Folheações
Transversalmente Projetivas

Maxwell Mariano de Barros

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de doutor em matemática

Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida

São Paulo, junho de 1998.

Folheações

Transversalmente Projetivas

Maxwell Mariano de Barros

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida (Presidente)	-IME-USP
Prof. Dr. José Antonio Verderesi	-IME-USP
Prof. Dr. Alcebiades Rigas	-IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. José Luis Arraut Vergara	-ICMSC-USP
Profa. Dra. Suely Druck	-UFF

São Paulo, 01 de junho de 1998.

À minha mãe Dilza.

Para Lucas, Maíra, Mazé e Gabriel.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Francisco Rui T. Almeida por ter sugerido o estudo das folheações transversalmente projetivas e pela orientação, cujas discussões tornaram possível este trabalho; ao Prof. José Antonio Verderesi pelas sugestões e esclarecimentos; aos professores Antonio Carlos Marques e José Adonai Seixas, ambos da UFAL, pelos incentivos desde a minha graduação; ao meu irmão Marcus Antonio e minhas amigas Cinthia J. Cruz e Sonia Marcon por me aturarem durante um bom período de tempo.

Agradeço também aos meus colegas de curso, aos professores e funcionários do IME/USP pela atenção e o apoio recebido.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Introdução	iii
1 Estruturas projetivas	1
1.1 G -estruturas de ordem k	1
1.2 Estruturas projetivas	6
1.3 Conexão projetiva normal	10
2 Estruturas projetivas transversas	16
2.1 Folheações; Fatos básicos	16
2.2 Referenciais transversos de ordem k	20

2.3	Os fibrados transversos $B_T^1(M, \mathcal{F})$ e $B_T^2(M, \mathcal{F})$	21
2.4	G -estruturas transversas de segunda ordem	29
3	Folheações transversalmente projetivas	32
3.1	Definição e exemplos	32
3.2	Conexões projetivas transversas	36
3.3	Paralelismo transverso canônico	42
3.4	Transformações projetivas infinitesimais transversas	44
3.5	Folheações transversalmente projetivas rasas e transversalmente pro- jetivas completas	46
3.5.1	Folheações transversalmente projetivas rasas	46
3.5.2	Folheações transversalmente projetivas completas	52

Resumo

Estudamos as folheações transversalmente projetivas, denotadas por $(M, \mathcal{F})$, sobre o ponto de vista da geometria transversa. Este tipo de folheação é interessante pois inclui as folheações afins e riemannianas. Um modelo para tais folheações é dado pela projeção $P^q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p \rightarrow P^q(\mathbb{R})$, onde $P^q(\mathbb{R})$ é o espaço projetivo real de dimensão q .

Introduzimos a álgebra de Lie $\wp(M, \mathcal{F})$ das transformações projetivas infinitesimais transversas, a qual possui dimensão $\leq q^2 + 2q$, onde $q = \text{codim}(M, \mathcal{F})$ e conseguimos alguns resultados globais. Provamos por exemplo, que se $\dim \wp(M, \mathcal{F}) = q^2 + 2q$ então, $(M, \mathcal{F})$ é rasa; que se $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva completa, toda transformação projetiva infinitesimal transversa é completa e que se a folheação levantada no fibrado dos 2-referenciais transversos de $(M, \mathcal{F})$ não possui funções básicas diferentes das constantes, então todas as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são densas em M .

Abstract

We study the transversely projective foliations, denoted by $(M, \mathcal{F})$, from the point of view of the transverse geometry. This type of foliation is interesting because it includes the affine and the riemannian foliations. A model for these foliations is given by the projection $P^q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p \rightarrow P^q(\mathbb{R})$, where $P^q(\mathbb{R})$ is the real projective space of dimension q .

We introduce the Lie algebra $\wp(M, \mathcal{F})$ of the transverse infinitesimal projective transformations which has dimension $\leq q^2 + 2q$, where $q = \text{codim}(M, \mathcal{F})$ and we obtain global results. We prove, for example, that if $\dim \wp(M, \mathcal{F}) = q^2 + 2q$, then $(M, \mathcal{F})$ is flat; if $(M, \mathcal{F})$ is a transversely projective complete foliation, every transverse infinitesimal projective transformation is complete and if the lifted foliation in the bundle of transverse 2-frames of $(M, \mathcal{F})$ has no basic functions, other than the constants, then the leaves of $(M, \mathcal{F})$ are dense in M .

Introdução

Podemos pensar em folheação de uma variedade diferenciável M como sendo uma partição de M por subvariedades conexas, topologicamente paralelas, todas de mesma dimensão, chamadas de folhas da folheação. O estudo formal da teoria das variedades folheadas teve seu início na década de 40 com a publicação de um trabalho de C. Ehresmann e G. Reeb [12]. A partir de então vários matemáticos passaram a se dedicar ao estudo dessas estruturas, concentrando-se principalmente em fatos topológicos, tentando encontrar invariantes e uma possível classificação de casos particulares.

Em 1959, B. Reinhart [29] introduziu o conceito de folheações riemannianas, como sendo aquelas em que a variedade folheada admite uma “bundle-like” métrica, ou seja, uma métrica riemanniana g , para a qual as folhas da folheação mantêm, localmente, uma distância constante.

Após a publicação, na década de 60, dos trabalhos de C. Ehresmann [10] e A. Haefliger [16], algumas propriedades das variedades folheadas puderam ser vistas como “propriedades transversas”, isto é, propriedades dadas pela existência nas variedades quocientes locais, de uma estrutura suplementar, a qual é invariante ao longo das folhas da folheação. O estudo dessas propriedades passou a ser conhecido como

a “geometria transversa” das folheações. Assim por exemplo, uma folheação será riemanniana se as variedades quocientes locais possuem uma estrutura riemanniana transversa.

Em 1982, P. Molino publica um artigo [27], no qual a geometria transversa é usada para obter resultados sobre folheações riemannianas em variedades compactas. Ele mostra, entre outras propriedades, que uma estrutura riemanniana transversa determina um “paralelismo transverso canônico” no fibrado dos referenciais ortogonais transversos, o que de certa maneira, reduz o estudo dessas folheações ao estudo das folheações transversalmente paralelizáveis, o qual por sua vez pode ser feito utilizando-se do estudo das folheações de Lie, estas últimas descritas por E. Fedida [14].

O método utilizado e os resultados obtidos por P. Molino fez com que vários outros matemáticos viessem a publicar trabalhos sobre folheações riemannianas, como por exemplo, Y. Carrière [8], E. Ghys [15], e V. Seigiescu [30], entre outros.

O objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo das folheações transversalmente projetivas, via geometria transversa. Embora tal estudo não seja um fato inédito, a maioria dos trabalhos sobre folheações transversalmente projetivas abordam, principalmente, fatos topológicos. Podemos citar por exemplo o trabalho de G. Meigniez [24], onde o mesmo estuda folheações transversalmente projetivas irredutíveis, de codimensão $q = 1$ em variedades compactas. No seu trabalho, G. Meigniez considera o espaço de todas as folheações transversalmente projetivas irredutíveis, munido da topologia fina e mostra que o subconjunto constituído por folheações completas é aberto.

Em [5], R. Brooks e W. Goldman também estudam as folheações transversalmente projetivas de codimensão $q = 1$ em variedades fechadas e obtém resultados sobre o invariante de Godbillon-Vey e em [28], S. Nishikawa e H. Sato obtém resultado envolvendo a classe de Pontrjagin real das folheações transversalmente projetivas.

Podemos ainda citar os trabalhos de T. Inaba e S. Matsumoto ([17] e [18]) onde são abordados alguns aspectos qualitativos das folheações transversalmente projetivas, como por exemplo, a relação entre o grupo fundamental da variedade e a existência de uma folha excepcional¹.

O estudo da geometria diferencial projetiva teve, provavelmente, sua origem na década de 20, com a publicação de um trabalho de H. Weyl [32], onde é feito um estudo sobre conexões afins, sem torção, projetivamente relacionadas², seguido de trabalhos de outros matemáticos, como por exemplo, L.P. Eisenhart [13] e O. Veblen [31]. Em 1924, E. Cartan [7] introduz a noção de conexão projetiva, em termos de uma família de 1-formas, associadas a um fibrado principal.

Nosso trabalho está baseado na teoria das G -estruturas de S.S. Chern [9] e na teoria dos k -referenciais de C. Ehresmann, onde uma conexão projetiva passa a ser vista como uma conexão de Cartan (ver [12]). Utilizamos estas teorias para construir o fibrado dos k -referenciais transversos sobre uma variedade folheada $(M, \mathcal{F})$ e quan-

¹Uma folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ é dita excepcional se, para toda seção transversal T de $\mathcal{F}$, com $T \cap F \neq \emptyset$, o conjunto $\overline{T \cap F}$ é um conjunto perfeito (i. e., sem pontos isolados) com interior vazio.

²Duas conexões afins, sem torção, dadas com relação a um sistema de coordenadas locais, pelos símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i e $\bar{\Gamma}_{jk}^i$, são ditas projetivamente relacionadas, se existe uma 1-forma ϕ , com componentes ϕ^i , tal que $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \phi^k + \delta_k^i \phi^j$.

do $k = 2$, definimos as estruturas transversas de segunda ordem e em particular as estruturas projetivas transversas. Uma estrutura transversa de segunda ordem está munida de uma folheação $\mathcal{F}_T^2$, de mesma dimensão de $\mathcal{F}$, cujas folhas são recobrimentos das folhas de $\mathcal{F}$. Uma folheação $(M, \mathcal{F})$ será dita transversalmente projetiva se admite uma estrutura projetiva transversa E_T^2 .

Os resultados obtidos neste trabalho, são essencialmente os seguintes: seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q munida de uma estrutura projetiva transversa E_T^2 :

- I. Se $(M, \mathcal{F})$ é rasa, então $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é uma $pgl(q, \mathbb{R})$ -folheação de Lie;
- II. Se $(M, \mathcal{F})$ é completa, então $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é transversalmente completa;
- III. Se $(M, \mathcal{F})$ é completa, então todas as folhas de $\mathcal{F}$ possuem o mesmo recobrimento;
- IV. Seja $\wp(M, \mathcal{F})$ a álgebra de Lie das transformações projetivas infinitesimais transversas. Se $\dim \wp(M, \mathcal{F}) = q^2 + 2q$ (=codimensão de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$) então $(M, \mathcal{F})$ é rasa.
- V. Se $(M, \mathcal{F})$ é completa e possui uma folha compacta com grupo fundamental finito, então todas as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são compactas com grupo fundamental finito;
- VI. Se $(M, \mathcal{F})$ é completa, então todas as transformações projetivas infinitesimais transversas são completas;
- VII. Se $(M, \mathcal{F})$ é completa e se as únicas funções básicas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são as funções constantes, então as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são todas densas em M .

Para atingirmos nossos objetivos, dividimos este trabalho em três capítulos. No primeiro capítulo se encontram as definições de referenciais de ordem k , estruturas projetivas, conexões de Cartan e transformações projetivas infinitesimais. A maioria dos resultados citados nesse capítulo, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em [19].

No segundo capítulo é onde se encontra a construção do fibrado dos k -referenciais transversos $B_T^k(M, \mathcal{F})$ sobre as variedades folheadas $(M, \mathcal{F})$. Mostramos que o fibrado dos 2-referenciais transversos está munido de uma folheação “levantada” $\mathcal{F}_T^2$, de mesma dimensão de $\mathcal{F}$, cujas folhas recobrem as folhas de $\mathcal{F}$ (ver proposição 2.3.4). Nesse capítulo definimos estruturas transversas de segunda ordem e em particular as estruturas projetivas transversas.

No último capítulo, nos utilizamos da formalização obtida anteriormente para estudar as folheações transversalmente projetivas. Isto nos permitiu definir “conexão” de Cartan transversa adaptada a estrutura projetiva transversa E_T^2 , ou seja, uma 1-forma $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$, com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R})$ de $PGL(q, \mathbb{R})$, cujo núcleo é formado pelos campos de vetores tangentes às folhas da folheação levantada. Quando tal 1-forma, satisfaz algumas propriedades específicas, ela será chamada de conexão projetiva transversa normal, adaptada a estrutura projetiva transversa E_T^2 . No caso em que a codimensão q de $(M, \mathcal{F})$ é igual ou maior que 2, mostramos que existe uma única conexão projetiva transversa normal, adaptada a estrutura projetiva E_T^2 .

A existência de ω_T é de suma importância no nosso trabalho, uma vez que, além de ser essencial nas definições de folheações transversalmente projetivas rasas e com-

pletas, permite também mostrar que a folheação levantada $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ está equipada de um paralelismo canônico transverso, o que nos garantirá por exemplo, que se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva completa, então todas as folhas de $(M, \mathcal{F})$ possuem o mesmo recobrimento. Neste caso, a folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ será transversalmente completa e podemos fazer uso do “teorema de estrutura” das folheações transversalmente completas de P. Molino (ver [26]) para concluir que, se as únicas funções básicas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são as constantes, então as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são todas densas em M . O paralelismo canônico transverso em E_T^2 é também usado para caracterizar os elementos da álgebra $\wp(M, \mathcal{F})$ das transformações projetivas infinitesimais transversas (ver proposição 3.4.2).

No final do último capítulo, definimos a álgebra de Lie estrutural das folheações transversalmente projetivas completas e mostramos que o resultado **VII** pode ser obtido através da mesma.

Salientamos que o formalismo sobre a geometria transversa, desenvolvida no segundo capítulo, pode ser utilizada para estudar outros tipos de folheações, como por exemplo as transversalmente conforme (ver exemplo 2.4.6) e principalmente reobter todos os resultados de P. Molino [25] sobre as folheações riemannianas (ver exemplo 2.4.5) em variedades compactas.

Neste trabalho, a palavra diferenciável é sinônimo de classe C^∞ . As variedades diferenciáveis são Hausdorff com base enumerável.

Capítulo 1

Estruturas projetivas

Neste capítulo se encontram as definições de referenciais de ordem k , G -estruturas, estruturas projetivas, conexões de Cartan e transformações projetivas infinitesimais. A maioria dos resultados citados, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em [19].

1.1 G -estruturas de ordem k

Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente, $x_o \in M$, $y_o \in N$, f e g aplicações diferenciáveis definidas em vizinhanças de x_o , com valores em N , tais que $f(x_o) = g(x_o) = y_o$. Seja k um inteiro positivo (ou nulo). Dizemos que f e g originam o mesmo JATO DE ORDEM k (ou o mesmo k -JATO) de M em N , com fonte em x_o e alvo em y_o se as derivadas parciais de f e g , até a ordem k , coincidem no ponto x_o . O k -jato da aplicação f no ponto $f(x)$ será denotado por $j_x^k(f)$. O

conjunto de todos os k -jatos de M em N , denotado geralmente por $J^k(M, N)$, possui uma estrutura de variedade diferenciável (ver [1]).

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão q e $x \in M$. Um k -REFERENCIAL no ponto x é por definição um k -jato $j_o^k(f)$, com fonte na origem de $\mathbb{R}^q$ e alvo no ponto x , onde f é um difeomorfismo local, definido numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^q$, tal que $f(0) = x$.

Observe que se $k = 1$, o 1-referencial de f está definido pela aplicação linear $f_{*,0}$. Como $f_{*,0}$ está determinada por transformar os q vetores da base canônica de $\mathbb{R}^q$ em q vetores linearmente independentes de $T_x M$, segue que um 1-referencial no ponto x pode ser identificado com uma base do espaço $T_x M$, ou seja, com um referencial linear no ponto $x \in M$ ou com o isomorfismo $f_{*,0}$.

Denotaremos por $B^k(M)$ a variedade dos k -referenciais em todos os pontos de M e por p^k a projeção de $B^k(M)$ em M ou seja, a aplicação que a cada k -referencial $j_o^k(f)$ em x , associa x .

Seja $G^k(q)$ a variedade dos k -referenciais com fonte e alvo na origem de $\mathbb{R}^q$. Munido da multiplicação

$$j_o^k(g) \cdot j_o^k(g') = j_o^k(g \circ g')$$

$G^k(q)$ é um grupo de Lie que age à direita em $B^k(M)$ por composição, isto é, se $j_o^k(f) \in B^k(M)$ e $j_o^k(g) \in G^k(q)$, então

$$\mathcal{R}_{j_o^k(g)} j_o^k(f) = j_o^k(f) \cdot j_o^k(g) = j_o^k(f \circ g)$$

Assim, $G^k(q)$ age transitivamente nas fibras $(p^k)^{-1}(x)$, $x \in M$. Isto permite obter uma trivialização local de $B^k(M)$. De fato, para cada carta local (U, φ) de M corres-

ponde uma seção local $\sigma^k : U \longrightarrow B^k(M)$, definida da seguinte maneira: dado $x \in U$, seja $\tau_{\varphi(x)}$ a translação de $\mathbb{R}^q$ que associa a origem de $\mathbb{R}^q$ ao ponto $\varphi(x)$. Então σ^k será o k -referencial $j_o^k(\varphi^{-1} \circ \tau_{\varphi(x)})$. Assim sendo, os pontos da fibra $(p^k)^{-1}(x)$ são da forma $\sigma^k(x)g$ com $g \in G^k(q)$. A trivialização é dada então pela aplicação

$$\begin{aligned} (p^k)^{-1}(U) &\rightarrow U \times G^k(q) \\ \sigma^k(x)g &\mapsto (x, g) \end{aligned}$$

Segue que $B^k(M)$ é um fibrado principal sobre M , com grupo de estrutura $G^k(q)$ e projeção p^k , chamado de FIBRADO DOS k -REFERENCIAIS de M .

