**Superfícies Mínimas
Simplesmente Periódicas**

Cláudia Cueva Cândido

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de doutor em matemática

Área de concentração: Geometria

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Asperti

São Paulo, dezembro de 1997.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida por
Cláudia Cueva Cândido e aprovada pela
Comissão Julgadora.

São Paulo, 28 de abril de 1998.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão (orientadora)	IME-USP
Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito	IME-USP
Prof. Dr. Celso José da Costa	UFF
Prof. Dr. Eric Toubiana	PUC - RJ
Prof. Dr. Renato Pedrosa	IMECC-UNICAMP

À minha filha *Olivia*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram na elaboração deste trabalho e quero registrar meu agradecimento especial a:

Professora Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, pela sugestão do trabalho e por ter estado sempre a meu lado, apontando novos caminhos a cada etapa vencida e a cada dificuldade, com dedicação e carinho.

Professor Antônio Carlos Asperti, por seu incondicional apoio, ajudando-me a transpor muitas barreiras.

Profa. Cristiana Bastos Paiva Valente, pela troca de informações em nossos seminários e por valiosas palavras de estímulo.

Profa. Roseli Fernandez, por ter me ensinado a trabalhar com o Latex e o XFig e pelo incentivo nos momentos difíceis.

Grupo de Geometria, com o qual adquiri muitos conhecimentos.

Meus pais, por toda a colaboração, estímulo e amor que me têm dado, dia após dia.

RESUMO

Neste trabalho provamos a existência de uma família de superfícies mínimas simplesmente periódicas, completas, mergulhadas, com gênero dois e quatro fins de tipo Scherk no quociente. Para uma certa escolha dos parâmetros, pode-se mostrar que a superfície é um recobrimento da torre de selas de Scherk de gênero zero. Em outra direção, demonstramos um teorema que descreve analiticamente uma construção alternativa de superfícies de Riemann compactas, a partir de duas equações algébricas em que uma delas representa um toro com certas simetrias.

O problema da construção de superfícies mínimas modeladas sobre estas estruturas é discutido na parte final do trabalho.

ABSTRACT

In this work, we prove the existence of a complete, embedded, singly periodic minimal surface, whose quotient by a vertical translation has genus two and four Scherk type ends. With an adequate choice of parameters it can be shown that the surface is a recovering of Scherk's saddle tower. In another direction, we prove a theorem that describes compact Riemann surfaces of genus greater or equal to two as a composition of functions related to two algebraic equations, one of that representing a torus with some symmetries.

The construction of new examples of minimal surfaces modeled on these structures is studied in the last part of this work.

Conteúdo

1	Torre de selas de gênero 2	1
1.1	Automorfismos de $\overline{M}$	3
1.2	O par de Weierstrass do bitoro com fins do tipo Scherk	4
1.3	O problema do período	13
1.4	A geometria da superfície quociente	23
2	Funções elípticas de grau 2 no toro	28
3	Superfícies de Riemann	35
3.1	Preliminares	35
3.2	Superfícies de Riemann e funções algébricas	36
3.3	Superfícies de Riemann e composição de funções algébricas	40
3.4	Gênero da superfície de Riemann compacta	47
4	Exemplos de superfícies de Riemann compactas	48
4.1	Exemplo com gênero 2	53
4.2	Automorfismos do bitoro	61
4.3	Exemplo com gênero 3	63
4.4	Automorfismos do tritoro	69
5	Observações Finais	72
5.1	Dados de Weierstrass	73

5.2	Períodos	80
-----	--------------------	----

Capítulo 1

Torre de selas de gênero 2

Vamos construir uma família de superfícies mínimas, mergulhadas, simplesmente periódicas com gênero dois e quatro fins de tipo Scherk no quociente. Superfícies mínimas periódicas são superfícies mínimas conexas invariantes por um grupo G de isometrias que age livremente no $\mathbb{R}^3$. Meeks e Rosenberg estudaram essas superfícies analisando seus quocientes em $\mathbb{R}^3/G$, tanto no caso duplamente periódico ([MR2]), em que G é gerado por duas translações linearmente independentes, como no caso simplesmente periódico ([MR1]), em que G é gerado pelo movimento rígido S_θ (rotação de ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, em torno do eixo Ox_3 seguida de translação não trivial na direção Ox_3).

O Teorema 1, em ([MR1]), estabelece que uma superfície mínima propriamente mergulhada em uma variedade tri-dimensional flat, completa, simplesmente conexa, tem curvatura total finita se e somente se tem topologia finita. Além disso, sendo M a superfície quociente em $\mathbb{R}^3/S_\theta$, no mesmo trabalho, Meeks e Rosenberg definem e denotam por $W(M)$ o número de voltas total de M , somatória dos números de voltas nos fins de uma superfície M ; estabelecem, ainda, no teorema 4, a seguinte relação entre a curvatura total de M e o número total de voltas:

$$C(M) = 2\pi(\chi(M) - W(M))$$

Além disso, se os fins forem assintóticos a anéis planos verticais, $c(M) = 2\pi\chi(M)$ e, se tivermos k fins planares, então $C(M) = 2\pi(\chi(M) - k)$. Sejam $\tilde{M}$ superfície mínima

simplesmente periódica no $\mathbb{R}^3$ e M a superfície quociente em $\mathbb{R}^3/S_\theta$. Os dados de Weierstrass de $\widetilde{M}$ são invariantes pela ação de S_θ e podem passar ao quociente; fica bem definido o par (g, η) , onde g e η , função holomorfa e diferencial holomorfa em M , são os dados de Weierstrass da superfície quociente.

No caso em que $\theta = 0$, o grupo de isometrias é gerado por uma única translação vertical e será denotado por T e, ainda em ([MR1]), encontramos uma classificação dos fins que podem ocorrer.

Seja A um fim mergulhado em $\mathbb{R}^3/T$. Se A tem curvatura total finita, A é conformemente equivalente ao disco de raio unitário perfurado na origem e, denotando por g a composição da aplicação de Gauss em A com a projeção estereográfica, o par de Weierstrass (g, η) , estende-se meromorficamente à origem. Após uma rotação podemos assumir $g(0) = 0$ e, após uma reparametrização conforme de A , temos:

$$g(z) = z^p \quad \eta = \left(\frac{c_{-q}}{z^q} + \frac{c_{-q+1}}{z^{q-1}} + \dots \right) dz$$

Na situação acima, o Teorema 5, demonstrado em ([MR1]), estabelece que, para $q = 1$, A é um fim de tipo Scherk, assintótico a um anel plano vertical.

Para a construção do exemplo simplesmente periódico, com gênero dois e quatro fins de tipo Scherk, vamos tomar o bitoro como uma curva hiperelíptica.

Sejam $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1 < \lambda_1$. O conjunto

$$\overline{M} = \left\{ (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} : w^2 = \frac{(z + \lambda_1)(z - 1)(z + \lambda)}{(z - \lambda_1)(z + 1)(z - \lambda)} \right\} \quad (1.1)$$

é uma superfície compacta de gênero 2.

Removendo de $\overline{M}$ os quatro pontos correspondentes à solução da equação $z^2 + c^2 = 0$, $c > 0$, teremos a superfície apropriada para definirmos a imersão com um período vertical. A equação acima foi escolhida de modo a termos a aplicação normal descrita pela função w . Na figura 1.1, temos os valores da função z associados a alguns pontos do bitoro

Figura 1.1: O bitoro $\overline{M}$

$\overline{M}$. Usamos o símbolo o para identificar os pontos correspondentes aos fins. Podemos imediatamente estudar as simetrias de $\overline{M}$.

1.1 Automorfismos de $\overline{M}$

Observamos, inicialmente, que $w^2(\overline{z}) = \overline{w^2(z)}$; portanto, se z é real, então $w^2(z)$ é real.

Além disso, analisando o sinal de w^2 , segue:

w é real se z pertence aos intervalos $] -\infty, -\lambda_1[,] -1, -\lambda[,] \lambda, 1[$ ou $] \lambda_1, +\infty[$

w é imaginário puro, se z pertence aos intervalos $] -\lambda_1, -1[,] -\lambda, \lambda[$ ou $] 1, \lambda_1[$.

Para z imaginário puro, $z = -\overline{z}$ e $w^2(-\overline{z}) = \frac{1}{\overline{w^2(z)}}$ e resulta $w(z) = \frac{1}{\overline{w(z)}}$, ou seja, w tem módulo 1. Estas considerações provam o

Lema 1.1 Em $\overline{M} = \left\{ (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} : w^2 = \frac{(z + \lambda_1)(z - 1)(z + \lambda)}{(z - \lambda_1)(z + 1)(z - \lambda)} \right\}$, temos três automorfismos: $\sigma, \delta, \tau : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ dados por

$$\sigma(z, w) = (\overline{z}, -\overline{w})$$

$$\delta(z, w) = (\overline{z}, \overline{w})$$

Figura 1.2: Automorfismos do bitoro $\overline{M}$

$$\tau(z, w) = \left(-\overline{z}, \frac{1}{\overline{w}}\right)$$

As curvas de $\overline{M}$ fixas por σ são as correspondentes a

$$\{z \in \mathbb{R} \mid -\lambda_1 \leq z \leq -1, -\lambda \leq z \leq \lambda \quad \text{e} \quad 1 \leq z \leq \lambda_1\}.$$

As curvas fixas por δ são as correspondentes a

$$\{z \in \mathbb{R} \mid -1 \leq z \leq -\lambda \quad \text{e} \quad \lambda \leq z \leq 1\}.$$

O automorfismo τ fixa a "cintura" do bitoro, correspondente ao eixo imaginário, no plano z .

1.2 O par de Weierstrass do bitoro com fins do tipo Scherk

Seja $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, e seja

$$M = \overline{M} \setminus \{(z, w) : z = ic \text{ ou } z = -ic\} \quad (1.2)$$

Para construirmos a imersão do bitoro com os quatro fins de tipo Scherk, lembramos que, por ([MR1]), tais fins serão assintóticos a anéis verticais planos e teremos, portanto, $W(M) = 0$.

Como consequência, a curvatura total será $c(M) = 2\pi(\chi(M) - W(M)) = 2\pi\chi(M) = 2\pi(2 - 2.2 - 4) = -12\pi$, pois M tem gênero 2 e quatro pontos removidos. Segue que o grau da função g será 3. Vamos tomar a normal vertical, apontando para cima, nos pontos de M em que $z = \lambda_1$, $z = \lambda$ ou $z = -1$ e normal vertical apontando para baixo nos pontos em que $z = 1$, $z = -1$ ou $z = -\lambda_1$.

Esta escolha conduz naturalmente a $g = w$, pois as duas funções têm os mesmos zeros e pólos.

A 1-forma holomorfa η deverá ter zeros duplos nos pontos correspondentes a $z = \lambda_1$, $z = \lambda$ e $z = -1$ e, para garantir fins de tipo Scherk, deverá ter, segundo ([MR1]), pólos simples nos pontos tais que $z = \pm ic$, correspondentes aos fins da superfície.

Conforme pode ser observado na tabela de zeros e pólos a seguir, em que usaremos a notação $w_c = \sqrt{w^2(ic)}$ e $w_{-c} = \sqrt{w^2(-ic)}$, devemos ter

$$\eta = \frac{1}{(z^2 + c^2)g} dz \quad (1.3)$$

z	$-\lambda_1$	-1	$-\lambda$	λ	1	λ_1	$-ic$	$-ic$	ic	ic	∞	∞
$g = w$	0	∞	0	∞	0	∞	w_{-c}	$-w_{-c}$	w_c	$-w_c$	1	-1
$\frac{1}{z^2 + c^2}$							∞	∞	∞	∞	0^2	0^2
$\frac{1}{g}$	∞	0	∞	0	∞	0						
dz	0	0	0	0	0	0					∞^2	∞^2
η		0^2		0^2		0^2	∞	∞	∞	∞		

Seja $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, onde ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são as 1-formas holomorfas definidas a partir dos dados de Weierstrass $g = w$ e $\eta = \frac{1}{(z^2 + c^2)g} dz$, a saber:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\eta$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{i}{2}(1+g^2)\eta \\ \phi_3 &= g\eta\end{aligned}$$

O teorema 1.3, enunciado adiante, estabelece que a superfície construída a partir da 1-forma Φ sobre $\overline{M}$, é uma imersão mínima completa simplesmente periódica.

Mais precisamente, demonstraremos que há um período real, na direção vertical, em torno dos fins e que existe um par (λ, λ_1) para o qual $\text{Re} \int_\gamma \Phi = 0$, para toda curva fechada do grupo da homologia de M . Para isto, vamos utilizar as simetrias de M . Temos:

Lema 1.2 *Os automorfismos σ , δ e τ do Lema 1.1, satisfazem:*

$$\begin{aligned}\sigma^*\Phi &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\Phi}, & \delta^*\Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\Phi} \\ e \quad \tau^*\Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{\Phi}.\end{aligned}$$

Demonstração: Conforme vimos na demonstração do Lema 1.1, temos

$$\sigma^*g = -\overline{g}, \quad \delta^*g = \overline{g} \quad e \quad \tau^*g = \frac{1}{\overline{g}}. \text{ Além disso,}$$

$$\begin{aligned}\sigma^*\left(\frac{1}{z^2+c^2}\right) &= \overline{\frac{1}{z^2+c^2}}, & \delta^*\left(\frac{1}{z^2+c^2}\right) &= \overline{\frac{1}{z^2+c^2}} \\ e \quad \tau^*\left(\frac{1}{z^2+c^2}\right) &= \frac{1}{(-\overline{z})^2+c^2} = \overline{\frac{1}{z^2+c^2}}.\end{aligned}$$

Para a 1-forma dz :

$$\sigma^*dz = \overline{dz}, \quad \delta^*dz = \overline{dz} \quad e \quad \tau^*dz = -\overline{dz}.$$

Então:

$$\bullet \quad \sigma^*\phi_1 = -\overline{\phi_1} \quad \sigma^*\phi_2 = \overline{\phi_2} \quad \sigma^*\phi_3 = \overline{\phi_3}$$

- $\delta^* \phi_1 = \bar{\phi}_1 \quad \delta^* \phi_2 = -\bar{\phi}_2 \quad \delta^* \phi_3 = \bar{\phi}_3$
- $\tau^* \phi_1 = \bar{\phi}_1 \quad \tau^* \phi_2 = \bar{\phi}_2 \quad \tau^* \phi_3 = -\bar{\phi}_3.$

■

Conclui-se do lema acima que σ , δ e τ induzem, no $\mathbb{R}^3$, simetrias de reflexão em relação a planos ortogonais paralelos a $x_2 O x_3$, $x_1 O x_3$ e $x_1 O x_2$, respectivamente. As imagens das curvas fixas por σ , δ e τ são geodésicas planas, contidas nesses planos ortogonais ([DHKW]). Nas curvas fixas por σ , g assume valores imaginários, nas curvas fixas por δ , temos g com valores reais e, finalmente, nas curvas fixas por τ , g assume valores com módulo unitário.

Teorema 1.3 *Seja M a superfície de Riemann compacta, com quatro pontos removidos, dada em 1.2.*

Então, para c numa vizinhança de $c = 1$, existe um par (λ, λ_1) tal que

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por $X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi$, é uma imersão mínima, simplesmente periódica, no $\mathbb{R}^3$.

Demonstração:

É preciso demonstrar que os períodos produzidos por $X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi$ geram somente uma translação. Vamos calcular, primeiro, os resíduos nos fins e, depois, sobre as curvas da homologia de $\overline{M}$.

No lema 1.4, da seção 1.3, calcularemos os resíduos em torno dos fins e demonstraremos que o vetor período nos fins $(ic, \pm w_c)$ é $\vec{v} = (0, 0, \frac{\pi}{c})$ e nos fins $(-ic, \pm w_{-c})$ é $-\vec{v}$. Portanto, a imersão apresenta período na direção vertical.

Figura 1.3: Plano z

Para estudar os períodos sobre as curvas da homologia, consideremos, no plano z , $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ circunferências com centro em $A = \frac{1+\lambda}{2}$ e $B = \frac{1+\lambda_1}{2}$, respectivamente, e ambas com raio $r = \frac{\lambda_1 - \lambda}{2}$. Sejam γ_1^* e γ_2^* os levantamentos, a $\overline{M}$, de $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$.

Então, as curvas γ_1^* , γ_2^* , $\tau\gamma_1^*$ e $\tau\gamma_2^*$ formam uma base do primeiro grupo de homologia de $\overline{M}$.

A curva γ_1^* é homotópica à curva fechada em $\overline{M}$ correspondente ao intervalo $I_1 = \{z \in \mathbb{R} | \lambda \leq z \leq 1\}$, que denotaremos por γ_1 . Nessa curva, temos a função bivalente $w = w(z)$, $w(1) = 0$, $w(\lambda) = \infty$, assumindo valores reais positivos num dos ramos e negativos no outro ramo. Seja C_1 a curva em $\overline{M}$ dada pelos pontos (z, w) tais que z pertence a I_1 e $w(z) \geq 0$. Se (z, w) pertence a C_1 , então $\sigma(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w}) = (z, -w)$. Logo, σC_1 descreve o arco de γ_1 correspondente ao ramo negativo da função w e, observando a orientação, podemos escrever $\gamma_1 = C_1 \cup (-\sigma C_1)$. A curva γ_2^* é homotópica à curva fechada em $\overline{M}$ correspondente ao intervalo $I_2 = \{z \in \mathbb{R} | 1 \leq z \leq \lambda_1\}$, que denotaremos por γ_2 . Nessa curva, a função $w = w(z)$ assume valores imaginários e, sendo C_2 o trecho de γ_2 correspondente a um dos ramos de w , podemos escrever, da mesma forma, $\gamma_2 = C_2 \cup (-\delta C_2)$. Das considerações acima segue que $\sigma\gamma_1 = -\gamma_1$ e $\delta\gamma_2 = -\gamma_2$ e portanto:

Figura 1.4: Curvas da homologia de $\overline{M}$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \int_{\gamma_1} \Phi &= - \int_{\sigma\gamma_1} \Phi = - \int_{\gamma_1} \sigma^* \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{\int_{\gamma_1} \Phi} \text{ e resulta } \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_2 = 0 \text{ e} \\
 &\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_3 = 0; \\
 \text{ii) } \int_{\gamma_2} \Phi &= - \int_{\delta\gamma_2} \Phi = - \int_{\gamma_2} \delta^* \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{\int_{\gamma_2} \Phi} \text{ e resulta } \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \phi_1 = 0 \text{ e} \\
 &\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \phi_3 = 0.
 \end{aligned}$$

As duas integrais que queremos anular dependem de λ e λ_1 e nosso objetivo é demonstrar que “existe um par (λ, λ_1) em $\Omega = \{(\lambda, \lambda_1) : 0 < \lambda < \lambda_1\}$ para o qual $\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_1 = \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \phi_2 = 0$.”

Definimos

$$\pi_1(\lambda, \lambda_1) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_1 \quad (1.4)$$

$$\pi_2(\lambda, \lambda_1) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_2. \quad (1.5)$$

Utilizaremos as idéias contidas no trabalho de Wölgemuth ([Wo]): construiremos uma curva fechada em Ω e mostraremos que sua imagem sob a aplicação período $\pi = (\pi_1, \pi_2)$

é uma curva com número de voltas não nulo em torno de $(0,0)$. A conclusão seguirá do seguinte resultado, demonstrado em ([C S], pág. 86):

Teorema - Seja $f : D \rightarrow P$ uma aplicação contínua de um disco no plano, seja C a fronteira do disco e seja y um ponto do plano P que não pertence a $f(C)$. Se o número de voltas da restrição $f|_C$, em torno de y , é não nulo, então y pertence à imagem de D pela aplicação f , isto é, existe um ponto x em D , tal que $f(x) = y$.

Pelo lema 1.5, para cada $\lambda_1 > 1$ fixado, existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\lambda_1)$ tal que se $\lambda < \varepsilon_1(\lambda_1)$, então $\pi_1(\lambda, \lambda_1) > 0$ e, pelo lema 1.6, para cada λ , $0 < \lambda < 1$, fixado existe $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\lambda)$ tal que se $\lambda_1 < \varepsilon_2(\lambda)$, então $\pi_2(\lambda, \lambda_1) > 0$.

Sejam as regiões contidas em Ω :

$$\Omega_1 = \left\{ (\lambda, \lambda_1) : 0 < \lambda < 1 \text{ e } 1 < \lambda_1 < \frac{2\lambda}{1-\lambda} \right\}$$

$$\Omega_2 = \{ (\lambda, \lambda_1) : 0 < \lambda < 1 \text{ e } 1 < \lambda_1 < 1 + 2\lambda \}$$

$$\Omega_3 = \{ (\lambda, \lambda_1) : 0 < \lambda < \varepsilon_1 \text{ e } \lambda_1 > 1 \}$$

$$\Omega_4 = \{ (\lambda, \lambda_1) : 0 < \lambda < 1 \text{ e } \lambda_1 > \varepsilon_2 \}$$

Nos lemas 1.5 e 1.6, da seção 1.3, temos um estudo do sinal das funções π_1 e π_2 . Está demonstrado que:

$$\pi_1(\lambda, \lambda_1) < 0, \text{ se } (\lambda, \lambda_1) \text{ pertence a } \Omega_1$$

$$\pi_2(\lambda, \lambda_1) < 0, \text{ se } (\lambda, \lambda_1) \text{ pertence a } \Omega_2$$

$$\pi_1(\lambda, \lambda_1) > 0, \text{ se } (\lambda, \lambda_1) \text{ pertence a } \Omega_3$$

$$\pi_2(\lambda, \lambda_1) > 0, \text{ se } (\lambda, \lambda_1) \text{ pertence a } \Omega_4$$

Esses resultados indicam que devemos tomar uma curva α próxima da fronteira de Ω a fim de que a imagem $\pi(\alpha)$ dê uma volta em torno da origem. Porém não há garantia de termos as intersecções $\Omega_2 \cap \Omega_3$ e $\Omega_1 \cap \Omega_4$ não vazias.

A partir do desenvolvimento feito nos lemas 1.5 e 1.6, temos

$$\pi_1(\lambda, \lambda_1) = \int_{\lambda}^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)z^2 - \lambda\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(1 - z^2)(z^2 - \lambda^2)(z^2 + c^2)}} dz.$$

$$\pi_2(\lambda, \lambda_1) = \int_1^{\lambda_1} \frac{-z^3 + (\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1)z}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(z^2 - 1)(z^2 - \lambda^2)(z^2 + c^2)}} dz.$$

Derivando π_1 em relação a λ_1 e π_2 em relação a λ , obtemos:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1}(\lambda, \lambda_1) = \int_{\lambda}^1 \frac{z^2(\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1 - z^2)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)^3(1 - z^2)(z^2 - \lambda^2)(z^2 + c^2)}} dz.$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_1) = \int_1^{\lambda_1} \frac{z[\lambda\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda - 1)z^2]}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(z^2 - 1)(z^2 - \lambda^2)^3(z^2 + c^2)}} dz.$$

Lembrando que $0 < \lambda < 1 < \lambda_1$, temos $\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1 > 1$, ou seja, $\lambda\lambda_1 < \lambda_1 + \lambda - 1$ e segue que o numerador do primeiro integrando é positivo, para $\lambda < z < 1$ e o numerador do segundo integrando é negativo, para $1 < z < \lambda_1$. Logo $\frac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1} > 0$ e $\frac{\partial \pi_2}{\partial \lambda} < 0$, ou seja, π_1 é estritamente crescente como função de λ_1 e π_2 é estritamente decrescente como função de λ .

Figura 1.5: A curva α em Ω

Fazendo estimativas, com o auxílio do computador, dos valores de π_1 e π_2 em alguns pontos (λ, λ_1) , no caso particular $c = 1$ (veja tabela com valores de π_1 e π_2 no Apêndice), encontramos:

$$\begin{aligned}\pi_1(0.1, 2) &= 0.131057 > 0 & \pi_2(0.1, 2) &= -0.0183368 < 0 \\ \pi_1(0.9, 44) &= -0.00333298 < 0 & \pi_2(0.9, 44) &= 0.0345741 > 0\end{aligned}$$

Desses valores e da monotonicidade das funções π_1 e π_2 segue:

$$\begin{aligned}\pi_1(\lambda, \lambda_1) &> 0, \quad \text{se } (\lambda, \lambda_1) \in l_1 = \{(\lambda, \lambda_1) : \lambda = 0.1 \text{ e } 2 \leq \lambda_1 \leq 44\} \\ \pi_2(\lambda, \lambda_1) &< 0, \quad \text{se } (\lambda, \lambda_1) \in l_2 = \{(\lambda, \lambda_1) : 0.1 \leq \lambda \leq 0.9 \text{ e } \lambda_1 = 2\} \\ \pi_1(\lambda, \lambda_1) &< 0, \quad \text{se } (\lambda, \lambda_1) \in l_3 = \{(\lambda, \lambda_1) : \lambda = 0.9 \text{ e } 2 \leq \lambda_1 \leq 44\} \\ \pi_2(\lambda, \lambda_1) &> 0, \quad \text{se } (\lambda, \lambda_1) \in l_4 = \{(\lambda, \lambda_1) : 0.1 \leq \lambda \leq 0.9 \text{ e } \lambda_1 = 44\}\end{aligned}$$

Seja α a curva fechada em Ω obtida como reunião dos segmentos l_j , $j = 1, \dots, 4$. Segue das observações acima que $\pi(\alpha)$ dá uma volta em torno de $(0, 0)$. Além disso α , é homotópica ao círculo unitário e $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua; segue do teorema já enunciado, ([CS]), que existe um par (λ, λ_1) na região limitada por α tal que $\pi(\lambda, \lambda_1) = (0, 0)$. As curvas de nível zero de π_1 e π_2 (Apêndice) indicam que esse par é único. A continuidade de π como função de c , garante a resolução do problema do período para c numa vizinhança de $c = 1$ e assegura que X é uma imersão mínima simplesmente periódica. ■

1.3 O problema do período

A equação algébrica que construímos para definir a superfície $\overline{M}$ é semelhante à equação que define o bitoro sobre o qual Wei modelou sua família de superfícies duplamente periódicas([We]). Como consequência, as integrais que não pudemos anular por aplicação direta das simetrias aproximam-se bastante das integrais com que Wei trabalhou em seu trabalho; isto permitiu que pudéssemos aplicar, nas demonstrações dos lemas 1.5 e 1.6, algumas comparações utilizadas por Wei.

