**Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial
e
Espaços Polinomialmente de Schur**

Adriana Junko Hissadomi

Dissertação Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de mestre em matemática

Área de concentração: Análise

Orientadora: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

São Paulo, março de 1998.

**Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial
e
Espaços Polinomialmente de Schur**

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Adriana Junko Hissadomi
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 13 de março de 1998.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (Orientadora) - IME - USP
- Prof. Dr. Jorge Mujica -IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar -IMECC-UNICAMP.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por mais uma vitória conquistada.

Aos meus pais, pelo apoio, dedicação e principalmente por tornarem possível a continuação dos meus estudos.

Aos meus irmãos, Marcelo e Meire, pelo estímulo e pela torcida.

À minha orientadora, Mary Lilian Lourenço, cujo incentivo tem sido importante desde o período da graduação, pela sugestão do assunto e principalmente pela orientação.

Aos professores do IME, pela minha formação matemática.

Aos amigos, Adriana Luiza do Prado, Fábio Skilnik, Luciene G. Santos, Sandra Sartori, que me ajudaram de várias formas.

Ao amigo, Fernando A. Pinho Ramos, pela sua leitura paciente e pela correção final da digitação.

Ao CNPQ, pelo auxílio financeiro.

A todas as pessoas que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar a propriedade Dunford-Pettis polinomial e os espaços polinomialmente de Schur (Λ -espaços). Apresentamos aqui a demonstração dada por Ryan em [30], de que a propriedade Dunford-Pettis e a propriedade Dunford-Pettis polinomial são equivalentes. Todo espaço com a propriedade de Schur tem a propriedade de Dunford-Pettis, mas a recíproca não é verdadeira. Com o objetivo de verificar sob que condições um espaço com a propriedade Dunford-Pettis tem a propriedade de Schur, passamos a estudar os espaços polinomialmente de Schur e apresentamos aqui a demonstração dada por Carne-Cole-Gamelin em [7] que um espaço tem a propriedade de Schur se e somente se é um espaço polinomialmente de Schur e tem a propriedade Dunford-Pettis.

Abstract

The main purpose of this work is to study the polynomial Dunford-Pettis property and the polynomially Schur spaces (or Λ -spaces). We shall present here a proof, given by Ryan in [30], that the Dunford-Pettis property is equivalent to the polynomial Dunford-Pettis property. It is well-known that each space having the Schur property has also the Dunford-Pettis property, the converse however not being true. We shall study here under which conditions a space with Dunford-Pettis property has also the Schur property. In particular, we shall concentrate our attention on the polynomially Schur spaces and we present here a proof given by Carne-Cole-Gamelin in [7], that a space has the Schur property if and only if it has the Dunford-Pettis property and the polynomial Schur property.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Notação	3
1.2 Definições e Resultados	4
2 Polinômios	17
2.1 Aplicações Multilineares	17
2.2 Aplicações Multilineares Simétricas	24
2.3 Produto Tensorial	29
2.4 Polinômios k -Homogêneos	40
2.5 Polinômios k -Homogêneos Contínuos	45
2.6 Polinômios w -Compactos	53
3 Propriedades de Dunford-Pettis Polinomial	60
3.1 Propriedade de Dunford-Pettis	60
3.2 Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial	81
3.3 Polinômios w -Seqüencialmente Contínuos	96
4 Espaços Polinomialmente de Schur	102
Bibliografia	121

Introdução

O estudo de polinômios k -homogêneos contínuos definidos sobre espaços de Banach surge como uma ferramenta necessária para o estudo de funções holomorfas definidas sobre tais espaços.

Por esta razão surgiu o interesse de se obter resultados à respeito dos polinômios k -homogêneos que tivessem conseqüências sobre a teoria das funções holomorfas. Agora, como o espaço dos polinômios k -homogêneos sobre espaços de Banach é também um espaço de Banach, a relação entre os polinômios e as propriedades geométricas ou topológicas do espaço no qual ele está definido passou a ser objeto de grande interesse por muitos matemáticos nos últimos anos. Como por exemplo, [1], [7], [16], [30] e outros.