Seja $f : U \rightarrow V$ um difeomorfismo local em M . O LEVANTAMENTO de f ao fibrado $B^k(M)$ é o difeomorfismo $f^k : (p^k)^{-1}(U) \rightarrow (p^k)^{-1}(V)$ definido da seguinte maneira: se $z = j_o^k(g) \in (p^k)^{-1}(U)$, então $f^k(z) = j_o^k(f \circ g)$. Observe que se $z \in (p^k)^{-1}(U)$, então $p^k(f^k(z)) = f(p^k(z))$ e se $g \in G^k(q)$, então $f^k(zg) = (f^k(z))g$, ou seja, $\mathcal{R}_g \circ f^k = f^k \circ \mathcal{R}_g$. Portanto, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (p^k)^{-1}(U) & \xrightarrow{f^k} & (p^k)^{-1}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

Sejam X um campo de vetores diferenciável definido num aberto U de M e $(\varphi_t), |t| < \epsilon$ o grupo a 1-parâmetro local gerado por X . Para cada t fixo, $|t| < \epsilon$ seja φ_t^k o levantamento de φ_t . Assim $(\varphi_t^k), |t| < \epsilon$ forma um grupo a 1-parâmetro local em $B^k(M)$. O campo de vetores X^k associado a $(\varphi_t^k), |t| < \epsilon$ é chamado de LEVANTAMENTO DO CAMPO X . Se $g \in G^k(q)$, então $X_{zg}^k = \mathcal{R}_{g*} X_z^k$ o que quer dizer que o campo X^k é invariante pela ação à direita de $G^k(q)$ e projetável em M com

$p_*^k(X^k) = X$. Tem-se ainda que $[X^k, Y^k] = [X, Y]^k$.

Seja G um subgrupo de $G^k(q)$. Uma G -ESTRUTURA de ordem k sobre M é, por definição, um subfibrado principal $E^k(M)$ de $B^k(M)$ com grupo de estrutura G .

Seja $E^k(M)$ uma G -estrutura de ordem k sobre M . Um difeomorfismo local f de M , definido num aberto $U \subset M$, é chamado de um AUTOMORFISMO LOCAL de $E^k(M)$ se o seu levantamento f^k em $B^k(M)$ deixa $E^k(M)$ invariante, ou seja, para todo $z \in E^k(M) \cap (p^k)^{-1}(U)$, tem-se que $f^k(z) \in E^k(M)$. Um campo de vetores diferenciável X de M é chamado de um AUTOMORFISMO INFINITESIMAL de $E^k(M)$ se o grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos gerado por X , é formado por automorfismos de $E^k(M)$.

PROPOSIÇÃO 1.1.1. *Seja X um campo de vetores diferenciável definido em um aberto U de M . Então X é um automorfismo infinitesimal de $E^k(M)$ se, e somente se, o seu levantamento X^k em $B^k(M)$, é tangente a $E^k(M)$ em todos os pontos de $E^k(M) \cap (p^k)^{-1}(U)$.*

PROVA: Vamos supor inicialmente que X é um automorfismo infinitesimal de $E^k(M)$. Seja (φ_t) , $|t| < \epsilon$ o grupo a 1-parâmetro local gerado por X em uma vizinhança de um ponto $x \in U$. Então, para cada t , φ_t se levanta em um difeomorfismo φ_t^k que deixa $E^k(M)$ invariante. Portanto, para cada $z \in E^k(M) \cap (p^k)^{-1}(U)$, a curva $\varphi_t^k(z)$ está contida em $E^k(M)$, donde segue que X_z^k é tangente a $E^k(M)$ em cada ponto do mesmo.

Reciprocamente, seja (φ_t) , $|t| < \epsilon$ o grupo a 1-parâmetro local gerado por X e (φ_t^k) , $|t| < \epsilon$ o seu levantamento. Seja X^k o campo de vetores associado a (φ_t^k) . Como X^k é tangente a $E^k(M)$ nos pontos de $E^k(M) \cap (p^k)^{-1}(U)$, tem-se que se $z \in E^k$,

então $\varphi_t^k(z) \in E^k$, qualquer que seja t , $|t| < \epsilon$ e portanto, X é um automorfismo infinitesimal de $E^k(M)$. $\square$

Sejam $B^k(M)$ e $B^k(\mathbb{R}^q)$ os fibrados dos k -referenciais em M e $\mathbb{R}^q$ respectivamente. Denotaremos por e^k o k -referencial em $\mathbb{R}^q$ da aplicação identidade, isto é, $e^k = j_o^k(id)$ onde $id : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ é a aplicação identidade e por $\mathcal{G}^k(q)$ a álgebra de Lie do grupo $G^k(q)$.

Se k e k' são inteiros positivos (ou nulos) com $k > k'$, denotaremos por $\pi_{k'}^k$ a projeção de $B^k(M)$ em $B^{k'}(M)$, ou seja, $\pi_{k'}^k(j_o^k(f)) = j_o^{k'}(f)$.

Dado $z = j_o^k(f) \in B^k(M)$ iremos denotar por $\tilde{f}^{k-1}$ o difeomorfismo definido em uma vizinhança de $e^{k-1} \in B^{k-1}(\mathbb{R}^q)$ numa vizinhança de z por

$$\tilde{f}^{k-1}(j_o^{k-1}(h)) = j_o^{k-1}(f \circ h)$$

Para não carregar mais a notação, denotaremos ainda por z o isomorfismo linear de $T_{e^{k-1}}B^{k-1}(\mathbb{R}^q)$ em $T_zB^{k-1}(M)$, definido por $\tilde{f}^{k-1}$.

A FORMA FUNDAMENTAL de $B^k(M)$ é a 1-forma Θ^k em $B^k(M)$, com valores em $T_{e^{k-1}}B^{k-1}(\mathbb{R}^q)$, definida por

$$\Theta^k(X_z) = z^{-1}((\pi_{k-1}^k)_* X_z)$$

onde $z \in B^k(M)$ e $X_z \in T_zB^k(M)$.

Sejam $\mathcal{G}^k(q)$ a álgebra de Lie de $G^k(q)$, $A \in \mathcal{G}^k(q)$ e (φ_t) o grupo a 1-parâmetro associado a A . Então, a família das translações à direita, $(\mathcal{R}_{\varphi_t})$, é um grupo a 1-parâmetro em $B^k(M)$. O campo de vetores associado a este grupo, denotado por A^* , é chamado de CAMPO FUNDAMENTAL associado ao elemento A .

Se denotarmos por $\rho_{k-1}^k : G^k(q) \rightarrow G^{k-1}(q)$ a projeção e por $A' = (\rho_{k-1}^k)_*(A)$, então (cf. [20])

$$\Theta^k(A^*) = A'$$

1.2 Estruturas projetivas

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão q e $B^2(M)$, $B^1(M)$ os fibrados dos 2-referenciais e dos referenciais lineares em M , respectivamente. Sejam ainda $p^2 : B^2(M) \rightarrow M$, $p^1 : B^1(M) \rightarrow M$, $\pi_1^2 : B^2(M) \rightarrow B^1(M)$ as projeções, $G^2(q)$ e $G^1(q) = GL(q, \mathbb{R})$ os grupos de estrutura de $B^2(M)$ e $B^1(M)$ respectivamente.

Seja $A(q, \mathbb{R})$ o grupo das transformações afins de $\mathbb{R}^q$ representado pelas matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $a = (a_j^i) \in GL(q, \mathbb{R})$ e $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^q$ é um vetor coluna. O elemento A aplica um ponto $\zeta \in \mathbb{R}^q$ sobre o ponto $a\zeta + \xi$.

Identificando $A(q, \mathbb{R})$ com a soma $\mathbb{R}^q + GL(q, \mathbb{R})$, temos que sua álgebra de Lie $a(q, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial $a(q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R})$ (soma direta), munida da seguinte operação de colchete:

$$[u, v] = 0, \quad [U, U'] = UU' - U'U, \quad [U, v] = Uv$$

para $u, v \in \mathbb{R}^q$, $U, U' \in gl(q, \mathbb{R})$.

Existe um isomorfismo natural entre $A(q, \mathbb{R})$ e $B^1(\mathbb{R}^q)$ no qual a identidade de

$A(q, \mathbb{R})$ corresponde ao elemento $e^1 = j_o^1(id)$. Neste sentido, o espaço tangente a $B^1(\mathbb{R}^q)$ em e^1 se identifica com a álgebra de Lie $a(q, \mathbb{R})$. Portanto, neste caso, a forma fundamental Θ^2 de $B^2(M)$ assume valores em $\mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R})$.

Dado $g = j_o^2(h) \in G^2(q)$, definimos a aplicação $Ad(g)$, de uma vizinhança de $e^1 \in B^1(\mathbb{R}^q)$ em uma outra vizinhança do mesmo por,

$$Ad(g)(j_o^1(f)) = j_o^1(h \circ f \circ h^{-1})$$

O isomorfismo linear induzido por $Ad(g)$, do espaço tangente $T_{e^1} B^1(\mathbb{R}^q)$, nele mesmo, será denotado por $ad(g)$. Observe que $ad(g)$ define uma ação de $G^2(q)$ em $a(q, \mathbb{R})$.

Vale a seguinte proposição (ver [19]):

PROPOSIÇÃO 1.2.1. *Seja Θ^2 a forma fundamental de $B^2(M)$. Então:*

1. $\mathcal{R}_g^* \Theta^2(X) = ad(g^{-1}) \Theta^2(X)$, para todo $g \in G^2(q)$ e todo X tangente a $B^2(M)$
2. $\Theta^2(A^*) = A'$, para $A \in \mathcal{G}^2(q)$ onde $A' \in gl(q, \mathbb{R})$ é a imagem de A pela projeção canônica $\mathcal{G}^2(q) \rightarrow gl(q, \mathbb{R})$.

Sejam $e_1, e_2, \dots, e_q$ a base natural de $\mathbb{R}^q$ e $(x^1, \dots, x^q)$ o sistema de coordenadas natural de $\mathbb{R}^q$. Cada $z = j_o^2(f) \in B^2(\mathbb{R}^q)$ é representado por um único polinômio da forma

$$f(x) = \sum_i (u^i + \sum_j u_{jk}^i x^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} u_{jk}^i x^j x^k) e_i$$

onde $x = \sum x^i e_i$, $u^i = f^i(0)$, $u_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0)$, $u_{jk}^i = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(0)$ e portanto, $u_{jk}^i = u_{kj}^i$.

Tomamos (u^i, u_j^i, u_{jk}^i) como o sistema de coordenadas natural de $B^2(\mathbb{R}^q)$. Fazendo a restrição de u_j^i, u_{jk}^i a $G^2(q)$ obtemos um sistema de coordenadas natural de $G^2(q)$ o qual denotaremos por (s_j^i, s_{jk}^i) .

Sejam $\{E_i, E_i^j\}$ a base de $a(q, \mathbb{R})$, definida por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \big|_{e^1}, \quad E_i^j = \frac{\partial}{\partial u_j^i} \big|_{e^1}$$

e θ^i, θ_j^i as coordenadas de Θ^2 nesta base, isto é,

$$\Theta^2 = \sum \theta^i E_i + \sum \theta_j^i E_i^j$$

Tem-se que (cf. [20])

$$d\theta^i = - \sum \theta_k^i \wedge \theta^k \quad (1.1)$$

e que

$$\Theta^2 = \sum v_k^i du^k + \sum v_k^i du_j^k - \sum v_k^i u_{hs}^k v_l^h du^l \quad (1.2)$$

onde $v_j^i = (u_j^i)^{-1}$

Sejam $P^q(\mathbb{R})$ o espaço projetivo real de dimensão q , com coordenadas homogêneas $\xi^o, \xi^1, \dots, \xi^q$ e $PGL(q, \mathbb{R})$ o grupo das transformações projetivas de $P^q(\mathbb{R})$. A ação de $GL(q+1, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{q+1}$ induz a ação de $PGL(q, \mathbb{R})$ no espaço projetivo $P^q(\mathbb{R})$ da seguinte maneira: seja $(x^1, \dots, x^q)$ o sistema de coordenadas não-homogêneas de $P^q(\mathbb{R})$ definido por $x^i = \frac{\xi^i}{\xi^o}$, $i = 1, \dots, q$. Seja $(s_\beta^\alpha)_{\alpha, \beta=0,1,\dots,q} \in GL(q+1, \mathbb{R})$. Então a transformação projetiva induzida, em termos do sistema de coordenadas não-homogêneas $(x^1, \dots, x^q)$, é dada pela transformação linear fracionária

$$y^i = \frac{\sum s_j^i x^j + s_o^i}{\sum s_j^o x^j + s_o^o}, \quad i = 1, \dots, q$$

Se $s_o^o \neq 0$, denotando por $a^i = \frac{s_o^i}{s_o^o}$, $a_j^i = \frac{s_j^i}{s_o^o}$ e $a_j = \frac{s_j^o}{s_o^o}$, $i, j = 1, \dots, q$, a transformação linear fracionária definida acima é dada por

$$y^i = \frac{\sum a_j^i x^j + a^i}{\sum a_j x^j + 1}, \quad i = 1, \dots, q$$

Iremos considerar (a^i, a_j^i, a_j) , $i, j = 1, \dots, q$ como o sistema de coordenadas local de $PGL(q, \mathbb{R})$ numa vizinhança da identidade, como definido anteriormente. Vale o seguinte resultado (cf. [19])

PROPOSIÇÃO 1.2.2. *Sejam ω^i, ω_j^i e ω_j , $i, j = 1, \dots, q$, 1-formas em $PGL(q, \mathbb{R})$ invariantes à esquerda que coincidem com da^i, da_j^i e da_j na identidade. Então as equações de Maurer-Cartan de $PGL(q, \mathbb{R})$ são dadas por*

$$\begin{aligned} d\omega^i &= -\sum \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_j^i &= -\sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega^i \wedge \omega_j + \delta_j^i \sum \omega_k \wedge \omega^k \\ d\omega_j &= -\sum \omega_k \wedge \omega_j^k \end{aligned}$$

A álgebra de Lie $pgl(q, \mathbb{R})$ de $PGL(q, \mathbb{R})$ é a soma direta

$$pgl(q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R}) + (\mathbb{R}^q)^*$$

munida da seguinte operação de colchete:

$$\begin{aligned} [v, v'] &= 0, \quad [U, U'] = UU' - U'U, \quad [\xi, \xi'] = 0, \\ [U, v] &= Uv, \quad [v, \xi] = v\xi - \xi v I_q, \quad [\xi, U] = \xi U \end{aligned}$$

onde $v, v' \in \mathbb{R}^q$, $\xi, \xi' \in (\mathbb{R}^q)^*$, $U, U' \in gl(q, \mathbb{R})$ e I_q é a matriz identidade de ordem q .

Sejam $\mathcal{O}$ o ponto do espaço projetivo $P^q(\mathbb{R})$ de coordenada homogênea $(1, 0, \dots, 0)$ e H o grupo de isotropia de $PGL(q, \mathbb{R})$ no ponto $\mathcal{O}$, isto é,

$$H = \{g \in PGL(q, \mathbb{R}) \quad ; \quad g\mathcal{O} = \mathcal{O}\}$$

Em termos do sistema de coordenadas (a^i, a_j^i, a_j) , H está definido por $a^i = 0$, para todo $i = 1, \dots, q$. A transformação linear fracionária definida por um elemento de H é da forma

$$y^i = \frac{\sum a_j^i x^j}{\sum a_j x^j + 1}, \quad i = 1, \dots, q$$

Tem-se ainda que a álgebra de Lie $\mathcal{H}$ de H é a soma direta $\mathcal{H} = gl(q, \mathbb{R}) + (\mathbb{R}^q)^*$.

Seja $H^2(q)$ o subgrupo de $G^2(q)$ constituído pelos elementos (s_j^i, s_{jk}^i) satisfazendo $s_{jk}^i = -(s_j^i s_k + s_k^i s_j)$. Dado $A \in H$, sejam f a transformação linear fracionária induzida por A e $j_o^2(f)$ o 2-referencial na origem de $\mathbb{R}^q$ determinado por f . Com relação às coordenadas (a^i, a_j^i, a_j) , o 2-referencial $j_o^2(f)$ terá coordenadas $(a_j^i, -(a_j^i a_k + a_k^i a_j))$ isto é, $j_o^2(f) \in H^2(q)$. Na verdade tem-se que a aplicação $A \mapsto j_o^2(f) \in H^2(q)$ é um isomorfismo entre os grupos H e $H^2(q)$ (ver [19]).

Uma ESTRUTURA PROJATIVA sobre a variedade M de dimensão q é um subfibrado $E^2(M)$ de $B^2(M)$, com grupo de estrutura $H^2(q)$.

1.3 Conexão projetiva normal

Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado de G tal que $\dim G/H = q$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ as álgebras de Lie de G e H respectivamente. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão q e P um fibrado principal sobre M com grupo de estrutura H . Uma 1-forma ω em P , com valores em $\mathcal{G}$ é uma CONEXÃO DE CARTAN se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\omega(A^*) = A$ para todo $A \in \mathcal{H}$;
2. $\mathcal{R}_g^* \omega = ad(g^{-1})\omega$ para todo $g \in H$, onde ad denota a restrição a H da aplicação ad de G ;
3. $\omega_z(X_z) = 0$ se, e somente se, $X_z = 0$, para todo $z \in P$ e $X_z \in T_z P$.

