

Como Y é totalmente desconexo, a componente conexa de (p, y) é $M \times \{y\}$ para cada $y \in Y$. $f(p, y) = (p, y)$, logo $(p, y) \in f(M \times \{y\})$ que é conexo. Então $f(M \times \{y\}) \subset M \times \{y\}$.

Escolhemos um ponto $q \neq p$ em M . Seja $\delta = \rho(p, q)$ onde ρ denota a distância em M e seja $f_1 = \pi \circ f$ onde $\pi : M \times Y \longrightarrow M$ denota a projeção na primeira coordenada.

Para cada $n \in \omega$ definimos $U_n = \{y \in Y : \rho(q, f_1(q, y)) > \delta/n\}$

afirmação: $Y - K = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

Primeiro seja $y \in Y - K$.

Como $q \neq p$ temos que $f(q, y) \neq (q, y)$, mas $f(q, y) \in M \times \{y\}$ então $f_1(q, y) \neq q$. Segue que $\rho(q, f_1(q, y)) > 0$ e existe $n > 0$ tal que $\rho(q, f_1(q, y)) > \delta/n$. Logo $y \in U_n$.

Seja agora $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ então existe $n_0 \in \omega$ tal que $\rho(q, f_1(q, y)) > \delta/n_0$. Portanto $q \neq \pi \circ f(q, y)$ e $y \notin K$.

K não é um $G_\delta \Rightarrow Y - K$ não é um $F_\sigma \Rightarrow Y - K \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$.

Quer dizer que para algum $n \in \omega$, existe $z \in K \cap \overline{U_n}$. Logo $f(q, z) = (q, z)$ e $f_1(q, z) = q$. No entanto temos que $\rho(q, f_1(q, y)) \geq \delta/n \quad \forall y \in \overline{U_n}$.

Supondo Y não perfeitamente normal chegamos a uma contradição, então Y deve ser perfeitamente normal. ■

No resultado que segue mostramos que o produto cartesiano de grupos compactos não preserva a CIP. Concretamente vamos ver que se λ é um cardinal não enumerável $S^1 \times (Z_2)^\lambda$ não tem CIP, porém S^1 e $(Z_2)^\lambda$ são grupos compactos com CIP.

Teorema 2.18 *Seja λ um cardinal não enumerável e seja $(Z_2)^\lambda$ o produto de λ cópias do espaço discreto $Z_2 = \{0, 1\}$. Então $S^1 \times (Z_2)^\lambda$ não tem CIP.*

Demonstração:

S^1 é um espaço métrico conexo. $(Z_2)^\lambda$ é um espaço compacto Hausdorff e portanto normal. Se provarmos que $(Z_2)^\lambda$ é totalmente desconexo e não é perfeitamente normal, então o teorema fica provado aplicando o teorema (2.17)

afirmação 1: $(Z_2)^\lambda$ é totalmente desconexo.

Suponhamos que não seja, então existem dois pontos $p, q \in (Z_2)^\lambda$ tais que a quasi-

componente $\mathcal{C}_p$ de p coincide com a quase-componente $\mathcal{C}_q$ de q .

$p \neq q \Rightarrow \exists \alpha < \lambda \exists i \in \{0, 1\}$ tal que se $\pi_{\{\alpha\}}(p) = i$ então $\pi_{\{\alpha\}}(q) = 1 - i$.

Seja $U_p = \prod_{\beta < \alpha} Z_2 \times \{i\} \times \prod_{\alpha < \beta < \lambda} Z_2$. U_p é vizinhança aberta e fechada de p , logo $\mathcal{C}_p \subset U_p$. Mas $q \notin U_p$, então $\mathcal{C}_p \neq \mathcal{C}_q$.

afirmação 2: $(Z_2)^\lambda$ não é perfeitamente normal.

Seja $x \in (Z_2)^\lambda$. $\{x\}$ é um fechado pois $(Z_2)^\lambda$ é Hausdorff. Suponhamos que $(Z_2)^\lambda$ é perfeitamente normal, então existe uma família enumerável de abertos básicos $\{V_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcap \{V_n : n \in \omega\} = \{x\}$.

Para cada n , seja $F_n \subset \lambda$, finito, tal que $V_n = \prod_{\alpha \in F_n} \{\pi_\alpha(x)\} \times \prod_{\lambda - F_n} Z_2$.

$\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ é um conjunto enumerável, logo existe $\alpha \in (\lambda - \bigcup_{n=1}^\infty F_n)$. Temos que $\pi_{\{\alpha\}} V_n = Z_2 \quad \forall n \in \omega$, então $\bigcap_{n=1}^\infty \pi_{\{\alpha\}} V_n = Z_2$ e $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \{x\}$. ■

No seguinte teorema usamos o conceito de CIP para dar uma caracterização dos espaços compactos zero-dimensionais que são metrizáveis.

Teorema 2.19 *Seja M um espaço métrico conexo com a propriedade $W(\text{forte})$ e seja X um espaço compacto zero-dimensional. Então $M \times X \times X$ tem CIP se e somente se X é metrizável.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se X é metrizável, então $M \times X \times X$ é também metrizável. Como $M \times X \times X$ tem a propriedade $W(\text{forte})$, pelo lema de Ward tem CIP.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $M \times X \times X$ tem CIP. Como $X \times X$ é um espaço compacto zero-dimensional, então $X \times X$ é normal e totalmente desconexo.

Pelo teorema (2.17), segue que $X \times X$ é perfeitamente normal. A diagonal Δ de $X \times X$ é fechada, logo Δ é um G_δ em $X \times X$ e portanto X é metrizável. ■

Para mostrar que o compactificado de Stone-Ćech $\beta\mathbb{N}$ dos inteiros positivos $\mathbb{N}$ não tem CIP, provamos o seguinte lema preliminar.

Lema 2.20 *Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função contínua definida no conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{N}$. Então uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (i) *existe um subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$ tal que para todo $x \in A$, $f(x) = x$.*
- (ii) *existe um subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$ tal que para todo $x \in A$, $f(x) \notin A$.*

Demonstração:

Temos dois casos a considerar.

caso 1: suponhamos que existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(y)$ é infinito. Então

$$A = f^{-1}(y) - \{y\}$$

satisfaz (ii).

caso 2: suponhamos que para cada $y \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y)$ é finito. Seja $x_0 \in \mathbb{N}$ e, para cada $n \geq 1$, seja x_n um inteiro positivo tal que

$$x_n \notin f^{-1}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \cup \{f(x_0), \dots, f(x_{n-1})\} \cup \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$$

O conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ é infinito, então pelo menos um dos conjuntos $\{x_n : f(x_n) = x_n\}$ e $\{x_n : f(x_n) \neq x_n\}$ é infinito. Se o primeiro é infinito satisfaz (i), se o segundo é infinito satisfaz (ii). ■

Teorema 2.21 *$\beta\mathbb{N}$ não tem CIP, porém o produto $(\beta\mathbb{N})^c$ de c cópias de $\beta\mathbb{N}$ onde c denota o cardinal do contínuo, tem CIP.*

Demonstração:

Que $(\beta\mathbb{N})^c$ tem CIP segue do fato que $\beta\mathbb{N}$ é um espaço zero-dimensional de peso c , do teorema (2.12) e do lema (2.15).

Para provar que $\beta\mathbb{N}$ não tem CIP, suponhamos $f : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ uma função contínua

com $fix(f) = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Se o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}\}$ é infinito, seja $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}\}$. Então $f(A) \subset (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap f(A)$ e $f(A) \cap (\mathbb{N} - A) = \emptyset$.

Se $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}\} = \{k_1, \dots, k_m\}$, seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função contínua tal que a restrição de g a $\mathbb{N} - \{k_1, \dots, k_m\}$ coincide com a restrição de f ao mesmo conjunto. Logo, pelo lema anterior e como $fix(f) = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, existe um conjunto $B \in \mathbb{N}$ infinito, tal que $g(x) \notin B \forall x \in B$.

Seja $A = B \cap (\mathbb{N} - \{k_1, \dots, k_m\})$. O conjunto A assim definido é infinito e $\forall x \in A$ temos que $f(x) \notin A$, ou seja $f(x) \in \mathbb{N} - A \forall x \in A$.

Portanto $f(A) \subset \mathbb{N} - A$ e $f(A) \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) = \emptyset$.

Ressumindo os dois casos, existe $A \subset \mathbb{N}$ infinito, tal que $f(A) \subset (\mathbb{N} - A) \cup ((\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap f(A))$.

Os fechos considerados neste teorema são todos no espaço $\beta\mathbb{N}$.

Temos que :

$$\begin{aligned} \overline{A} \cap f(\overline{A}) &\stackrel{(1)}{\subset} \overline{A} \cap \overline{f(A)} \\ &\stackrel{(2)}{\subset} \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{N} - A \cup (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap f(A)}) \\ &= \overline{A} \cap \overline{(\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap f(A)} \\ &\stackrel{(3)}{\subsetneq} \overline{A} \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(1) por continuidade da função f , (2) pela discussão acima, e a inclusão estrita de (3) porque a densidade de $\overline{A} \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) = \mathfrak{c}$ e $f(A) \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N})$ é enumerável.

Então existe $p \in \overline{A} \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N})$ tal que $p \notin \overline{A} \cap f(\overline{A})$. Como $p \in \overline{A}$, $p \notin f(\overline{A})$. Logo $p \notin f(\overline{A} \cap (\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}))$, e $f(p) \neq p$, contra a suposição $fix(f) = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Esta contradição mostra que $\beta\mathbb{N}$ não tem CIP. ■

Para facilitar a seguinte discussão vamos chamar Y um CIP-companion de X se $X \times Y$ tem CIP, e dizemos que Y é um CIP-companion absoluto para uma classe $\mathcal{Q}$ de espaços se Y é um CIP-companion para cada $X \in \mathcal{Q}$.

Alguns dos exemplos do capítulo são de espaços com CIP mas não são CIP-companion deles mesmos. Por exemplo a long line L e a reta de Sorgenfrey K .

Do lema de Ward segue que S^1 é um CIP-companion absoluto para a classe dos espaços perfeitamente normais. No entanto, resulta desta seção que S^1 não é um CIP-companion absoluto para a classe dos espaços compactos. De fato vimos que $L^* \times S^1$ não tem CIP, e os espaços $(Z_2)^c \times S^1$, $\beta\mathbb{N} \times S^1$, $(\beta\mathbb{N})^c \times S^1$ não tem CIP pelo teorema (2.17).

Para certos espaços, podemos escolher um cardinal apropriado λ de modo a obter um CIP-companion $(S^1)^\lambda$. Por exemplo, $(S^1)^c$ é um CIP-companion de $(Z_2)^c$ pois $(Z_2)^c \times (S^1)^c$ é homeomorfo a $(Z_2 \times S^1)^c$ que tem CIP por teorema (2.14).

O teorema que segue mostra que todo espaço completamente regular tem CIP-companion da forma $(S^1)^\lambda$.

Teorema 2.22 *Seja Y um espaço completamente regular. Então existe um cardinal λ tal que $Y \times (S^1)^\lambda$ tem CIP.*

Demonstração:

Se Y for perfeitamente normal, pelo teorema (2.17) $S^1 \times Y$ tem CIP.

Vamos supor Y completamente regular e não perfeitamente normal. Podemos escolher um cardinal infinito λ e uma base $\{B(0, \gamma) : \gamma < \lambda\}$ de cozero-sets para Y .

Seja $\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ uma família de espaços tal que

$$Y_0 = Y \quad \text{e} \quad Y_\alpha = S^1 \quad \text{se} \quad \alpha \neq 0$$

Sejam também $0 < \beta < \lambda$, $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ onde $F, G \subset \lambda$

Definimos uma função h satisfazendo as hipóteses do teorema (2.12). Temos dois casos a considerar.

caso 1: se $0 \notin F$, definimos h como no lema (2.13), pois $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$ é um espaço métrico. Então

$$h(x) = H_\beta \left(\pi_{\{\beta\}}(x), \frac{d(x)}{1 + d(x)} \right)$$

onde

$$d(x) = \begin{cases} \text{dist}(\pi_F(x), Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)) \\ \text{se } \pi_F(x) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 2: Se $0 \in F$ sejam $F = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $G = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$

Consideramos ρ uma métrica em $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n}$ limitada por 1, e uma função contínua $f : Y_0 \longrightarrow I$ tal que $B(0, \gamma_0) = f^{-1}(]0, 1])$.

Para $x \in Y_0 \times Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta$, sejam

$$e^{i\theta} = \pi_{\{\beta\}}(x)$$

$$d(x) = \rho(\pi_{F-\{0\}}(x), Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} - B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n))$$

Definimos a função $h : Y_0 \times Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \times Y_\beta \longrightarrow Y_\beta$ por:

$$h(x) = e^{i(\theta + d(x)f(\pi_{\{0\}}(x)))}$$

* h é contínua pois é composição de funções contínuas.

* $h(x) = \pi_{\{\beta\}}(x) \Leftrightarrow \pi_F(x) \notin B(0, \gamma_0) \times B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n) :$

Se $\pi_F(x) \in B(0, \gamma_0) \times B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$, então

$$(1) \pi_{F-\{0\}}(x) \in B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$$

$$(2) \pi_{\{0\}}(x) \in B(0, \gamma_0)$$

De (1) temos que $d(x) > 0$ e de (2) temos que $\pi_{\{0\}}(x) \in f^{-1}(]0, 1])$ e portanto que $f(\pi_{\{0\}}(x)) > 0$. Logo $1 \geq d(x)f(\pi_{\{0\}}(x)) > 0$ e $h(x) \neq e^{i\theta} = \pi_{\{\beta\}}(x)$.

Se $\pi_F(x) \notin B(0, \gamma_0) \times B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$ então

$$\pi_{\{0\}}(x) \notin B(0, \gamma_0)$$

ou

$$\pi_{F-\{0\}}(x) \notin B(\alpha_1, \gamma_1) \times \dots \times B(\alpha_n, \gamma_n)$$

Então $d(x)f(\pi_{\{0\}}(x)) = 0$ e $h(x) = e^{i\theta} = \pi_{\{\beta\}}(x)$.

Vimos que $\lambda, \{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ e $\{B(\alpha, \gamma) : \gamma \in \lambda\}$ estão nas condições do teorema (2.12). Portanto $Y \times S^1 = \prod \{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ tem CIP. ■

Lema 2.23 *Suponhamos que X é um espaço com um subconjunto fechado discreto de cardinalidade λ e tal que 2^λ é maior que a cardinalidade da coleção de todas as funções contínuas de X em X . Então X não tem CIP.*

Demonstração:

Seja D um subconjunto discreto de X de cardinalidade λ . Como subconjuntos diferentes de D tem fechos diferentes em X , temos pelo menos 2^λ fechados diferentes em X . Então para X ter CIP devem existir no mínimo 2^λ funções de X em X . ■

O seguinte resultado mostra que não existe um CIP-companion absoluto completamente regular para a classe dos espaços completamente regulares.

Teorema 2.24 *Para cada espaço C completamente regular existe um espaço X completamente regular tal que $X \times C$ não tem CIP.*

Demonstração:

Suponhamos que C é um espaço completamente regular de cardinalidade α . Seja $\lambda = 2^\alpha$ (a cardinalidade de partes de C).

$(Z_2)^\lambda$ possui um subconjunto denso D de cardinalidade α (pois a densidade de $(Z_2)^\lambda$ é $\log \lambda \leq \alpha$, ver [Hod84]).

$(Z_2)^\lambda$ possui um subconjunto discreto E de cardinalidade λ . (basta considerar a imersão $\lambda \rightarrow (Z_2)^\lambda$, λ como espaço discreto).