Lema 1.4 *O vetor período nos fins $(ic, \pm w_c)$ é $\vec{v} = (0, 0, \frac{\pi}{c})$ e nos fins $(-ic, \pm w_{-c})$ é $-\vec{v}$.*

Demonstração: Consideremos, no plano z , a circunferência $\tilde{\gamma}$ de centro em $z = ic$ e raio $r = \frac{c}{2}$, orientada de modo que, ao percorrê-la, o interior do círculo fique à esquerda. Seja γ o levantamento de $\tilde{\gamma}$ a M e observemos que $\tau\gamma = -\gamma$.

Temos:

$$\int_{\gamma} \Phi = - \int_{\tau\gamma} \Phi = - \int_{\gamma} \tau^* \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\int_{\gamma} \Phi}.$$

Segue que $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_1 = 0$ e $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_2 = 0$.

Para $\phi_3 = \frac{1}{z^2 + c^2} dz$, usando a fórmula integral de Cauchy, temos:

$$\int_{\gamma} \phi_3 = \int_{\gamma} \frac{1}{(z - ic)(z + ic)} dz = 2\pi i \frac{1}{2ic}.$$

Logo, $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_3 = \frac{\pi}{c}$.

Portanto, o vetor período nos fins $(z, w) = (ic, \pm w_c)$ é $(0, 0, \frac{\pi}{c})$ e é fácil ver que o período nos fins $(z, w) = (-ic, \pm w_{-c})$ é $(0, 0, -\frac{\pi}{c})$. ■

Lema 1.5 Se $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_1 = \left\{ (\lambda, \lambda_1), 0 < \lambda < 1, 1 < \lambda_1 < \frac{2\lambda}{1-\lambda} \right\}$, então $\int_{\gamma_1} \phi_1 < 0$. Além disso, $\int_{\gamma_1} \phi_1 > 0$, para λ suficientemente pequeno.

Demonstração: Calculemos o período de ϕ_1 sobre γ_1 . A curva γ_1 é homotópica ao intervalo $\{z \in \mathbb{R}, \lambda \leq z \leq 1\}$ sobre o qual w assume valores reais.

Temos

$$w^2 = \frac{(z + \lambda_1)(1 - z)(z + \lambda)}{(\lambda_1 - z)(z + 1)(z - \lambda)}$$

e escolhendo o ramo

$$g = w = \sqrt{\frac{(z + \lambda_1)(1 - z)(z + \lambda)}{(\lambda_1 - z)(z + 1)(z - \lambda)}},$$

segue:

$$\frac{1}{g} - g = 2 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)z^2 - \lambda\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(1 - z^2)(z^2 - \lambda^2)}}.$$

Substituindo em $\int_{\gamma_1} \phi_1 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{g} - g \right) \frac{1}{z^2 + c^2} dz$, segue:

$$\int_{\gamma_1} \phi_1 = \int_{\lambda}^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)z^2 - \lambda\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(1 - z^2)(z^2 - \lambda^2)}(z^2 + c^2)} dz.$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = z^2$, $2zdz = dt$:

$$\int_{\gamma_1} \phi_1 = \frac{1}{2} \int_{\lambda^2}^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)t - \lambda\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(1 - t)(t - \lambda^2)}\sqrt{t}(t + c^2)} dt.$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_1 = 0 \Leftrightarrow \int_{\lambda^2}^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)t - \lambda\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(1 - t)(t - \lambda^2)}\sqrt{t}(t + c^2)} dt = 0.$$

Todos os fatores do integrando são positivos, com exceção da função do numerador $\varphi(t) = (\lambda_1 + \lambda - 1)t - \lambda\lambda_1$ que é estritamente crescente e anula-se em $t_1 = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda - 1}$, ponto interior ao intervalo $[\lambda^2, 1]$.

De fato:

- $\lambda < 1 \Rightarrow \lambda\lambda_1 > \lambda\lambda_1 + (\lambda - 1)\lambda = \lambda(\lambda_1 + \lambda - 1)$
 $\Rightarrow t_1 = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda - 1} > \lambda^2;$
- $\lambda < 1$ e $\lambda_1 > 1 \Rightarrow 1 - \lambda < \lambda_1(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda\lambda_1 < \lambda_1 + \lambda - 1$
 $\Rightarrow \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda - 1} < 1.$

Como φ é estritamente crescente e anula-se em $t_1 \in [\lambda, 1]$, segue que φ é negativa em $[\lambda, t_1[$ e positiva em $]t_1, 1]$. Assim sendo, podemos escrever a integral como diferença de integrais com integrandos positivos:

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_{\gamma_1} \phi_1 &= -I_1 + I_2, \text{ onde } I_1 = \int_{\lambda^2}^{t_1} \frac{[-\varphi(t)]}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(1 - t)(t - \lambda^2)}\sqrt{t(t + c^2)}} dt \\ \text{e } I_2 &= \int_{t_1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(1 - t)(t - \lambda^2)}\sqrt{t(t + c^2)}} dt. \end{aligned}$$

Para podermos avaliar a diferença $-I_1 + I_2$, vamos colocar as duas integrais sobre o intervalo $[0, 1]$, através de mudanças de variáveis convenientes.

Para a primeira parcela, considerando a mudança da variável $t(x) = (t_1 - \lambda^2)x + \lambda^2$, obtemos

$$I_1 = \int_0^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)(1 - x)}{\sqrt{x \cdot f_{11}(x) \cdot f_{12}(x) \cdot f_{13}(x) f_1(x)}} dx,$$

onde

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= \frac{(1 + \lambda)(\lambda_1 + \lambda - 1)}{\lambda(\lambda_1 + \lambda)} - x, \\ f_{12}(x) &= \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda - 1)}{\lambda(1 - \lambda)} - x, \\ f_{13}(x) &= \frac{\lambda(\lambda_1 + \lambda - 1)}{(1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda)} + x, \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \lambda^2 + c^2 + \frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda_1 + \lambda)}{\lambda_1 + \lambda - 1}x.$$

Fazendo a mudança de variável $t(x) = 1 - (1 - t_1)x$, segue:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)(1 - x)}{\sqrt{x \cdot f_{21}(x) \cdot f_{22}(x) \cdot f_{23}(x) f_2(x)}} dx,$$

onde

$$\begin{aligned} f_{21}(x) &= \frac{(1 + \lambda)(\lambda_1 + \lambda - 1)}{\lambda_1 - 1} - x, \\ f_{22}(x) &= \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + \lambda - 1)}{1 - \lambda} + x, \\ f_{23}(x) &= \frac{\lambda_1 + \lambda - 1}{(\lambda_1 - 1)(1 - \lambda)} - x, \\ f_2(x) &= 1 + c^2 - \frac{(\lambda_1 - 1)(1 - \lambda)}{\lambda_1 + \lambda - 1}x. \end{aligned}$$

Comparando os integrandos de I_1 e I_2 , temos:

$$\text{i) } f_{22}(x) - f_{12}(x) = 2x + \frac{\lambda_1 + \lambda - 1}{\lambda(1 - \lambda)}(2\lambda - \lambda_1(1 - \lambda)).$$

Logo, se $\lambda_1(1 - \lambda) < 2\lambda$, temos $f_{22}(x) > f_{12}(x)$.

$$\text{ii) } f_{21}(x) - f_{11}(x) = \frac{(1 + \lambda)(\lambda_1 + \lambda - 1)}{(\lambda_1 - 1)\lambda(\lambda_1 + \lambda)}(\lambda_1(\lambda - 1) + 1 + \lambda^2).$$

Logo, se $\lambda_1(1 - \lambda) < 1 + \lambda^2$, temos $f_{21}(x) > f_{11}(x)$.

$$\text{iii) } f_{23}(x) - f_{13}(x) \geq f_{23}(1) - f_{13}(1) = \frac{\lambda_1}{(1 - \lambda)(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 + \lambda)}(1 + \lambda^2 - \lambda_1(1 - \lambda)).$$

Se $\lambda_1(1 - \lambda) < 1 + \lambda^2$, então $f_{23}(x) > f_{13}(x)$.

$$\text{iv) } f_2(x) - f_1(x) = (1 - \lambda^2)(1 - x) > 0, \forall x \in [0, 1[.$$

Se $\lambda_1 < \frac{2\lambda}{1 - \lambda}$, então, também $\lambda_1 < \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda}$ e segue que $f_{2j}(x) > f_{1j}(x)$, $j = 1, 2, 3$.

Portanto,

$$x f_{11} f_{12} f_{13} f_1 < x f_{21} f_{22} f_{23} f_2, \text{ se } (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_1.$$

Resulta que $I_1 > I_2$ e, portanto, $\int_{\gamma_1} \phi_1 = -I_1 + I_2 < 0$, para todo par $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_1$.

Observamos que das condições $\lambda_1(1 - \lambda) < 1 + \lambda^2$ e $\lambda_1 > 1$ resulta $\lambda > 1/3$. Para a prova da segunda afirmação, notamos que:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &\geq -\int_0^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)(1 - x)}{\sqrt{x \cdot f_{11}(1) \cdot f_{12}(1) \cdot f_{13}(0) f_1(0)}} dx + \int_0^1 \frac{(\lambda_1 + \lambda - 1)(1 - x)}{\sqrt{x \cdot f_{21}(0) \cdot f_{22}(1) \cdot f_{23}(0) f_2(0)}} dx \\ -I_1 + I_2 &\geq \frac{4}{3} \left[-\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1 + \lambda - 1}(\lambda_1 + \lambda)(1 - \lambda)}{\sqrt{\lambda_1}(\lambda_1 - 1)(\lambda^2 + c^2)} + \frac{(\lambda_1 - 1)(1 - \lambda)}{\sqrt{\lambda_1(1 + \lambda)(\lambda_1 + \lambda)(1 + c^2)}} \right] \end{aligned}$$

No limite para λ tendendo a zero, para cada $\lambda_1 > 1$ fixado, o segundo membro fica claramente positivo e segue que $-I_1 + I_2 > 0$ para λ suficientemente pequeno. ■

Lema 1.6 Para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_2 = \{(\lambda, \lambda_1) : 1 < \lambda_1 \leq 1 + 2\lambda \text{ e } 0 < \lambda < 1\}$, temos $\int_{\gamma_2} \phi_2 < 0$. Além disso, $\int_{\gamma_2} \phi_2$ é positiva para λ_1 suficientemente grande.

Para calcular o período de ϕ_2 sobre γ_2 , notamos que γ_2 é homotópica ao intervalo $\{x \in \mathbb{R}, 1 \leq z \leq \lambda_1\}$. Nesse intervalo, $\text{Rew} = 0$ e temos:

$$w^2 = (-1) \frac{(z + \lambda_1)(z - 1)(z + \lambda)}{(\lambda_1 - z)(z + 1)(z - \lambda)}.$$

Escolhendo o ramo

$$g = w = i \sqrt{\frac{(z + \lambda_1)(z - 1)(z + \lambda)}{(\lambda_1 - z)(z + 1)(z - \lambda)}},$$

temos

$$\frac{1}{g} + g = 2i \frac{z^3 + (\lambda\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda)z}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(z^2 - 1)(z^2 - \lambda^2)}},$$

$$1 \leq z \leq \lambda_1.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \phi_2 &= \int_{\gamma_2} \frac{1}{2} i \left(\frac{1}{g} + g \right) \frac{1}{z^2 + c^2} dz \\ &= - \int_1^{\lambda_1} \frac{z^3 - (\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1)z}{\sqrt{(\lambda_1^2 - z^2)(z^2 - 1)(z^2 - \lambda^2)(z^2 + c^2)}} dz. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = z^2$, temos:

$$\int_{\gamma_2} \phi_2 = -\frac{1}{2} \int_1^{\lambda_1^2} \frac{t - (\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(t - 1)(t - \lambda^2)(t + c^2)}} dt.$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \phi_2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^{\lambda_1^2} \frac{-t + (\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(t - 1)(t - \lambda^2)(t + c^2)}} dt = 0.$$

Observamos que os fatores do denominador do integrando são positivos e que a função do numerador $\varphi(t) = -t + (\lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1)$ é estritamente decrescente e anula-se somente em $t_2 = \lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1$.

Além disso, $t_2 - 1 = \lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1 - 1 = \lambda_1 - 1 - \lambda(\lambda_1 - 1) = (1 - \lambda)(\lambda_1 - 1) > 0$.

Portanto, $t_2 > 1$.

Também temos $\lambda_1^2 - t_2 = \lambda_1^2 - \lambda_1 - \lambda + \lambda\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_1 - 1) + \lambda(\lambda_1 - 1) > 0$ e, portanto, $\lambda_1^2 > t_2$.

Logo, φ é positiva em $[1, t_2[$ e negativa em $]t_2, \lambda_1^2]$.

Podemos escrever a integral como uma diferença de integrais com integrandos positivos

$\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \phi_2 = I_3 - I_4$, onde

$$I_3 = \int_1^{t_2} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(t - 1)(t - \lambda^2)(t + c^2)}} dt$$

e

$$I_4 = \int_{t_2}^{\lambda_1^2} \frac{[-\varphi(t)]}{\sqrt{(\lambda_1^2 - t)(t - 1)(t - \lambda^2)(t + c^2)}} dt.$$

Tal como na demonstração do lema anterior, faremos mudanças de variáveis para obtermos as duas integrais sobre o intervalo $[0, 1]$ e, assim, poderemos compará-las.

Para a primeira parcela, consideremos $t(x) = (t_2 - 1)x + 1$. Com esta mudança, temos:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt{\lambda_1 - 1} \sqrt{x g_{11}(x) \cdot g_{12}(x) g_1(x)}} dx,$$

onde

$$\begin{aligned}g_{11}(x) &= \frac{1+\lambda}{\lambda_1-1} + x \\g_{12}(x) &= \lambda_1 + 1 - (1-\lambda)x \\g_1(x) &= \frac{1+c^2}{(\lambda_1-1)(1-\lambda)} + x\end{aligned}$$

Para a segunda, fazendo a mudança $t(x) = (t_2 - \lambda_1^2)x + \lambda_1^2$, segue:

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{\lambda_1-1} \sqrt{x g_{21}(x) \cdot g_{22}(x) g_2(x)}} dx,$$

onde

$$\begin{aligned}g_{21}(x) &= \frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1-1} - x \\g_{22}(x) &= (\lambda_1+1) - (\lambda+\lambda_1)x \\g_2(x) &= \frac{\lambda_1^2+c^2}{(\lambda_1-1)(\lambda+\lambda_1)} - x\end{aligned}$$

Para a prova da primeira afirmação do lema, observemos os fatores do integrando de I_3 e I_4 . Temos:

$$\text{i) } g_{11}(x) - g_{21}(x) = \frac{1+2\lambda-\lambda_1}{\lambda_1-1} + 2x.$$

Se $\lambda_1 \leq 1+2\lambda$, resulta $g_{11}(x) \geq g_{21}(x)$, para todo $x \in [0, 1]$.

$$\text{ii) } g_{12}(x) - g_{22}(x) = (\lambda_1 + 2\lambda - 1)x.$$

De $\lambda_1 > 1$ e $\lambda > 0$, segue $g_{12}(x) \geq g_{22}(x)$, para todo $x \in [0, 1]$.

$$\text{iii) } g_1(x) - g_2(x) = 2x + \frac{\lambda^2+c^2}{\lambda_1-1} \frac{2\lambda+\lambda_1-1}{(1-\lambda)(\lambda+\lambda_1)} + \frac{1+2\lambda-\lambda_1}{\lambda_1-1}.$$

A segunda parcela é estritamente positiva e, portanto, se $\lambda_1 \leq 1+2\lambda$ resulta $g_1(x) > g_2(x)$, para todo $x \in [0, 1]$.

De (i), (ii) e (iii), conclui-se que se $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_2$, então

$$\sqrt{x g_{11} g_{12} g_1} > \sqrt{x g_{21} g_{22} g_2}.$$

Portanto, $I_3 - I_4 < 0$, para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_2$.

Para a prova da segunda afirmação do lema, vamos reescrever as integrais I_3 e I_4 , colocando em evidência o fator $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1}}$, ou seja:

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x g_{11} \tilde{g}_{12} g_1}} dx,$$

onde $\tilde{g}_{12} = \frac{1}{\lambda_1 + 1} \cdot g_{12} = 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda_1 + 1} x$.

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x g_{21} \tilde{g}_{22} g_2}} dx,$$

onde $\tilde{g}_{22} = \frac{1}{\lambda_1 + 1} \cdot g_{22} = 1 - \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1 + 1} x$.

Para os fatores de I_3 , temos:

i) $g_{11}(x) = \frac{1+\lambda}{\lambda_1 - 1} + x = \frac{1-\lambda^2}{(\lambda_1 - 1)(1-\lambda)} + x < g_1(x)$, para todo x no intervalo unitário.

ii) A função de segundo grau $x \cdot \tilde{g}_{12}(x)$ tem concavidade voltada para baixo e ponto de máximo $x_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 + 1}{1 - \lambda}$. Temos $x_0 > 1$, pois $\lambda_1 + 1 > 2 > 2(1 - \lambda)$, e concluímos que a função acima é estritamente crescente em $[0, 1]$. Portanto, $x \cdot \tilde{g}_{12}(x) \leq \tilde{g}_{12}(1) = \frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1 + 1} < 1$, para todo $x \in [0, 1]$.

De (i) e (ii), segue:

$$I_3 > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \int_0^1 \frac{1-x}{(A+x)^{3/2}} dx,$$

onde $A = \frac{1+\lambda^2}{(\lambda_1 - 1)(1-\lambda)}$.

Fazendo $y = A + x$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x}{(A+x)^{3/2}} dx &= \int_A^{A+1} \frac{A+1-y}{y^{3/2}} dy \\ &= -2(A+1) \frac{1}{\sqrt{y}} \Big|_{y=A}^{A+1} - 2\sqrt{y} \Big|_{y=A}^{A+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(A+1) \left(\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{A+1}} \right) - 2\sqrt{A+1} + 2\sqrt{A} \\
&= 2\frac{A+1}{\sqrt{A}} + 2\sqrt{A} - 4\sqrt{A+1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_3 > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{A+1}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} - 2\sqrt{A+1} \right).$$

Considerando os fatores de I_4 , vê-se que $g_{21}(x) = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 - 1} - x > 1 - x$ e $\tilde{g}_{22}(x) = 1 - \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1 + 1}x > 1 - x$, para todo $x \in [0, 1]$.

Então, $\frac{1-x}{\sqrt{g_{21}(x)\tilde{g}_{22}(x)}} < 1$ e segue que

$$I_4 < \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(D-x)} dx,$$

onde $D = \frac{\lambda_1^2 + c^2}{(\lambda_1 - 1)(\lambda + \lambda_1)} = \frac{\lambda_1^2 + c^2}{\lambda_1^2 - t_2}$.

Fazendo $y = \sqrt{x}$, temos:

$$\begin{aligned}
I_4 &< \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \cdot 2 \int_0^1 \frac{1}{D - y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{D} + y} dy - \int_0^1 \frac{1}{1 - \sqrt{D}} dy \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{y + \sqrt{D}}{y - \sqrt{D}} \right| \Big|_{y=0}^1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_4 < \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{D}}{1 - \sqrt{D}} \right|,$$

onde $D = \frac{\lambda_1^2 + c^2}{(\lambda_1 - 1)(\lambda + \lambda_1)} = \frac{\lambda_1^2 + c^2}{\lambda_1^2 - t_2}$.

A partir das desigualdades estabelecidas para I_3 e I_4 , conclui-se que:

$$I_3 - I_4 > \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \left[2 \left(\frac{A+1}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} - 2\sqrt{A+1} \right) - \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{D}}{1 - \sqrt{D}} \right| \right]$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \frac{A+1}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} - 2\sqrt{A+1} = \frac{1+c^2+(\lambda_1-1)(1-\lambda)}{(\lambda_1-1)(1-\lambda)} \frac{\sqrt{(\lambda_1-1)(1-\lambda)}}{\sqrt{1+c^2}} \\
& + \frac{\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{(\lambda_1-1)(1-\lambda)}} - 2\sqrt{\frac{1+c^2+(\lambda_1-1)(1-\lambda)}{(\lambda_1-1)(1-\lambda)}} = \\
& = \frac{\lambda_1 \frac{1+c^2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)}{\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)} \sqrt{\lambda_1} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)}}{\sqrt{1+c^2}} \\
& + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)}} - 2\sqrt{\frac{\lambda_1 \left[\frac{1+c^2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)\right]}{\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)(1-\lambda)}} = \\
& = \sqrt{\lambda_1} f(\lambda_1),
\end{aligned}$$

E temos:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} f(\lambda_1) = \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
\frac{|1+\sqrt{D}|}{|1-\sqrt{D}|} &= \frac{(\sqrt{D}+1)^2}{D-1} = \frac{\lambda_1^2 + c^2 + 2\sqrt{\lambda_1^2 + c^2} \sqrt{(\lambda_1-1)(\lambda+\lambda_1)} + (\lambda_1-1)(\lambda+\lambda_1)}{\lambda_1^2 + c^2 - (\lambda_1-1)(\lambda+\lambda_1)} \\
&= \frac{\lambda_1^2 \left(1 + \frac{c^2}{\lambda_1^2} + 2\sqrt{1 + \frac{c^2}{\lambda_1^2}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1\right)} + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1\right)\right)}{c^2 + \lambda_1 + \lambda - \lambda\lambda_1} \\
&= \lambda_1 \underbrace{\frac{\left[1 + \frac{c^2}{\lambda_1^2} + 2\sqrt{1 + \frac{c^2}{\lambda_1^2}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1\right)} + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1\right)\right]}{(1-\lambda) + \frac{c^2+\lambda}{\lambda_1}}}_{g(\lambda_1)} \\
&\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} g(\lambda_1) = \frac{3}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 - I_4 &> \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \left[2\sqrt{\lambda_1} f(\lambda_1) - \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \lambda_1 g(\lambda_1) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \sqrt{\lambda_1} \left[2f(\lambda_1) - \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\ln \lambda_1 g(\lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1}} \right].
\end{aligned}$$

Já temos $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{D}} = 1$ e

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln(\lambda_1 g(\lambda_1)) = \lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\ln g(\lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1}} \right].$$

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \ln g(\lambda_1) = \ln \frac{3}{1-\lambda} \Rightarrow \lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln g(\lambda_1) = 0.$$

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \frac{1/\lambda_1}{1/2\sqrt{\lambda_1}} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} \left[2f(\lambda_1) - \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \lambda_1 g(\lambda_1) \right] = \frac{2\sqrt{1-\lambda}}{1+c^2} > 0.$$

Segue que $\int_{\gamma_2} \phi_2 = I_3 - I_4$ é positiva para λ_1 suficientemente grande. ■

1.4 A geometria da superfície quociente

A superfície obtida no Teorema 1.3 tem suas simetrias relacionadas com os automorfismos σ , δ e τ . Como consequência do lema 1.2, as imagens, por X , das curvas fixadas pelas simetrias σ , δ e τ são linhas de simetria planas contidas em planos paralelos a x_2Ox_3 , x_1Ox_3 e x_1Ox_2 , respectivamente. Sejam γ_1 e γ_2 , como na demonstração do teorema 1.3, as curvas fechadas do bitoro correspondentes aos intervalos $[\lambda, 1]$ e $[1, \lambda_1]$ e seja γ_3 a curva fechada correspondente ao intervalo $[-\lambda, \lambda]$.

Pelo teorema 1.3, temos período vertical apenas nas curvas fechadas em torno dos fins e, portanto, as imagens $X(\gamma_1)$, $X(\gamma_2)$ e $X(\gamma_3)$ são curvas planas e fechadas no $\mathbb{R}^3$. As curvas $X(\gamma_2)$ e $X(\gamma_3)$ são fixadas, ponto a ponto, pela simetria induzida por σ e, portanto, estão contidas em planos α e α' , paralelos ao plano x_2Ox_3 . A curva $X(\gamma_1)$ é fixada, ponto a ponto, pela reflexão induzida por δ e, portanto, está contida em um plano β , paralelo a x_1Ox_3 ; além disso, $X(\gamma_1)$ é simétrica em relação à reflexão induzida por σ , pois, como foi visto na demonstração do teorema 1.3, $\gamma_1 = C_1 \cup (-\sigma C_1)$. Logo, os pontos $X(\lambda) = X(\gamma_1) \cap X(\gamma_3)$ e $X(1) = X(\gamma_1) \cap X(\gamma_2)$ são fixados pelas duas simetrias e, portanto, pertencem à reta vertical determinada pela intersecção de α e β . Além disso,

como $X(\lambda)$ pertence ao plano α' , resulta $\alpha = \alpha'$. Assim sendo, não poderia ocorrer que as imagens de duas curvas fixadas por σ (bem como por δ), estivessem em planos distintos.

Podemos assumir, portanto, que σ e δ induzem reflexões em relação aos planos x_2Ox_3 e x_1Ox_3 e que os pontos de intersecção $X(-\lambda_1)$, $X(-\lambda)$, $X(-1)$, $X(\lambda)$, $X(1)$, $X(\lambda_1)$ pertencem ao eixo Ox_3 .

Nos pontos tais que $z = ic$ ou $z = -ic$ temos pólos simples de η e, segundo o teorema de classificação dos fins de superfícies simplesmente periódicas, de Meeks e Rosenberg ([MR1]), os fins são de tipo Scherk, assintóticos a planos verticais. As normais nos fins são horizontais e, portanto, existe θ_0 , $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ tal que : $g(ic, w_c) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$, $g(ic, -w_c) = -\cos\theta_0 - i\sin\theta_0$, $g(-ic, w_{-c}) = \cos\theta_0 - i\sin\theta_0$ e $g(-ic, -w_{-c}) = -\cos\theta_0 + i\sin\theta_0$. Além disso, as imagens das curvas fixadas por τ não são fechadas, pois temos período vertical, e têm normal horizontal em cada ponto.

Proposição 1.7 *Para c real, numa vizinhança de $c = 1$, e para o par (λ, λ_1) apropriado, a superfície definida no Teorema 1.3 é uma superfície mergulhada.*

Demonstração:

Pelo lema 1.2, $X(M)$ consiste de oito partes congruentes. Cada uma delas é a imagem de um quadrante do plano z , perfurado em $z = ic$ ou $z = -ic$. Seja R o levantamento a M do primeiro quadrante, tal que $w(\infty) = 1$ e $w(0) = i$. A imagem de R por X , $F = X(R)$, é uma das oito partes congruentes e mostraremos que F é um gráfico sobre o plano x_1Ox_3 . A fronteira de F é formada por seis linhas de simetria planas, fixadas por reflexão, a saber:

α_1 : imagem de $\{z = iy, 0 \leq y < c\}$

α_2 : imagem de $\{z = x, 0 \leq x \leq \lambda\}$

α_3 : imagem de $\{z = x, \lambda \leq x < 1\}$

α_4 : imagem de $\{z = x, 1 \leq x < \lambda_1\}$

Figura 1.6: A região R em M

α_5 : imagem de $\{z = x, x \geq \lambda_1\}$

α_6 : imagem de $\{z = iy, y \geq c\}$

Na figura 1.6, denotamos por s_j a curva no bitoro correspondente à curva α_j , no $\mathbb{R}^3$, $j = 1, \dots, 6$.

