LOOPS DE MOUFANG LINEARES

Maria de Lourdes Merlini Giuliani

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**

Orientador: **Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies**

– São Paulo, março de 1998 –

Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

LOOPS DE MOUFANG LINEARES

Este exemplar corresponde à redação final da tese apresentada por Maria de Lourdes Merlini Giuliani, devidamente corrigida e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 13 de março de 1998.

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies (Presidente) - IME-USP.
- Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi - IME-USP.
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC-UNICAMP.
- Prof. Dr. Guilherme Augusto de La Rocque Leal - URFJ.
- Prof. Dr. Norai Romeu Rocco - UnB.

Resumo

Neste trabalho se consideram as álgebras matriciais-vetoriais de Zorn que são, precisamente, as álgebras alternativas simples de dimensão finita. O conjunto dos elementos inversíveis de uma tal álgebra forma um Loop de Moufang. Por analogia com o caso associativo, estes loops serão chamados de *loops lineares* e denotados na forma $GLL(K)$; subloop formado pelas matrizes de determinante 1 é denotado por $SLL(K)$ e o quociente deste loop pelo seu centro, por $PSLL(K)$.

Inicialmente, demonstramos que as álgebras de Zorn são irredutíveis, no sentido de que não contêm nenhum ideal lateral próprio. Depois, determinamos um conjunto de geradores para $GLL(K)$ e, conseqüentemente, também para $SLL(K)$. Esta descrição se utiliza para dar uma nova prova de que os loops do tipo $PSLL(K)$ são simples. Também calculamos as ordens de todos estes loops no caso em que o corpo K é finito.

No último capítulo, estudamos detalhadamente o reticulado de subloops de $GLL(F_2)$.

Abstract

In this work we consider Zorn's vector-matrix algebras which are, precisely, the finite dimensional, simple, alternative algebras. The set of invertible elements of such an algebra is a Moufang Loop. As in the associative case, they will be called *linear loops* and will be denoted by $GLL(K)$; the subloop of all matrices of determinant 1 will be denoted by $SLL(K)$ and the quotient of this loop by its centre by $PSLL(K)$.

Initially, we show that Zorn's algebras are irreducible, in the sense that they contain no proper one-sided ideal. Then we determine a set of gerators for $GLL(K)$ and, consequently, also for $SLL(K)$. This description is used to give a new proof that loops of type $PSLL(K)$ are simple. We also compute the orders of all these loops in the case when K is finite.

In the last chapter, we study the lattice of subloops of $GLL(F_2)$.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. César, orientador e amigo, pela forma competente e dedicada como conduziu a elaboração desta tese.

Agradeço a todos os colegas que direta ou indiretamente me ajudaram durante o período de doutorado. Em especial ao Thierry, pela disponibilidade e paciência de rever muitos detalhes deste trabalho.

Agradeço ao Osmar, pelo companheirismo e incentivo nos momentos difíceis.

Aos meus filhos,
Caio e Emília.

Conteúdo

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	2
1.1 Álgebras Alternativas	2
1.2 Álgebra Matricial-Vetorial de Zorn	6
1.3 Loops	7
2 O Loop das Unidades da Álgebra de Zorn	14
2.1 A Álgebra de Zorn	14
2.2 O Loop Linear Geral	17
2.3 A Simplicidade de $PSLL(K)$	25
2.4 As Ordens dos Loops Lineares Finitos	37
3 O Menor Loop Linear	43
3.1 Elementos de $GLL(F_2)$ – resultados preliminares	43
3.2 A Simplicidade de $PSLL(F_2)$	46
3.3 Limitando os Subloops de Ordem Potência de 2	48
3.4 Classificação dos 2-subloops de $GLL(F_2)$	56
3.5 A Classificação dos Subloops de $GLL(F_2)$	59
Referências bibliográficas	81

Introdução

Em 1956, L. Paige provou que os loops de Moufang, que adiante denotamos por $PSLL(K)$, são simples e, em 1987, M.W. Liebeck provou que todo loop de Moufang não associativo, simples, é isomorfo a um loop da forma $PSLL(K)$ para algum K .

Estes loops são quocientes de loops de unidades de álgebras matriciais-vetoriais de Zorn, que são as álgebras alternativas simples de dimensão finita (não associativas) sobre K . Por causa disso, é natural chamar estes loops de loops lineares e denotá-los por $GLL(K)$.

Nesta tese, provamos inicialmente que a álgebra de Zorn é mais do que uma álgebra simples: ela é irredutível. Depois, determinamos um conjunto de geradores de $GLL(K)$ e, como consequência, obtemos um conjunto de geradores para $PSLL(K)$ bem menor que o utilizado por Paige e damos uma nova demonstração da simplicidade destes loops. Também provamos que o comutador-associador de $GLL(K)$ é $SLL(K)$, o subloop das matrizes de determinante 1. Concluimos o estudo geral dos loops lineares dando uma fórmula explícita para as ordens de $GLL(K)$, $SLL(K)$ e $PSLL(K)$ no caso em que K é um corpo finito.

Finalmente, no Capítulo 3, estudamos em detalhes $PSLL(F_2)$ quando F_2 é o corpo com dois elementos e determinamos o reticulado dos seus subloops.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Álgebras Alternativas

Nesta seção, resumimos brevemente alguns resultados sobre álgebras alternativas que serão usadas no próximo capítulo. Quando necessário, damos referências para as demonstrações correspondentes.

Seja A uma álgebra (não associativa) sobre um corpo K . Dados $x, y, z \in A$, denotamos o *associador* de x, y e z e o *comutador* de x e y , respectivamente, por:

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$$

$$[x, y] = xy - yx$$

Definição 1.1.1 Dizemos que A é uma *álgebra alternativa* se para todo par de elementos $x, y \in A$ tem-se que

$$(x, y, y) = 0 \quad (\text{lei alternativa à direita})$$

$$(x, x, y) = 0 \quad (\text{lei alternativa à esquerda})$$

Essas identidades implicam a lei flexível:

$$(x, y, x) = 0 \quad \forall x, y \in A.$$

Lema 1.1.2 ([16, p.35]) *Em qualquer álgebra alternativa A valem as seguintes identidades:*

$$x(yzy) = [(xy)z]y, \text{ identidade de Moufang à direita;} \quad (1)$$

$$(yzy)x = y[z(yx)], \text{ identidade de Moufang à esquerda;} \quad (2)$$

$$(xy)(zy) = x(yz)x, \text{ identidade de Moufang central.} \quad (3)$$

Observação 1.1.3 As identidades (1), (2) e (3) são chamadas identidades de Moufang.

Um resultado muito importante é o seguinte:

Teorema 1.1.4 (Teorema de Artin) ([12, p.29]) *Seja A uma álgebra alternativa sobre um corpo K . Toda subálgebra B de A , gerada por dois elementos, é associativa.*

Definição 1.1.5 Uma álgebra A é de *potência associativa* se cada elemento de A gera uma subálgebra associativa.

Corolário 1.1.6 ([16, p.37]) *Toda álgebra alternativa é de potência associativa.*

Definição 1.1.7 Uma álgebra A diz-se *simples* se seus únicos ideais são (0) e A .

Definição 1.1.8 Uma *involução* numa álgebra A é uma aplicação linear $a \rightarrow \bar{a}$ satisfazendo

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a} \quad \text{e} \quad \bar{\bar{a}} = a, \quad \forall a, b \in A.$$

Concentraremos nossos resultados numa classe de álgebras alternativas conhecidas como *álgebras de Cayley-Dickson*. Descreveremos resumidamente o processo de construção desta álgebra, que pode ser encontrado em [07] ou [16].

Processo de Cayley-Dickson

Seja K um corpo de característica $\neq 2$ e A uma álgebra não associativa de dimensão n sobre K , com elemento identidade. Suponha que A tem involução $a \rightarrow \bar{a}$ tal que $a + \bar{a} \in K1$ e $a\bar{a} = \bar{a}a \in K1$ para todo $a \in A$.

Dado $\alpha \in K$ não nulo e uma indeterminada ℓ , construímos a álgebra B , denotada (A, α) de dimensão $2n$ sobre K com propriedades similares a A .

Os elementos de B são expressões da forma

$$a + b\ell, \quad a, b \in A.$$

A adição e a multiplicação são dadas por

$$\begin{aligned}(a + b\ell) + (c + d\ell) &= (a + c) + (b + d)\ell \\ (a + b\ell)(c + d\ell) &= (ac + \alpha\bar{d}b) + (da + b\bar{c})\ell\end{aligned}$$

Definimos $\overline{a + b\ell} = \bar{a} - b\ell$.

É fácil mostrar que a aplicação $x \rightarrow \bar{x}$ define uma involução em B tal que $x + \bar{x}$ e $x\bar{x}$ estão em $K1$ para qualquer $x \in B$.

Dados $x = a + b\ell$ e $y = c + d\ell$, pode-se ver que $(x, x, y) = 0$ se, e somente se, A é uma álgebra associativa. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.9 ([07, p.17]) *Se A é uma álgebra com 1 sobre o corpo K e $\alpha \in K$ não nulo, então (A, α) é alternativa se, e somente se, A é associativa.*

Repetindo o processo de construção de (A, α) , podemos produzir álgebras de dimensão $4n, 8n$, mas poucas destas álgebras são alternativas.

Seja $A_0 = K$ e para $a \in A_0$, defina $\bar{a} = a$. A aplicação $a \rightarrow \bar{a}$ é certamente uma involução e assim, se $\alpha \in K$ não nulo, podemos construir pelo processo de Cayley-Dickson a

álgebra bidimensional $A_1 = (A_0, \alpha)$. Para $0 \neq \beta \in K$, a álgebra $A_2 = (A_1, \beta)$, de dimensão 4, que denotaremos por (K, α, β) , é chamada *álgebra dos quatérnios generalizada*.

Para $\gamma \in K$ não nulo, a álgebra $A_3 = (A_2, \gamma) = (K, \alpha, \beta, \gamma)$ de dimensão 8 sobre K é chamada *álgebra de Cayley-Dickson*.

Note que A_0 é associativa e pode-se verificar que A_1 e A_2 também são associativas enquanto que A_3 é alternativa.

Observemos que uma álgebra A de dimensão 4 sobre K é a álgebra dos quatérnios generalizada se, e somente se, ela tem uma base $\{1, i, j, ij\}$ satisfazendo $i^2 = \alpha \in K$, $j^2 = \beta \in K$, $\alpha\beta \neq 0$ e $ji = -ij$.

No nosso caso, é rotina checar que $A = A_2 = (K, \alpha, \beta)$, onde $A_1 = (K, \alpha) = K + Ki$ e $A_2 = A_1 + A_1j$.

A álgebra A_0 é certamente simples e se α não é um quadrado em K , então $A_1 = (K, \alpha)$ também é simples. De fato, se α não é um quadrado, A_1 é um corpo, pois é fácil ver que se $a + b\ell \neq 0$, o elemento $\frac{a - b\ell}{a^2 - \alpha b^2}$ é o inverso de $a + b\ell$.

Por outro lado, se $\alpha = \xi^2$, para algum $\xi \in K$, então $1/2(1 + \xi^{-1}\ell)$ e $1/2(1 - \xi^{-1}\ell)$ são idempotentes ortogonais com soma 1 e $(K, \alpha) \cong K \oplus K$.

Analogamente, as álgebras A_2 e A_3 são simples.

Temos então a proposição:

Proposição 1.1.10 ([07, p.18]) *Se K é um corpo de característica $\neq 2$, qualquer álgebra dos quatérnios generalizada (K, α, β) é simples e qualquer álgebra de Cayley-Dickson $(K, \alpha, \beta, \gamma)$ é simples.*

O seguinte teorema é bem conhecido e nos dá uma caracterização das álgebras alternativas.

Teorema 1.1.11 (Kleinfeld) ([16, p.151]) *Seja A uma álgebra alternativa simples que não é associativa. Então o centro da álgebra A é um corpo e A é álgebra de Cayley-Dickson*

sobre seu centro.

Seja A uma álgebra com 1 e A tem involução $a \rightarrow \bar{a}$ tal que $a\bar{a} \in K1$, para todo $a \in A$.

Se A é álgebra com divisão, ela certamente não tem divisores do zero não triviais. Reciprocamente, se A não tem divisores de zero e $a \in A$ é não nulo, então $a\bar{a}$ é um escalar não nulo e, logo, a é inversível (seu inverso é $\bar{a}(a\bar{a})^{-1}$). Em particular, uma álgebra construída pelo processo de Cayley-Dickson é de divisão se, e somente se, ela não tem divisores do zero não triviais.

Definição 1.1.12 Seja A uma álgebra de Cayley-Dickson. A é chamada *split* se A não é álgebra de divisão.

Nesse caso, A é isomorfa à álgebra matricial-vetorial de Zorn, que estudaremos na próxima seção.

1.2 Álgebra Matricial-Vetorial de Zorn

Consideremos o conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$, onde $a, b \in K$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^3$, o conjunto das ternas ordenadas de elementos de K .

A adição e a multiplicação por escalar é feita componente a componente e o produto é definido por

$$\begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2 & a_1 \mathbf{x}_2 + b_2 \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \\ a_2 \mathbf{y}_1 + b_1 \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 & b_1 b_2 + \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ denotam, respectivamente, o produto escalar e o produto vetorial em K^3 .

Notação: $\mathcal{Z}(K)$.

Pode-se mostrar que $\mathcal{Z}(K) \cong (K, -1, -1, 1)$ ([07, p.22])

Conseqüentemente, esta é uma álgebra alternativa, que é chamada a *álgebra matricial-vetorial de Zorn* ou a *álgebra split de Cayley-Dickson*.

Definição 1.2.1 Dado $\alpha \in \mathcal{Z}(K)$, dizemos que α é inversível se existe $\beta \in \mathcal{Z}(K)$ tal que $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$ (aqui 1 denota a matriz identidade). Chamaremos β de α^{-1} .

Definição 1.2.2 Dado $\alpha \in \mathcal{Z}(K)$ da forma $\begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$, definimos determinante de α , que denotamos por $\det(\alpha)$, como sendo $\det(\alpha) = ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. É fácil ver que a aplicação $\det$ é multiplicativa [7, p.22]. Pode-se mostrar que α é inversível se, e somente se, $\det \alpha \neq 0$. e vale

$$\alpha^{-1} = (\det \alpha)^{-1} \begin{bmatrix} b & -\mathbf{x} \\ -\mathbf{y} & a \end{bmatrix}.$$

O conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra alternativa forma um *loop de Moufang* que estudaremos no parágrafo seguinte [7, p.81].

1.3 Loops

Definição 1.3.1 Um *quasigrupo* é um par $(L, \cdot)$, onde $L \neq \emptyset$ e a operação $(a, b) \rightarrow a.b$ é uma operação binária sobre L tal que as equações

$$a.x = b$$

$$x.a = b$$

têm solução única em L , para todo $a, b \in L$.

Definição 1.3.2 Um *loop* é um quasigrupo com elemento identidade 1.

Ambas as regras de cancelamento valem num quasigrupo. Também podemos definir aplicações translações à direita e à esquerda da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}(x) : a \rightarrow a.x$$

$$\mathcal{L}(x) : a \rightarrow x.a, \quad \forall a \in L.$$

Da definição de quasigrupo, podemos concluir que $\mathcal{R}(x)$ e $\mathcal{L}(x)$ são aplicações bijetoras em L . As translações à direita e à esquerda geram um grupo, $\mathcal{M}(L)$, chamado *grupo multiplicativo de L* , que é um subgrupo do grupo das permutações de L . Se $(L, \cdot)$ é loop, a equação $a.x = 1$ (respectivamente $x.a = 1$) tem uma única solução a^p (respectivamente a^λ) chamado *inverso à direita* (respectivamente *inverso à esquerda*) de a . Em geral, inversos à direita e à esquerda de a podem ser diferentes. Quando forem iguais, usaremos a notação a^{-1} .

Definição 1.3.3 Um *subloop* de um loop $(L, \cdot)$ é um subconjunto não vazio H de L que com a restrição da operação binária de L é também um loop. Como para $h \in H$ a equação $h.x = h$ tem uma única solução em L , segue que $1_H = 1_L$. Vamos escrever simplesmente L para denotar um loop, assim como xy ao invés de $x.y$. Vale também:

Proposição 1.3.4 ([07, p.51]) *Seja L um loop e seja H um subconjunto não vazio de L . São equivalentes:*

- (i) H é um subloop de L ;
- (ii) Se $x, y \in H$, então os elementos xy , $x\mathcal{R}(y)^{-1}$, $x\mathcal{L}(y)^{-1}$ estão todos em H ;
- (iii) Se $x, y, z \in L$ são tais que $xy = z$ e dois dos elementos x, y, z estão em H , então o terceiro destes elementos também está em H .

Seja H um subloop de um loop finito L . Em geral o teorema de Lagrange não vale para loops. Como as regras de cancelamento valem para L , temos que $|xH| = |Hx| = |H|$, para todo $x \in L$. Assim, se L é a união disjunta de classes laterais de H , então $|L|$ é divisível pela ordem de H .

Uma condição necessária e suficiente para que L seja união disjunta de classes laterais à direita é que

$$(1) \quad Hx \cap Hy \neq \phi, x, y \in L \text{ se, e somente se, } Hx = Hy.$$

e esta condição é equivalente a

$$(2) \quad H(hx) = Hx, \forall x \in L \text{ e } \forall h \in H. \quad ([07, \text{p.52}])$$

Observação 1.3.5 Quando vale (2), então existe um subconjunto τ de L chamado *transversal* de H em L , tal que

$$L = \bigcup_{x \in \tau} Hx \quad \text{com} \quad Hx \cap Hy = \phi, \quad \forall x, y \in \tau.$$

Definição 1.3.6 Um loop diz-se *diassociativo* se, para todo par de elementos $x, y \in L$, o subloop $\langle x, y \rangle$, gerado por x e y , é associativo.