Uma conexão de Cartan ω é dita completa se, todo campo de vetores X que satisfaz a condição $\omega(X) = cte$, é um campo completo.

Se $G = PGL(q, \mathbb{R})$, $H = H^2(q)$ e $P = E^2(M)$ é uma estrutura projetiva sobre M , então uma conexão de Cartan em $E^2(M)$, com valores em $pgl(q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R}) + (\mathbb{R}^q)^*$ é chamada de uma CONEXÃO PROJETIVA.

Sejam $E^2(M)$ uma estrutura projetiva sobre uma variedade M de dimensão q e ω uma conexão projetiva em $E^2(M)$. Com relação à base $\{E_i, E_i^j, E^j\}$ de $pgl(q, \mathbb{R})$, dada por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial a^i}|_{id}, \quad E_i^j = \frac{\partial}{\partial a_j^i}|_{id}, \quad E^j = \frac{\partial}{\partial a_j}|_{id}$$

ω é representada pelas 1-formas $\omega^i, \omega_j^i, \omega_j$.

A forma de curvatura de ω é a 2-forma Ω com valores em $pgl(q, \mathbb{R})$, definida pela equação

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \Omega$$

onde $[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]$.

As equações de estrutura de ω são (cf. [19])

$$\begin{aligned} (I) \quad d\omega^i &= -\sum \omega_k^i \wedge \omega^k + \Omega^i \\ (II) \quad d\omega_j^i &= -\sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega^i \wedge \omega_j + \delta_j^i \sum \omega_k \wedge \omega^k + \Omega_j^i \\ (III) \quad d\omega_j &= -\sum \omega_k \wedge \omega_j^k + \Omega_j \end{aligned}$$

Usando as condições da definição de ω e (I), (II) e (III), conclui-se que (ver [19])

$$\begin{aligned} \Omega^i &= \frac{1}{2} \sum K_{lk}^i \omega^l \wedge \omega^k \\ \Omega_j^i &= \frac{1}{2} \sum K_{jlk}^i \omega^l \wedge \omega^k \\ \Omega_j &= \frac{1}{2} \sum K_{jlk} \omega^l \wedge \omega^k \end{aligned}$$

onde K_{lk}^i , K_{jlk}^i e K_{ilk} são funções em $E^2(M)$.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão q , $E^2(M)$ uma estrutura projetiva sobre M e $\Theta^2 = (\theta^i, \theta_j^i)$ a forma fundamental de $B^2(M)$. Denotaremos ainda por $\Theta^2 = (\theta^i, \theta_j^i)$ a restrição de Θ^2 a $E^2(M)$.

Sejam $\omega = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ uma conexão projetiva em $E^2(M)$. Dizemos que ω é ADAPTADA À ESTRUTURA PROJETIVA $E^2(M)$ se $\omega^i = \theta^i$ e $\omega_j^i = \theta_j^i$. Neste caso, tem-se que $\Omega^i = 0$. Se além disso $\sum K_{jil}^i = 0$ e $\sum K_{ilk}^i = 0$ (ou seja, $\sum \Omega_i^i = 0$), dizemos que ω é uma CONEXÃO PROJETIVA NORMAL adaptada à estrutura projetiva $E^2(M)$.

EXEMPLO 1.3.1. *Seja $M = P^q(\mathbb{R})$ o espaço projetivo real de dimensão q . Então existe uma estrutura projetiva natural sobre M . De fato, tal estrutura é dada pelo subfibrado $E^2(M)$ de $B^2(M)$, consistindo dos elementos da forma $j_o^2(f)$, onde f é uma transformação projetiva de $\mathbb{R}^q \subset P^q(\mathbb{R})$ em M , ou seja $f : \mathbb{R}^q \rightarrow M$ é a restrição de uma transformação projetiva de M em M a $\mathbb{R}^q$. Se escrevermos $M = PGL(q, \mathbb{R})/H$, temos que o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} PGL(q, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\mu} & E^2(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

onde μ é a aplicação que leva f em $j_o^2(f)$. Tem-se que μ é compatível com o isomorfismo entre H e $H^2(q)$. A forma de Maurer-Cartan $\omega = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ que coincide com a forma da^i, da_j^i, da_j na identidade é uma conexão projetiva normal adaptada à estrutura $E^2(M)$.

Para uma demonstração do teorema abaixo ver [19]

TEOREMA 1.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão $q \geq 2$. Para cada estrutura projetiva $E^2(M)$ em M , existe uma única conexão projetiva normal, adaptada à $E^2(M)$.*

OBSERVAÇÃO 1.3.3. *Observe que se M é uma variedade conexa de dimensão $q = 1$, então ela é a reta real $\mathbb{R}$ ou o espaço projetivo $P^1(\mathbb{R})$. Portanto, segue do exemplo 1.3.1, que $E^2(M)$ está munida de uma conexão projetiva normal, adaptada a $E^2(M)$.*

Sejam $E^2(M)$ uma estrutura projetiva sobre uma variedade diferenciável de dimensão $q \geq 2$ e $\omega = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ a conexão projetiva normal adaptada à $E^2(M)$. Para cada elemento $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^q) \in \mathbb{R}^q$, podemos associar um único campo de vetores $\tilde{\xi}$ em $E^2(M)$, caracterizado por

$$\omega^i(\tilde{\xi}) = \xi^i, \quad \omega_j^i(\tilde{\xi}) = \omega_j(\tilde{\xi}) = 0$$

ou seja, $\omega(\tilde{\xi}) = \xi \in \mathbb{R}^q$. O campo $\tilde{\xi}$ é chamado de CAMPO BÁSICO associado a ξ . Analogamente, se $A = (A_j^i, A_j) \in \mathcal{H}$, podemos associar um único campo de vetores (o campo fundamental A^*), caracterizado por

$$\omega^i(A^*) = 0, \quad \omega_j^i(A^*) = A_j^i, \quad \omega_j(A^*) = A_j$$

Seja $\{E_i, E_i^j, E^j\}$ a base de $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R})$, onde lembramos, $E_i = \frac{\partial}{\partial a^i}|_{id}$, $E_i^j = \frac{\partial}{\partial a_j^i}|_{id}$, $E^j = \frac{\partial}{\partial a_j}|_{id}$. Denotando por $\tilde{E}_i, E_i^{j*}, E^{j*}$ os campos de vetores básicos e fundamentais associados aos vetores desta base, temos que $\{\tilde{E}_i, E_i^{j*}, E^{j*}\}$ define um paralelismo em $E^2(M)$, associado à conexão projetiva normal ω , chamado de PARALELISMO CANÔNICO.

Sejam M, M' duas variedades diferenciáveis de dimensão q , $E^2(M)$ e $E^2(M')$ estruturas projetivas em M e M' respectivamente. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M'$ é

dito projetivo (com relação a $E^2(M)$ e $E^2(M')$) se o seu levantamento $f^2 : B^2(M) \rightarrow B^2(M')$, aplica $E^2(M)$ em $E^2(M')$. Se $M = M'$ e $E^2(M) = E^2(M')$, então f é dita ser uma TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA (com relação a $E^2(M)$).

Seja M uma variedade diferenciável, de dimensão q . Uma estrutura projetiva $E^2(M)$ em M é dita RASA se, para cada ponto de M , existe uma vizinhança aberta U e um difeomorfismo projetivo de U em um subconjunto aberto do espaço projetivo $P^q(\mathbb{R})$. Vale o seguinte resultado (ver [21]):

PROPOSIÇÃO 1.3.4. *Seja M uma variedade diferenciável, de dimensão $q \geq 2$. Uma estrutura projetiva $E^2(M)$ em M é rasa se, e somente se, a conexão projetiva normal, adaptada a $E^2(M)$, possui curvatura nula.*

Um campo de vetores X em M é dito ser uma TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA INFINITESIMAL se o grupo a 1-parâmetro local, definido por X é composto por transformações projetivas locais.

PROPOSIÇÃO 1.3.5. *Seja X um campo de vetores em uma variedade conexa M , de dimensão $q \geq 2$. X^2 o seu levantamento em $B^2(M)$ e ω a conexão projetiva normal adaptada a estrutura projetiva $E^2(M)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. X é uma transformação projetiva infinitesimal de $E^2(M)$
2. X^2 é tangente a $E^2(M)$ em cada ponto do mesmo
3. $\mathcal{L}_{X^2}\omega = 0$ onde $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie
4. $\mathcal{L}_{X^2}\tilde{\xi} = 0$ e $\mathcal{L}_{X^2}A^* = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^q$ e $A \in \mathcal{H}$

PROVA:

A prova de $(1) \iff (2)$ é idêntica a prova da proposição 1.1.1.

$(1) \iff (3)$ Segue do fato de que $\mathcal{L}_{X^2}\omega = 0 \iff \varphi_t^{2*}\omega = \omega$ e da unicidade de ω .

$(3) \iff (4)$ Se $\mathcal{L}_{X^2}\omega = 0$, então

$$(\mathcal{L}_{X^2}\omega)(\tilde{\xi}) = X^2\omega(\tilde{\xi}) - \omega([X^2, \tilde{\xi}]) = 0$$

o que implica que $\omega([X^2, \tilde{\xi}]) = 0$ e portanto $[X^2, \tilde{\xi}] = 0$, ou seja $\mathcal{L}_{X^2}\tilde{\xi} = 0$. Analogamente temos que $\mathcal{L}_{X^2}A^* = 0$.

Dado um campo $Y \in \Xi(E^2(M))$, temos que Y pode ser escrito como uma combinação linear dos campos do paralelismo canônico. Logo, se $\mathcal{L}_{X^2}\tilde{\xi} = 0$ e $\mathcal{L}_{X^2}A^* = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^q$ e $A \in \mathcal{H}$, então $(\mathcal{L}_{X^2}\omega)(Y) = 0$, donde segue que $\mathcal{L}_{X^2}\omega = 0$. $\square$

Capítulo 2

Estruturas projetivas transversas

Neste capítulo construímos o fibrado dos k -referenciais transversos $B_T^k(M, \mathcal{F})$ sobre as variedades folheadas $(M, \mathcal{F})$. Mostramos que o fibrado dos 2-referenciais transversos está munido de uma folheação “levantada” $\mathcal{F}_T^2$, de mesma dimensão de $\mathcal{F}$, cujas folhas recobrem as folhas de $\mathcal{F}$. Definimos estruturas transversas de segunda ordem e em particular as estruturas projetivas transversas.

2.1 Folheações; Fatos básicos

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma FOLHEAÇÃO $\mathcal{F}$ de M de codimensão q , está definida por um N^q -cociclo $\{(U_\alpha, \pi_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, satisfazendo:

1. $\{U_\alpha\}$ é um recobrimento aberto de M
2. Para cada α , $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow N^q$ é uma submersão. A variedade N^q é chamada de

VARIETADE TRANSVERSA. As imagens inversas por π_α dos pontos de N^q são chamadas PLACAS de $\mathcal{F}$ em U_α .

3. $g_{\alpha\beta} : \pi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \pi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ são aplicações satisfazendo $\pi_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta$

As aplicações $g_{\alpha\beta}$ são chamadas de MUDANÇAS DE COORDENADAS TRANSVERSAS e as aplicações π_α de APLICAÇÕES DISTINGUIDAS de $\mathcal{F}$. É fácil ver que as mudanças de coordenadas transversas verificam a condição de cociclo, isto é:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\gamma} \circ g_{\gamma\beta}(x) \quad \forall x \in \pi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

e que formam um pseudo-grupo Γ , de transformações locais, da variedade N^q .

Denotaremos por $(M, \mathcal{F})$ a variedade, M munida da folheação $\mathcal{F}$.

Um CAMINHO DE PLACAS de $\mathcal{F}$ é uma seqüência $L_1, \dots, L_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$. Uma FOLHA de $(M, \mathcal{F})$ é uma classe de equivalência da seguinte relação em M : $x \sim y$ se existe um caminho de placas $L_1, \dots, L_k$ com $x \in L_1$ e $y \in L_k$.

Dar uma estrutura transversa a $(M, \mathcal{F})$ é impor condições ao pseudo-grupo Γ , formado pelas aplicações $g_{\alpha\beta}$.

EXEMPLO 2.1.1. Se N^q está munida de uma métrica Riemanniana e as aplicações $g_{\alpha\beta}$ são isometrias, dizemos que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação Riemanniana.

EXEMPLO 2.1.2. Se N^q é um espaço quociente, de um grupo de Lie G por um subgrupo de Lie fechado K e cada $g_{\alpha\beta}$ é (a restrição de) uma G -translação de G/K , então $(M, \mathcal{F})$ é chamada de uma G/K -FOLHEAÇÃO (TRANSVERSALMENTE) HOMOGÊNEA.

Pode-se ainda definir uma folheação $(M, \mathcal{F})$ de codimensão q da seguinte maneira: uma variedade diferenciável M está munida de uma folheação $\mathcal{F}$, de codimensão q se

existe um atlas maximal em M , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma carta deste atlas, $\varphi_\alpha(U_\alpha) = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ onde $p = n - q$ e U_α^1, U_α^2 são discos abertos de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ respectivamente;
2. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) são cartas tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é da forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

Para uma demonstração de equivalência entre as definições dadas ver, por exemplo, [6].

Diz-se que uma p -distribuição diferenciável P sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n é COMPLETAMENTE INTEGRÁVEL se, dados dois campos de vetores X e Y , tais que para todo $x \in M$, X_x, Y_x pertencem a P_x , então $[X, Y]_x \in P_x$.

TEOREMA 2.1.3 (Frobenius). *Seja P uma p -distribuição diferenciável em uma variedade diferenciável M de dimensão n . Então P é completamente integrável se, e somente se, existe uma folheação $\mathcal{F}$ sobre M , de codimensão $q = n - p$, tal que para todo $x \in M$, $P_x = T_x \mathcal{F}$, onde $T_x \mathcal{F}$ denota o subespaço de $T_x M$ dos vetores tangentes à folha de $\mathcal{F}$ no ponto x .*

Neste caso dizemos que P é a p -DISTRIBUIÇÃO ASSOCIADA A FOLHEAÇÃO $\mathcal{F}$.

Em termos de formas diferenciais, o teorema anterior é dado da seguinte maneira:

TEOREMA 2.1.4 (Frobenius). *Seja P uma p -distribuição diferenciável de codimensão q definida num aberto $U \subset M$ por q -formas diferenciais, linearmente indepen-*

dentes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q$. Então P é completamente integrável se, e somente se, para todo $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ temos

$$d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^q = 0$$

Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação de codimensão q sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n . Os abertos U_α serão chamados de ABERTOS DISTINGUIDOS de $\mathcal{F}$. As coordenadas de uma carta (U, φ) de $\mathcal{F}$ serão denotadas por $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$ e serão chamadas de COORDENADAS DISTINGUIDAS. As coordenadas $(y^1, \dots, y^q)$ serão chamadas de COORDENADAS TRANSVERSAS.

Sejam $\Xi(M)$ a álgebra dos campos de vetores diferenciáveis na variedade M e $\Xi_{\mathcal{F}}$ a subálgebra dos campos tangentes a folheação $\mathcal{F}$. Um elemento $X \in \Xi(M)$ é dito FOLHEADO (para a folheação $\mathcal{F}$) se para todo $Y \in \Xi_{\mathcal{F}}$, o colchete $[X, Y] \in \Xi_{\mathcal{F}}$. Segue da identidade de Jacobi, que o conjunto dos campos folheados formam uma álgebra de Lie.

Em [25] prova-se o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.1.5. *Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação de codimensão q e $X \in \Xi(M)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. X é folheado;
2. Se (φ_t) , $|t| < \epsilon$ é o grupo a 1-parâmetro local associado a X em uma vizinhança de um ponto em M , então para todo t , o difeomorfismo local φ_t deixa a folheação invariante;
3. Para todo aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$, com coordenadas distinguidas locais

$(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$, as q -últimas componentes de X dependem somente das variáveis transversas $y^1, \dots, y^q$.

Se a folheação $(M, \mathcal{F})$ é dada por uma submersão $\pi : M \rightarrow N$, tal que a imagem inversa por π de cada ponto de N é conexa, dizemos que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação simples. Dado um subconjunto aberto U de M , denotaremos por $\mathcal{F}_U$ a folheação em U induzida por $\mathcal{F}$. Se a folheação $\mathcal{F}_U$ é simples, dizemos que U é um ABERTO SIMPLES de $\mathcal{F}$. Neste caso, denotaremos por $\bar{U}$ a variedade quociente $U/\mathcal{F}_U$. Em particular, todo aberto distinguido U_α de $\mathcal{F}$ é um aberto simples e as aplicações distinguidas $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \bar{U}_\alpha$ são as projeções.

2.2 Referenciais transversos de ordem k

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação de codimensão q sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n e P a p -distribuição associada a $\mathcal{F}$, onde $p = n - q$. Seja N uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $f : N \rightarrow M$ é dita TRANSVERSA a $\mathcal{F}$, se para todo $y \in N$, tem-se

$$f_{*,y}T_yN + P_x = T_xM$$

onde $x = f(y)$.

