**Localização de Pontos Fixos e
Coincidências**

Daniel Vendrúscolo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Algébrica**
Orientador: **Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.
–São Paulo, Março de 1998–*

Localização de Pontos Fixos e Coincidências

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Daniel Vendrúscolo
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 06 de Março de 1998.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dra. Lucília Daruiz Borsari - IME - USP
- Prof. Dr. Janey Antonio Daccach - ICMSC - USP.

Agradecimentos

Ao Prof. Daciberg pela orientação precisa, cordial e indispensável.

À minha família, especialmente aos meus pais, por tudo.

Aos meus amigos do IME; Patrícia, Raul, Fernando, Walquíria, Samuel, Cecília, José Antônio, Irene e demais, pela companhia constante.

Aos fiéis amigos Bologna e Xirim em reconhecimento a um trabalho de persuasão muitas vezes imprescindível.

Especialmente à Liane Bordignon por estar ao meu lado.

Resumo

Nesse trabalho apresentamos alguns resultados de localização de pontos fixos em poliedros obtidos por Helga Schimer. Abordamos também os mesmos problemas para coincidências, enunciando-os, sempre que possível, para complexos simpliciais e não apenas variedades.

Demonstramos que: (i) Todo poliedro do tipo W tem a propriedade da invariância completa. (ii) Sejam X e Y n -variedades ($n \geq 2$), conexas, compactas, orientáveis, triangularizáveis e sem bordo; se $A \neq \emptyset$ é um fechado em X , dada $f : X \rightarrow Y$, existem f_1, f_2 homotópicas à f com $Coin(f_1, f_2) = A$. (iii) Respeitadas as condições de realização de $N(f)$ e $N(f_1, f_2)$ podemos realizar as classes de Nielsen essenciais como qualquer conjunto finito de pontos que satisfaçam as condições dos índices das classes (no caso de coincidências as imagens das coincidências também podem ser qualquer conjunto). (iv) Seja $|Y|$ um poliedro compacto do tipo W, se $A \subset |Y|$ é um fechado então podemos realizar A como imagem do conjunto de coincidências de um par de aplicações de $|X|$ em $|Y|$ onde $|X|$ é um poliedro qualquer de mesma dimensão que $|Y|$.

Abstract

In this work we present several results about the localization of fixed points in polyhedra obtained by Helga Schimer. We approach the same problems in coincidence theory, enunciating them (whenever possible) for polyhedra and not only for manifolds.

We show that: (i) All polyhedron of type W have the complete invariance property. (ii) Let X and Y be two orientable connected compact triangulable n -manifold without boundary, if $A \neq \emptyset$ is closed on X and $f : X \rightarrow Y$ is a map, then there are f_1, f_2 which are homotopics to f with $Coin(f_1, f_2) = A$. (iii) Under sufficient conditions for the realization of $N(f)$ and $N(f_1, f_2)$ we can realize the essential Nielsen classes like any finite set of points which satisfy the conditions of indices of classes (for coincidences the ranges can be any set). (iv) Let $|Y|$ a compact polyhedron of type W, if $A \subset |Y|$ is closed, then there are $f_1, f_2 : |X| \rightarrow |Y|$ such that $f_i(Coin(f_1, f_2)) = A$ and $|X|$ is any polyhedron of the same dimension of $|Y|$.

Conteúdo

Introdução	2
1 Preliminares	3
1.1 Índice de Ponto Fixo	3
1.2 Número de Nielsen	7
1.3 Índice de Coincidências	11
1.4 Número de Lefschetz	15
1.5 Número de Nielsen para Coincidência	18
2 Localização de Pontos Fixos	21
3 Localização de Coincidências	36
Bibliografia	46

Introdução

O objetivo desse trabalho é apresentar resultados de localização de pontos fixos e coincidências no contexto da teoria de Nielsen.

No primeiro capítulo fazemos uma exposição da teoria de Nielsen para pontos fixos e coincidências. Usamos como referências os livros [Jiang], [Kiang] e [Vick] além da tese [Oliveira].

No capítulo dois, que se baseia nos artigos [Schimer 1] e [Schimer 2], demonstramos alguns resultados de localização de pontos fixos. Entre os teoremas apresentados destacamos: 2.9, 2.18 (enunciados para deformações), 2.21 e 2.22, esse último para a esfera S^2 . O livro [Brown] torna-se, aqui, uma referência indispensável pois contém quase toda a técnica utilizada além dos teoremas básicos de realização.

O terceiro capítulo é dedicado à localização de coincidências. Utilizando [Schimer 3] obtemos resultados semelhantes aos apresentados para pontos fixos, onde destacam-se os teoremas 3.6 (deformação) e 3.8. Ainda no contexto de coincidências, analisando a localização das imagens das coincidências, demonstramos os teoremas 3.10 e 3.12 (deformação). Apesar de quase todos os principais teoremas estarem enunciados para variedades, onde a teoria de coincidências esta mais consolidada, procuramos, sempre que possível, obter lemas que possam ser utilizados no contexto mais geral de poliedros. Dessa forma as técnicas utilizadas nesse capítulo não são muito distintas das do capítulo anterior.

Finalmente gostaríamos de salientar que as demonstrações que podem ser encontradas nos livros da bibliografia foram omitidas, mas apresentamos, com detalhes, quase todas as demonstrações só disponíveis nos artigos.

Capítulo 1

Preliminares

A idéia central desse capítulo é descrever a teoria básica de coincidência e de ponto fixo.

1.1 Índice de Ponto Fixo

Definição 1.1 Dada uma função $f : X \rightarrow X$ dizemos que $x \in X$ é um **Ponto Fixo** da f se $f(x) = x$.

Denotaremos por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixo da função f .

Vamos inicialmente definir um índice de pontos fixos para aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ de forma semelhante a feita em [Dold 2].

Definição 1.2 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$; $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $W \subseteq U$ aberto com $Fix(f) \cap W$ compacto; tomamos $V \subseteq W$ tal que: $Fix(f) \cap W \subset V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ denotando por o_n a classe fundamental de $H_n(W, W \setminus V; \mathbb{Q})$ chamamos de **índice de f em W** , I_f^W , o inteiro:

$$(id - f)_*(o_n) \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \approx \mathbb{Z}.$$

onde id é a aplicação identidade.

Se $W = U$ denotamos I_f^W por I_f .

O índice de pontos fixos satisfaz as seguintes propriedades (para maiores detalhes ver [Dold 2, pp 202:205]):

1. Localização

Sejam f, f' como na definição, W e W' abertos tais que $Fix(f) \cap W = Fix(f') \cap W'$ e $f|_{W \cap W'} = f'|_{W \cap W'}$ então:

$$I_f^W = I_{f'}^{W'}.$$

Demonstração: Como $f|_{W \cap W'} = f'|_{W \cap W'}$ temos, claramente $(id - f)_* = (id - f')_*$; assim I_f^W depende exclusivamente de $f|_W$. $\square$

2. Aditividade

Sejam f e W como na definição; se W é tal que $W = \bigcup_{i=1}^k W_i$ com $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$ então:

$$I_f^W = \sum_{i=1}^k I_f^{W_i}.$$

Demonstração: Tomando $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$ tal que $Fix(f) \cap W_i \subset V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$ temos que $H_n(W, W \setminus V; \mathbb{Q}) = \bigoplus_i H_n(W_i, W_i \setminus V_i; \mathbb{Q})$, portanto:

$$(id - f)_*(o_n) = \sum_{i=1}^k (id - f)_*(o_{n_i}) = \sum_{i=1}^k I_f^{W_i}$$

onde cada o_{n_i} é a classe fundamental de $H_n(W_i, W_i \setminus V_i; \mathbb{Q})$. $\square$

3. Invariância Homotópica

Se $H(x, t) : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma homotopia tal que $H(x, 0) = f$ e $H(x, 1) = g$ e se $\bigcup_t Fix(H(x, t)) \cap W$ é compacto então:

$$I_f^W = I_g^W.$$

Demonstração: Decorre facilmente do fato que $(id - f)_* = (id - g)_*$ pois $id - H(x, t)$ é uma homotopia entre $id - f$ e $id - g$. $\square$

4. Multiplicatividade

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, g : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$, W e W' são como na definição ($W \subset U$ e $W' \subset U'$) então:

$$I_{f \times g}^{W \times W'} = I_f^W \cdot I_g^{W'}.$$

Demonstração: Se o_n e o'_n são classes fundamentais de $H_n(W, W \setminus V; \mathbb{Q})$ e $H_n(W', W' \setminus V'; \mathbb{Q})$ respectivamente sabemos que $o_n \times o'_n$ é a classe fundamental que nos interessa para calcular $I_{f \times g}^{W \times W'}$; desse modo temos:

$$\begin{aligned} I_{f \times g}^{W \times W'} &= (id \times id - f \times g)_*(o_n \times o'_n) \\ &= [(id - f) \times (id - g)]_*(o_n \times o'_n) \\ &= [(id - f)_*(o_n)] \times [(id - g)_*(o'_n)] \\ &= I_f^W \cdot I_g^{W'} \end{aligned}$$

□

5. Comutatividade

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$, W e W' são como na definição ($W \subset U$ e $W' \subset U'$) tomando $V = f^{-1}(W)$ e $V' = g^{-1}(W')$ temos:

$$I_{g \circ f}^V = I_{f \circ g}^{V'}.$$

Demonstração: É interessante notar que $Fix(g \circ f) \cap V$ é homeomorfo a $Fix(f \circ g) \cap V'$. Definimos:

$$\gamma : V \times V' \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}, \quad \gamma(x, y) = (g(y), f(x))$$

Fazendo: $H : V \times V' \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ tal que

$$H(x, y, t) = [t \cdot g \circ f(x) + (1 - t) \cdot g(y), f(x)],$$

temos que, para t_0 fixado,

$$(x, y) \in Fix(H(x, y, t_0)) \Leftrightarrow y = f(x) \text{ e } x \in Fix(g \circ f).$$

Assim $Fix(H(x, y, t_0))$ independe de t e é compacto. dessa forma, usando a propriedade da invariância homotópica, pois $\bigcup_t Fix(H(x, y, t))$ é compacto, temos que:

$$I_{\gamma}^{V \times V'} = I_{H(x, y, 0)}^{V \times V'} = I_{H(x, y, 1)}^{V \times V'}.$$

Observamos que $H(x, y, 1) = (g \circ f(x), f(x))$ e assim:

$$I_{H(x, y, 1)}^{V \times V'} = I_{\delta}^{V \times V'}$$

onde $\delta : V \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ é dada por $\delta(x, y) = (g \circ f(x), f(x))$ (essa igualdade decorre da propriedade de localização do índice de ponto fixo).

Vamos agora deformar δ para obtermos $I_{\delta}^{V \times V'} = I_{g \circ f}^V$. Para tanto definimos a homotopia:

$$G(x, y, t) = (g \circ f(x), (1-t) \cdot f(x))$$

e observamos que $G(x, y, 1) = (g \circ f, 0)$. Assim podemos entender $G(x, y, 1)$ como uma aplicação produto $g \circ f \times cte : V \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$, (cte a aplicação constante) e, usando a propriedade multiplicativa do índice, temos:

$$I_{\delta}^{V \times V'} = I_{G(x, y, 0)}^{V \times V'} = I_{G(x, y, 1)}^{V \times V'} = I_{g \circ f}^V \cdot I_{cte}^{V'}.$$

Como $(id - cte)_{\star} = id$, sabemos que $I_{cte}^{V'} = 1$. Logo:

$$I_{\gamma}^{V \times V'} = I_{\delta}^{V \times V'} = I_{g \circ f}^V.$$

Repetindo o processo com $H'(x, y, t) = (g(y), t \cdot f \circ g(y) + (1-t) \cdot f(x))$ e $G'(x, y, t) = ((1-t) \cdot g(y), f \circ g(y))$ obtemos $I_{\gamma}^{V \times V'} = I_{f \circ g}^{V'}$. $\square$

Em [Dold 1], usando a propriedade comutativa descrita acima, temos a definição de índice em situações mais amplas.

Definição 1.3 *Um espaço topológico X é dito um $\mathbf{ENR}^1$ se existe $X' \in \mathbb{R}^n$, retrato de vizinhança, homeomorfo a X .*

São exemplos de ENR: os $\mathbb{R}^n$, abertos de $\mathbb{R}^n$, as variedades topológicas e os poliedros compactos.

Tomando $f : X \rightarrow X$ com X um ENR podemos “decompor” f na forma

$$X \xrightarrow{i} U' \xrightarrow{f \circ r} X$$

onde i é o homeomorfismo entre X e X' com $X' \subset U' \subseteq \mathbb{R}^n$, U' aberto e r a retração de U' em X' .

Observamos que se U'' é outro aberto de $\mathbb{R}^{n'}$ com X'' homeomorfo a X a propriedade comutativa nos garante que:

$$I_{i \circ f \circ r}^{U'} = I_{i'' \circ f \circ r''}^{U''}$$

onde i'' e r'' são os correspondentes de i e de r .

Após essas considerações podemos dar a seguinte definição:

¹Sigla derivada da língua inglesa *Euclidean Neighborhood Retract*.