Definição 1.3.7 Um subloop H de um loop L é *normal* e escrevemos $H \triangleleft L$ se, para todo $x, y \in L$, tem-se que

$$Hx = xH, (Hx)y = H(xy), (xH)y = x(Hy) \quad \text{e} \quad y(xH) = (yx)H.$$

É fácil mostrar que se $Hx = xH, \forall x$, então quaisquer duas das três últimas equações implicam na terceira.

Da Definição 1.3.7 e da condição (2) para disjunção das classes, vemos que se $H \triangleleft L$, então as classes laterais de H em L são disjuntas.

Seja H um subloop normal do loop L , e $x, y, x_1, y_1 \in L$. Se $Hx = Hx_1$ e $Hy = Hy_1$, então

$$\begin{aligned} H(xy) &= (Hx)y = (Hx_1)y = (x_1H)y = x_1(Hy) \\ &= x_1(y_1H) = (x_1y_1)H \end{aligned}$$

Como na teoria de grupos, o conjunto das classes laterais de H forma um loop, chamado *loop quociente*, denotado por L/H ,

$$L/H = \{Hx \mid x \in L\}.$$

Esta construção nos permite ver que os subloops normais de L são precisamente os kernels de homomorfismos com domínio L .

Definição 1.3.8 Dado um subconjunto S não vazio de um loop L , seja T o conjunto de todos os subloops de L que contém S , então o subloop $\langle S \rangle = \bigcap_{H \in T} H$ diz-se o subloop de L gerado por S . Pode-se ver facilmente que $\langle S \rangle$ é o menor subloop de L que contém S .

Definição 1.3.9 Sejam a, b e c três elementos de um loop L . O *comutador* de a e b é o elemento em L , denotado por $[a, b]$, que satisfaz a equação

$$ab = (ba)[a, b]$$

e o *associador* de a, b e c em L é o elemento, denotado por (a, b, c) , que satisfaz a equação

$$(ab)c = \{a(bc)\}(a, b, c).$$

Se X, Y e Z são subconjuntos de um loop L , denotamos por $[X, Y]$ e (X, Y, Z) , respectivamente, o conjunto de todos os comutadores $[x, y]$ e todos associadores da forma (x, y, z) , onde $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

O *subloop comutador-associador* de um loop L é o subloop L' gerado pelo conjunto de todos os comutadores e todos os associadores. Ou seja,

$$L' = \langle (L, L, L), [L, L] \rangle.$$

O *núcleo à esquerda* de L é o conjunto

$$\mathcal{N}_\lambda(L) = \{a \in L \mid (a, x, y) = 1. \text{ para todos } x, y \in L\},$$

O *núcleo à direita* é o conjunto

$$\mathcal{N}_\rho(L) = \{a \in L \mid (x, y, a) = 1, \text{ para todos } x, y \in L\},$$

o *núcleo central* de L é

$$\mathcal{N}_\mu(L) = \{a \in L \mid (x, a, y) = 1, \text{ para todos } x, y \in L\},$$

e o *núcleo* de L é

$$\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}_\lambda(L) \cap \mathcal{N}_\rho(L) \cap \mathcal{N}_\mu(L).$$

O *centro* de L é

$$Z(L) = \{x \in \mathcal{N}(L) \mid [a, x] = 1, \text{ para todo } a \in L\}.$$

O seguinte resultado é bem conhecido:

Proposição 1.3.10 ([07, p.53]) *Cada um dos núcleos de um loop é um subloop associativo e portanto um grupo. O centro de um loop é um grupo abeliano*

É fácil ver que o centro de um loop é um subloop normal.

Definição 1.3.11 Um loop L diz-se *simples* se L não possui subloops normais próprios.

Definição 1.3.12 Um loop L é um *loop com propriedade inversa* se todo $x \in L$ tem um único inverso bilateral, que denotamos x^{-1} e satisfaz

$$x^{-1}(xy) = y \quad \text{e} \quad (yx)x^{-1} = y, \quad \forall x, y \in L.$$

Proposição 1.3.13 ([07. p.60]) *Seja L um loop com propriedade inversa e denotamos por I e J , respectivamente, as aplicações identidade e inversa, isto é, as funções definidas por $I(x) = x$ e $J(x) = x^{-1}$, $\forall x \in L$. Então:*

- (i) $J^2 = I$, isto é, $(x^{-1})^{-1} = x$, $\forall x \in L$;
- (ii) $\mathcal{R}(x)^{-1} = \mathcal{R}(x^{-1})$ e $\mathcal{L}(x)^{-1} = \mathcal{L}(x^{-1})$, $\forall x \in L$;
- (iii) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $\forall x, y \in L$;
- (iv) $J\mathcal{L}(x)J = \mathcal{R}(x^{-1})$ e $J\mathcal{R}(x)J = \mathcal{L}(x^{-1})$, $\forall x \in L$.

Seja L um loop com propriedade inversa e H subloop de L . Como $\{h^{-1}, h \in H\} = H$, segue que a aplicação $Hx \rightarrow x^{-1}H$ está bem definida e é bijeção entre a família de classes laterais à direita e à esquerda. Podemos definir *índice* de H em L como sendo o menor número de classes laterais à direita de H sobre L se este número é finito e infinito caso contrário.

Notação: $[L : H]$.

Se L é união disjunta de classes laterais (à direita), então essa definição coincide com a definição usual da teoria de grupos. Assim, L é a união disjunta de classes laterais à direita de H se, e somente se, L é a união disjunta de classes laterais à esquerda de H . Se L é finito, temos então

$$[L : H] = \frac{|L|}{|H|}.$$

Teorema 1.3.14 *Num loop L as identidades de Moufang definidas no Lema 1.1.2 são todos equivalentes.*

Definição 1.3.15 Um loop diz-se um *loop de Moufang* se ele satisfaz uma e, portanto, todas as identidade de Moufang.

Teorema 1.3.16 (Moufang) ([07, p.68]) *Se a, b, c (não necessariamente distintos) são elementos de um loop de Moufang que se associam em alguma ordem, então o subloop gerado por a, b e c é um grupo.*

Corolário 1.3.17 *Um loop de Moufang é diassociativo.*

Segue abaixo a construção de uma classe de loops de Moufang que não são grupos, descobertos por Orin Chein.

O Processo de Chein

Seja G um grupo não abeliano e seja u uma indeterminada. Seja $L = G \dot{\cup} Gu$ a união disjunta de G e Gu e estendemos a operação binária de G para L seguindo as regras:

$$\begin{aligned} g(hu) &= (hg)u \\ (gu)h &= (gh^{-1})u \\ (gu)(hu) &= h^{-1}g, \quad \forall g, h \in G. \end{aligned}$$

Então L é um loop de Moufang, denotado por $M(G, 2)$ que não é um grupo. ([05])

O caso em que $G = S_3$, o grupo das simetrias de três letras, então $M(S_3, 2)$ é um loop de Moufang de ordem 12 e é o menor loop de Moufang que não é um grupo.

Capítulo 2

O Loop das Unidades da Álgebra de Zorn

2.1 A Álgebra de Zorn

Seja $A = \mathcal{Z}(K)$, onde K é um corpo, a álgebra matricial vetorial de Zorn. Neste capítulo mostraremos que trata-se de uma álgebra irredutível e estudaremos seu loop de unidades. Em particular, exibimos um conjunto de geradores deste loop e também do subloop normal formado pelas matrizes de determinante igual a 1. Finalmente, definimos o loop linear projetivo e mostramos que é um loop simples. Na última seção calculamos as ordens deste loop no caso em que o corpo K é finito.

Definição 2.1.1 Seja $A = \mathcal{Z}(K)$, onde K é um corpo. Um subconjunto não vazio L de A diz-se um ideal à esquerda de A se $AL \subset L$.

Definição 2.1.2 Dado $x \in A$, definimos o ideal à esquerda gerado por x e denotamos por $\langle x \rangle_l$, como sendo o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{a_i \in A} (a_n \cdots (a_2(a_1x)) \cdots)$. É fácil ver que $\langle x \rangle_l$ é o menor ideal à esquerda de A que contém x .

Lembramos que uma álgebra A diz-se irredutível (à esquerda) se não contém ideais (à esquerda) próprios.

Usaremos a notação $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ para representar, respectivamente, os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Lema 2.1.3 Dados $e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ em A , tem-se que $\langle e_{11} \rangle_l = \langle e_{22} \rangle_l = A$.

Demonstração: Seja $\alpha \in A$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$, temos

$$\alpha e_{11} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \in \langle e_{11} \rangle_l.$$

Como a, y são arbitrários, os elementos $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$ estão em $\langle e_{11} \rangle_l$. Logo, o elemento $\begin{bmatrix} 1 & i \\ j+k & 0 \end{bmatrix}$ está em $\langle e_{11} \rangle_l$ pois

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ j+k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ j+k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\langle e_{11} \rangle_l$ é ideal, a soma dos elementos $\begin{bmatrix} 1 & i \\ j+k & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$ também está em $\langle e_{11} \rangle_l$.

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ j+k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i+j+k & 0 \end{bmatrix} = \beta \in \langle e_{11} \rangle_l.$$

Sendo β um elemento inversível, temos $\langle e_{11} \rangle_l = A$. Procedendo de maneira análoga, obtemos um elemento inversível em $\langle e_{22} \rangle_l$ e, conseqüentemente, $\langle e_{22} \rangle_l = A$. ■

Mostremos que A não tem ideais à esquerda não triviais.

Suponha que exista L ideal de A , $L \neq (0)$, e seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in L$, $\alpha \neq 0$. Como $\alpha \neq 0$, então pelo menos uma de suas entradas é não nula.

(i) Suponhamos inicialmente que $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x_3 \neq 0$, já que se $x_3 = 0$ então x_1 ou x_2 deve ser não nulo e fazendo as mudanças convenientes no procedimento abaixo, obtemos um resultado similar.

Tomando em A os elementos $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\beta_3 = \begin{bmatrix} -x_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e efetuando os produtos:

$$\beta_1 \alpha = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & bi \\ i \wedge x & 0 \end{bmatrix} \in L,$$

$$\beta_2(\beta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & b\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 & 0 \\ -b\mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} \in L,$$

$$\beta_3(\beta_2(\beta, \alpha)) = \begin{bmatrix} -x_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_3 & 0 \\ -b\mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{11} \in L.$$

Vemos que $\langle e_{11} \rangle_l \subseteq L$, donde $L = A$.

- (ii) Suponhamos agora que $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \neq \mathbf{0}$. Como antes, sem perda de generalidade, podemos supor que $y_3 \neq 0$ e consideramos os seguintes elementos de A :

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_3^{-1} \end{bmatrix}.$$

Calculamos o produto $\beta_1\alpha \in L$:

$$\beta_1\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{y} \wedge \mathbf{i} \\ a\mathbf{i} & x_1 \end{bmatrix}.$$

Agora também $\beta_2(\beta_1\alpha) \in L$. Calculando, temos:

$$\beta_2(\beta_1\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{y} \wedge \mathbf{i} \\ a\mathbf{i} & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a\mathbf{k} \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

E por fim, calculamos $\beta_3(\beta_2(\beta_1\alpha)) \in L$.

$$\beta_3(\beta_2(\beta_1\alpha)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a\mathbf{k} \\ 0 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{22}.$$

Logo, $\langle e_{22} \rangle_l \subseteq L$, donde $L = A$.

- (iii) Consideremos agora o caso em que $b \neq 0$ e tomemos

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \text{ em } A.$$

Então.

$$\beta_1\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \in L$$

e, consequentemente,

$$\beta_2(\beta_1\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{22} \in L.$$

Logo, nesse caso também $\langle e_{22} \rangle_l \subseteq L$, donde $A \subseteq L$ e portanto $A = L$.

(iv) Seja $\alpha \in L$, $\alpha \neq 0$. Já mostramos que se $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ou b são não nulos, então $\langle \alpha \rangle_l = A$.

Falta considerar apenas o caso em que $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, $b = 0$ e $a \neq 0$, isto é,

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos:

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = e_{11} \in L.$$

Donde $\langle e_{11} \rangle_l \subseteq L$ e portanto $A \subseteq L$, isto é, $A = L$.

De uma forma análoga pode-se ver que A não contém ideais à direita próprios.

Assim, demonstramos o seguinte:

Teorema 2.1.4 *A álgebra $\mathcal{Z}(K)$ é irredutível à esquerda e à direita.*

2.2 O Loop Linear Geral

Uma álgebra associativa simples que não é de divisão é isomorfa a $M_n(D)$, o anel de matrizes de ordem n sobre D , um anel com divisão. Os elementos inversíveis de $M_n(D)$ formam um subgrupo, denotado por $GL_n(D)$, o Grupo Linear Geral.

Já vimos que uma álgebra alternativa simples que não é de divisão é isomorfa a $\mathcal{Z}(K)$. O conjunto dos elementos inversíveis de $\mathcal{Z}(K)$ é a generalização natural de grupos lineares ao contexto alternativo.

Definição 2.2.1 O *Loop Linear Geral* é o loop dos elementos inversíveis da álgebra de Zorn, $\mathcal{Z}(K)$ e é denotado por $GLL(K)$.

Definição 2.2.2 O *Loop Linear Especial* é o subloop de $GLL(K)$ consistindo de todas as matrizes de determinante 1 e é denotado por $SLL(K)$.

Considere em $\mathcal{Z}(K)$ os elementos

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

$$e_{12}^{(\mathbf{i})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12}^{(\mathbf{j})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12}^{(\mathbf{k})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_{21}^{(\mathbf{i})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{21}^{(\mathbf{j})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{21}^{(\mathbf{k})} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 2.2.3 Os elementos e_{ii} , $e_{ij}^{(\mathbf{h})}$, onde $i, j = 1, 2$ e $\mathbf{h} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$, satisfazem as relações:

a) $e_{ii}^2 = e_{ii}$, $e_{ii}e_{jj} = 0$;

b) $e_{ii}e_{ij}^{(\mathbf{h})} = e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{jj} = e_{ij}^{(\mathbf{h})}$, $e_{jj}e_{ij}^{(\mathbf{h})} = e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{ii} = 0$;

c) $(e_{ij}^{(\mathbf{h})})^2 = 0 = e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{ij}^{(\mathbf{l})}$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{l}$;

d) $e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{ji}^{(\mathbf{h})} = e_{ii}$, $e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{ji}^{(\mathbf{l})} = 0$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{l}$;

e) $e_{ij}^{(\mathbf{h})}e_{ij}^{(\mathbf{l})} = \begin{cases} e_{12}^{(\mathbf{h})}e_{12}^{(\mathbf{l})} = e_{21}^{(\mathbf{h} \wedge \mathbf{l})} \\ e_{21}^{(\mathbf{h})}e_{21}^{(\mathbf{l})} = e_{12}^{-(\mathbf{h} \wedge \mathbf{l})} \end{cases}$

Demonstração: Imediata, por comprovação direta.

Definição 2.2.4 Dado $\lambda \in K$, definimos uma *transvecção* em $GLL(K)$ e denotamos por $\tau_{ij}^{(\mathbf{h})}(\lambda)$, onde $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ e $\mathbf{h} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$, como sendo o elemento

$$\tau_{ij}^{(\mathbf{h})}(\lambda) = I + \lambda e_{ij}^{(\mathbf{h})} \in GLL(K),$$

onde I é a matriz identidade em $\mathcal{Z}(K)$ e $e_{ij}^{(h)}$ são as matrizes definidas acima.

$$\text{Por exemplo, } \tau_{12}^{(j)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & (0, \lambda, 0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a aplicação $\det : GLL(K) \rightarrow K^* = K \setminus \{0\}$ é um homomorfismo e $\text{Ker}(\det) = SLL(K)$, temos o seguinte:

Lema 2.2.5 $SLL(K) \triangleleft GLL(K)$. [11]

Lema 2.2.6 a) $Z(GLL(K)) = K^*I$;

$$b) Z(SLL(K)) = \{I, -I\}.$$

Demonstração:

a) Para simplificar a notação, chamemos $G = GLL(K)$.

Seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \in \mathcal{Z}(G)$ e $\beta = \begin{bmatrix} c & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & d \end{bmatrix} \in G$ um elemento qualquer.

Calculemos $\alpha\beta$ e também $\beta\alpha$.

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} & a\mathbf{v} + d\mathbf{x} - \mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ c\mathbf{y} + b\mathbf{u} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} & bd + \mathbf{y} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca + \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} & c\mathbf{x} + b\mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{y} \\ a\mathbf{u} + d\mathbf{y} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{x} & db + \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\forall \beta \in G$, devemos ter $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$. Tomemos $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Então temos que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, donde $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De forma análoga, segue que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Agora, temos que

$$a\mathbf{v} = b\mathbf{v},$$

$$b\mathbf{u} = a\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \Rightarrow a = b.$$

Conseqüentemente,

$$\alpha \in Z(G) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \alpha = aI, \quad a \in K^*.$$

É claro que $K^*I \subseteq Z(G)$, donde $Z(G) = K^*I$.

b) Como antes, chamemos $SLL(K) = S$.

Seja $\alpha \in Z(S)$, β elemento qualquer em S , $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$; $\beta = \begin{bmatrix} c & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & d \end{bmatrix}$.

Devemos ter $\alpha\beta = \beta\alpha$ e ainda $ab - \mathbf{x}.\mathbf{y} = 1 = cd - \mathbf{u}.\mathbf{v}$.

Portanto, $\mathbf{x}.\mathbf{u} = \mathbf{v}.\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$ e como antes, segue que $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Devemos ter ainda:

$$a\mathbf{v} = b\mathbf{v},$$

$$a\mathbf{u} = b\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

o que implica $a = b$.

Logo, $\alpha \in Z(S) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a \end{bmatrix}$, com $a^2 = \det \alpha = 1$.