Para uma prova da proposição abaixo, ver [6]

PROPOSIÇÃO 2.2.1. *Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação e $f : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Então f é transversa a $\mathcal{F}$ se, e somente se, para toda aplicação distinguida $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \bar{U}_\alpha$, a composta $\pi_\alpha \circ f : f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \bar{U}_\alpha$ é uma submersão.*

Sejam V, W vizinhanças abertas da origem 0 de $\mathbb{R}^q$, $f_1 : V \rightarrow M$, $f_2 : W \rightarrow M$ aplicações transversas a $\mathcal{F}$ tais que $f_1(0) = f_2(0) = x \in M$ e k um inteiro positivo (ou nulo). Sejam U_α um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$ tal que $x \in U_\alpha$ e $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \overline{U}_\alpha$ a projeção. Dizemos que f_1 e f_2 originam o mesmo k -REFERENCIAL TRANSVERSO a $\mathcal{F}$ no ponto x se $j_o^k(\pi_\alpha \circ f_1) = j_o^k(\pi_\alpha \circ f_2)$. Segue do fato de que $\pi_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta$ e da regra da cadeia, que a definição de k -referencial transverso independe da escolha da projeção π_α .

O k -referencial transverso da aplicação f será denotado por $\widehat{j}_o^k(f)$ e a variedade de todos os k -referenciais transversos em todos os pontos de M por $B_T^k(M, \mathcal{F})$ ou simplesmente por B_T^k . Denotaremos por $p_T^k : B_T^k \rightarrow M$ a projeção, isto é, a aplicação que a cada k -referencial transverso $\widehat{j}_o^k(f)$, associa o ponto $x = f(0)$.

2.3 Os fibrados transversos $B_T^1(M, \mathcal{F})$ e $B_T^2(M, \mathcal{F})$

Como anteriormente sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação de codimensão q sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n e P a p -distribuição associada a $\mathcal{F}$, onde $p = n - q$.

Seja $Q = TM/P$. Temos que Q é um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^q$. Todo campo de vetores $X \in \Xi(M)$ gera uma seção diferenciável $\overline{X}$ de Q . Com efeito, considere um aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$ com coordenadas distinguidas $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$. Em cada ponto $x \in U$, os campos $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^q}$ geram um subespaço de $T_x M$, suplementar a P_x . As correspondentes seções locais de Q , denotadas por $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^q}$ geram, em cada ponto $x \in U$, uma base de Q_x . Logo se em U ,

$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, a seção correspondente $\bar{X}$ de Q é da forma $\bar{X} = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$.

Se, em particular X é um campo folheado com relação a $\mathcal{F}$, dizemos que $\bar{X}$ é um CAMPO TRANSVERSO. Observe que, neste caso, as componentes locais Y^j de $\bar{X}$ dependem apenas das coordenadas transversas $y^1, \dots, y^q$ (ver proposição 2.1.5) e $\bar{X}|_U$ se identifica com o campo $X_{\bar{U}}$, projeção de X na variedade $\bar{U}$.

Seja $\pi : U \rightarrow \bar{U}$ a projeção. Iremos denotar por $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^q)$ o sistema de coordenadas de $\bar{U}$, associado ao sistema de coordenadas distinguidas $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$ de U . Seja $\hat{j}_o^1(f) \in B_T^1$ com $f(0) = x \in U$. Então $\hat{j}_o^1(f)$ está determinado pela aplicação $(\pi \circ f)_{*,o}$, a qual transforma a base canônica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^q$ numa base $\{v_i\}$ de $T_{\pi(x)}\bar{U}$. Por outro lado, existe um isomorfismo natural entre Q_x e $T_{\pi(x)}\bar{U}$ o qual associa $\frac{\partial}{\partial y^j}|_x$ a $\frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}|_{\pi(x)}$, para todo $j = 1, \dots, q$. Assim sendo, podemos identificar $z = \hat{j}_o^1(f) \in B_T^1$ com um isomorfismo linear z de $\mathbb{R}^q$ em Q_x que leva a base canônica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^q$ na base $\{v_i\}$ de Q_x , usando o isomorfismo natural, citado anteriormente. Em outras palavras, $B_T^1(M, \mathcal{F})$ pode ser visto como o conjunto de todos os isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^q$ em Q_x , para todo $x \in M$, ou com o conjunto de todas as bases de Q_x , para todo $x \in M$.

A FORMA FUNDAMENTAL de B_T^1 é a 1-forma Θ_T^1 em B_T^1 , com valores em $\mathbb{R}^q$, definida por

$$\Theta_T^1(X_z) = z^{-1}(\overline{(p_T^1)_*(X_z)})$$

para $z \in B_T^1$ e $X_z \in T_z B_T^1$.

Dado um aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$ sejam, $B_T^1(U, \mathcal{F}_U) = (p_T^1)^{-1}(U)$ e $B^1(\bar{U})$ o fibrado dos referenciais transversos em U e o fibrado dos referenciais lineares na variedade quociente $\bar{U}$, respectivamente. Seja $\pi_T^1 : B_T^1(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow B^1(\bar{U})$ o levan-

tamento da projeção $\pi : U \rightarrow \overline{U}$, isto é, $\pi_T^1(\widehat{j}_o^1(f)) = j_o^1(\pi \circ f)$. Então o cociclo $\{(B_T^1(U_\alpha, \mathcal{F}_{U_\alpha}), (\pi_T^1)_\alpha, g_{\alpha\beta}^1)\}$, onde U_α são abertos distinguidos de $(M, \mathcal{F})$ e $g_{\alpha\beta}^1$ é o levantamento da aplicação $g_{\alpha\beta}$, define uma folheação $\mathcal{F}_T^1$ em B_T^1 , de mesma dimensão de $\mathcal{F}$. A proposição abaixo, diz que a folheação $(B_T^1, \mathcal{F}_T^1)$ pode ser expressa através da forma fundamental Θ_T^1 de B_T^1 . Para uma demonstração da mesma, ver [25].

PROPOSIÇÃO 2.3.1 (P. Molino). *A p -distribuição P_T^1 em B_T^1 , definida por*

$$(P_T^1)_z = \{X_z \in T_z B_T^1 \quad ; \quad i_{X_z} \Theta_T^1 = i_{X_z} d\Theta_T^1 = 0\}$$

é completamente integrável. A folheação $\mathcal{F}_T^1$, associada a P_T^1 é invariante por translação à direita. Se F^1 é folha de $\mathcal{F}_T^1$, então $p_T^1(F^1) = F$ é folha de $\mathcal{F}$. Além disso, $p_T^1|_{F^1} : F^1 \rightarrow F$ é um recobrimento.

Seja $G^2(q)$ o grupo de Lie dos 2-referenciais com fonte e alvo na origem de $\mathbb{R}^q$. Temos que $G^2(q)$ atua à direita em B_T^2 por composição, ou seja

$$\mathcal{R}_{j_o^2(h)} \widehat{j}_o^2(f) = \widehat{j}_o^2(f) j_o^2(h) = \widehat{j}_o^2(f \circ h)$$

onde $j_o^2(h) \in G^2(q)$ e $\widehat{j}_o^2(f) \in B_T^2$.

Observe que $G^2(q)$ atua transitivamente nas fibras $(p_T^2)^{-1}(x)$, $x \in M$. De fato, se $z = \widehat{j}_o^2(f)$, $z_1 = \widehat{j}_o^2(f_1) \in (p_T^2)^{-1}(x)$, basta tomarmos $g = j_o^2(h) \in G^2(q)$, com $h = (\pi_\alpha \circ f)^{-1} \circ (\pi_\alpha \circ f_1)$ para obtermos $zg = z_1$. Isto nos permite obter uma trivialização local de B_T^2 . Com efeito, seja (U, φ) uma carta folheada de $(M, \mathcal{F})$. Dado $x_o \in U$ sejam $(u_o, v_o) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tal que $\varphi(x_o) = (u_o, v_o)$ e $\tau_{(u_o, v_o)}$ a translação de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ que associa (u_o, v_o) a origem $(0, 0)$. Sejam $p_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ a projeção, $V = p_2(\tau_{(u_o, v_o)}(\varphi(U)))$ e $f_{x_o} : V \rightarrow M$ definida por $f_{x_o}(v) = \varphi_\alpha^{-1}(\tau_{(u_o, v_o)}^{-1}(0, v))$. Então f_{x_o} é transversa a $\mathcal{F}$ e além disso $f_{x_o}(0) = x$. Seja $\sigma_T^2 : U \rightarrow B_T^2$ a seção

definida por $\sigma_T^2(x) = \hat{j}_o^2(f_x)$ para $x \in U$. Assim, para cada ponto $x \in U$, os pontos da fibra $(p_T^2)^{-1}(x)$ são da forma $\sigma_T^2(x)g$, onde $g \in G^2(q)$. A trivialização será definida pela aplicação

$$\begin{aligned} (p_T^2)^{-1}(U) &\rightarrow U \times G^2(q) \\ \sigma_T^2(x)g &\mapsto (x, g) \end{aligned}$$

Segue que B_T^2 é um fibrado principal sobre M , com grupo de estrutura $G^2(q)$ e projeção p_T^2 , o qual chamaremos de FIBRADO DOS k -REFERENCIAIS TRANSVERSOS de $(M, \mathcal{F})$. Chamaremos a seção σ_T^2 de SEÇÃO TRANSVERSA NATURAL, associada às coordenadas locais de U .

Sejam $(B_T^1, \mathcal{F}_T^1)$ a folheação de codimensão $q + q^2$ em B_T^1 , definida pela proposição 2.3.1 e P_T^1 a p -distribuição associada a $\mathcal{F}_T^1$.

Seja $Q^1 = TB_T^1/P_T^1$. Temos que Q^1 é um fibrado vetorial sobre $B_T^1(M, \mathcal{F})$ com fibra típica $\mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R})$. Como anteriormente, tem-se que cada campo $X \in \Xi(B_T^1)$ define uma seção diferenciável $\overline{X}$ de Q^1 . Quando X é um campo folheado, dizemos que $\overline{X}$ é o CAMPO TRANSVERSO, associado a X .

Sejam U_α um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$ e $z = \hat{j}_o^2(f) \in B_T^2$ com $f(0) = x \in U_\alpha$. Então z define uma aplicação $\tilde{f}$ de $B^1(\mathbb{R}^q)$ em $B^1(\overline{U}_\alpha)$ da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(j_o^1(h)) = j_o^1(\pi_\alpha \circ f \circ h)$$

É claro que $\tilde{f}$ não depende de f , mas de $z = \hat{j}_o^1(f)$. Denotaremos por $\overline{z}$ o isomorfismo definido por $\tilde{f}$, de $T_{j_o^1(id)}B^1(\mathbb{R}^q)$ em $T_{j_o^1(\pi_\alpha \circ f)}B^1(\overline{U}_\alpha)$.

Seja π_1^2 é a projeção canônica de B_T^2 em B_T^1 . Temos que a diferencial da aplicação $\pi_T^1 : B_T^1(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow B^1(\overline{U})$ induz um isomorfismo, o qual denotaremos por $\overline{\pi}_{T*, \pi_1^2(z)}$,

entre Q_z^1 e $T_{j_o^1(\pi_\alpha \circ f)} B^1(\overline{U}_\alpha)$, isto é, $\overline{\pi_{T*}^1, \pi_1^2(z)}(\overline{v}) = \pi_{T*, \pi_1^2(z)}^1(v)$, onde v é qualquer representante de $\overline{v}$. Iremos denotar ainda por z o isomorfismo entre $T_{j_o^1(id)} B^1(\mathbb{R}^q) = \mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R})$ e Q_z^1 , definido pela composta $(\overline{\pi_{T*}^1, \pi_1^2(z)})^{-1} \circ \overline{z}$. Observe que a nossa notação faz sentido, uma vez que tal difeomorfismo depende apenas do elemento $z = \hat{j}_o^2(f) \in B_T^2$.

A FORMA FUNDAMENTAL de B_T^2 é a 1-forma Θ_T^2 em B_T^2 , com valores em $\mathbb{R}^q + gl(q, \mathbb{R})$, definida por

$$\Theta_T^2(X_z) = z^{-1}(\overline{(\pi_1^2)_*(X_z)})$$

para $z \in B_T^2$ e $X_z \in T_z B_T^2$.

Sejam U um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$ com coordenadas distinguidas locais $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$, $\pi : U \rightarrow \overline{U}$ a projeção sobre a variedade local e $(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^q)$ o correspondente sistema de coordenadas em $\overline{U}$.

Sejam $B_T^2(U, \mathcal{F}_U) = (p_T^2)^{-1}(U)$ e $B^2(\overline{U})$ o fibrado dos 2-referenciais sobre $\overline{U}$. Denotaremos por $\pi_T^2 : B_T^2(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow B^2(\overline{U})$ o levantamento da projeção π , ou seja, se $\hat{j}_o^2(f) \in B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ então $\pi_T^2(\hat{j}_o^2(f)) = j_o^2(\pi \circ f)$. Em outras palavras π_T^2 é tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} B_T^2(U, \mathcal{F}_U) & \xrightarrow{\pi_T^2} & B^2(\overline{U}) \\ p_T^2 \downarrow & & \downarrow p^2 \\ U & \xrightarrow{\pi} & \overline{U} \end{array}$$

onde $p^2 : B^2(\overline{U}) \rightarrow \overline{U}$ é a projeção. Logo, vale

$$p^2 \circ \pi_T^2 = \pi \circ p_T^2 \quad (2.1)$$

Além disso se $g = j_o^2(h) \in G^2(q)$ e $\widehat{j_o^2}(f) \in B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$, então

$$\pi_T^2(\widehat{j_o^2}(f)).g = j_o^2(\pi \circ f \circ h) = \pi_T^2(\widehat{j_o^2}(f \circ h))$$

isto é,

$$\mathcal{R}_g \circ \pi_T^2 = \pi_T^2 \circ \mathcal{R}_g \quad (2.2)$$

Seja σ_T^2 a seção natural associada às coordenadas distinguidas $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$ de U e σ^2 a seção natural associadas às correspondentes coordenadas $(\overline{y^1}, \dots, \overline{y^q})$ de $\overline{U}$. Como $\pi_T^2(\sigma_T^2(x))g = \sigma^2(\pi(x))g$, temos que o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \sigma_T^2(x)g & \longrightarrow & (x, g) \\ \pi_T^2 \downarrow & & \downarrow \pi \times id_{G^2(q)} \\ \sigma^2(\pi(x))g & \longrightarrow & (\pi(x), g) \end{array}$$

onde $id_{G^2(q)} : G^2(q) \rightarrow G^2(q)$ é a aplicação identidade, o que implica na comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} B_T^2(U, \mathcal{F}_U) & \longrightarrow & U \times G^2(q) \\ \pi_T^2 \downarrow & & \downarrow \pi^2 \times id_{G^2(q)} \\ B^2(\overline{U}) & \longrightarrow & \overline{U} \times G^2(q) \end{array}$$

LEMA 2.3.2. *Em $B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ temos:*

1. $\Theta_T^2 = (\pi_T^2)^* \Theta^2$, onde Θ^2 é a forma fundamental de $B^2(\overline{U})$;
2. $(\pi_T^2)_*(X_z) = 0 \iff i_{X_z} \Theta_T^2 = i_{X_z} d\Theta_T^2 = 0$

PROVA:

(1.) Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} B_T^2(U, \mathcal{F}_U) & \xrightarrow{\pi_T^2} & B^2(\overline{U}) \\ \pi_1^2 \downarrow & & \downarrow p_1^2 \\ B_T^1(U, \mathcal{F}_U) & \xrightarrow{\pi_T^1} & B^1(\overline{U}) \end{array}$$

onde p_1^2 é a projeção canônica.

Dado $z \in B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ e $X_z \in T_z B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$, temos que, por um lado

$$(\Theta_T^2)_z(X_z) = z^{-1}(\overline{(\pi_1^2)_{*,z} X_z}) \quad (2.3)$$

por outro lado

$$((\pi_T^2)^* \Theta^2)_z(X_z) = (\overline{z})^{-1}((p_1^2 \circ \pi_T^2)_*(X_z))_{p_1^2(\pi_T^2(z))} \quad (2.4)$$

Mas, $z = (\overline{\pi_{T*,\pi_1^2(z)}})^{-1} \circ \overline{z}$ e, além disso, o diagrama acima é comutativo, ou seja, $p_1^2 \circ \pi_T^2 = \pi_T^1 \circ \pi_1^2$, donde segue que $z^{-1}(\overline{(\pi_1^2)_{*,z} X_z}) = (\overline{z})^{-1}((p_1^2 \circ \pi_T^2)_*(X_z))_{p_1^2(\pi_T^2(z))}$.

(2.) Vamos supor primeiro que $(\pi_T^2)_* X_z = 0$. Então por (1.),

$$i_{X_z} \Theta_T^2 = i_{X_z} (\pi_T^2)^* \Theta^2 = 0$$

$$i_{X_z} d\Theta_T^2 = i_{X_z} (\pi_T^2)^* d\Theta^2 = 0$$

Vamos supor agora que $i_{X_z} \Theta_T^2 = i_{X_z} d\Theta_T^2 = 0$. Sejam $\overline{z} = \pi_T^2(z)$ e $\overline{X}_{\overline{z}} = (\pi_T^2)_*(X_z)$.