Definição 1.4 *Seja $f : X \rightarrow X$, X um ENR e $W \subseteq X$ aberto com $\text{Fix}(f) \cap W$ compacto; definimos o índice de f em W satisfazendo:*

$$I_f^W = I_{\text{iofor}}^{r^{-1}(W)}.$$

I_f^W está bem definido pelo exposto acima e as propriedades demonstradas anteriormente também são verdadeiras com demonstrações muito semelhantes às que foram dadas na definição anterior.

Se $K \subset \text{Fix}(f)$ é um compacto de X , tomando W um aberto tal que $W \cap \text{Fix}(f) = K$, denotaremos, por simplicidade,

$$\text{ind}(f, K) = I_f^W.$$

Observamos que pela propriedade de localização $\text{ind}(f, K)$ independe de W . Diremos, por abuso de linguagem índice da f em K .

1.2 Número de Nielsen

Nessa secção vamos apresentar, resumidamente, as definições e principais resultados da teoria de classes de ponto fixo de Nielsen.

Sejam X um poliedro compacto e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ seu recobrimento universal. Denotando por $\mathfrak{D}(X)$ o grupo das aplicações $\gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tais que $\gamma \circ p = p \circ \text{id}$, temos:

Definição 1.5 *Dois levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ de $f : X \rightarrow X$ são conjugados se existe $\gamma \in \mathfrak{D}(X)$ tal que $\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$.*

Claramente a relação de conjugação é uma relação de equivalência.

Definição 1.6 *Chamamos de classes de levantamento da f as classes de equivalência dos levantamentos da f por conjugação, ou seja:*

$$[\tilde{f}] = \{\gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \mid \gamma \in \mathfrak{D}(X)\}.$$

Teorema 1.7 *Se X é um poliedro compacto, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ seu recobrimento universal então:*

$$(i) \text{ fix}(f) = \bigcup_{\tilde{f}} p(\text{Fix}(\tilde{f}));$$

$$(ii) [\tilde{f}] = [\tilde{f}'] \Rightarrow p(\text{Fix}(\tilde{f})) = p(\text{Fix}(\tilde{f}'));$$

$$(iii) [\tilde{f}] \neq [\tilde{f}'] \Rightarrow p(\text{Fix}(\tilde{f})) \cap p(\text{Fix}(\tilde{f}')) = \emptyset.$$

Demonstração: [Kiang, pg 31]. □

Definição 1.8 O conjunto $p(\text{Fix}(\tilde{f})) \subset \text{Fix}(f)$, que pelo teorema 1.7 é determinado pela classe $[\tilde{f}]$, é denominado uma **classe de ponto fixo** de f .

Por simplicidade de notação denotaremos a classe $p(\text{Fix}(\tilde{f}))$ por $p(\text{Fix}([\tilde{f}]))$.

Teorema 1.9 Se X é um poliedro compacto e $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua então

$$\text{Fix}(f) = \bigcup_{[\tilde{f}]} p(\text{Fix}(\tilde{f}))$$

onde $[\tilde{f}]$ percorre as classes de levantamento da f e a união é disjunta.

Em outras palavras o conjunto de pontos fixos da f se “decompoe” em uma união disjunta de classes de pontos fixos.

Demonstração: [Kiang, pg 31]. □

O teorema a seguir nos dá uma equivalência geométrica para a definição de classe de ponto fixo.

Teorema 1.10 Dois pontos $x_0, x_1 \in \text{Fix}(f)$ estão na mesma classe de ponto fixo de $f : X \rightarrow X$ se, e somente se, existe uma curva ζ de x_0 até x_1 em X tal que $\zeta \simeq f \circ \zeta \text{ rel } \{0, 1\}$.

Demonstração: [Kiang, pg 33] ou [Jiang, pg 6]. □

Teorema 1.11 Se $\mathbb{F}$ é uma classe de ponto fixo de $f : X \rightarrow X$, X um poliedro compacto, então $\mathbb{F}$ é aberto em $\text{Fix}(f)$.

Demonstração: [Kiang, pg 35]. □

Corolário 1.12 *f tem somente um número finito de classes de ponto fixo não vazias sendo cada uma delas um compacto em X .*

Demonstração: [Kiang, pg 35]. □

Vamos agora analisar a relação entre as classes de ponto fixo de f e de f' quando $f \simeq f'$.

Definição 1.13 *Dada uma homotopia $H : X \times I \rightarrow X$ um levantamento de homotopia de H é uma homotopia $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que:*

$$H \circ (p \times id) = \tilde{H} \circ p.$$

O resultado a seguir é clássico da teoria de recobrimento.

Teorema 1.14 *Dadas $H : X \times I \rightarrow X$ homotopia entre f e f' ; e $\tilde{f}$ um levantamento de f então existe uma única $\tilde{H}_{\tilde{f}}$, levantamento de H tal que $\tilde{H}_{\tilde{f}}(x, 0) = \tilde{f}(x) \forall x \in \tilde{X}$.*

Usando esse teorema podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os levantamentos de f e os de f' tomando-se $\tilde{f}'(x) = \tilde{H}_{\tilde{f}}(x, 1)$. Neste caso dizemos que $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ estão relacionados por H .

Observando que $\gamma \circ \tilde{H}_{\tilde{f}}(x, t) \circ \gamma^{-1}$ é uma homotopia entre $\gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$ e $\gamma \circ \tilde{f}' \circ \gamma^{-1}$ temos que a correspondência também se realiza entre as classes de ponto fixo da f e da f' .

Definição 1.15 *Se $H : X \times I \rightarrow X$ é uma homotopia a Representação Cilíndrica de H é a aplicação $\mathfrak{H} : X \times I \rightarrow X \times I$ dada por*

$$\mathfrak{H}(x, t) = (H(x, t), t).$$

Um nível $H(x, t_0)$ de H é chamado t_0 -fatia de $\mathfrak{H}$.

Sabemos que se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é o recobrimento universal de X então $p \times id : \tilde{X} \times I \rightarrow X \times I$ é o recobrimento universal de $X \times I$ e assim temos:

Lema 1.16 *Se $H : X \times I \rightarrow X$ e $G : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ são homotopias então G é um levantamento de H se, e somente se, a representação cilíndrica $\mathfrak{G} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X} \times I$ de G é um levantamento da representação cilíndrica $\mathfrak{H}$ de H .*

Demonstração: [Kiang, pg 38]. □

Teorema 1.17 *Dada $H : X \times I \rightarrow X$ homotopia entre f e f' , se $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ são classes de ponto fixo de f e de f' respectivamente então $\mathbb{F}$ está relacionada a $\mathbb{F}'$ por H se, e somente se, $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ são a 0-fatia e a 1-fatia de uma classe de ponto fixo $(p \times id)(Fix(\tilde{\mathfrak{H}}))$ da representação cilíndrica $\tilde{\mathfrak{H}}$ de H .*

Demonstração: [Kiang, pg 40]. □

Retomando o teorema 1.11 e o corolário 1.12 vemos que se $\mathbb{F}$ é uma classe de ponto fixo de f o índice da f em $\mathbb{F}$, $ind(f, \mathbb{F})$, está bem definido.

Definição 1.18 *Uma classe de ponto fixo $\mathbb{F}$ de $f : X \rightarrow X$ é dita Classe Essencial se $ind(f, \mathbb{F}) \neq 0$; definimos ainda o Número de Nielsen de f , notação $N(f)$, como o número de classes essenciais da f .*

Claramente $N(f)$ é um inteiro não negativo e, pelo corolário 1.12, é finito.

Teorema 1.19 *X poliedro compacto, $f : X \rightarrow X$ contínua então $N(f) \leq \#Fix(f)$.*

Demonstração: Decorre facilmente da definição de $N(f)$ e das propriedades do índice. □

Teorema 1.20 *Se X é um poliedro compacto e $H : X \times I \rightarrow X$ é uma homotopia entre f e f' ; $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ são classes de ponto fixo de f e de f' respectivamente e se $\mathbb{F}$ está relacionada com $\mathbb{F}'$ por H então:*

$$ind(f, \mathbb{F}) = ind(f', \mathbb{F}').$$

Demonstração: [Kiang, pg 47] ou [Jiang, pg 18]. □

O teorema acima pode ser entendido simplesmente como a afirmação de que a bijeção entre as classes de ponto fixo de f e f' induzida por H preserva índice.

Corolário 1.21 *$N(f)$ é um invariante homotópico e um limitante inferior para a cardinalidade do conjunto de pontos fixos de qualquer aplicação na classe de homotopia de f .*

1.3 Índice de Coincidências

Definição 1.22 Uma coincidência entre duas funções $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ é um ponto $x \in X$ tal que $f_1(x) = f_2(x)$.

Chamaremos de $Coin(f_1, f_2)$ o conjunto das coincidências do par f_1, f_2 .

Suponhamos f_1, f_2 aplicações entre X e Y variedades compactas, n -dimensionais, conexas, orientáveis e sem bordo. Dado um aberto W de X , se $K = Coin(f_1, f_2) \cap W$ é compacto podemos definir um **índice de coincidência do par f_1, f_2 em W** como a imagem da classe fundamental z_1 de X pela composição:

$$H_n(X) \rightarrow H_n(X, X \setminus V) \xrightarrow{\text{excisão}} H_n(W, W \setminus V) \xrightarrow{(f_1, f_2)^*} H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y)) \approx \mathbb{Z}$$

Onde V é um aberto de X com $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq W$ (V existe pois W é normal); $(f_1, f_2) : W \rightarrow Y \times Y$ é dada por $(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$ e, sendo U_2 a classe de Thom de Y , a identificação $H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y)) \approx \mathbb{Z}$ é feita levando-se uma classe α no inteiro $\langle U_2, \alpha \rangle$.

Esse índice será denotado I_{f_1, f_2}^W ou $ind(f_1, f_2, K)$.

Observando que para V' tal que $K \subseteq V' \subseteq \bar{V}' \subseteq W$ o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_n(X, X \setminus V) & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W \setminus V) & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & \\ H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus (V \cap V')) & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W \setminus (V \cap V')) & \longrightarrow & H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y)) \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & H_n(X, X \setminus V') & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W \setminus V') & & \end{array}$$

comuta temos que I_{f_1, f_2}^W independe da escolha de V .

O índice acima definido goza das seguintes propriedades:

1. Localização

Se W' é outro aberto de X e $g_1, g_2 : W' \rightarrow Y$ são tais que $g_1 = f_1$ e $g_2 = f_2$ em $W \cap W'$ e $Coin(f_1, f_2) \cap W' = K$ temos que:

$$I_{f_1, f_2}^W = I_{g_1, g_2}^{W'}.$$

Demonstração: Decorre facilmente do diagrama acima. □

2. Aditividade

Sejam $f_1, f_2 : W \rightarrow Y$ com as propriedades acima e suponhamos $W = \bigcup_{i=1}^k W_i$ com $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e que para todo i , W_i é aberto de X .

Então:

$$I_{f_1, f_2}^W = \sum_{i=1}^k I_{f_1, f_2}^{W_i}$$

Demonstração: Em cada W_i tomamos V_i aberto de modo que $K \cap W_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$; dessa forma $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Definindo $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$ basta olharmos para o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(W, W \setminus V) & & \\
 & \nearrow \approx & \parallel & \searrow (f_1, f_2)_* & \\
 H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus V) & \xrightarrow{\approx} & H_n\left(\bigcup_{i=1}^k W_i, \bigcup_{i=1}^k (W_i \setminus V_i)\right) & \longrightarrow & H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y)) \\
 & \searrow \approx & & \uparrow & \nearrow \sum_{i=1}^k (f_1, g_i)_* \\
 & & \sum_{i=1}^k H_n(W_i, W_i \setminus V_i) & &
 \end{array}$$

□

3. Invariância homotópica

Sejam $H_1(x, t)$ e $H_2(x, t)$ homotopias entre (f_1, f_2) e (f'_1, f'_2) , denotando por K_t o conjunto $\text{Coin}(H_1(x, t), H_2(x, t))$ para um t fixado. Se $\bigcup_t K_t$ é compacto em W então:

$$I_{f_1, f_2}^W = I_{f'_1, f'_2}^W.$$

Demonstração: Se V é um aberto tal que $\bigcup_t K_t \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ as aplicações:

$$(H_1(x, t), H_2(x, t)) : (W, W \setminus V) \rightarrow (Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y))$$

induzem o mesmo homomorfismo de grupos para todo t . Assim:

$$(f_1, f_2)_* = (f'_1, f'_2)_* \text{ e } I_{f_1, f_2}^W = I_{f'_1, f'_2}^W.$$

□

4. Multiplicatividade

Sejam f_1, f_2 aplicações entre X_1 e Y_1 , variedades n -dimensionais, conexas, orientáveis e g_1, g_2 aplicações entre X_2 e Y_2 variedades m -dimensionais também orientáveis e conexas. Se W e W' são abertos com $Coin(f_1, f_2) \cap W$ e $Coin(g_1, g_2) \cap W'$ compactos então:

$$I_{f_1 \times g_1, f_2 \times g_2}^{W \times W'} = (I_{f_1, f_2}^W) \cdot (I_{g_1, g_2}^{W'}).$$

Demonstração: Sendo z_1 e z_2 as classes fundamentais de $H_n(X_1; \mathbb{Q})$ e $H_m(X_2; \mathbb{Q})$ respectivamente. Sabemos que $z_1 \times z_2$ é a classe fundamental de $X_1 \times X_2$. Assim temos

$$\begin{aligned} I_{f_1 \times f_2}^{X_1 \times X_2} &= (f_1 \times f_2)_*(z_1 \times z_2) \\ &= [f_{1*}(z_1)] \times [f_{2*}(z_2)] \\ &= (I_{f_1, f_2}^W) \cdot (I_{g_1, g_2}^{W'}). \end{aligned}$$

□

É bastante interessante notar que:

Proposição 1.23 Dadas f_1, f_2 aplicações como as definidas acima. Se $Coin(f_1, f_2) \cap W = \emptyset$ temos $I_{f_1, f_2}^W = 0$.