As curvas α_1 e α_6 estão contidas em planos paralelos a x_1Ox_2 , distintos, pois há período vertical, e são divergentes para o fim. De fato, restrita a essas curvas a função g tem imagem no círculo unitário. Para α_1 , por exemplo, podemos escrever $g(iy) = \cos\theta(y) + i\sin\theta(y)$, $\theta_0 < \theta(y) < \pi/2$, onde θ é função contínua, decrescente, $\theta(0) = \pi/2$ e $\theta(c) = \theta_0$. A terceira coordenada de α_1 é constante e as duas primeiras são:

$$x_1(iy) = \int_0^y \frac{\sin\theta(t)}{c^2 - t^2} dt$$

$$x_2(iy) = \int_0^y \frac{(-\cos\theta(t))}{c^2 - t^2} dt$$

As duas integrais divergem quando y tende a c e, portanto, α_1 diverge para o fim. Com raciocínio análogo, vê-se que α_6 também diverge para o fim.

Mostremos que a restrição à fronteira de F da projeção sobre o plano x_1Ox_3 é injetora.

A projeção de α_1 é a própria coordenada $x_1(iy)$, determinada acima, e sua derivada $x'_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta(y)}{c^2 - y^2}$ é estritamente positiva para $z \neq 0$. Para α_6 , temos o análogo e segue que as projeções de α_1 e α_6 sobre x_1Ox_3 são injetoras. Para ver que a projeção da reunião das curvas α_2 a α_5 não tem auto-intersecção, basta observar que a reunião é imagem do semi-eixo real positivo e calculando a terceira coordenada para z real, $z \geq 0$, temos:

$$x_3(z) = \int_0^z \frac{1}{(c^2 + z^2)} dz = \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{z}{c}$$

Portanto, a função $x_3(z)$ é estritamente crescente, $0 \leq x_3(z) \leq \frac{\pi}{2c}$, e segue que as projeções de α_2 a α_5 sobre x_1Ox_3 são injetoras. Concluimos que a projeção da fronteira de F sobre o plano x_1Ox_3 não tem auto-intersecções.

No interior de F , não há pontos em que a normal aponte em direção paralela a x_1Ox_3 , pois temos $g = w$ e w é real somente nas curvas fixadas por σ , cujas imagens são α_2 e α_4 , contidas na fronteira de F . Logo, podemos supor que a parte imaginária de w é estritamente positiva em todos os pontos interiores a F e segue que a projeção de F sobre o plano x_1Ox_3 é injetora, ou seja, F é um gráfico sobre x_1Ox_3 e, portanto, $X(M)$ é superfície mergulhada no $\mathbb{R}^3$. ■

Capítulo 2

Funções elípticas de grau 2 no toro

Na construção de superfícies de Riemann compactas de gênero maior do que 1 a partir da técnica que apresentaremos no Capítulo 3, vamos utilizar as funções elípticas de grau 2 no toro, estudadas detalhadamente por Hoffman, Karcher e Wei ([HKW1]).

Faremos um resumo do que se encontra naquele artigo para o caso dos toros retangulares e quadrados, pois é a partir das simetrias desses toros que obteremos as simetrias desejadas em nossos exemplos.

Para construir uma função elíptica de grau 2 no toro T , vamos identificá-lo com um reticulado $\mathbb{C}/\Gamma$. Seja r uma rotação, de 180° em torno de um ponto em $\mathbb{C}$; r induz em T uma involução, que preserva orientação, com quatro pontos fixos. Segue que $\chi(T) = 2\chi(T/r) - 4$ e, portanto, $\chi(T/r) = 2$, ou seja, a superfície quociente é a esfera de Riemann. Fixando sobre a esfera os pontos $0, 1$ e ∞ , para cada escolha que associe três pontos do toro a esses valores, temos uma aplicação quociente $f : T \rightarrow T/r$, função de grau 2 no toro que tem por pontos de ramificação os pontos fixos pela rotação r . Além disso, se duas funções elípticas de grau 2 têm um ponto de ramificação comum, então, todos os seus pontos de ramificação coincidem. Conclui-se que quaisquer duas funções elípticas de grau 2, no mesmo toro, diferem por uma translação do toro, que posiciona seus pontos de ramificação, e por uma transformação de Möbius da esfera, que posiciona os valores $0, 1$ e ∞ . É fácil ver que, dada uma rotação de 180° no toro, existem três outras rotações,

r_1, r_2 e r_3 , que permutam os pontos fixos de r . Logo, a aplicação quociente $f : T \rightarrow S^2$ e a composta $f \circ r_k : T \rightarrow S^2$ são funções elípticas de grau 2 com os mesmos pontos de ramificação e, portanto, para cada k , existe transformação de Möbius M_k , tal que $f \circ r_k = M_k \circ f$.

A partir dessas considerações temos a construção de três funções com a mesma distribuição de zeros e pólos que as funções elípticas de grau 2 de Jacobi, que denotaremos por $\mathfrak{F}_D, \mathfrak{F}_E$ e $\mathfrak{F}_F$, e de uma função com um zero duplo e um pólo duplo, chamada função de Weierstrass geometricamente normalizada e denotada por $\wp_g$. Cada uma dessas funções fica bem definida determinando-se seus pontos de ramificação e escolhendo os três pontos com imagens em 0, ∞ e 1 (ou i); para simplificar as expressões, estas escolhas recaem nos pontos médios do domínio fundamental. Além disso, para as funções de Jacobi, com dois zeros e dois pólos, os pontos de ramificação têm que estar nos pontos médios entre os zeros e os pólos.

Relacionadas com as quatro funções temos quatro rotações, r_D, r_E, r_F e r_P , de 180° que fixam os pontos de ramificação de cada função:

$$\wp_g \circ r_P = \wp_g \quad \mathfrak{F}_D \circ r_D = \mathfrak{F}_D \quad \mathfrak{F}_E \circ r_E = \mathfrak{F}_E \quad \mathfrak{F}_F \circ r_F = \mathfrak{F}_F$$

Cada uma dessas quatro rotações permuta os pontos fixos das três outras e, portanto, para cada uma das funções, a composição com as rotações vai diferir da função considerada por uma transformação de Möbius, como explicado acima.

Comparando os zeros e pólos, seguem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_D \circ r_F &= \frac{1}{\mathfrak{F}_D} & \mathfrak{F}_E \circ r_F &= \frac{1}{\mathfrak{F}_E} & \mathfrak{F}_F \circ r_E &= \frac{-1}{\mathfrak{F}_F} & \wp_g \circ r_D &= \frac{-1}{\wp_g} \\ \mathfrak{F}_D \circ r_P &= -\mathfrak{F}_D & \mathfrak{F}_D \circ r_E &= \frac{-1}{\mathfrak{F}_D} & \mathfrak{F}_E \circ r_D &= \frac{-1}{\mathfrak{F}_E} & \mathfrak{F}_F \circ r_D &= \frac{1}{\mathfrak{F}_F} \end{aligned}$$

Essas relações determinam quais os pontos do toro a que devem ser associados os valores ± 1 e $\pm i$ e a distribuição dos sinais fica definida pela escolha da orientação. Os pontos

Figura 2.1: Valores das funções $\wp_g$, $\wp_E$, $\wp_D$, $\wp_F$ associados aos pontos do domínio de ramificação de cada uma das três funções de tipo Jacobi estão relacionados pelas transformações de Möbius $z \rightarrow \pm z^{\pm 1}$. Serão denotados por $\pm D^{\pm 1}$, $\pm E^{\pm 1}$ e $\pm F^{\pm 1}$. Os pontos de ramificação da função $\wp_g$ são P , $-1/P$, 0 e o ponto no infinito.

Na Figura 2.1 estão representados os valores assumidos pela função de Weierstrass geometricamente normalizada e pelas funções de Jacobi em correspondência com os pontos do domínio, no caso do toro retangular.

Os pontos de ramificação das quatro funções de grau dois estão relacionados entre si da seguinte maneira:

$$E = \frac{D-1}{D+1} \quad F = i \frac{D-i}{D+i} \quad P = i \frac{D^2+1}{D^2-1}. \quad (2.1)$$

Como se sabe, podemos descrever uma superfície de Riemann em termos de uma relação algébrica entre duas variáveis, usualmente denotadas por z e w , definidas sobre a superfície de Riemann. As funções $\wp_g$, $\wp_E$, $\wp_D$ e $\wp_F$, por outro lado, estão relacionadas, duas a duas, por equações algébricas e cada uma dessas relações descreve uma superfície de Riemann compacta de gênero um.

Em ([HKW1]), encontramos as seguintes relações:

$$\wp_D - \frac{1}{\wp_D} = \frac{D-1/D}{2i} \left(\wp_E - \frac{1}{\wp_E} \right) = \frac{2i}{E-1/E} \left(\wp_E - \frac{1}{\wp_E} \right),$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_D + \frac{1}{\mathfrak{S}_D} &= \frac{D + 1/D}{2} \left(\mathfrak{S}_F + \frac{1}{\mathfrak{S}_F} \right) = \frac{2}{F + 1/F} \left(\mathfrak{S}_F + \frac{1}{\mathfrak{S}_F} \right), \\ \mathfrak{S}_E + \frac{1}{\mathfrak{S}_E} &= \frac{2}{F - 1/F} \left(\mathfrak{S}_F - \frac{1}{\mathfrak{S}_F} \right) = \frac{E + 1/E}{2i} \left(\mathfrak{S}_F - \frac{1}{\mathfrak{S}_F} \right), \\ \frac{D^2}{\mathfrak{S}_D^2} &= \frac{\wp_g - 1/\wp_g - P + 1/P}{2i - P + 1/P} = D^2 \frac{\wp_g - 1/\wp_g - P + 1/P}{F - 1/F - P + 1/P}.\end{aligned}$$

Além disso, vale $\wp_g = \mathfrak{S}_E \mathfrak{S}_F$ e como estaremos trabalhando com as funções $\wp_g$ e $\mathfrak{S}_E$, notamos que também valem as seguintes relações:

$$\mathfrak{S}_E^2 = -P \cdot \wp_g \cdot \frac{\wp_g + 1/P}{\wp_g - P} \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}_F^2 = -\frac{1}{P} \wp_g \cdot \frac{\wp_g - P}{\wp_g + 1/P}.$$

Para demonstrar qualquer uma das equações acima, basta observar que, em cada caso, a função do lado esquerdo da igualdade tem os mesmos zeros e pólos que a função do lado direito e, portanto diferem apenas por um fator complexo que é calculado facilmente por comparação dos valores das duas funções em um ponto fixado do reticulado.

Dependendo do tipo de toro, teremos relações de simetria entre as funções elípticas de grau dois nele definidas. Os toros com simetrias que revertem orientação são conhecidos como *toros com conjugação complexa* e dividem-se em toros retangulares, com bases para o reticulado do tipo $\{1, i\lambda\}$, e rômnicos, com bases do tipo $\{1, e^{i\rho}\}$. Para os toros retangulares, o eixo de reflexão em $\mathbb{C}$ é paralelo a um dos eixos do domínio retangular fundamental e projeta-se sobre um conjunto de pontos fixos do toro tendo duas componentes. Para os toros rômnicos, o eixo de reflexão em $\mathbb{C}$ é paralelo a uma das diagonais e projeta-se sobre um conjunto de pontos fixos contendo uma componente. Se f é uma função elíptica de grau 2 no toro retangular, somente quatro das reflexões mencionadas acima permutam os pontos de ramificação de f : são aquelas cujos eixos passam pelos pontos de ramificação ou passam pelos pontos médios entre os pontos de ramificação.

Denotaremos, então, por R_j , $j = 1, 2, 3, 4$, as quatro reflexões possíveis no toro retangular. Neste toro, sendo $\{1, i\lambda\}$ a base do reticulado e r_j a reta fixada pela reflexão R_j ,

Figura 2.2: As retas fixadas pelas reflexões R_j

temos

$$\begin{aligned}
 (r_1): \quad \zeta &= x + i\frac{1}{2}\lambda, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
 (r_2): \quad \zeta &= \frac{1}{2} + iy\lambda, \quad 0 \leq y \leq 1, \\
 (r_3): \quad \zeta &= x + i\frac{1}{4}\lambda, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
 (r_4): \quad \zeta &= \frac{1}{4} + iy\lambda, \quad 0 \leq y \leq 1.
 \end{aligned}$$

Novamente, os pontos de ramificação de f são permutados pelas reflexões, para cada k , $1 \leq k \leq 4$, e para cada função elíptica de grau 2, f , existe uma transformação anti-holomorfa $M_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $M_k \circ f = f \circ R_k$, conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_D \circ R_1 &= \overline{\mathfrak{S}_D}, \quad \mathfrak{S}_D \circ R_2 = -\overline{\mathfrak{S}_D}, \quad \mathfrak{S}_D \circ R_3 = \frac{1}{\overline{\mathfrak{S}_D}}, \quad \mathfrak{S}_D \circ R_4 = \frac{1}{\overline{\mathfrak{S}_D}}, \\
 \mathfrak{S}_E \circ R_1 &= \overline{\mathfrak{S}_E}, \quad \mathfrak{S}_E \circ R_2 = -\overline{\mathfrak{S}_E}, \quad \mathfrak{S}_E \circ R_3 = -\overline{\mathfrak{S}_E}, \quad \mathfrak{S}_E \circ R_4 = \frac{1}{\overline{\mathfrak{S}_E}}, \\
 \mathfrak{S}_F \circ R_1 &= \overline{\mathfrak{S}_F}, \quad \mathfrak{S}_F \circ R_2 = -\overline{\mathfrak{S}_F}, \quad \mathfrak{S}_F \circ R_3 = \frac{1}{\overline{\mathfrak{S}_F}}, \quad \mathfrak{S}_F \circ R_4 = \overline{\mathfrak{S}_F}, \\
 \wp_g \circ R_1 &= \overline{\wp_g}, \quad \wp_g \circ R_2 = \overline{\wp_g}, \quad \wp_g \circ R_3 = P \frac{\overline{\wp_g} + 1/P}{\overline{\wp_g} - P} \\
 \text{e} \quad \wp_g \circ R_4 &= -\frac{1}{P} \frac{\overline{\wp_g} - P}{\overline{\wp_g} + 1/P}.
 \end{aligned}$$

A partir das expressões acima, podemos identificar as imagens, no plano complexo, das retas r_j , pelas funções elípticas:

A imagem de r_1 por $\mathfrak{S}_D$ é o eixo real e a imagem de r_2 é o eixo imaginário; as imagens de r_3 e r_4 , por $\mathfrak{S}_D$, estão contidas no círculo unitário.

A imagem de r_1 por $\mathfrak{S}_E$ é o eixo real e a imagem de r_4 é o círculo unitário; as imagens de r_2 e r_3 , por $\mathfrak{S}_E$, estão contidas no eixo imaginário.

As imagens de r_1 e r_4 , por $\mathfrak{S}_F$, estão contidas no eixo real e a imagem de r_3 é o círculo unitário; a imagem de r_2 , por $\mathfrak{S}_F$, é o eixo imaginário.

As imagens de r_1 e r_2 , por $\wp_g$, estão contidas no eixo real; é fácil provar que a imagem, por $\wp_g$, da reta r_3 é a circunferência de centro $(P, 0)$ e raio $\sqrt{1 + P^2}$ e a imagem de r_4 é a circunferência de centro $(-\frac{1}{P}, 0)$ e raio $\sqrt{1 + \frac{1}{P^2}}$.

Além disso, segue dessas relações de simetria e das expressões em 3.1 que, no caso do toro retangular, para algum ρ , $0 < \rho < \pi/2$, temos ainda:

$$D = e^{i\rho}, \quad E = itg\frac{\rho}{2}, \quad F = \frac{\cos \rho}{1 + \operatorname{sen} \rho} \text{ e } P = \cotg \rho \quad (2.2)$$

No caso do toro quadrado, temos, além das simetrias do toro retangular, as simetrias provenientes das reflexões com eixos paralelos às diagonais do domínio fundamental. São mais quatro reflexões que denotaremos por μ_1 , μ_2 , μ_3 e μ_4 , reflexões estas que fixam as retas d_1 , d_2 , d_3 e d_4 . Como pode ser observado na Figura 2.3, d_1 é a diagonal do quadrado que passa pelos zeros de $\mathfrak{S}_D$ e d_3 é a paralela a d_1 que passa pelos pólos de $\mathfrak{S}_D$; d_2 é a diagonal do quadrado que passa pelos pólos de $\mathfrak{S}_D$ e d_4 é a paralela a d_2 que passa pelos zeros de $\mathfrak{S}_D$.

Temos, como antes, relações entre as funções elípticas de grau 2 e essas simetrias, como por exemplo:

$$\begin{aligned} \wp_g \circ \mu_1 &= -\overline{\wp_g}, & \wp_g \circ \mu_2 &= -\overline{\wp_g}, \\ \wp_g \circ \mu_3 &= \frac{1}{\overline{\wp_g}}, & \wp_g \circ \mu_4 &= \frac{1}{\overline{\wp_g}}, \\ \mathfrak{S}_D \circ \mu_1 &= -i\overline{\mathfrak{S}_D}, & \mathfrak{S}_D \circ \mu_2 &= -i\overline{\mathfrak{S}_D}. \end{aligned}$$

Figura 2.3: As diagonais fixadas pelas reflexões μ_i

Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em ([HKW1]). Observamos que, denotando por z e ω duas funções elípticas de grau 2 quaisquer, cada uma das relações entre elas pode ser escrita na forma $Q(z, \omega) = 0$ e define um toro. No próximo capítulo veremos que, devido às propriedades de simetrias das funções elípticas é possível escolher pontos em um tal toro e definir polinômios $G(\omega, W)$ de modo que a equação $G(\omega, W) = 0$ tenha pontos singulares nos pontos escolhidos e descreva os “cortes” e as “colas” apropriadas para a construção de superfícies de Riemann compactas com estruturas conformes diferentes das usuais.

Capítulo 3

Superfícies de Riemann

3.1 Preliminares

Em vários textos que tratam do estudo de superfícies de Riemann encontramos, como primeira abordagem do assunto, o clássico exemplo da superfície onde está bem definida a função bivalente $F(z) = \sqrt{z}$. Como bem sabemos, a cada $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, com exceção de $z_0 = 0$ e $z_0 = \infty$, F pode associar dois valores. Escrevendo $z = |z|e^{i\theta}$ e considerando o ramo de F , $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, vemos que para z acima do semi-eixo real positivo, com θ próximo de 0, $\sqrt{z}$ tem valor próximo de $\sqrt{|z|}$ e para z próximo de 2π , $\sqrt{z}$ tem valor próximo de $-\sqrt{|z|}$. Ou seja, quando z cruza o semi-eixo real positivo, passa-se de um ramo de F ao outro. A idéia, então, é tomar duas cópias do plano complexo estendido, com corte em $\mathbb{R}_+$, e colá-las ao longo deste corte de modo a obter um conjunto em que F fique bem definida.

De modo geral, dado um polinômio irreduzível P a duas variáveis, podemos associar à equação $P(z, w) = 0$ uma superfície de Riemann compacta onde a função $w = w(z)$ tal que $P(z, w(z)) = 0$ está definida univalentemente e é holomorfa. Tal superfície é chamada superfície de Riemann algébrica associada ao polinômio P e é obtida a partir de esferas coladas ao longo de cortes entre os chamados pontos singulares da equação. Esse procedimento é descrito analiticamente no bem conhecido Teorema 3.1 e nos passos de sua demonstração que enunciaremos adiante.

Figura 3.1: As duas folhas associadas à função F

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 3.8 que, seguindo a mesma linha de raciocínio do Teorema 3.1, descreve analiticamente o procedimento “cortar” e “colar” superfícies de Riemann compactas de gênero um.

3.2 Superfícies de Riemann e funções algébricas

Enunciamos, a seguir, um dos mais importantes resultados na teoria das superfícies de Riemann; sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em ([K]) ou ([C]).

Teorema 3.1 *Dado um polinômio a duas variáveis complexas $P(z, \omega)$, irredutível, o conjunto $M = \{(z, \omega) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} / P(z, \omega) = 0\}$ é uma superfície de Riemann compacta.*

A fim de demonstrarmos um resultado mais geral e para termos uniformidade de notação, faremos algumas considerações e enunciaremos, a seguir, diversos resultados provados em ([K]) e que constituem parte da demonstração do teorema acima.

Consideremos o polinômio a duas variáveis $P(z, \omega) = p_0(z) + p_1(z)\omega + \cdots + p_n(z)\omega^n$, irredutível, onde p_j é polinômio a uma variável para $j = 1, \dots, n$ e $(z, \omega) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$.

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, a equação $P(z_0, \omega) = 0$ tem, em geral, n soluções distintas, exceto em dois casos:

(1) $p_n(z_0) = 0$, pois teríamos $\text{grau}(P(z_0, \omega)) < n$;

(2) $P(z_0, \omega) = 0$ tem raízes múltiplas. Este caso ocorre quando $D(z_0) = 0$, onde D é uma função racional e inteira dos coeficientes, chamada discriminante da equação. Observamos que $D(z_0) = 0$ se e só se existe ω_0 tal que $P(z_0, \omega_0) = \frac{\partial P}{\partial \omega}(z_0, \omega_0) = 0$.

As duas exceções ocorrem apenas para um número finito de pontos.

Para analisar o ponto $z = \infty$, devemos fazer a mudança de variável $\xi = \frac{1}{z}$ e considerar o polinômio

$$\tilde{P}(\xi, \omega) = \tilde{p}_0(\xi) + \tilde{p}_1(\xi)\omega + \cdots + \tilde{p}_n(\xi)\omega^n,$$

onde $\tilde{p}_j(\xi) = \xi^m p_j(1/\xi)$ e m é o maior dos graus dos polinômios p_j .

Temos que $\tilde{P}(\xi, \omega) = \xi^m P(1/\xi, \omega)$. O número de raízes distintas de $P(z, \omega) = 0$ para $z = \infty$ será inferior a n se o número de raízes distintas de $\tilde{P}(0, \omega) = 0$ for inferior a n .

O conjunto finito de pontos $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, enquadrando-se numa das situações acima é chamado *conjunto dos pontos singulares da equação* $P(z, \omega) = 0$ e será denotado por S .

Com os teoremas 3.2 e 3.3, demonstrados em ([K]), teremos uma descrição do comportamento das raízes da equação $P(z, \omega) = 0$ numa vizinhança de um ponto z_0 não singular.

Teorema 3.2 (Continuidade das raízes) *Sejam $P(z, \omega) = p_0(z) + p_1(z)\omega + \cdots + p_n(z)\omega^n$ polinômio irredutível, e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p_n(z_0) \neq 0$, de modo que $P(z_0, \omega) = 0$ tenha n raízes, podendo haver raízes múltiplas.*

Se ω_0 é uma raiz de ordem α de $P(z_0, \omega) = 0$, $1 \leq \alpha \leq n$, então para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que, para todo z_1 em $B(z_0, \delta)$ a equação $P(z_1, \omega) = 0$ tem α raízes distintas, todas contidas em $B(\omega_0, \varepsilon)$.

Segue deste teorema que se z_0 é ponto não singular de $P(z, \omega) = 0$, então, para cada ω_0 , raiz simples de $P(z_0, \omega) = 0$, fica definida uma função univalente e contínua em uma

vizinhança de z_0 . De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo z_1 em $B(z_0, \delta)$ a equação $P(z_1, \omega) = 0$ tem uma única raiz em $B(\omega_0, \varepsilon)$ e temos definida

$$\begin{aligned} f : B(z_0, \delta) &\rightarrow B(\omega_0, \varepsilon) \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

tal que $P(z, f(z)) = 0$.

Teorema 3.3 (Analiticidade das raízes) *A função f definida acima é analítica em $B(z_0, \delta)$.*

Pelos teoremas 3.2 e 3.3, para cada z_0 não singular, existem n elementos de funções, definidos numa vizinhança suficientemente pequena de z_0 , que denotaremos por

$$f_1(z; z_0), f_2(z; z_0), \dots, f_n(z; z_0).$$

Decorre dos quatro lemas abaixo, demonstrados em ([K]), que todos esses elementos de funções $f_i(z; z_0)$ dão origem a uma função analítica, multivalente, $\omega = \omega(z)$, de ordem n .

Lema 3.4 *Cada elemento de função $f_i(z; z_0)$ pode ser prolongado de modo multivalente a $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$, através de sucessivos prolongamentos analíticos.*

Lema 3.5 *Seja L uma poligonal sem auto-intersecções unindo os pontos de S e $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus L$. Cada elemento $f_i(z; z_0)$ pode ser prolongado a $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$ gerando uma função F_i analítica e univalente em E .*

Lema 3.6 *As funções F_i são singulares ou têm pólos nos pontos de S . Mais precisamente, o desenvolvimento em série de potências em torno de $a \in S$ é*

$$F_i(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l (\sqrt[p]{z-a})^l, \quad 1 \leq p \leq n, \text{ se } a \in \mathbb{C}$$

ou

$$F_i(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^l, \quad 1 \leq p \leq n,$$

se a é o ponto no infinito; em qualquer dos casos mostra-se que há apenas um número finito de potências com expoente negativo.

Lema 3.7 *Cada função F_i pode ser prolongada analiticamente a qualquer F_j através do corte L .*

Dos lemas 3.4 a 3.7, segue que as funções $F_i : E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus L \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, são os n ramos de uma função n -valente analítica completa no sentido de Weierstrass.

Em correspondência a essas n funções temos n folhas cortadas ao longo da poligonal L . Por continuação analítica através de caminhos fechados que intersectam o corte L , as funções F_j permutam entre si e as fronteiras de cada folha desaparecem dando origem a uma superfície de Riemann fechada. Para compactificar a superfície, basta introduzir os pontos singulares. Se a é um ponto singular, por continuação analítica de F_1 ao longo de um pequeno círculo em torno de a , obtemos, após uma volta completa valores de alguma F_i ; depois de um número finito de voltas, retornaremos à função F_1 , fechando um ciclo. Escolhendo alguma função que não aparece nesse ciclo, reiniciamos o processo e, assim sucessivamente, até que tenhamos formado l ciclos, $1 \leq l \leq m$, e que todas as F_i já tenham sido usadas. O ponto a será introduzido na superfície apenas l vezes uma vez que todas as folhas correspondentes a um ciclo têm intersecção em a . A cada um desses l pontos associamos o valor c_0 ou ∞ , encontrado, como no lema 3.6, no desenvolvimento da primeira função de cada ciclo, pois todas as funções de um ciclo têm o mesmo valor no ponto singular.