Como $a \in K^*$, então $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a + 1) = 0$, portanto,

$$a = 1 \quad \text{ou} \quad a = -1.$$

Assim, $Z(S) = \{I, -I\}$. ■

Se denotamos $(GLL(K))'$, o subloop comutador-associador de $GLL(K)$, então valem os seguintes resultados:

Proposição 2.2.7 ([07, p.56]) $(GLL(K))' \triangleleft GLL(K)$

O loop quociente $GLL(K)/(GLL(K))'$ é o conjunto dos elementos da forma $x(GLL(K))'$, $x \in GLL(K)$ com o produto dado por

$$x(GLL(K))'y(GLL(K))' = xy(GLL(K))' \quad ([03, p.61])$$

Lema 2.2.8 ([03]) *O loop quociente $GLL(K)/(GLL(K))'$ é associativo e comutativo*

O seguinte lema é muito simples mas será usado repetidamente no que segue.

Lema 2.2.9 *Seja L um loop de Moufang e sejam $\alpha, \beta, \gamma \in L$. Se $\alpha\beta = \gamma$, então $\alpha = \gamma\beta^{-1}$.*

Demonstração: Como $\alpha\beta = \gamma$, multiplicando ambos os lados da equação por β^{-1} , temos que $(\alpha\beta)\beta^{-1} = \gamma\beta^{-1}$.

Como $(\alpha\beta)\beta^{-1} \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pela diassociatividade tem-se que $(\alpha\beta)\beta^{-1} = \alpha(\beta\beta^{-1}) = \alpha$ e segue a tese. ■

Lema 2.2.10 *Se α é um elemento da forma $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}$, então α pode ser escrito como um produto de transvecções.*

Demonstração: Seja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e considere $\gamma = \tau_{12}^{(i)}(v_2v_3)\tau_{21}^{(j)}(-v_2)$. Ou seja,

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & v_2v_3\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -v_2\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_2v_3\mathbf{i} \\ -v_2\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v_2v_3\mathbf{i} \\ -v_2\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_2v_3\mathbf{i} + v_2(\mathbf{v} \wedge \mathbf{j}) \\ \mathbf{v} - v_2\mathbf{j} & 1 + v_1v_2v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, v_1v_2) \\ (v_1, 0, v_3) & 1 + v_1v_2v_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, calculamos $\alpha_2 = (\alpha\gamma)(\tau_{12}^{(k)}(-v_1v_2))$:

$$\begin{bmatrix} 1 & (0, 0, v_1v_2) \\ (v_1, 0, v_3) & 1 + v_1v_2v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v_1v_2\mathbf{k} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (v_1, 0, v_3) & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o produto $\alpha_3 = \alpha_2\tau_{21}^{(i)}(-v_1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (v_1, 0, v_3) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -v_1\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v_1v_3\mathbf{j} \\ v_3\mathbf{k} & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, calculamos $\alpha_4 = \alpha_3 \tau_{12}^{(j)}(v_1 v_3)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -v_1 v_3 \mathbf{j} \\ v_3 \mathbf{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v_1 v_3 \mathbf{j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ v_3 \mathbf{k} & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos assim que

$$\left[((\alpha \gamma) \tau_{12}^{(\mathbf{k})}(-v_1 v_2) \tau_{21}^{(\mathbf{i})}(-v_1)) \right] \tau_{12}^{(\mathbf{j})}(v_1 v_3) = \tau_{21}^{(\mathbf{k})}(v_3).$$

Logo,

$$\alpha = \left[\left(\left(\tau_{21}^{(\mathbf{k})}(v_3) \cdot \tau_{12}^{(\mathbf{j})}(-v_1 v_3) \right) \tau_{21}^{(\mathbf{i})}(v_1) \right) \tau_{12}^{(\mathbf{k})}(v_1 v_2) \right] \left[\tau_{12}^{(\mathbf{i})}(-v_2 v_3) \cdot \tau_{21}^{(\mathbf{j})}(v_2) \right].$$

■

Definição 2.2.11 Dado $\mu \in K$, $\mu \neq 0$, definimos $D(\mu) \in GLL(K)$ como sendo o elemento

$$D(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.12 Com a notação acima,

$$GLL(K) = \langle \tau_{ij}^{(\mathbf{h})}(\lambda), D(\mu) \mid \mathbf{h} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mu \neq 0, \lambda, \mu \in K \rangle,$$

$$SLL(K) = \langle \tau_{ij}^{(\mathbf{h})}(\lambda) \mid \mathbf{h} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \lambda \in K \rangle.$$

Demonstração: Seja $\alpha \in GLL(K)$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$. Como $\det \alpha \neq 0$, podemos supor então que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. De fato, em caso contrário deveremos ter $a, b \neq 0$ e multiplicando por $\tau_{12}^{(\mathbf{i})}(\lambda)$ ficamos com

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \lambda a \mathbf{i} \\ \mathbf{y} & b + \lambda y_1 \end{bmatrix} = \alpha' \in GLL(K).$$

Nesta matriz de $GLL(K)$, o vetor que ocupa a posição (1.2) é $\mathbf{x}' = \lambda a \mathbf{i} \neq \mathbf{0}$.

Considere então $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Alguma de suas coordenadas é não nula. Suponha $x_1 \neq 0$. Se $x_1 = 0$, então x_2 ou x_3 é não nulo e fazemos as mudanças correspondentes.

Multiplicando α à direita por $\tau_{21}^{(i)}(\lambda)$:

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \lambda \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \lambda x_1 & \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \wedge \mathbf{i} \\ \mathbf{y} + \lambda b \mathbf{i} & b \end{bmatrix} = \alpha_1.$$

Tomando $\lambda = \frac{1-a}{x_1}$, α_1 terá a forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix}$, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\underbrace{x_1}_{u_1}, \underbrace{x_2 - \lambda y_3}_{u_2}, \underbrace{x_3 + \lambda y_2}_{u_3}) \\ \mathbf{v} &= (\underbrace{y_1 + \lambda b}_{v_1}, \underbrace{y_2}_{v_2}, \underbrace{y_3}_{v_3}) \end{aligned}$$

Se $u_3 \neq 0$, vamos provar que existe uma transvecção $\tau_1 = \tau_{12}^{(\mathbf{k})}(-u_3)$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1 \tau$ é da forma $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & (u_1, u_2, 0) \\ \mathbf{v}' & b_1 \end{bmatrix}$.

Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 \tau_{12}^{(\mathbf{k})}(-u_3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u_3 \mathbf{k} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (u_1, u_2, 0) \\ \mathbf{v} - u_3(\mathbf{u} \wedge \mathbf{k}) & b - u_3 v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (u_1, u_2, 0) \\ \underbrace{\mathbf{v} - (u_2 u_3, -u_1 u_3, 0)}_{\mathbf{v}'} & \underbrace{b - u_3 v_3}_{b_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Novamente, se $u_2 \neq 0$, mostremos que existe uma transvecção $\tau_2 = \tau_{12}^{(\mathbf{j})}(-u_2)$ tal que $\alpha_3 = \alpha_2 \tau$ é da forma $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & (u_1, 0, 0) \\ \mathbf{v}'' & b_2 \end{bmatrix}$.

De fato, $\alpha_3 = \alpha_2 \tau_{12}^{(\mathbf{j})}(-u_2)$,

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & (u_1, u_2, 0) \\ \mathbf{v}' & b - u_3 v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u_2 \mathbf{j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u_1 \mathbf{i} \\ \mathbf{v}'' & \underbrace{b - u_1 u_2 u_3 - u_2 v_2 - u_3 v_3}_{b_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}' + (0, 0, -u_1 u_2) = (v_1 - u_2 u_3, v_2 + u_1 u_3, v_3 - u_1 u_2).$$

Finalmente, se $u_1 \neq 0$, provamos que existe uma transvecção $\tau_3 = \tau_{12}^{(i)}(-u_1)$ tal que $\alpha_4 = \alpha_3 \tau$ é da forma $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}'' & b_3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \begin{bmatrix} 1 & u_1 \mathbf{i} \\ \mathbf{v}'' & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u_1 \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}'' & \underbrace{b_2 - u_1(v_1 - u_2 u_3)}_{b_3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 - u_1(v_1 - u_2 u_3) = b_2 - u_1 v_1 + u_1 u_2 u_3 \\ &= b - u_1 u_2 u_3 - u_2 v_2 - u_3 v_3 - u_1 v_1 + u_1 u_2 u_3 = b - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2 - \lambda y_3, x_3 + \lambda y_2)$$

$$\mathbf{v} = (y_1 + \lambda b, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= x_1 y_1 + \lambda b x_1 + x_2 y_2 - \lambda y_2 y_3 + x_3 y_3 + \lambda y_2 y_3 \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \frac{(1-a)}{x_1} b x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b - ab \end{aligned}$$

Assim, $b_3 = b - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b - ab) = ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \det \alpha$.

Com isso, dado $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$, através de multiplicações à direita por transvecções, obtemos uma matriz β da forma

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mu \end{bmatrix}, \text{ onde } \mu = \det \alpha.$$

Agora, tomando $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mu^{-1}\mathbf{z} & 1 \end{bmatrix}$, temos que

$$\beta\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mu^{-1}\mathbf{z} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \end{bmatrix}.$$

Logo, temos mostrado que

$$(((\alpha\tau_1)\tau_2)\tau_3)\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \end{bmatrix} = D(\mu),$$

$$\alpha = (((D(\mu), \gamma^{-1})\tau_3^{-1})\tau_2^{-1})\tau_1^{-1}.$$

Como γ é produto de transvecções, segue que

$$\alpha \in \langle \tau_{ij}^{(\mathbf{h})}, D(\mu) \mid \mathbf{h} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}; i, j = 1, 2; \lambda, \mu \in K \rangle.$$

A demonstração anterior mostra que qualquer matriz tendo determinante 1 pode ser escrita na forma $\tau_{ij}^{(\mathbf{h})}(\lambda)$, pois se $\alpha \in SLL(K)$, pela demonstração acima temos $D(\mu) = I$. ■

2.3 A Simplicidade de $PSLL(K)$

Nesta seção mostraremos que $PSLL(K)$ é simples. Este resultado foi obtido pela primeira vez por L. Paige [10].

Nossa demonstração é diferente e utiliza o conjunto de geradores introduzido na seção anterior, que é bem menor que o considerado originariamente por Paige.

Definição 2.3.1 Se Z_0 denota o centro de $SLL(K)$, definimos o *Loop Linear Projetivo* e denotamos por $PSLL(K)$, como sendo o loop quociente:

$$PSLL(K) = \frac{SLL(K)}{Z_0}.$$

Nosso objetivo é demonstrar que $PSLL(K)$ é simples.

Definição 2.3.2 Sejam x e y elementos de um loop L . Definimos bijeções $\mathcal{T}(x)$, $\mathcal{R}(x, y)$ e $\mathcal{L}(x, y)$ por

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x) &= \mathcal{R}(x)\mathcal{L}(x)^{-1}, \\ \mathcal{R}(x, y) &= \mathcal{R}(x)\mathcal{R}(y)\mathcal{R}(xy)^{-1}, \\ \mathcal{L}(x, y) &= \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)\mathcal{L}(yx)^{-1}.\end{aligned}$$

Evidentemente, cada uma destas aplicações estão no grupo multiplicativo $\mathcal{M}(L)$. O grupo dos automorfismos internos de L é o subgrupo $\text{Inn}(L)$ de $\mathcal{M}(L)$ gerado por todas as aplicações da forma $\mathcal{T}(x)$, $\mathcal{R}(x, y)$, $\mathcal{L}(x, y)$,

$$\text{Inn}(L) = \langle \mathcal{T}(x), \mathcal{R}(x, y), \mathcal{L}(x, y) \mid x, y \in L \rangle,$$

e os elementos de $\text{Inn}(L)$ são chamados *aplicações internas*.

Observando que $Hx = xH$ se e somente se $H\mathcal{T}(x) = H$, que $(Hx)y = H(xy)$ se e somente se $H\mathcal{R}(x, y) = H$ e que $y(xH) = (yx)H$ se e somente se $H\mathcal{L}(x, y) = H$, vemos que H é um subloop normal de L se e somente se $\theta(H) = H$ para todo $\theta \in \text{Inn}(L)$.

Definição 2.3.3 Dois elementos $x, y \in L$ dizem-se conjugados se e somente se existe $\theta \in \text{Inn}(L)$ tal que $\theta(x) = y$.

Observação 2.3.4 Em particular, note que, dados $x, y \in L$ e $a \in L$, o produto $a^{-1}xa$ está bem definido, pois H é diassociativo e dizer que $a^{-1}xa = y$ é equivalente a escrever $\mathcal{T}(a)(x) = y$.

Lema 2.3.5 Duas transvecções são conjugadas em $SLL(K)$.

Vamos dividir a demonstração em cinco casos:

- i) $\tau_{12}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{12}^{(f)}(\rho)$ para quaisquer λ, ρ não nulos em K ; $h, f = i, j$ ou k .
com $h \neq f$.

Demonstração: Seja $u \in K^3$ um vetor tal que $u \cdot h = -1$ e $u \cdot f = -\rho^{-1}$. Conjugando

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho f \\ u & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda h \\ u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -h \\ -\frac{u}{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & -\rho f \\ -u & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ii) $\tau_{21}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{21}^{(f)}(\rho)$ para quaisquer λ, ρ não nulos em K ; $h, f = i, j$ ou k .
com $h \neq f$.

A demonstração é análoga ao caso anterior.

- iii) $\tau_{12}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{21}^{(h)}(\rho)$ para qualquer λ, ρ não nulos em K ; $h = i, j$ ou k .

Demonstração: Conjugando

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{\lambda} \\ \frac{h}{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda h \\ \rho h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho h & 1 \end{bmatrix}.$$

- iv) $\tau_{12}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{12}^{(h)}(\rho)$ para quaisquer λ, ρ não nulos em K ; $h = i, j$ ou k .

Demonstração: Já vimos no caso (i) que $\tau_{12}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{12}^{(f)}(\rho)$ para $h \neq f$.

Ainda, pelo caso (i), temos $\tau_{12}^{(f)}(\rho)$ é conjugada a $\tau_{12}^{(h)}(\rho)$.

- v) $\tau_{21}^{(h)}(\lambda)$ é conjugada a $\tau_{21}^{(h)}(\rho)$ para quaisquer λ, ρ não nulos em K ; $h = i, j$ ou k .

Novamente, a demonstração é análoga ao caso anterior.

A partir destas verificações a tese segue imediatamente. ■

No que segue, H denotará sempre um subloop normal de $SLL(K)$, $H \neq (1)$, que contém Z_0 . Mostraremos que se $H \neq Z_0$, então $H = SLL(K)$. Isto será feito mostrando que H contém uma, e portanto, todas as transvecções.

Lema 2.3.6 *Se H contém um elemento não central da forma*

$$\alpha = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \pm 1 \end{bmatrix},$$

então H contém uma transvecção.

Demonstração: Considere $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in H$. Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pelo menos uma de suas coordenadas é não nula. Suponha $x_1 \neq 0$. Conjugando

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{x} \\ x_1^{-1}\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ -x_1^{-1}\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{x} \\ x_1^{-1}\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ -x_1^{-1}\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ x_1^{-1}\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix} = \tau_{21}^{(i)}(x_1^{-1}) \in H. \end{aligned}$$

Se o elemento $\begin{bmatrix} -1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}$ está em H , como $-I \in H$, então $\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in H$ e portanto também nesse caso H contém uma transvecção.

O caso em que $\alpha = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \pm 1 \end{bmatrix}$ é análogo. ■

Lema 2.3.7 *Se H contém um elemento não central da forma*

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & a^{-1} \end{bmatrix},$$

com $a \neq \pm 1$, então H contém uma transvecção.

Demonstração: Seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix}$, com $a \neq \pm 1$.

Consideremos primeiro o caso em que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Então $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix}$. Conjugando α pela transvecção $\tau_{12}^{(i)}(1)$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & (a - a^{-1})\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} = \alpha_1 \in H.$$

Agora, multiplicamos α_1 por α^{-1} :

$$\begin{bmatrix} a & (a - a^{-1})\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (a^2 - 1)\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \tau_{12}^{(i)}(a^2 - 1) \in H.$$

Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, conjugando α por $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, onde $\lambda = -\frac{1}{a - a^{-1}}$,

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\alpha\beta &= \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & (\lambda a + 1)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & (\lambda a - \lambda a^{-1} + 1)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \in H \end{aligned}$$

e recaímos no caso anterior.

O caso em que $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & a^{-1} \end{bmatrix}$ é análogo.

■

Lema 2.3.8 *Se H contém um elemento não central da forma $\alpha = \begin{bmatrix} \mp 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & \pm 1 \end{bmatrix}$, então H também contém uma transvecção.*

Demonstração: a) Considere $\text{car} K \neq 2$. Tome $\mathbf{u} \in K^3$ tal que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Considere $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}$, note que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2$.

Conjugando

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{y} + 2\mathbf{u} & -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \in H. \end{aligned}$$

Multiplicando α por α_1 ,

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{y} + 2\mathbf{u} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ -2\mathbf{u} & -1 \end{bmatrix} \in H.$$

Como $-I \in H$, temos que $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{u} & 1 \end{bmatrix}$.

Pelo Lema 2.3.6, H contém uma transvecção.

O caso $\begin{bmatrix} -1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$ é análogo, pois $-I \in H$.

b) Considere $\text{car}K = 2$.

Se $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$, então $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Tome $\mathbf{u} \in K^3$ tal que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 1$. Conjugando

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{0} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} + \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix}.$$

Conjugamos agora

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{0} \\ \mathbf{y} + \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} + \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} + \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Lema 2.3.6, H contém uma transvecção.

O caso em que $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}$ é análogo.

■

Teorema 2.3.9 *Seja $H \triangleleft SLL(K)$, $Z(SLL(K)) \subsetneq H$. Então $H = SLL(K)$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in H$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$ um elemento não central. Vamos mostrar que H contém uma transvecção.