Demonstração: Se f_1 e f_2 não têm coincidência alguma em W dado um aberto V nas condições requeridas para o cálculo do índice temos que a aplicação

$$(f_1, f_2) : (W, W \setminus V) \rightarrow (Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y))$$

pode ser escrita na forma

$$(f_1, f_2) : (W, W \setminus V) \rightarrow (Y \times Y \setminus \Delta(Y), Y \times Y \setminus \Delta(Y)),$$

o que deixa claro que $(f_1, f_2)_*$ é o homomorfismo nulo. □

Corolário 1.24 Se $I_{f_1, f_2}^W \neq 0$ então f_1 e f_2 têm pelo menos uma coincidência em W . □

Vamos agora dar uma interpretação geométrica para o índice de uma coincidência isolada.

Se definirmos $F : D^n \times D^n \rightarrow D^n$ por:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)$$

Restringindo F temos:

$$F : (D^n \times D^n, D^n \times D^n \setminus \Delta(D^n)) \rightarrow (D^n, D^n \setminus 0).$$

Tomando $j : D^n \rightarrow D^n \times D^n$, $j(w) = (0, w)$ e fazendo $H(x, t) : D^n \times I \rightarrow D^n$ e $G(x, t) : D^n \times D^n \times I \rightarrow D^n \times D^n$ definidas por

$$H(x, t) = \frac{x}{1+t} \quad \text{e} \quad G(x, y, t) = \left(\frac{(1-t)x}{1+t}, \frac{y-tx}{1+t} \right),$$

temos que:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = F \circ j(x) \quad \text{e} \quad H(x, t) \in D^n \setminus 0 \quad \forall x \neq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e

$$G(x, y, 0) = (x, y), \quad G(x, y, 1) = j \circ F(x, y)$$

com

$$G(x, y, t) \in D^n \times D^n \setminus \Delta(D^n) \quad \forall (x, y), \quad x \neq y, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim F é uma equivalência homotópica, sendo j sua inversa homotópica.

Considere W um aberto de X e a uma coincidência isolada de (f_1, f_2) com $\text{Coin}(f_1, f_2) \cap W = \{a\}$. Como X e Y são n -variedades, existem fechados $U \subset Y$ e $\bar{V} \subset X$ (V aberto em X) homeomorfos, por h , $(h(a) = 0)$ e k respectivamente, a D^n de modo que $\bar{V} \subseteq W \cap f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(U)$. Assumindo que h e k preservam orientações definimos $\phi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ pela composição:

$$S^{n-1} \xrightarrow{k^{-1}} \partial \bar{V} \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y \times Y \setminus \Delta(Y) \xrightarrow{h \times h} D^n \times D^n \setminus \Delta(D^n) \xrightarrow{F} D^n \setminus 0 \xrightarrow{\pi} S^{n-1}$$

onde π é a projeção central.

Proposição 1.25 *Dadas f_1, f_2 nas condições acima, se W é um aberto de X com $\text{Coin}(f_1, f_2) \cap W = \{a\}$ então:*

$$I_{f_1, f_2}^W = \deg(\phi).$$

Demonstração: Escolhemos o gerador de $H_{n-1}(S^{n-1})$ como a imagem de z_1 (classe fundamental de X) pela composição:

$$H_n(X) \rightarrow H_n(X, X \setminus V) \xrightarrow[\approx]{(exc)^{-1}} H_n(\bar{V}, \partial\bar{V}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\bar{V}) \xrightarrow{k_*} H_{n-1}(S^{n-1}).$$

Dessa forma, denotando por i a inclusão, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X) \rightarrow H_n(X, X \setminus V) & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W \setminus V) & \xrightarrow{(f_1, f_2)_*} & H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y)) \approx \mathbb{Z} \\ & & \downarrow i_* \approx & & \downarrow i_* \approx \\ & & H_n(\bar{V}, \partial\bar{V}) & \xrightarrow{\quad} & H_n(U \times U, U \times U \setminus \Delta(U)) \\ & & & & \approx \downarrow (h \times h)_* \\ & & & & H_n(D^n \times D^n, D^n \times D^n \setminus \Delta(D^n)) \\ & & & & \approx \downarrow F_* \\ & & & & H_n(D^n, D^n \setminus 0) \\ & & & & \approx \downarrow \partial \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{k_*^{-1}} & H_{n-1}(\partial\bar{V}) & \xrightarrow{[F \circ (h \times h) \circ (f_1, f_2)]_*} & H_{n-1}(D^n \setminus 0) \xrightarrow{\approx} H_{n-1}(S^{n-1}) \\ & & \downarrow \partial & & \\ & & H_{n-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

Observando que o gerador de $H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta(Y))$ é levado no gerador escolhido de $H_{n-1}(S^{n-1})$ verificamos que o inteiro associado à imagem de z_1 na parte superior do diagrama corresponde ao grau da ϕ (parte de baixo). $\square$

De maneira mais simples podemos dizer que, nas condições de 1.25

$$I_{f_1, f_2}^W = \deg((f_2 - f_1)|_{\partial\bar{V}}).$$

1.4 Número de Lefschetz

Um dos primeiros resultados obtido na teoria de ponto fixo utilizando invariantes homológicos foi o que chamamos hoje **Número de Lefschetz** $L(f)$ de uma aplicação f que é definido como:

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f_k).$$

onde $f : M \rightarrow M$, M variedade fechada, $f_k : H_k(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(M, \mathbb{Q})$ é o homomorfismo induzido pela f nos grupos de homologia de M com coeficientes racionais.

Como f_k é invariante homotópico, $L(f)$ está definido nas classes de homotopia das aplicações de M em M . Se M é uma variedade fechada valem:

Existência

Se $L(f) \neq 0$ então f tem pelo menos um ponto fixo.

Normalização

Sejam M uma variedade fechada orientada e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação, tal que $Fix(f) = \bigcup_{k=1}^r F_k$ com F_i aberto e fechado em $Fix(f)$ para todo i . Se $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ é um conjunto de inteiros tal que $ind(f, F_i) = a_i$ então:

$$L(f) = \sum_{i=1}^r a_i.$$

Também decorre facilmente da definição que se $f \simeq id$ temos:

$$L(f) = \chi(M)$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler da variedade.

É preciso ressaltar que a teoria de ponto fixo não se limita às variedades; podemos definir, de maneira análoga, número de Lefschetz e índice para $f : |K| \rightarrow |K|$ com $|K|$ a realização geométrica de um complexo simplicial ou de maneira mais geral ainda $|K|$ um ENR (retrato de vizinhança euclidiana) de modo que as duas propriedades acima continuem válidas.

A generalização para coincidências do número de Lefschetz decorre do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_q(X; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{f_{1*}} & H_q(Y; \mathbb{Q}) \\ \mu \uparrow \approx & & \nu \uparrow \approx \\ H^{n-q}(X; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{f_2^*} & H^{n-q}(Y; \mathbb{Q}) \end{array}$$

Onde μ e ν são os isomorfismos dados pela dualidade de Poincaré.

Tomamos $\theta_q : H_q(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Q})$ como:

$$\theta_q(\alpha) = \mu \circ f_2^* \circ \nu^{-1} \circ f_{1*}(\alpha).$$

Definição 1.26 Dadas $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações com X e Y n -variedades fechadas e orientadas o **Número de Lefschetz**, $L(f_1, f_2)$, é dado por:

$$L(f_1, f_2) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr}(\theta_q).$$

Proposição 1.27 Se definirmos $\theta'_{n-q} : H^{n-q}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n-q}(X; \mathbb{Q})$ fazendo $\theta'_{n-q}(\alpha) = \nu^{-1} \circ f_{1*} \circ \mu \circ f_2^*(\alpha)$, teremos:

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr}(\theta'_q) = (-1)^n L(f_1, f_2).$$

Demonstração: [Vick, pg 184]. □

Teorema 1.28 Dadas $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ com X e Y variedades n -dimensionais, fechadas, conexas e orientáveis, então:

$$I_{f_1, f_2}^X = L(f_1, f_2).$$

Demonstração: [Vick, pg 187]. □

Corolário 1.29 $L(f_1, f_2) \neq 0 \Rightarrow \text{Coin}(f_1, f_2) \neq \emptyset$. □

Definição 1.30 Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre variedades n -dimensionais, orientáveis e compactas: o **Grau de f** , $\text{deg}(f)$, é o inteiro tal que $f_*(z_1) = \text{deg}(f) \cdot z'_1$, onde $z_1 \in H_n(X; \mathbb{Q})$ e $z'_1 \in H_n(Y; \mathbb{Q})$ são as classes fundamentais de X e Y .

Teorema 1.31 Sejam f, X e Y como na definição acima. Se $f' \simeq f$ então:

$$I_{f, f'}^X = (-1)^n \cdot \text{deg}(f) \cdot \chi(Y).$$

Demonstração: Tomamos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ base de $H_q(X; \mathbb{Q})$, $\beta_1, \dots, \beta_k$ base de $H_q(Y; \mathbb{Q})$, $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ base de $H^q(X; \mathbb{Q})$ e $\beta'_1, \dots, \beta'_k$ base de $H^q(Y; \mathbb{Q})$ tais que $\mu(\alpha'_i) = \alpha_i$ e $\nu(\beta'_i) = \beta_i \ \forall i$. Assim:

$$\theta'_q(\beta'_i) = \nu^{-1} \circ f_* \circ \mu \circ f^*(\beta'_i).$$

Então

$$\nu \circ \theta'_q(\beta'_i) = f_* \circ \mu \circ f^*(\beta'_i) = f_*(f^*(\beta'_i) \cap z_1)$$

e, pela naturalidade do produto cap,

$$f_*(f^*(\beta'_i) \cap z_1) = \beta'_i \cap f_*(z_1) = \deg(f) \cdot (\beta'_i \cap z'_1) = \deg(f) \cdot \beta_i.$$

Assim

$$\theta'_q(\beta'_i) = \deg(f) \cdot \nu^{-1}(\beta_i) = \deg(f) \cdot \beta'_i.$$

Dessa forma $\text{tr}(\theta'_q) = \deg(f) \cdot k = \deg(f) \cdot \dim H_q(Y; \mathbb{Q})$.

De onde concluímos que:

$$\sum_{q=0}^n \text{tr}(\theta'_q) = \deg(f) \cdot \chi(Y).$$

Pelo corolário 1.27 e pelo teorema 1.31 temos o desejado. $\square$

1.5 Número de Nielsen para Coincidência

Apesar de só ser conhecida uma definição de índice de coincidência para aplicações entre variedades podemos estender a idéia de classes para coincidências de aplicações entre espaços mais gerais.

Se X e Y são poliedros conexos, X compacto, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ seus recobrimentos universais valem as seguintes proposições:

Proposição 1.32 *Se $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é um levantamento fixado de f existe $\tilde{f}_\pi : \mathfrak{D}(X) \rightarrow \mathfrak{D}(Y)$ endomorfismo tal que:*

$$\tilde{f}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \gamma.$$

Demonstração: [Jiang, pg 25]. $\square$

Proposição 1.33 *Se $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_1'$ são levantamentos de $f_1 : X \rightarrow Y$ e $\tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2'$ são levantamentos de $f_2 : X \rightarrow Y$ então $p(\text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)) = p(\text{Coin}(\tilde{f}_1', \tilde{f}_2'))$ se, e somente se, existirem $\gamma \in \mathfrak{D}(X)$ e $\alpha \in \mathfrak{D}(Y)$ tais que:*

$$\tilde{f}_1' = \alpha \circ \tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2' = \alpha \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}.$$

Demonstração: [Oliveira, pg 25]. □

Repetindo os passos dados para ponto fixo temos:

Definição 1.34 *Sejam $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_1'$ levantamentos de f_1 ; $\tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2'$ levantamentos de f_2 . O par $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ é equivalente à $(\tilde{f}_1', \tilde{f}_2')$ se existem $\gamma \in \mathfrak{D}(X)$ e $\alpha \in \mathfrak{D}(Y)$ tais que:*

$$\tilde{f}_1' = \alpha \circ \tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2' = \alpha \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}.$$

*As classes de equivalência assim determinadas são chamadas **Classes de Levantamento** de f_1 e f_2 .*

Usando a proposição 1.33 podemos passar a noção de classe para as coincidências de f_1 e f_2 .