Então, por (1.),

$$i_{\overline{X}_{\overline{z}}} \Theta^2 = i_{\overline{X}_{\overline{z}}} d\Theta^2 = 0$$

Segue de $i_{\overline{X}_{\overline{z}}} \Theta^2 = 0$, que $\overline{X}_{\overline{z}}$ é vertical. Logo existe um elemento $A \in \mathcal{G}^2(q)$ tal que $\overline{X}_{\overline{z}} = A^*$. Ademais $\Theta^2(A^*) = 0$.

Portanto, $i_{A^*} d\Theta^2(Y) = A^* \Theta^2(Y)$, o que implica que $A^*(\Theta^2(Y))(\overline{z}) = 0$ para todo campo Y em $B^2(\overline{U})$. Segue daí que $A^* = 0$ e consequentemente $(\pi_T^2)_* X_z = 0$. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.3.3. Segue do item (1.) do lema 2.3.2 e de (1.1) que se $\Theta_T^2 = (\theta^i, \theta_j^i)$, então

$$d\theta^i = - \sum \theta_k^i \wedge \theta^k$$

PROPOSIÇÃO 2.3.4. A p -distribuição P_T^2 em $B_T^2(M, \mathcal{F})$, definida por

$$(P_T^2)_z = \{X_z \in T_z B_T^2(M, \mathcal{F}) \quad ; \quad i_{X_z} \Theta_T^2 = i_{X_z} d\Theta_T^2 = 0\}$$

é completamente integrável. A folheação $\mathcal{F}_T^2$, associada a P_T^2 satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{F}_T^2$ é invariante por translações à direita;
2. Se F^2 é uma folha de $\mathcal{F}$ então $p_T^2(F^2) = F$ é folha de $\mathcal{F}$;
3. $p_T^2|_{F^2} : F^2 \rightarrow F$ é um recobrimento.

PROVA: Pelo lema 2.3.2, P_T^2 é localmente dada pelo núcleo da submersão π_T^2 , isto é, $(P_T^2)_z = \ker(\pi_T^2)_{*,z}$, donde segue que P_T^2 é completamente integrável. Temos ainda que se U é um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$, então $B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ é um aberto distinguido de $\mathcal{F}_T^2$ e que $\pi_T^2 : B_T^2(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow B^2(\overline{U})$ é a projeção sobre a variedade quociente.

A afirmação de que $\mathcal{F}_T^2$ é invariante por translações à direita segue de (2.2) e a de que p_T^2 leva folhas de $\mathcal{F}_T^2$ em folha de $\mathcal{F}$ segue do fato de que $p^2 \circ \pi_T^2 = \pi \circ p_T^2$.

Agora, se F é folha de $(M, \mathcal{F})$, então para cada placa L de $F \cap U$, temos que $(p_T^2)^{-1}(L) \cap F^2$ é uma união de placas de F^2 , onde F^2 é a folha de $\mathcal{F}_T^2$ tal que $p_T^2(F^2) = F$. Além disso, cada uma dessas placas é (via projeção p_T^2), difeomorfa a L , o que mostra que $p_T^2|_{F^2} : F^2 \rightarrow F$ é um recobrimento. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.3.5. Temos que $\dim(P_T^2)_z = \dim(B_T^2(M, \mathcal{F})) - \text{posto}(\Theta_T^2)$ (ver Apêndice, pg 150 de [19]) e, pelo lema 2.3.2, que $\text{posto}(\Theta_T^2) = \text{posto}(\Theta^2)$. Segue daí que, se Θ^2 é a forma fundamental de $B^2(N)$, onde N é uma variedade de dimensão n , então Θ^2 tem posto máximo, igual a dimensão de $B^2(N)$ ou seja,

$$\text{posto}(\Theta^2) = n + n^2 + n\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{2}$$

2.4 G -estruturas transversas de segunda ordem

Sejam G um subgrupo de Lie de $G^2(q)$ e E_T^2 um subfibrado principal de B_T^2 com grupo de estrutura G . Dizemos que E_T^2 é uma G -ESTRUTURA TRANSVERSA (de ordem 2) se em cada ponto $z \in E_T^2$, o espaço tangente $T_z E_T^2$ contém o subespaço $(P_T^2)_z$, dos vetores tangentes a folha da folheação $\mathcal{F}_T^2$ no ponto z .

LEMA 2.4.1. Se E_T^2 é uma G -estrutura transversa, então ela é uma união de folhas da folheação $\mathcal{F}_T^2$.

PROVA: Para cada carta folheada (U, φ) de $(M, \mathcal{F})$, existe uma seção local σ_T^2 , com valores em E_T^2 a qual define uma trivialização local $B_T^2(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow U \times G^2(q)$, que associa $E_T^2|_U$ a $U \times G$ e $\mathcal{R}_g E_T^2|_U$ a $U \times Gg$ para todo $g \in G^2(q)$. Logo, E_T^2 e suas imagens por translações à direita constitui uma folheação em B_T^2 , cuja distribuição associada PE_T^2 está definida, em cada ponto z por $T_z E_T^2$. Como por hipótese $(P_T^2)_z \subset T_z E_T^2$, isto implica que as folhas de $\mathcal{F}_T^2$ estão contidas nas folhas da folheação definida por PE_T^2 . Assim sendo, temos que E_T^2 é uma união de folhas da folheação $\mathcal{F}_T^2$. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.4.2. *Seja E_T^2 um subfibrado principal de B_T^2 , com grupo de estrutura G . As seguintes condições são equivalentes:*

1. E_T^2 é uma G -estrutura transversa;
2. Para cada aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$, a restrição $E_T^2|_U$ é o pull-back pela projeção π_T^2 , de uma G -estrutura sobre a variedade quociente local $\bar{U}$.

PROVA:

(1) $\implies$ (2) Observe primeiro que a folheação em $B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ é simples, definida pela submersão $\pi_T^2 : B_T^2(U, \mathcal{F}_U) \rightarrow B^2(\bar{U})$. Então, pelo lema 2.4.1, $E_T^2|_U$ é dada pelo pull-back, pela projeção π_T^2 , de sua imagem em $B^2(\bar{U})$.

(2) $\implies$ (1) Se para cada aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$, a restrição $E_T^2|_U$ é o pull-back pela projeção π_T^2 , de uma G -estrutura $E^2(\bar{U})$, sobre a variedade quociente local $\bar{U}$, então

$$E_T^2|_U = \bigcup_{\bar{z} \in E^2(\bar{U})} (\pi_T^2)^{-1}(\bar{z})$$

Logo, para cada $z \in E_T^2$, o espaço tangente $T_z E_T^2$ contém $(P_T^2)_z$, donde segue que E_T^2 é uma G -estrutura transversa. $\square$

EXEMPLO 2.4.3 (Estruturas projetivas transversas). *Se $G = H^2(q)$ (ver seção 1.2), uma G -estrutura transversa é dita ser uma ESTRUTURA PROJATIVA TRANSVERSA em $(M, \mathcal{F})$. Se $(M, \mathcal{F})$ admite uma estrutura projetiva transversa, dizemos que ela é uma FOLHEAÇÃO TRANSVERSALMENTE PROJATIVA.*

Pela proposição 2.4.2, E_T^2 é uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$ se, e somente se, para cada aberto distinguido U_α de $(M, \mathcal{F})$, $E_T^2|_{U_\alpha}$ é o pull-back pela

projeção $(\pi_T^2)_\alpha$ de uma estrutura projetiva sobre a variedade quociente $\bar{U}_\alpha$. Portanto, se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva, as mudanças de coordenadas transversas $g_{\alpha\beta}$ são difeomorfismos projetivos locais, entre as variedades $\bar{U}_\beta$ e $\bar{U}_\alpha$, ou seja, seus levantamentos levam a estrutura projetiva $E^2(\bar{U}_\beta)$ na estrutura projetiva $E^2(\bar{U}_\alpha)$.

EXEMPLO 2.4.4 (Estruturas afins transversas). O grupo $GL(q, \mathbb{R})$ pode ser considerado como um subgrupo de $G^2(q)$, constituído do elementos (a_j^i, a_{jk}^i) , tais que $a_{jk}^i = 0$. Uma $GL(q, \mathbb{R})$ -estrutura transversa é chamada de uma ESTRUTURA AFIM TRANSVERSA. Uma folheação munida de uma tal estrutura é dita ser uma FOLHEAÇÃO (TRANSVERSALMENTE) AFIM.

EXEMPLO 2.4.5 (Estruturas riemannianas transversas). Como o grupo $O(q)$ é um subgrupo de $GL(q, \mathbb{R})$, o mesmo pode ser visto como um subgrupo de $G^2(q)$. As $O(q)$ -estruturas transversas são chamadas uma ESTRUTURAS RIEMANNIANAS TRANSVERSAS. Uma folheação $(M, \mathcal{F})$ é dita ser uma FOLHEAÇÃO RIEMANNIANA se admite uma estrutura riemanniana transversa.

EXEMPLO 2.4.6 (Estruturas conformes transversas). Seja $\mathbb{R}^q$ munido de uma métrica $g = (g_{ij})$. Seja $K^2(q)$ o subconjunto de $G^2(q)$ constituído dos elementos da forma (a_j^i, a_{jk}^i) , tais que $\sum g_{kl} a_l^k a_j^l = \rho g_{ij}$, $(\rho > 0)$ e $a_{jk}^i = \sum g^{sl} g_{jk} a_s a_l^i - a_j^i a_k - a_k^i a_j$ para algum a_j . Então $K^2(q)$ é um subgrupo de $G^2(q)$, de dimensão $q\frac{q+1}{2} + 1$ (ver [19]). Uma $K^2(q)$ -estrutura transversa é dita ser um ESTRUTURA CONFORME TRANSVERSA. Uma folheação munida de uma $K^2(q)$ -estrutura transversa é dita ser uma FOLHEAÇÃO TRANSVERSALMENTE CONFORME.

Capítulo 3

Folheações transversalmente projetivas

Neste capítulo nos utilizamos do formalismo obtido no capítulo anterior para estudar as folheações transversalmente projetivas. Definimos conexão projetiva transversa normal, adaptada a estrutura projetiva transversa E_T^2 e obtemos alguns resultados sobre este tipo de folheação.

3.1 Definição e exemplos

Lembramos que $(M, \mathcal{F})$ é uma FOLHEAÇÃO TRANSVERSALMENTE PROJATIVA se admite uma estrutura projetiva transversa E_T^2 ou, equivalentemente, as mudanças de coordenadas transversas $g_{\alpha\beta}$ são transformações projetivas (ver exemplo 2.4.3).

EXEMPLO 3.1.1. *Sejam F uma variedade diferenciável e $f_1, \dots, f_p$ difeomorfismos de F , com $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$. Na variedade produto $\mathbb{R}^p \times F$, considere a seguinte relação de equivalência: $(t_1, \dots, t_p, x) \sim (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_p, \tilde{x})$ se, e somente se, existe $k = (k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{Z}^p$, tal que $t_i - \tilde{t}_i = k_i$, $i = 1, \dots, p$ e $\tilde{x} = f_1^{k_1} \circ \dots \circ f_p^{k_p}(x)$ (onde $f_i^{k_i}(x) = f_i \circ \dots \circ f_i(x)$, k_i -vezes).*

Sejam $M = \mathbb{R}^p \times F / \sim$ o espaço quociente, munido da topologia quociente e $\pi : \mathbb{R}^p \times F \rightarrow M$ a projeção. Temos que π é uma aplicação de recobrimento e que M está munida de uma estrutura de variedade diferenciável, para a qual, π é um difeomorfismo local.

Em $\mathbb{R}^p \times F$, considere a folheação $\mathcal{F}_o$, dada pela projeção $p : \mathbb{R}^p \times F \rightarrow F$, $p(t, x) = x$, cujas folhas são os espaços $\mathbb{R}^p \times \{x\}$. A folheação $\mathcal{F}_o$ induz uma folheação $\mathcal{F}$ em M , chamada de suspensão dos difeomorfismos $f_1, \dots, f_p$, cujos abertos distinguidos são obtidos da seguinte maneira: tomemos uma cobertura de $\mathbb{R}^p \times F$ por abertos distinguidos U_{α_i} de $\mathcal{F}_o$, tais que $\pi|_{U_{\alpha_i}} : U_{\alpha_i} \rightarrow U'_{\alpha_i}$ é um difeomorfismo. Então $\{U'_{\alpha_i}\}$ é uma cobertura de M por abertos distinguidos de $\mathcal{F}$, em outras palavras, as cartas distinguidas de $\mathcal{F}$ são dadas pelos pares $(U'_{\alpha_i}, \varphi_i)$, onde $\varphi_i = p \circ (\pi|_{U_{\alpha_i}})^{-1} : U'_{\alpha_i} \rightarrow U_{\alpha_i}$.

Portanto, se $U'_{\alpha_i} \cap U'_{\alpha_j} \neq \emptyset$, temos que ou $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ ou $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} = \emptyset$, o que implica que a mudança de coordenadas transversas $g_{\alpha_i \alpha_j} : U'_{\alpha_i} \cap U'_{\alpha_j} \rightarrow U'_{\alpha_i} \cap U'_{\alpha_j}$ é ou a aplicação identidade ou existe $k = (k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{Z}^p$ tal que $g_{\alpha_i \alpha_j}(x) = f_1^{k_1} \circ \dots \circ f_p^{k_p}(x)$.

Assim sendo, temos que o pseudo-grupo Γ , formado pelas aplicações $g_{\alpha_i \alpha_j}$ é gerado pelos difeomorfismos $f_1, \dots, f_p$. Então, se a variedade F está munida de uma estrutura projetiva e as aplicações $f_1, \dots, f_p$ são transformações projetivas, a folheação $\mathcal{F}$ será transversalmente projetiva.

EXEMPLO 3.1.2. *No exemplo anterior, considere $F = P^1(\mathbb{R})$ e seja f o difeomorfismo projetivo, definido por $f(x) = \frac{-1}{x-2}$. Como f preserva a orientação de $P^1(\mathbb{R})$,*

obtemos uma folheação no toro T^2 , transversalmente projetiva, constituída de uma folha compacta (obtida quando $x = 1$), homeomorfa a S^1 e de folhas homeomorfas a $\mathbb{R}$, que se acumulam na folha compacta.

EXEMPLO 3.1.3. Se no exemplo acima tomarmos $f(x) = \frac{1}{x}$, obteremos uma folheação da garrafa de Klein (pois neste caso f não preseva a orientação de $P^1(\mathbb{R})$), transversalmente projetiva, constituída de duas folhas compactas (obtidas quando $x = 1$ e $x = -1$), homeomorfas a S^1 e de folhas homeomorfas a $\mathbb{R}$, que se acumulam nas folhas compactas.

EXEMPLO 3.1.4. Sejam $G = PGL(q, \mathbb{R}) = GL(q+1, \mathbb{R})/\text{CENTRO}$ e H o grupo de isotropia do ponto $\mathcal{O} \in P^q(\mathbb{R})$. Sejam ainda G_o a componente da identidade de G , $K = H \cap G_o$ e H_o o grupo das matrizes da forma

$$H_o = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} ; \quad A \in SO(q) \right\}$$

A variedade $M_o = G_o/H_o$ está munida de uma G_o -folheação $\mathcal{F}_o$, cujas folhas são fibras da fibração $M_o = G_o/H_o \rightarrow G_o/K$ (observe que $H_o \subset K \subset G_o$). É claro que a variedade $L = G_o/K$ é difeomorfa ao espaço projetivo real $P^q(\mathbb{R})$ de dimensão q e que cada elemento de G age em L como uma transformação projetiva. Seja Γ um subgrupo discreto de G_o tal que $M = M_o/\Gamma$ é uma variedade fechada (ver [4]). Então M está munida de uma folheação transversalmente projetiva, de codimensão q induzida, de maneira natural, pela folheação $\mathcal{F}_o$.

EXEMPLO 3.1.5 (Roussarie). Sejam $G = SL(2, \mathbb{R})$ e $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de G .

Uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathcal{G}$ pode ser identificada com as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfazendo $[Y, Z] = -X$, $[Z, X] = 2Z$ e $[X, Y] = 2Y$.

Sejam $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a base dual de $\{X, Y, Z\}$. Usando a operação de colhete acima, conclui-se que

$$d\alpha = \gamma \wedge \beta, \quad d\beta = 2\beta \wedge \alpha, \quad d\gamma = 2\alpha \wedge \gamma \quad (3.1)$$

Tem-se ainda que a 1-forma $\omega = \gamma$ é sem singularidade e portanto, define uma folheação de codimensão $q = 1$ em G . O núcleo de ω é gerado pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

Observe que, se usarmos a notação $\theta = 2\alpha$ e $\eta = 2\beta$, então as igualdades (3.1) serão expressa da seguinte maneira:

$$d\omega = \theta \wedge \omega, \quad d\theta = \omega \wedge \eta, \quad d\eta = \eta \wedge \theta$$

donde se conclui, por um teorema de R. Blumenthal (ver [3] e/ou [5]), que a folheação definida por ω é transversalmente projetiva homogênea.

Seja E_T^2 uma estrutura projetiva transversa. Iremos denotar ainda por $\Theta_T^2 = (\theta^i, \theta_j^i)$ a forma fundamental de B_T^2 restrita a E_T^2 , e a chamaremos de FORMA FUNDAMENTAL DE E_T^2 .