3.3 Superfícies de Riemann e composição de funções algébricas

Consideremos, agora, dois polinômios irredutíveis

$$\begin{aligned} Q(z, \omega) &= q_0(z) + q_1(z)\omega + q_2(z)\omega^n \\ \text{e} \quad G(\omega, W) &= g_0(\omega) + g_1(\omega)W + \cdots + g_m(\omega)W^m, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $z, \omega, W \in \hat{\mathbb{C}}$ e $Q(z, \omega) = 0$ é uma das relações algébricas satisfeitas por $z = \wp_g$ e $\omega = \wp_D, \wp_E$ ou $\wp_F$, funções elípticas de grau 2 no toro.

Nosso interesse é estudar as soluções de $G(\omega, W) = 0$, onde $\omega = \omega(z)$ é solução de $Q(z, \omega) = 0$.

Observamos que, para qualquer escolha de ω entre as funções elípticas de tipo Jacobi, a equação $Q(z, \omega) = 0$ tem quatro pontos singulares, pontos de ramificação da função $\wp_g$. Logo, para todo $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, não incluído entre os pontos singulares, a equação $Q(z_0, \omega) = 0$ tem 2 soluções distintas; além disso, exceto para um número finito de pontos ω_0 tais que $Q(z_0, \omega_0) = 0$, a equação $G(\omega_0, W) = 0$ tem m soluções distintas. Assim sendo, a equação $G(\omega, W) = 0$ com o vínculo $Q(z_0, \omega) = 0$ terá $2m$ soluções distintas, exceto se $z_0 \in S = S_1 \cup S_2$, onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : z_0 \text{ é ponto singular de } Q(z, \omega) = 0\} \\ \text{e} \quad S_2 &= \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : \text{existe } \omega_0 \text{ tal que } Q(z_0, \omega_0) = 0 \\ &\quad \text{e } \omega_0 \text{ é ponto singular de } G(\omega, W) = 0\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nosso objetivo é demonstrar o

Teorema 3.8 *Sejam $Q = Q(z, \omega)$ e $G = G(\omega, W)$ polinômios irredutíveis, a duas variáveis complexas, como em (3.1). Se $Q(z, \omega) = 0$ é uma das relações algébricas satisfeitas por $z = \wp_g$ e $\omega = \wp_D, \wp_E$ ou $\wp_F$, funções elípticas de grau 2 no toro, então o conjunto*

$$\overline{M} = \{(z, W) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid G(\omega, W) = 0, \text{ onde } \omega \text{ é tal que } Q(z, \omega) = 0\}$$

é uma superfície de Riemann compacta.

É preciso demonstrar, inicialmente, que existe uma função analítica completa no sentido de Weierstrass, associada aos polinômios Q e G . Os passos da demonstração dessa primeira etapa estão fracionados nos lemas 3.9 a 3.13.

Lema 3.9 *Sejam $Q(z, \omega)$ e $G(\omega, W)$ polinômios como em (3.1) e S o conjunto de pontos singulares definido em (3.2). Então, a todo z_0 em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$ correspondem $2m$ elementos de funções com centro em z_0 , $f_i^j(z; z_0) = f_i(\omega_j(z; z_0); (\omega_j(z_0; z_0)))$, definidos em uma vizinhança $V(z_0)$ tais que*

$$G(\omega_j(z; z_0), f_i^j(z; z_0)) = 0 \quad e \quad Q(z, \omega_j(z; z_0)) = 0$$

e $f_i^j \neq f_\lambda^\mu$ se $(i, j) \neq (\lambda, \mu)$.

Demonstração: Dado z_0 em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$, $Q(z_0, \omega) = 0$ tem 2 raízes simples distintas e se ω_0 é uma dessas raízes, $G(\omega_0, W) = 0$ tem m raízes distintas. Seja W_0 uma dessas raízes.

Pelo Teorema 3.2, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $\tilde{\omega}$ em $B(\omega_0, \delta')$ existe uma única raiz de $G(\tilde{\omega}, W) = 0$ em $B(W_0, \varepsilon)$. Desta forma, fica definida uma função univalente e contínua

$$\begin{aligned} f_1 : B(\omega_0, \delta') &\rightarrow B(W_0, \varepsilon) \\ \omega &\mapsto f_1(\omega) \end{aligned}$$

tal que $G(\omega, f_1(\omega)) = 0$.

Novamente, pelo Teorema 3.2, para δ' acima (ou menor, se necessário), existe $\delta > 0$ tal que para todo z_1 em $B(z_0, \delta)$ existe uma única raiz de $Q(z_1, \omega) = 0$ em $B(\omega_0, \delta')$. Também aqui fica definida uma função univalente e contínua

$$\begin{aligned} \omega_1 : B(z_0, \delta) &\rightarrow B(\omega_0, \delta') \\ z &\mapsto \omega_1(z) \end{aligned}$$

tal que $Q(z, \omega_1(z)) = 0$.

Compondo essas funções, obtemos

$$\begin{aligned} f_1^1 : B(z_0, \delta) &\rightarrow B(W_0, \varepsilon) \\ z &\mapsto f_1^1(z) = f_1(w_1(z)). \end{aligned}$$

A função f_1^1 é univalente e contínua em $B(z_0, \delta)$ e, pelo Teorema 3.2, é, também, analítica em $B(z_0, \delta)$ já que é composta de funções analíticas.

Concluimos, então, que a todo ω_0 tal que $Q(z_0, \omega_0) = 0$, z_0 em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$, correspondem m elementos de funções distintos centrados em ω_0 (raízes de $G(\omega_0, W) = 0$):

$$f_1(\omega; \omega_0), f_2(\omega; \omega_0), \dots, f_m(\omega; \omega_0).$$

Além disso, a todo z_0 não singular, correspondem 2 elementos de funções distintos centrados em z_0 (raízes de $Q(z_0, \omega) = 0$):

$$\omega_1(z; z_0), \omega_2(z; z_0).$$

Portanto, a todo z_0 não singular correspondem $2m$ elementos de funções centrados em z_0 : $f_i^j(z; z_0) = f_i(\omega_j(z; z_0); \omega_j(z_0; z_0))$, soluções de $G(\omega, W) = 0$ onde ω é tal que $Q(z, \omega) = 0$, com a propriedade $f_i^j(z; z_0) \neq f_\lambda^\mu(z; z_0)$, se $(i, j) \neq (\lambda, \mu)$. ■

Lema 3.10 *Seja L_1 uma poligonal, sem auto-intersecções, ligando os pontos de S_1 . As imagens de L_1 pelos ramos da função $\omega = \omega(z)$ estão contidas nos eixos coordenados.*

Demonstração: Por hipótese, $Q(z, \omega) = 0$ é equivalente a uma relação algébrica entre a função de Weierstrass normalizada, $\wp_g$, e uma das três funções de Jacobi, $\wp_D$, $\wp_E$ ou $\wp_F$. O conjunto de pontos singulares da equação $Q(z, \omega) = 0$ é $S_1 = \{-1/P, 0, P, \infty\}$ e, portanto, qualquer poligonal L_1 , ligando esses pontos, está contida no eixo real.

A função ω é de grau 2 e, pelo Lema 3.5, temos dois ramos de funções $\omega_1(z)$ e $\omega_2(z)$ definidos em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S_1$, analíticos em $\hat{\mathbb{C}} \setminus L_1$. Além disso, ω tem zeros simples ou pólos simples

nos pontos de S_1 . Observando as relações de simetria para as funções elípticas, vê-se que qualquer das três funções de Jacobi assume valores reais ou imaginários sobre as retas do reticulado em que $z = \wp_g$ assume valores reais. Segue que as imagens $\omega_1(L_1)$ e $\omega_2(L_1)$ estão contidas nos eixos coordenados do plano ω . ■

Lema 3.11 *Seja L_1 uma poligonal sem auto-intersecções unindo os pontos de S_1 e seja L a reunião de L_1 com segmentos $l_1, l_2, \dots, l_n$, onde cada l_k une o ponto s_k de S_2 à poligonal L_1 perpendicularmente. Seja $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus L$. Cada elemento $f_i^j(z; z_0)$ pode ser prolongado analiticamente a E gerando uma função F_i^j analítica e univalente em E . Além disso, $F_i^j = F_i \circ \omega_j$, onde ω_j é a função gerada pelo prolongamento de $\omega_j(z; z_0)$ e F_i é a função gerada pelo prolongamento de $f_i(\omega; \omega_j(z_0; z_0))$.*

Demonstração: A poligonal L_1 é um subconjunto do eixo real, no plano estendido, passando pelo ponto no infinito. O conjunto L é a reunião de L_1 com um número finito de segmentos perpendiculares a L_1 ou, se os pontos de S_2 pertencerem a L_1 , coincide com L_1 . Em qualquer dos casos, $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus L$ é simplesmente conexo.

Consideremos $B(z_0, \delta)$ um círculo em que, por exemplo, o elemento $f_i^j(z; z_0)$ seja analítico e seja z_1 em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$ um ponto da fronteira de $B(z_0, \delta)$. Então, pela unicidade de soluções numa vizinhança suficientemente pequena $B(z_1, \delta_1)$ de z_1 , existe um único par (λ, μ) tal que $f_\lambda^\mu(z, z_1)$ coincide com $f_i^j(z, z_0)$ em $B(z_1, \delta_1) \cap B(z_0, \delta)$. Pode-se prolongar qualquer elemento $f_i^j(z; z_0)$ a $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$ e como $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus L$ é simplesmente conexo, pelo Teorema da Monodromia, o prolongamento analítico de $f_i^j(z; z_0)$ ao longo de qualquer caminho fechado em E resulta no próprio $f_i^j(z; z_0)$, para todo (i, j) , dando origem a uma função analítica e univalente $F_i^j : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Para a prova da segunda afirmação, notamos que, pelo Lema 3.5, os elementos $\omega_1(z; z_0)$ e $\omega_2(z; z_0)$ podem ser prolongados analiticamente a $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$, gerando funções ω_1 e ω_2 , analíticas em E .

Se S_2 estiver contido em L_1 , então $L = L_1$ e, pelo lema 3.10, as imagens $\omega_1(L_1)$ e $\omega_2(L_1)$ estão contidas nos eixos coordenados. Em $\omega_1(L_1) \cup \omega_2(L_1)$, no plano ω , temos todos os pontos singulares da equação $G(\omega, W) = 0$. Logo, é possível tomar um subconjunto $\tilde{L}$ da reunião $\omega_1(L_1) \cup \omega_2(L_1)$ que contenha todos os pontos singulares da equação $G(\omega, W) = 0$ e tal que $\tilde{E} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{L}$ seja simplesmente conexo.

Se S_2 não estiver contido em L_1 , consideremos segmentos $l_1, l_2, \dots, l_n$, pelos pontos de S_2 , perpendiculares a L_1 . Para cada j , $j = 1, 2$, a imagem de L por ω_j é a reunião de $\omega_j(L_1)$, contida nos eixos coordenados com um número finito de curvas simples, cada uma intersectando os eixos em um só ponto. Também neste caso é possível considerar um subconjunto $\tilde{L}$ de $\omega_1(L) \cup \omega_2(L)$ que contenha todos os pontos singulares da equação $G(\omega, W) = 0$ e tal que $\tilde{E} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{L}$ seja simplesmente conexo.

Em qualquer dos dois casos, pelo lema 3.5, o elemento de função $f_i(\omega; \omega_j(z_0; z_0))$ pode ser prolongado analiticamente ao plano estendido menos os pontos singulares da equação $G(\omega, W) = 0$ gerando uma função univalente e analítica em $\tilde{E} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{L}$, independente da escolha de z_0 e j .

As compostas $F_i \circ \omega_j : \hat{\mathbb{C}} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ são univalentes e analíticas em $\hat{\mathbb{C}} \setminus L$, assim como as F_{ij} . Além disso, se z pertence a $B(z_0, \delta)$, temos $F_i \circ \omega^j(z) = F_i^j(z)$ e, portanto, $F_i^j = F_i \circ \omega^j$ em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$. ■

Observamos que no lema anterior, a hipótese de perpendicularidade dos l_j pode ser substituída por uma condição que garanta que possamos extrair das imagens de L_1 e dos l_j , por ω_1 e ω_2 , uma poligonal $\tilde{L}$ tal que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{L}$ seja simplesmente conexo.

Lema 3.12 *As F_i^j são regulares ou têm pólos nos pontos de S .*

Demonstração: Seja F_i^j uma das $2m$ funções obtidas no lema 3.11 e seja a um ponto singular. Se a pertence a S_1 , ou seja é singular em relação ao polinômio $Q(z, \omega)$, então, pelo Lema 3.6, ω_j é regular ou tem pólo em a e F_i é regular em $\omega^j(a)$. Então $F_i^j = F_i \circ \omega^j$

é regular ou tem pólo em a .

Se a pertence a S_2 , ω_j é regular em a e, novamente pelo Lema 3.6, F_i é regular em $\omega_j(a)$ ou tem pólo em $\omega_j(a)$. Logo, $F_i^j = F_i \circ \omega_j$ é regular ou tem pólo em a . ■

Lema 3.13 *Cada F_i^j pode ser estendida analiticamente através do corte L , a qualquer F_λ^μ .*

Demonstração: (i) Para i fixado, consideremos a equação $Q(z, \omega) = 0$ e as funções $\omega_j : \hat{\mathbb{C}} \setminus L \rightarrow \mathbb{C}$, do lema 3.11. Como Q é irredutível, pelo lema 3.7, ω_1 pode passar a ω_2 através do corte L e, portanto, $F_i^1 = F_i \circ \omega_1$ pode passar a $F_i^2 = F_i \circ \omega_2$ e vice-versa.

(ii) Para j fixado, consideremos a equação $G(\omega, W) = 0$ e as funções $F_i : \hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{L} \rightarrow \mathbb{C}$, do lema 3.11. Como G é irredutível, novamente pelo lema 3.7, cada F_i pode passar a qualquer F_λ através do corte $\tilde{L}$ e, portanto, cada $F_i^j = F_i \circ \omega_j$ pode passar a qualquer $F_\lambda^j = F_\lambda \circ \omega_j$.

Logo, por (i), cada F_i^j pode passar a qualquer F_i^μ , e, por (ii), esta última pode passar a qualquer F_λ^μ . ■

Demonstração: (Do teorema 3.8)

A partir dos lemas precedentes, provamos que o conjunto $\tilde{M}$ dos elementos de funções $f_i^j(z; z_0)$, z_0 em $\hat{\mathbb{C}} \setminus S$, é uma função analítica completa no sentido de Weierstrass associada ao par de polinômios (Q, G) . No conjunto $\tilde{M}$, munido naturalmente de uma estrutura de superfície de Riemann ([C], Prop.2.2), estão definidas duas funções, a projeção $Z : \tilde{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus S$ dada por $Z(f_i^j(z; z_0)) = z_0$ e $W : \tilde{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, dada por $W(f_i^j(z; z_0)) = f_i^j(z_0; z_0)$. Logo, $\tilde{M}$ e o conjunto

$$M = \{(z, W) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid G(\omega, W) = 0, \text{ onde } \omega \text{ é tal que } Q(z, \omega) = 0\}$$

estão em correspondência biunívoca, o que induz uma estrutura de superfície de Riemann sobre M , tornando-a conformemente equivalente a $\tilde{M}$.

Às funções F_i^j , do lema 3.7, correspondem $2m$ folhas $\widehat{\mathbb{C}} \setminus L$, ligadas através da poligonal L , pois, pelo lema 3.9, essas funções permutam entre si por prolongamentos analíticos sobre qualquer caminho fechado que intersecte L . Desta forma, a projeção Z é um recobrimento ramificado de $2m$ folhas. Para compactificar M , devemos introduzir os pontos singulares, da mesma maneira que é feito, por exemplo, em ([C]) e que resumiremos aqui para facilitar a compreensão. Seja z_s um ponto singular e seja $\mathcal{C}$ um disco com centro em z_s que não contenha nenhum outro ponto singular. Fixemos $\tilde{z}$ na fronteira de $\mathcal{C}$, $\partial\mathcal{C}$, e consideremos a solução $F_1^1(\tilde{z})$. Por prolongamento analítico de F_1^1 ao longo do caminho fechado $\partial\mathcal{C}$, obteremos após uma volta completa, uma solução $F_{i_2}(\tilde{z})$. Repetindo o processo um número finito de vezes, formaremos um ciclo:

$$F_{i_1} = F_1^1, F_{i_2}, \dots, F_{i_{n_1}}$$

onde cada função F_{i_j} é obtida por prolongamento analítico da função anterior ao longo de $\partial\mathcal{C}$ e a continuação da última função que aparece no ciclo, $F_{i_{n_1}}$ reconduz à função inicial F_1^1 . O comprimento do ciclo é n_1 , $1 \leq n_1 \leq 2m$, e escolhendo uma função que não aparece no primeiro ciclo, forma-se, de modo análogo um novo ciclo. Procedendo da mesma forma sucessivamente até que se esgotem as possibilidades, teremos r ciclos cuja soma dos comprimentos será: $n_1 + n_2 + \dots + n_r = 2m$. Como em ([C]), em correspondência com os r ciclos, existem r pontos $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_r^*$ e acrescentando suas vizinhanças ao conjunto dos elementos de funções $\widetilde{M}$, obtemos seu completamento $\hat{M}$, superfície de Riemann associada aos polinômios Q e G . Por ([C], Teor. 4.1), $\hat{M}$ é compacta. Por outro lado, o conjunto $\overline{M}$, é obtido de M por introdução dos pontos singulares; por exemplo, para o ponto singular z_s , serão introduzidos r pares $(z_s, \omega_1^*), (z_s, \omega_2^*), \dots, (z_s, \omega_r^*)$. Logo, $\overline{M}$ está em correspondência biunívoca com $\hat{M}$ e é, portanto, superfície de Riemann compacta. ■

3.4 Gênero da superfície de Riemann compacta

Para o cálculo do gênero da superfície compacta obtida por composição de funções algébricas, seguiremos exatamente os mesmos passos do caso de superfície associada a uma única equação algébrica ([C]). A partir da identificação de $\overline{M}$ com $\hat{M}$, feita na demonstração do Teorema 3.8, podemos considerar as funções meromorfas $Z, W : \overline{M} \rightarrow \hat{C}$, $Z(z, W) = z$, $W(z, W) = W$.

Para um ponto z_0 não singular temos $2m$ raízes $W_{11}, \dots, W_{2m}$, obtidas em duas etapas: resolvemos, em primeiro lugar, a equação $Q(z_0, \omega) = 0$ encontrando 2 raízes ω_1, ω_2 e, em seguida, resolvemos a equação $G(\omega_j, W) = 0$, encontrando m raízes $W_{j1}, \dots, W_{jm}$, para cada $j, j = 1, 2$. Localmente, em torno de cada ponto (z_0, W_{ij}) , temos uma parametrização $Z(\xi) = \xi$.

No caso de um ponto singular z_s , consideremos os r ciclos descritos na demonstração do teorema 3.8, de comprimentos $n_1, \dots, n_r$, tais que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = 2m$, e os r pontos ω_j^* tais que $Z^{-1}(z_s) = \{\omega_1^*, \dots, \omega_r^*\}$. Localmente, em torno de cada ponto (z_s, ω_j^*) , temos uma parametrização $Z(\xi) = \xi^{n_j}$ e o índice de ramificação do ponto z_s é definido por $ind(z_s) = \sum_{j=1}^r (n_j - 1)$. Para os pontos não singulares, temos $2m$ ciclos de comprimento 1 e, portanto, o índice de ramificação nesses pontos é nulo.

O índice de ramificação total da superfície é $b(\overline{M}) = \sum_{z \in \overline{M}} ind(z)$ e como a projeção $Z : \overline{M} \rightarrow \hat{C}$ é um recobrimento ramificado de $2m$ folhas, segue de ([C], Teor. 4.3) que o gênero γ de $\overline{M}$ é obtido de

$$\gamma = 1 - 2m + \frac{1}{2}b(\overline{M}) \quad (3.3)$$

Capítulo 4

Exemplos de superfícies de Riemann compactas

Apresentaremos exemplos de superfícies de Riemann compactas, de gêneros 2 e 3, construídas com base no Teorema 3.8. Para tanto, vamos considerar as funções $\wp_g$ e $\Im_E$, elípticas de grau 2, definidas no toro retangular.

Os pontos de ramificação de $\wp_g$ são $-1/P$, 0 , P , ∞ e os pontos de ramificação de $\Im_E$ são $1/E$, $-E$, E , $-1/E$, onde, por (2.2), temos para algum ρ , $0 < \rho < \pi/2$, $P = \cotg \rho$, $E = ie$, $e = \tg \frac{\rho}{2}$, $0 < e < 1$.

Temos a relação algébrica

$$\Im_E^2 = -P\wp_g \frac{\wp_g + 1/P}{\wp_g - P},$$

Figura 4.1: As funções $\wp_g$ e $\Im_E$

Figura 4.2: Plano z

ou seja, $z = \wp_g$ e $\omega = \Im_E$ são soluções da equação

$$\omega^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P}. \quad (4.1)$$

Para podermos trabalhar com a linguagem usada no teorema 3.8, vamos descrever, analiticamente, um ramo $\omega_1 = \omega_1(z)$, solução da equação (4.1). Os pontos singulares para a equação são $-1/P$, 0 , P e o ponto no infinito, todos sobre a reta $\mathbb{R}$.

Escrevendo $z = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - P = r_2 e^{i\theta_2}$ e $z + 1/P = r_3 e^{i\theta_3}$, segue $-Pz = Pr_1 e^{i(\theta_1 + \pi)}$ e, no domínio,

$$D_z : \begin{cases} r_1 > 0, r_2 > 0, r_3 > 0, \\ -\pi \leq \theta_1 < \pi, -\pi \leq \theta_2 < \pi, -\pi \leq \theta_3 < \pi, \end{cases}$$

temos os ramos de funções

$$\sqrt{-Pz} = \sqrt{Pr_1} e^{i\frac{\theta_1 + \pi}{2}}, \text{ com corte de ramo } \theta_1 = -\pi,$$

$$\sqrt{z - P} = \sqrt{r_2} e^{i\frac{\theta_2}{2}}, \text{ com corte de ramo } \theta_2 = -\pi \quad \text{e}$$

$$\sqrt{z + 1/P} = \sqrt{r_3} e^{i\frac{\theta_3}{2}}, \text{ com corte de ramo } \theta_3 = -\pi.$$

Consideremos os subconjuntos da reta $\mathbb{R}$:

$$\ell_1 = \{z \in \mathbb{R} | z \leq -1/P\},$$

$$\ell_2 = \{z \in \mathbb{R} | -1/P < z < 0\},$$

$$\ell_3 = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq P\},$$

$$\ell_4 = \{z \in \mathbb{R} | z > P\}.$$

Com estas notações, $\sqrt{-Pz}$ é ramo analítico em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_2$, $\sqrt{z+1/P}$ é ramo analítico em $\mathbb{C} \setminus \ell_1$ e $\sqrt{z-P}$ é ramo analítico em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$.

Lema 4.1 *Nas condições acima, a função $\omega_1(z) = \frac{\sqrt{Pr_1r_3}e^{i\frac{\theta_1+\pi}{2}}e^{i\frac{\theta_3}{2}}}{\sqrt{r_2}e^{i\frac{\theta_2}{2}}}$, definida no domínio D , é analítica em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$.*

Demonstração: A função ω_1 é função racional construída a partir dos ramos de funções descritos anteriormente $\sqrt{-Pz}$, $\sqrt{z+1/P}$ e $\sqrt{z-P}$. Os três ramos são analíticos em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ e, além disso, $\sqrt{z-P}$ não se anula nesse conjunto. Portanto, ω_1 é função analítica em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$.

Consideremos, também, para $j = 1, 2, 3$, as regiões do plano complexo:

$$\begin{aligned}\Omega_j^+ &= \{z = x + iy | x \in \ell_j, y > 0\}, \\ \Omega_j^- &= \{z = x + iy | x \in \ell_j, y < 0\}.\end{aligned}$$

Para ver que ω_1 não é analítica em ℓ_1 ou em ℓ_3 , basta observar, no esquema abaixo, a variação de $\omega_1(z)$, para z próximo do eixo real, pertencente a certas regiões do plano.

	θ_1	θ_2	θ_3	$\omega_1(z)$
$z \in \Omega_1^-$	$\approx -\pi$	$\approx -\pi$	$\approx -\pi$	$\approx \sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}}$
$z \in \Omega_1^+$	$\approx \pi$	$\approx \pi$	$\approx \pi$	$\approx -\sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}}$
$z \in \Omega_3^-$	≈ 0	$\approx -\pi$	≈ 0	$\approx -\sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}}$
$z \in \Omega_3^+$	≈ 0	$\approx \pi$	≈ 0	$\approx \sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}}$

Vê-se que a função ω_1 apresenta salto de $2\sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}}$ quando z cruza o segmento ℓ_1 ou o segmento ℓ_3 . Logo, ω_1 não é contínua e, portanto, não é analítica nesses segmentos.

Figura 4.3: Regiões do plano z

Mostremos, agora, que ω_1 é analítica em ℓ_2 . Para tanto, vamos compará-la à função:

$$F(z) = \frac{\sqrt{-Pz}\sqrt{z+1/P}}{\sqrt{z-P}}, \text{ construída a partir de}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-Pz} &= \sqrt{Pr_1}e^{i\frac{\rho_1+\pi}{2}}, \quad 0 \leq \rho_1 < 2\pi, \\ \sqrt{z-P} &= \sqrt{r_2}e^{i\frac{\rho_2}{2}}, \quad 0 \leq \rho_2 < 2\pi, \\ \text{e } \sqrt{z+1/P} &= \sqrt{r_3}e^{i\frac{\theta_3}{2}}, \quad -\pi \leq \theta_3 < \pi, \end{aligned}$$

Com as definições acima, $\sqrt{-Pz}$ tem corte de ramo $\rho_1 = 0$ e $\sqrt{z-P}$ tem corte de ramo $\rho_2 = 0$, ou seja, são analíticos em $\mathbb{C} \setminus \ell_3 \cup \ell_4$ e em $\mathbb{C} \setminus \ell_4$, respectivamente. O ramo $\sqrt{z+1/P}$ permanece como definido anteriormente e é analítico em $\mathbb{C} \setminus \ell_1$.