Definição 1.35 *O conjunto $p(\text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)) \subset \text{Coin}(f_1, f_2)$, determinado pela classe $[(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)]$ é denominado **Classe de Coincidência** de f_1 e f_2 .*

Corolário 1.36 *$\text{Coin}(f_1, f_2)$ é a união disjunta de classes de coincidência.* □

Analogamente ao caso de ponto fixo temos:

Teorema 1.37 *Dois pontos $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ estão na mesma classe de coincidência de $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ se, e somente se, existe uma curva ζ de x_0 até x_1 em X tal que $f_1 \circ \zeta \simeq f_2 \circ \zeta \text{ rel}\{0, 1\}$.*

Demonstração: [Oliveira, pg 30]. □

Corolário 1.38 *Se $\mathbb{F} \subset \text{Coin}(f_1, f_2)$ é uma classe de coincidência então $\mathbb{F}$ é um aberto em $\text{Coin}(f_1, f_2)$*

Demonstração: [Oliveira, pg 30]. □

Corolário 1.39 *$\text{Coin}(f_1, f_2)$ contém somente um número finito de classes não vazias.*

Demonstração: [Oliveira, pg 30]. □

Corolário 1.40 Se $\mathbb{F}$ é uma classe de coincidência de f_1, f_2 então $\mathbb{F}$ é um compacto em X .

Demonstração: [Oliveira, pg 31]. □

Teorema 1.41 Sejam $f_1, f'_1, f_2, f'_2 : X \rightarrow Y$. X e Y poliedros conexos, X compacto. $f_1 \simeq f'_1$ e $f_2 \simeq f'_2$ então:

- (i) As classes de coincidência de f_1, f_2 estão em correspondência biunívoca com as de f'_1, f'_2 .
- (ii) Se X e Y forem variedades n -dimensionais, conexas, sem bordo, orientadas e compactas então a correspondência dada em (i) preserva índice.

Demonstração: (i) [Oliveira, pg 31].

(ii) [Oliveira, Apendice I pp 118:128]. □

É interessante ressaltar que a correspondência obtida nesse teorema é do mesmo tipo da usada no caso de ponto fixo, no sentido de que uma homotopia entre (f_1, f_2) e (f'_1, f'_2) leva cada classe de coincidência continuamente em classes de coincidência dos níveis intermediários.

Definição 1.42 Sejam $(f_1, f_2) : X \rightarrow Y$ aplicações entre variedades n -dimensionais, conexas, orientadas, compactas e sem bordo. Uma classe de coincidência $\mathbb{F}$ é dita uma **Classe Essencial** se $\text{ind}(f_1, f_2, \mathbb{F}) \neq 0$. O número de classes essenciais de f_1, f_2 é o **Número de Nielsen**, $N(f_1, f_2)$, de f_1, f_2 .

Novamente $N(f_1, f_2)$ é um inteiro, finito e não negativo.

Teorema 1.43 Sejam f_1, f_2 como na definição acima; então:

$$N(f_1, f_2) \leq \# \text{Coin}(f_1, f_2).$$

Demonstração: Basta olhar para o corolário 1.24. □

Teorema 1.44 $N(f_1, f_2)$ é um invariante homotópico.

Demonstração: Aplicação imediata do teorema 1.41. □

Capítulo 2

Localização de Pontos Fixos

Nesse capítulo vamos apresentar alguns resultados disponíveis em [Schimer 1] e [Schimer 2] sobre a localização de pontos fixos em poliedros.

Inicialmente vamos estabelecer uma notação básica para alguns elementos usuais:

- se K é um complexo simplicial denotaremos por $|K|$ sua realização geométrica; no caso de um simplexo σ , $|\sigma|$ será seu interior em $|K|$;
- $\sigma(x)$ será o “carrier” do ponto x , ou seja o único simplexo que contém x em seu interior;
- a estrela de um simplexo σ (definida como a união do interior de todos os simplexos que contenham σ como face) será indicada $st(\sigma)$;
- $[x, y]$ será o segmento de reta de x até y ;
- $\mathcal{V}(x)$ será a união de todos os $|\sigma_i|$ tais que $\overline{|\sigma_i|} \cap \sigma(x) \neq \emptyset$;
- para $A \subset |K|$, definimos

$$U(A, \varepsilon) = \{x \in |K| \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

com d uma métrica em $|K|$.

Lema 2.1 *Definindo*

$$N = \{(x, y) \in |K| \times |K| \mid \sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset\}.$$

Então existe uma aplicação $h : |K| \times I \rightarrow |K|$ tal que:

- (i) $h(x, y, 0) = x$; $h(x, y, 1) = y$
- (ii) $h(x, x, t) = x \quad \forall t \in I$
- (iii) $h(x, y, t) \neq x$ se $x \neq y$ e $t \neq 0$.

Demonstração: [Brown. pg 124]. □

Definição 2.2 Uma aplicação $f : U \rightarrow |K|$ com $U \subseteq |K|$ é dita *próxima* se para todo $x \in U$ temos $f(x) \in \mathcal{V}(x)$.

Corolário 2.3 Se $f : |K| \rightarrow |K|$ é uma aplicação próxima então f é uma *deformação*.

Demonstração: Usando o lema 2.1 temos que $f \simeq id$. □

Lema 2.4 Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ dois simplexos de dimensão maior que um tais que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ tem dimensão maior que zero. Se $a \in |\sigma_1|$, $b \in |\sigma_1 \cap \sigma_2|$ e se $f : |K| \rightarrow |K|$ é uma aplicação que satisfaz:

- (1) a é um ponto fixo isolado de f ; $ind(f, a) \neq 0$ e $Fix(f) \cap [a, b] = \{a\}$;
- (2) f é uma aplicação próxima em $[a, b]$.

Então existe $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ tal que:

- (i) f' é homotópica a f e $f' = f$ em $|K| \setminus U([a, b], \varepsilon)$;
- (ii) $Fix(f') \cap \overline{U}([a, b], \varepsilon) = c$ para algum $c \in U(b, \varepsilon) \cap |\sigma_2|$;
- (iii) f' é próxima em $\overline{U}([a, b], \varepsilon)$.

onde $\overline{U}([a, b], \varepsilon)$ é o fecho de $U([a, b], \varepsilon)$.

Demonstração: [Brown. pg 128]. □

Definição 2.5 Um poliedro $|K|$ é dito do **Tipo W** se dados dois simplexos maximais $\sigma, \sigma' \in K$ existe uma sequência $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r = \sigma'$ de simplexos maximais de K tal que $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ tem dimensão maior que zero, $i = 1, \dots, r-1$.

Lema 2.6 *Se $|K|$ é um poliedro do tipo W então existe uma aplicação próxima $f : |K| \rightarrow |K|$ tal que:*

- (i) $\chi(|K|) = 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) = \emptyset$.
- (ii) $\chi(|K|) \neq 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) = \{a\}$ com $\sigma(a)$ um simplexo maximal.

Demonstração: Na demonstração do Teorema 1 em [Brown, pg 143] constrói-se uma aplicação, lá denominada f' , que satisfaz as condições exigidas. $\square$

Lema 2.7 *Sejam σ_1, σ_2 simplexos maximais de um poliedro $|K|$ do tipo W . Se $f : |K| \rightarrow |K|$ é uma aplicação próxima com $a \in |\sigma_1|$ seu único ponto fixo. Então existe $f' : |K| \rightarrow |K|$ uma aplicação próxima com $\text{fix}(f') = a'$ com $a' \in |\sigma_2|$.*

Demonstração: Obtemos o resultado pela aplicação repetida do lema 2.4. $\square$

Lema 2.8 *Seja $|K|$ um poliedro do tipo W com $\chi(|K|) \neq 0$. Se $a \in |K|$ é um ponto qualquer então existe uma aplicação próxima $f : |K| \rightarrow |K|$ com $\text{Fix}(f) = \{a\}$.*

Demonstração: Existe σ um simplexo maximal de K com $a \in \bar{\sigma}$. Usando os lemas 2.6 e 2.7 obtemos uma aplicação próxima $f_1 : |K| \rightarrow |K|$ com exatamente um ponto fixo b com $b \in |\sigma|$. Tomamos $\eta > 0$ de modo que $\bar{U}([a, b], \eta) \subset |st(\sigma(a))|$ usando o lema 2.1 obtemos um $t^* = t^*(x)$, $0 < t^* \leq 1$, tal que para todo ponto $x \in \partial U([a, b], \frac{\eta}{2})$ temos

$$h(x, f_1(x), t) \subset |st(\sigma(a))| \text{ se } 0 \leq t \leq t^*(x).$$

Assim existe um $\varepsilon(x) > 0$ tal que

$$h(x', f_1(x'), t) \subset |st(\sigma(a))| \quad \forall x' \in \partial U([a, b], \frac{\eta}{2}) \cap U(x, \varepsilon(x)) \text{ e } 0 \leq t \leq t^*(x).$$

Criamos assim uma cobertura aberta do compacto $\partial U([a, b], \frac{\eta}{2})$ a saber:

$$\{U(x, \varepsilon(x)) \mid x \in \partial U([a, b], \frac{\eta}{2})\}.$$

Tomando

$$\{U(x_i, \varepsilon(x_i)) \mid x_i \in \partial U([a, b], \frac{\eta}{2}), i = 1, \dots, r\}$$

uma subcobertura finita e fazendo

$$t_0 = \min\{t^*(x_1), \dots, t^*(x_r)\},$$

temos que, se $x \in \partial U([a, b], \frac{\eta}{2})$ então $h(x, f_1(x), t) \subset |st(\sigma(x))|$ para todo $0 \leq t \leq t_0$.

Denotando por $x_{\frac{\eta}{2}}$ e x_η os pontos de intersecção da semi-reta $a\vec{x}$ com $U([a, b], \frac{\eta}{2})$ e $\partial U([a, b], \eta)$ respectivamente, definimos:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in |K| \setminus \overline{U}([a, b], \eta) \\ h(x, f_1(x), (1 - t_0)\lambda + t_0) & \text{se } x = (1 - \lambda)x_{\frac{\eta}{2}} + \lambda x_\eta \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ (1 - \lambda)a + \lambda h(x_{\frac{\eta}{2}}, f_1(x_{\frac{\eta}{2}}), t_0) & \text{se } x = (1 - \lambda)a + \lambda x_{\frac{\eta}{2}} \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ a & \text{se } x = a. \end{cases}$$

f satisfaz as condições desejadas. $\square$

Teorema 2.9 *Seja $|K|$ um poliedro do tipo W. Se $A \subset |K|$ é um fechado, com $A \neq \emptyset$ se $\chi(|K|) \neq 0$ então existe uma aplicação $f : |K| \rightarrow |K|$ com $Fix(f) = A$.*

Demonstração: Tomamos δ o diâmetro de $|K|$ e fazemos $t(x) = \frac{d(x, A)}{\delta}$

Caso 1 $\chi(|K|) = 0$

Se $A = \emptyset$ o lema 2.6 nos diz que existe $f : |K| \rightarrow |K|$ próxima livre de ponto fixo.

Se $A \neq \emptyset$ tomamos $g : |K| \rightarrow |K|$ próxima, livre de ponto fixo e definimos $f(x) = h(x, g(x), t(x))$, onde h é dada pelo lema 2.1. Assim $Fix(f) = A$.

Caso 2 $\chi(|K|) \neq 0$

Tomamos $a \in A$, pelo lema 2.8, existe $g : |K| \rightarrow |K|$ próxima com $Fix(g) = \{a\}$. Definimos então $f(x) = h(x, g(x), t(x))$, novamente h é dada pelo lema 2.1. Assim $Fix(f) = A$. $\square$

Definição 2.10 *Dizemos que um espaço topológico X tem a Propriedade da Invariância Completa se qualquer $A \subset X$, fechado, pode ser realizado com conjunto de pontos fixos de uma aplicação $f : X \rightarrow X$.*

Corolário 2.11 *Se X é uma variedade n -dimensional ($n \geq 2$) triangularizável então X tem a propriedade da invariância completa.*

Demonstração: Claramente, nessas condições X é um poliedro do tipo W. $\square$

Nosso objetivo agora consiste em conseguir resultados de localização para aplicações que não são próximas. Para tanto vamos enunciar alguns lemas técnicos apresentados em [Brown].

Lema 2.12 *Sejam σ_1, σ_2 simplexos maximais de K , de dimensão maior ou igual a dois, tais que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ tem dimensão pelo menos um. Se $f : |K| \rightarrow |K|$ é uma aplicação com $a \in \text{Fix}(f)$ um ponto fixo isolado e se $b \in |\sigma_1 \cap \sigma_2|$ é tal que $\text{Fix}(f) \cap [a, b] = \{a\}$ então existe $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ tais que:*

- (i) $f' \simeq f$ e $f' = f$ em $|K| \setminus U([a, b], \varepsilon)$;
- (ii) $\text{Fix}(f') \cap \overline{U}([a, b], \varepsilon) = \{c\}$ para algum $c \in |\sigma_2|$;
- (iii) Se $z \in \text{Fix}(f)$, $z \notin U([a, b], \varepsilon)$ e z está na mesma classe de ponto fixo da f que a então z está na mesma classe de ponto fixo da f' que c .

Demonstração: [Brown, pg 136]. □

Introduziremos mais algumas convenções para facilitar a linguagem.

Se $|K|$ é um poliedro conexo e σ um simplexo de K com $a \in |\sigma|$, $b \in \overline{|\sigma|}$ e $\overline{U}(a, \varepsilon) \subset |\sigma|$, definimos uma retração $R : \overline{U}([a, b], \varepsilon) \rightarrow [a, b]$ da seguinte forma:

Se $b \in |\sigma|$, tomamos $R(x) = x' \in [a, b]$ com $d(x, x') = d(x, [a, b])$.