Neste trabalho estudaremos os polinômios k -homogêneos contínuos e os polinômios contínuos, sendo que o objetivo principal é estudar as propriedades de Dunford-Pettis e de Schur para polinômios.

Em 1940 Nelson Dunford e Bill Pettis provaram que, para qualquer medida μ e qualquer espaço de Banach X , as aplicações lineares w -compactas de $L_1(\mu)$ em X são w -seqüencialmente contínuas.

Em consideração a esse resultado, em 1953, Grothendieck introduziu a definição de um espaço de Banach ter a propriedade de Dunford-Pettis (propriedade DP). Um espaço de Banach X tem a propriedade DP se para todo espaço de Banach Y e toda aplicação linear w -compacta, $T : X \rightarrow Y$, T aplica seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy, isto é, T é w -seqüencialmente contínua. Em 1963 Pelczyński introduziu a classe dos polinômios w -compactos e estudou a propriedade de Dunford-Pettis polinomial (propriedade DPP). Esta propriedade é obtida substituindo a aplicação linear por polinômios na definição da propriedade DP. Se X é um espaço de Banach com a propriedade DPP, então X tem a propriedade DP.

Em [25], Pelczyński tentou verificar se a recíproca era verdadeira. Entretanto só conseguiu verificar que todo polinômio com valores escalares definido num espaço de Banach com a propriedade DP leva seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy. Só em 1978 tal questão foi respondida positivamente por Ryan em [30].

A seguir descreveremos os assuntos abordados em cada capítulo. Convém salientar que os tópicos aqui desenvolvidos se encontram nos artigos [7], [13], [25] e [30].

No capítulo 1 apresentamos as definições e os resultados que são utilizados ao longo deste trabalho.

No capítulo 2 definimos as aplicações multilineares contínuas, os polinômios k -homogêneos contínuos e os polinômios contínuos. Apresentamos resultados importantes desta teoria como a caracterização da continuidade de uma aplicação multilinear, a fórmula

de Leibniz, a fórmula de polarização, o isomorfismo entre o espaço dos polinômios k -homogêneos contínuos e o espaço das aplicações k -lineares simétricas contínuas. Estudamos o produto tensorial, com o objetivo de relacionar as aplicações k -lineares com as aplicações lineares. Além disso, estudamos as aplicações multilineares w -compactas, os polinômios k -homogêneos w -compactos e os polinômios w -compactos. Provamos alguns critérios para que um polinômio seja w -compacto.

No capítulo 3 definimos as propriedades DP e DPP. Verificamos que se X é um espaço de Banach tal que X' tem a propriedade DP, então X tem a propriedade DP. Observamos que a recíproca deste resultado não vale. Para tal, apresentamos o contra-exemplo dado por Stegall em [33], que exhibe um espaço de Banach X com a propriedade DP, mas que X' não tem a propriedade DP. Provamos também que todo subespaço complementado de um espaço de Banach com a propriedade DP possui a propriedade DP. Outros resultados envolvendo a propriedade DP foram também demonstrados. Optamos ainda por incluir os resultados provados por Pelczyński em [25], na sua tentativa de verificar a equivalência das propriedades DP e DPP. Neste artigo, Pelczyński demonstra que se X é um espaço de Banach tal que o produto tensorial projetivo de X k vezes tem a propriedade DP, então X tem a propriedade DPP. Ainda em [25], Pelczyński pergunta se para X e Y espaços de Banach com a propriedade DP, o espaço $X \hat{\otimes} Y$ possui a propriedade DP. Caso tivesse uma resposta afirmativa, poderíamos concluir que as propriedades DP e DPP eram equivalentes. Mas Ryan observa em [31] que tal pergunta não possui uma resposta positiva, uma vez que Talagrand em [34] constrói um espaço de Banach X tal que X' é Schur, mas $L_1([0, 1], X') = L_1[0, 1] \hat{\otimes} X'$ não tem a propriedade DP. Posteriormente, em [30], Ryan prova a equivalência das propriedades DP e DPP, que é o resultado principal deste capítulo. Por último, definimos os polinômios k -homogêneos w -seqüencialmente contínuos e os polinômios w -seqüencialmente contínuos. Mostramos que todos os polinômios k -homogêneos w -compactos definidos em um espaço de Banach com a propriedade DP são w -seqüencialmente contínuos. Além disso, apresentamos uma condição para que todos os polinômios k -homogêneos ($k \in \mathbb{N}$) sejam w -seqüencialmente contínuos.