LEMA 3.1.6. *Sejam E_T^2 uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$ e Θ_T^2 a forma fundamental de E_T^2 . Então $\mathcal{R}_g^* \Theta_T^2(X) = ad(g^{-1}) \Theta_T^2(X)$, para todo $g \in H^2(q)$ e todo X tangente a E_T^2 , onde ad denota a restrição a $H^2(q)$ da aplicação ad de $G^2(q)$.*

PROVA: Conseqüência do lema 2.4.2 e da proposição 1.2.1. $\square$

3.2 Conexões projetivas transversas

Sejam B_T^2 o fibrado dos 2-referenciais transversos de $(M, \mathcal{F})$ e $(B_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ a folheação levantada (ver proposição 2.3.4). Sejam K um subgrupo de Lie fechado de um grupo de Lie G tal que $\dim G/K = q$ e $\mathcal{K}$ e $\mathcal{G}$ as álgebras de Lie de K e G respectivamente. Seja E_T^2 uma K -estrutura transversa em B_T^2 . Uma 1-forma ω_T em E_T^2 , com valores em $\mathcal{G}$ é uma CONEXÃO DE CARTAN TRANSVERSA em E_T^2 se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\omega_T(A^*) = A$ para todo $A \in \mathcal{K}$;
2. $\mathcal{R}_g^* \omega_T = ad(g^{-1}) \omega_T$ para todo $g \in K$, onde ad denota a restrição a K da aplicação ad de G ;
3. $\omega_T(X_z) = 0$ se, e somente se, X_z é tangente a $\mathcal{F}_T^2$ em $z \in E_T^2$.

Se ω_T é uma conexão de Cartan transversa, definimos a FORMA DE CURVATURA de ω_T como sendo a 2-forma Ω_T , que satisfaz a equação

$$d\omega_T + \frac{1}{2}[\omega_T, \omega_T] = \Omega_T$$

onde $[\omega_T, \omega_T](X, Y) = 2[\omega_T(X), \omega_T(Y)]$.

Suponha que $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva e seja E_T^2 é uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$, isto é, uma $H^2(q)$ -estrutura transversa (ver exemplo 2.4.3). Se ω_T é uma conexão de Cartan transversa em E_T^2 , com valores em $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R})$, dizemos que ω_T é uma CONEXÃO PROJETIVA TRANSVERSA.

Iremos supor, daqui por diante, que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva.

Sejam ω_T uma conexão projetiva transversa, (a^i, a_j^i, a_j) o sistema de coordenadas de $PGL(q, \mathbb{R})$ definido numa vizinhança da identidade (ver seção 1.2) e $\{E_i, E_i^j, E^j\}$ a base de $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R})$, dada por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial a^i}|_{id}, \quad E_i^j = \frac{\partial}{\partial a_j^i}|_{id}, \quad E^j = \frac{\partial}{\partial a_j}|_{id}$$

Com relação a esta base, ω_T é dada pelas 1-formas $\omega^i, \omega_j^i, \omega_j$, ou seja

$$\omega_T = \sum \omega^i E_i + \sum \omega_j^i E_i^j + \sum \omega_j E^j$$

Iremos usar a notação $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ para representar uma conexão projetiva transversa em E_T^2 .

EXEMPLO 3.2.1. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão $q = 1$. Então para a estrutura projetiva transversa E_T^2 em $(M, \mathcal{F})$ existe uma conexão projetiva transversa $\omega_T = (\omega^1, \omega_1^1, \omega_1)$, adaptada a E_T^2 , isto é, tal que $\omega^1 = \theta^1, \omega_1^1 = \theta_1^1$, onde $\Theta_T^2 = (\theta^1, \theta_1^1)$ é a forma fundamental de E_T^2 . De fato, para cada aberto distinguido U_α de $(M, \mathcal{F})$ temos que $E_T^2|_{U_\alpha}$ é o pull-back por $(\pi_T^2)_\alpha$ de uma estrutura projetiva $E^2(\bar{U}_\alpha)$ sobre a variedade quociente local $\bar{U}_\alpha$ e $\Theta_T^2 = (\pi_T^2)_\alpha^* \Theta^2$ em*

$E_T^2|_{U_\alpha}$, onde Θ^2 é a forma fundamental de $E^2(\overline{U}_\alpha)$. Como $(M, \mathcal{F})$ é de codimensão 1, $\overline{U}_\alpha$ é um subconjunto aberto de $P^1(\mathbb{R})$ e portanto $E^2(\overline{U}_\alpha) \subset PGL(1, \mathbb{R})$. Além disso, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe um elemento $g_{\alpha\beta}$ de $PGL(1, \mathbb{R})$ tal que $(\pi_T^2)_\alpha = L_{g_{\alpha\beta}} \circ (\pi_T^2)_\beta$ em $E_T^2|_{U_\alpha} \cap E_T^2|_{U_\beta}$.

Seja $\gamma = (\gamma^1, \gamma_1^1, \gamma_1)$ a forma de Maurer-Cartan de $PGL(1, \mathbb{R})$ que coincide com a forma (da^1, da_1^1, da_1) na identidade. Neste caso tem-se que (γ^1, γ_1^1) é a forma fundamental de $PGL(1, \mathbb{R})$ (ver exemplo 1.3.1).

Em $E_T^2|_{U_\alpha}$, considere a forma $\omega_\alpha = (\pi_T^2)_\alpha^* \gamma$. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\omega_\alpha = \omega_\beta$ em $E_T^2|_{U_\alpha} \cap E_T^2|_{U_\beta}$ uma vez que, nesta interseção, temos

$$\omega_\alpha = (\pi_T^2)_\alpha^* \gamma = (L_{g_{\alpha\beta}} \circ (\pi_T^2)_\beta)^* \gamma = (\pi_T^2)_\beta^* \gamma = \omega_\beta$$

pois γ é invariante por translação à esquerda. Donde segue o afirmado.

OBSERVAÇÃO 3.2.2. Segue do exemplo anterior que, se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva, de codimensão $q = 1$, então ela é transversalmente homogênea.

Chamaremos a conexão projetiva transversa definida no exemplo 3.2.1 de CONEXÃO PROJETIVA TRANSVERSA CANÔNICA, adaptada a estrutura projetiva transversa E_T^2 .

Observe que a conexão projetiva transversa canônica $\omega_T = (\omega^1, \omega_1^1, \omega_1)$ satisfaz as seguintes equações de estrutura (ver seção 1.2):

$$d\omega^1 = -\omega_1^1 \wedge \omega^1$$

$$d\omega_1^1 = -2\omega^1 \wedge \omega_1$$

$$d\omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_1^1$$

o que implica que a curvatura Ω_T de ω_T é nula.

Vamos supor agora que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva de codimensão $q \geq 2$ e seja E_T^2 uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$. Dado um aberto distinguido U_α de $(M, \mathcal{F})$, seja $E^2(\overline{U}_\alpha)$ a estrutura projetiva em $B^2(\overline{U}_\alpha)$ tal que $E_T^2|_{U_\alpha} = (\pi_T^2)_\alpha^{-1}(E^2(\overline{U}_\alpha))$. Como $\dim U_\alpha = q \geq 2$, pelo teorema 1.3.2, $E^2(\overline{U}_\alpha)$ está munida de uma única conexão projetiva normal $\overline{\omega}_\alpha = (\overline{\omega}_\alpha^i, \overline{\omega}_{j_\alpha}^i, \overline{\omega}_{j_\alpha})$ adaptada à $E^2(\overline{U}_\alpha)$, isto é, $\overline{\theta}^i = \overline{\omega}_\alpha^i$, $\overline{\theta}_j^i = \overline{\omega}_{j_\alpha}^i$, onde $\overline{\Theta}^2 = (\overline{\theta}^i, \overline{\theta}_j^i)$ é a forma fundamental de $E^2(\overline{U}_\alpha)$. Logo, em $E_T^2|_{U_\alpha}$ podemos definir uma conexão projetiva transversa por $\omega_\alpha = (\pi_T^2)_\alpha^* \overline{\omega}_\alpha$.

Observe que, como $\omega_\alpha = (\omega_\alpha^i, \omega_{\alpha j}^i, \omega_{\alpha j})$ é o pull-back de $\overline{\omega}_\alpha$ ela satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (I) \quad & d\omega_\alpha^i = -\sum \omega_{\alpha k}^i \wedge \omega_\alpha^k \\ (II) \quad & d\omega_{\alpha j}^i = -\sum \omega_{\alpha k}^i \wedge \omega_{\alpha j}^k - \omega_\alpha^i \wedge \omega_{\alpha j} + \delta_j^i \sum \omega_{\alpha k} \wedge \omega_\alpha^k + \Omega_{\alpha j}^i \\ (III) \quad & d\omega_{\alpha j} = -\sum \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{\alpha j}^k + \Omega_{\alpha j} \\ (IV) \quad & \sum K_{\alpha j i k}^i = 0, \quad \sum K_{\alpha i l k}^i = 0 \quad (\implies \sum \Omega_{\alpha i}^i = 0) \end{aligned}$$

onde $\Omega_{\alpha j}^i = \frac{1}{2} \sum K_{\alpha j l k}^i \omega_\alpha^l \wedge \omega_\alpha^k$.

Iremos mostrar que estas condições nos permite obter uma conexão projetiva transversa global em E_T^2 .

Começaremos mostrando que se duas conexões projetivas transversas em E_T^2 satisfazem as condições (I), (II), (III) e (IV) acima, elas são iguais. De fato, suponha que $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ e $\overline{\omega}_T = (\overline{\omega}^i, \overline{\omega}_j^i, \overline{\omega}_j)$ são duas conexões projetivas transversas em E_T^2 satisfazendo (I), (II), (III) e (IV). Então, pelas condições da definição de conexão de Cartan transversa, temos que $\overline{\omega}_T = \omega_T$ nos vetores tangentes às fibras e

nos vetores tangentes às folhas de $\mathcal{F}_T^2$. Portanto, existem funções A_{jk} em E_T^2 tais que

$$\bar{\omega}_j - \omega_j = \sum_k A_{jk} \omega^k \quad (3.2)$$

Sejam $(\Omega^i, \Omega_j^i, \Omega_j)$ e $(\bar{\Omega}^i, \bar{\Omega}_j^i, \bar{\Omega}_j)$ as curvaturas de ω_T e $\bar{\omega}_T$ respectivamente. Então

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum_{l,k} K_{jlk}^i \omega^l \wedge \omega^k \quad (3.3)$$

$$\bar{\Omega}_j^i = \frac{1}{2} \sum_{l,k} \bar{K}_{jlk}^i \omega^l \wedge \omega^k \quad (3.4)$$

Além disso, como $\omega_{ij} = \bar{\omega}_{ij}$, temos também que

$$d\omega_j^i = - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega^i \wedge \omega_j + \delta_j^i \sum_k \omega_k \wedge \omega^k + \Omega_j^i \quad (3.5)$$

$$d\bar{\omega}_j^i = - \sum_k \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k - \bar{\omega}^i \wedge \bar{\omega}_j + \delta_j^i \sum_k \bar{\omega}_k \wedge \bar{\omega}^k + \bar{\Omega}_j^i \quad (3.6)$$

Igualando as expressões acima obtemos:

$$\omega^i \wedge (\omega_j - \bar{\omega}_j) + \delta_j^i \sum_k (\bar{\omega}_k - \omega_k) \wedge \omega^k + \bar{\Omega}_j^i - \Omega_j^i = 0 \quad (3.7)$$

Usando (3.2), (3.3) e (3.4) em (3.7), temos

$$- \sum_k A_{jk} \omega^i \wedge \omega^k + \delta_j^i \sum_{k,l} A_{kl} \omega^l \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} (\bar{K}_{jlk}^i - K_{jlk}^i) \omega^l \wedge \omega^k = 0 \quad (3.8)$$

ou, equivalentemente,

$$\left(- \sum_{k,l} (\delta_l^i A_{jk} - \delta_k^i A_{jl}) + \delta_j^i \sum_{k,l} (A_{kl} - A_{lk}) + \sum_{k,l} (\bar{K}_{jlk}^i - K_{jlk}^i) \right) \omega^l \wedge \omega^k = 0 \quad (3.9)$$

Portanto,

$$-\delta_l^i A_{jk} + \delta_k^i A_{jl} + \delta_j^i A_{kl} - \delta_j^i A_{lk} = K_{jlk}^i - \bar{K}_{jlk}^i \quad (3.10)$$

Quando $j = i$ em (3.10), obtemos

$$-\delta_l^i A_{lk} + \delta_k^i A_{kl} + A_{kl} - A_{lk} = K_{ilk}^i - \bar{K}_{ilk}^i$$

Somando em i e usando o fato de que $\sum K_{ilk}^i = \sum \bar{K}_{ilk}^i = 0$, temos

$$-A_{lk} + A_{kl} + q(A_{kl} - A_{lk}) = 0 \implies (q+1)(A_{kl} - A_{lk}) = 0$$

isto é, $A_{kl} = A_{lk}$.

Quando $l = i$ em (3.10), obtemos

$$-A_{jk} + \delta_k^i A_{jk} + A_{kj} - A_{jk} = K_{jik}^i - \bar{K}_{jik}^i$$

Somando em i , temos que

$$qA_{jk} - A_{jk} = 0 \implies (q-1)A_{jk} = 0 \implies A_{jk} = 0$$

uma vez que $q \geq 2$. Portanto $\omega_j = \bar{\omega}_j$, o que implica que $\omega_T = \bar{\omega}_T$.

Se U_α e U_β são dois abertos distinguidos tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ as conexões projetivas ω_α e ω_β irão satisfazer, em $E_T^2|_{U_\alpha} \cap E_T^2|_{U_\beta}$, as propriedades (I), (II), (III) e (VI). Portanto, pelo que foi visto acima, $\omega_\alpha = \omega_\beta$ em $E_T^2|_{U_\alpha} \cap E_T^2|_{U_\beta}$. Logo, obtemos via pull-back, uma conexão projetiva transversa em E_T^2 . Resumindo, temos o seguinte teorema:

TEOREMA 3.2.3. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão $q \geq 2$. Então, para cada estrutura projetiva transversa E_T^2 em $(M, \mathcal{F})$, existe um única conexão projetiva transversa $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$, satisfazendo as seguintes condições:*

- (I) $d\omega^i = -\sum \omega_k^i \wedge \omega^k \quad (\omega^i = \theta^i, \omega_j^i = \theta_j^i)$
- (II) $d\omega_j^i = -\sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega^i \wedge \omega_j + \delta_j^i \sum \omega_k \wedge \omega^k + \Omega_j^i$
- (III) $d\omega_j = -\sum \omega_k \wedge \omega_j^k + \Omega_j$
- (IV) $\sum K_{jik}^i = 0, \quad \sum K_{ilk}^i = 0 \quad (\implies \sum \Omega_i^i = 0)$

onde $\Theta_T^2 = (\theta^i, \theta_j^i)$ é a forma fundamental de E_T^2 e $\Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum K_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$.

A conexão projetiva transversa $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ satisfazendo as condições do teorema 3.2.3 será chamada de CONEXÃO PROJETIVA TRANSVERSA NORMAL, adaptada à estrutura projetiva E_T^2 .

Daqui por diante $\omega_T = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$ irá denotar uma conexão projetiva transversa normal adaptada a E_T^2 (quando $q \geq 2$) ou a conexão projetiva transversa canônica (quando $q = 1$).

3.3 Paralelismo transverso canônico

Se X^2 é um campo de vetores folheado, definido num aberto distinguido U^2 de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$, então $\omega_T(X^2)$ independe da componente tangente às folhas de $\mathcal{F}_T^2$, ou seja, só depende do campo transverso $\overline{X}^2$. Portanto, podemos definir

$$\omega_T(\overline{X}^2) = \omega_T(X^2) \quad (3.11)$$

onde $\overline{X}^2$ é o campo transverso associado à X^2 .

Observe ainda que, dado um aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$, a aplicação $(\pi_T^2)_*$ (que relaciona os campos folheados de U com os campos diferenciáveis de $E^2(\overline{U})$), induz um isomorfismo da álgebra dos campos transversos em $E_T^2(U)$ na álgebra $\Xi(E^2(\overline{U}))$, uma vez que $(\pi_T^2)_*$ tem como núcleo, o conjunto dos campos tangentes às folhas de $\mathcal{F}_T^2|_U$. Portanto, para cada campo de vetores $X_{\overline{U}}$ em $E^2(\overline{U})$, existe um único campo transverso $\overline{X}$, da folheação $(E_T^2(U), \mathcal{F}_T^2|_U)$, tal que $\pi_{T*}^2(\overline{X}) = X_{\overline{U}}$.

Sejam U , um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$ e $\bar{U}$ a variedade quociente local. Dado $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^q) \in \mathbb{R}^q$, seja $\tilde{\xi}$ o campo básico em $E^2(\bar{U})$ associado a ξ e $\bar{\xi}_T$ o único campo transversal em $E_T^2(U)$, definido pelo pull-back de $\tilde{\xi}$, isto é, $\bar{\xi}_T$ é tal que $(\pi_T^2)_*(\bar{\xi}_T) = \tilde{\xi}$. O campo transversal $\bar{\xi}_T$ será chamado de CAMPO BÁSICO TRANSVERSO associado ao elemento $\xi \in \mathbb{R}^q$. A princípio tal campo está definido localmente, mas como para todo aberto distinguido U , $\omega_T = (\pi_T^2)^*\omega_{\bar{U}}$, temos que o tal campo, está caracterizado pela relação

$$\omega^i(\bar{\xi}_T) = \xi^i, \quad \omega_j^i(\bar{\xi}_T) = \omega_j(\bar{\xi}_T) = 0$$

donde segue que o mesmo é um campo global em E_T^2 .