Seja $X = D \cup E$. $X \times C$ é um espaço completamente regular com um subconjunto denso $(D \times C)$ de cardinalidade α e com um subconjunto discreto $(E \times \{c\})$ onde $c \in C$ de cardinalidade λ .

Mais ainda, o conjunto $A = \{f : X \times C \rightarrow X \times C : f \text{ é contínua} \}$ tem cardinalidade λ pois $|D \times C| = \alpha$, $|X \times C| = \lambda$, logo $|A| = \lambda^\alpha = (2^\alpha)^\alpha = 2^\alpha = \lambda$.

Como $2^\lambda > \lambda$, pelo lema (2.23) temos que $X \times C$ não tem CIP.

2.4 Resultados independentes

Nesta seção vamos discutir a CIP no contexto de espaços não metrizáveis. Trabalharemos com a Reta de Sorgenfrey

Teorema 2.25 *Seja K a reta de Sorgenfrey. Então:*

- (i) K tem CIP
- (ii) K^2 não tem CIP
- (iii) Para cada inteiro $n \geq 2$, K^n não tem CIP
- (iv) K^ω não tem CIP
- (v) Para cada cardinal $\lambda \geq \mathfrak{c}$, K^λ tem CIP

Demonstração:

(i) Todo subconjunto aberto de K pode-se escrever como união enumerável disjunta de intervalos da forma $[a, b)$.

Para cada intervalo $[a, b)$, consideramos a função $f_{[a,b)} : [a, b) \rightarrow [a, b)$ dada por $f_{[a,b)}(x) = (x + b)/2$.

$f_{[a,b)}$ é um homeomorfismo de $[a, b)$ em $f_{[a,b)}([a, b))$, sem pontos fixos.

Se A é um subconjunto fechado de K , então $K - A$ é aberto. Logo $K - A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$ onde $[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$ se $i \neq j$. Seja $f : K \rightarrow K$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_{[a_i, b_i)}(x) & \text{se } x \in [a_i, b_i) \\ x & \text{se } x \in A \end{cases}$$

f é contínua :

* Seja $x \in K - A$. Existe um único $i < \omega$ tal que $x \in [a_i, b_i)$ e $f_{[a_i, b_i)}$ é contínua. Portanto f é contínua em x .

* Seja $x \in A$ e seja $\varepsilon > 0$. Se $[x, x + \varepsilon) \subset A$, então $f|_{[x, x + \varepsilon)}$ é a identidade e portanto f é contínua em x . Se $\varepsilon > 0$ $[x, x + \varepsilon) \cap K - A \neq \emptyset$, existe $j \in \omega$ tal que $x < a_j < x + \varepsilon$. Então $f([x, a_j)) \subset [x, a_j) \subset [x, x + \varepsilon)$:

se $y \in [x, a_j) \cap A \Rightarrow f(y) = y \in [x, a_j)$

se $y \in [x, a_j) \cap K - A \Rightarrow y \in [a_i, b_i)$ para algum $i \in \omega$ tal que $x < a_i < b_i < a_j \Rightarrow f(y) \in [a_i, b_i) \subset [x, a_j)$.

$fix(f) = A$ por construção.

Então K tem CIP.

(ii) K^2 é separável e tem cardinalidade 2^ω , então existem unicamente $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$ funções contínuas de K^2 em K^2 .

O conjunto $D = \{(x, -x) : x \in K\}$ é um subespaço discreto de K^2 , de cardinalidade 2^ω . Como $2^{2^\omega} > 2^\omega$, pelo lema (2.23) segue que K^2 não tem CIP.

(iii) e (iv) como em (ii), K^n e K^ω são espaços separáveis de cardinalidade 2^ω , e possuem um subconjunto discreto de cardinalidade 2^ω . Logo pelo lema (2.23) não tem CIP.

(v) K é um espaço zero-dimensional de peso 2^ω . Então pelo lema (2.15) e teorema (2.12) ($\lambda \geq 2^\omega$) K^λ tem CIP. ■

Ainda não foi determinada a relação entre CIP e todas as potências de K . Em particular não foi respondido se K^{ω_1} tem CIP.

Teorema 2.26 *Seja K a reta de Sorgenfrey. Então*

(i) *CH implica que K^{ω_1} tem CIP, e*

(ii) *$MA + (\neg CH)$ implica que K^{ω_1} não tem CIP.*

Demonstração:

(i) $\omega_1 = 2^\omega$ então K^{ω_1} tem CIP pelo teorema anterior.

(ii) $MA + (\neg CH)$ implica que $2^{\omega_1} = 2^\omega$, portanto $2^{2^\omega} > 2^{\omega_1}$. K^{ω_1} possui um subconjunto discreto de cardinalidade 2^ω ($\{ \{-x\} \times \pi_{1 < \alpha < \omega_1} \{x\} : x \in K \}$ é discreto) e é separável pelo teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery.

Então pelo lema (2.23) K^{ω_1} não tem CIP. ■

O seguinte é um exemplo de que a CIP não é conservada pelo produto de espaços perfeitamente normais.

Exemplo 2.27 : $(K \times S^1)^2$ não tem CIP.

$K \times S^1$ é um espaço perfeitamente normal (pois K é perfeitamente normal e S^1 é métrico) com a propriedade $W(forte)$. Então $K \times S^1$ tem CIP por lema de Ward. $(K \times S^1)^2$ é homeomorfo a $K \times K \times S^1 \times S^1$ que é separável de cardinalidade 2^ω e contém um subespaço discreto de cardinalidade 2^ω . Logo pelo lema (2.23) $(K \times S^1)^2$ não tem CIP. ■

Capítulo 3

A CIP em produtos não enumeráveis de espaços lineares

O objetivo deste capítulo é ver a demonstração de que $[0, 1]^\kappa$ não tem CIP, onde κ é um cardinal não enumerável. A prova vai a ser feita para um caso mais geral: o produto não enumerável de subespaços compactos convexos de espaços lineares normados.

3.1 Algumas definições

Cada X_α denota um subespaço convexo e compacto com mais de um ponto, de algum espaço linear normado $(L_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$. Observamos que cada espaço X_α é separável.

Se $A \subseteq \kappa$ e $x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, denotamos por x_A ou $\pi_A(x)$ a projeção de x sobre as coordenadas pertencentes ao conjunto A . Nas mesmas condições para A , X^A representa o espaço produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, e portanto $x_A \in X^A$. Às vezes escrevemos $x(\alpha)$ ao invés de x_α .

Se $A \cap B = \emptyset$, $x_A \in X^A$ e $x_B \in X^B$ definimos $x_A \frown x_B \in X^{A \cup B}$ por:

$$(x_A \frown x_B)_A = x_A \text{ e } (x_A \frown x_B)_B = x_B.$$

Se $A \subseteq \kappa$ é enumerável, então X^A é um espaço métrico. A métrica considerada no espaço X^A é a seguinte:

$$\rho^A(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \frac{\|x(\alpha) - y(\alpha)\|_\alpha}{2^{f_A(\alpha)}} \quad (3.1)$$

Onde $f_A : A \rightarrow \omega - \{0\}$ é uma função injetora.

Para cada α , consideramos $\rho^{\{\alpha\}}$ uma métrica limitada por 1 em L_α . Logo ρ^A é tal que: $\rho^A(x, y) \leq 1 \ \forall x, y \in X^A$

Por $B^A(a, r)$ denotamos a bola de centro a e raio $r \in \mathbb{R}$ em X^A com a métrica ρ^A .

Sabemos também que X_α é um espaço linear e convexo, portanto podemos considerar a seguinte combinação convexa de pontos de X^A :

$$[tx + (1 - t)y](\alpha) = tx(\alpha) + (1 - t)y(\alpha) \in X_\alpha \text{ para } t \in [0, 1], x, y \in X^A \text{ e } \alpha \in A$$

Observemos que para cada $\alpha \in A$ e para todo t no intervalo $[0, 1]$ temos:

$$\|x(\alpha) - [tx(\alpha) + (1 - t)y(\alpha)]\|_\alpha = (1 - t)\|x(\alpha) - y(\alpha)\|_\alpha \leq \|x(\alpha) - y(\alpha)\|_\alpha$$

Logo, pela definição da métrica ρ^A

$$\rho^A(x, tx + (1 - t)y) \leq \rho^A(x, y) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } \forall x, y \in X^A \quad (3.2)$$

Por último, se $F \subseteq X^A$, $Cl_A(F)$ denotará o fecho de F em X^A .

Definição 3.1 *Sejam κ um cardinal infinito e $A \in [\kappa]^\omega$. Para cada $\alpha \in \kappa$ seja X_α um espaço topológico. Se $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow X$ é uma função contínua, dizemos que f depende de A se e somente se $\forall x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ ($\pi_A(x) = \pi_A(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$).*

Definição 3.2 *Sejam $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ uma função contínua, e $f_A : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ a função $f_A = \pi_A \circ f$. Se f_A depende de A , definimos a função $f^A : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ como segue:*

$$f^A(\pi_A(x)) = \pi_A(f(x))$$

3.2 Lemas Geométricos

Lema 3.3 *Seja $A \in [\kappa]^\omega$, $\alpha \in A$, $f : X^A \longrightarrow X^A$ contínua, U um subconjunto aberto de X_α . Suponhamos que existe um ponto $a \in U$ tal que $\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f)) \cap U = \{a\}$ e que Γ é uma família de funções de X^A em X^A tal que:*

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \Gamma \quad \forall x \in \pi_{\{\alpha\}}^{-1}(U) \quad \rho^A(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_\varepsilon)) \cap U = \emptyset$$

então existe uma função $g : X^A \longrightarrow X^A$ tal que:

$$(iii) \quad \pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(g)) \cap U = \emptyset$$

$$(iv) \quad \forall x \in X^A \quad (x(\alpha) \notin U \Rightarrow g(x) = f(x))$$

Demonstração:

Sejam r_1, r_2 reais tais que $r_1 > r_2 > 0$ e $B^{\{\alpha\}}[a, r_1]$ e $B^{\{\alpha\}}[a, r_2]$ estão contidas em U .

Fixamos duas funções contínuas $\beta, \gamma : I \longrightarrow I$ tais que:

$$\beta(t) + \gamma(t) = 1 \quad \text{para } t \in I$$

$$\beta(t) = 0 \quad \text{para } t \geq r_1$$

$$\gamma(t) = 0 \quad \text{para } t \leq r_2$$

Consideramos também a função $\varphi : \{x \in X^A : r_1 \geq \rho^{\{\alpha\}}(x(\alpha), a) \geq r_2\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\varphi(x) = \rho^A(x, f(x))$.

Vemos primeiro que φ é positiva pois $\pi_{\{\alpha\}}(\text{dom}(\varphi)) \subseteq U - \{a\}$ e por hipótese $\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f)) \cap U = \{a\}$, portanto $\pi_{\{\alpha\}}(\text{dom}(\varphi)) \cap \pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f)) = \emptyset$.

Logo para cada $x \in \text{dom}(\varphi)$, temos $\rho^{\{\alpha\}}(x, f(x)) > 0$ e então $\varphi(x) > 0$.

φ é contínua:

φ é composição de duas funções contínuas, a função $\chi : \text{dom}(\varphi) \longrightarrow X^A \times X^A$ definida por $\chi(x) = (x, f(x))$, e a função ρ^A .

χ é contínua pois $\pi_1 \circ \chi = \text{id}$ e $\pi_2 \circ \chi = f$ são funções contínuas.

X^A é compacto e $\text{dom}(\varphi)$ é um subconjunto fechado de X^A , então $\text{dom}(\varphi)$ é compacto.

Segue que $\text{im}(\varphi)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}_+$ e portanto existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(x) > \delta \quad \forall x \in \text{dom}(\varphi)$.

Seja ε , $0 < \varepsilon \leq \delta$, e definimos $g : X^A \longrightarrow X^A$ como segue:

$$g(x) = \beta(t)f_\varepsilon(x) + \gamma(t)f(x) \text{ onde } t = \rho^{\{\alpha\}}(x(\alpha), a)$$

Como X^A é convexo, $f_\varepsilon \in X^A$, $f(x) \in X^A$ e $g(x)$ está no segmento de extremos $f_\varepsilon(x)$ e $f(x)$, $g(x) \in X^A \quad \forall x \in X^A$.

Falta provar que g satisfaz as condições (iii) e (iv) do enunciado.

Para provar (iv) seja $x \in X^A$ tal que $x(\alpha) \notin U$, então $\rho^{\{\alpha\}}(x(\alpha), a) > r_1$.

Mas β restrita ao intervalo $[r_1, 1]$ é a função nula então $g(x) = f(x)$.

Para provar (iii) seja $x \in X^A$ tal que $x(\alpha) \in U$, basta ver que $x(\alpha) \notin \pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(g))$.

Consideramos três casos.

caso 1: $\rho^{\{\alpha\}}(a, x(\alpha)) \geq r_1$

Como $t \geq r_1$ temos que

$$\beta(t) = 0 \Rightarrow g(x) = f(x)$$

$\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f)) \cap U = \{a\}$, mas $x(\alpha) \neq a$ então $g(x) \neq x$.

caso 2: $\rho^{\{\alpha\}}(a, x(\alpha)) \leq r_2$

Como $t \leq r_2$ temos que

$$\gamma(t) = 0 \Rightarrow g(x) = f_\varepsilon(x)$$

$\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_\varepsilon)) \cap U = \emptyset$ então $g(x) \neq x$.

caso 3: $r_2 < \rho^{\{\alpha\}}(a, x(\alpha)) < r_1$

Como $t = \rho^{\{\alpha\}}(a, x(\alpha)) \in I$ e $x(\alpha) \in U$, pela desigualdade (3.2) e por (i) temos:

$$\rho^A(f(x), \beta(t)f_\varepsilon(x) + \gamma(t)f(x)) \leq \rho^A(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon \Rightarrow \rho^A(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

Mas $x \in \text{dom}(\varphi)$, e portanto $\rho^A(f(x), x) > \delta \geq \varepsilon$. Segue que:

$$\begin{aligned} \rho^A(g(x), x) &\geq \rho^A(f(x), x) - \rho^A(f(x), g(x)) > \delta - \varepsilon \geq 0 \\ &\Rightarrow \rho^A(g(x), x) > 0 \Rightarrow g(x) \neq x \end{aligned}$$

■

Lema 3.4 *Sejam $A \in [\kappa]^\omega$, $\alpha \in A$, $f : X^A \longrightarrow X^A$ uma função contínua. Suponhamos dados $p, q \in X_\alpha$, $p \neq q$ e duas famílias (Φ, Γ) de funções de X^A em X^A tais que:*

$$(i) \forall \varepsilon > 0 \exists f_\varepsilon \in \Phi, \exists g_\varepsilon \in \Gamma \text{ tais que } \forall x \in X^A \quad \rho^A(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon \text{ e}$$

$$\rho^A(f(x), g_\varepsilon(x)) < \varepsilon$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \quad \pi_{\{\alpha\}}(fix(f_\varepsilon)) = \{p\} \quad \text{e} \quad \pi_{\{\alpha\}}(fix(g_\varepsilon)) = \{q\}$$

Então existe $r \in X_\alpha$ tal que $r \in \pi_{\{\alpha\}}(fix(f))$ mas $r \notin \{p, q\}$.

Demonstração:

Suponhamos que $\pi_{\{\alpha\}}(fix(f)) \subseteq \{p, q\}$. Vamos chegar a uma contradição usando duas vezes o lema (3.3).

Escolhemos dois abertos U_p, U_q com fechos disjuntos, tais que $p \in U_p \subseteq X_\alpha$, $q \in U_q \subseteq X_\alpha$. Se $q \in \pi_{\{\alpha\}}(fix(f))$, f, Φ e U_q estão nas condições de hipóteses do lema (3.3). Obtemos então uma função $g : X^A \longrightarrow X^A$ tal que:

$$\begin{cases} \pi_{\{\alpha\}}(fix(g)) \cap U_q = \emptyset \\ \forall x \in X^A \text{ com } x(\alpha) \notin U_q, \quad g(x) = f(x) \end{cases}$$

Se $q \notin \pi_{\{\alpha\}}(fix(f))$, seja $g = f$.