Se $b \in |\partial\sigma|$, dividimos em 3 situações:

- (i) se $x \in [a, b]$ fazemos $R(x) = x$;
- (ii) se $x \notin |\sigma|$, $R(x) = b$;
- (iii) se $x \in |\sigma| \setminus [a, b]$ tomamos $y \in |\sigma|$ tal que, no plano determinado por x, a e b a reta definida por x e y seja paralela a reta definida por a e b . Escolhemos z um ponto da reta $\overset{\leftrightarrow}{ab}$ de modo que x, y, b, z seja um paralelograma. Definimos $R(x) = z$ se $z \in [a, b]$ e $R(x) = a$ se $z \notin [a, b]$.

Para $0 < \eta < \varepsilon$ na situação colocada acima definimos

$$W([a, b], \eta) = \{x \in \overline{U}([a, b], \varepsilon) \mid d(x, R(x)) < \eta\}.$$

Observamos que se $b \in |\sigma|$ temos que $W([a, b], \eta) = U([a, b], \eta)$.

Para $M \subset [a, b]$ definimos

$$W([a, b], \eta, M) = \{x \in W([a, b], \eta) \mid R(x) \in M\}.$$

Denotaremos por $\overline{W}([a, b], \eta)$ o fecho de $W([a, b], \eta)$ e de forma semelhante o fecho de $W([a, b], \eta, M)$.

Além dessas definições convencionamos que, se $x \in [a, b]$, $0 \leq t_x \leq 1$, é o único número, tal que $x = (1 - t_x)a + t_x b$. Analogamente dado $t \in I$, x_t é o único $x \in [a, b]$ tal que $x_t = (1 - t)a + tb$.

Lema 2.13 *Seja σ um simplexo de K de dimensão maior que um com $a \in |\sigma|$ e $b \in \overline{|\sigma|}$. Se existem aplicações $f : |K| \rightarrow |K|$, $H : I \times I \rightarrow |K|$ e $M, N \subset [a, b]$ fechados tais que:*

- (1) $H(t, 0) = f(x_t) \quad \forall t \in I$;
- (2) $H(t_x, u) \neq x \quad \forall x \in N, u \in I$;
- (3) $H(t_x, u) \in \mathcal{V}(x) \quad \forall x \in M, u \in I$.

Então existe uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ e um $\eta > 0$ tais que:

- (i) $f' \simeq f$ e $f' = f$ em $|K| \setminus W([a, b], \eta)$;
- (ii) $\text{Fix}(f') \cap \overline{W}([a, b], \eta, N) = \emptyset$;
- (iii) f' é próxima em $\overline{W}([a, b], \eta, M)$;
- (iv) $f'(x) = H(t_x, 1) \quad \forall x \in [a, b]$.

Demonstração: [Brown, pg 132]. □

Lema 2.14 *Sejam $x \in |K|$ com $\sigma(x)$ maximal, uma aplicação $f : |K| \rightarrow |K|$ e $\eta > 0$. Se $U(x, \eta) \subset |\sigma(x)|$, $\text{Fix}(f) \cap \partial U(x, \eta) = \emptyset$ e f é próxima em $\overline{U}(x, \eta)$ então existe $f' : |K| \rightarrow |K|$ tal que:*

- (i) $f' \simeq f$ e $f' = f$ em $|K| \setminus U(x, \eta)$;
- (ii) $\text{Fix}(f') \cap \overline{U}(x, \eta) = \{x\}$;
- (iii) f' é próxima em $\overline{U}(x, \eta)$.

Demonstração: [Brown, pg 126]. □

O lema a seguir é de fundamental importância pois realiza a mudança de posição de um ponto fixo isolado para qualquer outro ponto dado. Sua demonstração é, em grande parte, baseada na demonstração do lema 2.12 feita em [Brown].

Lema 2.15 *Seja $|K|$ um poliedro do tipo W. Se $f : |K| \rightarrow |K|$ é uma aplicação com $Fix(f) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ e se $\sigma(a_1)$ é um simplexo maximal então, dado $c \in |K|$, $c \notin Fix(f)$, existe $f' \simeq f$ com:*

- (i) $Fix(f') = \{c, a_2, \dots, a_r\}$;
- (ii) $f' = f$ em uma vizinhança de $\{a_2, \dots, a_r\}$;
- (iii) $ind(f', c) = ind(f, a_1)$.

Demonstração: Como $|K|$ é do tipo W, tomamos $a_1 \in |\sigma|$ e $c \in |\overline{\sigma'}|$ simplexos maximais. Assim existe uma sequência $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r = \sigma'$ de simplexos maximais com dimensão de $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}|$ maior que zero, $i = 1, \dots, r-1$.

Usando o lema 2.12 repetidas vezes, obtemos $g_1 \simeq f$ com $Fix(g_1) = \{b, a_2, \dots, a_r\}$ para algum $b \in |\sigma'|$. Podemos obter g_1 de modo que $[b, c] \cap Fix(f) = \emptyset$ e $g_1 = f$ em uma vizinhança de $\{a_2, \dots, a_r\}$.

Tomamos $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}\overline{U}(b, 2\delta) &\subseteq |\sigma'|, \\ \overline{U}(c, \delta) &\subseteq |st(\sigma(c))|, \\ Fix(g_1) \cap \overline{U}([b, c], \delta) &= \{b\}, \\ f(\overline{U}(c, \delta)) \cap \overline{U}(c, \delta) &= \emptyset,\end{aligned}$$

e

$$f(\overline{U}(b, 2\delta)) \subseteq |\overline{\sigma'}|.$$

Escolhemos também $p, p', q \in [b, c]$ tais que:

$$d(p, b) = \frac{\delta}{2}, \quad d(p', b) = 2\delta, \quad d(q, c) = \delta.$$

Sejam:

- (i) $\alpha(x)$ o ponto de intersecção da semi-reta $xf(\vec{x})$ com $\partial\sigma'$;
- (ii) $\beta(x)$ o ponto de intersecção da semi-reta $qf(\vec{x})$ com $\partial\sigma'$;
- (iii) sendo $\mathcal{A}$ um arco simples, contido em $\partial\sigma'$, de um vértice v de σ' até $\alpha(p)$;
 $h : [b, p] \rightarrow \mathcal{A}$ um homeomorfismo com $h(b) = v$ e $h(p) = \alpha(p)$.

Assim podemos construir $g_2 : [b, c] \rightarrow |K|$ definida por:

$$g_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \notin |\sigma'| \\ h(x) & \text{se } x \in [b, p] \\ \alpha(x) & \text{se } x \in [p, q] \text{ e } f(x) \in |\sigma'| \\ \beta(x) & \text{se } x \in [q, c] \text{ e } f(x) \in |\sigma'|. \end{cases}$$

Como g_2 é contínua, temos que $g_2^{-1}(U(c, \delta))$ é aberto em $[b, c]$. Portanto

$$g_2^{-1}(U(c, \delta)) = \bigcup (b_i, c_i),$$

onde cada $(b_i, c_i) \subset [b, c]$ é um intervalo aberto.

Como $[b, c]$ é compacto $g_2^{-1}(c)$ está contido em uma união finita, $\bigcup_{i=1}^m (b_i, c_i)$, desses intervalos.

Denotamos por G o conjunto $U(c, \delta) \setminus |\sigma'|$ observamos que, como $g_2([b, c]) \cap |\sigma'| = \emptyset$, $g_2((b_j, c_j)) \subset G$ para todo $j = 1, \dots, m$ e, além disso, $g_2(b_j), g_2(c_j) \in \partial G$.

$\overline{G}$ é contrátil, então podemos tomar $C_j : [b_j, c_j] \rightarrow \partial G$ homotópica à g_2 com $C_j(x) \neq b$ para todo $x \in [b_j, c_j]$ e $C_j(b_j) = g_2(b_j)$, $C_j(c_j) = g_2(c_j)$.

Definimos então $g_3 : [b, c] \rightarrow |K|$ por

$$g_3(x) = \begin{cases} g_2(x) & \text{se } x \notin \bigcup_{i=1}^m [b_i, c_i] \\ C_j(x) & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^m [b_i, c_i] \end{cases}.$$

Definindo as homotopias $H_2 : [b, c] \times I \rightarrow |K|$, $H_1 : [b, c] \times I \rightarrow |K|$ e $H_3 : [b, c] \times I \rightarrow |K|$ tais que:

$$H_2(x, 0) = g_2(x) \text{ e } H_2(x, 1) = g_3(x),$$

$$H_1(x, t) = (1 - t)g_1(x) + tg_2(x),$$

$$H_3(x, t) = g_3(x_{(1-t)t_x}).$$

onde $x = (1 - t_x)b + t_x c$, podemos construir $H : [b, c] \times I \rightarrow |K|$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ H_2(x, t) & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ H_3(x, t) & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Verificamos que:

- (1) $H(x, 0) = g_1(x) \quad \forall x \in [b, c]$;
- (2) $H(x, t) \neq x \quad \forall x \in [p, c], t \in I$;
- (3) $H(x, t) \in \mathcal{V}(x) \quad \forall x \in [b, p'], t \in I$.

Usando o lema 2.13 para $M = [b, p']$ e $N = [p, c]$, obtemos $g_4 : |K| \rightarrow |K|$ e $\eta > 0$ tais que:

- (i) $g_4 \simeq g_1$ e $g_4 = g_1$ em $|K| \setminus W([b, c], \eta)$;
- (ii) $Fix(g_4) \cap \overline{W}([b, c], \eta, [p, c]) = \emptyset$;
- (iii) g_4 é próxima em $\overline{W}([b, c], \eta, [b, p'])$;
- (iv) $g_4(x) = H(x, 1) = |v| \quad \forall x \in [b, c]$.

Além disso, na demonstração do lema 2.13, podemos obter η de modo que

$$W([b, c], \eta) \setminus W([b, c], \eta, [p, c]) \subset U(b, \delta),$$

g_4 seja próxima em $W([b, c], \eta)$ e $Fix(g_4) \cap \partial U(b, \eta) = \emptyset$.

Aplicando, agora, o lema 2.14 obtemos g_5 tal que:

- (i) $g_5 \simeq g_4$ e $g_5 = g_4$ em $|K| \setminus U(b, \eta)$;
- (ii) $Fix(g_5) \cap U(b, \eta) = \{b\}$;
- (iii) g_5 é próxima em $U(b, \eta)$.

Finalmente, basta definir $f' : |K| \rightarrow |K|$ por

$$f'(x) = \begin{cases} g_5(x) & \text{se } x \notin U([b, c], \eta) \\ h(x, g_5(x), (1 - t_0)\lambda + t_0) & \text{se } x = (1 - \lambda)x_{\frac{\eta}{2}} + \lambda x_{\eta} \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ (1 - \lambda)c + \lambda h(x_{\frac{\eta}{2}}, g_5(x_{\frac{\eta}{2}}), t_0) & \text{se } x = (1 - \lambda)c + \lambda x_{\frac{\eta}{2}} \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ c & \text{se } x = c \end{cases}$$

como no lema 2.8. para obtermos a aplicação desejada. $\square$

O resultado a seguir pode ser entendido como a não-essencialidade dos pontos fixos com índice zero. ou seja, podemos “eliminá-los”.

Lema 2.16 *Seja $|K|$ um poliedro conexo, σ um simplexo maximal de K , $f : |K| \rightarrow |K|$ uma aplicação. $x \in |\sigma|$ um ponto fixo isolado de $f \in U \subset |\sigma|$ uma vizinhança de x tal que $\text{Fix}(f) \cap \overline{U} = \{x\}$. Se $\text{ind}(f, x) = 0$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ que satisfaz:*

- (i) $f = f'$ em $|K| \setminus U$;
- (ii) $d(f, f') < \varepsilon$;
- (iii) $\text{Fix}(f) \cap \overline{U} = \emptyset$.

Demonstração: [Brown, pg 123]. □

Lema 2.17 *Seja $f : |K| \rightarrow |K|$ uma aplicação com $a \in \text{Fix}(f)$, $\sigma(a)$ maximal e $\text{Fix}(f) \cap |\sigma(a)| = \{a\}$. Se $i_1, i_2, \dots, i_m$ é uma sequência de inteiro tais que $\sum_{k=1}^m i_k = \text{ind}(f, a)$ então existe uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ tal que:*

- (i) $f' \simeq f$ e $f' = f$ em $|K| \setminus |\sigma(a)|$;
- (ii) $\text{Fix}(f') \cap |\sigma(a)| = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$;
- (iii) $\text{ind}(f', a_k) = i_k$.

Ao contrário do lema anterior nosso objetivo aqui é “criar” novos pontos fixos de modo que satisfaçam condições sobre seus índices. Note-se que esse resultado, somado ao lema 2.15, serão nossas maiores ferramentas nos teoremas de localização.

Demonstração: Seja p a dimensão de $\sigma(a)$.

Escolhemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\overline{U}(a, 5\varepsilon) \subset |\sigma(a)|$. Tomamos $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $f(\overline{U}(a, \delta)) \subset \overline{U}(a, \varepsilon)$.

Denotamos por B o disco $\overline{U}(a, \delta)$. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_m$ pontos de B tais que $d(a, a_k)$ é constante e exista $\rho > 0$ com $\delta - d(a, a_k) < \rho < d(a, a_k)$ e $\overline{U}(a_k, \rho) \cap \overline{U}(a_j, \rho) = \emptyset$ se $k \neq j$.