Portanto, os três ramos são analíticos em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3 \cup \ell_4$ e resulta que a função

$$F(z) = \sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}} \frac{e^{i\frac{\rho_1+\pi}{2}} e^{i\frac{\theta_3}{2}}}{e^{i\frac{\rho_2}{2}}}, \quad 0 < \rho_1, \rho_2 < 2\pi, \quad -\pi \leq \theta_3 < \pi, \text{ é analítica nesse conjunto.}$$

Para $z \in \ell_2$, temos $\rho_1 = \rho_2 = \pi$, $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$, e $\theta_3 = 0$ e então, $\frac{e^{i\frac{\rho_1+\pi}{2}}}{e^{i\frac{\rho_2}{2}}} = \frac{-1}{i} = \frac{1}{-i} = \frac{e^{i\frac{\theta_1+\pi}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}}$; logo, $\omega_1(z) = F(z)$ se $z \in \ell_2$.

Figura 4.4: Cortes de ramo de F .

Para $z \in \Omega_2^-$, $\rho_1 = \theta_1 + 2\pi$ e $\rho_2 = \theta_1 + 2\pi$ e novamente, $\frac{e^{i\frac{\rho_1+\pi}{2}}}{e^{i\frac{\rho_2}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta_1+2\pi+\pi}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2+2\pi}{2}}} = \frac{-e^{i\frac{\theta_1+\pi}{2}}}{-e^{i\frac{\theta_2+\pi}{2}}}$; logo $\omega_1(z) = F(z)$, se $z \in \Omega_2^-$.

Finalmente, para $z \in \Omega_2^+$, $\theta_1 = \rho_1$ e $\theta_2 = \rho_2$ e, também neste caso, $\omega_1(z) = F(z)$.

Concluimos que $\omega_1 = F$ na faixa $\Omega_2^- \cup \ell_2 \cup \Omega_2^+$, onde, como já vimos, F é analítica. Portanto, a função ω_1 é analítica nesse conjunto e, em particular, é analítica no segmento ℓ_2 . ■

A equação $\omega^2 = -Pz \frac{z+1/P}{z-P}$ define dois ramos de funções: a função ω_1 , que já foi analisada, e a função ω_2 , $\omega_2(z) = -\omega_1(z)$, ambas analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$.

Observamos que, a partir da equação (4.1), prova-se que ω^2 é real se e somente se z é real ou se z é ponto da circunferência de centro em $(P, 0)$ e raio $\sqrt{1+P^2}$. Além disso, analisando o sinal de ω^2 , segue que:

ω é real se e só se z pertence aos segmentos do eixo real ℓ_1 ou ℓ_3 e

ω é imaginário puro se e só se z pertence aos segmentos ℓ_2 ou ℓ_4 ou à circunferência de centro $(P, 0)$ e raio $\sqrt{1+P^2}$.

Lema 4.2 *A função ω_1 , definida no lema 4.1, tem sua imagem contida no semi-plano $H_1 = \{\omega = u + iv, v \geq 0\}$ e a função ω_2 , $\omega_2(z) = -\omega_1(z)$ tem sua imagem no semi-plano*

$$H_2 = \{\omega = u + iv, v \leq 0\}.$$

Demonstração: Já vimos que ω é real se e só se z é real, pertencente a ℓ_1 ou ℓ_3 , e portanto, a parte imaginária de $\omega_1(z)$ anula-se somente para z sobre esses segmentos. Se z_0 pertence a ℓ_2 , temos $z = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - P = r_2 e^{i\theta_2}$ e $z + 1/P = r_3 e^{i\theta_3}$, onde $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$ e $\theta_3 = 0$, e segue $\omega_1(z_0) = \sqrt{\frac{Pr_1r_3}{r_2}} e^{i\frac{\pi}{2}}$, ou seja $\omega_1(z_0) = i|z_0|$ pertence a H_1 . Da mesma forma, se z_1 pertence a ℓ_4 , podemos descrevê-lo da forma acima, com $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, obtendo $\omega_1(z_1) = i|z_1|$ pertencente a H_1 . Se z não pertence ao eixo real, consideremos uma curva fechada γ , contida em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$, passando pelo ponto z e por pontos $z_0 \in \ell_2$ e $z_1 \in \ell_4$; sobre γ a função ω_1 é analítica, portanto sua parte imaginária é contínua não se anula sobre a curva e é estritamente positiva em z_0 e z_1 . Logo, a parte imaginária de $\omega_1(z)$ é, também, estritamente positiva. ■

4.1 Exemplo com gênero 2

Observamos que a função ω , com os ramos ω_1 e ω_2 , descritos na seção anterior, definidos no plano complexo, está em correspondência com a função elíptica, $\mathfrak{F}_E$, de grau 2, definida no reticulado.

Para a construção de um bitoro a partir de dois toros é necessário termos apenas um corte em cada toro. O ponto $(\frac{i}{E}, \frac{1}{E})$ do toro definido pela equação (4.1) corresponde, no reticulado, ao ponto $\zeta = \frac{1}{4}\lambda i$. Portanto, $(\frac{i}{E}, \frac{1}{E})$ é fixado pelos automorfismos induzidos, no toro, pelas reflexões R_2 e R_3 .

Considerando, no toro, um trecho da curva correspondente ao segmento $r = \{\zeta = i\lambda y, 0 \leq y \leq 1/2\}$ entre pontos P_1 e P_2 simétricos em relação à simetria induzida por R_3 , teremos P_1 e P_2 com a mesma coordenada ω , pois $\omega = \frac{1}{E}$ é ponto de ramificação da função $\mathfrak{F}_E$. Vamos definir um polinômio $G(\omega, W)$, de grau 2 em W , com pontos singulares correspondentes aos pontos P_1 e P_2 .

Figura 4.5: O toro com um corte

Sejam $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < e < 1$ e $\frac{1}{B} = \frac{1}{ib}$.

A função $\omega = \Im_E$ assume o valor $\omega = \frac{1}{ib} = \frac{1}{B}$ em dois pontos sobre r , equidistantes de $\zeta = \frac{1}{4}\lambda i$

Proposição 4.3 *O conjunto*

$$M = \left\{ (z, W) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}, \text{ onde } \omega \text{ é tal que } \omega^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P} \right\}$$

é uma superfície de Riemann compacta de gênero 2.

Demonstração: Os pontos singulares para a equação $W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}$ são obtidos de

$$\omega - 1/B = 0 \quad \text{e de} \quad \omega - 1/E = 0.$$

Para $\omega = 1/E$, temos $z = \frac{i}{E} = \frac{1}{e}$ e para $\omega = 1/B$, temos $z = A$ ou $z = \tilde{A}$, $\tilde{A} = \frac{P(\bar{A} + 1/P)}{\bar{A} - P}$, $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}$, relacionados pela simetria induzida por R_3 , soluções da equação $\left(\frac{1}{B}\right)^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P}$, com $P < \tilde{A} < \frac{i}{E} < A$.

Os pontos singulares para a equação $\omega^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P}$ são $-1/P$, 0 , P e o ponto no infinito.

Logo, todos os pontos singulares pertencem à reta $\mathbb{R}$ e, de acordo com o Teorema 3.8, podemos tomar, no plano estendido $\hat{\mathbb{C}}$ a poligonal $L \subset \mathbb{R}$, $L = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq A\}$.

Figura 4.6: Plano ω

A equação $\omega^2 = -Pz \frac{z+1/P}{z-P}$ define dois ramos de funções: ω_1 , descrita no Lema 4.1, e $\omega_2 = -\omega_1$, ambos analíticos em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$.

A equação

$$W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E} \quad (4.2)$$

também define dois ramos de funções que passaremos a analisar. Observamos que os pontos $\omega = \frac{1}{B} = -i\frac{1}{b}$ e $\omega = \frac{1}{E} = -i\frac{1}{e}$ pertencem ao semi-plano $\{\omega = x+iy \in \mathbb{C} \mid y < 0\}$; logo, pelo Lema 4.2, ambos pertencem à imagem da função $\omega_2 = \omega_2(z)$.

Para definirmos um ramo $W_1 = W_1(\omega)$ solução da equação (4.2), consideremos o plano ω e sejam ρ_1 o ângulo entre o vetor $\omega - 1/B$ e a reta paralela ao eixo real pelo ponto $1/B$ e ρ_2 o ângulo entre o vetor $\omega - 1/E$ e a reta paralela ao eixo real pelo ponto $1/E$.

Escrevendo

$$\omega - \frac{1}{B} = R_1 e^{i\rho_1} \quad , \text{ com } -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1 < \frac{3\pi}{2},$$

$$\omega - \frac{1}{E} = R_1 e^{i\rho_2}, \quad \text{com } -\frac{\pi}{2} \leq \rho_2 < \frac{3\pi}{2},$$

temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega - 1/B} &= \sqrt{R_1} e^{i\rho_1/2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1 < \frac{3\pi}{2} \\ \sqrt{\omega - 1/E} &= \sqrt{R_2} e^{i\rho_2/2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \rho_2 < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \quad e$$

Consideremos os segmentos do eixo imaginário

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\omega = iv \mid v > -1/e\} \\ L_2 &= \left\{ \omega = iv \mid -\frac{1}{b} < v < -\frac{1}{e} \right\} \quad e \\ L_3 &= \left\{ \omega = iv \mid v < -\frac{1}{b} \right\}. \end{aligned}$$

A função $\sqrt{\omega - 1/B}$ tem corte de ramo $\rho_1 = -\frac{\pi}{2}$, ou seja, é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_3$, e a função $\sqrt{\omega - 1/E}$ tem corte de ramo $\rho_2 = -\frac{\pi}{2}$ e, portanto, é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_2 \cup L_3$.

Assim sendo, a função

$$W_1(\omega) = \frac{\sqrt{\omega - 1/B}}{\sqrt{\omega - 1/E}} = \frac{\sqrt{R_1} e^{i\rho_1/2}}{\sqrt{R_2} e^{i\rho_2/2}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1, \rho_2 < \frac{3\pi}{2},$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_2 \cup L_3$.

Mostremos que, na verdade, W_1 é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_2$.

Para tanto, denotemos as regiões do plano ω à esquerda e à direita dos segmentos L_j , $j = 1, 2, 3$, por:

$$\begin{aligned} \Lambda_j^- &= \{\omega = u + iv \mid u < 0 \quad e \quad y \in L_j\}, \\ \Lambda_j^+ &= \{\omega = u + iv \mid u > 0 \quad e \quad y \in L_j\}. \end{aligned}$$

Sobre L_2 , W_1 não é analítica, pois para $\omega \in \Lambda_2^+$, com ρ_1 próximo de $\frac{\pi}{2}$ e ρ_2 próximo de $-\frac{\pi}{2}$, $W_1(\omega)$ fica próximo de $\frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} \frac{e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}} = i \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}}$ e para $\omega \in \Lambda_2^-$, com ρ_1 próximo de

$\frac{\pi}{2}$ e ρ_2 próximo de $\frac{3\pi}{2}$, obtemos $W_1(\omega)$ próximo de $\frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i3\pi/4}} = -i \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}}$. Então, W_1 apresenta salto de $2i \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}}$ quando ω cruza L_2 , não sendo analítica nesse segmento.

Para mostrarmos que W_1 é analítica em L_3 , basta compará-la à função

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{\omega - 1/B}}{\sqrt{\omega - 1/E}} = \frac{\sqrt{R_1} e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{\sqrt{R_2} e^{i\frac{\theta_2}{2}}}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta_1 < \frac{5\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta_2 < \frac{5\pi}{2}.$$

A função G é quociente de funções em que o numerador tem corte de ramo $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, portanto analítico em $\mathbb{C} \setminus L_1$, e o denominador tem corte de ramo $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, portanto analítico em $\mathbb{C} \setminus L_1 \cup L_2$. Logo, G é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_1 \cup L_2$ e, em particular, analítica em L_3 .

Para $\omega \in L_3$, temos $\rho_1 = \frac{3\pi}{2} = \theta_1$ e $\rho_2 = \frac{3\pi}{2} = \theta_2$ e, para $\omega \in \Lambda_3^-$, temos $\frac{\pi}{2} < \rho_1 = \theta_1 < \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \rho_2 = \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$ e, então, nos dois casos, $W_1(\omega) = G(\omega)$. Para $\omega \in \Lambda_3^+$, temos $\theta_1 = \rho_1 + 2\pi$ e $\theta_2 = \rho_2 + 2\pi$ e, então:

$$\frac{e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\rho_1+2\pi}{2}}}{e^{i\frac{\rho_2+2\pi}{2}}} = \frac{-e^{i\frac{\rho_1}{2}}}{-e^{i\frac{\rho_2}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\rho_1}{2}}}{e^{i\frac{\rho_2}{2}}};$$

ou seja, $W(\omega) = G(\omega)$.

Logo, W_1 coincide com G na faixa $\Lambda_3^- \cup L_3 \cup \Lambda_3^+$, onde G é analítica e, portanto, em particular, W_1 é analítica em L_3 . Como já provamos a analiticidade de W_1 em $\mathbb{C} \setminus L_2 \cup L_3$, concluímos que W_1 é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_2$.

Por tratar-se de equação de grau 2, $W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}$ define, além de W_1 , mais um ramo $W_2 = W_2(\omega) = -W_1(\omega)$, ambos analíticos em $\mathbb{C} \setminus L_2$. O segmento L_2 do plano ω é imagem pela função $\omega_2 = \omega_2(z)$ dos segmentos contidos no eixo real $\{z \in \mathbb{R} | \tilde{A} \leq z \leq \frac{i}{E}\}$ e $\{z \in \mathbb{R} | \frac{i}{E} \leq z \leq A\}$. Todos os pontos de L_2 têm duas pré-imagens $z_1 \in [\tilde{A}, \frac{i}{E}]$ e $z_2 \in [\frac{i}{E}, A]$, onde $z_2 = \frac{P(\bar{z}_1 + 1/P)}{\bar{z}_1 - P}$, exceto o ponto $\frac{1}{E} = \omega_2(\frac{i}{E})$ que é ponto de ramificação da função ω_2 . Então, L_2 do plano ω corresponde ao segmento $\ell_5 = \{z \in \mathbb{R} | \tilde{A} \leq z \leq A\}$, do plano z , as funções compostas $W_1^2 = W_1(\omega_2(z))$ e $W_2^2 = W_2(\omega_2(z))$ são analíticas em

$\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3 \cup \ell_5$ e concluímos que $z = \frac{i}{E}$ não é ponto singular da superfície, ou seja, apenas $z = A$ e $z = \tilde{A}$ são pontos singulares relativos à segunda equação.

As funções $W_1^1 = W_1(\omega^1(z))$ e $W_2^1 = W_2(\omega^1(z))$ são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$, já que ℓ_5 não está contido na imagem de ω_1 .

Desta forma, temos quatro ramos de funções: W_1^1 e W_2^1 , analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$, e W_1^2 e W_2^2 , analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3 \cup \ell_5$.

Através dos cortes ℓ_1 e ℓ_3 , W_1^1 é prolongada analiticamente a W_i^2 , $i = 1, 2$, e, através do corte ℓ_5 , W_1^2 é prolongada analiticamente a W_2^2 . São, portanto, quatro ramos da função $W = W(z)$, analítica completa no sentido de Weierstrass, solução da equação $W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}$, com $\omega^2 = -Pz \frac{z + 1/P}{z - P}$.

Para o cálculo do gênero da superfície de Riemann compacta M , obtida a partir da função algébrica $W = W(z)$, observamos que os pontos singulares $-\frac{1}{P}$, 0 , P e ∞ aparecem no encontro das folhas correspondentes a W_1^1 e W_1^2 e das folhas correspondentes a W_2^1 e W_2^2 .

Denotando por z_0 qualquer um desses pontos e tomando um círculo, com centro em z_0 e tal que nenhum ponto singular pertença a $\partial\mathcal{C}$ ou ao interior do círculo, seja $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$ e consideremos o valor $W_1^1(\tilde{z})$, solução do par de equações que definem M . Continuando analiticamente a função W_1^1 ao longo do caminho $\partial\mathcal{C}$, chegaremos, após uma volta completa, ao valor $W_1^2(\tilde{z})$, pois ao cruzar ℓ_1 ou ℓ_3 a função ω_1 passa analiticamente a ω_2 . Com mais uma volta ao longo de $\partial\mathcal{C}$, retornaremos à solução inicial. Temos, então, o primeiro ciclo relativo a z_0 : W_1^1, W_1^2 .

Começando com o valor $W_2^1(\tilde{z})$, solução do par de equações que não aparece no primeiro ciclo, forma-se, analogamente, o segundo ciclo: W_1^1, W_2^2 .

Isto esgota as possibilidades e, portanto, para $z_0 = -\frac{1}{P}$, 0 , P ou o ponto no infinito, com as adaptações necessárias, temos dois ciclos de comprimento dois, do que se conclui

Figura 4.7: Plano z : os círculos em torno dos pontos singulares

que os índices de ramificação nesses pontos são:

$$\text{ind}\left(-\frac{1}{P}\right) = \text{ind}(0) = \text{ind}(P) = \text{ind}(\infty) = 2 \cdot (2 - 1).$$

Os pontos singulares $\tilde{A}$ e A aparecem somente no encontro das folhas correspondentes a W_1^2 e W_2^2 . Denotando novamente por z_0 um desses dois pontos e tomando um círculo $\mathcal{C}$, nas mesmas condições anteriores, seja $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$ e $W_1^2(\tilde{z})$ uma solução para o par de equações. Por continuação analítica de W_1^2 , a partir de $\tilde{z}$, ao longo do caminho $\partial\mathcal{C}$, obteremos após uma volta completa o valor W_2^2 , pois W_1^2 passa analiticamente a W_2^2 quando $\partial\mathcal{C}$ cruza o segmento ℓ_5 . Com mais uma volta, retornaremos ao valor $W_1^2(\tilde{z})$, fechando o ciclo: W_1^2 , W_2^2

Iniciando um novo ciclo com $W_1^1(\tilde{z})$ ou com $W_2^1(\tilde{z})$, retornaremos, após uma volta completa ao longo de $\partial\mathcal{C}$, ao mesmo valor, pois as funções W_1^1 e W_2^1 são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$.

Logo, temos os índices de ramificação: $\text{ind}(A) = \text{ind}(\tilde{A}) = 1 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (1 - 1)$.

No ponto $z = 1/E$, o índice de ramificação é nulo. De fato, sejam $\mathcal{C}$ com centro i/E , nas mesmas condições anteriores, e $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$; se considerarmos o valor $W_1^1(\tilde{z})$ ou $W_2^1(\tilde{z})$, obteremos por prolongamento analítico, após uma volta completa ao longo de $\partial\mathcal{C}$, o mesmo valor inicial, pois as funções W_1^1 e W_2^1 são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$, onde $\mathcal{C}$ está

Figura 4.8: O bitoro

contido. Se considerarmos o valor $W_1^2(\tilde{z})$ e prolongarmos W_1^2 analiticamente ao longo de $\partial\mathcal{C}$, teremos que cruzar o segmento ℓ_5 duas vezes para retornarmos ao ponto $\tilde{z}$. Na primeira vez, teremos valores de W_2^2 e, na segunda, valores de W_1^2 novamente. Portanto, após uma volta completa, encontraremos o valor inicial $W_1^2(\tilde{z})$. O mesmo acontece se considerarmos $W_2^2(\tilde{z})$ como valor inicial.

Assim sendo, temos quatro ciclos unitários relativos a $z = 1/E$ e, portanto, o índice da ramificação é $\text{ind}\left(\frac{i}{E}\right) = 4(1 - 1) = 0$.

Resulta que a ordem de ramificação total de M é

$$b(M) = \sum_{z \in M} i(z) = 4.2.(2 - 1) + 2.1.(2 - 1) = 10.$$

Como temos quatro ramos da função $W = W(z)$, segue que:

$$\text{gênero}(M) = 1 - 4 + \frac{1}{2}.10 = 2.$$

Logo, M é uma superfície de Riemann compacta de gênero 2 e está completa a prova da Proposição 3.1. ■

Figura 4.9: Automorfismos do bitoro

4.2 Automorfismos do bitoro

Conforme vimos no Capítulo 2, temos quatro simetrias no toro retangular e, em particular para $z = \wp_g$ e $\omega = \Im_E$, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 z \circ R_1 &= \bar{z} & \omega \circ R_1 &= \bar{\omega} \\
 z \circ R_2 &= \bar{z} & \omega \circ R_2 &= -\bar{\omega} \\
 z \circ R_3 &= P \frac{\bar{z} + 1/P}{\bar{z} - P} & \omega \circ R_3 &= -\bar{\omega} \\
 z \circ R_4 &= -\frac{1}{P} \frac{\bar{z} - P}{\bar{z} + 1/P} & \omega \circ R_4 &= \frac{1}{\bar{\omega}}
 \end{aligned}$$

Vamos analisar o efeito dessas simetrias sobre o bitoro da Proposição 4.1.

Calculando $W^2\left(\frac{1}{\bar{\omega}}\right)$ e $W^2(\bar{\omega})$ não se obtêm expressões notáveis em termos de $W(\omega)$.

Mas, como $1/B$ e $1/E$ são imaginários puros, temos, em contrapartida:

$$W^2(-\bar{\omega}) = \frac{-\bar{\omega} - 1/B}{-\bar{\omega} - 1/E} = \frac{\overline{\omega - 1/B}}{\overline{\omega - 1/E}} = \overline{W^2(\omega)}.$$

Concluimos, daí, que para $\omega = -\bar{\omega}$ e, portanto, sobre as retas do reticulado fixadas por R_2 e R_3 , $W^2(\omega)$ assume valores reais.

Além disso, lembrando que $\frac{1}{B} = -i\frac{1}{b}$, $\frac{1}{E} = -i\frac{1}{e}$, $0 < b < e$, segue que para $\omega = -\bar{\omega} = iy$,

$$W^2(\omega) = W^2(iy) = \frac{y + 1/b}{y + 1/e}.$$

Analisando o sinal da expressão acima, temos:

W^2 real e positivo se $y < -1/b$ ou $y > -1/e$ e

W^2 real e negativo se $-1/b < y < -1/e$.

Observando, na figura 4.1, os valores da função $\omega = \Im_E$ no reticulado $\{\zeta = x_1 + i\lambda x_2, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, vê-se que temos $\omega = iy$ com $-1/b < y < -1/e$ somente em um segmento da reta $\zeta = ix_2\lambda$, fixada pela simetria R_2 . Logo, W é imaginário puro apenas nesse conjunto e W é real sobre todos os outros pontos em que ω é imaginário puro.

Assim sendo, estão definidos no bitoro da Proposição 4.1 três automorfismos:

$$\text{a)} \quad \delta : M \rightarrow M$$

$$(z, \omega, W) \mapsto (\bar{z}, -\bar{\omega}, \bar{W})$$

$$\text{b)} \quad \sigma : M \rightarrow M$$

$$(z, \omega, W) \mapsto (P \frac{(\bar{z} + 1/P)}{\bar{z} - P}, -\bar{\omega}, \bar{W})$$

$$\text{c)} \quad \tau : M \rightarrow M$$

$$(z, \omega, W) \mapsto (\bar{z}, -\bar{\omega}, -\bar{W})$$

O conjunto dos pontos fixos por δ é

$$\left\{ \begin{array}{l} (z, \omega, W) \in M / z \in \mathbb{R}, P \leq z \leq \tilde{A} \text{ ou } z \geq A, \text{ ou } -1/P \leq z \leq 0 \quad \omega = iy \in i\mathbb{R}, \\ \text{com } y \geq \frac{1}{e} \text{ ou } y \leq -\frac{1}{b} \text{ ou } -e \leq y \leq e \text{ e } W \in \mathbb{R}. \end{array} \right\}$$

O conjunto dos ponto fixos por τ é

$$\left\{ \begin{array}{l} (z, \omega, W) \in M / z \in \mathbb{R}, \tilde{A} \leq z \leq A, \omega = iy \in i\mathbb{R}, \\ \text{com } -\frac{1}{b} < y < -\frac{1}{e} \text{ e } W \in i\mathbb{R}. \end{array} \right\}$$

Temos $z = \frac{P(\bar{z} + 1/P)}{\bar{z} - P}$ se e somente se z pertence ao círculo C de centro P e raio $r = \sqrt{1 + P^2}$. Então, o conjunto dos pontos fixos por σ é

$$\left\{ (z, \omega, W) \in M / z \in C, \omega = iy, -\frac{1}{e} \leq y \leq e \text{ ou } e \leq y \leq \frac{1}{e} \text{ e } W \in \mathbb{R}. \right\}$$

4.3 Exemplo com gênero 3

Consideraremos, novamente, o par de funções $z = \wp_g$, $\omega = \Im_E$ e seja $E = ie$ um dos pontos de ramificação de $\Im_E$, $0 < e < 1$. Para $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < e < 1$, definimos $\frac{1}{B} = \frac{1}{ib}$.

Para a construção de um tritoro, tomaremos cortes, no toro, correspondentes aos segmentos $\{\zeta = iy, y \leq -1/b \text{ ou } y \geq 1/b\}$. Tais cortes têm centro nos pontos (P, ∞) e (∞, ∞) e são fixados, ponto a ponto, pelo automorfismo induzido no toro pela simetria R_2 . As coordenadas ω nos pontos inicial e final de cada corte serão $1/B$ ou $-1/B$ e, portanto, devemos definir uma equação $G(\omega, W) = 0$, de grau 2 em W , com pontos singulares em $\omega = 1/B$ ou $\omega = -1/B$

Proposição 4.4 *O conjunto*

$$M = \left\{ (z, W) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} / W^2 = \frac{1/B - \omega}{1/B + \omega}, \text{ onde } \omega \text{ é tal que } \omega^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P} \right\}$$

é uma superfície de Riemann compacta de gênero 3.

Demonstração: Os pontos singulares para a equação $W^2 = \frac{1/B - \omega}{1/B + \omega}$ são obtidos de

$$\omega - 1/B = 0 \quad \text{e de} \quad \omega + 1/B = 0.$$

Com a mesma notação adotada na demonstração da Proposição 4.3, temos os pontos singulares $z = A$ ou $z = \tilde{A}$, $\tilde{A} = \frac{P(\bar{A} + 1/P)}{\bar{A} - P}$, $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}$, soluções de $\left(\frac{1}{B}\right)^2 = \left(\frac{-1}{B}\right)^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P}$, com $P < \tilde{A} < \frac{i}{E} < A$.

Figura 4.10: O toro com dois cortes

Os pontos singulares para a equação $\omega^2 = -P.z \cdot \frac{z+1/P}{z-P}$ são $-1/P$, 0 , P e o ponto no infinito.

Logo, todos os pontos singulares são reais e, de acordo com o Teorema 3.8, podemos tomar, no plano estendido $\hat{\mathbb{C}}$, a poligonal $L \subset \mathbb{R}$, $L = \{z \in \mathbb{R} | z \leq -1/P \text{ ou } z \geq 0\}$.