Em ambos casos $\pi_{\{\alpha\}}(fix(g)) \subseteq \{p\}$ e $\forall x \in X^A$ tal que $x(\alpha) \in \overline{U_p}$, $g(x) = f(x)$.

Aplicando de novo o lema 3.3, desta vez para g, Γ e U_p , obtemos uma função

$h : X^A \longrightarrow X^A$ tal que:

$$\begin{cases} \pi_{\{\alpha\}}(fix(h)) \cap U_p = \emptyset \\ \forall x \in X^A \text{ com } x(\alpha) \notin U_p, \quad h(x) = g(x) \end{cases}$$

Se $r \in \pi_{\{\alpha\}}(fix(h))$, então $r \notin U_p$, e como $\pi_{\{\alpha\}}(fix(g)) \subset \{p\}$, temos que $fix(h) = \emptyset$.

Por outro lado sabemos que h é uma função contínua e que para todo $\alpha \in A$ X_α é um espaço linear normado, compacto e convexo, então h tem ponto fixo, i.e. $fix(h) \neq \emptyset$ (ver apêndice: teorema de Shauder). ■

Definição 3.5 *Sejam $B \subseteq A$, $x_B \in X^B$, $f : X^A \rightarrow X^A$. Definimos a função $f_{x_B} : X^{A-B} \rightarrow X^{A-B}$ por :*

$$f_{x_B}(y_{A-B}) = (f(x_B \frown y_{A-B}))_{A-B}$$

Lema 3.6 *Sejam $A, B \in [\kappa]^\omega$, $B \subseteq A$ $f : X^A \rightarrow X^A$ tais que existe $x \in \text{fix}(f)$ e a função $f_B = \pi_B f$ depende de B . Se y_{A-B} é um ponto fixo de f_{x_B} , então $x_B \frown y_{A-B}$ é um ponto fixo de f , onde $x_B = \pi_B(x)$.*

Demonstração:

Seja x um ponto fixo de f , então $f_B(x) = (f(x))_B = x_B$

f_B depende de B , logo $(f(x_B \frown y_{A-B}))_B = (f(x))_B = x_B$. Por outro lado temos que $y_{A-B} = f_{x_B}(y_{A-B}) = (f(x_B \frown y_{A-B}))_{A-B}$.

Portanto $f(x_B \frown y_{A-B}) = x_B \frown y_{A-B}$. ■

Lema 3.7 *Sejam $A, B \in [\kappa]^\omega$, $B \subseteq A$, $\alpha \in A - B$, $F \subseteq X^A$ fechado, $p_0, p_1 \in X_\alpha$, $p_0 \neq p_1$. Sejam também F_{p_0} e F_{p_1} subconjuntos de F tais que $\overline{\pi_B(F_{p_0})} \cap \overline{\pi_B(F_{p_1})} \neq \emptyset$ e com as seguintes propriedades:*

- (i) $\pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B(F_{p_i})) \cap F) = \{p_i\}$ para $i = 0, 1$
- (ii) $\pi_{\{\alpha\}}(F) \subseteq \{p_0, p_1\}$

Suponhamos que $f : X^A \rightarrow X^A$ é uma função contínua tal que f_B depende de B e para todo $x \in F$ tem-se $f(x) = x$.

Então existe $x \in X^A - F$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração:

Vamos supor, por contradição, que $f(x) = x \Leftrightarrow x \in F$.

Observações:

Seja $x \in F$. Consideramos o conjunto de todos os pontos fixos de f_{x_B} . Pelo lema (3.6), se $y_{A-B} \in \text{fix}(f_{x_B})$, então $x_B \frown y_{A-B} \in \text{fix}(f)$. Nesse caso, pela suposição de que $x \in \text{fix}(f) \Leftrightarrow x \in F$, temos que $x_B \frown y_{A-B} \in F$.

Por hipótese $F_{p_i} \subseteq F$ para $i = 0, 1$, então se $x \in F_{p_i}$ e $y_{A-B} \in \text{fix}(f_{x_B})$ temos que $x_B \frown y_{A-B} \in F$. Porém também temos que $x_B \frown y_{A-B} \in \pi_B^{-1}(\pi_B F_{p_i})$. Segue que $x_B \frown y_{A-B} \in (\pi_B^{-1}(\pi_B F_{p_i})) \cap F$ e portanto que $\pi_{\{\alpha\}}(x_B \frown y_{A-B}) \in \pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B F_{p_i}) \cap F)$. Então por (i) temos $\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_{x_B})) \subseteq \{p_i\}$.

Em geral por (ii) temos $\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_{x_B})) \subseteq \{p_0, p_1\} \forall x \in F$, pois se $y_{A-B} \in \text{fix}(f_{x_B})$, então $x_B \frown y_{A-B} \in F$, e como $\alpha \in A - B$ $\pi_{\{\alpha\}}(x_B \frown y_{A-B}) = \pi_{\{\alpha\}}(y_{A-B})$.

Seja $z \in F$ tal que $z_B \in \overline{\pi_B(F_{p_0})} \cap \overline{\pi_B(F_{p_1})}$. Existe z com estas características pois:

- (1) $\overline{\pi_B(F_{p_0})} \cap \overline{\pi_B(F_{p_1})} \neq \emptyset$
- (2) F é compacto e $\pi_B(F_{p_i}) \subseteq \pi_B(F)$ logo $\overline{\pi_B(F_{p_i})} \subseteq \overline{\pi_B(F)} = \pi_B(F)$.

Vamos aplicar o lema (3.4) para: $f_{z_B} : X^{A-B} \longrightarrow X^{A-B}$, $\Phi = \{f_{x_B} : x \in F_{p_0}\}$ e $\Gamma = \{f_{x_B} : x \in F_{p_1}\}$.

Existe então, $r \in X^\alpha$, $r \notin \{p_0, p_1\}$ tal que $r \in \pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_{z_B}))$ i.e $\exists y_{A-B} \in \text{fix}(f_{z_B})$ com $\pi_{\{\alpha\}}(y_{A-B}) = r$. Portanto $\pi_{\{\alpha\}}(z_B \frown y_{A-B}) \notin \{p_0, p_1\}$, logo $z_B \frown y_{A-B} \notin F$. Mas como $y_{A-B} \in \text{fix}(f_{z_B})$ e $z \in F$, temos que $z_B \frown y_{A-B} \in F$.

Chegamos então a contradição buscada.

Só resta provar que f_{z_B} , Φ , Γ estão nas condições do lema (3.4).

Chamando de f_ε aos elementos de Φ e de g_ε aos elementos de Γ temos que $\forall \varepsilon > 0$

$$\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(f_\varepsilon)) = \{p_0\}$$

e

$$\pi_{\{\alpha\}}(\text{fix}(g_\varepsilon)) = \{p_1\}$$

Portanto a condição (ii) do lema (3.4) foi verificada nas observações do início da prova.

Para provar a condição (i) fixamos $\varepsilon > 0$. Como f é contínua e X^A é compacto, f é uniformemente contínua em X^A . Então existe $\delta > 0$ tal que $\rho^A(f(x), f(x')) < \varepsilon$ sempre que $\rho^A(x, x') < \delta$.

$z_B \in \overline{\pi_B(F_{p_0})}$ portanto existe $x \in F_{p_0}$ tal que $\rho^B(z_B, x_B) < \delta$.

Afirmação: $\rho^{A-B}(f_{z_B}(y_{A-B}), f_{x_B}(y_{A-B})) < \varepsilon \quad \forall y_{A-B} \in X^{A-B}$

prova:

$\forall y_{A-B} \in X^{A-B} \quad \rho^A(z_B \smallfrown y_{A-B}, x_B \smallfrown y_{A-B}) = \rho^B(z_B, x_B) < \delta$. Segue que $\rho^A(f(z_B \smallfrown y_{A-B}), f(x_B \smallfrown y_{A-B})) < \varepsilon$, então $\rho^{A-B}(f_{z_B}(y_{A-B}), f_{x_B}(y_{A-B})) < \varepsilon$.

Logo a condição (i) é satisfeita por Φ . Analogamente (i) é satisfeita por Γ . ■

Lema 3.8 *Seja $A \in [\kappa]^\omega$. Suponha que $F \subseteq X^\kappa$ é fechado e que $f : X^\kappa \longrightarrow X^\kappa$ é uma função contínua tal que $f_A = \pi_A f$ depende de A . Se existe $x_A \in (X^A - \pi_A(F))$ tal que $f^A(x_A) = x_A$, então existe $x \in (X^\kappa - F)$ tal que $x = f(x)$. (lembramos que $f^A(\pi_A(x)) = \pi_A(f(x))$)*

Demonstração:

Seja $x_A \in (X^A - \pi_A(F))$ tal que $f^A(x_A) = x_A$ e seja $f_{x_A} : X^{\kappa-A} \longrightarrow X^{\kappa-A}$.

f_{x_A} é contínua e para cada $\alpha \in \kappa - A$, X_α é um espaço compacto, convexo, linear normado, então f_{x_A} tem ponto fixo (ver apêndice: teorema A.8).

Seja $y_{\kappa-A}$ ponto fixo de f_{x_A} . Temos que:

$$(1) \quad f_{x_A}(y_{\kappa-A}) = (f(x_A \smallfrown y_{\kappa-A}))_{\kappa-A} = y_{\kappa-A}$$

$$(2) \quad f^A(x_A) = x_A \text{ por hipótese, mas } f^A(x_A) = f(x_A \smallfrown y_{\kappa-A})_A \text{ por definição.}$$

Concluimos de (1) e (2) que $f(x_A \smallfrown y_{\kappa-A}) = x_A \smallfrown y_{\kappa-A}$ i.e. $x_A \smallfrown y_{\kappa-A}$ é ponto fixo de f .

Como $x_A \notin \pi_A(F)$, $x_A \smallfrown y_{\kappa-A} \notin F$. ■

Definição 3.9 *Um conjunto $F \subseteq 2^\kappa$ é chamado conjunto splitting se F é fechado e existe um conjunto estacionário $S \subseteq [\kappa]^\omega$ tal que para cada $B \in S$ existem $\alpha \in \kappa - B$, $F_0, F_1 \subseteq F$ tais que:*

$$(i) \quad Cl_B(\pi_B(F_0)) \cap Cl_B(\pi_B(F_1)) \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad \pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap F) = \{\alpha\} \quad \text{para } i = 0, 1$$

Teorema 3.10 *Suponhamos que κ é um cardinal não enumerável e que para cada $\alpha < \kappa$, X_α é um subconjunto compacto e convexo com pelo menos dois pontos de al-*

um espaço linear normado. Se existe um conjunto splitting $F \subseteq 2^\kappa$, então $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ não tem CIP.

Demonstração:

Para cada $\alpha < \kappa$ escolhemos $p_0^\alpha, p_1^\alpha \in X_\alpha$ diferentes. Vamos trabalhar com uma cópia homeomorfa de um conjunto splitting F em $\prod_{\alpha < \kappa} \{p_0^\alpha, p_1^\alpha\}$ que é um subconjunto fechado de $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Mostraremos que para esta cópia denotada também por F , não existe uma função contínua $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ tal que $f(x) = x \Leftrightarrow x \in F$.

Suponhamos que $f(x) = x$ para todo $x \in F$. Seja $C_f = \{A \in [\kappa]^\omega : f_A \text{ depende de } A\}$. C_f é c.u.b (ver apêndice: lema A.5). Sejam $B \in C_f \cap S$ e $\alpha \in \kappa - B$ onde S e α são tomados da definição de conjunto splitting.

Fixamos também $A \in C_f$ tal que $B \subseteq A$ e $\alpha \in A$. Observamos que existe A com essas características pois C_f é não limitado em $[\kappa]^\omega$.

Aplicamos o lema (3.7) para $F_{p_i} = \pi_A(F_i)$ e $f^A : X^A \rightarrow X^A$. A função f^A e os conjuntos F_{p_i} estão nas condições de hipótese do lema pela definição de conjunto splitting.

Então, por lema (3.7) existe $x_A \notin \pi_A(F)$ tal que $f^A(x_A) = x_A$.

Logo pelo lema (3.8), existe $x \notin F$ tal que $x = f(x)$. ■

3.3 Construção de um conjunto splitting

Teorema 3.11 *Existe um conjunto splitting $F \subseteq 2^{\omega_1}$.*

Demonstração:

Vamos construir conjuntos fechados $\pi_\alpha(F)$ por indução sobre α com $\omega < \alpha \leq \omega_1$.

Vamos requerer que:

- (i) $\forall \beta < \alpha \ \pi_\beta(F) = \pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F))$
- (ii) Se α é ordinal limite então $\pi_\alpha(F) = \{x \in 2^\alpha : \forall \beta < \alpha \ x_\beta \in \pi_\beta(F)\}$

É uma construção por limite inverso.

Se exigirá também que $\forall \alpha, \omega \leq \alpha \leq \omega_1, 1_\alpha$ seja não isolado em $\pi_\alpha(F)$. Onde $1 \in 2^{\omega_1}$ é tal que $1(\beta) = 1 \forall \beta < \omega_1$.

* para $\alpha = \omega$ temos $\pi_\omega(F) = 2^\omega$

* para α ordinal limite :

Suponhamos que $\forall \beta < \alpha, \pi_\beta(F)$ é um subconjunto fechado de 2^β , com 1_β ponto não isolado de $\pi_\beta(F)$.

Pela condição (ii), 1_α é ponto não isolado de $\pi_\alpha(F)$. Caso contrário, se 1_α é isolado em $\pi_\alpha(F)$, existe um aberto básico U_α de 2^α tal que $1_\alpha \in U_\alpha$ e $(U_\alpha - \{1_\alpha\}) \cap \pi_\alpha(F) = \emptyset$. Como α é ordinal limite, existe $\beta < \alpha$ tal que

$$U_\alpha = \pi_\beta^\alpha(U_\alpha) \times \prod_{\beta \leq \lambda < \alpha} 2$$

$\pi_\beta^\alpha(U_\alpha)$ é aberto de 2^β e $1_\beta \in \pi_\beta^\alpha(U_\alpha)$. Vamos provar que $(\pi_\beta^\alpha(U_\alpha) - \{1_\beta\}) \cap \pi_\beta(F) = \emptyset$ o que seria uma contradição com 1_β não isolado em $\pi_\beta(F)$.

Suponhamos que existe $y_\beta \in (\pi_\beta^\alpha(U_\alpha) - \{1_\beta\}) \cap \pi_\beta(F)$. Teríamos então que :

$$(1) \quad y_\beta \in \pi_\beta(F) = \pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F)) \Rightarrow \exists x \in \pi_\alpha(F) \text{ tal que } x_\beta = y_\beta$$

$$(2) \quad y_\beta \in (\pi_\beta^\alpha(U_\alpha) - \{1_\beta\}) \text{ i.e. } y_\beta \in \pi_\beta^\alpha(U_\alpha) \text{ e } y_\beta \neq 1_\beta$$

Portanto $x \neq 1_\alpha$ e $x \in (\pi_\beta^\alpha)^{-1}(\pi_\beta^\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$. De (1) e (2), $x \in (U_\alpha - \{1_\alpha\}) \cap \pi_\alpha(F) = \emptyset$.

Também pela condição (ii) e por ser F compacto, temos que para cada $\beta < \alpha, \pi_\beta(F) = \pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F))$.

Falta provar que $\pi_\alpha(F)$ é um subconjunto fechado de 2^α .