Fazendo $A_k = B \cap \overline{U}(a_k, \rho)$, temos que A_k é homeomorfo ao disco D^p e que $A_k \cap \partial B \neq \emptyset$ (mais especificamente homeomorfo a D^{p-1}).

Tomamos $h_k : (\mathbb{R}^n, \sigma(a), a_k) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, 0)$ uma isometria que leva a_k na origem e o p -subespaço que contém $\sigma(a)$ em $\mathbb{R}^p$.

Definimos $d'_k : \partial A_k \cap \partial B \rightarrow \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ por

$$d'_k(y) = h_k(y) - h_k(f(y)).$$

Observando que $\|d'_k(y)\| \leq \|h_k(y)\| + \|h_k \circ f(y)\| \leq \rho + \varepsilon + \delta \leq 3\varepsilon$, podemos escrever

$$d'_k : \partial A_k \cap \partial B \rightarrow \overline{U}(0, 3\varepsilon) \setminus \{0\}.$$

Como $\partial A_k \cap \partial B$ é contrátil e o par $(\partial A_k, \partial A_k \cap \partial B)$ tem a propriedade da extensão homotópica temos que, escolhidos geradores apropriados α e μ de $H_{p-1}(\partial A_k)$ e $H_{p-1}(\overline{U}(0, 3\varepsilon) \setminus \{0\})$, existe $d_k : \partial A_k \rightarrow \overline{U}(0, 3\varepsilon) \setminus \{0\}$, extensão de d'_k tal que

$$d_{k*}(\alpha) = i_k \cdot \mu.$$

Assim podemos definir:

$$g'_k(y) = h_k^{-1}(h_k(y) - d_k(y)) \quad \forall y \in \partial A_k.$$

Como $\|h_k \circ g'_k(y)\| \leq \|h_k(y)\| + \|d_k(y)\| \leq \delta + 3\varepsilon < 4\varepsilon$ e $d(a, g'_k(y)) \leq d(a, a_k) + d(a_k, g'_k(y)) \leq \delta + 4\varepsilon < 5\varepsilon$ temos que

$$g'_k : \partial A_k \rightarrow |\sigma(a)|.$$

Como A_k é homeomorfo a D^p , extendemos g'_k para $g_k : A_k \rightarrow |\sigma(a)|$ por linearidade (usando a projeção com centro em a_k) de modo que $Fix(g_k) = \{a_k\}$.

É importante salientar que g_k coincide com f em $\partial B \cap A_k$, além disso $ind(g_k, a_k) = i_k$.

Definimos então $g' : \bigcup_{k=1}^m A_k \cup \partial B \rightarrow |\sigma(a)|$ dada por

$$g'(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{se } x \in A_k \\ f(x) & \text{se } x \in \partial B. \end{cases}$$

Novamente vamos estender g' em B por linearidade pois $B \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k$ é homeomorfo a D^p e g' está definida em $\partial(B \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k)$.

Obtemos assim $g : B \rightarrow |\sigma(a)|$ com $g = g'$ em $\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) \cup \partial B$ e $Fix(g) = \{a, a_1, \dots, a_m\}$.

Tomando $f_1 : |K| \rightarrow |K|$ satisfazendo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in |K| \setminus B \\ g(x) & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

temos que f_1 é contínua. $f_1 \simeq f$, $f_1 = f$ em $|K| \setminus B$. $Fix(f_1) \cap |\sigma(a)| = \{a, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $ind(f_1, a_k) = i_k$.

Sabendo que $ind(f, |K|) = ind(f_1, |K|)$ (pois $f_1 \simeq f$) e, usando a propriedade aditiva do índice, temos que

$$ind(f_1, a) + \sum_{k=1}^m ind(f_1, a_k) = ind(f, a).$$

Portanto

$$ind(f_1, a) = 0.$$

Tomamos $0 < \delta' < \varepsilon' < d(a, a_k)$ tais que $\overline{U}(a, 2\varepsilon') \subset |\sigma(a)|$ e $f_1(\overline{U}(a, 2\delta')) \subset \overline{U}(a, 2\varepsilon')$ e, usando o lema 2.16, obtemos uma aplicação $f' : |K| \rightarrow |K|$ tal que

- (i) $f' = f_1$ em $|K| \setminus \overline{U}(a, 2\delta')$;
- (ii) $d(f_1, f') < \varepsilon'$ (portanto $f' \simeq f_1$);
- (iii) $Fix(f') \cap \overline{U}(a, \delta') = \emptyset$.

f' é a aplicação desejada. □

A partir de agora apresentaremos alguns resultados. O primeiro deles é uma aplicação quase imediata dos lemas que construímos até aqui.

Teorema 2.18 *Sejam c_k pontos em um poliedro $|K|$ do tipo W e inteiros i_k com $k = 1, \dots, m$. Existe uma deformação $f : |K| \rightarrow |K|$ com $Fix(f) = \{c_1, \dots, c_k\}$ e $ind(f, c_k) = i_k$ se, e somente se, $\sum_{k=1}^m i_k = \chi(|K|)$.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) A necessidade de $\sum_{k=1}^m i_k = \chi(|K|)$ decorre do fato de que se $f \simeq id$ então $L(f) = \chi(|K|)$.

($\Rightarrow$) Usando o teorema 2.9 para A um ponto $a \neq a_k$, $1 \leq k \leq m$, com $\sigma(a)$ maximal, obtemos $f_1 : |K| \rightarrow |K|$ uma deformação tal que $Fix(f_1) = \{a\}$ e portanto $ind(f_1, a) = \chi(|K|)$.

Se preciso, subdividimos $|K|$ para que $\overline{\sigma(a)} \cap \{c_1, \dots, c_m\} = \emptyset$. Usando o lema 2.17 obtemos $f_2 : |K| \rightarrow |K|$ com $Fix(f_2) = \{a_1, \dots, a_m\} \subset |\sigma(a)|$ e $ind(f_2, a_k) = i_k$.

Usando m vezes o lema 2.15 conseguimos a aplicação $f : |K| \rightarrow |K|$ com $f \simeq id$, $Fix(f) = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $ind(f, c_k) = i_k$. $\square$

Para estender esse resultado no caso de f não ser uma deformação, vamos precisar de um teorema que, sob determinadas condições, garanta a realização de $N(f)$ como o número exato de pontos fixos de alguma $f' \simeq f$.

Definição 2.19 Um poliedro $|K|$ é do tipo **S** se a dimensão de K é maior ou igual a três e se para todo vértice v de $|K|$, $\partial st(v)$ é conexo.

Teorema 2.20 Seja $|K|$ um poliedro do tipo **S**, se $f : |K| \rightarrow |K|$ é contínua então existe $f' \simeq f$ tal que $\#Fix(f') = N(f)$ e $\sigma(x)$ é maximal para todo $x \in Fix(f')$.

Demonstração: [Brown, pg 140]. $\square$

Agora podemos enunciar um teorema de localização mais geral.

Teorema 2.21 Sejam $|K|$ um poliedro do tipo **S**, uma aplicação $f : |K| \rightarrow |K|$ com classes de ponto fixo essenciais $\mathbb{F}_l$, $c_1, \dots, c_m$ pontos de $|K|$ e $i_1, \dots, i_m$ inteiros. Existe $f' \simeq f$ com $Fix(f') = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $ind(f', c_k) = i_k$ se, e somente se, c_k pode ser reindexado c_j com $1 \leq j = j(k) \leq m$ de modo que: ou $N(f) = 0$ e $\sum_{j=1}^m i_j = 0$ ou existe uma sequência de inteiros $m_0, \dots, m_{N(f)}$ com $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_{N(f)} = m$ que satisfaz $\sum_{j=m_{l-1}+1}^{m_l} i_j = ind(f, \mathbb{F}_l)$ para $l = 1, \dots, N(f)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Se $N(f) > 0$ usamos o teorema 2.20 e obtemos $f_1 : |K| \rightarrow |K|$, $f_1 \simeq f$ com exatamente $N(f)$ pontos fixos.

Subdividindo $|K|$, se necessário, podemos usar o lema 2.15 para construir $f_2 \simeq f_1$ com $Fix(f_2) = \{a_1, \dots, a_{N(f)}\}$, $\sigma(a_l) \cap \{a_1, \dots, a_{N(f)}, c_1, \dots, c_m\} = \{a_l\}$ e $ind(f_2, a_l) = ind(f, \mathbb{F}_l)$.

Com o lema 2.17 “transformamos” cada ponto fixo a_l de f_2 em $m_l - m_{l-1}$ pontos fixos de uma aplicação $f_3 : |K| \rightarrow |K|$ de modo que $Fix(f_3) = \{b_1, \dots, b_m\}$ e $ind(f_3, b_j) = i_j$.

Usando o lema 2.15 novamente “levamos” cada b_j no ponto fixo c_j de uma f' que é a aplicação desejada.

Se $N(f) = 0$ pelo teorema 2.20 existe $f_1 : |K| \rightarrow |K|$ com $Fix(f_1) = \emptyset$. Se conseguirmos $f_2 : |K| \rightarrow |K|$, $f_2 \simeq f_1$ com $Fix(f_2) = \{a\}$, $\sigma(a)$ maximal encerramos a demonstração repetindo o argumento usado na demonstração do teorema 2.18.

Para tanto, subdividindo $|K|$ se preciso, escolhemos $a \in |K|$ com $\sigma(a)$ maximal de modo que $\sigma(a) \cap \{c_1, \dots, c_m\} = \emptyset$ e exista $\eta > 0$ tal que

$$\overline{U}(a, \eta) \subset \sigma(a),$$

$$f_1(\overline{U}(a, \eta)) \subset st(\sigma(f_1(a)))$$

e

$$\overline{U}(a, \eta) \cap st(\sigma(f_1(a))) = \emptyset.$$

Tomamos $\gamma : I \rightarrow |K|$ uma curva de a até $f_1(a)$ com $d(a, \gamma(t)) \neq \frac{\eta}{2}$ se $t \neq 0$.

Sendo $\zeta : \overline{U}(a, \eta) \setminus \{a\} \rightarrow \partial \overline{U}(a, \eta)$ e $\zeta_{\frac{1}{2}} : \overline{U}(a, \frac{\eta}{2}) \setminus \{a\} \rightarrow \partial \overline{U}(a, \frac{\eta}{2})$ as projeções com centro em a , definimos $f_2 : |K| \rightarrow |K|$ por:

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in |K| \setminus \overline{U}(a, \eta) \\ t \cdot f_1(\zeta(x)) + (1-t) \cdot f_1(a) & \text{se } x = t\zeta(x) + (1-t)\zeta_{\frac{1}{2}}(x) \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) & \text{se } x = t\zeta_{\frac{1}{2}}(x) + (1-t)a \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos que $f_2 \simeq f_1$ e $Fix(f_2) = \{a\}$ com $\sigma(a)$ maximal. $\square$

O último resultados que apresentaremos neste capítulo é o análogo do teorema 2.21 para a esfera S^2 , que não é um poliedro do tipo S mas, por ser simplesmente conexa, só admite uma classe de ponto fixo.

Teorema 2.22 *Se $c_1, \dots, c_m$ são pontos em S^2 e $i_1, \dots, i_m$ são inteiros então existe uma aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$ com $Fix(f) = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $ind(f, c_k) = i_k$.*

Demonstração: Vamos identificar S^2 com a suspensão do círculo $\|z\| = 1$ no plano complexo, dessa forma se $x \in S^2$ temos $x = (z, s)$ com $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ e $s \in [-1, 1]$.

Tomamos $d = -1 + \sum_{k=1}^m i_k$ e $\lambda : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda(s) = \begin{cases} \frac{1+s}{2} & \text{se } -1 \leq s \leq 0 \\ \frac{1-s}{2} & \text{se } 0 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

e definimos $f_0 : S^2 \rightarrow S^2$ com

$$f_0((z, s)) = (z^d, s + \lambda(s)).$$

Assim f_0 tem grau d e $Fix(f_0) = \{(z, -1), (z, 1)\}$.

Escolhemos $a = (z_0, 0)$ de modo que $a \notin \{c_1, \dots, c_m\}$ e $z_0^d \neq -z_0$.

Denotamos por $\gamma(t)$ $0 \leq t \leq 1$, o único arco de S^2 que começa em $(z, 1)$, termina em $(z, -1)$ e passa por a .

Tomamos $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

- (1) $\|z - z_0\| \leq \delta \Rightarrow z^d \neq -z_0$;
- (2) $(z, -\frac{1}{3}) \in \overline{U}(\gamma, \varepsilon) \Rightarrow \|z - z_0\| < \delta$;
- (3) $(z_0, 0) \notin \overline{U}(\gamma, \varepsilon)$.

Assim

$$f_0(x) \neq -a \quad \forall x \in \overline{U}(\gamma, \varepsilon).$$

Seja $y(x) : \overline{U}(\gamma, \varepsilon) \rightarrow \partial \overline{U}(\gamma, \varepsilon)$ a projeção com centro em a .

Temos que se $x \in \overline{U}(\gamma, \varepsilon) \setminus \{a\}$ então $x = (1 - t)a + ty(x)$ para algum t com $0 < t \leq 1$.