Suponha inicialmente que

i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Se $a \neq \pm 1$, temos $b = a^{-1}$. Considere $\beta \in SLL(K)$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \mathbf{x} \\ \mu \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$, onde $\lambda = -\frac{1}{a-a^{-1}}$ e $\mu = -\frac{1}{a^{-1}-a}$. Conjugando $\beta^{-1}\alpha\beta$,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \mathbf{x} \\ -\mu \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \mathbf{x} \\ \mu \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \mathbf{x} \\ -\mu \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & (\lambda a + 1)\mathbf{x} \\ (\mu a^{-1} + 1)\mathbf{y} & a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix} \in H. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.7, H contém uma transvecção.

Se $a = \pm 1$. Se $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ é nulo, o Lema 2.3.7 garante que H contém uma transvecção.

Suponhamos então $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ e $a = 1$. Considere $\mathbf{v} \in K^3$ tal que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 1$.

Conjugando

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos agora

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}.$$

Conjugando

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{x} - \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ -3\mathbf{y} + \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, com um vetor $\mathbf{u} \in K^3$, tal que $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 1$, encontramos em H um elemento

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando α_3 por β_3 , obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ 3\mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2(\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix},$$

cujo quadrado é um elemento da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, com $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ se $\text{car} K \neq 2$. Pelo

Lema 2.3.6, H contém uma transvecção. Se $\text{car} K = 2$, então $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}$.

Conjugamos

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} - \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Lema 2.3.6, H contém uma transvecção. O caso $a = -1$ é análogo, pois $-I \in H$.

Consideremos agora o caso

ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$.

Afirmamos que neste caso H contém um elemento da forma $\begin{bmatrix} c & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & c^{-1} \end{bmatrix}$.

De fato, para cada $m \in K$, não nulo, existe $\lambda \in K$ tal que a matriz $\beta = \begin{bmatrix} ma & \lambda \mathbf{x} \\ m\mathbf{y} & -ma \end{bmatrix}$ está em $SLL(K)$.

Para isso, basta que λ seja raiz da equação $-m^2a^2 - \lambda m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$, donde

$$\lambda = \frac{-1 - m^2a^2}{m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}.$$

Considere a matriz $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$. Como $\beta^{-1}\alpha\beta \in H$ e $\alpha \in H$, temos que $\gamma \in H$.

Vamos calcular γ explicitamente. Note que $\det \beta = -m^2a^2 - \lambda m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$. Logo,

$$\beta^{-1} = \begin{bmatrix} -ma & -\lambda \mathbf{x} \\ -m\mathbf{y} & ma \end{bmatrix}.$$

Então calculamos

$$\beta^{-1}\alpha = \begin{bmatrix} -ma & -\lambda \mathbf{x} \\ -m\mathbf{y} & ma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ma^2 - \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & -(ma + \lambda b)\mathbf{x} \\ -m\mathbf{a} \cdot \mathbf{y} + m\mathbf{a}b & mab - m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\beta^{-1}\alpha = \begin{bmatrix} 1/m & -(ma + \lambda b)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} ma & \lambda \mathbf{x} \\ m\mathbf{y} & -ma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma^2 + \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & (ma + \lambda b)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - mab \end{bmatrix}.$$

Note que

$$ma^2 + \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{m^2a^2 + \lambda m\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{m} = \frac{\det \beta}{m} = -\frac{1}{m}.$$

Logo,

$$(\beta^{-1}\alpha)(\beta\alpha) = \begin{bmatrix} 1/m & -(ma + \lambda b)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/m & (ma + \lambda b)\mathbf{x} \\ \mathbf{0} & -m \end{bmatrix}$$

$$\gamma = (\beta^{-1}\alpha)(\beta\alpha) = \begin{bmatrix} -1/m^2 & \rho \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & -m^2 \end{bmatrix}, \text{ onde } \rho = \left(\frac{1}{m} + m\right)(ma + \lambda b).$$

Se $m^2 \neq \pm 1$, então, pelo Lema 2.3.7, H contém uma transvecção.

Se $m^2 = \pm 1$, então $\rho = 0$ e $\gamma = \pm I$, onde I é a matriz identidade.

Portanto, há no máximo quatro valores de m diferentes de zero para os quais $m^2 = \pm 1$.

Se $|K| > 5$, é sempre possível escolher $m \in K$ não nulo, tal que γ seja da forma $\begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & a^{-1} \end{bmatrix}$ e então, pelo Lema 2.3.7, H contém uma transvecção.

Vamos estudar separadamente os casos em que $|K| \leq 5$.

a) $K = F_2$.

Seja $\alpha \in H$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$, onde $a \neq 0$, o que implica $a = 1$.

Se $b = 1$, então $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, como demonstrado no caso (i), H contém uma transvecção.

Se $b = 0$, então $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$.

Escolha $\mathbf{u} \in K^3$ tal que $\mathbf{u} \neq \mathbf{y}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 1$. Conjugando

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}) & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \in H.$$

Multiplicamos agora α^{-1} por α_1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{y} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{y} + \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix} = \beta \in H.$$

Como $(\mathbf{y} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}) = 0$, pelo caso (i) H contém uma transvecção.

b) $K = F_3$.

Para $m = 1$ ou $m = 2$, temos $m^2 = 1$. Logo, $\rho \neq 0$, a menos que $b = -a$, ou seja, para $b \neq -a$, H contém uma transvecção pelo Lema 2.3.7.

Se $b = -a$, então α é da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -2 \end{bmatrix}.$$

Basta considerar o caso em que α é da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}$ (pois $-2 \equiv 1(\text{mod } 3)$).

Seja $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}$, pelo Lema 2.3.8, H contém uma transvecção.

c) $K = F_4 = F_2(\xi)$,

onde ξ é raiz do polinômio f irredutível em F_2 , $f = X^2 + X + 1$,

$$K = \{0, 1, \xi, \xi + 1\}.$$

Observe que $\xi^2 = \xi + 1$, $(\xi + 1)^2 = \xi$, $1^2 = 1$, $0^2 = 0$.

Logo, a equação $m^2 + 1$ tem uma raiz em K e a equação $m^2a + b$ também tem uma raiz em K . Nesse caso, é sempre possível escolher $m \neq 0$ tal que $m^2 \neq \pm 1$.

d) $K = F_5$.

Se $m = 2$ ou $m = 3$, então $m^2 = -1$ e temos $\rho = 0$. Para $m = 1$ ou $m = 4$, temos $m^2 = 1$. Mas $\rho \neq 0$ a menos que $b = -a$.

Se $b = -a$, então α tem uma das seguintes formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 2 \end{bmatrix}.$$

Se α é da forma $\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 2 \end{bmatrix}$, temos que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ e caímos no caso (i).

Se α é da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & -1 \end{bmatrix}$, então, pelo Lema 2.3.8, H contém uma transvecção.

Agora vamos demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.3.10 $PSLL(K)$ é um loop simples.

Demonstração: Seja Γ um subloop normal em $PSLL(K)$ e considere o homomorfismo
- projeção canônica

$$w : SLL(K) \rightarrow \frac{SLL(K)}{Z_0} = PSLL(K)$$

Como $\Gamma \triangleleft PSLL(K)$, seja $H = w^{-1}(\Gamma)$. Então H é normal em $SLL(K)$; assim:

se $H \subset Z_0$, então $\Gamma = (1)$ e se $H \not\subset Z_0$, então $H = SLL(K)$, pelo Teorema 2.3.8, donde $\Gamma = PSLL(K)$. ■

Podemos demonstrar ainda o seguinte

Teorema 2.3.11 $(GLL(K))' = SLL(K)$.

Demonstração: Para simplificar a notação, vamos chamar

$$GLL(K) = G, \quad SLL(K) = S.$$

Observemos primeiro que para quaisquer α, β, γ em G ,

$[\alpha, \beta]$ e (α, β, γ) têm determinante 1.

$$\alpha\beta = (\beta\alpha) \cdot [\alpha, \beta]$$

$$\det \alpha \det \beta = (\det \beta \det \alpha) \det(\alpha, \beta)$$

$$\det(\alpha, \beta) = (\det \alpha)^{-1} (\det \beta)^{-1} \det \beta \det \alpha = 1.$$

Analogamente,

$$\alpha\beta.\gamma = (\alpha.\beta\gamma)(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\det(\alpha\beta.\gamma) = \det(\alpha.\beta\gamma) \det(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\det(\alpha\beta) \det \gamma = \det \alpha \det(\beta\gamma) \det(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\det(\alpha, \beta, \gamma) = (\det \alpha \det \beta) \det \gamma (\det \alpha)^{-1} (\det \beta)^{-1} (\det \gamma)^{-1}$$

$$\det(\alpha, \beta, \gamma) = 1$$

Assim, $G' \subseteq S$, pois $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$, $\det(\alpha, \beta) = \det(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Mostremos a inclusão contrária $S \subseteq G'$.

Observemos que $G' \subseteq S$ e $G' \triangleleft G$, logo $G' \triangleleft S$ (pois $xG' = G'x$, $\forall x \in G$ em particular para $x \in S$).

Se $\text{car} K \neq 2$, considere a transvecção $\tau_{12}^{(i)}(\lambda)$. Mostremos que o comutador $[\tau_{12}^{(i)}(\lambda), \beta]$, onde $\beta = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$, é diferente da identidade e disto resulta que G' não está contido no centro de S .

$$\begin{aligned} [\tau_{12}^{(i)}(\lambda), \beta] &= \begin{bmatrix} 1 & -\lambda i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j + \lambda k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j + \lambda k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tau_{12}^{(i)}(2\lambda) \neq I, \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in K$ não nulo. Donde

$$[\tau_{12}^{(i)}(\lambda), \beta] \in S' \subseteq G'.$$

Logo, como $G' \triangleleft S$, pelo Teorema 2.3.9, segue que $G' = S$.

Se $\text{car} K = 2$, considere a transvecção $\tau_{12}^{(i)}(1)$. Calculando o comutador $[\tau_{12}^{(i)}(1), \beta]$, onde $\beta = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j - k & 1 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} [\tau_{12}^{(i)}(1), \beta] &= \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j - k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j + k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j - i \\ -j - k - k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j + k - k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\tau_{12}^{(i)}(1), \beta] \in G'$$

e pelo Teorema 2.3.9, $G' = S$, também nesse caso. ■

O seguinte resultado é uma consequência imediata.

Corolário 2.3.12 $(SLL(K))' = SLL(K)$.

2.4 As Ordens dos Loops Lineares Finitos

No caso em que o loop inicial K é finito, os loops lineares $GLL(K)$ e $PSLL(K)$ são todos finitos. Nesta seção calculamos sua ordem em função da ordem de K .

Teorema 2.4.1 *Se $K = F_q$ corpo finito com q elementos, então*

$$|GLL(F_q)| = q^3(q^4 - 1)(q - 1).$$

Demonstração: Seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$ um elemento de $\mathcal{Z}(F_q)$, então $\alpha \in GLL(F_q)$ se e só se $ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$.

Vamos então verificar quando $ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ e logo o número de elementos de $\mathcal{Z}(F_q)$ que não estão em $GLL(F_q)$. Inicialmente, vejamos quando $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ e quando $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = m$ para $m = 1, 2, \dots, q - 1$

i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ $\#$ = soluções

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

$$-x_1y_1 = x_2y_2 + x_3y_3$$

$$x_1y_1 = 0 \rightsquigarrow (2q - 1)\#$$

$$x_2y_2 = -x_3y_3 = 0 \rightsquigarrow (2q - 1)^2\#$$

$$x_2y_2 = 1 = -x_3y_3 \rightsquigarrow (q - 1)^2\#$$

$$\vdots$$

$$x_2y_2 = q - 1 = -x_3y_3 \rightsquigarrow (q - 1)^2\#$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (q - 1) \text{ equações.}$$

Temos então

$$-x_1y_1 = 0 = x_2y_2 + x_3y_3 \quad \text{de}$$

$$(2q - 1)[(2q - 1)^2 + (q - 1)(q - 1)^2]\#$$

$$\text{ou} \quad (2q - 1)[(2q - 1)^2 + (q - 1)^3]\# \quad (2.4.1)$$

Podemos ter ainda a seguinte situação:

$$\begin{aligned}
& -x_1y_1 = r = x_2y_2 + x_3y_3 \text{ com } r = 1, 2, \dots, q-1, \\
& -x_1y_1 = r \rightsquigarrow (q-1)\# \\
& x_2y_2 = r - x_3y_3 \\
& \left. \begin{aligned} x_3y_3 = r &\Rightarrow x_2y_2 = 0 \\ x_3y_3 = 0 &\Rightarrow x_2y_2 = r \end{aligned} \right\} 2(2q-1)(q-1)\# \\
& \left. \begin{aligned} x_3y_3 = 1 &\Rightarrow x_2y_2 = r-1 \rightsquigarrow (q-1)^2\# \\ \vdots \\ x_3y_3 = q-1 &\Rightarrow x_2y_2 = r-(q-1) \rightsquigarrow (q-1)^2\# \end{aligned} \right\} q-2 \text{ equações.}
\end{aligned}$$

Assim, para cada r , temos

$$(q-1) \left[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2 \right] \#.$$

Como temos $q-1$ valores para r , ficaremos com

$$(q-1)^2 \left[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2 \right] \#. \quad (2.4.2)$$

Juntando (2.4.1) e (2.4.2), temos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ de:

$$(2q-1) \left[(2q-1)^2 + (q-1)^3 \right] + (q-1)^2 \left[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2 \right] \#. \quad (2.4.3)$$

$$\text{ii) } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = m \quad m \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

$$\begin{aligned}
& x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = m \\
& x_1y_1 = m - \underbrace{(x_2y_2 + x_3y_3)}_n \\
& \left\{ \begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow x_1y_1 = m \rightsquigarrow (q-1)\# \\ n = 0, \end{aligned} \right. \\
& \left. \begin{aligned} x_2y_2 = 0 &= x_3y_3 \rightsquigarrow (2q-1)^2\# \\ x_2y_2 = 1 &= x_3y_3 \rightsquigarrow (q-1)^2\# \\ \vdots \\ x_2y_2 = q-1 &= x_3y_3 \rightsquigarrow (q-1)^2\# \end{aligned} \right\} q-1 \text{ equações.}
\end{aligned}$$

Para $n = 0$, temos

$$(q-1)[(2q-1)^2 + (q-1)^3]\# \quad (2.4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = m \Rightarrow x_1y_1 = 0 \rightsquigarrow (2q-1)\# \\ n = m, \\ x_2y_2 = m - x_3y_3 \\ x_3y_3 = 0 \Rightarrow x_2y_2 = m \\ x_3y_3 = m \Rightarrow x_2y_2 = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow 2(2q-1)(q-1)\#$$

$x_2y_2 = r - x_3y_3 \rightsquigarrow (q-1)^2\#$ em $q-2$ valores de r , pois $r \in \{1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, q-1\}$.

Para $n = m$, temos

$$(2q-1)[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2]\# \quad (2.4.5)$$

Consideremos agora $n \neq 0, m$.

$$x_1y_1 = m - n \rightsquigarrow (q-1)\# \quad n = 1, 2, \dots, \hat{m}, \dots, q-1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2y_2 = m - x_3y_3 \\ x_3y_3 = 0 \Rightarrow x_2y_2 = m \\ x_3y_3 = m \Rightarrow x_2y_2 = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow 2(2q-1)(q-1)\#$$

$$x_2y_2 = r - x_3y_3 \rightsquigarrow (q-2)(q-1)^2\#$$

Para cada n , temos

$$(q-1)[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2].$$

Como são $(q-2)$ valores para n , temos o resultado parcial:

$$(q-2)(q-1)[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2]\# \quad (2.4.6)$$

Juntando as possibilidades para $n = 0, m$, temos $x.y \neq 0$ de

$$\begin{aligned} & (q-1)[(2q-1)^2 + (q-1)^3] + (2q-1)[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2] \\ & + (q-2)(q-1)[2(2q-1)(q-1) + (q-2)(q-1)^2] \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

iii) $ab = 0 \rightsquigarrow (2q - 1)\#$

$ab = m \rightsquigarrow (q - 1)\#$ para qualquer valor de m em $\{1, 2, \dots, q - 1\}$.

iv) Logo. $ab - \mathbf{x.y} = 0$ se:

$$ab = 0 = \mathbf{x.y}$$

Juntando (2.4.3), temos

$$(2q - 1) \left\{ (2q - 1)[(2q - 1)^2 + (q - 1)^3] + (q - 1)^2[2(2q - 1)(q - 1) + (q - 2)(q - 1)^2] \right\} \quad (2.4.8)$$

$$ab = m = \mathbf{x.y}, \quad m \in \{1, 2, \dots, q - 1\}.$$

$$(q - 1)^3[(2q - 1)^2 + (q - 1)^3] + (2q - 1)[2(2q - 1)(q - 1)^3 + (q - 2)(q - 1)^4] \\ + (q - 2)(q - 1)^3[2(2q - 1)(q - 1) + (q - 2)(q - 1)^2]. \quad (2.4.9)$$

Juntando (2.4.8) e (2.4.9):

$$(2q - 1)^4 + (2q - 1)^2(q - 1)^3 + 2(2q - 1)^2(q - 1)^3 + (2q - 1)(q - 2)(q - 1)^4 \\ + (2q - 1)^2(q - 1)^3 + (q - 1)^6 + 2(2q - 1)^2(q - 1)^3 + (2q - 1)(q - 2)(q - 1)^4 \\ + 2(2q - 1)(q - 2)(q - 1)^4 + (q - 2)^2(q - 1)^5.$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \Gamma &= (q - 2)^2(q - 1)^5 + 4(2q - 1)(q - 2)(q - 1)^4 + (q - 1)^6 \\ &\quad + 6(2q - 1)^2(q - 1)^3 + (2q - 1)^4 \\ &= (q - 1)^3[(q - 2)^2(q - 1)^2 + 4(2q - 1)(q - 2)(q - 1) + (q - 1)^3 + 6(2q - 1)^2] \\ &\quad + (2q - 1)^4 \\ &= q^7 + q^4 - q^3. \end{aligned}$$

A álgebra $\mathcal{Z}(F_q)$ tem ordem q^8 e Γ representa o número de elementos em $\mathcal{Z}(F_q)$ cujo determinante é zero. Logo,

$$|GLL(F_q)| = q^8 - \Gamma = q^3(q^4 - 1)(q - 1). \quad \blacksquare$$

Como consequência, temos:

Corolário 2.4.2 *Se $K = F_q$ o corpo finito com q elementos, então*

$$\begin{aligned} |SLL(F_q)| &= q^3(q^4 - 1), \\ |PSLL(F_q)| &= \frac{q^3(q^4 - 1)}{2}, \text{ se } q \neq 2^n, \\ e \quad |PSLL(F_q)| &= q^3(q^4 - 1), \text{ se } q = 2^n. \end{aligned}$$

Demonstração: $GLL(F_q)$ é um loop diassociativo e $SLL(F_q)$ é subloop normal, logo as classes laterais (à direita) de $SLL(F_q)$ em $GLL(F_q)$ são disjuntas e vale

$$\frac{|GLL(F_q)|}{|SLL(F_q)|} = [GLL(F_q) : SLL(F_q)].$$

Para $\alpha \in GLL(F_q)$, $\det \alpha = 1, 2, \dots, q - 1$,

$$\alpha \in SLL(F_q) \Leftrightarrow \det \alpha = 1.$$

O número de maneiras em que $\det \alpha = m$ é o mesmo para qualquer valor de $m = 1, 2, \dots, q - 1$; logo o número de classes laterais de $SLL(F_q)$ em $GLL(F_q)$ é $q - 1$. Assim,

$$\frac{|GLL(F_q)|}{|SLL(F_q)|} = q - 1$$

ou

$$|SLL(F_q)| = \frac{q^3(q^4 - 1)(q - 1)}{(q - 1)} = q^3(q^4 - 1).$$

Para encontrar a ordem de $PSLL(F_q)$, lembremos que $PSLL(F_q) = SLL(F_q)/Z_0$, onde $Z_0 = Z(SLL(F_q))$.