Seja $x \in 2^\alpha - \pi_\alpha(F)$. Sabemos que para cada $\beta < \alpha, \pi_\beta(F)$ é um subconjunto fechado de 2^β . Como $x \notin \pi_\alpha(F)$, existe $\beta < \alpha$ tal que $x_\beta \notin \pi_\beta(F)$ e portanto existe U_β uma vizinhança aberta de x_β em 2^β tal que $U_\beta \cap \pi_\beta(F) = \emptyset$.

Seja $U = U_\beta \times \prod_{\beta \leq \lambda < \alpha} 2$. U é um subconjunto aberto de 2^α e $x \in U$.

Suponhamos que $U \cap \pi_\alpha(F) \neq \emptyset$ e seja $y \in U \cap \pi_\alpha(F)$. Como $y \in \pi_\alpha(F)$ $y_\beta \in \pi_\beta(F)$ e como $y \in U, y_\beta \in U_\beta$. Temos então que $y_\beta \in U_\beta \cap \pi_\beta(F)$ o que contradiz

$$U_\beta \cap \pi_\beta(F) = \emptyset.$$

Logo $U \cap \pi_\alpha(F) = \emptyset$ e $\pi_\alpha(F)$ é um subconjunto fechado de 2^α .

* Para α ordinal sucessor:

Suponhamos que $\alpha = \beta + 1$ e que $\forall \gamma \leq \beta$, $\pi_\gamma(F)$ satisfaz a condição (i), com 1_γ não isolado em $\pi_\gamma(F)$.

Como β é enumerável, 2^β tem uma base enumerável para 1_β . Além disso 2^β é zero-dimensional, portanto existe uma sequência $(U_n^\beta)_{n \leq \omega}$ de subconjuntos abertos-e-fechados de 2^β tal que:

(iii) $(U_n^\beta)_{n \leq \omega}$ é uma base de vizinhanças de 1_β tal que

$$U_{n+1}^\beta \cap \pi_\beta(F) \subseteq \overline{U_{n+1}^\beta \cap \pi_\beta(F)} \subseteq U_n^\beta \cap \pi_\beta(F) \quad \forall n \in \omega$$

Para cada $n \in \omega$, seja $V_n^\beta = U_n^\beta \cap \pi_\beta(F)$

(iv) $\forall n (V_n^\beta - V_{n+1}^\beta) \neq \emptyset$

(v) $V_0^\beta = \pi_\beta(F)$.

Vamos definir $\pi_\alpha(F)$ estendendo $\pi_\beta(F)$ da seguinte forma:

Se $x_\beta \in (V_{2k}^\beta - V_{2k+1}^\beta)$ para algum $k \in \omega$, então $x(\beta) = 0$

Se $x_\beta \in (V_{2k+1}^\beta - V_{2k+2}^\beta)$ para algum $k \in \omega$, então $x(\beta) = 1$

Se $x_\beta = 1_\beta$, então $x(\beta)$ pode ser 0 ou 1

$\pi_\alpha(F)$ assim definido satisfaz a condição (i):

se $x \in \pi_\alpha(F)$, então $x_\beta \in \pi_\beta(F)$ e portanto $\pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F)) \subseteq \pi_\beta(F)$, $\forall \beta < \alpha$.

Por (v), $x_\beta \in \pi_\beta(F) \Leftrightarrow x_\beta \in V_0^\beta$. Se $x_\beta \in V_0^\beta$, então $x_\beta \in (V_{2k+i}^\beta - V_{2k+i+1}^\beta)$ para algum $k \in \omega$ ou $x_\beta = 1_\beta$. Em ambos casos $x_\beta \in \pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F))$. Logo $\pi_\beta(F) \subseteq \pi_\beta^\alpha(\pi_\alpha(F))$

1_α é ponto não isolado em $\pi_\alpha(F)$:

Suponhamos que 1_α é isolado em $\pi_\alpha(F)$. Neste caso existe um aberto $U \subseteq 2^\beta$ tal que

$$1_\beta \in U \text{ e } (\pi_\alpha(F) - \{1_\alpha\}) \cap (U \times \{1\}) = \emptyset. \quad (1.3)$$

Por (iii), existe $n \in \omega$ tal que $U_n^\beta \times \{1\} \subseteq U \times \{1\}$. Logo $V_n^\beta \times \{1\} \subseteq (U \cap \pi_\beta(F)) \times \{1\}$.

Seja $y \in (V_{2n+1}^\beta - V_{2n+2}^\beta)$. Pela definição de $\pi_\alpha(F)$, $y \sim 1 \in (\pi_\alpha(F) - \{1_\alpha\}) \cap U \times \{1\}$, contra a igualdade (1.3).

$\pi_\alpha(F)$ é fechado em 2^α : Seja $x \in 2^\alpha - \pi_\alpha(F)$. Pode acontecer:

1. $x_\beta \notin \pi_\beta(F)$, então existe U vizinhança aberta de x_β em 2^β tal que $U \cap \pi_\beta(F) = \emptyset$.
Então $U \times \{x(\beta)\}$ é vizinhança aberta de x e é disjunta de $\pi_\alpha(F)$; ou
2. $x_\beta \in \pi_\beta(F)$ e então $x_\beta \in (U_{2k+i}^\beta - U_{2k+i+1}^\beta)$ para algum k e $x(\beta) = 1 - i$ com $i \in \{0, 1\}$.

Como U_n^β é aberto e fechado para cada n , $(U_{2k+i}^\beta - U_{2k+i+1}^\beta) \times \{1 - i\}$ é vizinhança aberta e fechada de x e $\pi_\alpha(F) \cap (U_{2k+i}^\beta - U_{2k+i+1}^\beta) \times \{1 - i\} = \emptyset$.

Seja $F = \pi_{\omega_1}(F)$. Vamos provar que F é um conjunto splitting de 2^{ω_1} .

Seja $S = \{B \in [\omega_1]^\omega : B \in \omega_1\}$ ou seja que S é um conjunto de ordinais. S é estacionário pois S é c.u.b de $[\omega_1]^\omega$.

Fixamos $B \in S$ e consideramos $\alpha = B$ ($\alpha \in \omega_1 - B$). Seja

$$F_i = \{x \in F : \pi_\alpha(x) \in \bigcup_{k \in \omega} (U_{2k+i}^\alpha - U_{2k+i+1}^\alpha)\}$$

$1_\alpha \in Cl_B(\pi_B(F_0)) \cap Cl_B(\pi_B(F_1))$:

Seja U uma vizinhança aberta de 1_α em 2^α . Como $(U_n^\alpha)_{n \leq \omega}$ é uma base para 1_α com $U_{n+1}^\alpha \subset U_n^\alpha$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $1_\alpha \in U_n^\alpha \subset U \ \forall n \geq n_0$.

$V_n^\alpha = U_n^\alpha \cap \pi_\alpha(F)$, então $V_n^\alpha \subset U$, $\forall n \geq n_0$.

Seja $k \in \omega$ tal que $2k \geq n_0$. Temos que $V_{2k+i+1}^\alpha \subset V_{2k+i}^\alpha \subset U$, logo $(V_{2k+i}^\alpha - V_{2k+i+1}^\alpha) \subset U$.

Por (iv), $V_{2k+i}^\alpha - V_{2k+i+1}^\alpha \neq \emptyset$. Portanto existe $x \in F$ tal que $\pi_\alpha(x) \in (U_{2k+i}^\alpha - U_{2k+i+1}^\alpha) \subset U$, então $F_i \cap U \neq \emptyset$ para $i = 0, 1$.

Para provar que $\pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap F) = \{i\}$ para $i = 0, 1$, seja $x \in \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(F_i)) \cap F$.

$$\pi_\alpha(x) \in \pi_\alpha(F_i) \subset \bigcup_{k \in \omega} (U_{2k+i}^\alpha - U_{2k+i+1}^\alpha)$$

e como

$$x \in F \text{ temos que } \pi_\alpha(x) \in \bigcup_{k \in \omega} (V_{2k+i}^\alpha - V_{2k+i+1}^\alpha) \text{ e } \pi_{\alpha+1}(x) \in \pi_{\alpha+1}(F).$$

portanto $\pi_{\{\alpha\}}(x) = x(\alpha) = i$. Como $\alpha = B$, $x(\alpha) = i \quad \forall x \in \pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap F$. Segue que $\pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap F) = \{i\}$ para $i = 0, 1$. ■

Lema 3.12 *Se existe um conjunto splitting $F \subseteq 2^{\omega_1}$, então existe um conjunto splitting $H \subseteq 2^\kappa$ para todo cardinal não enumerável κ .*

Demonstração:

Sejam $F \subseteq 2^{\omega_1}$ conjunto splitting e S_F o conjunto estacionário para F . Se $B' \in S_F$, sejam $\alpha_{B'} \in (\omega_1 - B')$ e $F_0^{B'}$, $F_1^{B'}$ nas condições da definição de conjunto splitting.

afirmação: $H = F \times 2^{\kappa - \omega_1}$ é um conjunto splitting de 2^κ

prova:

1) H é fechado de 2^κ pois F é fechado de 2^{ω_1}

2) $S = \{B \in [\kappa]^\omega : B \cap \omega_1 \in S_F\}$ é um conjunto estacionário de $[\kappa]^\omega$:

Seja $C \subset [\kappa]^\omega$ c.u.b. Basta provar que existe $\gamma_0 \in C$ tal que $(\gamma_0 \cap \omega_1) \in S_F$, pois nesse caso $\gamma_0 \in S \cap C$.

Seja $C' = \{\gamma' \in [\omega_1]^\omega : \gamma' = \gamma \cap \omega_1 \text{ com } \gamma \in C\}$

- C é fechado, portanto C' é fechado.

- C' é não limitado em $[\omega_1]^\omega$:

se $\delta \in [\omega_1]^\omega$, então existe $\gamma \in C$ tal que $\delta \subseteq \gamma$, pois C é c.u.b.

Logo $\delta = \delta \cap \omega_1 \subseteq \gamma \cap \omega_1 \in C'$. Segue que $C' \subset [\omega_1]^\omega$ é c.u.b. Como $S_F \subset [\omega_1]^\omega$ é conjunto estacionário, temos que existe $\gamma'_0 \in C' \cap S_F$ e então existe $\gamma_0 \in C$ tal que $\gamma'_0 = \gamma_0 \cap \omega_1 \in S_F$.

3) Sejam $B \in S$ e $B' = B \cap \omega_1 \in S_F$, e sejam :

$$F_0 = F_0^{B'} \times 2^{\kappa - \omega_1}$$

$$F_1 = F_1^{B'} \times 2^{\kappa - \omega_1}$$

Verificamos as condições:

(i) $Cl_B(\pi_B(F_0)) \cap Cl_B(\pi_B(F_1)) \neq \emptyset$:

$$\pi_B(F_0) = \pi_{B'}(F_0^{B'}) \times 2^{B-B'} \text{ pois } F_0^{B'} \subseteq 2^{\omega_1}.$$

$$\text{De igual forma : } \pi_B(F_1) = \pi_{B'}(F_1^{B'}) \times 2^{B-B'}$$

Então,

$$\begin{aligned} Cl_B(\pi_B(F_0)) \cap Cl_B(\pi_B(F_1)) &= Cl_{B'}(F_0^{B'}) \times 2^{B-B'} \cap Cl_{B'}(F_1^{B'}) \times 2^{B-B'} = \\ &= [Cl_{B'}(F_0^{B'}) \cap Cl_{B'}(F_1^{B'})] \times 2^{B-B'} \neq \emptyset \text{ pois } Cl_{B'}(F_0^{B'}) \cap Cl_{B'}(F_1^{B'}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

(ii) Seja $\alpha = \alpha_{B'}$. Temos que provar que $\pi_{\{\alpha\}}(\pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap H) = \{i\}$ para $i = 0, 1$.

$\alpha_{B'} \in (\omega_1 - B')$ e $B' = B \cap \omega_1$ portanto $\alpha_{B'} \in (\omega_1 - B) \subset (\kappa - B)$.

$$\pi_B(F_i) = \pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'}) \times 2^{B-B'}, \text{ então } \pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) = (\pi_{B'}^{\omega_1})^{-1}(\pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'})) \times 2^{\kappa-\omega_1}$$

$$\text{Logo } \pi_B^{-1}(\pi_B(F_i)) \cap H = [(\pi_{B'}^{\omega_1})^{-1}(\pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'})) \times 2^{\kappa-\omega_1}] \cap (F \times 2^{\kappa-\omega_1}) =$$

$$= (\pi_{B'}^{\omega_1})^{-1}(\pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'})) \cap F \times 2^{\kappa-\omega_1}$$

$$\text{portanto } \pi_{\{\alpha\}}((\pi_{B'}^{\omega_1})^{-1}(\pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'})) \cap F \times 2^{\kappa-\omega_1}) = \pi_{\{\alpha\}}^{\omega_1}((\pi_{B'}^{\omega_1})^{-1}(\pi_{B'}^{\omega_1}(F_i^{B'})) \cap F) = \{i\} \blacksquare$$

Os seguintes teoremas são consequência imediata dos teoremas (3.10) e (3.11) e do lema (3.12).

Teorema 3.13 *Para cada cardinal κ não enumerável, existe um conjunto splitting $F \subset 2^\kappa$.*

Teorema 3.14 *Seja κ um cardinal não enumerável. Suponhamos que para cada $\alpha < \kappa$, X_α é um subespaço compacto convexo com mais de um ponto, de um espaço linear normado. Então $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ não tem CIP.*

Capítulo 4

Conjuntos de pontos fixos de homeomorfismos : dois exemplos

O objetivo deste capítulo é provar que o cubo de Hilbert Q e o cubo de Cantor D^τ onde τ é um cardinal infinito, tem CIPH.

4.1 CIPH no cubo de Hilbert

Lema 4.1 *Todo subconjunto aberto de um espaço com CIPH, tem CIPH.*

Demonstração:

Seja X um espaço com CIPH, e seja U um subconjunto aberto de X . Vamos provar que U tem CIPH.

Sejam A um subconjunto fechado de U , e $B = X - U$. Como $X - (A \cup B) = U - A$ que é aberto em U , temos que $X - (A \cup B)$ é aberto em X e portanto $A \cup B$ é um subconjunto fechado de X . Por hipótese, existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $\text{fix}(h) = A \cup B$

Seja $f = h|_U$, $f : U \rightarrow U$ e $f(U) = U$ pois $f(x) = x \ \forall x \in X - U$ e h é bijetora.

Então $f^{-1} = h^{-1}|_U$ e f é um homeomorfismo.

$\text{fix}(f) = \text{fix}(h) \cap U = A$. como queríamos. ■

Teorema 4.2 *Se X é um espaço métrico e A é um subconjunto fechado não vazio de $X \times S^1$ ($X \times \mathbb{R}$), então existe um autohomeomorfismo de $X \times S^1$ ($X \times \mathbb{R}$) com A como conjunto de pontos fixos (i.e. $X \times S^1$ e $X \times \mathbb{R}$ tem CIPH).*

Demonstração:

Sejam d_1 uma métrica limitada por 1 para X , e d_2 a métrica do comprimento do arco em S^1 . Definimos em $X \times S^1$ a seguinte métrica: se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ são pontos de $X \times S^1$ então

$$[d(u, v)]^2 = [d_1(u_1, v_1)]^2 + [d_2(u_2, v_2)]^2$$

Se $z = (x, p) \in X \times S^1$ e $q \in S^1$, consideramos a seguinte S^1 -ação em $X \times S^1$: $zq = (x, pq)$ onde pq denota o produto de números complexos.