Finalmente, no capítulo 4 definimos os espaços de Banach que são Λ -espaços. Provamos que todo subespaço fechado de um Λ -espaço é um Λ -espaço e que todo espaço de Banach que possui um subespaço isomorfo a c_0 não é um Λ -espaço. Além disso, demonstramos que um espaço de Banach X tem a propriedade de Schur se e somente se X é um Λ -espaço com a propriedade DP. Para isso, provamos que, se X é um espaço de Banach com a propriedade DP, então, sobre qualquer conjunto w -compacto de X , a topologia fraca e a topologia polinomial fraca coincidem.

Observemos que os elementos de Análise Funcional empregados neste trabalho podem ser encontrados em [11] e [15]. Em relação a teoria dos polinômios indicamos [23].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Notação

A menos que se mencione algo, estaremos utilizando a seguinte notação

$\mathbb{N}_o$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}$	o conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaços normados sobre $\mathbb{K}$
B_X	a bola unitária fechada de X
$rB_X(a)$	a bola fechada de X de centro a e raio r
$\overset{\circ}{B}_X$	a bola unitária aberta de X
$r\overset{\circ}{B}_X(a)$	a bola aberta de X de centro a e raio r de X
X^*	o conjunto das aplicações lineares de X em $\mathbb{K}$
$L(X, Y)$	o conjunto das aplicações lineares e contínuas de X em Y
$L^k(X; Y)$	o conjunto das aplicações k -lineares e contínuas de X em Y
X'	o conjunto $L(X; \mathbb{K})$, dual de X
X''	o bidual topológico de X
$C : X \rightarrow X''$	a aplicação canônica de X em X'' tal que $C(x) = \tilde{x}$, onde $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para qualquer $\varphi \in X'$
$x_n \not\rightarrow x$	a seqüência $(x_n)_n$ não converge para x
$x_n \xrightarrow{w} 0$	a seqüência $(x_n)_n$ converge fracamente para x .

T^*	a aplicação adjunta de T , $T \in L(X; Y)$
$[x_n : n \in \mathbb{N}]$	o subespaço fechado de X gerado por x_n , $n \in \mathbb{N}$
e_n	$= (0, 0, \dots, \overset{n\text{-ésima}}{1}, 0, \dots)$ no espaço de seqüências correspondente.
$\dot{\cup}$	união disjunta de conjuntos
X^k	o espaço $\overbrace{X \times \dots \times X}^{k\text{-vezes}}$
$x^{[r]}$	o termo x está dependendo do parâmetro r

1.2 Definições e Resultados

Teorema 1.1 (Stone-Weierstrass) *Seja K um espaço compacto Hausdorff e $C(K)$ a álgebra formada pelas funções contínuas de K em $\mathbb{K}$. Seja X uma subálgebra fechada de $C(K)$ que contém a unidade e é fechada com relação ao conjugado complexo (isto é, para qualquer $g \in X$, temos que $\bar{g} \in X$). Então $X = C(K)$ se e somente se X separa pontos de K (ou seja, para quaisquer $x, y \in K$ distintos, existe $g \in X$ tal que $g(x) \neq g(y)$) (ver [15]-p.274)*

Definição 1.2 *Um isomorfismo entre dois espaços normados X e Y é uma aplicação linear contínua bijetora com inversa contínua . Quando tal isomorfismo existe, os espaços X e Y são isomorfos e denotamos por $X \cong Y$. Um isomorfismo isométrico entre X e Y é um isomorfismo T entre X e Y tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para qualquer $x \in X$. Quando tal isomorfismo existe, os espaços X e Y são isometricamente isomorfos e denotamos por $X \approx Y$.*

Teorema 1.3 *Todos os espaços de Hilbert separáveis são isomorfos.*
(ver [11]-p.21)

Definição 1.4 *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $W \subset X$. Definimos a envoltória convexa de W , que denotamos por $co(W)$, como sendo o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, de elementos $x_i \in W$ com $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. A envoltória convexa fechada de W , que denotamos por $\overline{co}(W)$, é o fecho de $co(W)$.*

Definição 1.5 *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $W \subset X$. Definimos a envoltória convexa equilibrada de W , que denotaremos por $coe(W)$, como sendo o conjunto formado de todas as combinações lineares finitas, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, de elementos $x_i \in W$ com*

$\lambda_i \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$. A envoltória convexa equilibrada fechada de W , que denotamos por $\overline{\text{coe}}(W)$, é o fecho de $\text{coe}(W)$.