Já vimos que $Z_0 = \{I, -I\}$.

Quando $q = 2^n$ para algum $n \Rightarrow Z_0 = \{I\}$, donde $|PSLL(F_q)| = |SLL(F_q)|$.

Quando $q = p^n$, $p \neq 2$, então

$$|PSLL(F_q)| = \frac{q^3(q^4 - 1)(q - 1)}{2(q - 1)} = \frac{q^3(q^4 - 1)}{2}.$$

■

Capítulo 3

O Menor Loop Linear

Neste capítulo, daremos uma demonstração da simplicidade do $PSLL(K)$ quando $K = F_2$ e determinaremos o reticulado de subloops deste loop.

Note que $GLL(F_2) = SLL(F_2)$, $Z_0 = \{I\}$ e $PSLL(F_2) = SLL(F_2)$ e que neste caso, $y \wedge v = v \wedge y$, para todo $y, v \in F_2^3$.

Do Teorema 2.4.1, vem que a ordem de $GLL(F_2)$ é 120. Mostraremos mais adiante que em $GLL(F_2)$ não valem os Teoremas de Cauchy e de Sylow, pois $5|120$ e $GLL(F_2)$ não tem elementos de ordem 5.

Para os loops de Moufang não associativos de ordem menor ou igual a 63, O. Chein provou algumas propriedades das quais faremos uso no nosso trabalho, como por exemplo, todos são de ordem par; todos contêm p -subgrupos de Sylow para cada p dividindo a ordem do loop, e todos satisfazem o Teorema de Lagrange. [04]

3.1 Elementos de $GLL(F_2)$ – resultados preliminares

Começaremos calculando as ordens de elementos de $GLL(F_2)$.

Lema 3.1.1 *Todo elemento $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in GLL(F_2)$ tem ordem 2 ou 3; mais precisamente, se $a = b$, então $o(\alpha) = 2$ e se $a \neq b$ então $o(\alpha) = 3$.*

Demonstração: De fato, seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$.

(i) Se $a = b$, então α é da forma $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$ ou $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$.

Note que $\alpha_1^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix}$ e como $\det(\alpha_1) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$ temos que $\alpha_1^2 = I$. Também temos que $\alpha_2^2 = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix}$ e, neste caso, como $\det(\alpha_2) = 1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$, temos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ e $\alpha_2^2 = I$.

(ii) Se $a \neq b$, então α é da forma $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$ ou $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$. Calculamos $\alpha_1^3 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix}$ e, mais uma vez, temos que $\det(\alpha_1) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, donde $\alpha_1^3 = I$.

De modo análogo, pode-se provar que $\alpha_2^3 = I$. ■

Lema 3.1.2 *Se H é subloop próprio de $GLL(F_2)$, então $|H| \leq 60$.*

Demonstração: Seja $x \in GLL(F_2)$ e $x \notin H$. Mostremos inicialmente que $|H| = |xH|$.

Afirmamos que $H \cap xH = \phi$.

Caso contrário, se existe $y \in H \cap xH$, então y é da forma $h_1 = xh_2$, com $h_1, h_2 \in H$.

Então temos que

$$h_1 h_2^{-1} = (xh_2)h_2^{-1} \in \langle x, h_2 \rangle \quad (\langle x, h_2 \rangle \text{ é grupo})$$

$$h_1 h_2^{-1} = x(h_2 h_2^{-1}) \Rightarrow x = h_1 h_2^{-1} \in H,$$

o que é uma contradição.

A função $\mathcal{L}_x : H \rightarrow xH$, dada por $\mathcal{L}_x(h) = xh$, para todo $h \in H$, é bijetora pois é injetora (pela definição de loops) e sobrejetora.

Como $|GLL(F_2)| = 120$, temos $|H| \leq 60$. ■

Definição 3.1.3 Seja $\alpha \in GLL(F_2)$. Definimos o *centralizador* de α e denotamos por $\mathcal{C}(\alpha)$ como sendo o conjunto

$$\{\beta \in GLL(F_2) \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}.$$

Lema 3.1.4 *Seja $\alpha \in GLL(F_2)$. Se $o(\alpha) = 3$, então $\mathcal{C}(\alpha) = \langle \alpha \rangle$.*

Demonstração: Se $o(\alpha) = 3$, então $\langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha^2\}$ e, ainda, α é da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos considerar α da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$ e determinar os elementos de $\mathcal{C}(\alpha)$.

Note que $\alpha^2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} \in \langle \alpha \rangle$.

Seja $\beta = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix}$ tal que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Calculemos

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}.\mathbf{v} & b\mathbf{x} - \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & b + \mathbf{y}.\mathbf{u} \end{bmatrix},$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}.\mathbf{u} & a\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{y} \\ b\mathbf{y} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} & b + \mathbf{x}.\mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

Para que $\alpha\beta = \beta\alpha$, devemos ter

$$\mathbf{x}.\mathbf{v} = \mathbf{y}.\mathbf{u}$$

$$b\mathbf{x} - \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} = a\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{y} \Rightarrow (b - a)\mathbf{x} = \mathbf{u} + 2(\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}$$

$$b\mathbf{y} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = a\mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} \Rightarrow (b - a)\mathbf{y} = \mathbf{v} + 2(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{v},$$

donde

i) se $a = b$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e segue que $a = b = 1$. Logo, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, donde β é a identidade.

ii) se $a \neq b$, então $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{y}$. Então β terá a forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$, donde $\beta \in \langle \alpha \rangle$. Logo, $\mathcal{C}(\alpha) = \langle \alpha \rangle$. ■

Lema 3.1.5 *Se H é um subloop próprio de $GLL(F_2)$, então $|H| = 2^a 3^b$, com $0 \leq a \leq 5$ e $0 \leq b \leq 1$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.1, os elementos de H têm ordem 2 ou 3 e como $|H| \leq 60$, o teorema de Sylow vale em H , donde $|H| = 2^a 3^b \leq 60$. Claramente, $0 \leq a \leq 5$. Mostraremos que $b \leq 1$.

De fato, se $|H| = 2^a 3^2$, então H deveria conter um S_3 -subgrupo de Sylow K de ordem 9. Como todo 3-elemento tem ordem 3, temos que $K = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle$, com $o(\alpha) = o(\beta) = 3$. Sendo K um produto direto de dois subgrupos cíclicos de ordem 3, temos que α e β comutam, donde, $\beta \in \mathcal{C}(\alpha)$, o que é uma contradição, pelo Lema 3.1.4. ■

Corolário 3.1.6 *Os 3-subloop de $GLL(F_2)$ são todos cíclicos de ordem 3.*

3.2 A Simplicidade de $PSLL(F_2)$

Vamos usar nossas informações sobre ordens obtidas acima para provar independentemente a simplicidade de $PSLL(F_2)$.

Lema 3.2.1 *Se $H \neq (I)$ é um subloop normal em $PSLL(F_2)$, então H contém um elemento de ordem 3.*

Demonstração: Seja $\alpha \in H$, $\alpha \neq I$. Se $o(\alpha) = 3$, o resultado está provado. Se $o(\alpha) = 2$, pelo Lema 3.1.1, α pode ser da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$.

Afirmamos que se α é da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$, então H tem um elemento α_1 da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' & 1 \end{bmatrix}$. De fato, como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$. Temos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, uma de suas coordenadas é não nula: podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 \neq 0$, o que implica dizer que $x_1 = 1$.

Conjugando α pela transvecção $\tau_{21}^{(i)}(1)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.i & x \\ y + (x.i)i & x.i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y + i & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \in H.$$

Vale também a recíproca: se H tem um elemento β da forma $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} = I$. Então H contém um elemento da forma $\beta_1, \begin{bmatrix} 0 & x' \\ y' & 0 \end{bmatrix}$.

De fato, se β não é identidade, então pelo menos uma das coordenadas de x (ou de y) é não nula. Suponha $x_1 \neq 0$. Conjugando pela transvecção $\tau_{21}^{(i)}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x.i & x \\ y + (x.i)i & 1 + x.i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y + i & 0 \end{bmatrix} \in H.$$

Seja então $\alpha \in H$, $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$, com $x_1 \neq 0$ e $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y + i & 1 \end{bmatrix}$ obtido acima. Logo,

$$\alpha\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ y + i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x.i & x + y \wedge i \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x + y \wedge i \\ y & 1 \end{bmatrix},$$

que é um elemento de ordem 3 e está em H . ■

Lema 3.2.2 *Se $\alpha, \beta \in GLL(F_2)$ são tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 3$, então α é conjugado de β ou de β^{-1} .*

Demonstração: Seja $H = \langle \alpha, \beta \rangle$. Pela diassociatividade, sabemos que H é um grupo e, como sua ordem é da forma $|H| = 2^a 3$, temos que $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle$ são subgrupos de Sylow de H , portanto eles são subgrupos conjugados e α é conjugado de β ou de β^{-1} . ■

Lema 3.2.3 *Se H é um subloop normal próprio em $PSLL(F_2)$, então H contém todos os elementos de ordem 3.*

Demonstração: Pelo Lema 3.2.1, H contém um elemento α de ordem 3 e, pelo lema anterior, contém todos. ■

Teorema 3.2.4 $PSLL(F_2)$ é simples.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que não. Então existe um subloop normal próprio H de $PSLL(F_2)$. Pelo Lema 3.2.3, H contém todos os elementos de ordem 3.

Considere os seguintes elementos $\alpha, \beta \in H$,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & (1,1,0) \\ (1,0,0) & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & (1,0,0) \\ (1,0,1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & (1,1,0) \\ (1,0,0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (1,0,0) \\ (1,0,1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tau_{12}^{(\mathbf{j})}(1) \in H.$$

Ou seja, H contém uma transvecção. Pelo Lema 2.3.5, H contém todas as transvecções e portanto $H = SLL(F_2) = GLL(F_2)$, o que é uma contradição. ■

3.3 Limitando os Subloops de Ordem Potência de 2

Nesta seção vamos mostrar que se L é um subloop de $GLL(F_2)$ de ordem potência de 2, então $|L| < 16$.

Lema 3.3.1 Se $o(\alpha) = 2$, então $|\mathcal{C}(\alpha)| \leq 32$.

Demonstração: Seja $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix}$. Considere $\beta \in \mathcal{C}(\alpha)$. Como $\alpha \in \mathcal{C}(\beta)$, se $o(\beta) = 3$, segue do lema que $\alpha \in \langle \beta \rangle$, uma contradição. Então, $o(\beta) = 2$ e ele é da forma $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix}$.

Calculamos:

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} & a\mathbf{x} + b\mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{y} + b\mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & ab + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} b & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} & a\mathbf{x} + b\mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{y} + b\mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & ab + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Logo, $\alpha\beta = \beta\alpha$ se, e somente se, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$.

Vamos considerar dois casos e analisar separadamente.

i) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = d$, com $d = 0$ ou $d = 1$.

Considere a equação $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = d$. Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pelo menos uma de suas coordenadas é não nula, isto é, é igual a 1. Suponhamos que $v_1 = 1$. Então, de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = d$, obtemos

$$x_1 = d + x_2 v_2 + x_3 v_3.$$

Como x_2 e x_3 podem assumir os valores 0 e 1, vemos que existem quatro vetores que são soluções desta equação. De modo análogo, existem quatro vetores que são soluções da equação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = d$. Portanto, existem 16 pares $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tais que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = d$, para cada valor de d .

Assim, há no máximo 32 pares de vetores $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tais que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$.

ii) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ (o caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ é análogo).

Para qualquer vetor $\mathbf{x} \in F_2^3$ tem-se que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$. Daí, a equação $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ tem 8 soluções em $\mathbf{x}$ e a equação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = 0$ tem 4 soluções em $\mathbf{y}$, como antes. Logo, existem no máximo 32 pares $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que são soluções da equação $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$.

Logo, $|\mathcal{C}(\alpha)| \leq 32$. ■

Lema 3.3.2 *Se $o(\alpha) = o(\beta) = 2$, com $\alpha \neq \beta$, então $|\mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)| \leq 16$.*

Demonstração: Sejam

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & a \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix} \quad \text{e seja} \quad \gamma = \begin{bmatrix} c & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & c \end{bmatrix}$$

tal que $\gamma \in \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$. Para isso, é necessário que

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \end{cases}$$

Se $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{u}$, temos

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & b \end{bmatrix}.$$

Como $\det(\alpha) = \det(\beta) = 1$, temos que $a^2 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = b^2 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$, donde $a = b$ e $\alpha = \beta$. Logo, temos que $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ ou $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$. Se $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$, temos que $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes.

Portanto, existe pelo menos um determinante do tipo $\begin{vmatrix} w_i & w_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} \neq 0$.

Algo análogo acontece se $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$. Suponhamos, para fixar idéias, que $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Consideramos o sistema

$$\begin{cases} w_1x_1 + x_2x_2 = w_3x_3 + z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 \\ v_1x_1 + v_2x_2 = v_3x_3 + u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \end{cases}$$

Como cada uma das variáveis do segundo membro pode assumir dois valores, temos que existem $2^4 = 16$ soluções. Logo,

$$|\mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)| \leq 16. \quad \blacksquare$$

O seguinte resultado, já conhecido, será usado reiteradamente no que segue.

Lema 3.3.3 ([05]) *Todo loop de Moufang de expoente 2 é um grupo e, consequentemente, é abeliano.*

Corolário 3.3.4 *Seja G um 2-subgrupo de $GLL(F_2)$. Então $|G| \leq 16$.*

Demonstração: Seja G um 2-subgrupo e sejam $\alpha, \beta \in G$, $\alpha \neq \beta$. Como G é abeliano, tem-se que $G \subset \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$, donde $|G| \leq |\mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)| = 16$, pelo Lema 3.3.2,

$$|G| \leq 16. \quad \blacksquare$$

Sejam $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} c & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & c \end{bmatrix}$ três elementos de $GLL(F_2)$ que comutam dois a dois. Então temos que

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Vamos encontrar condições para que os três elementos associem. Para isso, calculamos

$$(\alpha\beta)\gamma = \begin{bmatrix} ab + \mathbf{x.v} & a\mathbf{u} + b\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{v} + b\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & ab + \mathbf{y.u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix},$$

$$d_{11} = abc + c\mathbf{x.v} + a\mathbf{u.w} + b\mathbf{x.w} + \mathbf{w.(y \wedge v)}$$

$$d_{12} = abz + bc\mathbf{x} + a\mathbf{cu} + a\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + b\mathbf{y} \wedge \mathbf{w} + c\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ + (\mathbf{x.v})\mathbf{z} + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{w}$$

$$d_{21} = ab\mathbf{w} + bc\mathbf{y} + a\mathbf{cv} + a\mathbf{u} \wedge \mathbf{z} + b\mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + c\mathbf{x} \wedge \mathbf{u} \\ + (\mathbf{y.u})\mathbf{w} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{z}$$

$$d_{22} = abc + c\mathbf{y.u} + a\mathbf{v.z} + b\mathbf{y.z} + \mathbf{z.(x \wedge u)}$$

Calculamos também

$$\alpha(\beta\gamma) = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bc + \mathbf{u.w} & b\mathbf{z} + c\mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \\ b\mathbf{w} + c\mathbf{v} + (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) & bc + \mathbf{v.z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},$$

onde

$$f_{11} = abc + a\mathbf{u.w} + b\mathbf{x.w} + c\mathbf{x.v} + \mathbf{x.(u \wedge z)}$$

$$f_{12} = abz + a\mathbf{cu} + bc\mathbf{x} + a\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + b\mathbf{y} \wedge \mathbf{w} + c\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) + (\mathbf{v.z})\mathbf{x}$$

$$f_{21} = a\mathbf{cv} + ab\mathbf{w} + bc\mathbf{y} + a\mathbf{u} \wedge \mathbf{z} + b\mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + c\mathbf{x} \wedge \mathbf{u} \\ + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) + (\mathbf{u.w})\mathbf{y}$$

$$f_{22} = abc + a\mathbf{z.v} + b\mathbf{y.z} + c\mathbf{y.u} + \mathbf{y.(v \wedge w)}$$

Assim, temos que

$$d_{11} = f_{11} \Leftrightarrow \mathbf{x.(u \wedge z)} = \mathbf{w.(y \wedge v)} \quad (3.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{12} = f_{12} &\Leftrightarrow (\mathbf{x.v})\mathbf{z} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{v.z})\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) \\ d_{21} = f_{21} &\Leftrightarrow (\mathbf{y.u})\mathbf{w} + \mathbf{z} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{u.w})\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

$$d_{22} = f_{22} \Leftrightarrow \mathbf{z.(x \wedge u)} = \mathbf{y.(v \wedge w)} \quad (3.3.4)$$

Observemos que as equações (3.3.2) e (3.3.4) são equivalentes. Vamos mostrar ainda que (3.3.1) implica (3.3.3).