De modo análogo, se $A \in \mathcal{H}^2(q)$, o mesmo define um campo transversal global $\bar{A}_T^*$ em E_T^2 , caracterizado pela relação

$$\omega_T(\bar{A}_T^*) = (0, A) \in \mathbb{R}^q + \mathcal{H}^2(q),$$

o qual chamaremos de CAMPO FUNDAMENTAL TRANSVERSO, associado ao elemento $A \in \mathcal{H}^2(q)$.

Seja $\{E_i, E_i^j, E^j\}$ a base de $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^q + \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R}) + (\mathbb{R}^q)^*$ como anteriormente.

Então, os campos

$$\{\bar{E}_{iT}, \bar{E}_{iT}^{j*}, \bar{E}_T^{j*}\}$$

definem um paralelismo transversal em $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$, o qual chamaremos de PARALELISMO TRANSVERSO CANÔNICO.

3.4 Transformações projetivas infinitesimais transversas

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação de codimensão q , X um campo de vetores folheado local em $(M, \mathcal{F})$, definido num aberto distinguido U e $(\varphi_t), |t| < \epsilon$ o grupo a um parâmetro local associado a X . Pela proposição 2.1.5, cada φ_t preserva a folheação. Logo, se f é uma aplicação transversa a $(M, \mathcal{F})$ em U , a composta $\varphi_t \circ f$ é também uma aplicação transversa a $(M, \mathcal{F})$. Isto nos permite definir o levantamento φ_t^2 de φ_t em $B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ da seguinte maneira: se $z = \hat{j}_o^2(f) \in B_T^2(U, \mathcal{F}_U)$ então $\varphi_t^2(\hat{j}_o^2(f)) = \hat{j}_o^2(\varphi_t \circ f)$. O campo de vetores X^2 associado ao grupo a 1-parâmetro $(\varphi_t^2), |t| < \epsilon$ é chamado de LEVANTAMENTO NATURAL DO CAMPO X .

Se $g = j_o^2(h) \in G^2(q)$, então

$$\varphi_t^2(\mathcal{R}_g z) = \hat{j}_o^2(\varphi_t \circ f \circ h) = \hat{j}_o^2(\varphi_t \circ f) \circ j_o^2(h) = \mathcal{R}_h \varphi_t^2(z)$$

ou seja, vale $X_{zg}^2 = \mathcal{R}_{g*} X_z^2$ o que quer dizer que o campo X^2 é invariante pela ação à direita de $G^2(q)$. Além disso temos que X^2 é projetável em M , com $p_{T*}^2 X^2 = X$.

Observe também que, como para cada aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$, φ_t preserva a folheação $\mathcal{F}_U$, tem-se que φ_t^2 preserva a folheação levantada, o que significa que X^2 é um campo de vetores folheado com relação a folheação $\mathcal{F}_T^2$. Portanto o campo transversal $\overline{X}^2$ associado ao levantamento X^2 de X depende somente do campo transversal $\overline{X}$. Iremos dizer que $\overline{X}^2$ é o LEVANTAMENTO NATURAL DO CAMPO TRANSVERSO $\overline{X}$.

Sejam X um campo folheado, definido num aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$ e X^2

o seu levantamento natural. Como o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} B_T^2(U, \mathcal{F}_U) & \xrightarrow{\pi_T^2} & B^2(\overline{U}) \\ p_T^2 \downarrow & & \downarrow p^2 \\ U & \xrightarrow{\pi} & \overline{U} \end{array}$$

temos que, se o campo transversal $\overline{X}$ se projeta no campo de vetores $X_{\overline{U}}$ na variedade quociente local, então $\overline{X}^2$ se projeta no levantamento natural $X_{\overline{U}}^2$ de $X_{\overline{U}}$ em $B^2(\overline{U})$.

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q sobre uma variedade diferenciável, conexa M de dimensão n e E_T^2 uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$. Um difeomorfismo φ de M é dito ser projetivo transversal (com relação a E_T^2) se o seu levantamento φ^2 em B_T^2 , aplica E_T^2 nele mesmo. Um campo de vetores folheado X em $(M, \mathcal{F})$ é dito ser uma TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA INFINITESIMAL PARA A ESTRUTURA PROJETIVA E_T^2 se o grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos locais gerado por X , consiste de difeomorfismos projetivos transversos locais.

Seja X uma transformação projetiva infinitesimal para a estrutura projetiva E_T^2 . O campo transversal $\overline{X}$ associado a X será chamado de uma TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA INFINITESIMAL TRANSVERSA.

OBSERVAÇÃO 3.4.1. *Segue da definição de transformações projetivas infinitesimais transversas, que se U um aberto distinguido de $(M, \mathcal{F})$, então um campo transversal $\overline{X}$ em U é uma transformação projetiva infinitesimal transversa se, e somente se, sua projeção $X_{\overline{U}}$ na variedade quociente local $\overline{U}$ é uma transformação projetiva infinitesimal para a estrutura projetiva $E^2(\overline{U})$.*

Iremos denotar por $\wp(M, \mathcal{F})$ a álgebra das transformações projetivas infinitesimais

transversas em $(M, \mathcal{F})$.

PROPOSIÇÃO 3.4.2. *Sejam X um campo de vetores folheado, definido num aberto distinguido U de $(M, \mathcal{F})$ e $\overline{X}$ o campo transversal associado a X . Seja $\overline{X}^2$ o levantamento natural de $\overline{X}$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. $\overline{X}$ é uma transformação projetiva infinitesimal transversal;
2. $\mathcal{L}_{\overline{X}^2} \omega_T = 0$ onde $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie;
3. $\mathcal{L}_{\overline{X}^2} \bar{\xi}_T = 0$ e $\mathcal{L}_{\overline{X}^2} \bar{A}_T^* = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^q$ e $A \in \mathcal{H}$

PROVA: Consequência direta da observação 3.4.1 e da proposição 1.3.5. $\square$

OBSERVAÇÃO 3.4.3. *Como no caso das transformações projetivas infinitesimais em uma variedade diferenciável de dimensão q , temos que a álgebra de Lie $\wp(U, \mathcal{F}_U)$ das transformações projetivas infinitesimais transversas em um aberto simples U de $(M, \mathcal{F})$ tem dimensão $\leq 2q + q^2$ ($=$ codimensão de $\mathcal{F}_T^2$ em E_T^2).*

3.5 Folheações transversalmente projetivas rasas e transversalmente projetivas completas

3.5.1 Folheações transversalmente projetivas rasas

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n e E_T^2 uma estrutura projetiva transversal em

$(M, \mathcal{F})$. Dizemos que $(M, \mathcal{F})$ é RASA se E_T^2 admite uma conexão projetiva normal transversa, com curvatura nula.

OBSERVAÇÃO 3.5.1. *Segue da definição de conexão projetiva transversa, que se uma folheação $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva, de codimensão $q = 1$, então ela é rasa. De fato, neste caso, toda conexão projetiva transversa possui curvatura nula. Em particular, a conexão projetiva transversa canônica (a qual é normal) satisfaz esta propriedade.*

OBSERVAÇÃO 3.5.2. *Se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva, de codimensão $q \geq 2$, então para cada estrutura projetiva transversa E_T^2 , existe uma única conexão projetiva transversa normal ω_T , adaptada a E_T^2 . Logo, neste caso, $(M, \mathcal{F})$ é rasa se, e somente se, ω_T possui curvatura nula.*

PROPOSIÇÃO 3.5.3. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q . Então $(M, \mathcal{F})$ é rasa se, e somente se, para cada aberto distinguido U e para todo $x \in U$, existem uma vizinhança aberta $\bar{V}$ de $\bar{x} = \pi(x)$ em $\bar{U}$ e um difeomorfismo projetivo entre $\bar{V}$ e um aberto de $P^q(\mathbb{R})$.*

PROVA: Segue do exemplo 3.2.1 que o resultado é válido quando $(M, \mathcal{F})$ tem codimensão $q = 1$. Portanto, basta provarmos a proposição para $q \geq 2$.

Vamos supor primeiro que $(M, \mathcal{F})$ é rasa. Então $E^2(\bar{U})$ está munida de uma conexão projetiva $\bar{\omega}$ com curvatura nula, ou seja, $\bar{\omega}$ satisfaz a condição de integrabilidade

$$d\bar{\omega} + \frac{1}{2}[\bar{\omega}, \bar{\omega}] = 0 \quad (3.12)$$

Portanto, pela proposição 1.3.4, dado $x \in U$, existem uma vizinhança aberta $\bar{V}$ de $\bar{x} = \pi(x)$ em $\bar{U}$ e um difeomorfismo projetivo f , entre $\bar{V}$ e um aberto de $P^q(\mathbb{R})$.

Reciprocamente, se para cada $x \in U$, existe um difeomorfismo projetivo f entre uma vizinhança de $\bar{x}$ e um aberto de $P^q(\mathbb{R})$, então novamente pela proposição 1.3.4, $\bar{\omega}$ possui curvatura nula. Mas como, localmente $\omega_T = (\pi_T^2)^*\bar{\omega}$, segue que ω_T tem curvatura nula, ou seja, $(M, \mathcal{F})$ é rasa. $\square$

COROLÁRIO 3.5.4. *Uma folheação transversalmente projetiva, de codimensão q é rasa se, e somente se, é transversalmente homogênea.*

PROVA: Novamente, quando $q = 1$, o resultado segue do exemplo 3.2.1. Vamos supor então que $q \geq 2$.

Se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva rasa, então, pela proposição anterior, podemos supor que para cada aberto distinguido U_α , existe um difeomorfismo projetivo f_α , da variedade quociente $\bar{U}_\alpha$, sobre um aberto $\bar{V}_\alpha$ de $P^q(\mathbb{R})$. Logo, podemos tomar as aplicações distinguidas como sendo $\pi'_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$.

Neste caso as mudanças de coordenadas transversas, são aplicações $g'_{\alpha\beta}$, tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta \\ f_\beta \downarrow & & \downarrow f_\alpha \\ \bar{V}_\alpha \cap \bar{V}_\beta & \xrightarrow{g'_{\alpha\beta}} & \bar{V}_\alpha \cap \bar{V}_\beta \end{array}$$

Observe que $g'_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ g_{\alpha\beta} \circ f_\beta^{-1}$ donde segue que, cada $g'_{\alpha\beta}$ pode ser vista como um elemento de $PGL(q, \mathbb{R})$ atuando em $P^q(\mathbb{R})$. A prova da recíproca é trivial. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.5.5. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva. Se $(M, \mathcal{F})$ é rasa, então a folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é uma $pgl(q, \mathbb{R})$ -folheação de Lie.*

PROVA: A afirmação segue do fato da folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ ser dada pelo núcleo de ω_T , a qual é uma 1-forma com valores em $pgl(q, \mathbb{R})$. Logo, quando $(M, \mathcal{F})$ é rasa, ω_T

satisfaz a condição de integrabilidade

$$d\omega_T + \frac{1}{2}[\omega_T, \omega_T] = 0$$

e portanto $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é uma $\mathfrak{pgl}(q, \mathbb{R})$ -folheação de Lie (ver [14]). $\square$

TEOREMA 3.5.6. *Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão $q \geq 2$, sobre uma variedade diferenciável M , E_T^2 uma estrutura projetiva transversa em $(M, \mathcal{F})$ e ω_T a conexão projetiva transversa normal adaptada à E_T^2 . Se a álgebra de Lie $\mathfrak{p}(M, \mathcal{F})$, das transformações projetivas infinitesimais transversas, tem dimensão $q^2 + 2q$ ($=$ codimensão de $\mathcal{F}_T^2$), então $(M, \mathcal{F})$ é rasa.*

PROVA: Sabemos que ω_T satisfaz as equações de estrutura (I), (II) e (III) do teorema 3.2.3. Derivando exteriormente a equação (II) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_k (d\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge d\omega_j^k) - (d\omega^i \wedge \omega_j - \omega^i \wedge d\omega_j) \\ &\quad + \delta_j^i \sum_k (d\omega_k \wedge \omega^k - \omega_k \wedge d\omega^k) + d\Omega_j^i \implies \\ 0 &= -\sum_k (-\sum_l \omega_l^i \wedge \omega_k^l - \omega^i \wedge \omega_k + \delta_k^i \sum_l \omega_l \wedge \omega^l + \Omega_k^i) \wedge \omega_j^k \\ &\quad + \sum_k \omega_k^i \wedge (-\sum_m \omega_m^k \wedge \omega_j^m - \omega^k \wedge \omega_j + \delta_j^k \sum_m \omega_m \wedge \omega^m + \Omega_j^k) \\ &\quad - (-\sum_n \omega_n^i \wedge \omega^n) \wedge \omega_j + \omega^i \wedge (-\sum_p \omega_p \wedge \omega_j^p + \Omega_j) \\ &\quad + \delta_j^i \sum_k (-\sum_r \omega_r \wedge \omega_k^r + \Omega_k) \wedge \omega^k \\ &\quad - \delta_j^i \sum_k \omega_k \wedge (-\sum_s \omega_s^k \wedge \omega^s) + d\Omega_j^i \implies \\ d\Omega_j^i &= \sum_k \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_k \omega_k^i \wedge \Omega_j^k - \omega^i \wedge \Omega_j - \delta_j^i \sum_k \Omega_k \wedge \omega^k \end{aligned} \quad (3.13)$$

Analogamente, derivando exteriormente a equação (III) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_k (d\omega_k \wedge \omega_j^k - \omega_k \wedge d\omega_j^k) + d\Omega_j \\ 0 &= -\sum_k (-\sum_l \omega_l \wedge \omega_k^l + \Omega_k) \wedge \omega_j^k + \\ &\quad + \sum_k \omega_k \wedge (-\sum_m \omega_m^k \wedge \omega_j^m - \omega^k \wedge \omega_j + \delta_j^k \sum_m \omega_m \wedge \omega^m + \Omega_j^k) + d\Omega_j \implies \end{aligned}$$

$$d\Omega_j = \sum_k \Omega_k \wedge \omega_j^k - \sum_k \omega_k \wedge \Omega_j^k \quad (3.14)$$

Sejam agora, I a matriz identidade de $gl(q, \mathbb{R}) \subset \mathcal{H}$ e $\bar{I}_T^*$ o campo fundamental transversal associado a I . Se $\bar{\xi}_T$ e $\bar{\xi}'_T$ são campos básicos transversos, então por definição temos,

$$[\bar{I}_T^*, \bar{\xi}_T] = \bar{\xi}_T, \quad [\bar{I}_T^*, \bar{\xi}'_T] = \bar{\xi}'_T$$

Além disso,

$$\mathcal{L}_{\bar{I}_T^*} \Omega_j^i = d \circ i_{\bar{I}_T^*} \Omega_j^i + i_{\bar{I}_T^*} d\Omega_j^i = i_{\bar{I}_T^*} d\Omega_j^i$$

uma vez que a forma de curvatura é nula nas fibras de E_T^2 . Assim sendo, por (3.13) temos

$$\mathcal{L}_{\bar{I}_T^*} \Omega_j^i = i_{\bar{I}_T^*} \left(\sum_k \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_k \omega_k^i \wedge \Omega_j^k - \omega^i \wedge \Omega_j - \delta_j^i \sum_k \Omega_k \wedge \omega^k \right) = \Omega_j^i - \Omega_j^i = 0$$

Analogamente, temos que

$$\mathcal{L}_{\bar{I}_T^*} \Omega_j = i_{\bar{I}_T^*} d\Omega_j$$

Logo, segue de (3.14) que

$$i_{\bar{I}_T^*} \left(\sum_k \Omega_k \wedge \omega_j^k - \sum_k \omega_k \wedge \Omega_j^k \right) = \Omega_j$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) &= \mathcal{L}_{\bar{I}_T^*} \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) \\ &= \bar{I}_T^* \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) - \Omega_j([\bar{I}_T^*, \bar{\xi}_T], \bar{\xi}'_T) - \Omega_j(\bar{\xi}_T, [\bar{I}_T^*, \bar{\xi}'_T]) \\ &= \bar{I}_T^* \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) - \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) - \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{I}_T^* \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = 3\Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) \quad (3.15)$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\bar{I}_T^* \Omega_j^i(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = 2\Omega_j^i(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) \quad (3.16)$$

Por outro lado, se $\bar{X}^2$ é o levantamento de uma transformação projetiva infinitesimal em E_T^2 então, pela proposição 3.4.2,

$$\mathcal{L}_{\bar{X}^2} \Omega_j = \mathcal{L}_{\bar{X}^2}(d\omega_j + \sum \omega_k \wedge \omega_j^k) = 0$$

e

$$\mathcal{L}_{\bar{X}^2} \Omega_j^i = \mathcal{L}_{\bar{X}^2}(d\omega_j^i + \sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega^i \wedge \omega_j - \delta_j^i \sum \omega_k \wedge \omega^k) = 0$$

Mas como $[\bar{X}^2, \bar{\xi}_T] = [\bar{X}^2, \bar{\xi}'_T] = 0$, (ver proposição 3.4.2) segue que

$$(\mathcal{L}_{\bar{X}^2} \Omega_j)(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = \bar{X}^2 \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T)$$