A equação $W^2 = \frac{1/B - \omega}{1/B + \omega}$ define dois ramos de funções W_1 e W_2 , tais que $W_2 = -W_1$. Para definirmos um ramo $W_1 = W_1(\omega)$, solução dessa equação, consideremos o plano ω . Pelo Lema 4.2, o ponto $\omega = \frac{1}{B} = -i\frac{1}{b}$ pertence à imagem da função ω_2 e o ponto $\omega = \frac{-1}{B} = i\frac{1}{b}$ pertence à imagem da função ω_1 .

Sejam ρ_1 o ângulo entre o vetor $\omega - 1/B$ e a reta paralela ao eixo real pelo ponto $1/B$ e ρ_2 o ângulo entre o vetor $\omega + 1/B$ e a reta paralela ao eixo real pelo ponto $1/B$.

Escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} - \omega &= e^{i\pi} R_1 e^{i\rho_1} & , \text{ com } -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1 < \frac{3\pi}{2}, \\ \omega + \frac{1}{B} &= R_2 e^{i\rho_2} & , \text{ com } \frac{\pi}{2} \leq \rho_2 < \frac{5\pi}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1/B - \omega} &= \sqrt{R_1} e^{i\frac{\rho_1 + \pi}{2}}, & -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1 < \frac{3\pi}{2} & \text{ e} \\ \sqrt{\omega + 1/B} &= \sqrt{R_2} e^{i\frac{\rho_2}{2}}, & \frac{\pi}{2} \leq \rho_2 < \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

Figura 4.11: O plano ω

Consideremos os segmentos do eixo imaginário

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\omega = iv | v > 1/b\} \\ L_2 &= \left\{ \omega = iv \mid -\frac{1}{b} < v < \frac{1}{b} \right\} \quad \text{e} \\ L_3 &= \left\{ \omega = iv \mid v < -\frac{1}{b} \right\}. \end{aligned}$$

A função $\sqrt{1/B - \omega}$ tem corte de ramo $\rho_1 = -\frac{\pi}{2}$, ou seja, é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_3$, e a função $\sqrt{\omega + 1/B}$ tem corte de ramo $\rho_2 = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_1$.

Assim sendo, a função

$$W_1(\omega) = \frac{\sqrt{1/B - \omega}}{\sqrt{1/B + \omega}} = \frac{\sqrt{R_1} e^{i\frac{\rho_1 + \pi}{2}}}{\sqrt{R_2} e^{i\frac{\rho_2}{2}}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \rho_1 < \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \rho_2 < \frac{5\pi}{2},$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus L_1 \cup L_3$.

Por tratar-se de equação de grau 2, $W^2 = \frac{1/B - \omega}{1/B + \omega}$ define, além de W_1 , mais um ramo $W_2 = W_2(\omega) = -W_1(\omega)$, ambos analíticos em $\mathbb{C} \setminus L_1 \cup L_3$. O segmento L_1 do plano ω é

Figura 4.12: O tritoro

imagem pela função $\omega_1 = \omega_1(z)$ dos segmentos $\ell_6 = \{z \in \mathbb{R} | P \leq z \leq \tilde{A}\}$ e $\ell_7 = \{z \in \mathbb{R} | z \geq \}$; o segmento L_2 é imagem pela função ω_2 dos mesmos segmentos. Todos os pontos de L_1 ou de L_3 têm duas pré-imagens $z_1 \in \ell_6$ e $z_2 \in \ell_7$, onde $z_2 = M_3(z_1)$. Ou seja, L_2 do plano ω corresponde à reunião $\ell_6 \cup \ell_7$ do plano z e, lembrando que as funções ω_1 e ω_2 são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3$, segue que as compostas $W_i^j = W_i(\omega^j(z))$, $i, j = 1, 2$, são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \ell_1 \cup \ell_3 \cup \ell_6 \cup \ell_7$.

Através dos cortes ℓ_1 e ℓ_3 , W_i^1 é prolongada analiticamente a W_i^2 , $i = 1, 2$; através dos cortes ℓ_6 e ℓ_7 , W_1^j é prolongada analiticamente a W_2^j , $j = 1, 2$. São, portanto, quatro ramos da função $W = W(z)$, analítica completa no sentido de Weierstrass, solução da equação $W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}$, onde ω é tal que $\omega^2 = -Pz \frac{z+1/P}{z-P}$. Para o cálculo do gênero da superfície de Riemann compacta M , obtida a partir da função algébrica $W = W(z)$, observamos que os pontos singulares $-\frac{1}{P}$ e 0 aparecem no encontro das folhas correspondentes a W_1^1 e W_1^2 e das folhas correspondentes a W_2^1 e W_2^2 ; os pontos A e $\tilde{A}$ aparecem no encontro das folhas correspondentes a W_1^1 e W_2^1 e das folhas correspondentes a W_1^2 e W_2^2 ; os pontos P

e ∞ aparecem no encontro das quatro folhas.

Denotando por z_0 o ponto $-\frac{1}{P}$ ou 0 e sendo $\mathcal{C}$ um círculo com centro em z_0 que não contenha nenhum outro ponto singular, segue que a $\partial\mathcal{C}$ intersecta ℓ_1 ou ℓ_3 , conforme o caso, uma única vez e não intersecta nenhum outro segmento em que as funções consideradas deixem de ser analíticas. Seja $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$ e consideremos o valor $W_1^1(\tilde{z})$, solução do par de equações que definem M . Continuando analiticamente a função W_1^1 ao longo do caminho $\partial\mathcal{C}$, chegaremos, após uma volta completa, ao valor $W_1^2(\tilde{z})$, pois ao cruzar ℓ_1 ou ℓ_3 a função ω_1 passa analiticamente a ω_2 . Com mais uma volta ao longo de $\partial\mathcal{C}$, retornaremos à solução inicial. Temos, então, o primeiro ciclo relativo a z_0 : W_1^1, W_1^2 . Começando com o valor $W_2^1(\tilde{z})$, solução do par de equações que não aparece no primeiro ciclo, forma-se, analogamente, o segundo ciclo: W_2^1, W_2^2 . As quatro funções já apareceram nos ciclos considerados e, portanto, os índices de ramificação nesses pontos são:

$$\text{ind}\left(-\frac{1}{P}\right) = \text{ind}(0) = 2.(2-1).$$

Para $z_0 = \tilde{A}$ ou $z_0 = A$ e sendo $\mathcal{C}$ um círculo que não contenha nenhum outro ponto singular, temos uma única intersecção de $\partial\mathcal{C}$ com ℓ_6 ou ℓ_7 , conforme o caso, não havendo intersecção de $\partial\mathcal{C}$ com nenhum outro segmento do eixo real. Sejam $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$ e $W_1^1(\tilde{z})$ uma solução para o par de equações. Por continuação analítica de W_1^1 , a partir de $\tilde{z}$, ao longo do caminho $\partial\mathcal{C}$, obteremos após uma volta completa o valor $W_2^1(\tilde{z})$, pois $W_1(\omega_1(z))$ passa analiticamente a $W_2(\omega_1(z))$ quando $\partial\mathcal{C}$ cruza o segmento ℓ_6 ou ℓ_7 . Com mais uma volta, retornaremos ao valor $W_1^1(\tilde{z})$, fechando o ciclo:

$$W_1^1, W_2^1 \tag{4.3}$$

Considerando o valor $W_1^2(\tilde{z})$, forma-se, de maneira análoga, o ciclo:

$$W_1^1, W_2^1 \tag{4.4}$$

Não há outras possibilidades para novos ciclos e, portanto: $\text{ind}(A) = \text{ind}(\tilde{A}) = 2.(2-1)0$.

Finalmente, denotando por z_0 o ponto P ou o ponto no infinito, considerando $\mathcal{C}$ um círculo

Figura 4.13: Círculos em torno dos pontos singulares

que não contenha nenhum outro ponto singular, a fronteira $\partial\mathcal{C}$ intersecta o eixo real em ℓ_3 e ℓ_6 , se $z_0 = P$ ou em ℓ_1 e ℓ_7 , se z_0 é o ponto no infinito. Considerano $\tilde{z} \in \partial\mathcal{C}$ e $W_1^1(\tilde{z})$ uma solução para o par de equações, a função W_1^1 , passa analiticamente a W_1^2 , quando $\partial\mathcal{C}$ cruza ℓ_3 e ℓ_1 e esta passa analiticamente a W_2^2 ao cruzar ℓ_6 e ℓ_7 . Com mais uma volta, retornar-se ao valor $W_1^1(\tilde{z})$, fechando o ciclo: W_1^1, W_2^2 . Da mesma forma, obtemos o segundo e último ciclo: W_1^2, W_2^1 , do que se conclui que os índices de ramificação nesses pontos são:

$$\text{ind}(P) = \text{ind}(\infty) = 2 \cdot (2 - 1).$$

Resulta que a ordem de ramificação total de M é

$$b(M) = \sum_{z \in M} i(z) = 6 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 12.$$

Como temos quatro ramos da função $W = W(z)$, segue que:

$$\text{gênero}(M) = 1 - 4 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 3.$$

Logo, M é uma superfície de Riemann compacta de gênero 3 e está completa a prova da Proposição 4.4. ■

Figura 4.14: Automorfismos do tritoro

4.4 Automorfismos do tritoro

Os automorfismos do tritoro estão relacionados às simetrias das funções elípticas que definem cada toro. Relembramos que para $z = \wp_g$ e $\omega = \wp_E$, valem as seguintes relações:

$$z \circ R_1 = \bar{z}$$

$$\omega \circ R_1 = \bar{\omega}$$

$$z \circ R_2 = \bar{z}$$

$$\omega \circ R_2 = -\bar{\omega}$$

$$z \circ R_3 = P \frac{\bar{z} + 1/P}{\bar{z} - P}$$

$$\omega \circ R_3 = -\bar{\omega}$$

$$z \circ R_4 = -\frac{1}{P} \frac{\bar{z} - P}{\bar{z} + 1/P}$$

$$\omega \circ R_4 = \frac{1}{\bar{\omega}}$$

Temos $1/B$ e $-1/B$ imaginários puros e seguem;

$$W^2(-\bar{\omega}) = \frac{1/B + \bar{\omega}}{1/B - \bar{\omega}} = \overline{W^2(\omega)}.$$

$$W^2(\bar{\omega}) = \frac{1/B - \bar{\omega}}{1/B + \bar{\omega}} = \overline{\frac{1}{W^2(\omega)}}.$$

Concluimos, daí, que para $\omega = -\bar{\omega}$ e, portanto, sobre Nas retas do reticulado fixadas por R_2 e R_3 , ω é imaginário puro e, portanto, nas curvas em M correspondentes a essas retas, temos $W^2(\omega)$ real. Escrevendo $\omega = iy$ e $B = ib$, segue;

$$W^2(\omega) = W^2(iy) = \frac{1/b - y}{1/b + y}.$$

Analisando o sinal da expressão acima, temos:

W^2 real e positivo se $-1/b < y < 1/b$ e

W^2 real e negativo se $y < -1/b$ ou $y > 1/b$.

Observando, na figura 4.1, os valores da função $\omega = \Im_E$ no reticulado $\{\zeta = x_1 + i\lambda x_2, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, vê-se que temos $\omega = iy$ com $y < -1/b$ ou $y > 1/b$ em trechos do segmento do reticulado $\zeta = ix_2\lambda$, fixado pela simetria R_2 . Logo, W é imaginário puro apenas nesse conjunto e W é real sobre todos os outros pontos em que ω é imaginário puro.

Assim sendo, estão definidos no bitoro da Proposição 4.1 quatro automorfismos:

$$\text{a)} \quad \delta : M \rightarrow M$$

$$(z, \omega, W) \mapsto (\bar{z}, -\bar{\omega}, \bar{W})$$

$$\text{b)} \quad \sigma : M \rightarrow M$$

$$(z, \omega, W) \mapsto \left(\frac{P(\bar{z} + 1/P)}{\bar{z} - P}, -\bar{\omega}, \bar{W} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \tau : M \rightarrow M \\
& (z, \omega, W) \mapsto (\bar{z}, -\bar{\omega}, -\bar{W}) \\
\text{d)} \quad & \nu : M \rightarrow M \\
& (z, \omega, W) \mapsto (\bar{z}, \bar{\omega}, 1/\bar{W})
\end{aligned}$$

O conjunto dos ponto fixos por δ é

$$\left\{ (z, \omega, W) \in M / z \in \mathbb{R}, \tilde{A} \leq z \leq A \text{ ou } -1/P \leq z \leq 0, \omega = iy \in i\mathbb{R}, \right. \\
\left. \text{com } -\frac{1}{b} \leq y \leq \frac{-1}{e} \text{ ou } \frac{1}{e} \leq y \leq \frac{1}{b} \text{ ou } -e \leq y \leq e \text{ e } W \in \mathbb{R}. \right\}$$

O conjunto dos ponto fixos por τ é

$$\left\{ (z, \omega, W) \in M / z \in \mathbb{R}, P \leq z \leq \tilde{A} \text{ ou } z \geq A \omega = iy \in i\mathbb{R}, \right. \\
\left. \text{com } y \leq -\frac{1}{b} \text{ ou } y \geq \frac{1}{b} \text{ e } W \in i\mathbb{R}. \right\}$$

Temos $z = \frac{P(\bar{z} + 1/P)}{\bar{z} - P}$ se e somente se z pertence ao círculo C de centro P e raio $r = \sqrt{1 + P^2}$. Então, o conjunto dos pontos fixos por σ é

$$\left\{ (z, \omega, W) \in M / z \in C, \omega = iy, -\frac{1}{e} \leq y \leq e \text{ ou } e \leq y \leq \frac{1}{e} \text{ e } W \in \mathbb{R}. \right\}$$

O conjunto dos pontos fixos por ν é

$$\left\{ (z, \omega, W) \in M / z \in \mathbb{R}, z \leq -1/P \text{ ou } 0 \leq z \leq P, \omega \in \mathbb{R}, \right. \\
\left. \text{e } W \in \mathbb{R}. \right\}$$

Capítulo 5

Observações Finais

O objetivo deste capítulo é mostrar como podemos trabalhar com uma estrutura conforme obtida a partir do Teorema 3.8. Apresentaremos os dados de Weierstrass correspondentes ao exemplo apresentado no Capítulo 1, desta vez definidos sobre o bitoro construído no Capítulo 4, com quatro pontos removidos. Em seguida faremos comparações entre os dois exemplos. Para construir uma superfície do tipo Scherk torre de selas com gênero 2 e 4 fins no quociente, usando a estrutura do bitoro já descrita, tomamos:

$$\overline{M} = \left\{ (z, W) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \mid W^2 = \frac{\omega - 1/B}{\omega - 1/E}, \text{ onde } \omega \text{ é tal que } \omega^2 = -P.z \cdot \frac{z + 1/P}{z - P} \right\}$$

Vamos definir os dados de Weierstrass sobre $M = \overline{M} \setminus \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, onde os F_j são pontos sobre a “cintura” do bitoro. De acordo com as considerações feitas no Capítulo 1 quanto a superfícies simplesmente periódicas com fins de tipo Scherk, devemos ter $C(M) = 2\pi(2 - 2.2 - 4) = -12\pi$ e portanto a função g deverá ter grau três.

Fins

Seja ρ imaginário puro fixado, com parte imaginária estritamente positiva. Vamos remover de $\overline{M}$ quatro pontos, F_j , $j = 1, \dots, 4$ correspondentes às soluções da equação $W^2 - \rho^2 = 0$. Observamos que W é imaginário puro se e somente se (z, ω, W) é ponto sobre a curva fixada pelo automorfismo τ , sobre a qual temos ω imaginário puro e po-

demos escrever $\omega = iy$, onde $-\frac{1}{b} < y < -\frac{1}{e}$. Então, para cada ρ fixado, temos, em correspondência um real $c > 0$, tal que $-\frac{1}{b} < -\frac{1}{c} < -\frac{1}{e}$, ou seja, $0 < b < c < e < 1$.

Definindo $C = ic$, temos:

$$\rho^2 = W^2(1/C) = \frac{1/C - 1/B}{1/C - 1/E} = \frac{-1/c + 1/b}{-1/c + 1/e},$$

Para determinarmos a coordenada z nos fins, lembramos que nos pontos sobre a curva de $\overline{M}$ fixada pelo automorfismo τ , temos z real, $\tilde{A} \leq z \leq A$, onde A e $\tilde{A}$ são os valores de z correspondentes a $\omega = 1/B$. Observamos que se $z = A'$ é uma solução de $\left(\frac{1}{C}\right)^2 = \frac{-P.z.(z + 1/P)}{(z - P)}$, a outra solução é dada por $A'' = P \frac{A' + 1/P}{A' - P}$, tais que $P < \tilde{A} < A'' < i/E < A' < A$

Então, os fins estão nos pontos:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(A', \frac{1}{C}, i\rho\right) \\ F_2 &= \left(A', \frac{1}{C}, -i\rho\right) \\ F_3 &= \left(A'', \frac{1}{C}, -i\rho\right) \\ F_4 &= \left(A'', \frac{1}{C}, i\rho\right) \end{aligned}$$

5.1 Dados de Weierstrass

A normal de Gauss deverá ser vertical nos pontos de ramificação da função W . Consideraremos g com

pólos simples em $(i/E, -1/E, \alpha)$, $(iE, -E, \gamma)$, $(iE, E, -\beta)$

e zeros simples em (iE, E, β) , $(iE, -E, -\gamma)$, $(i/E, -1/E, -\alpha)$.

Assim sendo, a menos de um fator constante, devemos ter:

$$g^2 = \frac{(W + \alpha)(W - \beta)(W + \gamma)}{(W - \alpha)(W + \beta)(W - \gamma)} \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= W^2(-1/E) = \frac{-1/E - 1/B}{-1/E - 1/E} = \frac{1/e + 1/b}{1/e + 1/e}, \\ \beta^2 &= W^2(E) = \frac{E - 1/B}{E - 1/E} = \frac{e + 1/b}{e + 1/e}, \\ \gamma^2 &= W^2(-E) = \frac{-E - 1/B}{-E - 1/E} = \frac{-e + 1/b}{-e + 1/e}.\end{aligned}$$

Segue que $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ são reais positivos e, portanto, α, β e γ são reais e, por escolha de notação, positivos. É fácil ver, também, que $1 < \alpha < \beta < \gamma$, para todo par (b, e) .

A 1-forma diferencial η deverá ter pólos simples nos fins e zeros duplos onde g tem pólos simples. Para definirmos η , observamos que no bitoro $\overline{M}$, temos a 1-forma holomorfa

$$\psi = \frac{1}{z - P} \frac{1}{\omega} dz \quad (5.2)$$

com zeros simples nos pontos $(A, 1/B, 0), (\tilde{A}, 1/B, 0)$.

Assim, para que $\eta = f\psi$, devemos ter f de grau 6, com

zeros simples em $(i/E, -1/E, \alpha), (iE, E, \beta), (iE, -E, \gamma), (iE, -E, -\gamma), (iE, E, -\beta), (i/E, -1/E, -\alpha)$

e pólos simples em $(A, 1/B, 0), (\tilde{A}, 1/B, 0), (A', 1/C, \rho), (A', 1/C, -\rho), (A'', 1/C, \rho), (A'', 1/C, -\rho)$.

Definimos:

$$f^2 = k \frac{(\omega + 1/E)(\omega + E)(\omega - E)}{(\omega - 1/B)(\omega - 1/C)^2} = kh^2$$

onde a constante k será determinada com a exigência de que as curvas divergentes para os fins, curvas fixas pelo automorfismo τ , estejam contidas em planos horizontais.

Definimos as 1-formas diferenciais da Representação de Weierstrass:

$$\phi_1 = \left(\frac{1}{g} - g\right) f\psi \quad \phi_2 = i \left(\frac{1}{g} + g\right) f\psi \quad \phi_3 = g \cdot f\psi$$

Efeitos das simetrias sobre f e g

Analisemos os efeitos dos automorfismos σ , δ e τ , da seção 4.2, sobre as funções f e g , definidas acima. Lembramos que, definindo $M(z) = P \frac{\bar{z} + 1/P}{\bar{z} - P}$, temos:

$$\delta(z, \omega, W) = (\bar{z}, -\bar{\omega}, \bar{W}),$$

$$\sigma(z, \omega, W) = (M(z), -\bar{\omega}, \bar{W}),$$

$$\tau(z, \omega, W) = (\bar{z}, -\bar{\omega}, -\bar{W}).$$

Segue que:

$$\begin{aligned} h^2 \circ \delta &= \frac{(-\bar{\omega} + 1/E)(-\bar{\omega} + E)(-\bar{\omega} - E)}{(-\bar{\omega} - 1/B)(-\bar{\omega} - 1/C)^2} \\ &= \frac{(-\bar{\omega} - \overline{1/E})(-\bar{\omega} - \bar{E})(-\bar{\omega} + \bar{E})}{(-\bar{\omega} + \overline{1/B})(-\bar{\omega} + \overline{1/C})^2} \\ &= \frac{(\omega + 1/E)(\omega + E)(\omega - E)}{(\omega - 1/B)(\omega - 1/C)^2} \\ &= \bar{h}^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, $h^2 \circ \sigma = \bar{h}^2$ e $h^2 \circ \tau = \bar{h}^2$.

Nas curvas do bitoro fixadas pelos três automorfismos, temos ω imaginário puro e, escrevendo $E = ie$, $\frac{1}{E} = -i\frac{1}{e}$, $B = ib$, $\frac{1}{B} = -i\frac{1}{b}$, $\frac{1}{C} = -i\frac{1}{c}$ e $\omega = iy$, segue:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{(iy - i(1/e))(iy + ie)(iy - ie)}{(iy - i(1/b))(iy + i(1/c))^2} \\ &= \frac{(y - 1/e)(y + e)(y - e)}{(y - 1/b)(y + 1/c)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, h^2 é real nas curvas fixas pelos automorfismos. Além disso, analisando o sinal de h^2 , vê-se que:

$h^2 < 0$ para $-1/b < y < -1/e$, $-1/e < y < -e$ ou $e < y < 1/e$

$h^2 > 0$ para $y < -1/b$, $y > 1/e$ ou $-e < y < e$

Ou seja:

h^2 é real e negativo nas curvas fixas por σ e τ e

h^2 é real e positivo nas curvas fixas por δ .

Vamos determinar a constante k impondo x_3 constante nas curvas fixas por τ . Para tanto vamos exigir que a 1-forma ϕ_3 seja imaginária nessas curvas, ou seja, $\tau^*\phi_3 = -\overline{\phi_3}$.

Temos:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= f\psi, \quad \psi = \frac{1}{z-P} \frac{1}{\omega} dz \\ \Rightarrow \tau^*\psi &= \frac{1}{z-P} \frac{1}{-(\overline{\omega})} d\overline{z} = -\overline{\psi}\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau^*\phi_3 = -\overline{\phi_3} \Leftrightarrow f \circ \tau = \overline{f} \Leftrightarrow f \in \mathbb{R}$$

Portanto, devemos exigir f^2 real e positivo nas curvas fixas por τ . Como $h^2 < 0$, nessas curvas, basta tomar $k = -1$, isto é:

$$f^2 = (-1) \frac{(\omega + 1/E)(\omega + E)(\omega - E)}{(\omega - 1/B)(\omega - 1/C)^2} \quad (5.3)$$

Com isto, temos:

$f^2 > 0$ e, portanto, f real, nas curvas fixas por τ e σ , e

$f^2 < 0$, portanto f imaginário puro nas curvas fixas por δ .

Logo,

$$f \circ \tau = \overline{f}, \quad f \circ \sigma = \overline{f} \quad \text{e} \quad f \circ \delta = -\overline{f} \quad (5.4)$$

Para a função g , dada pela expressão (5.1), temos:

$$\begin{aligned} g^2 \circ \delta &= \bar{g}^2, \quad g^2 \circ \sigma = \bar{g}^2 \\ \text{e} \quad g^2 \circ \tau &= \frac{(-\bar{W} + \alpha)(-\bar{W} - \beta)(-\bar{W} + \gamma)}{(-\bar{W} - \alpha)(-\bar{W} + \beta)(-\bar{W} - \gamma)} = \frac{1}{\bar{g}^2} \\ \Rightarrow \quad g \circ \tau &= \frac{1}{\bar{g}}, \end{aligned}$$

Observamos que nas curvas fixas pelo automorfismo τ , a função g tem módulo unitário.

Nas curvas fixas por σ e δ , g^2 é real e seu sinal é o mesmo sinal da função $(W^2 - \alpha^2)(W^2 - \beta^2)(W^2 - \gamma^2)$. Para podermos avaliar o sinal, lembramos que, nessas curvas, ω é imaginário puro e escrevendo $\omega = iy$, temos:

Temos

$$\begin{aligned} W^2 - \alpha^2 &= \frac{iy + i\frac{1}{b}}{iy + i\frac{1}{e}} - \frac{i\frac{1}{e} + i\frac{1}{b}}{i\frac{1}{e} + i\frac{1}{e}} \\ &= \frac{2\frac{1}{e}y + 2\frac{1}{e}\frac{1}{b} - \frac{1}{e}y - \frac{1}{e}\frac{1}{b} - \frac{1}{b}y - \left(\frac{1}{e}\right)^2}{(y + \frac{1}{e})(\frac{1}{e} + \frac{1}{e})} \\ &= \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y - \frac{1}{e}(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})}{(y + \frac{1}{e})(\frac{1}{e} + \frac{1}{e})} = \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y - \frac{1}{e}}{(\frac{1}{e} + \frac{1}{e})y + \frac{1}{e}} \\ \\ W^2 - \beta^2 &= \frac{iy + i\frac{1}{b}}{iy + i\frac{1}{e}} - \frac{ie + i\frac{1}{b}}{ie + i\frac{1}{e}} \\ &= \frac{ey + \frac{1}{e}y + e\frac{1}{b} + \frac{1}{e}\frac{1}{b} - ey - \frac{1}{b}y - e\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\frac{1}{b}}{(y + \frac{1}{e})(e + \frac{1}{e})} \\ &= \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y - e(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})}{(y + \frac{1}{e})(e + \frac{1}{e})} = \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y - e}{(e + \frac{1}{e})y + \frac{1}{e}} \\ \\ W^2 - \gamma^2 &= \frac{iy + i\frac{1}{b}}{iy + i\frac{1}{e}} - \frac{ie + i\frac{1}{b}}{-ie + i\frac{1}{e}} \\ &= \frac{-ey + \frac{1}{e}y - e\frac{1}{b} + \frac{1}{e}\frac{1}{b} + ey - \frac{1}{b}y + e\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\frac{1}{b}}{(y + \frac{1}{e})(-e + \frac{1}{e})} \\ &= \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y + e(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})}{(-e + \frac{1}{e})(y + \frac{1}{e})} = \frac{(\frac{1}{e} - \frac{1}{b})y + e}{(-e + \frac{1}{e})y + \frac{1}{e}} \end{aligned}$$

$$0 < e < 1 < \frac{1}{e} < \frac{1}{b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{e}} < 0, & \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{b}}{e + \frac{1}{e}} < 0, \\ e \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{b}}{-e + \frac{1}{e}} < 0. \end{cases}$$

Portanto, o sinal de g^2 é o oposto do sinal de

$$\frac{y - \frac{1}{e}}{y + \frac{1}{e}} \frac{y - e}{y + \frac{1}{e}} \frac{y + e}{y + \frac{1}{e}} = \frac{y^2 - e^2}{(y + \frac{1}{e})^2} \frac{y - \frac{1}{e}}{y + \frac{1}{e}}.$$

Analisando o sinal da expressão acima, conclui-se que:

$g^2 < 0$, para $y < -1/b$ ou $y > 1/e$, isto é, $g^2 < 0$ nas curvas fixas por δ .