Lema 3.3.5 *Nas condições acima, a equação (3.3.1) implica (3.3.3).*

Demonstração: Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \wedge \mathbf{z} &= (u_2 z_3 - u_3 z_2, u_3 z_1 - u_1 z_3, u_1 z_2 - u_2 z_1) \\
\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} &= (y_2 v_3 - y_3 v_2, y_3 v_1 - y_1 v_3, y_1 v_2 - y_2 v_1) \\
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) &= x_1 u_2 z_3 - x_1 u_3 z_2 + x_2 u_3 z_1 - x_2 u_1 z_3 \\
&\quad + x_3 u_1 z_2 - x_3 u_2 z_1 \\
\mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) &= w_1 y_2 v_3 - w_1 y_3 v_2 + w_2 y_3 v_1 - w_2 y_1 v_3 \\
&\quad + w_3 y_1 v_2 - w_3 y_2 v_1 \\
\mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) &= (w_3(x_3 u_1 - x_1 u_3) - w_2(x_1 u_2 - x_2 u_1), \\
&\quad w_1(x_1 u_2 - x_2 u_1) - w_3(x_2 u_3 - x_3 u_2), w_2(x_2 u_3 - x_3 u_2) - w_1(x_3 u_1 - x_1 u_3)) \\
\mathbf{y} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}) &= (y_3(u_3 z_1 - u_1 z_3) - y_2(u_1 z_2 - u_2 z_1), \\
&\quad y_1(u_1 z_2 - u_2 z_1) - y_3(u_2 z_3 - u_3 z_2), y_2(u_2 z_3 - u_3 z_2) - y_1(u_3 z_1 - u_1 z_3)).
\end{aligned}$$

Vamos considerar separadamente cada coordenada de

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{z} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{z})$$

e verificar que vale a igualdade acima se vale (3.3.1). Com efeito,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})z_1 + w_3 x_3 u_1 - w_3 x_1 u_3 + w_2 x_2 u_1 - w_2 x_1 u_2 + 2w_1 x_1 u_1 \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})x_1 + y_3 u_3 z_1 - y_3 u_1 z_3 + y_2 u_2 z_1 - y_2 u_1 z_2 + 2y_1 u_1 z_1 \\
&(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})z_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})u_1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})x_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})x_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})z_1 - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})u_1.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(\mathbf{x}.\mathbf{v})z_2 + (\mathbf{x}.\mathbf{w})u_2 - (\mathbf{u}.\mathbf{w})x_2 = (\mathbf{v}.\mathbf{z})x_2 + (\mathbf{y}.\mathbf{u})z_2 - (\mathbf{y}.\mathbf{z})u_2$$

e também

$$(\mathbf{x}.\mathbf{v})z_3 + (\mathbf{x}.\mathbf{w})u_3 - (\mathbf{u}.\mathbf{w})x_3 = (\mathbf{v}.\mathbf{z})x_3 + (\mathbf{y}.\mathbf{u})z_3 - (\mathbf{y}.\mathbf{z})u_3.$$

Como cada coordenada do lado direito é igual à sua correspondente do lado esquerdo, então vale a igualdade.

Procedendo de maneira análoga com a equação

$$(\mathbf{y}.\mathbf{u})\mathbf{w} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{z} = (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{v}.\mathbf{w}),$$

verificamos que é uma identidade. De fato,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{y}.\mathbf{u})w_1 + z_2y_1v_2 - z_2y_2v_1 - z_3y_3v_1 + z_3y_1v_3 + 2z_1y_1v_1 \\ &= (\mathbf{u}.\mathbf{w})y_1 + x_2v_1w_2 - x_2v_2w_1 - x_3v_3w_1 - x_3v_1w_3 + 2x_1v_1w_1 \\ & (\mathbf{y}.\mathbf{u})w_1 + (\mathbf{v}.\mathbf{z})y_1 - (\mathbf{y}.\mathbf{z})v_1 = (\mathbf{u}.\mathbf{w})y_1 + (\mathbf{x}.\mathbf{w})v_1 - (\mathbf{x}.\mathbf{v})w_1. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$(\mathbf{y}.\mathbf{u})w_2 + (\mathbf{v}.\mathbf{z})y_1 - (\mathbf{y}.\mathbf{z})v_2 = (\mathbf{u}.\mathbf{w})y_2 + (\mathbf{x}.\mathbf{w})v_2 - (\mathbf{x}.\mathbf{v})w_2$$

e também

$$(\mathbf{y}.\mathbf{u})w_3 + (\mathbf{v}.\mathbf{z})y_3 - (\mathbf{y}.\mathbf{z})v_3 = (\mathbf{u}.\mathbf{w})y_3 + (\mathbf{x}.\mathbf{w})v_3 + (\mathbf{x}.\mathbf{v})w_3. \quad \blacksquare$$

Em resumo, para que três elementos de ordem 2 comutem e associem, é necessário e suficiente que suas componentes verifiquem as equações (3.3.1) e a equação (3.3.2).

Teorema 3.3.6 *$GLL(F_2)$ não contém grupos de ordem 16.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que exista um subgrupo G de ordem 16.

Afirmção 1 G contém algum elemento da forma $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix}$ com $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos.

De fato, como existem somente 14 elementos em $GLL(F_2)$, onde uma das entradas vetoriais é nula e um elemento – a identidade – com as duas entradas nula, segue a afirmação.

Afirmção 2 G contém pelo menos dois elementos diferentes, $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & b \end{bmatrix}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ não nulos.

De fato, seja α nas condições da Afirmção 1 e seja $\gamma \in G$, $\gamma \neq \alpha$. Se γ é da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & 1 \end{bmatrix}$, então como $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. Como $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, existem quatro valores possíveis para $\mathbf{x}$.

De maneira análoga, podem existir no máximo quatro elementos de G da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$.

Logo, G tem, no máximo, sete elementos, onde uma das entradas vetoriais é zero.

Demonstração do teorema

Sejam $\alpha, \beta \in G$ da forma $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & b \end{bmatrix}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ não nulos.

Temos que $G \subset \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$. Mas $|G| = 16 \geq |\mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)|$, o que quer dizer que $G = \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$.

Para obtermos uma contradição, vamos provar que existe pelo menos um elemento $\gamma \in \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$ tal que $\gamma \notin G$. Seja $\gamma = \begin{bmatrix} c & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & c \end{bmatrix}$.

Vamos considerar três casos possíveis:

1º caso: $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$

Neste caso, temos que

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in F_2^3.$$

Se $\gamma \in G$, deve-se ter que

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} \end{cases}$$

isto é, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$, que pode ser 0 ou 1.

Observe que $\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = 1$ implica

$$\begin{cases} z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 = 1 \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 1 \end{cases}$$

Este é um sistema de três equações com duas incógnitas e, portanto, tem solução $\mathbf{y}_0$.

A equação $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 1$ com $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tem quatro soluções, todas não nulas. Logo, existe uma solução $\mathbf{x}^0$ que é diferente de $\mathbf{0}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{z} + \mathbf{u}$. Como $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$ e três vetores diferentes de F_2^3 são linearmente independentes, tem-se que

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}) \neq \mathbf{y} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})$, tomando $\gamma_0 = \begin{bmatrix} c & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 & c \end{bmatrix}$, temos $(\alpha, \beta, \gamma^0) \neq 1$, donde $\gamma^0 \notin G$.

2º caso: $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{u}$

Análogo ao anterior.

3º caso: $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ e $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$

Queremos encontrar $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = 0$, isto é, tal que

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Existem quatro vetores tais que o determinante é nulo, a saber: $y^0 = 0$, $y^1 = v$, $y^2 = w$, $y^3 = w + v$. Ainda temos que

$$\begin{cases} v.x = u.y \\ w.x = z.y \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} v_1x_1 + v_2x_2 = v_3x_3 + u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \\ w_1x_1 + w_2x_2 = w_3x_3 + z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 \end{cases} \quad (*)$$

Como $v \neq w$, v e w são linearmente independentes, logo existe um menor

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, para cada solução y^0, y^1, y^2, y^3 , temos duas soluções para x , ou seja, existem oito valores para x satisfazendo (*). Portanto, existe algum $x \in F_2^3$ que não anula o determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Mas isto é equivalente a dizer que existe algum elemento $\gamma \in GLL(F_2)$ tal que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 1$, donde $\gamma \notin G$. ■

3.4 Classificação dos 2-subloops de $GLL(F_2)$

Subloops de ordem 2

Os elementos de ordem 2 em $GLL(F_2)$ são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}.$$

Existem 28 elementos em $GLL(F_2)$ da forma $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$, onde $x.y = 1$ e 36 elementos da forma $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ (a identidade está nesse conjunto). Portanto, são 63 elementos de ordem 2 e, consequentemente, 63 subgrupos de ordem 2.

Subloops de ordem 4

Seja H um subloop de ordem 4. Como em $GLL(F_2)$ não tem elemento de ordem 4, H deve ser isomorfo a $C_2 \times C_2$.

Dados $\alpha, \beta \in GLL(F_2)$, onde $o(\alpha) = o(\beta) = 2$, α e β geram um subloop de ordem 4 se $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix}$, então $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$.

É claro que vale a seguinte

Proposição 3.4.1 *Todo subgrupo de ordem 2 está contido em pelo menos um subgrupo de ordem 4.*

Subloops de ordem 8

Seja H um subloop de ordem 8, como H é um grupo, podemos ver que H deve ser isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2$.

Em continuação, damos um exemplo concreto de subgrupo isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2$.

Exemplo

$$1) \alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} = \beta\alpha, \quad \alpha\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{j} + \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} = \gamma\alpha,$$

$$\beta\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{i} + \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} = \gamma\beta, \quad \alpha(\beta\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix} = (\alpha\beta)\gamma.$$

Portanto, $G = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_2$.

Proposição 3.4.2 *Todo subgrupo de ordem 4 está contido num subgrupo de ordem 8.*

Demonstração: Seja $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong C_2 \times C_2$, onde $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & a \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & b \end{bmatrix}$ e tal que $\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$.

Vamos mostrar que é sempre possível encontrar $\gamma \in GLL(F_2)$, γ da forma $\begin{bmatrix} c & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & c \end{bmatrix}$, tal que $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_2$. Para isso, de acordo com o Lema 3.3.5, γ deve satisfazer

$$\mathbf{w}.\mathbf{x} = \mathbf{z}.\mathbf{y}$$

$$\mathbf{v}.\mathbf{x} = \mathbf{u}.\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} . (\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{y} . (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})$$

Ou seja, devemos verificar se o sistema abaixo tem solução em $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \\ e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 \end{cases} \quad (*)$$

onde $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$ e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

O sistema tem solução se o determinante abaixo é não nulo, para cada $\mathbf{y} \in F_2^3$.

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}.$$

O determinante é nulo se o conjunto $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{e}\}$ é linearmente dependente. Isto ocorre se, e somente se, se verificam as identidades

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}.$$

Vamos estudar cada caso.

(i) Nos casos em que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{z} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$, do sistema (*) resultam, respectivamente, os sistemas

$$\begin{cases} \mathbf{z}.\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{u}.\mathbf{y} = \mathbf{v}.\mathbf{x} \\ \mathbf{f}.\mathbf{y} = \mathbf{e}.\mathbf{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{w}.\mathbf{x} = \mathbf{z}.\mathbf{y} \\ \mathbf{e}.\mathbf{x} = \mathbf{f}.\mathbf{y} \\ 0 = \mathbf{u}.\mathbf{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}.\mathbf{x} = \mathbf{u}.\mathbf{y} \\ \mathbf{w}.\mathbf{x} = \mathbf{z}.\mathbf{y} \\ 0 = \mathbf{f}.\mathbf{y} \end{cases}$$

Todos os sistemas são de três equações com seis incógnitas. Portanto, todos têm solução em $\mathbf{y}$. Tomando uma delas para cada caso, encontramos solução para $\mathbf{x}$ e nesses casos existe γ .

(ii) Nos casos em que $w = z \wedge u$, $v = z \wedge u$ e $w = v$, do sistema (*) resultam, respectivamente, as equações

$$(z - f)y = 0, \quad (f - u)y = 0, \quad (z - u)y = 0$$

e todas têm solução em y . Tomando uma delas para cada caso, encontramos solução em x e também nesses casos, existe γ . ■

Como já mostramos no Teorema 3.3.6 que G não contém subgrupos de ordem 16, este resultado termina a classificação dos 2-subgrupos.

3.5 A Classificação dos Subloops de $GLL(F_2)$

Já estudamos os 2-subloops de $GLL(F_2)$. Estudaremos agora os restantes subloops.

Subloops de ordem 3

Os elementos de ordem 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{bmatrix},$$

onde $x \cdot y = 1$. Existem 28 elementos do tipo $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ e 28 do tipo $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ em $GLL(F_2)$, num total de 56 elementos de ordem 3. Observando que se $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$, então $\alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ e, logo, temos 28 subgrupos de ordem 3, todos conjugados entre si.

Subloops de ordem 6

Sejam $\alpha, \beta \in GLL(F_2)$, $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b & u \\ v & b \end{bmatrix}$, $\alpha^2 = \beta^2 = 1$.

Já vimos que se $x \cdot v = y \cdot u$, então α, β geram um subgrupo de ordem 4.

Consideremos então α, β tomados de tal forma que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$. O produto $\alpha\beta$ é

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} ab + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} & a\mathbf{u} + b\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{v} + b\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & ab + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

donde $\alpha\beta$ é um elemento de ordem 3.

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} ab + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} & a\mathbf{u} + b\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ a\mathbf{v} + b\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & ab + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \text{ nada mais é que } (\alpha\beta)^{-1}.$$

Chamando $\alpha\beta$ de δ , podemos ver que

$$\alpha\delta\alpha = \alpha(\alpha\beta)\alpha = \beta\alpha = \delta^{-1}.$$

Assim,

$$\langle \alpha, \delta | \alpha^2 = \delta^3 = 1, \alpha\delta\alpha = \delta^{-1} \rangle \cong S_3.$$

De maneira geral, dado $\beta \in GLL(F_2)$ da forma $\begin{bmatrix} c & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & d \end{bmatrix}$, com $c \neq d$, podemos tomar $\alpha \in GLL(F_2)$, onde $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a \end{bmatrix}$, o que implica $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$ e $a = 0$.

Suponha $c = 1$ e $d = 0$. Temos $\alpha^2 = \beta^3 = 1$ e $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} \alpha\beta\alpha^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix} = \beta^{-1}, \end{aligned}$$

donde $\langle \alpha, \beta \rangle \cong S_3$.

De modo análogo, dado α de ordem 2, pode-se ver que existe β de ordem 3 tal que $\langle \alpha, \beta \rangle \cong S_3$. Logo, temos a seguinte

Proposição 3.5.1 *Todo subgrupo de G de ordem 2 ou 3 está contido num subgrupo isomorfo a S_3 .*

O seguinte lema será de utilidade adiante.

Lema 3.5.2 *Todo subloop de $GLL(F_2)$ isomorfo a S_3 pode ser gerado por elementos α e β da forma*

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Inicialmente observemos que se neste loop tem um elemento de ordem 3, então tem um elemento β da forma requerida (e também deve conter um elemento da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}$, que é β^{-1}).

Se α é de ordem 2 e não é da forma dada no enunciado, então $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$, podemos encontrar α' da forma $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' & 0 \end{bmatrix}$. De fato, sejam $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}$ tal que $\langle \alpha, \beta \rangle \cong S_3$. Logo, $\alpha\beta$ tem ordem 2. Mas,

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{x.v} & \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{y.u} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{u.y} & \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{x.v} \end{bmatrix}.$$

$\alpha\beta$ tem ordem 2 se $\mathbf{x.v} \neq \mathbf{y.u}$.

Se $\mathbf{x.v} = 0$ e $\mathbf{y.u} = 1$, então $\beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix}$ e sabemos que $\langle \beta\alpha, \beta \rangle \cong S_3$, basta tomar $\alpha' = \beta\alpha$.

Se $\mathbf{x.v} = 1$ e $\mathbf{y.u} = 0$, então $\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix}$ e $\langle \alpha\beta, \beta \rangle \cong S_3$, basta tomar $\alpha' = \alpha\beta$. ■

Provaremos a seguir que um elemento de ordem 2 e um elemento de ordem 3 que não geram S_3 geram um subloop isomorfo a A_4 .

Subloops de ordem 12

Seja H um subloop de ordem 12. H pode ser um grupo ou um loop não associativo.

Se H é um grupo, então H deverá ser isomorfo a algum dos seguintes grupos: $C_3 \times C_4$, D_{12} , G_{12} , $C_2 \times C_2 \times C_3$, A_4 . ([02, p.153])

H não pode ser isomorfo a $C_3 \times C_4$, D_{12} , G_{12} , pois esses grupos têm elementos de ordem maior que 3.

H não pode ser isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_3$, pois H seria abeliano e se $\gamma \in H$ tem ordem 3, então $H \subset \mathcal{C}(\gamma)$, uma contradição.

Mostremos que em $GLL(F_2)$ tem subloops isomorfos a A_4 .