Portanto

$$\bar{X}^2 \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = 0$$

Do mesmo modo, temos que

$$\bar{X}^2 \Omega_j^i(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = 0$$

Agora, por hipótese, $\dim \wp(M, \mathcal{F}) = q^2 + 2q$. Logo, dado um ponto $z \in E_T^2$, existe um elemento $\bar{X} \in \wp(M, \mathcal{F})$ tal que, no ponto z , $\bar{X}_z^2 = \bar{I}_T^*$. Portanto

$$0 = (\bar{X}^2 \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T))_z = (\bar{I}_T^* \Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T))_z = 3\Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T)_z \implies$$

$$\Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T)_z = 0$$

Analogamente, temos que

$$\Omega_j^i(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T)_z = 0$$

Como z foi tomado arbitrariamente, segue que $\Omega_j(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = \Omega_j^i(\bar{\xi}_T, \bar{\xi}'_T) = 0$, donde se conclui que $\Omega_j = \Omega_j^i = 0$ ou seja, que $(M, \mathcal{F})$ é rasa. $\square$

Suponha agora que $\Omega_j^i = 0$. Então, de (3.13) tem-se que

$$\omega^i \wedge \Omega_j + \delta_j^i \sum_k \Omega_k \wedge \omega^k = 0$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_k \Omega_k \wedge \omega^k &= \sum_k (d\omega_k + \sum_l \omega_l \wedge \omega_k^l) \wedge \omega^k \\ &= \sum_k d\omega_k \wedge \omega^k + \sum_l \omega_l \wedge (-d\omega^l) \\ &= d(\sum_k \omega_k \wedge \omega^k) \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando o traço da equação de estrutura (II) e usando o fato de que $\sum \Omega_i^i = 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum d\omega_i^i &= \sum_i (-\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_i^k - \omega^i \wedge \omega_i + \sum_k \omega_k \wedge \omega^k) \\ &= (q+1)(\sum_i \omega^i \wedge \omega_i) \end{aligned}$$

donde se conclui que a forma $\sum_i \omega^i \wedge \omega_i$ é exata e portanto,

$$\sum_k \Omega_k \wedge \omega^k = 0$$

Assim sendo, $\omega^i \wedge \Omega_j = 0$, ou seja,

$$\frac{1}{2} \sum K_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^i = 0$$

Portanto, se $q \geq 3$, temos que $K_{jkl} = 0$, o que equivale a dizer que $\Omega_j = 0$. Em resumo, vale o seguinte teorema:

TEOREMA 3.5.7. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q . Se $q \geq 3$ e $\Omega_j^i = 0$, então $(M, \mathcal{F})$ é rasa.*

3.5.2 Folheações transversalmente projetivas completas

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva de codimensão q sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n e E_T^2 uma estrutura projetiva transversa em

$(M, \mathcal{F})$. Seja ω_T a conexão projetiva transversa normal, adaptada à E_T^2 . Dizemos que ω_T é completa se os campos de vetores $X \in \Xi(E_T^2)$ que satisfazem $\omega_T(X) = cte$ são campos completos. Neste caso a estrutura projetiva transversa E_T^2 é dita completa.

Se $(M, \mathcal{F})$ admite uma estrutura projetiva transversa completa, dizemos que a mesma é uma FOLHEAÇÃO TRANSVERSALMENTE PROJATIVA COMPLETA.

OBSERVAÇÃO 3.5.8. Como ω_T é uma 1-forma com valores em $\text{pgl}(q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^q + \mathcal{H}$, temos que, se X é um campo em E_T^2 tal que $\omega_T(X) = cte$, então existem $\xi \in \mathbb{R}^q$ e $A \in \mathcal{H}$ tais que $\omega_T(X) = \xi + A$. Por outro lado, se $\bar{Y}$ é o campo transverso em E_T^2 , definido por $\bar{Y} = \bar{\xi}_T + \bar{A}_T^*$, onde $\bar{\xi}_T$ e $\bar{A}_T^*$ são os campos básicos e fundamentais transversos associados a ξ e A , respectivamente, então $\omega_T(Y) = \xi + A$, onde Y é um representante de $\bar{Y}$, donde segue que $\omega_T(X - Y) = 0$, ou seja, $X - Y$ é um campo tangente as folhas da folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$, o que implica que X é um campo folheado e portanto localmente projetável pelas aplicações π_T^2 .

EXEMPLO 3.5.9. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis com M_1 conexa, de dimensão $q \geq 2$, munida de uma estrutura projetiva completa $E^2(M_1)$.

Em $M = M_1 \times M_2$, considere a folheação $\mathcal{F}$, definida pela projeção $\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$, $\pi(x, y) = x$. Então $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva completa. De fato, neste caso π_T^2 , o levantamento de π , é uma submersão global de E_T^2 em $E^2(M_1)$ e $\omega_T = (\pi_T^2)^* \omega$ onde ω é a conexão projetiva normal de $E^2(M_1)$ que, por hipótese, é completa. Logo, se X é um campo em E_T^2 tal que $\omega_T(X) = cte$, então o campo $(\pi_T^2)_*(X)$ (ver observação anterior) satisfaz $\omega((\pi_T^2)_*(X)) = cte$, o que implica que o mesmo é completo e que portanto X é completo.

OBSERVAÇÃO 3.5.10. Se $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva completa, então os campos de vetores tangentes às folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são campos com-

pletos (uma vez que $\omega_T(X) = 0$ para todo X tangente as folhas de $\mathcal{F}_T^2$). Assim, se X é um campo de vetores tangente as folhas de $(M, \mathcal{F})$ o seu levantamento natural será um campo de vetores tangentes as folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ e portanto, completo, donde segue que X é um campo completo.

Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva completa e $\overline{X}$ um campo transversal associado a X . Dizemos que $\overline{X}$ é COMPLETO se X é completo, qualquer que seja X campo folheado, representante de $\overline{X}$. Segue da observação 3.5.10, que esta definição independe da escolha do representante X de $\overline{X}$.

OBSERVAÇÃO 3.5.11. Note que se $(M, \mathcal{F})$ é transversalmente projetiva completa, a folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é transversalmente completa, no sentido de que existem $p+q^2+2q$ campos de vetores folheados completos, cujos valores em cada ponto $z \in E_T^2$, geram todo o espaço tangente $T_z E_T^2$ (ver definição 4.1, página 133 de [25]). Neste caso tais campos são os que formam o paralelismo transversal canônico e os tangentes às folhas de $\mathcal{F}_T^2$.

Em [26], P. Molino prova o seguinte resultado:

LEMA 3.5.12. *Seja $(N, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente completa sobre uma variedade conexa N . Então as folhas de $\mathcal{F}$ são todas difeomorfas.*

A proposição abaixo é válida no caso mais geral, em que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação de Cartan completa (ver [2]).

PROPOSIÇÃO 3.5.13. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva completa sobre uma variedade diferenciável, conexa M . Então as folhas de $\mathcal{F}$ possuem o mesmo recobrimento.*

PROVA: De acordo com o lema 3.5.12. em cada componente conexa de E_T^2 , as folhas de $\mathcal{F}_T^2$ são todas difeomorfas. Mas, como $\mathcal{F}_T^2$ é invariante por translação à direita, temos que todas as folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são difeomorfas. O resultado segue da proposição 2.3.4, a qual mostra que as folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são recobrimentos das folhas de $(M, \mathcal{F})$. $\square$

COROLÁRIO 3.5.14. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva completa sobre uma variedade diferenciável, conexa M . Se $(M, \mathcal{F})$ possui uma folha compacta com grupo fundamental finito, então todas as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são compactas com grupo fundamental finito.*

PROVA: O corolário é consequência do seguinte resultado: “Seja $p : L \rightarrow N$ um recobrimento. Então L é compacto, com grupo fundamental finito se e somente se, N é compacto com grupo fundamental finito”. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.5.15. *Se $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva completa, então toda transformação projetiva infinitesimal transversa é completa.*

PROVA: Sejam $\overline{X}^2$ o levantamento de uma transformação projetiva infinitesimal transversa $\overline{X}$ e ω_T a conexão projetiva normal transversa da estrutura projetiva transversa completa E_T^2 . Observe que, para mostrarmos que $\omega_T(\overline{X}^2) = cte$, basta mostrarmos que $Y\omega_T(\overline{X}^2) = 0$, para todo Y pertencente ao paralelismo transversal canônico e todo Y tangente as folhas de $\mathcal{F}_T^2$.

Pela proposição 3.4.2, temos que $\mathcal{L}_{\overline{X}^2}\omega_T = 0$. Logo, se Y pertence ao paralelismo transversal canônico, temos (ainda pela proposição 3.4.2) que $[Y, X^2] = 0$, onde X^2 é um representante de $\overline{X}^2$ e portanto, usando o fato de que $(\mathcal{L}_{\overline{X}^2}\omega_T)Y = \overline{X}^2\omega_T(Y) - Y\omega_T(\overline{X}^2) - \omega_T([\overline{X}^2, Y])$, temos que $Y\omega_T(\overline{X}^2) = 0$. Se Y é tangente as

folhas de $\mathcal{F}_T^2$, então, como X^2 é folheado, $[Y, X^2]$ é também tangente às as folhas de $\mathcal{F}_T^2$ e portanto $\omega_T([Y, X^2]) = 0$ e novamente, temos que $Y\omega_T(\overline{X}^2) = 0$. Logo $\overline{X}^2$ é um campo completo, donde se conclui que X é completo. $\square$

Vamos supor que $(M, \mathcal{F})$ é uma folheação transversalmente projetiva, completa, de codimensão $q \geq 2$, sobre uma variedade conexa. Neste caso, temos que a folheação levantada $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é transversalmente completa (ver observação 3.5.11).

Em [26] P. Molino mostra o seguinte resultado:

TEOREMA 3.5.16 (P. Molino). *Seja $(N, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente completa sobre uma variedade conexa N . Então os fechos das folhas de $\mathcal{F}$ são fibras de uma fibração localmente trivial $\pi_b : N \rightarrow W_b$, chamada de FIBRAÇÃO BÁSICA. A folheação induzida por $\mathcal{F}$ em cada fibra de π_b é uma $\mathcal{G}$ -folheação de Lie com folhas densas, onde a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um invariante algébrico da folheação, chamado de ÁLGEBRA DE LIE ESTRUTURAL de $(N, \mathcal{F})$.*

A dimensão q_b da variedade W_b é igual ao número de funções básicas para $(N, \mathcal{F})$ (funções básicas são funções diferenciáveis em N , constantes ao longo das folhas de $\mathcal{F}$), cujas diferenciais são, em cada ponto x de N , linearmente independentes. Tem-se ainda que a dimensão r da álgebra de Lie estrutural $\mathcal{G}$ é igual a $q - q_b$, onde q é a codimensão de $(N, \mathcal{F})$.

No nosso caso, $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ é transversalmente completa e assim sendo, os fechos das folhas de $\mathcal{F}_T^2$ são fibras de uma fibração localmente trivial $\pi_b^2 : E_T^2 \rightarrow W_b^2$. Portanto, se as únicas funções básicas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são as constantes, todas as folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ serão densas em E_T^2 . Logo, se F^2 é uma folha de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ e F é a folha de $(M, \mathcal{F})$

tal que $p_T^2(F^2) = F$, temos que

$$M = p_T^2(E_T^2) = p_T^2(\overline{F^2}) \subset \overline{F}$$

onde $\overline{F^2}$ e $\overline{F}$ denotam os fechos de F^2 e F , respectivamente. Isso quer dizer que as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são densas em M . Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 3.5.17. *Sejam $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva completa e $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ a folheação levantada. Se as únicas funções básicas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são as constantes, então as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são todas densas em M .*

Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ a álgebra de Lie estrutural da folheação $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$. Então $\mathcal{G}$ é um invariante algébrico da folheação $(M, \mathcal{F})$, ou seja, não depende da escolha da estrutura projetiva transversa E_T^2 . De fato, seja $E_T'^2$ uma outra estrutura projetiva transversa e sejam $z \in E_T^2$ e $z' \in E_T'^2$ na mesma fibra de $B_T^2(M, \mathcal{F})$. Como a folheação $\mathcal{F}_T^2$ é invariante por translação à direita, $\mathcal{R}_g$ leva a folha F^2 que passa por z na folha F'^2 que passa por zg e o fecho $\overline{F^2}$ de F^2 no fecho $\overline{F'^2}$ de F'^2 . Logo, as álgebras estruturais de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ e $(E_T'^2, \mathcal{F}_T'^2)$ são isomorfas. Iremos escrever $\mathcal{G} = \mathcal{G}(M, \mathcal{F})$ e chamá-la de ÁLGEBRA DE LIE ESTRUTURAL DE $(M, \mathcal{F})$.

Observe que se $\dim \mathcal{G}(M, \mathcal{F}) = q^2 + 2q$ (=codimensão de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$) então a dimensão q_b da variedade básica W_b^2 é zero (o que implica novamente que as folhas de $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$ são densas em E_T^2). Portanto podemos enunciar a proposição 3.5.17 da seguinte maneira:

PROPOSIÇÃO 3.5.18. *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma folheação transversalmente projetiva completa de codimensão q . Se a álgebra de Lie estrutural $\mathcal{G}(M, \mathcal{F})$ tem dimensão igual a codimensão da folheação levantada $(E_T^2, \mathcal{F}_T^2)$, então as folhas de $(M, \mathcal{F})$ são todas densas em M .*

Referências Bibliográficas

- [1] Albert, C. et Molino, P. *Pseudogroupes de Lie transitifs*, vol. 1, Travaux en cours, Hermann, Paris, (1984).
- [2] Blumenthal, R. *Cartan submersions and Cartan foliations*, Illinois J. Math. vol. 31 (2), (1987), 327 - 343.
- [3] Blumenthal, R. *Transversely homogeneous foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29 (1979), 143 - 158
- [4] Borel, A. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology, 2 (1963), 112 - 122.
- [5] Brooks, R. and Goldman, W. *The Godbillon-Vey invariant of a transversely projective foliations*, Trans. Amer. Math. Soc., 286, (1984), 651 - 664.
- [6] Camacho, C. e Lins, A. *Teoria geométrica das folheações*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [7] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. math. France, 52 (1924), 205 - 241.

- [8] Carrière, Y. *Flots Riemanniens* in “Structures transverse des feuilletages”, Astérisque, 166, (1984), 31 - 52.
- [9] Chern, S. S. *Pseudo-groupes continus infinis*, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg, (1953), 119 - 136.
- [10] Ehresmann, C. *Structures feuilletées*, Proceed, Can. Congress, Montreal, (1961), 109 - 172.
- [11] Ehresmann, C. *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), 29 - 55.
- [12] Ehresmann, C. and Reeb, G. *Sur les champs d'éléments complètement intégrables*, C. R. Ac. Sci. Paris, 218, (1944), 955 - 957.
- [13] Eisenhart, L. P. *Spaces with corresponding paths*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 8 (1922), 233 - 238.
- [14] Fedida, E. *Sur les feuilletages de Lie*, C. R. Ac. Sci. Paris, 272, (1971), 999 - 1001.
- [15] Ghys, E. *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Anal. Inst. Fourier, Grenoble, 34(4), (1984), 203 - 223.
- [16] Haefliger, A. *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16, (1962), 367 - 397.
- [17] Inaba, T. and Matsumoto, S. *Resilient leaves in transversely projective foliations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 37, (1990), 89 - 101.

- [18] Inaba, T. and Matsumoto, S. *Some qualitative aspects of transversely projective foliations*, Proc. Japan Acad., 65, (1985), 116 - 118.
- [19] Kobayashi, S. *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, (1972).
- [20] Kobayashi, S. *Canonical forms on frame bundle of higher order contact*, Proc. Symp. Pure Math. vol. 3, Amer. Math. Soc. (1961), 186 - 193.
- [21] Kobayashi, S. and Nagano, T. *On projective connections*, J. Math. Mech., 13, (1964), 215 - 236.
- [22] Kobayashi, S. and Nomizou, K. *Foundations of differential geometry*, vol I, John Wiley and Sons, New York, (1963).
- [23] Kamber, F. and Tonder, P. *Duality theorems for foliations*, in "Structure transverse des feuilletages", Astérisque, 166, (1984), 108 - 111.
- [24] Meignez, G. *On completeness of transversely projective foliations*, Topology, 31(2), (1992), 421 - 432.
- [25] Molino, P. *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser, Boston, (1988).
- [26] Molino, P. *Étude des feuilletages transversalement complets et applications*, Ann. scient. Ec. norm. sup. 10(3), (1977), 289 - 307.
- [27] Molino, P. *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Ned. Ak. van Wet., Indag. Math., 85, (1982), 45 - 76.

- [28] Nishikawa, S. and Sato, H. *On characteristic classe of riemannian, conformal and projective foliations*, J. Math. Soc. Japan, 28(2), (1976), 223 - 241.
- [29] Reinhart, B. *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math., 69, (1959), 119 - 132.
- [30] Sergiescu, V. *Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35(3), (1985), 137 - 158.
- [31] Veblen, O. *Projective and affine geometry of paths*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 8 (1922), 347 - 350.
- [32] Weyl, H. *Zur Infinitesimalgeometrie; Einnordnung der projektiven und der konformen Auffassung*, Göttingen Nachr. (1921), 99 - 122.

Maxwell M. de Barros e-mail: maxwell@ufma.br

Francisco Rui T. Almeida e-mail: rui@ime.usp.br