$g^2 > 0$ para $-1/e < y - e$ ou $e < y < 1/e$, isto é, $g^2 > 0$ nas curvas fixas por σ .

Logo,

$$g \circ \delta = -\bar{g}, \quad g \circ \sigma = \bar{g} \quad e \quad g \circ \tau = \frac{1}{\bar{g}}. \quad (5.5)$$

Efeito dos automorfismos sobre ϕ

Para os automorfismos δ e τ temos $\delta^* dz = \overline{dz}$, $\tau^* dz = \overline{dz}$ e, das expressões em (5.4) e (5.5), segue

$$\begin{aligned} \phi_3 &= f \frac{1}{z - P} \frac{1}{\omega} dz, \\ \delta^*(\phi_3) &= -\bar{f} \frac{1}{\bar{z} - P} \frac{1}{-\bar{\omega}} \overline{dz} = \overline{\phi_3}, \\ \phi_1 &= \left(\frac{1}{g} - g \right) \phi_3, \\ \delta^* \phi_1 &= \left(\frac{-1}{\bar{g}} + \bar{g} \right) \overline{\phi_3} = -\overline{\left(\frac{1}{g} - g \right)} \phi_3 = -\overline{\phi_1}, \\ \phi_2 &= i \left(\frac{1}{g} + g \right) \phi_3, \\ \delta^* \phi_2 &= i \left(\frac{-1}{\bar{g}} - \bar{g} \right) \overline{\phi_3} = -i \overline{\left(\frac{1}{g} + g \right)} \phi_3 = i \overline{\left(\frac{1}{g} + g \right)} \phi_3 = \overline{\phi_2}. \end{aligned}$$

$$\tau^* \phi_3 = \bar{f} \frac{1}{z - P} \frac{1}{-\bar{\omega}} \overline{dz} = -\overline{\phi_3}.$$

$$\begin{aligned}\tau^*\phi_1 &= \left(\frac{1}{\bar{g}} - \bar{g}\right) \bar{\phi}_3 = \bar{\phi}_1, \\ \tau^*\phi_2 &= i \left(\frac{1}{\bar{g}} + \bar{g}\right) (-\bar{\phi}_3) = \bar{\phi}_2.\end{aligned}$$

Para o automorfismo σ , temos:

$$\begin{aligned}\sigma(z, \omega, W) &= (M(z), -\bar{\omega}, \bar{W}), \\ \sigma^*(\phi_3) &= \bar{f} \frac{1}{-\bar{\omega}} \sigma^* \left(\frac{1}{z-P} dz \right), \\ \sigma^* \left(\frac{1}{z-P} dz \right) &= \frac{1}{M(z)-P} dM, \\ M(z) &= P \frac{\bar{z} + 1/P}{\bar{z} - P}, \\ \Rightarrow \frac{1}{M(z)-P} &= \frac{1}{P \frac{\bar{z} + 1/P}{\bar{z} - P} - P} = \frac{\bar{z} - P}{P(\bar{z} + 1/P - \bar{z} + P)} \\ &= \frac{\bar{z} - P}{P(P + 1/P)} \\ \text{e} \quad dM &= \frac{\partial M}{\partial z} dz + \frac{\partial M}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \\ \Rightarrow dM_3 &= P \frac{\bar{z} - P - (\bar{z} + 1/P)}{(\bar{z} - P)^2} d\bar{z} = \frac{-P(P + 1/P)}{(\bar{z} - P)^2} d\bar{z} \\ \Rightarrow \sigma^* \left(\frac{1}{z-P} dz \right) &= \frac{-1}{\bar{z} - P} d\bar{z}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\sigma^*(\phi_3) = \bar{f} \frac{1}{-\bar{\omega}} \frac{-1}{\bar{z} - P} d\bar{z} = \bar{\phi}_3.$$

Temos, também:

$$\begin{aligned}\sigma^*(\phi_1) &= \left(\frac{1}{\bar{g}} - \bar{g}\right) d\bar{h} = \bar{\phi}_1, \\ \sigma^*(\phi_2) &= i \left(\frac{1}{\bar{g}} + \bar{g}\right) d\bar{h} = -\bar{\phi}_2.\end{aligned}$$

Resumindo:

$$\delta^*\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\phi}, \quad \tau^*\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{\phi} \quad \text{e} \quad \sigma^*\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\phi},$$

Concluimos que δ , τ e σ correspondem, no $\mathbb{R}^3$, a reflexões em relação a planos paralelos a x_2Ox_3 , x_1Ox_2 e x_1Ox_3 , respectivamente.

5.2 Períodos

Nos fins

Seja $\tilde{\lambda}$ a curva, no plano z , com centro em A' e raio $r < \min\{\tilde{A} - A', A' - i/E\}$ e seja λ seu levantamento ao bitoro $\overline{M}$. Temos $\tau\lambda = -\lambda$ e resulta:

$$\int_{\lambda} \Phi = - \int_{\tau\lambda} \Phi = - \int_{\lambda} \tau^* \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\int_{\lambda} \Phi}.$$

Segue que $\operatorname{Re} \int_{\lambda} \phi_1 = 0$ e $\operatorname{Re} \int_{\lambda} \phi_2 = 0$.

Para ϕ_3 , temos:

$$\int_{\lambda} \phi_3 = \int_{\lambda} f \frac{1}{z - P} \frac{1}{\omega} dz.$$

Para $z = A'$, temos $\omega = 1/C$,

$$f^2 = (-1) \frac{(\omega + \frac{1}{E})(\omega + E)(\omega - E)}{(\omega - \frac{1}{B})(\omega - \frac{1}{C})^2}.$$

Então, sendo

$$\tilde{h}^2(\omega) = \frac{(\omega + \frac{1}{E})(\omega + E)(\omega - E)}{\omega - \frac{1}{B}},$$

temos $f = \frac{i}{\omega - \frac{1}{C}} \tilde{h}(\omega)$, a menos da determinação da raiz quadrada. Além disso,

$$\frac{1}{\omega - \frac{1}{C}} = \frac{\omega + \frac{1}{C}}{\omega^2 - (\frac{1}{C})^2}$$

e lembrando que $\omega^2 = -Pz \frac{z + \frac{1}{P}}{z - P}$, temos:

$$\omega^2 - \left(\frac{1}{C}\right)^2 = -Pz \frac{z + \frac{1}{P}}{z - P} - (-P)A' \frac{A' + \frac{1}{P}}{A' - P}$$

$$\begin{aligned}
&= (-P) \frac{(z^2 + \frac{1}{P}z)(A' - P) - ((A')^2 + A'\frac{1}{P})(z - P)}{(z - P)(A' - P)} \\
&= (-P) \frac{A'z^2 - Pz^2 + A'\frac{1}{P}z - z - (A')^2z - A'\frac{1}{P}z + P(A')^2 + A'}{(z - P)(A' - P)} \\
&= (-P) \frac{A'z(z - A') - P[z^2 - (A')^2] - 1(z - A')}{(z - P)(A' - P)} \\
&= (z - A') \frac{(-P)[A'z - P(z + A') - 1]}{(z - P)(A' - P)}.
\end{aligned}$$

Substituindo na integral,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda} \phi_3 &= \int_{\lambda} \frac{1}{\omega - \frac{1}{C}} i\tilde{h}(\omega) \frac{1}{z - P} \frac{1}{\omega} dz \\
&= \int_{\lambda} \frac{1}{\omega^2 - (\frac{1}{C})^2} \left(\omega + \frac{1}{C} \right) i\tilde{h}(\omega) \frac{1}{z - P} \frac{1}{\omega} dz \\
&= \int_{\lambda} \frac{1}{(z - A')} \underbrace{\frac{(A' - P)}{(-P)[A'z - P(z + A') - 1]} \left(\omega + \frac{1}{C} \right) i\tilde{h}(\omega) \frac{1}{\omega}}_{F(z)} dz,
\end{aligned}$$

com F analítica em Ω , região delimitada por λ , pois

$$\begin{aligned}
&A'z - P(z + A') - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad z &= \frac{A'P + 1}{A' - P} = \frac{P(A' + \frac{1}{P})}{A' - P} = A''
\end{aligned}$$

e A'' não pertence a Ω , por hipótese.

Segue, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda} \phi_3 &= 2\pi i F(A') \\
&= 2\pi i \frac{(A' - P)}{(-P)[(A')^2 - 2A'P - 1]} 2\frac{1}{C} i\tilde{h}\left(\frac{1}{C}\right) C \\
&= 4\pi \frac{(A' - P)}{P[(A')^2 - 2A'P - 1]} \tilde{h}\left(\frac{1}{C}\right).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}^2\left(\frac{1}{C}\right) &= \frac{(\frac{1}{C} + \frac{1}{E})(\frac{1}{C} + E)(\frac{1}{C} - E)}{\frac{1}{C} - \frac{1}{B}} \\
&= \frac{i(-\frac{1}{c} - \frac{1}{e})i(-\frac{1}{c} + e)i(-\frac{1}{c} - e)}{i(-\frac{1}{c} + \frac{1}{b})} \\
&= \frac{(\frac{1}{c} + \frac{1}{e})(-\frac{1}{c} + e)(-\frac{1}{c} - e)}{(-\frac{1}{c} + \frac{1}{b})} > 0,
\end{aligned}$$

pois $0 < e < 1 < \frac{1}{e} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$.

Portanto, $\tilde{h}(\frac{1}{C})$ é real e não nulo e como $P \in \mathbb{R}$ e $A' \in \mathbb{R}$, com $A' \neq P$, temos:

$$\operatorname{Re} \int_{\lambda} \phi_3 = 4\pi \frac{(A' - P)}{P[(A')^2 - 2A'P - 1]} \tilde{h}\left(\frac{1}{C}\right) \neq 0.$$

Denotando por $\operatorname{per} F_j$ o período no fim F_j , $j = 1, \dots, 4$, e considerando

$$\operatorname{per} F_1 = 4\pi \frac{(A' - P)}{P[(A')^2 - 2A'P - 1]} \tilde{h}\left(\frac{1}{C}\right) > 0,$$

como $\sigma\lambda$ é curva fechada em torno do fim F_4 , orientada no sentido horário, e $\delta\lambda$ é curva fechada em torno do fim F_2 , orientada no sentido anti-horário, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{per} F_4 &= \operatorname{Re} \int_{-\sigma\lambda} \phi_3 = -\operatorname{Re} \int_{\lambda} \sigma^* \phi_3 = -\operatorname{Re} \int_{\lambda} \bar{\phi}_3 = -\operatorname{per} F_1, \\ \operatorname{per} F_2 &= \operatorname{Re} \int_{-\delta\lambda} \phi_3 = -\operatorname{Re} \int_{\lambda} \delta^* \phi_3 = -\operatorname{Re} \int_{\lambda} \bar{\phi}_3 = -\operatorname{per} F_1. \end{aligned}$$

Além disso, como $\delta\sigma\lambda_1$ é curva fechada em torno do fim F_3 , orientada no sentido anti-horário,

$$\operatorname{per} F_3 = \operatorname{Re} \int_{\sigma\lambda} \phi_3 = \operatorname{Re} \int_{\lambda} \sigma^* \delta^* \phi_3 = \operatorname{per} F_1.$$

Logo, temos período na direção vertical, como esperávamos.

Períodos nas curvas da homologia

Seja $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tau\tilde{\lambda}_1, \tau\tilde{\lambda}_2\}$ uma base do grupo de homologia de $\overline{M}$ (Fig. 5.1), onde τ é automorfismo de $\overline{M}$.

Sendo δ e σ os automorfismos de $\overline{M}$ descritos no Capítulo 4, temos $\delta\tilde{\lambda}_1 = -\tilde{\lambda}_1$ e $\sigma\tau\tilde{\lambda}_2 = -\tilde{\lambda}_2$. Disto e dos resultados obtidos em relação às simetrias, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\lambda}_1} \phi &= \int_{-\tilde{\lambda}_1} -\phi = -\int_{\delta\tilde{\lambda}_1} \phi = -\int_{\tilde{\lambda}_1} \delta^* \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{\tilde{\lambda}_1} \bar{\phi} \\ \int_{\tilde{\lambda}_2} \phi &= -\int_{-\tilde{\lambda}_2} \phi = -\int_{\sigma\tilde{\lambda}_2} \phi = -\int_{\tilde{\lambda}_2} \sigma^* \phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \int_{\tilde{\lambda}_2} \bar{\phi} \end{aligned}$$

Figura 5.1: O bitoro e as curvas da homologia

Dessas igualdades resulta

$$\operatorname{Re} \int_{\tilde{\lambda}_1} \phi_2 = \operatorname{Re} \int_{\tilde{\lambda}_1} \phi_3 = 0$$

e

$$\operatorname{Re} \int_{\lambda_2} \phi_1 = \operatorname{Re} \int_{\tilde{\lambda}_2} \phi_3 = 0.$$

Até este ponto o desenvolvimento foi análogo ao do exemplo simplesmente periódico construído no Capítulo 1. Para avaliarmos os períodos restantes, o primeiro passo é a simplificação das integrais que não se anularam.

Lema 5.1

$$\int_{\lambda_1} \phi_1 = \frac{4ce}{c-e} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\alpha + \gamma - \beta)W^2 - \alpha\beta\gamma}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(\beta^2 - W^2)(\gamma^2 - W^2)}} \frac{1}{W^2 - \rho^2} dW.$$

Demonstração: Observamos que $\tilde{\lambda}_1$ é homotópica à curva λ_1 do bitoro fixada pela simetria σ em que temos $z = P + \sqrt{1 + P^2}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < \pi$, $w = iy$, $e \leq y \leq \frac{1}{e}$ e $W \in \mathbb{R}$, com $\alpha \leq W \leq \beta$.

Conforme definimos em (5.1) e (5.3),

$$\begin{aligned} g^2 &= \frac{(W + \alpha)(W - \beta)(W + \gamma)}{(W - \alpha)(W + \beta)(W - \gamma)} = \frac{(W + \alpha)(\beta - W)(W + \gamma)}{(W - \alpha)(W + \beta)(\gamma - W)} \\ f^2 &= (-1) \frac{(w + 1/E)(w + E)(w - E)}{(w - 1/B)(w - 1/C)^2} \\ f^2 &= \frac{(1/e - y)(y + e)(y - e)}{(y + 1/b)(y + 1/c)}, \text{ para } w = iy. \end{aligned}$$

Sobre λ_1 , f^2 e g^2 são reais e positivas e, portanto, f e g são reais. Escolhendo os ramos:

$$g = \sqrt{\frac{(W + \alpha)(\beta - W)(W + \gamma)}{(W - \alpha)(W + \beta)(\gamma - W)}} \quad \text{e} \quad f = \sqrt{\frac{(1/e - y)(y + e)(y - e)}{(y + 1/b)(y + 1/c)^2}},$$

temos:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} \phi_1 &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_1} \left(\frac{1}{g} - g \right) f \frac{1}{w} \frac{1}{z - P} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_1} \frac{2[(\alpha + \gamma - \beta)W^2 - \alpha\beta\gamma]}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(\beta^2 - W^2)(\gamma^2 - W^2)}} \sqrt{\frac{(1/e - y)(y + e)(y - e)}{(y + 1/b)(y + 1/c)^2}} \frac{1}{iy} \frac{1}{z - P} dz. \end{aligned}$$

Para simplificar a integral acima, notamos que de $z = P + re^{i\theta}$, segue $\frac{dz}{d\theta} = i(z - P)$ e $w(\theta) = iy(\theta)$, onde $y(\theta) = \sqrt{(1 + e^4)(1 - e^4) \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{2e}}$ e derivando temos $\frac{dy}{d\theta} = \frac{\sqrt{(1/e - y)(1/e + y)(y + e)(y - e)}}{2y(\theta)}$.

Além disso, temos $\frac{1}{W^2 - \rho^2} = \frac{(y + 1/e)(1/e - 1/c)}{(y + 1/c)(1/e - 1/b)}$ e substituindo:

$$\int_{\lambda_1} \phi_1 = \frac{ce}{c - e} \int_{1/e}^e \frac{(\alpha + \gamma - \beta)W^2 - \alpha\beta\gamma}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(\beta^2 - W^2)(\gamma^2 - W^2)}} \frac{1/e - 1/b}{(y + 1/e)^2} \frac{1}{W} 2dy.$$

Mas, observando ainda que para $w = iy$ temos $W^2 = \frac{y + 1/b}{y + 1/e}$, encontramos $\frac{2dW}{dy} = \frac{1/e - 1/b}{(y + 1/e)^2} \frac{1}{W}$ e, portanto,

$$\int_{\lambda_1} \phi_1 = \frac{4ce}{c - e} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\alpha + \gamma - \beta)W^2 - \alpha\beta\gamma}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(\beta^2 - W^2)(\gamma^2 - W^2)}} \frac{1}{W^2 - \rho^2} dW.$$

■

Lema 5.2

$$\int_{\lambda_2} \phi_2 = \frac{ce}{c-e} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{W^3 - (\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma)W}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(W^2 - \beta^2)(\gamma^2 - W^2)}} \frac{1}{W^2 - \rho^2} dW.$$

Demonstração: A curva $\tilde{\lambda}_2$ é homotópica à curva λ_2 do bitoro fixada por δ , caracterizada por $z \in \mathbb{R}$, $w = iy$ e $W \in \mathbb{R}$, com $\beta \leq W \leq \gamma$.

Sobre λ_2 temos f^2 e g^2 reais e negativos. Escolhemos os ramos

$$g = i\sqrt{\frac{(W + \alpha)(W - \beta)(W + \gamma)}{(W - \alpha)(W + \beta)(\gamma - W)}} \quad \text{e} \quad f = i\sqrt{\frac{(1/e - y)(y + e)(e - y)}{(y + 1/b)(y + 1/c)^2}}$$

e temos

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_2} \phi_2 &= \frac{i}{2} \int_{\lambda_2} \left(\frac{1}{g} + g \right) f \frac{1}{wz - P} dz \\ &= (-1) \int_{\lambda_2} \frac{W^3 - (\beta\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma)W}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(W^2 - \beta^2)(\gamma^2 - W^2)}} \sqrt{\frac{(1/e - y)(y + e)(e - y)}{(y + 1/b)(y + 1/c)^2}} \frac{1}{y(z - P)} dz. \end{aligned}$$

Novamente, $W^2 = \frac{y + 1/b}{y + 1/e}$ e, portanto, $\frac{dW}{dy} = \frac{1}{2W} \frac{1/e - 1/b}{(y + 1/e)^2}$. Também, $\frac{1}{W^2 - \rho^2} = \frac{1/e - 1/c}{1/e - 1/b} \frac{y + 1/e}{y + 1/c}$.

Além disso, de $\frac{y^2(z)}{z - P} = \frac{Pz(z + 1/P)}{z - P}$, segue

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} \frac{1}{yz} \frac{1}{z - P} \sqrt{(1/e - y)(1/e + y)(e - y)(e + y)}.$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int_{\lambda_2} \phi_2 = \frac{ec}{c-e} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{W^3 - (\beta\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma)W}{\sqrt{(W^2 - \alpha^2)(W^2 - \beta^2)(\gamma^2 - W^2)}} \frac{1}{W^2 - \rho^2} dW.$$

■

Vê-se dos lemas precedentes que, para cada $c > 0$, $\int_{\lambda_1} \phi_1$ e $\int_{\lambda_2} \phi_2$ são integrais reais, a dois parâmetros b e e , pois $W \in \mathbb{R}$ e α, β e γ são funções definidas em $\Omega = \{(b, e) : 0 < b < e < 1\}$ a valores em $\mathbb{R}$. Após a mudança de variáveis $t = W^2$ nas duas integrais,

definimos,

$$\begin{aligned}\pi_1(b, e) &= \int_{\gamma_1} \phi_1 = \frac{2ce}{c-e} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{(\alpha + \gamma - \beta)t - \alpha\beta\gamma}{\sqrt{(t - \alpha^2)(\beta^2 - t)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - \rho^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \\ \pi_2(b, e) &= \int_{\gamma_2} \phi_2 = \frac{ec}{2(c-e)} \int_{\beta^2}^{\gamma^2} \frac{(t - (\beta\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma))}{\sqrt{(t - \alpha^2)(t - \beta^2)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - \rho^2} dt.\end{aligned}$$

Como fizemos no Capítulo 1, vamos simplificar as duas integrais para podermos estudar os sinais.

Análise de $\pi_2(b, e)$

Notemos que o integrando de $\pi_2(b, e)$ tem todos os fatores do denominador positivos, pois ρ é imaginário e, portanto, $t - \rho^2 > 0$. A função do numerador $\varphi(t) = t - (\beta\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma)$ é estritamente crescente e anula-se somente em $t_2 = \beta\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma$, ponto interior ao intervalo $[\beta^2, \gamma^2]$. De fato, $\beta^2 - t_2 = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) < 0$ e $\gamma^2 - t_2 = (\alpha + \gamma)(\gamma - \beta) > 0$.

Logo, φ é negativa em $[\beta^2, t_2]$ e positiva em $[t_2, \gamma^2]$ e como $c - e < 0$, podemos reescrever π_2 como uma diferença de integrais com integrandos positivos.

$$\begin{aligned}\pi_2(b, e) &= I_3 - I_4, \quad \text{onde:} \\ I_3 &= \frac{ec}{2(c-e)} \int_{\beta^2}^{t_2} \frac{[-\varphi(t)]}{\sqrt{(t - \alpha^2)(t - \beta^2)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - \rho^2} dt \\ \text{e} \quad I_4 &= \frac{ec}{2(c-e)} \int_{t_2}^{\gamma^2} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t - \alpha^2)(t - \beta^2)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - \rho^2} dt.\end{aligned}$$

Para podermos comparar I_3 e I_4 , vamos fazer mudanças de variáveis a fim de que o intervalo $[0, 1]$ seja o novo intervalo de integração das duas parcelas.

Para I_3 , consideremos a mudança $t(x) = (t_2 - \beta^2)x + \beta^2$ e, para I_4 , a mudança $t(x) = (t_2 - \gamma^2)x + \gamma^2$. Após as substituições necessárias, encontramos

$$I_3 = \frac{ec}{2(e-c)} \frac{1}{\sqrt{\gamma - \beta}} \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{xg_{11}(x)g_{12}(x)g_1(x)}} dx \quad (5.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{11}(x) &= x + \frac{\alpha + \beta}{\gamma - \beta}, \\
g_{12}(x) &= \beta + \gamma - (\beta - \alpha)x, \\
g_1(x) &= x + \frac{\beta^2 - p^2}{(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)}, \\
I_4 &= \frac{ec}{2(e - c)} \frac{1}{\sqrt{\gamma - \beta}} \int_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt{x g_{21}(x) g_{22}(x) g_2(x)}} dx, \tag{5.7}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{21}(x) &= \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} - x, \\
g_{22}(x) &= \beta + \gamma - (\alpha + \gamma)x, \\
g_2(x) &= \frac{\gamma^2 - p^2}{(\alpha + \gamma)(\gamma - \beta)} - x.
\end{aligned}$$

Analisando os integrandos de I_3 e I_4 definidos acima, concluímos:

Lema 5.3 Para todo b , $0 < b < 1$, se e for suficientemente próximo de b , temos $\pi_2(b, e) = I_3 - I_4 < 0$.

Demonstração:

i) Temos $\gamma > \beta$ e, então:

$$g_{12}(x) - g_{22}(x) = (\gamma - \beta)x \geq 0,$$

para todo x no intervalo $[0, 1]$.

$$\text{ii) } g_{11}(x) - g_{21}(x) = 2x + \frac{2\alpha + \beta - \gamma}{\gamma - \beta}.$$

Logo, $g_{11}(x) \geq g_{21}(x)$, para todo $x \in [0, 1]$, se $\gamma \leq 2\alpha + \beta$.

iii) Para g_1 e g_2 , escrevemos:

$$\begin{aligned}
g_1(x) - g_2(x) &= 2x + \frac{\beta^2 - \alpha^2 + \alpha^2 - p^2}{(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)} - \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + \alpha^2 - p^2}{(\alpha + \gamma)(\gamma - \beta)} \\
g_1(x) - g_2(x) &= 2x + \frac{2\alpha + \beta - \gamma}{\gamma - \beta} + \frac{(\alpha^2 - p^2)}{(\gamma - \beta)} \frac{2\alpha + \gamma - \beta}{(\beta - \alpha)(\alpha + \gamma)}.
\end{aligned}$$

A terceira parcela é estritamente positiva e segue que se $\gamma \leq 2\alpha + \beta$, então $g_1(x) > g_2(x)$ para todo x no intervalo $[0,1]$.

De (i), (ii) e (iii), concluímos que se $\gamma \leq 2\alpha + \beta$, então, para todo x , $0 < x \leq 1$:

$$\sqrt{xg_{11}(x)g_{12}(x)g_1(x)} > \sqrt{xg_{21}(x)g_{22}(x)g_2(x)}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{xg_{11}(x)g_{12}(x)g_1(x)}} dx < \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{xg_{21}(x)g_{22}(x)g_2(x)}} dx$$

e temos $\pi_2(b, e) < 0$, para (b, e) tal que $\gamma \leq 2\alpha + \beta$.