Sejam $\alpha = \begin{bmatrix} a & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & a \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}$, onde $\alpha^2 = \beta^3 = 1$. Já vimos que se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \cong S_3$.

Se α e β são tais que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \cong A_4$. Para isso, basta observar que $(\alpha\beta)^3 = 1$ e

$$\langle \alpha, \beta | \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle \cong A_4.$$

Seus elementos são:

$$\{1, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \alpha\beta^2, (\alpha\beta^2)^2, \alpha\beta\alpha, (\alpha\beta\alpha)^2, \beta^2\alpha\beta, \beta\alpha\beta^2\}.$$

Vamos dar um exemplo concreto de subgrupo isomorfo a A_4 .

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos denotar por $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta)^2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{i} + \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta^2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{i} + \mathbf{k} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta\alpha)^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta^2\alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta\alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{j} + \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como antes, temos a seguinte

Proposição 3.5.3 *Todo elemento de ordem 2 e todo elemento de ordem 3 está contido num subgrupo isomorfo a A_4 .*

Vamos mostrar que em $GLL(F_2)$ existem subloops isomorfos a $M_{12}(S_3, 2)$, que denotaremos brevemente por M_{12} . Este loop é gerado por três elementos,

$$M_{12} = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^3 = \gamma^2 = 1 \rangle,$$

satisfazendo as relações

$$\alpha^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = (\gamma\beta)^2 = (\alpha\beta^2)^2 = (\gamma\beta^2)^2 = (\alpha\gamma)^2 = [(\alpha\gamma)\beta]^2 = [(\alpha\gamma)\beta^2]^2 = 1$$

e também

$$\alpha\gamma = \gamma\alpha, \beta\gamma = \gamma\beta^2, \beta\alpha = \alpha\beta^2, \beta(\alpha\gamma) = (\alpha\gamma)\beta^2. \quad ([05])$$

Seus elementos são:

$$\{1, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2, \gamma, \gamma\beta, \gamma\beta^2, \alpha\gamma, (\alpha\beta)\gamma, \alpha(\beta\gamma)\}.$$

Vamos dar um exemplo concreto de um subloop isomorfo a M_{12} . Seus elementos são:

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, & \beta &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{u} & 1 \end{bmatrix}, & \gamma &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \\ \beta^2 &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{u} & 0 \end{bmatrix}, & \alpha\beta &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}, & \alpha\beta^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha\gamma &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{k} & 1 \end{bmatrix} = \gamma\alpha, & \beta\gamma &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix} = \gamma\beta^2 \\ \beta^2\gamma &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix} = \gamma\beta, & (\alpha\beta)\gamma &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, & \alpha(\beta\gamma) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 3.5.4 *Todo subgrupo isomorfo a S_3 está contido num subloop isomorfo a M_{12} .*

Demonstração: Sejam $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\langle \alpha, \beta \rangle \cong S_3$. Temos então que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.

Vamos mostrar que existe um elemento $\gamma = \begin{bmatrix} a & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & a \end{bmatrix} \in GLL(F_2)$ que satisfaz

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong M_{12}.$$

Notemos que isto implica, em particular, que $\langle \alpha, \gamma \rangle \cong \langle \beta, \gamma \rangle \cong C_2 \times C_2$.

Devemos verificar que vale

$$(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta^2)^2 = (\gamma\beta)^2 = (\gamma\beta^2)^2 = (\alpha\gamma)^2 = ((\alpha\gamma)\beta)^2 = ((\alpha\gamma)\beta^2)^2 = 1$$

e também $\beta(\alpha\gamma) = (\alpha\gamma)\beta^2$.

Vamos escrever os elementos

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{y} \wedge \mathbf{w} \\ \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \gamma\beta = \begin{bmatrix} a + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & a\mathbf{z} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \\ \mathbf{v} + a\mathbf{w} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{z} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\alpha\gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} & a\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} + a\mathbf{y} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\gamma\beta^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & a\mathbf{z} + \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \\ a\mathbf{w} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{z} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + a \end{bmatrix} = \beta\gamma$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{w} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix} = \alpha\beta^2$$

$$\beta(\alpha\gamma) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + a\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) & a\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} + a(\mathbf{y} \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} + a(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z}) + \mathbf{z} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & a\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\gamma)\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + a\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{z} + a(\mathbf{y} \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ a\mathbf{y} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})\mathbf{w} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} + a\mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{z} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & a\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\gamma)\beta^2 = \begin{bmatrix} a\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & a\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{w} + a\mathbf{y} \wedge \mathbf{w} \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})\mathbf{w} + a\mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{z} & a\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

Para que $(\alpha\gamma)^2 = (\alpha\beta)^2 = (\gamma\beta^2)^2 = 1$, devemos ter

$$\begin{cases} \mathbf{x.v} = \mathbf{y.u} \\ \mathbf{v.z} = \mathbf{u.w} + a \end{cases}$$

Para que $((\alpha\gamma)\beta)^2 = ((\alpha\gamma)\beta^2)^2 = 1$ devemos ter

$$\mathbf{x.v} + a\mathbf{x.w} + \mathbf{w.(y \wedge v)} = a\mathbf{y.z} + \mathbf{z.(x \wedge u)}.$$

Para que $\beta(\alpha\gamma) = (\alpha\gamma)\beta^2$ devemos ter

$$\mathbf{x.v} + a\mathbf{y.z} + \mathbf{z.(x \wedge u)} = a\mathbf{x.w} + \mathbf{w.(y \wedge v)}$$

$$a\mathbf{x.w} + \mathbf{w.(y \wedge v)} = a\mathbf{y.z} + \mathbf{u.y} + \mathbf{z.(x \wedge u)}$$

$$(\mathbf{u.y})\mathbf{z} + \mathbf{w \wedge (x \wedge u)} = (\mathbf{x.v})\mathbf{z} + \mathbf{w \wedge (x \wedge u)}$$

Existe γ nas condições requeridas se o sistema abaixo tem solução:

$$\begin{cases} \mathbf{x.v} = \mathbf{y.u} \\ \mathbf{v.z} = \mathbf{u.w} + a \\ \mathbf{x.v} + \mathbf{z.(x \wedge u)} = \mathbf{w.(y \wedge v)} \end{cases}$$

Vamos analisar em separado os casos $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, $\mathbf{y} = \mathbf{w}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ ou $\mathbf{y} \neq \mathbf{w}$.

(i) $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{w}$.

Nesse caso, temos

$$\begin{cases} \mathbf{x.v} = \mathbf{y.u} \\ \mathbf{x.v} = \mathbf{y.u} + a \\ \mathbf{x.v} = 0 \end{cases}$$

Tomando $a = 0$, teremos $\mathbf{u.v} = 1$.

A equação $\mathbf{x.v} = 0$ tem quatro soluções. Seja $\mathbf{v}_0$ uma das soluções tal que $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{y}$ e isto implica dizer que $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes. Logo, o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y.u} = 0 \\ \mathbf{v}_0.\mathbf{u} = 1 \end{cases}$$

tem solução e nesse caso existe tal γ .

(ii) $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ ou $\mathbf{y} \neq \mathbf{w}$

Nesse caso, temos

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + a \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{w} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \end{cases} \quad (3.5.5)$$

A última equação pode ser escrita como

$$(\mathbf{x} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

Se $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$ são linearmente independentes, então o sistema (3.5.5) tem solução $\mathbf{u}_0$.

Tomando $\mathbf{u}_0$ encontramos $\mathbf{v}_0$ e nesse caso existe tal γ .

Se $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$ são linearmente dependentes, então

$$\mathbf{x} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{z},$$

para algum λ e algum μ .

A última equação de (3.5.5) pode ser escrita como

$$(\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + \mu \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + a. \quad (3.5.6)$$

que resulta em

$$((\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) + \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = a.$$

Nesse caso, é sempre possível encontrarmos solução em $\mathbf{u}$ e a .

Escolhendo $\mathbf{u}_0$ e a_0 solução de (3.5.6), temos que o sistema (3.5.5) pode ser escrito

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_0 + a_0 \end{cases}$$

Esse sistema tem solução e nesse caso também existe tal γ .

■

Subloops de ordem 24

Podemos ver em [15] que todos os grupos de ordem 24 têm elemento de ordem maior ou igual a 4, portanto, $GLL(F_2)$ não contém subgrupos de ordem 24.

Os loops de Moufang não associativos de ordem 24 descritos em [04] são: $M_{24}(A_4, 2)$; $M_{24}(D_4, 2)$; $M_{24}(G_{12}, 2)$; $M_{24}(G_{12}, C_2 \times C_4)$; $M_{24}(G_{12}, Q)$ e segundo essa mesma referência, todos estes loops têm elementos de ordem maior ou igual a 4, exceto $M_{24}(A_4, 2)$, que denotaremos brevemente por M_{24} . Nenhum destes pode ser isomorfo a um subloop de $GLL(F_2)$.

Já vimos que em $GLL(F_2)$ existem subgrupos isomorfos a A_4 , obtidos como abaixo:

$$A_4 \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle.$$

Vamos denotar simplesmente por L um destes grupos fixados.

Nosso objetivo é mostrar que todo subloop isomorfo a A_4 está contido num subloop isomorfo a M_{24} ; para isso, bastará provar que está contido num subloop (não associativo) de ordem 24.

Como todo elemento de ordem 2 é da forma $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$, vamos dividir a nossa demonstração em dois casos.

(I) Seja $L = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$, onde $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}$, tal que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$.

Vamos calcular explicitamente os elementos de L .

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta)^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & 1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (\alpha\beta^2)^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + 1 & \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & (1+x.v)x + u + y \wedge (x \wedge u) \\ (1+y.u)y + v + x \wedge (y \wedge v) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta\alpha)^2 = \begin{bmatrix} 0 & (1+x.v)x + u + y \wedge (x \wedge u) \\ (1+y.u)y + v + x \wedge (y \wedge v) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta^2\alpha\beta = \begin{bmatrix} y.u + u.v & (y.u)u + y \wedge v + v \wedge (x \wedge u) \\ (x.v)v + y + x \wedge u + u \wedge (y \wedge v) & u.v + y.u \end{bmatrix},$$

$$\beta\alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} x.v + u.v & (x.v)u + x + y \wedge v + v \wedge (x \wedge u) \\ (y.u)v + x \wedge u + u \wedge (y \wedge v) & x.v + u.v \end{bmatrix},$$

Vamos mostrar inicialmente que é possível encontrar um elemento $\gamma \in GLL(F_2)$ da forma $\gamma = \begin{bmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{bmatrix}$, γ de tal modo que $(g\gamma)^2 = 1$, para todo $g \in L$.

Se $g = \alpha$, então para que $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ devemos ter $x.w = y.z$.

Se $g = \beta$, então para que $\beta\gamma = \gamma\beta^2$ devemos ter $u.w = v.z$. Temos a mesma relação se $g = \beta^2$.

Para decidir se um elemento é de ordem 2, basta verificar que os elementos da diagonal principal são iguais. Vamos calcular estes elementos em todos os casos possíveis.

Se $g = (\alpha\beta^2)^2$ ou $g = (\alpha\beta^2)$, devemos ter $u.w + w.(y \wedge v) = v.z + z.(x \wedge u) + y.z$.

Se $g = (\alpha\beta)^2$ ou $g = \alpha\beta$, devemos ter $x.w + u.w + w.(y \wedge v) = v.z + z.(x \wedge u)$.

Se $g = \beta^2\alpha\beta$, devemos ter

$$(y.u)(u.w) + w.(y \wedge v) + w.(v \wedge (x \wedge u)) = (x.v)(v.z) + y.z + z.(x \wedge u) + z.(u \wedge (y \wedge v)).$$

Se $g = \beta\alpha\beta^2$, devemos ter

$$(x.v)(u.w) + x.w + w.(y \wedge v) + w.(v \wedge (x \wedge u)) = (v.z)(y.u) + z.(x \wedge u) + z.(u \wedge (y \wedge v)).$$

Se $g = \alpha\beta\alpha$ ou $g = (\alpha\beta\alpha)^2$, devemos ter

$$(x.w)(x.v) + x.w + u.w + w.(y \wedge (x \wedge u)) = (y.z)(y.u) + y.z + v.z + z.(x \wedge (y \wedge v)).$$

O elemento γ verifica a condição requerida se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$(i) \quad x.v = y.u;$$

$$(ii) \quad x.w = y.z;$$

$$(iii) \quad u.w = v.z;$$

$$(iv) \quad x.w + u.w + w.(y \wedge v) = v.z + z.(x \wedge u);$$

$$(v) \quad u.w + w.(y \wedge v) = y.z + v.z + z.(x \wedge u);$$

$$(vi) \quad (y.u)(u.w) + w.(y \wedge v) + w.(v \wedge (x \wedge u)) = (x.v)(v.z) + y.z + z.(x \wedge u) + z.(u \wedge (y \wedge v));$$

$$(vii) \quad (x.v)(u.w) + x.w + w.(y \wedge v) + w.(v \wedge (x \wedge u)) = (v.z)(y.u) + z.(x \wedge u) + z.(u \wedge (y \wedge v));$$

$$(viii) \quad (x.w)(x.v) + x.w + u.w + w.(y \wedge (x \wedge u)) = (y.z)(y.u) + y.z + v.z + z.(x \wedge (y \wedge v)).$$

As condições (ii) e (iii) mostram que as condições (iv) e (v) são equivalentes.

As condições (i) e (iii) mostram que as condições (vi) e (vii) podem ser escritas como

$$y.z + w.(y \wedge v) + w.(v \wedge (x \wedge u)) = z.(x \wedge u) + z.(u \wedge (y \wedge v)).$$

As condições (i) e (ii) mostram que a condição (viii) pode ser escrita como

$$w.(y \wedge (x \wedge u)) = z.(x \wedge (y \wedge v)).$$

Portanto, o sistema acima é equivalente ao seguinte:

$$(i) \quad x.v = y.u;$$

$$(ii) \quad x.w = y.z;$$

$$(iii) \quad u.w = v.z;$$

$$(iv) \quad y.z + w.(y \wedge v) = z.(x \wedge u);$$

$$(v) \quad w.(y \wedge (x \wedge u)) = z.(x \wedge (y \wedge v));$$

$$(vi) \quad w.(v \wedge (x \wedge u)) = z.(u \wedge (y \wedge v)).$$

Lema 3.5.5 *As condições (i), (ii), (iii) e (iv) implicam a condição (v) e a condição (vi).*

Demonstração: Basta verificar que as equações

$$w.(v \wedge (x \wedge u)) = z.(u \wedge (y \wedge v))$$

$$w.(y \wedge (x \wedge u)) = z.(x \wedge (y \wedge v))$$

são de fato uma identidade.

Vamos chamar de $e = y \wedge v$ e $f = x \wedge u$. Então,

$$e = (e_1, e_2, e_3) = (y_2v_3 - y_3v_2, y_3v_1 - y_1v_3, y_1v_2 - y_2v_1)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3) = (x_2u_3 - x_3u_2, x_3u_1 - x_1u_3, x_1u_2 - x_2u_1)$$

$$y \wedge f = ((x_1u_2 - x_2u_1)y_2 - (x_3u_1 - x_1u_3)y_3, (x_2u_3 - x_3u_2)y_3 \\ - (x_1u_2 - x_2u_1)y_1, (x_3u_1 - x_1u_3)y_1 - (x_2u_3 - x_3u_2)y_2)$$

$$w.(y \wedge f) = w_1(x_1u_2y_2 + x_2u_1y_1) + w_1(x_3u_1y_3 + x_1u_3y_3) \\ + w_2(x_2u_3y_3 + x_3u_2y_3) + w_2(x_1u_2y_1 + x_2u_1y_1) + w_3(x_3u_1y_1 + x_1u_3y_1) \\ + w_3(x_2u_3y_2 + x_3u_2y_2) \\ = w_1x_1u_2y_2 + w_1x_2u_1y_2 + w_1x_3u_1y_3 + w_1x_1u_3y_3 + w_2x_2u_3y_3 \\ + w_2x_3u_2y_3 + w_2x_1u_2y_1 + w_2x_2u_1y_1 + w_3x_3u_1y_1 + w_3x_1u_3y_1$$

$$\begin{aligned}
& +w_3x_2u_3y_2 + w_3x_3u_2y_2 + 2w_1u_1x_1y_1 + 2w_2u_2x_2y_2 + 2w_3u_3x_3y_3 \\
& = (w_1u_1)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (w_2u_2)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (w_3u_3)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (w_1x_1)(\mathbf{u}.\mathbf{y}) \\
& \quad + (x_2x_2)(\mathbf{u}.\mathbf{y}) + (w_3x_3)(\mathbf{u}.\mathbf{y}) \\
\mathbf{w}.\mathbf{(y \wedge (x \wedge u))} & = (\mathbf{w}.\mathbf{u})(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (\mathbf{w}.\mathbf{x})(\mathbf{y}.\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Calculamos agora $\mathbf{z}.\mathbf{(x \wedge (y \wedge v))}$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{z}.\mathbf{((y_1v_2 - y_2v_1)x_2 - (y_3v_1 - y_1v_3)x_3, (y_2v_3 - y_3v_2)x_3 - (y_1v_2 - y_2v_1)x_1,} \\
& \quad \mathbf{(y_3v_1 - y_1v_3)x_1 - (y_2v_3 - y_3v_2)x_2)} \\
& = z_1x_2y_1v_2 + z_1v_2y_2v_1 + z_1x_3y_3v_1 + z_1x_3y_1v_3 + z_2x_3y_2v_3 + z_2x_3y_3v_2 \\
& \quad + z_2x_1y_1v_2 + z_2x_1y_2v_1 + z_3x_1y_3v_1 + z_3x_1y_1v_3 + z_3x_2y_2v_3 + z_3x_2y_3v_2 \\
& \quad + 2z_1y_1x_1v_1 + 2z_2y_2x_2v_2 + 2z_3y_3x_3v_3 \\
& = (z_1y_1)(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (z_2y_2)(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (z_3y_3)(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (z_1v_1)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (z_2v_2)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (z_3v_3)(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \\
& = (\mathbf{z}.\mathbf{y})(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (\mathbf{v}.\mathbf{z})(\mathbf{x}.\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Donde podemos escrever a equação

$$\mathbf{w}.\mathbf{(y \wedge (x \wedge u))} = \mathbf{z}.\mathbf{(x \wedge (y \wedge v))}.$$

Na forma

$$(\mathbf{w}.\mathbf{u})(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (\mathbf{w}.\mathbf{x})(\mathbf{y}.\mathbf{u}) = (\mathbf{z}.\mathbf{y})(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (\mathbf{v}.\mathbf{z})(\mathbf{x}.\mathbf{y})$$

é de fato uma identidade, pois $\mathbf{w}.\mathbf{u} = \mathbf{v}.\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}.\mathbf{w} = \mathbf{z}.\mathbf{y}$ e também $\mathbf{y}.\mathbf{u} = \mathbf{x}.\mathbf{v}$.