Definimos $f_1 : S^2 \rightarrow S^2$ por

$$f_1(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se } x \in S^2 \setminus \overline{U}(\gamma, \varepsilon) \\ (1 - t)a + tf_0(y(x)) & \text{se } x \in \overline{U}(\gamma, \varepsilon), \quad x = (1 - t)a + ty(x) \\ a & \text{se } x = a \end{cases}$$

e verificamos que:

- (i) $f_1 \simeq f_0$
- (ii) $Fix(f_1) = \{a\}$
- (iii) $ind(f_1, a) = \sum_{k=1}^m i_k$ pois $ind(f_1, a) = ind(f_1, S^2) = L(f_1) = 1 + d$.

Em resumo obtemos uma aplicação de S^2 em S^2 com exatamente um ponto fixo com índice igual a soma dos inteiros da sequência dada. Como S^2 é do tipo W podemos usar os lemas 2.17 e 2.15. $\square$

Capítulo 3

Localização de Coincidências

Nesse capítulo vamos apresentar alguns resultados de localização de coincidências semelhantes aos obtidos no capítulo 2 para pontos fixos.

Usando a notação:

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_j = 0 \text{ } j = 2, \dots, n\}$$

e

$$V^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, I) \leq 1\},$$

podemos enunciar:

Lema 3.1 *Existe um homeomorfismo $\zeta : V^n \rightarrow V^n$ tal que $\zeta|_{\partial V^n} = id$, $\zeta \simeq id$ e $\zeta(0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)$.*

Demonstração: Para cada $x \in V^n$, $x \neq 0$ existe um único $x_{\partial} \in \partial V^n$ tal que $x = t_x x_{\partial}$, $0 < t_x \leq 1$ (x_{∂} o ponto de intersecção de ∂V^n com a semi-reta de início na origem e que contém x).

Definimos $\zeta : V^n \rightarrow V^n$ por

$$\zeta(x) = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) & \text{se } x = 0 \\ t_x x_{\partial} + (1 - t_x)(1, 0, \dots, 0) & \text{cc.} \end{cases}$$

Claramente $\zeta|_{\partial V^n} = id$ e $\zeta \simeq id$ (basta tomar $H(x, t) = (1 - t)x + t\zeta(x)$).

□

Os próximos dois lemas reproduzem, para coincidências, os principais lemas do capítulo anterior.

Lema 3.2 *Dados X , variedade n -dimensional ($n \geq 2$), conexa, orientável e sem bordo, Y um poliedro e aplicações $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ com $\text{Coin}(f_1, f_2) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ e $p \in X$ tal que $p \notin \text{Coin}(f_1, f_2)$. Então existe um par (g_1, g_2) homotópico a (f_1, f_2) tal que $\text{Coin}(g_1, g_2) = \{p, a_2, \dots, a_r\}$; além disso $g_i = f_i$, $i = 1, 2$, em uma vizinhança de $\{a_2, \dots, a_r\}$.*

Demonstração: Tomamos $C \subset X$ uma curva simples de p até a_1 . É fácil ver que podemos tomar C de modo que exista uma vizinhança U de C tal que $\overline{U} \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = \{a_1\}$ e $\overline{U}$ é homeomorfo, por φ , a V^n ; com $\varphi(p) = 0$, $\varphi(a_1) = (1, 0, \dots, 0)$ e $\varphi(C) = I$.

Definimos:

$$f'_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{se } x \in X \setminus U \\ f_i(\varphi^{-1}(\zeta(\varphi(x)))) & \text{se } x \in U, \end{cases}$$

$i = 1, 2$ com ζ dada pelo lema 3.1.

Temos então que $f'_i \simeq f_i$ pois $\zeta \simeq id$, $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \{p, a_1, a_2, \dots, a_r\}$ e $f'_i|_{X \setminus \overline{U}} = f_i|_{X \setminus \overline{U}}$. □

Lema 3.3 *Seja $(f_1, f_2) : X \rightarrow Y$ um par de aplicações entre variedades n -dimensionais $n \geq 2$, conexas. Se a é uma coincidência isolada de f_1 e f_2 com $\text{ind}(f_1, f_2, a) = k$ e $i_1, \dots, i_r$ é uma sequência de inteiros com $\sum_{j=1}^r i_j = k$ então existem $U \subset X$ e um par (f'_1, f'_2) homotópico a (f_1, f_2) tais que:*

(i) $\text{Coin}(f_1, f_2) \cap \overline{U} = \{a\}$:

(ii) $f'_j|_{X \setminus U} = f_j|_{X \setminus U} \quad j = 1, 2$:

(iii) $Coin(f'_1, f'_2) \cap U = \{a_1, \dots, a_r\} \quad \text{e} \quad ind(f'_1, f'_2, a_j) = i_j$.

Demonstração: Tomamos $U \subset X$ aberto, com $Coin(f_1, f_2) \cap U = \{a\}$ e $\bar{U}$ homeomorfo, por φ , a $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $\varphi(a) = 0$, de modo que $f_1(\bar{U}) \cup f_2(\bar{U}) \subset V$ com V aberto de Y , $\bar{V}$ homeomorfo, por ψ à B^n , $\psi(f_1(a)) = 0$. Além disso tomamos U e V com $\psi(f_1(\bar{U}) \cup f_2(\bar{U})) \subset B_{\frac{1}{2}}^n$. $B_{\frac{1}{2}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$ e $\|\psi(f_1(x)) - \psi(f_2(x))\| < \frac{1}{2}$.

Identificando os pontos de $\bar{U}$ e de $\bar{V}$ com os de B^n , trataremos f_1 e f_2 como aplicações de B^n em B^n . Dessa maneira definimos $h : B^n \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n$ por

$$h(x) = f_2(x) - f_1(x).$$

Como $h(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial B^n$ temos $h|_{\partial B^n} : S^n \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$.

Pela proposição 1.25 sabemos que $ind(f_1, f_2, a) = deg(h|_{\partial B^n})$.

Tomamos $a_1, \dots, a_r \in B^n$ tais que exista $\rho > 0$ com $\|a_j\| > 1 - \rho$ e $\|a_j\| > \rho$, $\forall a_j$ e $B_\rho(a_j) \cap B_\rho(a_k) = \emptyset$ se $i \neq k$, com $B_\rho(a_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a_j\| \leq \rho\}$.

Fazendo $A_j = B^n \cap B_\rho(a_j)$, temos $h|_{\partial B^n}$ definida em $\partial A_j \cap \partial B^n$ com imagem em $B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$.

Observando que A_j é homeomorfo à B^n temos que $(\partial A_j, \partial A_j \cap \partial B^n)$ tem a propriedade da extensão homotópica em relação à $B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$. Como $\partial A_j \cap \partial B^n$ é contrátil existe $h_j : \partial A_j \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$ extensão de $h|_{\partial A_j \cap \partial B^n}$ com $deg(h_j) = i_j$.

Definimos h_j no interior de A_j por linearidade, usando o homeomorfismo entre A_j e B^n , de modo que $h_j(x) = 0 \Leftrightarrow x = a_j$, pois $h_j(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial A_j$.

Desse modo podemos definir $h' : \partial B \cup A_j \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n$ por:

$$h'(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in \partial B \\ h_j(x) & \text{se } x \in A_j. \end{cases}$$

Definimos h' no interior de $B^n \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j$ de modo análogo ao que fizemos para h_j .

Temos que: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, a_1, a_2, \dots, a_r\}$.

Definindo $f_1'' : B^n \rightarrow B^n$ por:

$$f_1''(x) = f_2(x) - h'(x).$$

temos que $f_1'' \simeq f_2 \text{ rel } \partial B^n$ (basta tomar $H(x, t) = t f_1(x) + (1 - t) f_1''$).

Assim,

$$\sum_{j=1}^r \text{ind}(f_1'', f_2, a_j) + \text{ind}(f_1'', f_2, a) = \text{ind}(f_1, f_2, a) = k.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^r \text{ind}(f_1'', f_2, a_j) = \sum_{j=1}^r i_j = k.$$

Portanto $\text{ind}(f_1'', f_2, a) = 0$.

Assim sendo, observando que $\partial(B^n \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j)$ é homeomorfo à B^n , temos

$$\deg(h'|_{\partial(B \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j)}) = 0.$$

Identificando $B \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j$ com B^n , e restringindo h' de modo conveniente obtemos $h' : S^{n-1} \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$ homotópica a constante.

Para cada $x \in \overline{(B^n \setminus B_{\frac{1}{2}}^n)}$ temos $x = (1 - t_x)x_1 + t_x x_{\frac{1}{2}}$ onde $0 \leq t_x \leq 1$, $x_1 \in \partial B^n$ e $x_{\frac{1}{2}} \in \partial B_{\frac{1}{2}}^n$ ($x_1, x_{\frac{1}{2}}$ imagens de x pela projeção central).

Definimos $h'' : B^n \rightarrow B^n$ por:

$$h''(x) = \begin{cases} H(x_1, t_x) & \text{se } x \in \overline{(B^n \setminus B_{\frac{1}{2}}^n)} \\ H(x_1, 1) & \text{se } x \in B_{\frac{1}{2}}^n \end{cases},$$

onde $H(x, t) : S^{n-1} \times I \rightarrow B_{\frac{1}{2}}^n \setminus \{0\}$ é a homotopia entre h' e a aplicação constante. Assim sendo, usando novamente a identificação de $B \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j$ com B^n defino h'' no seu interior com $h''(x) \neq 0, \forall x$.

Fazendo

$$f_1'''(x) = f_2(x) - h''(x),$$

temos que $f_1''' \simeq f_1 \text{ rel } \partial B^n$ e $\text{Coin}(f_1''', f_2) = \{a_1, \dots, a_r\}$. Além disso $\text{ind}(f_1''', f_2, a_j) = i_j$.

Usando mais uma vez a identificação de $\bar{U}$ com B^n construímos $f_1' : X \rightarrow Y$ satisfazendo

$$f_1'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus U \\ f_1'''(x) & \text{se } x \in U. \end{cases}$$

O par (f_1', f_2) satisfaz as condições exigidas. $\square$

Observamos que na demonstração acima obtemos um resultado básico da teoria que poderia ser demonstrado, sem maiores dificuldades, de maneira direta.

Corolário 3.4 *Se $a \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ é uma coincidência isolada e $\text{ind}(f_1, f_2, a) = 0$ então existem $(f_1', f_2') \simeq (f_1, f_2)$ e U aberto com $a \in U$ tais que:*

- (i) $\text{Coin}(f_1, f_2) \cap \bar{U} = \{a\}$;
- (ii) $f_i' = f_i$ em $x \setminus U, \quad i = 1, 2$;
- (iii) $\text{Coin}(f_1', f_2') \cap U = \emptyset$.

$\square$

Lema 3.5 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre variedades n -dimensionais ($n \geq 2$) conexas, compactas, orientáveis, triangularizáveis e sem bordo. Dado $\varepsilon > 0$ existe $f' : X \rightarrow Y$ uma aplicação ε -homotópica a f com, no máximo, um ponto de coincidência com f .*

Demonstração: [Schirer 3, pg 32]. $\square$

Teorema 3.6 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre duas variedades n -dimensionais ($n \geq 2$) conexas, compactas, orientáveis, triangularizáveis e sem bordo. Se $A \neq \emptyset$ é um fechado em X então existe um par (f_1, f_2) com $f_1 \simeq f \simeq f_2$ tal que $\text{Coin}(f_1, f_2) = A$.*

Demonstração: Escolhemos ε e, pelo lema 3.5, existe $f' : X \rightarrow Y$, ε -homotópica à f com no máximo um ponto de coincidência com f .

Se $Coin(f, f') = \emptyset$ escolhemos $a \in X$ e um $\eta > 0$ com $f(\overline{U}(a, \eta)) \cap f'(\overline{U}(a, \eta)) = \emptyset$ e de modo que exista $p \in Y \setminus (f(\overline{U}(a, \eta)) \cup f'(\overline{U}(a, \eta)))$ com $(f(\overline{U}(a, \eta)) \cup f'(\overline{U}(a, \eta))) \subset U(p, \varepsilon)$.

Tomamos $\gamma, \gamma' : I \rightarrow U(p, \varepsilon)$ curvas em Y com $\gamma(0) = f(a)$, $\gamma'(0) = f'(a)$, $\gamma(1) = \gamma'(1) = p$ e $\gamma(t) = \gamma'(t')$ somente se $t = t' = 1$.

Sendo $\zeta : \overline{U}(a, \eta) \setminus \{a\} \rightarrow \partial \overline{U}(a, \eta)$ e $\zeta_{\frac{1}{2}} : \overline{U}(a, \frac{\eta}{2}) \setminus \{a\} \rightarrow \partial \overline{U}(a, \frac{\eta}{2})$ as projeções com centro em a . Definimos $f'_1, f'_2 : X \rightarrow Y$ tais que

$$f'_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus \overline{U}(a, \eta) \\ t \cdot f(\zeta(x)) + (1-t) \cdot f(a) & \text{se } x = t\zeta(x) + (1-t)\zeta_{\frac{1}{2}}(x) \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) & \text{se } x = t\zeta_{\frac{1}{2}}(x) + (1-t)a \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$f'_2(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in X \setminus \overline{U}(a, \eta) \\ t \cdot f'(\zeta(x)) + (1-t) \cdot f'(a) & \text{se } x = t\zeta(x) + (1-t)\zeta_{\frac{1}{2}}(x) \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) & \text{se } x = t\zeta_{\frac{1}{2}}(x) + (1-t)a \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se $Coin(f, f') \neq \emptyset$ tomamos $a = Coin(f, f')$ e fazemos $f'_1 = f$ e $f'_2 = f'$.