Considerando as funções α , β e γ temos $\gamma \leq 2\alpha + \beta$ se e somente se

$$\sqrt{\frac{(1-be)e}{(1-e^2)b}} - \sqrt{\frac{b+e}{2b}} \leq \sqrt{\frac{b+e}{2b}} + \sqrt{\frac{(1+be)e}{(1+e^2)b}}.$$

Esta desigualdade é equivalente a termos

$$\begin{aligned} F(b, e) &= \left[\sqrt{2e(1-be)} - \sqrt{(b+e)(1-e^2)} \right] \sqrt{1+e^2} \\ &\leq G(b, e) = \left[\sqrt{(b+e)(1+e^2)} + \sqrt{2e(1+be)} \right] \sqrt{1-e^2}. \end{aligned}$$

No limite, para e tendendo a b :

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow b+} F(b, e) &= \left(\sqrt{2b(1-b^2)} - \sqrt{2b(1-b^2)} \right) \sqrt{1+b^2} = 0, \\ \lim_{e \rightarrow b-} G(b, e) &= \left(\sqrt{2b(1+b^2)} - \sqrt{2b(1+b^2)} \right) \sqrt{1-b^2} > 0. \end{aligned}$$

Logo, para pares (b, e) com e suficientemente próximo de b , temos $\gamma \leq 2\alpha + \beta$ e isto encerra a demonstração do lema. ■

Análise de $\pi_1(b, e)$

$$\pi_1(b, e) = \int_{\gamma_1} \phi_1 = \frac{2ce}{c-e} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{(\alpha + \gamma - \beta)t - \alpha\beta\gamma}{\sqrt{(t - \alpha^2)(\beta^2 - t)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - \rho^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

A função $\pi_1(b, e)$ tem todos os fatores do integrando positivos, exceto $\psi(t) = (\alpha + \gamma - \beta)t - \alpha\beta\gamma$ que é estritamente crescente e anula-se somente no ponto $t_1 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \gamma - \beta}$, interior ao intervalo $[\alpha^2, \beta^2]$. De fato,

$$t_1 - \alpha^2 = \frac{\alpha(\alpha + \gamma)(\beta - \alpha)}{\alpha + \gamma - \beta} > 0 \quad \text{e} \quad \beta^2 - t_1 = \frac{\beta(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}{\alpha + \gamma - \beta} > 0,$$

ou seja, $\alpha^2 < t_1 < \beta^2$. Logo, ψ é negativa em $[\alpha^2, t_1]$ e positiva em $[t_1, \beta^2]$ e como feito anteriormente, reescreveremos π_1 como diferença de integrais em que os integrandos são positivos:

$$\begin{aligned} \pi_1(b, e) &= I_1 - I_2, \quad \text{onde:} \\ I_1 &= \frac{4ec}{c - e} \int_{\alpha^2}^{t_1} \frac{[-\psi(t)]}{\sqrt{(t - \alpha^2)(\beta^2 - t)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - p^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ \text{e} \quad I_2 &= \frac{4ec}{c - e} \int_{t_1}^{\beta^2} \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t - \alpha^2)(\beta^2 - t)(\gamma^2 - t)}} \frac{1}{t - p^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

Para podermos comparar as duas parcelas, faremos mudanças de variáveis para considerar ambas sobre o intervalo $[0, 1]$.

Para I_1 , faremos $t(x) = (t_1 - \alpha^2)x + \alpha^2$ e para I_2 , $t(x) = (t_1 - \beta^2)x + \beta^2$.

Após feitas todas as substituições, chega-se a:

$$I_1 = \frac{4ec}{c - e} (\alpha + \gamma - \beta)^2 \int_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt{x f_{11}(x) f_{12}(x) f_{13}(x) f_1(x)}} dx,$$

onde

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)}{\alpha(\alpha + \gamma)} - x, \\ f_{12}(x) &= \frac{(\gamma - \alpha)(\alpha + \gamma - \beta)}{\alpha(\beta - \alpha)} - x, \\ f_{13}(x) &= \frac{\alpha(\alpha + \gamma - \beta)}{(\alpha + \gamma)(\beta - \alpha)} + x, \\ f_1(x) &= (\alpha^2 - p^2)(\alpha + \gamma - \beta) + \alpha(\alpha + \gamma)(\beta - \alpha)x. \\ I_2 &= \frac{4ec}{c - e} (\alpha + \gamma - \beta)^2 \int_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt{x f_{21}(x) f_{22}(x) f_{23}(x) f_2(x)}} dx, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{21}(x) &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)}{\beta(\gamma - \beta)} - x, \\
f_{22}(x) &= \frac{(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)}{\beta(\beta - \alpha)} + x, \\
f_{23}(x) &= \frac{\beta(\alpha + \gamma - \beta)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} - x, \\
f_2(x) &= (\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \gamma - \beta) + \beta(\beta - \alpha)(\gamma\beta)x.
\end{aligned}$$

Analisando essas funções, temos:

Lema 5.4 Para todo par (b, e) pertencente a $\Omega = \{(b, e) : 0 < b < e < 1\}$ temos $\pi_1(b, e) = I_1 - I_2 < 0$.

Demonstração:

(i) $f_{21}(x) - f_{11}(x) = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)}{\alpha\beta(\alpha + \gamma)(\gamma - \beta)}(\alpha^2 + \beta^2 - (\beta - \alpha)\gamma)$. Logo, se $\gamma < \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha}$, então $f_{21} > f_{11}$.

(ii) $f_{22}(x) - f_{12}(x) = 2x + \frac{(\alpha + \gamma - \beta)}{(\beta - \alpha)\alpha\beta}(2\alpha\beta - (\beta - \alpha)\gamma)$. Se $\gamma < \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha}$, então $f_{22}(x) > f_{12}(x)$, para todo x em $[0, 1]$.

(iii) $f_{23}(x) - f_{13}(x) \geq f_{23}(1) - f_{13}(1) = \frac{\gamma[\alpha^2 + \beta^2 - \gamma(\beta - \alpha)]}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha + \gamma)}$. Se $\gamma < \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha}$, então $f_{23}(x) - f_{13}(x) > 0$, para todo x no intervalo unitário.

(iv) $f_2(x) - f_1(x) = (\alpha + \gamma - \beta)(\beta^2 - \alpha^2)(1 - x)$. Logo, $f_2(x) > f_1(x)$, para todo x em $[0, 1]$.

Notamos que se $\gamma < \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha}$, então $\gamma < \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta - \alpha}$ e valem todas as desigualdades de (i) a (iv), resultando:

$$\sqrt{xf_{11}f_{12}f_{13}f_1} < \sqrt{xf_{21}f_{22}f_{23}f_2}.$$

Da desigualdade acima e lembrando que $c - e < 0$, segue que $\pi_1(b, e) = I_1 - I_2 < 0$, para os pares (b, e) tais que $\gamma < \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha}$.

Para finalizar a prova do lema, basta observar que a desigualdade $\gamma < \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha}$ é equivalente a

$$\sqrt{\frac{(1-be)e}{(1-e^2)b}} \frac{\sqrt{2e(1+be)} - \sqrt{(b+e)(1+e^2)}}{\sqrt{2b(1+e^2)}} \leq 2\sqrt{\frac{b+e}{2b}} \sqrt{\frac{(1+be)e}{(1+e^2)b}}.$$

Mas, por sua vez, esta desigualdade equivale a termos:

$$F(e, b) \leq G(e, b),$$

onde

$$\begin{aligned} F(e, b) &= \sqrt{(1-be)e}(e-b)\sqrt{1-e^2} \\ \text{e} \quad G(e, b) &= 2\sqrt{(b+e)}\sqrt{(1+be)e} \left(\sqrt{2e(1+be)} + \sqrt{(b+e)(1+e^2)} \right). \end{aligned}$$

Para todo par $(b, e) \in \Omega$ vale

$$\begin{aligned} F(e, b) &= \sqrt{(1-be)e}(e-b)\sqrt{1-e^2} < 2(b+e)\sqrt{(1+be)e}\sqrt{1+e^2} \\ &< 2(b+e)\sqrt{(1+be)e}\sqrt{1+e^2} + 2\sqrt{2(b+e)(1+be)e} = G(b, e). \end{aligned}$$

Logo, para todo $(b, e) \in \Omega$, vale $\gamma < \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha}$ e, portanto, $\pi_1(b, e) < 0$. ■

Comparações finais

Pelo lema 5.4, concluímos que, com esta estrutura para o bitoro, não temos um exemplo simplesmente simplesmente periódico como pretendíamos. É possível que seja um exemplo duplamente periódico e, para comprovar essa possibilidade, é necessário determinar uma região contida em Ω em que o sinal de $\pi_2(b, e)$ seja positivo.

As integrais a que chegamos estão em correspondência com as integrais que obtivemos no exemplo simplesmente periódico do Capítulo 1 e seria razoável esperar que a análise do sinal da função período levasse aos mesmos resultados. Porém, naquele exemplo, as variáveis λ e λ_1 são independentes, o que possibilitou tomarmos limites para λ tendendo

a zero ou λ_1 tendendo ao infinito. Nesta segunda construção, a análise é mais delicada, pois envolve, não só os parâmetros b e e , mas, também, o comportamento das funções $\alpha = \alpha(b, e)$, $\beta = \beta(b, e)$ e $\gamma = \gamma(b, e)$. Trabalhando com limites para e tendendo a um ou para b tendendo a infinito, a estrutura do bitoro colapsa e perde-se a analogia com o exemplo construído no Capítulo 1. A resposta final para este exemplo depende, ainda, de conseguir, de alguma forma, controlar o comportamento dessas funções. Muitos outros exemplos poderão ser descritos com esta técnica, uma vez obtida uma boa maneira de se trabalhar com essas funções.

Apêndice

Nas páginas a seguir, encontram-se tabelas com valores das funções π_1 e π_2 em alguns pontos (λ, λ_1) , para $c = 1$, e as curvas de nível zero dessas funções.

MEIO - X: 0.1 até 0.91 e y: 2. a 49.9

x y Valor

0.1 2.	0.131057	0.2 2.	-0.118766	0.3 2.	-0.250808	0.4 2.	-0.308395	0.5 2.	-0.315302
0.1 4.	0.388897	0.2 4.	0.125719	0.3 4.	-0.021021	0.4 4.	-0.0968465	0.5 4.	-0.126594
0.1 6.	0.476521	0.2 6.	0.207826	0.3 6.	0.0549896	0.4 6.	-0.0280652	0.5 6.	-0.0664106
0.1 8.	0.521309	0.2 8.	0.249466	0.3 8.	0.0933424	0.4 8.	0.00645031	0.5 8.	-0.0362844
0.1 10.	0.548452	0.2 10.	0.274699	0.3 10.	0.116523	0.4 10.	0.0272551	0.5 10.	-0.0183368
0.1 12.	0.566701	0.2 12.	0.291639	0.3 12.	0.132062	0.4 12.	0.0411778	0.5 12.	-0.00627963
0.1 14.	0.579816	0.2 14.	0.303802	0.3 14.	0.143207	0.4 14.	0.0511527	0.5 14.	0.00234906
0.1 16.	0.589698	0.2 16.	0.312961	0.3 16.	0.151592	0.4 16.	0.0586519	0.5 16.	0.00883106
0.1 18.	0.597413	0.2 18.	0.320107	0.3 18.	0.158131	0.4 18.	0.0644961	0.5 18.	0.0138795
0.1 20.	0.603603	0.2 20.	0.325838	0.3 20.	0.163373	0.4 20.	0.0691791	0.5 20.	0.0179229
0.1 22.	0.60868	0.2 22.	0.330537	0.3 22.	0.167669	0.4 22.	0.0730157	0.5 22.	0.0212344
0.1 24.	0.612919	0.2 24.	0.334459	0.3 24.	0.171254	0.4 24.	0.0762167	0.5 24.	0.0239963
0.1 26.	0.616512	0.2 26.	0.337783	0.3 26.	0.174292	0.4 26.	0.0789278	0.5 26.	0.0263351
0.1 28.	0.619596	0.2 28.	0.340636	0.3 28.	0.176898	0.4 28.	0.0812536	0.5 28.	0.028341
0.1 30.	0.622273	0.2 30.	0.343111	0.3 30.	0.179159	0.4 30.	0.0832708	0.5 30.	0.0300804
0.1 32.	0.624618	0.2 32.	0.345279	0.3 32.	0.181139	0.4 32.	0.0850371	0.5 32.	0.0316032
0.1 34.	0.626688	0.2 34.	0.347194	0.3 34.	0.182888	0.4 34.	0.0865964	0.5 34.	0.0329474
0.1 36.	0.628531	0.2 36.	0.348897	0.3 36.	0.184443	0.4 36.	0.0879833	0.5 36.	0.0341428
0.1 38.	0.630181	0.2 38.	0.350422	0.3 38.	0.185835	0.4 38.	0.0892247	0.5 38.	0.0352127
0.1 40.	0.631666	0.2 40.	0.351795	0.3 40.	0.187089	0.4 40.	0.0903425	0.5 40.	0.0361759
0.1 42.	0.633012	0.2 42.	0.353038	0.3 42.	0.188223	0.4 42.	0.0913542	0.5 42.	0.0370477
0.1 44.	0.634235	0.2 44.	0.354169	0.3 44.	0.189255	0.4 44.	0.0922743	0.5 44.	0.0378404
0.1 46.	0.635353	0.2 46.	0.355202	0.3 46.	0.190198	0.4 46.	0.0931146	0.5 46.	0.0385644
0.1 48.	0.636378	0.2 48.	0.356149	0.3 48.	0.191063	0.4 48.	0.0938851	0.5 48.	0.0392282

$$\text{Valores de } \pi_i(x, y) = -I_1(x, y) + I_2(x, y)$$

0.6 2.	-0.287264	0.7 2.	-0.235259	0.8 2.	-0.166931	0.9 2.	-0.0874275
0.6 4.	-0.126389	0.7 4.	-0.107246	0.8 4.	-0.0767056	0.9 4.	-0.039847
0.6 6.	-0.0761686	0.7 6.	-0.0682169	0.8 6.	-0.049067	0.9 6.	-0.0261178
0.6 8.	-0.0512645	0.7 8.	-0.0489849	0.8 8.	-0.036788	0.9 8.	-0.0194429
0.6 10.	-0.0363392	0.7 10.	-0.037493	0.8 10.	-0.0289726	0.9 10.	-0.0154786
0.6 12.	-0.0263848	0.7 12.	-0.0298416	0.8 12.	-0.023778	0.9 12.	-0.0128482
0.6 14.	-0.019269	0.7 14.	-0.0243782	0.8 14.	-0.020073	0.9 14.	-0.0109742
0.6 16.	-0.0139277	0.7 16.	-0.0202805	0.8 16.	-0.0172963	0.9 16.	-0.00957079
0.6 18.	-0.00977015	0.7 18.	-0.0170928	0.8 18.	-0.0151374	0.9 18.	-0.00848029
0.6 20.	-0.00644181	0.7 20.	-0.014542	0.8 20.	-0.0134107	0.9 20.	-0.00760844
0.6 22.	-0.00371693	0.7 22.	-0.0124544	0.8 22.	-0.011998	0.9 22.	-0.00689542
0.6 24.	-0.00144496	0.7 24.	-0.0107143	0.8 24.	-0.0108209	0.9 24.	-0.00630141
0.6 26.	0.000478415	0.7 26.	-0.0092416	0.8 26.	-0.00982477	0.9 26.	-0.00579889
0.6 28.	0.00212774	0.7 28.	-0.00797896	0.8 28.	-0.00897095	0.9 28.	-0.00536824
0.6 30.	0.0035577	0.7 30.	-0.00688443	0.8 30.	-0.00823094	0.9 30.	-0.00499504
0.6 32.	0.00480936	0.7 32.	-0.00592654	0.8 32.	-0.00758339	0.9 32.	-0.00466853
0.6 34.	0.00591411	0.7 34.	-0.00508118	0.8 34.	-0.007012	0.9 34.	-0.00438045
0.6 36.	0.00689639	0.7 36.	-0.00432963	0.8 36.	-0.00650407	0.9 36.	-0.00412439
0.6 38.	0.0077755	0.7 38.	-0.00365708	0.8 38.	-0.00604957	0.9 38.	-0.00389529
0.6 40.	0.00856688	0.7 40.	-0.00305169	0.8 40.	-0.0056405	0.9 40.	-0.00368911
0.6 42.	0.00928305	0.7 42.	-0.00250389	0.8 42.	-0.00527037	0.9 42.	-0.00350256
0.6 44.	0.00993425	0.7 44.	-0.00200583	0.8 44.	-0.00493387	0.9 44.	-0.00333298
0.6 46.	0.0105289	0.7 46.	-0.00155103	0.8 46.	-0.00462662	0.9 46.	-0.00317815
0.6 48.	0.0110741	0.7 48.	-0.00113407	0.8 48.	-0.00434495	0.9 48.	-0.00303622

$$\text{Valeurs de } \Pi_1(x, y) = -I_1(x, y) + I_2(x, y)$$

MEIO X: 0.1 até 0.91 e y: 2. a 49.9

x y Valor

0.1 2.	-0.0183368	0.2 2.	-0.0904365	0.3 2.	-0.163038	0.4 2.	-0.237476	0.5 2.	-0.315302
0.1 4.	0.320184	0.2 4.	0.153767	0.3 4.	-0.0100211	0.4 4.	-0.173617	0.5 4.	-0.339624
0.1 6.	0.781733	0.2 6.	0.552972	0.3 6.	0.329301	0.4 6.	0.107472	0.5 6.	-0.11592
0.1 8.	1.22976	0.2 8.	0.95112	0.3 8.	0.679504	0.4 8.	0.410987	0.5 8.	0.141494
0.1 10.	1.64535	0.2 10.	1.3239	0.3 10.	1.01108	0.4 10.	0.702392	0.5 10.	0.393172
0.1 12.	2.02925	0.2 12.	1.66969	0.3 12.	1.32019	0.4 12.	0.975695	0.5 12.	0.631029
0.1 14.	2.38544	0.2 14.	1.99124	0.3 14.	1.60834	0.4 14.	1.23125	0.5 14.	0.854279
0.1 16.	2.71796	0.2 16.	2.29178	0.3 16.	1.87805	0.4 16.	1.47083	0.5 16.	1.06399
0.1 18.	3.03026	0.2 18.	2.57423	0.3 18.	2.13172	0.4 18.	1.69636	0.5 18.	1.26162
0.1 20.	3.32515	0.2 20.	2.84104	0.3 20.	2.37144	0.4 20.	1.90959	0.5 20.	1.44858
0.1 22.	3.60493	0.2 22.	3.09423	0.3 22.	2.59897	0.4 22.	2.11203	0.5 22.	1.62611
0.1 24.	3.87148	0.2 24.	3.33547	0.3 24.	2.81578	0.4 24.	2.30493	0.5 24.	1.79529
0.1 26.	4.12634	0.2 26.	3.56613	0.3 26.	3.02307	0.4 26.	2.48937	0.5 26.	1.95704
0.1 28.	4.3708	0.2 28.	3.78737	0.3 28.	3.22189	0.4 28.	2.66624	0.5 28.	2.11212
0.1 30.	4.60594	0.2 30.	4.00015	0.3 30.	3.41309	0.4 30.	2.83631	0.5 30.	2.26122
0.1 32.	4.83266	0.2 32.	4.2053	0.3 32.	3.5974	0.4 32.	3.00024	0.5 32.	2.40488
0.1 34.	5.05175	0.2 34.	4.40352	0.3 34.	3.77547	0.4 34.	3.15857	0.5 34.	2.54362
0.1 36.	5.26388	0.2 36.	4.59542	0.3 36.	3.94783	0.4 36.	3.3118	0.5 36.	2.67785
0.1 38.	5.46963	0.2 38.	4.78153	0.3 38.	4.11496	0.4 38.	3.46035	0.5 38.	2.80794
0.1 40.	5.66951	0.2 40.	4.9623	0.3 40.	4.27727	0.4 40.	3.60459	0.5 40.	2.93422
0.1 42.	5.86396	0.2 42.	5.13814	0.3 42.	4.43514	0.4 42.	3.74485	0.5 42.	3.05698
0.1 44.	6.05338	0.2 44.	5.30941	0.3 44.	4.58887	0.4 44.	3.88141	0.5 44.	3.17648
0.1 46.	6.23812	0.2 46.	5.47643	0.3 46.	4.73876	0.4 46.	4.01453	0.5 46.	3.29294
0.1 48.	6.41849	0.2 48.	5.63948	0.3 48.	4.88507	0.4 48.	4.14444	0.5 48.	3.40655

$$\text{Valores de } \Pi_2(x, y) = I_3(x, y) - I_4(x, y)$$

0.6 2.	-0.398515	0.7 2.	-0.49001	0.8 2.	-0.594629	0.9 2.	-0.722587
0.6 4.	-0.511176	0.7 4.	-0.692586	0.8 4.	-0.89087	0.9 4.	-1.12081
0.6 6.	-0.344899	0.7 6.	-0.58493	0.8 6.	-0.844835	0.9 6.	-1.14316
0.6 8.	-0.133753	0.7 8.	-0.421197	0.8 8.	-0.7312	0.9 8.	-1.0855
0.6 10.	0.0779821	0.7 10.	-0.250482	0.8 10.	-0.603933	0.9 10.	-1.00692
0.6 12.	0.280159	0.7 12.	-0.0849948	0.8 12.	-0.477365	0.9 12.	-0.92403
0.6 14.	0.470866	0.7 14.	0.0722193	0.8 14.	-0.355711	0.9 14.	-0.842323
0.6 16.	0.650474	0.7 16.	0.220825	0.8 16.	-0.240044	0.9 16.	-0.763683
0.6 18.	0.819967	0.7 18.	0.361325	0.8 18.	-0.130361	0.9 18.	-0.68866
0.6 20.	0.980414	0.7 20.	0.494449	0.8 20.	-0.0262916	0.9 20.	-0.617282
0.6 22.	1.13282	0.7 22.	0.620939	0.8 22.	0.0726376	0.9 22.	-0.549373
0.6 24.	1.27805	0.7 24.	0.74148	0.8 24.	0.166905	0.9 24.	-0.484685
0.6 26.	1.41688	0.7 26.	0.856681	0.8 26.	0.256956	0.9 26.	-0.422954
0.6 28.	1.54997	0.7 28.	0.967072	0.8 28.	0.34319	0.9 28.	-0.363928
0.6 30.	1.67788	0.7 30.	1.07312	0.8 30.	0.425961	0.9 30.	-0.307374
0.6 32.	1.80109	0.7 32.	1.17521	0.8 32.	0.505581	0.9 32.	-0.253078
0.6 34.	1.92002	0.7 34.	1.27372	0.8 34.	0.582325	0.9 34.	-0.200852
0.6 36.	2.03505	0.7 36.	1.36893	0.8 36.	0.656434	0.9 36.	-0.150525
0.6 38.	2.1465	0.7 38.	1.46112	0.8 38.	0.728121	0.9 38.	-0.101947
0.6 40.	2.25464	0.7 40.	1.55053	0.8 40.	0.797576	0.9 40.	-0.0549825
0.6 42.	2.35972	0.7 42.	1.63736	0.8 42.	0.864964	0.9 42.	-0.00951147
0.6 44.	2.46197	0.7 44.	1.7218	0.8 44.	0.930436	0.9 44.	0.0345741
0.6 46.	2.56158	0.7 46.	1.80402	0.8 46.	0.994125	0.9 46.	0.077371
0.6 48.	2.65873	0.7 48.	1.88417	0.8 48.	1.05615	0.9 48.	0.118966

Valores de $\Pi_2(x,y) = I_3(x,y) - I_4(x,y)$.

Curva de nível zero de π_i

Curva de nível zero de π_2 .

BIBLIOGRAFIA

- [BC] Barbosa, J.L.M., Collares, G. *Minimal Surfaces in $\mathbf{R}^3$* , Lecture Notes in Mathematics, 1195, 1986.
- [B] Bers, L., *Riemann Surfaces*, New York University, 1957.
- [CHM] Callahan, M., Hoffman, D., Meeks, W. H., *Embedded minimal surfaces with an infinite number of ends*, Invent, Math., 96, 459-505, 1989.
- [CS] Chinn, W. G., Steenrod, N. E., *First Concepts of Topology: the geometry of mappings of segments, curves, circles and disks*, The Mathematical Association of America, 1966.
- [C] Costa, C. J., *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas*, 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.
- [DHKW] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Kuster, A. Wohlrab, O. *Minimal Surfaces I*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 295, Springer Verlag, 1992

- [HKR] Hoffman, D., Karcher, H., Rosenberg, H., *Embedded minimal annuli in R^3 bounded by a pair of straight lines*, Comm. Math. Helv., 66, 599-617, 1991.
- [HKW1] Hoffman, D., Karcher, H., Wei, F., *The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery*, Global Analysis in Modern Mathematics, Publish or Perish, 1993.
- [HKW2] Hoffman, D., Karcher, H., Wei, F., *Adding handles to the helicoid*, Bull. Amer. Math. Soc., 29 (1), 1993, 77-84.
- [K1] Karcher, H. *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples*, Manuscr. Math., 83-114, 1988.
- [K2] Karcher, H. *Construction of minimal Surfaces*, Vorlesungsreihe, Bonn, 1989.
- [K] Knopp, K., *Theory of Functions*, Dover Publications, 1947.
- [M] Meeks, W. H., *The geometry, topology and existence of periodic minimal surfaces*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, 54, 1993, 333- 374.
- [MR1] Meeks, W. H., Rosenberg, H., *The geometry of periodic minimal surfaces*, Comm. Math. Helv. 68, 1993, 538-578.
- [MR2] Meeks, W. H., Rosenberg, H., *The global theory of doubly periodic minimal surfaces*, Invent. Math. 97, 1989, 351-379.

- [MR3] Meeks, W. H., Rosenberg, H., *The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds*, Comm. Math. Helv. 65, 2, 1990, 255-270.
- [N] Nitsche, J. C. C. *Lecture on Minimal Surfaces*, vol I, Cambridge U. Press, 1989.
- [O] Osserman, R. *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover, N. Y., 1986.
- [PR] Perez, J., Ros, A., *Some uniqueness and non existence theorems for embedded minimal surfaces*, Math. Ann., 296, 1993, 513-525.
- [R] Rosenberg, H., *Deformations of complete minimal surfaces*, Trans, AMS, 295, 2, 1986, 475-489.
- [S] Shoen, R. M., *Uniqueness, symmetry and embeddeness of minimal surfaces*, J. Diff. Geometry, 18, 1983, 791-809.
- [T] Traizet, M. , *Construction de surfaces minimales en recollant des surfaces de Scherk*, preprint, 1996.
- [We] Wei, F., *Some existence and uniqueness theorems for doubly periodic minimal surfaces*, Inv. Math., 109, 1992, 111-136.
- [Wo] Wöhlgemuth, M., *Higher genus minimal surfaces of finite total curvature*, preprint, 1996.