Dado $A \subset X \times S^1$, fechado não vazio, definimos $f : X \times S^1 \longrightarrow X \times S^1$ por :

$$f(z) = ze^{ia(z)} \quad \text{onde } a(z) = 1/2 \cdot d(z, A)$$

f é contínua:

Se $z = (x, p) \in X \times S^1 \Rightarrow f(z) = (x, pe^{ia(z)}) \Rightarrow \pi_X f(z) = \pi_X(z)$ e $\pi_{S^1} f(z) = pe^{ia(z)}$. Como d é uma distância, a é contínua, portanto $\pi_{S^1} f$ é também contínua. $\pi_X f$ é contínua por ser uma projeção. Logo a função f é contínua.

A é o conjunto de pontos fixos de f :

Se $z \in A$, $a(z) = 0$ e portanto $f(z) = z$.

Se $z = (x, p) \notin A$, temos que $0 < d(z, A) < 2\pi$ (pois $d_1 \leq 1$ e $d_2 \leq \pi$). Daí $0 < a(z) < 2\pi$. Então $pe^{ia(z)} \neq p$ e $f(z) \neq z$.

f é injetora:

Suponhamos $f(y) = f(z)$, então por definição de f , $\pi_X(y) = \pi_X(z)$. Logo se

$y = (x, p)$, temos que $z = (x, q)$ e para algum número real t , $p = qe^{it}$ com $d(y, z) = |t| \leq \pi$. Portanto se $q = e^{i\theta}$, $p = e^{i(\theta+t)}$.

$f(y) = f(z) \Rightarrow pe^{ia(y)} = qe^{ia(z)} \Rightarrow e^{i(\theta+t+a(y))} = e^{i(\theta+a(z))} \Rightarrow e^{i(t+a(y))} = e^{ia(z)} \Rightarrow t + a(y) - a(z) = 2\pi n$ para algum inteiro n .

Aplicando a propriedade triangular a y, z, A obtemos que $|t| \geq 2|a(y) - a(z)|$ e como $|t| \leq \pi$ temos que $|a(y) - a(z)| \leq \pi/2$.

Resumindo :

$$t + a(y) - a(z) = 2\pi n$$

$$|t| \leq \pi$$

$$|a(y) - a(z)| \leq \pi/2$$

então $t + a(y) - a(z) = 0$ e como $|t| \geq 2|a(y) - a(z)|$ temos que $t = 0$ e logo que $y = z$.

f é uma função fechada:

Seja B um subconjunto fechado de $X \times S^1$, e seja $(u, v) \in \overline{f(B)}$. Existe uma sequência $((x_n, y_n))_{n \in \omega}$ de pontos de B tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = (u, v)$. Por definição de f , $\lim x_n = u$. Vamos provar que a sequência $(y_n)_{n \in \omega}$ é convergente.

Suponhamos que $(y_n)_{n \in \omega}$ não converge. Como S^1 é métrico compacto e $(y_n)_{n \in \omega} \subset S^1$, esta suposição implica que $(y_n)_{n \in \omega}$ possui mais de um ponto de acumulação. Sejam p e q pontos de acumulação distintos de $(y_n)_{n \in \omega}$. Consideramos $(y_{n_k})_{k \in \omega}$ e $(y_{n_j})_{j \in \omega}$ duas subsequências de $(y_n)_{n \in \omega}$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = p$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = q$.

Temos então que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(u, p)$$

e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}, y_{n_j}) = f(u, q)$$

Como f é injetora e $p \neq q$, $f(u, p) \neq f(u, q)$. Chegamos portanto a uma contradição com $\lim f(x_n, y_n) = (u, v)$. Segue que a sequência $(y_n)_{n \in \omega}$ é convergente.

Seja $q = \lim y_n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (u, q) \in B$. Como f é contínua $f(u, q) = \lim f(x_n, y_n) = (u, v)$, logo $(u, v) \in f(B)$.

f é sobrejetora:

Vamos provar que $f(\{x\} \times S^1) = \{x\} \times S^1 \forall x \in X$

Se $f(\{x\} \times S^1) \subsetneq \{x\} \times S^1$ para cada x , então $f(\{x\} \times S^1)$ é um arco de S^1 . Mas como $f|_{\{x\} \times S^1}$ é homeomorfismo na imagem teríamos $\{x\} \times S^1$ homeomorfo um arco de S^1 o que não é possível.

Falta ver que $X \times \mathbb{R}$ tem CIPH. Sabemos que $X \times \mathbb{R}$ é homeomorfo a $X \times (S^1 - \{1\})$ subconjunto aberto de $X \times S^1$. Segue pelo lema (4.1), $X \times \mathbb{R}$ tem CIPH. ■

Teorema 4.3 *O cubo de Hilbert Q tem CIPH.*

Demonstração:

Vamos identificar os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ com números complexos, e usaremos $|\cdot|$ para denotar a norma usual em $\mathbb{C}$.

Para cada $n \in \omega$ seja $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2^n\}$. O cubo de Hilbert será representado por

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} D_n$$

e a métrica considerada em Q é a seguinte: sejam $x = (x_n)_{n \in \omega} \in Q$ e $y = (y_n)_{n \in \omega} \in Q$ com $x_n, y_n \in D_n$, então

$$[d(x, y)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2$$

Seja A um subconjunto fechado não vazio de Q . Como Q é homogêneo podemos assumir, sem perda de generalidade que $0 = (0, 0, \dots) \in A$

Para cada $n \in \omega$ definimos a função $h_n : Q \rightarrow Q$ como segue:

$$(h_n(x))_j = \begin{cases} x_j & \text{se } j \neq n \\ x_n e^{ia(x)} & \text{se } j = n \text{ onde } a(x) = 1/2 \cdot d(x, A) \end{cases}$$

Para cada $n \in \omega$, h_n é uma função bijetora:

Fixado n , para cada t tal que $0 < t \leq 1/2^n$, temos que o conjunto

$X_t = \{x \in Q : |x_n| = t\}$ é da forma $X \times S^1$.

Então para cada $0 < t \leq 1/2^n$, $h_n|_{X_t} : X_t \longrightarrow X_t$ é um homeomorfismo (foi demonstrado no teorema anterior). Por definição de h_n sabemos que $h_n(0) = 0$. Logo h_n é bijetora.

h_n é contínua :

$$\pi_j h_n(x) = \pi_j(x) \quad \forall j \neq n \quad \forall x \in Q \Rightarrow \pi_j h_n \text{ é contínua } \quad \forall j \neq n$$

$$\pi_n h_n(x) = x_n \cdot e^{ia(x)} \quad \forall x \in Q \Rightarrow \pi_n h_n \text{ é contínua}$$

h_n é fechada :

Seja B um subconjunto fechado não vazio de Q . Então B é compacto e $h_n(B)$ é fechado.

Provamos então que para cada $n \in \omega$ a função h_n é um autohomeomorfismo de Q .

Sejam agora $f_n = h_n \dots h_2 h_1$ para cada n , e $h = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Vamos mostrar que h é um autohomeomorfismo de Q e que $fix(h) = A$. Para cada n temos que

$$d(f_{n+1}, f_n) = d(h_{n+1} h_n \dots h_1, h_n \dots h_1) = d(h_{n+1}, id_Q)$$

pois $h_n \dots h_1$ é sobrejetora.

$$d(h_{n+1}, id_Q) = \sup_{x \in Q} \{|x_{n+1}| \cdot |e^{ia(x)} - 1|\} \leq 1/2^n$$

logo a sequência $(f_n)_{n \in \omega}$ é de Cauchy. Como $C(Q, Q)$ é completo (com a norma do supremo), existe $\lim f_n = h$. Mais ainda, h é uma função contínua e sobrejetora. (lembramos que o conjunto das funções contínuas e sobrejetoras entre dois espaços compactos, é fechado no espaço das funções contínuas entre tais espaços [Mil88]).

Sejam $x, y \in Q$, $x \neq y$. Suponhamos primeiro que $x, y \neq 0$. Seja $n_0 \in \omega$ tal que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$.

$h_{n_0}(x) \neq h_{n_0}(y)$:

$x_{n_0} \in D_{n_0} \Rightarrow x_{n_0} = t e^{i\theta}$ com $0 < t \leq 1/2^{n_0}$. De igual forma $y_{n_0} = s e^{i\delta}$ com $0 < s \leq 1/2^{n_0}$. Temos então que $t \neq s$ ou $\theta \neq \delta$.

Se $t \neq s$ então $h_{n_0}(x) \neq h_{n_0}(y)$ pois $h_{n_0}|_{X_t} : X_t \longrightarrow X_t$.

Se $t = s$, como $h_{n_0}|_{X_t}$ é um homeomorfismo, e $\theta \neq \delta$, $h_{n_0}(x) \neq h_{n_0}(y)$.

Por definição das funções h_n , $(h_m(h_{n_0}(x)))_{n_0} = (h_{n_0}(x))_{n_0} \quad \forall m \neq n_0$ e $(h_m(x))_{n_0} = (x)_{n_0} \quad \forall m \neq n_0, \quad \forall x \in Q$. Portanto $(f_m(x))_{n_0} = (h_{n_0}(x)) \quad \forall m > n_0 \quad \forall x \in Q$. Então $h_{n_0}(x) \neq h_{n_0}(y)$ implica $h(x) \neq h(y)$

Se $x = 0$, $h(x) = 0$. Mas como $y \neq 0$ existe $n_0 \in \omega$ tal que $y_{n_0} \neq 0$. Logo $h_{n_0}(y) \neq 0$ e portanto $h(y) \neq 0$.

$fix(h) = A$:

Se $x \in A \Rightarrow a(x) = 0 \Rightarrow h_n(x) = x \quad \forall n \in \omega \Rightarrow h(x) = x$

Se $x \notin A$, então $x_n \neq 0$ para algum n , logo $(h(x))_n \neq x_n$ (lembramos que como $x \notin A$, $0 < a(x) < 2\pi$). ■

4.2 CIPH no cubo de Cantor

Se X é um espaço topológico, denotamos por 2^X o conjunto de todos os subconjuntos fechados não vazios de X . Em 2^X consideramos a topologia de Vietoris, cujos abertos básicos são da forma:

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{F \in 2^X : F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ e } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i = 1, \dots, k\}$$

onde $U_1, \dots, U_k$ são abertos de X .

Se X é um espaço métrico compacto, consideramos em 2^X a métrica de Hausdorff (d_H) , definida por:

$$\text{para } E, F \in 2^X, \quad d_H(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 : E \subseteq B(F, \varepsilon) \text{ e } F \subseteq B(E, \varepsilon)\}$$

onde $B(F, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, F) < \varepsilon\}$. A topologia induzida por d_H em 2^X coincide com a topologia de Vietoris. Se X é métrico compacto então 2^X é compacto (4.7 de [Mil88]).

Notações:

* C denotará o conjunto de Cantor, considerado como subespaço do intervalo real I e $d(x, y)$ denotará $|x - y|$ em C .

* AC denotará o subespaço de 2^C dos subconjuntos fechados de C que são densos em si mesmos (nos referiremos a estes conjuntos como *subconjuntos completos* de C).

* Seja H subconjunto fechado de C . Denotamos:

$$D_0(H) = \left\{ x \in H : x \leq \frac{\min(H) + \max(H)}{2} \right\}$$

$$D_1(H) = \left\{ x \in H : x \geq \frac{\min(H) + \max(H)}{2} \right\}$$

Obsevamos que como $H \subset C$, $(\min(H) + \max(H))/2 \notin H$, logo $D_0(H) \cap D_1(H) = \emptyset$.

Lema 4.4 *A relação $D_i(K)$ para $i = \{0, 1\}$ é contínua na métrica de Hausdorff i.e. para cada $K \subseteq C$ fechado, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $G \in 2^C$ com $d_H(K, G) < \delta$ temos $d_H(D_i(K), D_i(G)) < \varepsilon$.*

Demonstração:

Sejam $a_1 = \min(K)$, $d_1 = \max(K)$, $c_1 = \min(D_1(K))$, $b_1 = \max(D_0(K))$, $M_1 = (a_1 + d_1)/2$.

$M_1 \notin C$ portanto existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \min\{d(b_1, M_1), d(M_1, c_1)\}$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta = \min\{\gamma/3, \varepsilon\}$ e seja $G \subset C$ fechado, tal que $d_H(K, G) < \delta$.

Definimos a_2, b_2, c_2, d_2, M_2 para G , em forma análoga a $a_1, \dots, M_1$. Como

$$|M_1 - M_2| = |(a_1 - a_2 + d_1 - d_2)/2| \leq |a_1 - a_2|/2 + |d_1 - d_2|/2 \text{ e } d_H(K, G) < \delta$$

temos que $|M_1 - M_2| < \delta$. Como $d(b_1, M_1) > 3\delta$ temos que $d(b_1, M_2) > \delta$ e $b_1 < M_2$ pois $b_1 < M_1$. Logo $d(b_1, c_2) > \delta$ e portanto $B(D_1(G), \delta) \cap D_0(K) = \emptyset$. De $d_H(K, G) < \delta$ segue que $D_0(K) \subset B(D_0(G), \delta) \cup B(D_1(G), \delta)$. Logo $D_0(K) \subset B(D_0(G), \delta)$.

De igual forma $d(b_1, c_2) < \delta$ implica que $B(D_0(K), \delta) \cap D_1(G) = \emptyset$, portanto

$$D_1(G) \subset B(D_1(K), \delta).$$

Trabalhando em forma análoga com $d(c_1, M_1) > 3\delta$ obtemos $D_1(K) \subset B(D_1(G), \delta)$ e $D_0(G) \subset B(D_0(K), \delta)$.

Resumindo temos $d_H(D_i(K), D_i(G)) < \varepsilon$ para $i = 0, 1$. ■

Lema 4.5 *Existe uma função contínua $f : C \times AC \rightarrow C$ sobrejetora, tal que:*

- (1) $f(C \times \{K\}) = K$ para cada $K \in AC$ e
- (2) $f|_{C \times \{K\}}$ é um homeomorfismo para cada $K \in AC$.

Demonstração:

Vamos primeiro construir a função f .

Observamos que se H é um subconjunto completo de C , então $D_i(K)$ também o é.

Para cada conjunto $\{i(1), \dots, i(n)\}$ onde $i(j) \in \{0, 1\}$ para $j = 1, \dots, n$, definimos o conjunto $D_{i(1)\dots i(n)}(K)$ como segue:

$$D_{i(1)\dots i(n)}(K) = D_{i(n)}(D_{i(1)\dots i(n-1)}(K))$$

afirmação 1: Os conjuntos $D_{i(1)\dots i(n)}(K)$ formam uma base para K , e cada ponto $x \in K$ determina uma sequência $J(x, K) = \{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$ com $i(j) \in \{0, 1\} \forall j$, tal que $D_{i(1)}(K) \supset D_{i(1)i(2)}(K) \supset \dots \ni x$.

prova:

(i) $D_i(K)$ é um aberto de K :

$$D_0(K) = \left[0, \frac{\max(K) + \min(K)}{2}\right) \cap K$$

$$D_1(K) = \left(\frac{\max(K) + \min(K)}{2}, 1\right] \cap K$$

(ii) Seja $x \in K$ e seja U uma vizinhança aberta de x em K .

Se $x \in D_0(K)$ então $i(1) = 0$; se $x \in D_1(K)$ então $i(1) = 1$. Portanto $x \in D_{i(1)}(K)$.

Se $x \in D_0(D_{i(1)}(K))$, então $i(2) = 0$, se não $i(2) = 1$, ou seja $x \in D_{i(1)i(2)}(K)$.