Temos assim que f'_1 é ε -homotópica à f'_2 e $Coin(f'_1, f'_2) = \{a\}$.

Escolhemos $a_0 \in A$ e, usando o lema 3.2 obtemos f''_1 e f''_2 com $Coin(f''_1, f''_2) = \{a_0\}$. Da demonstração de 3.2 temos que f''_1 é ε -homotópica à f''_2 .

Se $|K|$ e $|L|$ são triangularizações de X e Y respectivamente. Podemos escolher $\varepsilon < mesh(L)$. Dessa forma: f''_1 ε -homotópica à f''_2 implica que $\overline{\sigma(f''_1(x))} \cap \overline{\sigma(f''_2(x))} \neq \emptyset$ para todo x em X .

Fazendo δ igual ao diâmetro de $|K|$ e $t(x) = \frac{d(x, A)}{\delta}$ definimos $f : |K| \rightarrow |L|$ dada por

$$f_1(x) = h(f''_1(x), f''_2(x), t(x))$$

onde h é dada pelo lema 2.1.

Denotando f''_2 por f_2 temos que

$$Coin(f_1, f_2) = A \text{ e } f_1 \simeq f \simeq f_2.$$

□

Teorema 3.7 *Sejam X e Y variedades n -dimensionais ($n \geq 3$), orientáveis, compactas, conexas, sem bordo e triangularizáveis. Se f_1, f_2 são aplicações de X em Y então existem aplicações $f'_1, f'_2 : X \rightarrow Y$ homotópicas à f_1 e f_2 respectivamente com exatamente $N(f_1, f_2)$ coincidências.*

Demonstração: [Schirer 3, pg 36]. □

Teorema 3.8 *Sejam X e Y variedades n -dimensionais ($n \geq 3$), orientáveis, compactas, conexas, sem bordo e triangularizáveis; $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações com classes de coincidência essenciais $\mathbb{F}_l$, $c_1, \dots, c_m$ pontos de X e $i_1, \dots, i_m$ inteiros. Existe $(f'_1, f'_2) \simeq (f_1, f_2)$ com $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $\text{ind}(f'_1, f'_2, c_k) = i_k$ se, e somente se, c_k pode ser reindexado c_j com $1 \leq j = j(k) \leq m$ de modo que: ou $N(f_1, f_2) = 0$ e $\sum_{j=1}^m i_j = 0$ ou existe uma sequência de inteiros $m_0, \dots, m_{N(f_1, f_2)}$ com $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_{N(f_1, f_2)} = m$ que satisfaz $\sum_{j=m_{l-1}+1}^{m_l} i_j = \text{ind}(f_1, f_2, \mathbb{F}_l)$ para $l = 1, \dots, N(f_1, f_2)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Usando o teorema 3.7 obtemos $(g_1, g_2) \simeq (f_1, f_2)$ com exatamente $N(f_1, f_2)$ pontos de coincidência.

Se $N(f_1, f_2) = 0$ o par (g_1, g_2) é livre de coincidências. Usando a mesma construção feita na demonstração do teorema 3.6 obtemos $(g'_1, g'_2) \simeq (g_1, g_2)$ com $\text{Coin}(g'_1, g'_2) = \{a\}$ um ponto de X .

Através dos lemas 3.3 e 3.2 obtemos o par desejado.

Se $N(f_1, f_2) > 0$ temos que $\text{Coin}(g_1, g_2) = \{a_1, \dots, a_{N(f_1, f_2)}\}$; usando o lema 3.3 “transformamos” cada a_l em $m_l - m_{l-1}$ pontos de coincidência de um par $(g'_1, g'_2) \simeq (g_1, g_2)$ (isso é feito de modo que os índices desses pontos sejam os i_j desejados). Novamente com o lema 3.2 “colocamos” cada $b_j \in \text{Coin}(g'_1, g'_2)$ em c_j , obtendo, assim, o par (f'_1, f'_2) . □

O problema de localização de coincidências apresenta uma “face” nova quando comparado ao de localização de pontos fixos. Com que liberdade podemos localizar a imagem das coincidências de um par de aplicações?

Nesse sentido apresentamos alguns resultados.

Lema 3.9 *Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ um par de aplicações entre variedades n -dimensionais ($n \geq 2$), conexas e sem bordo. Se a é uma coincidência isolada de f_1 e f_2 então,*

dado $p \in Y$. existe $(f'_1, f'_2) \simeq (f_1, f_2)$ com $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \text{Coin}(f_1, f_2)$, $f'_i = f_i$ em uma vizinhança de $\text{Coin}(f_1, f_2) \setminus \{a\}$ e $f'_1(a) = f'_2(a) = p$.

Demonstração: Claramente existe em Y um aberto W com $\overline{W}$ homeomorfo, por θ , à B^n que contenha $f_1(a)$ e p (podemos obter tal aberto tomando uma vizinhança suficientemente pequena de uma curva simples de a até p).

Tomamos U uma vizinhança de a homeomorfa, por φ , à B^n ($\varphi(a) = 0$), tal que $f_1(\overline{U}) \cup f_2(\overline{U}) \subset W$.

Usando a projeção central em B^n obtemos que para cada $x \in U$ existe um único $x_\partial \in \partial U$ tal que $\varphi(x) = t_x \varphi(x_\partial)$ com $0 < t_x \leq 1$.

Definimos:

$$f'_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{se } x \in X \setminus U \\ \theta^{-1}(t_x \theta(f_i(x_\partial)) + (1 - t_x) \theta(p)) & \text{se } x \in U \end{cases}$$

$i = 1, 2$.

Claramente f'_i é homotópica à f_i basta tomarmos

$$H(x, t) = \theta^{-1}(t \cdot \theta(f_i(x)) + (1 - t) \cdot \theta(f'_i(x))).$$

Como $f_1(x) \neq f_2(x) \forall x \in \partial(U)$ temos que $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \text{Coin}(f_1, f_2)$ e $f'_1(a) = f'_2(a) = p$. $\square$

É interessante observar que não usamos a hipótese de W ser aberto; bastava que as imagens de U por f_1 e f_2 estivessem contidas em um conjunto W' homeomorfo à B^n com $f_i(a)$ e p contidos em W' . Dessa forma a demonstração acima pode ser feita em casos mais gerais, por exemplo, se X e Y forem complexos simpliciais de mesma dimensão com $a, f_i(a), p$ contidos em simplexes maximais e Y for n -dimensionalmente conexo.

Teorema 3.10 *Sejam X e Y variedades n -dimensionais ($n \geq 2$), conexas e sem bordo. Se $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ é um par de aplicações com $\text{Coin}(f_1, f_2) = \{a_1, \dots, a_m\}$ então, dados $p_1, \dots, p_m \in Y$ existem aplicações $f'_1, f'_2 : X \rightarrow Y$ tais que:*

- (i) $(f_1, f_2) \simeq (f'_1, f'_2)$;
- (ii) $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \text{Coin}(f_1, f_2)$;
- (iii) $f'_1(a_j) = f'_2(a_j) = p_j$ para $j = 1, \dots, m$.

Demonstração: Basta usarmos repetidas vezes o lema 3.9. $\square$

Usando o teorema acima podemos “completar” o teorema 3.8 de modo que a imagem de cada uma das coincidências c_j seja qualquer ponto dado em Y .

Lema 3.11 *Sejam $|X|$ e $|Y|$ poliedros convexos de dimensão $n \geq 2$. $|Y|$ compacto. Se $f : |X| \rightarrow |Y|$ é uma aplicação então existe $f' \simeq f$ sobrejetora.*

Demonstração: Tomamos $a \in |X|$ com $\sigma(a)$ de dimensão n , de modo que exista $\varepsilon > 0$ com $\overline{U}(a, \varepsilon) \subset |\sigma(a)|$.

Seja $\gamma : I \rightarrow |Y|$ uma curva de $f(a)$ até a' , com $\sigma(a')$ de dimensão n e $\eta > 0$ tal que $\overline{U}(a', \eta) \subset |\sigma(a')|$.

Definimos $f_1 : |X| \rightarrow |Y|$ por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in |X| \setminus U(a, \varepsilon) \\ f((1-t)x_\varepsilon + ta) & \text{se } x = (1-t)x_\varepsilon + tx_\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) & \text{se } x = (1-t)x_\varepsilon + ta, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

onde x_ε e $x_{\frac{\varepsilon}{2}}$ são, respectivamente, a imagem da projeção com centro a em $\partial U(a, \varepsilon)$ e $\partial U(a, \frac{\varepsilon}{2})$ (essa notação aparecerá outras vezes).

Dessa forma $f_1(a) = a'$.

Existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $U(a, \varepsilon_1) \subset f^{-1}(U(a', \frac{\eta}{2}))$.

Sendo φ um homeomorfismo entre $\overline{U}(a, \frac{\varepsilon_1}{2})$ e $\overline{U}(a', \frac{\eta}{2})$, definimos $f_2 : |X| \rightarrow |Y|$ satisfazendo

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in |X| \setminus U(a, \varepsilon_1) \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \overline{U}(a, \frac{\varepsilon_1}{2}) \\ (1-t)f_1(x) + t\varphi(x) & \text{se } x = (1-t)x_{\varepsilon_1} + tx_{\frac{\varepsilon_1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são todos os simplexos maximais de Y , escolhemos $b_1, \dots, b_m$ em $|Y|$ de modo que $b_i \in |\sigma_i|$. Tomamos $a_1, \dots, a_m \in U(a', \frac{\eta}{2})$ e $\rho > 0$ satisfazendo:

- (i) $U(a_i, \rho) \subset U(a', \frac{\eta}{2})$;
- (ii) $\overline{U}(a_i, \rho) \cap \overline{U}(a_j, \rho) = \emptyset$ se $i \neq j$,

e γ_i , curvas de a_i até b_i .

Sendo ψ_i uma aplicação sobrejetora de $\overline{U}(a_i, \frac{\rho}{4})$ em $|\sigma_i|$, com $\psi_i(a_i) = b_i$, usando a projeção com centro em a_i , definimos $\alpha_i : \overline{U}(a_i, \rho) \rightarrow Y$ por

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} (1-t)x_\rho + ta_i & \text{se } x = (1-t)x_\rho + tx_{\frac{3\rho}{4}} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_i(t) & \text{se } x = (1-t)x_{\frac{3\rho}{4}} + tx_{\frac{\rho}{2}} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ (1-t)b_i + t\psi(x) & \text{se } x = (1-t)x_{\frac{\rho}{2}} + tx_{\frac{\rho}{4}} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \psi_i(x) & \text{se } x \in \overline{U}(a_i, \frac{\rho}{4}). \end{cases}$$

Definimos então $f' : |X| \rightarrow |Y|$ por

$$f'(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{se } f_2(x) \in |Y| \bigcup_{i=1}^m U(a_i, \rho) \\ \alpha_i(f_2(x)) & \text{se } f_2(x) \in \bigcup_{i=1}^m U(a_i, \rho). \end{cases}$$

Temos que f' é sobrejetora e, por construção, $f' \simeq f$. □

Teorema 3.12 *Sejam $|X|$ e $|Y|$ poliedros conexos de dimensão $n \geq 2$, com Y compacto do tipo W . $A \subset |Y|$ um fechado, $A \neq \emptyset$ se $\chi(|Y|) \neq 0$. Se $f : |X| \rightarrow |Y|$ é uma aplicação então existe um par $f', f'' : |X| \rightarrow |Y|$, $f' \simeq f \simeq f''$ com $f'(Coin(f', f'')) = A$.*

Demonstração: Usando o lema 3.11 obtemos $f' : |X| \rightarrow |Y|$ sobrejetora, $f' \simeq f$. Pelo teorema 2.9 existe $h : |Y| \rightarrow |Y|$ com $Fix(h) = A$ e, da demonstração de 2.9, temos que $h \simeq id$. Assim definimos $f'' : |X| \rightarrow |Y|$ com

$$f''(x) = h \circ f'(x).$$

Dessa forma $f'(Coin(f', f'')) = A$ e $f' \simeq f \simeq f''$. □

Bibliografia

- [Brown] Brown, Robert F. *The Lefschetz Fixed Point Theorem*. Scott, Foresman and Company; 1971.
- [Dold 1] Dold, Albrecht. *Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts*. *Topology* 4 (1965), 1-8.
- [Dold 2] Dold, Albrecht. *Lectures Notes on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1980.
- [Jiang] Jiang, Boju. *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*. Contemporary Mathematics, vol 14; 1982.
- [Kiang] Kiang, Tsai-han. *The Theory of Fixed Points Classes*. Springer-Verlag; 1980.
- [Oliveira] Oliveira, Edson de. *Teoria de Nielsen para Coincidência e Algumas Aplicações*. Tese de Doutorado, USP, 1987.
- [Schimer 1] Schimer, Helga. *Fixed point sets of polyhedra*. *Pacific. J. Math.* 52 (1974), 221-226.
- [Schimer 2] Schimer, Helga. *Mappings of polyhedra with prescribed fixed points and fixed point indices*. *Pacific. J. Math.* 63 (1976), 521-530.
- [Schimer 3] Schimer, Helga. *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten*. *J. Reine und Angew. Mathematik* 194 (1955), 21-39.
- [Vick] Vick, James W. *Homology Theory An Introduction to Algebraic Topology*. Academic Press; 1973.