Procedendo de maneira análoga com a equação

$$\mathbf{w}.\mathbf{(v \wedge (x \wedge u))} = \mathbf{z}.\mathbf{(u \wedge (y \wedge v))},$$

teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}.\mathbf{(v \wedge (x \wedge u))} & = (\mathbf{w}.\mathbf{u})(\mathbf{x}.\mathbf{v}) + (\mathbf{w}.\mathbf{x})(\mathbf{u}.\mathbf{v}) \\
\mathbf{z}.\mathbf{(u \wedge (y \wedge v))} & = (\mathbf{z}.\mathbf{y})(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + (\mathbf{v}.\mathbf{z})(\mathbf{u}.\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

que é de fato uma identidade, pois $w.u = v.z$ e $x.v = u.y$ e também $w.x = z.y$. ■

Como consequência do lema, segue que dados $x, y, u, v \in F_2^3$, para que exista γ nas condições requeridas basta que o sistema abaixo tenha solução.

$$(*) \quad \begin{cases} x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 \\ x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 \\ u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 \\ e_1w_1 + e_2w_2 + e_3w_3 = f_1z_1 + f_2z_2 + f_3z_3 + y.z \end{cases}$$

onde $e = y \wedge v$ e $f = x \wedge u$.

O sistema tem solução se o seguinte determinante é não nulo, para cada $z \in F_2^3$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

onde $u, v \neq 0$, pois $u.v = 1$.

O determinante é nulo se $\{x, u, y \wedge v\}$ é linearmente dependente ou, equivalentemente, se, e somente se, se verifica uma das seguintes igualdades:

$$x = 0, \quad x = u, \quad x = y \wedge v, \quad y \wedge v = u, \quad y \wedge v = 0.$$

Vamos estudar então, separadamente, os casos em que o determinante é zero.

i) $x = u$ implica $x.v = u.v = 1 = y.u$ e também $0 = x.y = u.y = 1$. Contradição e, portanto, $x \neq u$.

ii) $y \wedge v = 0$. Como $v \neq 0$, podemos ter $y = 0$ ou $y = v$. Se $y = v$, então a equação $x.v = y.u$ ficará $x.v = v.u = 1$ e também temos $x.y = 0$, donde $x.v = 0$, o que é contradição. Se $y = 0$, então o sistema (*) implica em

$$\begin{cases} x.w = 0 \\ u.w = v.z \\ 0 = f.z \end{cases}$$

A equação $f.z = 0$ tem soluções. Seja z_0 uma destas soluções não nula, o sistema

$$\begin{cases} x.w = 0 \\ u.w = v.z_0 \end{cases}$$

tem solução, pois $x \neq u$, como foi provado em (i). Portanto, nesse caso existe γ nas condições requeridas.

iii) $x = y \wedge v$. O sistema (*) implica em

$$\begin{cases} x.w = y.z \\ u.w = v.z \\ x.w = y.z + (x \wedge u)z \end{cases}$$

Como $x \neq u$, por (i), a equação $x.w = y.z + z.(x \wedge u)$ tem solução em z . Seja z_0 uma destas soluções. Considerando o sistema

$$\begin{cases} x.w = y.z_0 \\ u.w = v.z_0 \end{cases}$$

encontramos solução para w e, portanto, também neste caso existe γ nas condições do enunciado.

iv) $y \wedge v = u$. Já vimos que $x \neq u$ e $y \neq v$. Neste caso, o sistema (*) resulta

$$\begin{cases} x.w = y.z \\ u.w = v.z \\ u.w = f.z + y.z \end{cases}$$

Devemos ter então $v.z = f.z + y.z$ ou ainda $(v - f - y).z = 0$. Esta equação sempre tem soluções. Seja z_0 uma solução. então temos

$$\begin{cases} x.w = y.z_0 \\ u.w = v.z_0 \end{cases}$$

Novamente é possível achar soluções para w e também neste caso existe γ nas condições requeridas.

v) $x = 0$ implica $x \wedge u = 0$, donde o sistema (*) ficará com a forma

$$\begin{cases} y.z = 0 \\ v.z = u.w \\ 0 = e.w \end{cases}$$

Como $y \neq v$ e $y \neq 0$ (se $y = 0$, então $\alpha = I$), y, v são linearmente independentes. A equação $e.w = 0$ tem solução não nula em w . Seja w_0 uma destas soluções, então temos

$$\begin{cases} y.z = 0 \\ v.z = u.w_0 \end{cases}$$

Neste caso, é possível achar solução para z e temos γ nas condições requeridas.

(II) Seja $L = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$, onde $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}$.

Mostraremos que, também nesse caso, é possível encontrar um elemento γ como acima.

Os elementos de L agora são os seguintes:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{x.v} & \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{y.u} \end{bmatrix}.$$

Como $(\alpha\beta)^3 = 1$, temos $\mathbf{x.v} \neq \mathbf{y.u}$ ou então $\mathbf{x.v} = 1 + \mathbf{y.u}$.

$$(\alpha\beta)^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y.u} & \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{x.v} \end{bmatrix}, \quad \alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x.v} & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{y.u} \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta^2)^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y.u} & \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} & \mathbf{x.v} \end{bmatrix},$$

$$\alpha\beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{x.v})\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ (\mathbf{y.u})\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha\beta\alpha)^2 = \begin{bmatrix} 1 & (\mathbf{x.v})\mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ (\mathbf{y.u})\mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta^2\alpha\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{y.u} & (\mathbf{y.u})\mathbf{u} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ (\mathbf{x.v})\mathbf{v} + \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & \mathbf{y.u} \end{bmatrix},$$

$$\beta\alpha\beta^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x.v} & (\mathbf{y.u})\mathbf{u} + \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \\ (\mathbf{x.v})\mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) & \mathbf{x.v} \end{bmatrix}.$$

Mais uma vez, vamos mostrar que é possível escolher $\gamma \in GLL(F_2)$, $\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & 0 \end{bmatrix}$ de tal modo que $(g\gamma)^2 = 1$, para todo $g \in L$, ou seja, basta verificar que os elementos da diagonal principal de $g\gamma$ são iguais para cada $g \in L$.

Se $g = \alpha$, para que $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, devemos ter $\mathbf{x.w} = \mathbf{y.z}$.

Se $g = \beta$, para que $(\beta\gamma)^2 = 1$, devemos ter $\mathbf{u.w} = \mathbf{v.z}$.

Vamos calcular estes elementos em todos os casos possíveis.

Se $g = \alpha\beta$ ou $g = (\alpha\beta)^2$ devemos ter $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{y}\mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})$.

Se $g = \alpha\beta^2$ ou $g = (\alpha\beta^2)^2$ devemos ter $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})$.

Se $g = (\alpha\beta\alpha)$, $(\alpha\beta\alpha)^2$ devemos ter

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v})).$$

Se $g = \beta\alpha\beta^2$ devemos ter

$$(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v})).$$

Se $g = \beta^2\alpha\beta$ devemos ter

$$(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v})).$$

Resumindo, existe $\gamma \in GLL(F_2)$ nas condições requeridas se, e somente se, o sistema abaixo tem solução em $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$.

$$(i) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z};$$

$$(ii) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{z};$$

$$(iii) \quad \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u});$$

$$(iv) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u});$$

$$(v) \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}));$$

$$(vi) \quad (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v})).$$

A condição (i) implica diretamente que as condições (iii) e (iv) são equivalentes. Como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + 1$ e pelo Lema 3.5.5 as condições (i), (ii) e (iv) implicam que

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v})),$$

o sistema pode ser escrito como

$$(i) \quad x.w = y.z;$$

$$(ii) \quad u.w = v.z;$$

$$(iii) \quad w.(y \wedge v) = x.w + z.(x \wedge u);$$

ou ainda

$$\begin{cases} x.w = y.z \\ u.w = v.z \\ 0 = y.z \\ w.(y \wedge v) = x.w + z.(x \wedge u) \end{cases}$$

Dados $x, y, u, v \in F_2^3$, para que exista γ nas condições requeridas, basta que o sistema abaixo tenha solução.

$$\begin{cases} x.v = 1 + y.u \\ x.w = 0 \\ u.w = v.z \\ e.w = f.z \end{cases}$$

onde $e = (y \wedge v)$ e $f = (x \wedge u)$.

O sistema tem solução se o seguinte determinante é não nulo para cada $z \in F_2^3$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

onde $x, y, u, v \neq 0$.

O determinante é nulo se $\{x, u, y \wedge v\}$ é linearmente dependente ou, equivalentemente, se, e somente se, se verificam as identidades

$$x = u, \quad x = y \wedge v, \quad y \wedge v = 0 \quad \text{ou} \quad y \wedge v = u.$$

Vamos estudar separadamente cada caso.

i) $x = y \wedge v$ implica $x.v = (y \wedge v).v = 0 = 1 + y.u$. Mas $x.y = 1 = (y \wedge v).y = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $x \neq y \wedge v$.

ii) $y \wedge v = 0$ implica $y = v$. Temos então $x.v = 1 + y.u = 1 + u.v = 0$. Por outro lado, $x.y = 1 = x.v$, o que é contradição.

iii) $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ implica $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 = 1 + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$, donde $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0$. Por outro lado, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$, o que é contradição.

iv) $\mathbf{y} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u}$. Temos então

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \end{cases}$$

o que implica $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}$, ou seja, $(\mathbf{v} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{z} = 0$. Esta equação sempre tem soluções.

Seja $\mathbf{z}_0$ uma solução, então temos

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

Como $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ são linearmente independentes, então o sistema tem solução e é possível encontrar γ nas condições requeridas.

Agora usaremos um argumento semelhante ao utilizado por Chein na demonstração do Teorema 1 [05] para mostrar que $\langle L, \gamma \rangle \cong M_{24}$.

Com efeito, como vimos até agora, em ambos os casos possíveis podemos escolher $\gamma \in GLL(F_2)$, tal que $g\gamma$ é de ordem 2, para todo $g \in L$. Assim,

$$(g\gamma)^2 = (g\gamma)(g\gamma) = 1,$$

donde $g\gamma = \gamma g^{-1}$.

Pela diassociatividade e usando a identidade $(ab)(ca) = [a(bc)]a$, temos que

$$g_1(\gamma^n g_2) = (g_2 g_2^{-1} g_1)(\gamma^n g_2) = g_2[(g_2^{-1} g_1)\gamma^n]g_2.$$

Se $n = 0$, então o produto acima é apenas $g_1 g_2$ e, portanto, está em L .

Se $n = 1$, então $g_2[(g_2^{-1} g_1)\gamma]$ pode ter ordem 2 ou 3.

Já vimos que $(g_2^{-1} g_1)\gamma$ tem ordem 2, $\forall g_1, g_2 \in L$. Provaremos o seguinte

Lema 3.5.6 *Nas condições acima, temos $g_1(\gamma g_2) \in L$ ou $g_1(\gamma g_2) \in L\gamma$.*

Demonstração: Se $g_2[(g_2^{-1}g_1)\gamma]$ tem ordem 2, então temos

$$g_1(\gamma g_2) = (g_2 \underbrace{[(g_2^{-1}g_1)\gamma]}_{\text{tem ordem 2}})g_2 = ([(g_2^{-1}g_1)\gamma]^{-1}g_2^{-1})g_2.$$

Pela diassociatividade,

$$([(g_2^{-1}g_1)\gamma]^{-1}g_2^{-1})g_2 = [(g_2^{-1}g_1)\gamma]^{-1}g_2^{-1}g_2 = [(g_2^{-1}g_1)\gamma]^{-1} = (g_2^{-1}g_1) \in L_\gamma$$

Se $g_2[(g_2^{-1}g_1)\gamma]$ tem ordem 3, então temos

$$g_2[(g_2^{-1}g_1)\gamma] = [(g_2^{-1}g_1)\gamma]^{-2}g_2^{-2} = ([(g_2^{-1}g_1)\gamma]^2)^{-1}g_2^{-2} = g_2^{-2}.$$

Logo,

$$g_1(\gamma g_2) = g_2[(g_2^{-1}g_1)\gamma]g_2 = g_2^{-2}.g_2 = g_2^{-1} \in L. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5.7 *O conjunto $L \cup L\gamma$ é fechado para a multiplicação, logo é um subloop isomorfo a M_{24} .*

Demonstração: De fato, sejam $g_1, g_2 \in L$ e $m, n = 0, 1$. Calculemos

$$\begin{aligned} (g_1\gamma^m)(g_2\gamma^n) &= \{[(g_1\gamma^m)(g_2\gamma^n)]\gamma^m\}\gamma^{-m} \\ &\quad (\text{usando uma das identidades de Moufang}) \\ &= \{g_1[\gamma^m(g_2\gamma^{n+m})]\}\gamma^{-m} = A. \end{aligned}$$

Se $m = 1$ e $n = 0$, então

$$A = \{g_1[\gamma(g_2\gamma)]\}\gamma = \{g_1[\gamma\gamma g_2^{-1}]\}\gamma = (g_1g_2^{-1})\gamma \in L\gamma.$$

Se $m = 0$ e $n = 1$, então

$$A = [g_1(g_2\gamma)] = g_1(\gamma g_2^{-1}).$$

Pelo Lema 3.5.6. $g_1(\gamma g_2^{-1}) = g_2^{-1}$ ou $g_3\gamma$, donde $g_1(\gamma g_2^{-1})$ está em L ou em $L\gamma$.

Se $m = 1$ e $n = 1$, então

$$A = \{g_1[\gamma g_2]\}\gamma.$$

Novamente, pelo Lema 3.5.6, $g_1(\gamma g_2) = g_2^{-1}$ ou $g_3\gamma$, donde $g_1(\gamma g_2)\gamma = \begin{cases} g_2^{-1}\gamma \\ g_3 \end{cases}.$

Ou seja, $g_1(\gamma g_2)\gamma$ está em L ou $L\gamma$. ■

Subloops de ordem 32

Suponha que exista H um subloop de $GLL(F_2)$ de ordem 32.

Como $|H| = 32$, então todo elemento tem ordem 2 e pela Proposição 2 [05, p.35], H é um grupo abeliano. Logo, H é isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, o que é uma contradição, pois em $GLL(F_2)$ não há grupos isomorfos a $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$.

Subloops de ordem 48

Suponha que exista H subloop de $GLL(F_2)$ tal que $|H| = 48$. Então, H deveria ter um 2-subgrupo de Sylow de ordem 16 e já vimos que em $GLL(F_2)$ não tem subgrupo de ordem 16.

Em função dos resultados deste capítulo, podemos enunciar o seguinte

Teorema 3.5.8 *Um subloop L de $GLL(F_2)$ é maximal se, e somente se, ele é isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2$, M_{12} ou M_{24} .*

Figura 3.1:

Diagrama parcial do reticulado de subloops de $GLL(F_2)$ mostrando as relações de inclusão, a menos de isomorfismos.

Referências bibliográficas

- [01] ARTIN, E. *Geometric algebra*. Interscience, New York, 1964.
- [02] BAUMSLAG, F.L. *Theory and problems of group theory*. McGraw Hill, New York, 1968. (Shaum's Outline Series)
- [03] BRUCK, R.H. *A survey of binary systems*. Springer, Berlin, 1958.
- [04] CHEIN, O. Moufang loops of small order. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 197, 13 (1978).
- [05] CHEIN, O. Moufang loops of small order I. *Trans. Am. Math. Soc.*, v.188, (1974), 31–51.
- [06] CHEIN, O.; PFLUGFELDER, H.O. The smallest Moufang loop. *Arch. Math.*, v.22, (1971), 573–576.
- [07] GOODAIRE, E.G.; JESPERS, E.; POLCINO MILIES, F.C. *Alternative loop rings*. North Holland Math. Studies, 184, Elsevier, Amsterdam, 1996.
- [08] KARGAPOLOV, M.I.; MERZLJAKOV, J.I. *Fundamentals of the theory of groups*. 2.ed.rev. Springer, New York, 1979. (Graduate Texts in Mathematics, 62)
- [09] LIEBECK, M.W. The classification of finite simple Moufang loops. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 102 (1987), 33–47.
- [10] PAIGE, L.J. A class of simple Moufang loops. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 471–482.
- [11] PFLUGFELDER, H.O. *Quasigroups and loops: introduction*. Heldermann, Berlin, 1990. (Sigma Series in Pure Mathematics, 7)
- [12] SCHAFER, R.D. *An introduction to nonassociative algebras*. Dover, New York, 1994.

- [13] SCOTT, W.R. *Group theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [14] SUPRUNENKO, D.A. *Matrix groups*. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1976.
- [15] THOMAS, A.D.; WOOD, G.V. *Group tables*. Shiva, Orpington, 1980.
- [16] ZHEVLAKOV, K.A.; SHESTAKOV, I.P.; SHIRSKOV, A.I.; SLIN'KO, A.M. *Rings that are nearly associative*. Academic Press, New York, 1982. (Pure and Applied Mathematics, 104)