Assim x determina uma sequência $\{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$. Como $\text{diam}(D_{i(1)\dots i(n)}(K)) \leq 1/2^n$ temos que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{i(1)\dots i(n)}(K)$, e existe $n_0 \in \omega$ tal que $D_{i(1)\dots i(n_0)}(K) \subset U$.

afirmação 2: Cada sequência $J = \{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$ com $i(j) \in \{0, 1\}$, determina um ponto $x(J, K)$ satisfazendo a igualdade $J(x(J, K)) = J$.

prova:

Seja $J = \{i(j)\}_{j=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \omega$, $D_{i(1)\dots i(n)}(K)$ é um subconjunto completo de C , e portanto $D_{i(1)\dots i(n)i(n+1)}(K) \neq \emptyset$. Temos também que

$$K \supset D_{i(1)}(K) \supset D_{i(1)i(2)}(K) \supset \dots$$

Logo como K é compacto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_{i(1)\dots i(n)}(K) \neq \emptyset$. E de novo usando o diâmetro de $D_{i(1)\dots i(n)}(K)$ temos que esta intersecção tem um único ponto.

Definimos a função $f : C \times AC \longrightarrow C$ como segue:

$$f(x, K) = x(J(x, C), K)$$

f é contínua :

Sejam $(x, K) \in C \times AC$ e $(x_n, K_n)_{n \in \omega}$ uma sequência em $C \times AC$ convergindo para (x, K) . Temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(K_n, K) = 0$.

Devemos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $d(f(x_n, K_n), f(x, K)) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Vamos usar y_n como notação para $f(x_n, K_n)$ e y para $f(x, K)$.

Então $y_n = x(J(x_n, C), K_n)$ e $y = x(J(x, C), K)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(K_n, K) = 0$, pelo lema (4.4) temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(D_{i(1)\dots i(m)}(K_n), D_{i(1)\dots i(m)}(K)) = 0$ para toda sequência $\{i(j)\}$ com $i(j) \in \{0, 1\}$, para todo $m \in \omega$.

Seja m tal que $1/2^m < \varepsilon/2$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ existe $n_1 \in \omega$ tal que $\forall n \geq n_1$ $J(x_n, C)$ e $J(x, C)$ coincidem nos m primeiros termos.

Sejam $i(1), \dots, i(m)$ os primeiros m termos de $J(x, C)$, e seja $n_2 \in \omega$ tal que $\forall n \geq n_2$ $d_H(D_{i(1)\dots i(m)}(K_n), D_{i(1)\dots i(m)}(K)) < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Como para cada $n \geq n_0$, $y_n \in D_{i(1)\dots i(m)}(K_n)$ e $d_H(D_{i(1)\dots i(m)}(K_n), D_{i(1)\dots i(m)}(K)) < \varepsilon/2$,

temos que $d(y_n, D_{i(1)...i(m)}(K)) < \varepsilon/2$.

Como $\text{diam}(D_{i(1)...i(m)}(K)) \leq 1/2^m < \varepsilon/2$, segue que $d(y_n, y) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

f é sobrejetora:

Se $y \in C$, $f(y, C) = y$.

(1) $f(C \times \{K\}) = H$ para cada $K \in AC$:

$f(C \times \{K\}) \subset K$ por definição de f .

Seja $y \in K$. Existe $x \in C$ tal que $J(x, C) = J(y, K)$. Então $f(x, K) = y$ e $K \subset f(C \times \{K\})$.

(2) $f|_{C \times \{K\}}$ é um homeomorfismo:

$f|_{C \times \{K\}} : C \times \{K\} \rightarrow K$, é sobrejetora por (1).

Se $x, x' \in C$, $x \neq x'$ então $J(x, C) \neq J(x', C)$, portanto $x(J(x, C), K) \neq x'(J(x', C), K)$ e $f|_{C \times \{K\}}$ é injetora. ■

Definição 4.6 Sejam X e Y espaços compactos Hausdorff. Uma função $\phi : X \rightarrow Y$ é chamada uma d -aplicação se é sobrejetora, contínua, aberta e existe uma imersão de X em $C \times Y$ tal que $\phi = \pi_Y|_X$, onde $\pi_Y|_X$ é a restrição da projeção $\pi_Y : C \times Y \rightarrow Y$ ao conjunto X .

Lema 4.7 Sejam X e Y espaços compactos Hausdorff. Se $\phi : X \rightarrow Y$ é uma d -aplicação, e se $\pi_C \phi^{-1}(y)$ é completo para cada $y \in Y$, então existe um homeomorfismo $g : C \times Y \rightarrow X$ tal que $\pi_Y = \phi g$.

$$\begin{array}{ccc} C \times Y & \xrightarrow{g} & X \\ \pi_Y \downarrow & \swarrow \phi & \\ Y & & \end{array}$$

Demonstração:

Por definição de d -aplicação existe uma imersão de X em $C \times Y$ tal que $\phi = \pi_Y|_X$.

Definimos $g : C \times Y \longrightarrow X$ como segue: se $(c, y) \in C \times Y$

$$g(c, y) = (f(c, \pi_C \phi^{-1}(y)), y)$$

onde $f : C \times AC \longrightarrow C$ é definida como no lema (4.5).

(i) $g(c, y) \in X \quad \forall (c, y) \in C \times Y$ pois $\phi^{-1}(y) \subset X \quad \forall y \in Y$.

(ii) g é injetora :

Sejam $(c, y), (c', y')$ dois pontos distintos de $C \times Y$.

Se $y \neq y'$, então $g(c, y) \neq g(c', y')$ por definição da função g .

Se $y = y'$, então $c \neq c'$ e como $f|_{C \times \{\pi_C \phi^{-1}(y)\}}$ é um homeomorfismo temos que $g(c, y) \neq g(c', y')$.

(iii) g é sobrejetora :

Se $(c, y) \in X$, então $c \in \pi_C \phi^{-1}(y)$ pois $(c, y) \in \phi^{-1}(y)$. Usando mais uma vez o fato que $f|_{C \times \{\pi_C \phi^{-1}(y)\}}$ é um homeomorfismo, temos que existe $c' \in C$ tal que $f(c', \pi_C \phi^{-1}(y)) = c$. Logo $g(c', y) = (c, y)$.

(iv) g é contínua :

Seja $(c, y) \in C \times Y$ arbitrário. Vamos mostrar que g é contínua em (c, y) .

Seja $H = \pi_C \phi^{-1}(y)$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $V_\varepsilon \times W$ uma vizinhança aberta de $g(c, y)$, onde $V_\varepsilon = B(c, \varepsilon) \cap C$.

A função $f : C \times AC \longrightarrow C$ é contínua, portanto existem vizinhanças $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ de H em 2^C e U de c em C tais que

$$\text{se } H_1 \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle \text{ e } c_1 \in U, \text{ então } d(f(c_1, H_1), f(c, H)) < \varepsilon.$$

Por definição de $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ temos: $H \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ e $H \cap U_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Por outro lado temos: $y \in W \Rightarrow \phi^{-1}(y) \subset \phi^{-1}(W) \Rightarrow H = \pi_C \phi^{-1}(y) \subset \pi_C \phi^{-1}(W)$.

Portanto $U_i \times Y \cap \phi^{-1}(W) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, m$ e como ϕ é uma função contínua. $U_i \times Y \cap \phi^{-1}(W)$ é aberto.

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $O_i = \phi(U_i \times Y \cap \phi^{-1}(W))$. Como ϕ é uma função

aberta, O_i é um aberto $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Além disso $y \in O_i \forall i$ pois $y \in W$.

Por outro lado $O_0 = Y - \phi(X - \bigcup_{i=1}^m U_i \times Y)$ é aberto em Y e $y \in O_0$ (pois $\phi^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \times Y$).

Seja $O = \bigcap_{i=0}^m O_i$, então $U \times (O \cap W)$ é uma vizinhança aberta de (c, y) . Se $(c_1, y_1) \in U \times (O \cap W)$ então $\pi_C \phi^{-1}(y_1) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$:

$$(1) y_1 \in O_0 \implies y_1 \notin \phi(X - \bigcup_{i=1}^m U_i \times Y) \implies \phi^{-1}(y_1) \cap (X - \bigcup_{i=1}^m U_i \times Y) = \emptyset \\ \implies \phi^{-1}(y_1) \subset X \cap (\bigcup_{i=1}^m U_i \times Y) \implies \pi_C \phi^{-1}(y_1) \subset \bigcup_{i=1}^m U_i.$$

$$(2) y_1 \in O_i \forall i = 1, \dots, m \implies y_1 \in \phi(U_i \times Y \cap \phi^{-1}(W)) \forall i = 1, \dots, m \implies \\ \phi^{-1}(y_1) \cap (U_i \times Y \cap \phi^{-1}(W)) \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, m \implies \phi^{-1}(y_1) \cap U_i \times Y \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, m.$$

Chamando H_1 a $\pi_C \phi^{-1}(y_1)$, temos que: $d(f(c, H), f(c_1, H_1)) < \varepsilon$ i.e. $f(c_1, H_1) \in V_\varepsilon$, $y_1 \in W$. Portanto $g(c_1, y_1) = (f(c_1, H_1), y_1) \in V_\varepsilon \times W$.

$$(v) \pi_Y = \phi g :$$

$$\phi g(c, y) = \pi_Y|_X(g(c, y)) = \pi_Y(g(c, y)) = y. \quad \blacksquare$$

Definição 4.8 Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é regular se para cada subespaço fechado F de X existe um homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $fix(h) = F$ e $fh = f$.

Observamos que o domínio de uma aplicação regular tem CIPH.

Teorema 4.9 Sejam $\tau \geq \omega$ um cardinal e K um espaço métrico separável. Se para cada subespaço fechado X de K^ω a projeção $\pi_1 : X \times K^\omega \longrightarrow X$ é regular, então a projeção $\pi_1 : X \times K^\tau \longrightarrow X$ é regular para cada subespaço fechado X de K^τ . Em particular $X \times K^\tau$ tem CIPH, onde X é um subespaço fechado de K^τ .

Demonstração:

A prova será feita por indução transfinita sobre τ . No caso $\tau = \omega$, $\pi_1 : X \times K^\omega \longrightarrow X$ é regular por hipótese.

Suponhamos que o teorema foi provado para todo $\tau < \kappa$, onde $\omega < \kappa$, e consideramos o caso $\tau = \kappa$. Seja então X um subespaço fechado de K^τ .

Se $\tau = \omega_{\alpha+1}$ (i.e. se τ é um cardinal regular), então K^τ pode ser representado como o limite inverso do sistema $\{(K^{\omega_\alpha})^\beta, \pi_\beta^{\beta+1}, \beta < cf(\tau)\}$, onde

$\pi_\beta^{\beta+1} : (K^{\omega_\alpha})^{\beta+1} \rightarrow (K^{\omega_\alpha})^\beta$ denota a projeção $(K^{\omega_\alpha})^\beta \times K^{\omega_\alpha} \rightarrow (K^{\omega_\alpha})^\beta$. Ou seja que se $k_{\beta+1} \in (K^{\omega_\alpha})^{\beta+1}$, então $\pi_\beta^{\beta+1}(k_{\beta+1}) = k_{\beta+1}|_\beta$.

Se τ é um cardinal singular, então $\tau = \sup\{\omega_{\alpha_\beta} : \beta < cf(\tau)\}$, onde $\omega \leq \omega_{\alpha_\beta} < \tau$ para cada $\beta < cf(\tau)$. Portanto K^τ pode ser representado como o limite inverso do sistema $\{K^{\omega_{\alpha_\beta}}, \pi_\beta^{\beta+1}, \beta < cf(\tau)\}$ onde $\pi_\beta^{\beta+1} : K^{\omega_{\alpha_{\beta+1}}} \rightarrow K^{\omega_{\alpha_\beta}}$ denota a projeção no subproduto correspondente. Ou seja que se $k_{\beta+1} \in K^{\omega_{\alpha_{\beta+1}}}$, então $\pi_\beta^{\beta+1}(k_{\beta+1}) = k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_\beta}}$.

Combinando ambos casos, podemos escrever $K^\tau = \varprojlim S_K$, com

$$S_K = \{K_\beta, \pi_\beta^{\beta+1}, \beta < cf(\tau)\} \text{ onde } K_\beta = \begin{cases} (K^{\omega_\alpha})^\beta & \text{se } \tau = \omega_{\alpha+1} \\ K^{\omega_{\alpha_\beta}} & \text{se } \tau = \sup\{\omega_{\alpha_\beta} : \beta < cf(\tau)\} \end{cases}$$

Por π_β denotamos a projeção de K^τ em K_β i.e. se $k \in K^\tau$,

$$\pi_\beta(k) = \begin{cases} k|_\beta & \text{se } \tau = \omega_{\alpha+1} \\ k|_{\omega_{\alpha_\beta}} & \text{se } \tau = \sup\{\omega_{\alpha_\beta} : \beta < cf(\tau)\} \end{cases}$$

Como X é um subespaço fechado de K^τ , temos que X coincide com o limite inverso do sistema $S_X = \{X_\beta, p_\beta^{\beta+1}, \beta < cf(\tau)\}$ onde $X_\beta = Cl_{K_\beta} \pi_\beta(X)$ e $p_\beta^{\beta+1} = \pi_\beta^{\beta+1}|_{X_{\beta+1}}$.

Seja $S_X \times S_K = \{X_\beta \times K_\beta, p_\beta^{\beta+1} \times \pi_\beta^{\beta+1}, \beta < cf(\tau)\}$, observamos que $\varprojlim S_X \times S_K = X \times K^\tau$.

Seja F um subconjunto fechado de $X \times K^\tau$. Para cada $\beta < cf(\tau)$, $F_\beta = Cl_{K_\beta}(p_\beta \times \pi_\beta)(F)$.

A projeção $X_\beta \times K_\beta \rightarrow X_\beta$ será denotada por π_1^β .

Como X_0 é fechado em K_0 , e K_0 é o produto de menos de τ cópias de K , por hipótese de indução temos que existe um homeomorfismo $h_0 : X_0 \times K_0 \rightarrow X_0 \times K_0$ tal que $\pi_1^0 h_0 = \pi_1^0$ e $fix(h_0) = F_0$.

Afirmação:

Para cada $\gamma < cf(\tau)$ existe um homeomorfismo $h_\gamma : X_\gamma \times K_\gamma \longrightarrow X_\gamma \times K_\gamma$ tal que:

$$(i)_\gamma \pi_1^\gamma h_\gamma = \pi_1^\gamma$$

$$(ii)_\gamma fix(h_\gamma) = F_\gamma$$

$$(iii)_\gamma (p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma) h_\gamma = h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma) \text{ para cada } \delta \leq \beta$$

$$(iv)_\gamma h_\gamma = \overleftarrow{\lim} \{h_\delta : \delta < \gamma\} \text{ para cada ordinal limite } \gamma < cf(\tau).$$

Seja então h o homeomorfismo definido por:

$$h = \overleftarrow{\lim} \{h_\beta : \beta < cf(\tau)\} : X \times K^\tau \longrightarrow X \times K^\tau$$

h preserva a primeira coordenada e $fix(h) = F$. Como queríamos. ■

Demonstração da afirmação:

Suponhamos que para cada $\beta < \gamma$, onde $\gamma < cf(\tau)$, já foram construídos homeomorfismos $h_\beta : X_\beta \times K_\beta \longrightarrow X_\beta \times K_\beta$ tais que :

$$(i)_\beta \pi_1^\beta h_\beta = \pi_1^\beta \text{ para cada } \beta < \gamma$$

$$(ii)_\beta fix(h_\beta) = F_\beta \text{ para cada } \beta < \gamma$$

$$(iii)_\beta (p_\delta^\beta \times \pi_\delta^\beta) h_\beta = h_\delta(p_\delta^\beta \times \pi_\delta^\beta) \text{ para cada par } \delta, \beta \text{ com } \delta \leq \beta < \gamma$$

$$(iv)_\beta h_\beta = \overleftarrow{\lim} \{h_\delta : \delta < \beta\} \text{ para cada ordinal limite } \beta < \gamma.$$

Vamos agora definir o homeomorfismo $h_\gamma : X_\gamma \times K_\gamma \longrightarrow X_\gamma \times K_\gamma$.

* **Se γ é um ordinal limite**, definimos $h_\gamma = \overleftarrow{\lim} \{h_\beta : \beta < \gamma\}$. Por definição de limite inverso para funções temos :

$$(iii)_\gamma (p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma) h_\gamma = h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma) \text{ para cada } \delta < \gamma.$$

Para provar $(i)_\gamma \pi_1^\gamma h_\gamma = \pi_1^\gamma$, seja $(x_\gamma, k_\gamma) \in X_\gamma \times K_\gamma$. Temos que :

$$p_\delta^\gamma(\pi_1^\gamma h_\gamma(x_\gamma, k_\gamma)) = \pi_1^\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma) h_\gamma(x_\gamma, k_\gamma) \stackrel{(iii)_\gamma}{=} \pi_1^\delta h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma)$$

$$\stackrel{(i)_\delta}{=} \pi_1^\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) = p_\delta^\gamma(x_\gamma) \quad \forall \delta < \gamma$$

Portanto $\pi_1^\gamma h_\gamma(x_\gamma, k_\gamma) = \pi_1^\gamma(x_\gamma, k_\gamma)$ como queríamos.

Falta provar $(ii)_\gamma \text{ fix}(h_\gamma) = F_\gamma$:

(1) $F_\gamma \subset \text{fix}(h_\gamma)$

$F_\gamma = Cl_{K_\gamma}(p_\gamma \times \pi_\gamma)(F)$. Como h_γ é contínua, basta mostrar que $(p_\gamma \times \pi_\gamma)(F) \subset \text{fix}(h_\gamma)$. Seja $(x_\gamma, k_\gamma) \in (p_\gamma \times \pi_\gamma)(F)$. Por $(iii)_\gamma$ temos que

$$(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)h_\gamma(x_\gamma, k_\gamma) = h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) \quad \forall \delta < \gamma$$

mas como $(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) \in F_\delta$ temos também

$$h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) = (p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) \quad \forall \delta < \gamma$$

Logo $h_\gamma(x_\gamma, k_\gamma) = (x_\gamma, k_\gamma)$.

(2) $\text{fix}(h_\gamma) \subset F_\gamma$:

Seja $(x_\gamma, k_\gamma) \in \text{fix}(h_\gamma)$, então $h_\delta(p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma)(x_\gamma, k_\gamma) \in \text{fix}(h_\delta) \quad \forall \delta < \gamma$. Como $F_\delta = \text{fix}(h_\delta) \quad \forall \delta < \gamma$, temos que $p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma(x_\gamma, k_\gamma) \in F_\delta = \overline{p_\delta^\gamma \times \pi_\delta^\gamma(F_\gamma)} \quad \forall \delta < \gamma$. Portanto $(x_\gamma, k_\gamma) \in F_\gamma$.

* Se γ é ordinal sucessor i.e $\gamma = \beta + 1$, procedemos como segue. Consideramos o conjunto

$$Z_\beta = \{(x_\beta, k_\beta, x_{\beta+1}) \in X_\beta \times K_\beta \times X_{\beta+1} : x_\beta = p_\beta^{\beta+1}(x_{\beta+1})\}$$

e as seguintes funções:

$$\chi = (p_\beta^{\beta+1} \times \pi_\beta^{\beta+1}) \Delta \pi_1^{\beta+1}$$

$\varphi : Z_\beta \longrightarrow X_\beta \times K_\beta$ e $\psi : Z_\beta \longrightarrow X_{\beta+1}$ as correspondentes projeções

$$\begin{array}{ccccc} X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} & \xrightarrow{\pi_1^{\beta+1}} & X_{\beta+1} \\ & \searrow \chi & \nearrow \psi \\ & Z_\beta & \\ & \swarrow \varphi & \\ X_\beta \times K_\beta & & \end{array}$$

• Se $\tau = \sup\{\omega_{\alpha_\beta} : \beta < cf(\tau)\}$, para cada ponto $(x_\beta, k_\beta, x_{\beta+1}) \in Z_\beta$, temos que $\chi^{-1}(x_\beta, k_\beta, x_{\beta+1}) = \{(x_{\beta+1}, \hat{k}_{\beta+1}) \in X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} : \hat{k}_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_\beta}} = k_\beta\} \approx K^\lambda$ onde $\lambda = \omega_{\alpha_{\beta+1}} - \omega_{\alpha_\beta}$. Definimos a função $j : X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} \longrightarrow Z_\beta \times K^\lambda$ por :

$$j(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) = ((x_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_\beta}}, k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_\beta}}, x_{\beta+1}), k_{\beta+1}|_\lambda)$$

j é um homeomorfismo tal que $j^{-1} : Z_\beta \times K^\lambda \longrightarrow X_{\beta+1} \times K_{\beta+1}$ é a seguinte função:

$$j^{-1}(x_\beta, k_\beta, x_{\beta+1}, l) = (x_{\beta+1}, m)$$

onde $m \in K_{\beta+1}$, $m|_{\omega_{\alpha_\beta}} = k_\beta$ e $m|_\lambda = l$.

j é uma função contínua pois $\chi, \pi_\lambda^{\beta+1}$ são funções contínuas e $j = \chi \Delta \pi_\lambda^{\beta+1}$.

Portanto a função j é um homeomorfismo tal que $\chi = \pi_1^\lambda j$ onde

$\pi_1^\lambda : Z_\beta \times K^\lambda \longrightarrow Z_\beta$ é a projeção na primeira coordenada.

$$\begin{array}{ccc} X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} & \xrightarrow{j} & Z_\beta \times K^\lambda \\ & \searrow \chi & \downarrow \pi_1^\lambda \\ & & Z_\beta \end{array}$$

A ideia é construir o homeomorfismo $h_{\beta+1}$ a partir do homeomorfismo j , aplicando a hipótese de indução ao espaço $Z_\beta \times K^\lambda$. Vemos que isto é possível pois por construção Z_β é um subespaço fechado de $X_\beta \times K_\beta \times X_{\beta+1}$ e

$X_\beta \times K_\beta \times X_{\beta+1}$ é subespaço fechado de $K_\beta \times K_\beta \times K_{\beta+1} \approx K_{\beta+1} = K^{\omega_{\alpha_{\beta+1}}}$.

Como $|\lambda| = |\omega_{\alpha_{\beta+1}} - \omega_{\alpha_\beta}| = \omega_{\alpha_{\beta+1}}$, segue que Z_β é um subespaço fechado de K^λ .

Por hipótese de indução, existe um homeomorfismo $g : Z_\beta \times K^\lambda \longrightarrow Z_\beta \times K^\lambda$ tal que $\pi_1^\lambda g = \pi_1^\lambda$ e $fix(g) = j(F_{\beta+1})$.

Seja $f_{\beta+1} : X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} \longrightarrow X_{\beta+1} \times K_{\beta+1}$ o homeomorfismo $f_{\beta+1} = j^{-1} g j$. Então $fix(f_{\beta+1}) = F_{\beta+1}$ e $\chi f_{\beta+1} = \pi_1^\lambda j(j^{-1} g j) = \pi_1^\lambda g j = \pi_1^\lambda j = \chi$.

Seja também $g_\beta : Z_\beta \longrightarrow Z_\beta$ o homeomorfismo $g_\beta = h_\beta \varphi \Delta \psi$. Definimos então

$$h_{\beta+1} = f_{\beta+1} j^{-1} (g_\beta \times id_{K^\lambda}) j$$

$h_{\beta+1}$ assim definido é um homeomorfismo pois é composição de homeomorfismos. Vamos provar agora as propriedades $(i)_{\beta+1}$, $(ii)_{\beta+1}$, $(iii)_{\beta+1}$:

$$\begin{aligned}
\chi h_{\beta+1}(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) &= \chi f_{\beta+1} j^{-1}(g_{\beta} \times id_{K^{\lambda}}) j(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) \\
&= \chi j^{-1}(g_{\beta} \times id_{K^{\lambda}}) j(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) \\
&= \chi j^{-1}(g_{\beta} \times id_{K^{\lambda}})((x_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, x_{\beta+1}), k_{\beta+1}|\lambda) \\
&= \chi j^{-1}(g_{\beta}(x_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, x_{\beta+1}), k_{\beta+1}|\lambda) \\
&= \chi j^{-1}(h_{\beta}(x_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}), x_{\beta+1}, k_{\beta+1}|\lambda) \\
&= (h_{\beta}(x_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}, k_{\beta+1}|_{\omega_{\alpha_{\beta}}}), x_{\beta+1}) \\
&= (h_{\beta}(p_{\beta}^{\beta+1} \times \pi_{\beta}^{\beta+1}) \Delta \pi_1^{\beta+1})(x_{\beta+1}, k_{\beta+1})
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
\chi h_{\beta+1}(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) &= ((p_{\beta}^{\beta+1} \times \pi_{\beta}^{\beta+1}) \Delta \pi_1^{\beta+1}) h_{\beta+1}(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) \\
&= ((p_{\beta}^{\beta+1} \times \pi_{\beta}^{\beta+1}) h_{\beta+1} \Delta \pi_1^{\beta+1} h_{\beta+1})(x_{\beta+1}, k_{\beta+1})
\end{aligned}$$

Portanto $(p_{\beta}^{\beta+1} \times \pi_{\beta}^{\beta+1}) h_{\beta+1} = h_{\beta}(p_{\beta}^{\beta+1} \times \pi_{\beta}^{\beta+1})$ e $\pi_1^{\beta+1} h_{\beta+1} = \pi_1^{\beta+1}$. Temos então $(i)_{\beta+1}$ e $(iii)_{\beta+1}$. Por definição de $h_{\beta+1}$, $fix(h_{\beta+1}) = fix(f_{\beta+1}) = F_{\beta+1}$ e temos $(ii)_{\beta+1}$.

• Se $\tau = \omega_{\alpha+1}$. para cada ponto $(x_{\beta}, k_{\beta}, x_{\beta+1}) \in Z_{\beta}$, temos que $\chi^{-1}(x_{\beta}, k_{\beta}, x_{\beta+1}) = \{(x_{\beta+1}, \hat{k}_{\beta+1}) \in X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} : \hat{k}_{\beta+1}|_{\beta} = k_{\beta}\} \approx K^{\lambda}$ onde $\lambda = \omega_{\alpha}$. Definimos a função $\hat{j} : X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} \longrightarrow Z_{\beta} \times K^{\lambda}$ por:

$$\hat{j}(x_{\beta+1}, k_{\beta+1}) = ((x_{\beta+1}|_{\beta}, k_{\beta+1}|_{\beta}, x_{\beta+1}), k_{\beta+1}|_{(\beta+1)-\beta})$$

$\hat{j}$ é um homeomorfismo tal que $\chi = \pi_1^{\lambda} \hat{j}$ onde $\pi_1^{\lambda} : Z_{\beta} \times K^{\lambda} \longrightarrow Z_{\beta}$ é a projeção na primeira coordenada.

Neste caso temos que o espaço $X_{\beta} \times K_{\beta} \times X_{\beta+1}$ é homeomorfo a $K^{\omega_{\alpha}}$, portanto Z_{β} é um subespaço fechado de $K^{\omega_{\alpha}}$. Logo por hipótese de indução existe um homeomorfismo $\hat{g} : Z_{\beta} \times K^{\omega_{\alpha}} \longrightarrow Z_{\beta} \times K^{\omega_{\alpha}}$ tal que $\pi_1^{\beta+1} \hat{g} = \pi^{\beta+1}$ e $fix(\hat{g}) = \hat{j}(F_{\beta+1})$. Seja $\hat{f}_{\beta+1} : X_{\beta+1} \times K_{\beta+1} \longrightarrow X_{\beta+1} \times K_{\beta+1}$ o homeomorfismo

$\hat{f}_{\beta+1} = \hat{j}^{-1}\hat{g}\hat{j}$. Então $\text{fix}(\hat{f}_{\beta+1}) = F_{\beta+1}$ e $\chi\hat{f}_{\beta+1} = \chi$. Se $g_\beta = h_\beta\varphi\Delta\psi$, definimos

$$h_{\beta+1} = \hat{f}_{\beta+1}\hat{j}^{-1}(g_\beta \times id_{K^{\omega_\alpha}})\hat{j}$$

$h_{\beta+1}$ é homeomorfismo e verifica as propriedades $(i)_{\beta+1}, (ii)_{\beta+1}, (iii)_{\beta+1}$. A prova é análoga ao caso τ singular. ■

Teorema 4.10 *Sejam $\tau \geq \omega$ e X um espaço compacto zero-dimensional de peso $\leq \tau$. Então a projeção $\pi_1 : X \times (Z_2)^\tau \longrightarrow X$ é regular. Em particular, o produto $X \times (Z_2)^\tau$ tem CIPH.*

Demonstração:

Observamos que o espaço X pode ser imerso em $(Z_2)^\tau$. Consequentemente, pelo teorema (4.9), basta considerar o caso $\tau = \omega$.

Seja F um subconjunto fechado de $X \times (Z_2)^\omega$. Como $X \times (Z_2)^\omega$ é zero-dimensional com base enumerável, $X \times (Z_2)^\omega - F$ pode-se escrever como união enumerável disjunta $\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ de subconjuntos abertos e fechados de $X \times (Z_2)^\omega$.

A restrição $\pi_1|_{C_n} : C_n \longrightarrow \pi_1(C_n)$, $n \in \omega$ é uma d-aplicação tal que para cada $x \in \pi_1(C_n)$ temos

$$(\pi_1|_{C_n})^{-1}(x) = \pi_1^{-1}(x) \cap C_n = (\{x\} \times (Z_2)^\omega) \cap C_n$$

Portanto para cada $x \in \pi_1(C_n)$, $(\pi_1|_{C_n})^{-1}(x)$ é homeomorfo a um subconjunto aberto e fechado de $(Z_2)^\omega$, logo $(\pi_1|_{C_n})^{-1}(x)$ é homeomorfo a $(Z_2)^\omega$ i.e. $(\pi_1|_{C_n})^{-1}(x)$ é um subconjunto completo de $(Z_2)^\omega$. Pelo lema (4.7), para cada $n \in \omega$ existe um homeomorfismo $t_n : \pi_1(C_n) \times (Z_2)^\omega \longrightarrow C_n$ tal que $\pi_1 t_n = \pi_{C_n}$ onde $\pi_{C_n} : \pi_1(C_n) \times (Z_2)^\omega \longrightarrow \pi_1(C_n)$ denota a projeção na primeira coordenada.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xleftarrow{t_n} & \pi_1(C_n) \times (Z_2)^\omega \\ & \searrow \pi_1|_{C_n} & \swarrow \pi_{C_n} \\ & \pi_1(C_n) & \end{array}$$

Seja d uma métrica em $X \times (Z_2)^\omega$. Para cada $n \in \omega$ escolhamos um homeomorfismo $f_n : (Z_2)^\omega \rightarrow (Z_2)^\omega$ sem pontos fixos e próximo o suficiente da função identidade, de modo que o homeomorfismo $g_n : C_n \rightarrow C_n$ definido por $g_n = t_n(id_{\pi_1(C_n)} \times f_n)t_n^{-1}$ seja tal que $d(g_n(x), x) < 1/n \ \forall x \in C_n$. Observamos que para cada n , g_n conserva a primeira coordenada, ou seja que $\pi_1 g_n = \pi_1|_{C_n}$.

Consideramos a função $h : X \times (Z_2)^\omega \rightarrow X \times (Z_2)^\omega$ definida por :

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in F, \\ g_n(x) & \text{se } x \in C_n. \end{cases}$$

h é uma função bijetora pois para cada n , g_n é um homeomorfismo e $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

h é contínua:

Seja $x \in X \times (Z_2)^\omega$. Se $x \notin F$, então $x \in C_k$ para algum $k \in \omega$. Como C_k é aberto e $h|_{C_k} = g_k$ temos que h é contínua em x .

Se $x \in F$, seja $B(x, \varepsilon)$ vizinhança aberta de x e seja $A = \{n \in \omega : 1/n \geq \varepsilon/2\}$.

Como A é um conjunto finito ou $A = \emptyset$, segue que $V = B(x, \varepsilon/2) - \bigcup_{n \in A} C_n$ é um conjunto aberto. Para cada $y \in V$ temos que

$$d(x, h(y)) \leq d(x, y) + d(y, h(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Logo $h(y) \in B(x, \varepsilon) \ \forall y \in V$.

h^{-1} é contínua:

Para cada $n \in \omega$ e para cada $x \in C_n$ temos:

$$d(x, g_n^{-1}(x)) = d(g_n(g_n^{-1}(x)), g_n^{-1}(x)) < 1/n$$

Logo a demonstração de que h^{-1} é contínua é análoga a prova de h contínua.

h preserva a primeira coordenada pois para cada n , g_n preserva a primeira coordenada. Temos também que $fix(h) = F$ pois para cada $n \in \omega$ g_n não tem pontos fixos. ■

Corolário 4.11 *O cubo de Cantor $(Z_2)^\tau$ tem CIPH para todo cardinal infinito τ .*

APÊNDICE

Definição A.1 *Sejam κ um cardinal infinito e $A \in [\kappa]^\omega$. Se $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow X$ é uma função contínua, onde para cada α X_α é um espaço topológico, dizemos que f depende de A se e somente se $\forall x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ ($\pi_A(x) = \pi_A(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$).*

Definição A.2 *Sejam $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ uma função contínua, e $f_A : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ a função $f_A = \pi_A \circ f$. Se f_A depende de A , definimos a função $f^A : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ como segue:*

$$f^A(\pi_A(x)) = \pi_A(f(x))$$

Teorema A.3 (Stone-Weierstrass) *Se um anel P de funções contínuas a valores reais, definidas num espaço compacto X , contém todas as funções constantes, separa pontos e é fechado respeito a convergência uniforme, então P coincide com o anel de todas as funções contínuas a valores reais definidas em X (ver [Eng89]).*

Teorema A.4 *Seja $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow X$ uma função contínua. Se X é um espaço métrico separável e para cada $\alpha < \kappa$ X_α é um espaço compacto, então f depende de algum $A \in [\kappa]^\omega$.*

Demonstração:

Primeiro consideramos $X = \mathbb{R}$ e aplicamos o teorema de Stone-Weierstrass.

Seja $P = \{f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua e depende de } S_f \in [\kappa]^\omega\}$

$(P, +, \cdot)$ é um anel e P contém todas as funções constantes. Para ver que P separa pontos, sejam $x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Se $x \neq y$, existe $\beta < \kappa$ tal que $\pi_{\{\beta\}}(x) \neq \pi_{\{\beta\}}(y)$. Seja $f : X_{\{\beta\}} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(\pi_{\{\beta\}}(x)) \neq f(\pi_{\{\beta\}}(y))$.

$$\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \xrightarrow{\pi_{\{\beta\}}} X_{\{\beta\}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Temos então que $f \circ \pi_{\{\beta\}}(x) \neq f \circ \pi_{\{\beta\}}(y)$ e como $f \circ \pi_{\{\beta\}}$ é contínua e depende de $\{\beta\}$, pertence a P .

Falta provarmos que P é fechado para a convergência uniforme. Para isto, consideramos uma sequência $(f_n)_{n \in \omega}$ em P , tal que converge uniformemente a uma função $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$.

Como f é contínua, só falta ver que depende de algum $S \in [\kappa]^\omega$.

$f_n \in P \ \forall n \in \omega$, então para cada n existe $S_n \in [\kappa]^\omega$ tal que f_n depende de S_n .

Seja $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ e sejam $x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ com $\pi_S(x) = \pi_S(y)$.

Para $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja $n_0 \in \omega$ tal que

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ e seja $m > n_0$. Temos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)|$$

Como f_m depende de S , $f_m(x) = f_m(y)$. Então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, e como ε é arbitrário temos que $f(x) = f(y)$. Portanto f depende de S .

Então pelo teorema de Stone-Weierstrass $P = \{f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$

Seja agora X um espaço métrico separável qualquer, e seja i uma imersão de X em $\mathbb{R}^\omega$.

Para cada $n \in \omega$, seja $g_n = \pi_{\{n\}} \circ i \circ f$.

$$\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} \mathbb{R}^\omega \xrightarrow{\pi_{\{n\}}} \mathbb{R}$$

Como g_n é uma função a valores reais, pelo mostrado acima temos que g_n depende de $A_n \in [\kappa]^\omega$.

Seja $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, vamos provar que f depende de A . Se $x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ são tais que $\pi_A(x) = \pi_A(y)$, suponhamos que $f(x) \neq f(y)$. Como i é injetora,

$i(f(x)) \neq i(f(y))$, logo existe $n_0 \in \omega$ tal que $\pi_{\{n_0\}}(i(f(x))) \neq \pi_{\{n_0\}}(i(f(y)))$ i.e.

$g_{n_0}(x) \neq g_{n_0}(y)$.

Mas $A_{n_0} \subset A$, então $\pi_{A_{n_0}}(x) = \pi_{A_{n_0}}(y)$ e como g_{n_0} depende de A_{n_0} temos que $g_{n_0}(x) = g_{n_0}(y)$. Esta contradição mostra que f depende de A . ■

Lema A.5 *Suponhamos que para cada $\alpha < \kappa$, X_α é um espaço métrico compacto. Seja $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ uma função contínua. Então existe um conjunto c.u.b $C_f \subseteq [\kappa]^\omega$ tal que para cada $A \in C_f$, f_A depende de A .*

Demonstração:

Para cada $\alpha \in \kappa$, seja $f_{\{\alpha\}} : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$, $f_{\{\alpha\}} = \pi_{\{\alpha\}} \circ f$.

Por teorema (A.4) temos que para cada $\alpha \in \kappa$, existe $A_\alpha \in [\kappa]^\omega$ tal que $f_{\{\alpha\}}$ depende de A_α .

Seja $C_f = \{X \in [\kappa]^\omega : \forall \alpha \in X, A_\alpha \subseteq X\}$

* C_f é fechado:

Seja $(X_n)_{n \in \omega} \subseteq C_f$ uma sequência crescente. Se $\alpha \in \bigcup_{n \in \omega} X_n$, então existe $n_0 \in \omega$ tal que $\alpha \in X_{n_0}$, e como $X_{n_0} \in C_f$ temos que $A_\alpha \subseteq X_{n_0}$, portanto $A_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \omega} X_n$.

Temos então:

$$\alpha \in \bigcup_{n \in \omega} X_n \Rightarrow A_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \omega} X_n \Rightarrow \bigcup_{n \in \omega} X_n \in C_f$$

* C_f é não limitado em $[\kappa]^\omega$

Sejam $X \in [\kappa]^\omega$ e $Y_1 = X \cup (\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha)$.

$Y_1 \in [\kappa]^\omega$ pois é reunião enumerável de subconjuntos enumeráveis de κ .

Para cada $n > 1$, definimos $Y_{n+1} = Y_n \cup (\bigcup_{\alpha \in Y_n} A_\alpha)$. Temos que

$Y_{n+1} \in [\kappa]^\omega \quad \forall n \in \omega$.

Seja $Y = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$, então $Y \in C_f$ e $X \subseteq Y$.

Falta provar que f_A depende de A para todo $A \in C_f$.

Se $A \in C_f$, $A_\alpha \subseteq A \quad \forall \alpha \in A$. Sejam $x, y \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ tais que

$\pi_{A_\alpha}(x) = \pi_{A_\alpha}(y) \quad \forall \alpha \in A$. Então $f_{\{\alpha\}}(x) = f_{\{\alpha\}}(y) \quad \forall \alpha \in A$. Logo

$\prod_{\alpha \in A} f_{\{\alpha\}}(x) = \prod_{\alpha \in A} f_{\{\alpha\}}(y)$, ou seja $f_A(x) = f_A(y)$. ■

Definição A.6 *Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo se e somente se para cada função contínua $f : X \longrightarrow X$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema A.7 (de Schauder) *Seja E um espaço normado, $K \subset E$ compacto convexo. Então K tem a propriedade do ponto fixo. (ver [Hön77])*

Teorema A.8 *Seja κ um cardinal infinito. Suponhamos que para cada $\alpha < \kappa$, X_α é um subespaço compacto convexo de um espaço linear normado. Então $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração:

Para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ é um espaço compacto convexo, então por teorema de Schauder, $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ tem a propriedade do ponto fixo.

Seja $f : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ uma função contínua.

Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ seja $Y_F = \{x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha : \pi_F(f(x)) = \pi_F(x)\}$

Suponhamos que $\bigcap_{F \in [\kappa]^{<\omega}} Y_F \neq \emptyset$, e seja $x \in \bigcap_{F \in [\kappa]^{<\omega}} Y_F$.

$$x \in \bigcap_{F \in [\kappa]^{<\omega}} Y_F \Rightarrow x \in Y_{\{\alpha\}} \forall \alpha < \kappa \Rightarrow \pi_{\{\alpha\}}(f(x)) = \pi_{\{\alpha\}}(x) \forall \alpha < \kappa \Rightarrow f(x) = x$$

Portanto basta provar que $\bigcap_{F \in [\kappa]^{<\omega}} Y_F \neq \emptyset$. Para isto demonstraremos que :

- (1) $Y_F \neq \emptyset \quad \forall F \in [\kappa]^{<\omega}$
- (2) $\{Y_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ tem a propriedade da interseção finita
- (3) Y_F é fechado $\quad \forall F \in [\kappa]^{<\omega}$

Como $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ é compacto, as propriedades (1),(2) e (3) implicam que

$$\bigcap_{F \in [\kappa]^{<\omega}} Y_F \neq \emptyset.$$

- (1) $Y_F \neq \emptyset \quad \forall F \in [\kappa]^{<\omega}$:

Seja $x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, $x = \pi_F(x) \times \pi_{\kappa-F}(x)$. Consideramos as seguintes funções :

* a projeção $\hat{\pi}_F : \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \times \{\pi_{\kappa-F}(x)\} \rightarrow \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ que é um homeomorfismo, e

* a inclusão $i : \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \times \{\pi_{\kappa-F}(x)\} \hookrightarrow \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ que é uma imersão, e portanto contínua.

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{\alpha \in F} X_\alpha & \xrightarrow{(\pi_F)^{-1}} & \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \times \{\pi_{\kappa-F}(x)\} & \xrightarrow{i} & \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha & \xrightarrow{f} & \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \\ & & & & & & \downarrow \pi_F \\ & & & & & & \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \end{array}$$

A função $\pi_F \circ f \circ i \circ \pi_F^{-1} : \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ é então contínua, e por teorema de Schauder tem ponto fixo. Seja $y_F \in \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ ponto fixo de $\pi_F \circ f \circ i \circ \pi_F^{-1}$, e seja $y = y_F \times \{\pi_{\kappa-F}(x)\}$. Temos que $y_F = \pi_F \circ f \circ i \circ \pi_F^{-1}(y_F) = \pi_F \circ f \circ i(y) = \pi_F \circ f(y)$. Portanto $y \in Y_F$.

(2) $\{Y_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ tem a p.i.f:

Dados $F_1, \dots, F_m \in F \in [\kappa]^{<\omega}$, sejam $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ e $x \in Y_F$.

$x \in Y_F \Rightarrow \pi_F(f(x)) = \pi_F(x) \Rightarrow \pi_{F_i}(f(x)) = \pi_{F_i}(x) \Rightarrow x \in Y_{F_i}$ para $i = 1, \dots, m$ ou seja, $x \in \bigcap_{i=1}^m Y_{F_i}$.

(3) Y_F é fechado $\forall F \in [\kappa]^{<\omega}$

Sejam $F \in [\kappa]^{<\omega}$ e $x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha - Y_F$.

$x \notin Y_F \Rightarrow \pi_F(f(x)) \neq \pi_F(x) \Rightarrow \exists \beta \in F$ tal que $\pi_{\{\beta\}}(x) \neq \pi_{\{\beta\}}(f(x))$. Como X_β é um espaço T_2 , existem U_β vizinhança aberta de $\pi_{\{\beta\}}(x)$ e V_β vizinhança aberta de $\pi_{\{\beta\}}(f(x))$ tais que $U_\beta \cap V_\beta = \emptyset$

Sejam $U = U_\beta \times \prod_{\substack{\alpha < \kappa \\ \alpha \neq \beta}} X_\alpha$ e $V = V_\beta \times \prod_{\substack{\alpha < \kappa \\ \alpha \neq \beta}} X_\alpha$ vizinhança aberta de x e $f(x)$ respectivamente.

Como f é contínua, existe W vizinhança aberta de x , $W \subset U$ tal que $f(y) \in V \forall y \in W$. Então temos que :

$$\forall y \in W : \begin{cases} \pi_{\{\beta\}}(y) \in U_\beta & \text{e} \\ \pi_{\{\beta\}}(f(y)) \in V_\beta \end{cases}$$

e como $U_\beta \cap V_\beta = \emptyset$, temos $\pi_{\{\beta\}}(y) \neq \pi_{\{\beta\}}(f(y))$.

Portanto $\pi_F(y) \neq \pi_F(f(y)) \quad \forall y \in W$.

Logo $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha - Y_F$ é aberto. ■

Referências Bibliográficas

- [CM97] Alex Chigogidze and John R. Martin. *Fixed point sets of autohomeomorphisms of uncountable products*. Topology Appl. 80 pp 63–71, 1997.
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*. Sigma series in pure Mathematics; Vol.6. Helderman Verlag, 1989.
- [Hod84] R. Hodel. *Cardinal Functions I*. Handbook of set-theoretic topology, cap 1.
- [Hön77] Chaim Samuel Hönig. *Aplicações da Topologia à Análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides).
- [Kos92] Piotr Koszmider. *On the Complete invariance property in some uncountable products*. Can.Math.Bull. 35 pp 221–229, 1992.
- [Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory. Un introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the foundations of Mathematics; Vol.102. North-Holland, 1980.
- [KV84] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, 1984.
- [Lim77] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides).

- [Mar88] John R. Martin. *Fixed point sets of homeomorphisms of metric products*. Proc. Amer. Math. Soc. 103 pp 1293–1298. 1988.
- [Mil88] J.van Mill. *Infinite Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction*. North-Holland Mathematical Library Vol.43. North-Holland, 1988.
- [MW84] John R. Martin and William Weiss. *Fixed point sets of Metric and Nonmetric Spaces*. Trans.Amer.Math.Soc. 284 pp.337–353. 1984.
- [Rob67] Herbert Robbins. *Some complements to Brower's fixed point theorem*. Israel J. Math. 5 pp225–226. 1967.
- [Rud56] Walter Rudin. *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*. Duke Math J. 23 pp 409–419. 1956.
- [Sch69] H. Shirmmer. *On fixed point sets of the n -ball*. Israel J. Math. 10 pp.46–50. 1969.
- [Sch81] H.Shirmer. *Fixed point sets of continuous selfmaps*, in:Fixed Point Theory, Conf. Proc., Sherbrooke,1980. Lecture Notes in Math. 866 pp.417–428. 1981.
- [Sir68] S. Sirota. *The spectral representation of spaces of closed subsets of bicompecta*. Soviet.Math.Dokl. 9 pp.997–1000. 1963.
- [TJ97] Artur Tomita e Lucia Junqueira. *Topologia Geral- 1º semestre 1997*. Notas de aula do IME/USP, 1997.
- [War73] L.E. Ward Jr. *Fixed point sets*. Pacific J. Math. 47 pp.553–565. 1973.