Definição 1.6 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Dizemos que T é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para qualquer $x \in X$.*

Proposição 1.7 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é contínua;
- (b) T é limitada.

(ver [15]-p.59)

Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por l_p , o espaço vetorial de todas as seqüências escalares $x = (x_n)_n$ tais que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right) < \infty$. O espaço l_p é um espaço de Banach munido da norma $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para cada $x = (x_n)_n \in l_p$.

Teorema 1.8 (Banach-Mazur) *Se X é um espaço de Banach separável, então existe uma aplicação linear contínua de l_1 sobre X .*
(ver [14])

Proposição 1.9 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; Y)$ sobrejetora. Então para cada $r > 0$ existe $s > 0$ tal que $s \overset{\circ}{B}_Y \subset T(r \overset{\circ}{B}_X)$*
(ver [15]-p.55)

Teorema 1.10 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; Y)$ sobrejetora. Então T é uma aplicação aberta. Além disso, se T for injetora, segue que T^{-1} é contínua.*
(ver [15]-p.55 e p.57)

Teorema 1.11 (Hahn-Banach) *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, Y um subespaço próprio de X e $\psi \in Y'$. Então existe $\varphi \in X'$ tal que $\psi(y) = \varphi(y)$ para qualquer $y \in Y$ e $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*
(ver [15]-p.63)

Corolário 1.12 *Sejam X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $x_o \in X$ tal que $x_o \neq 0$. Então existe $x^* \in X'$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $x^*(x_o) = \|x_o\|$.
(ver [15]-p.65)*

Corolário 1.13 *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Para cada $x \in X$, temos que $\|x\| = \sup_{\substack{x^* \in X' \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^*(x)|$.
(ver [15]-p.65)*

Teorema 1.14 (Banach-Steinhaus) *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_n)_n$ uma seqüência em $L(X; Y)$ tal que, para cada $x \in X$, $(T_n(x))_n$ é convergente. Se T é o limite pontual da seqüência $(T_n)_n$, então $T \in L(X; Y)$.
(ver [11]-p.100)*

Definição 1.15 *Sejam X um espaço normado e Y um subespaço de X . Dizemos que Y é complementado em X se existe uma projeção de X sobre Y , isto é, uma aplicação linear contínua π de X sobre Y tal que $\pi^2 = \pi$.*

Definição 1.16 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X tem uma cópia (isomorfa) de Y , o que denotamos por $Y \hookrightarrow X$, se existe $T \in L(Y; X)$ injetora tal que $T^{-1} : T(Y) \rightarrow Y$ é contínua. Quando X não contém uma cópia isomorfa de Y , denotamos por $Y \nrightarrow X$.*

Definição 1.17 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Para $0 < p < \infty$, T é p -absolutamente somável se existe uma constante M tal que, para qualquer subconjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^k$ em X , temos que*

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^k |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X'} \right\}.$$

Teorema 1.18 *Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < q < \infty$. Se $T \in L(X; Y)$ é p -absolutamente somável, então T é q -absolutamente somável.
(ver [21]-p.65)*

Teorema 1.19 *Toda aplicação linear contínua de l_1 em l_2 é 1-absolutamente somável.
(ver [21]-p.69)*

Os resultados de 1.20 a 1.27 são relativos às seqüências básicas. Tais resultados se encontram em [20] p.101 à 105.

Definição 1.20 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma seqüência em X . Dizemos que $(x_n)_n$ é uma base de Schauder para X se, para cada $x \in X$, existe uma única seqüência $(a_n)_n$ de escalares tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

Definição 1.21 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma seqüência em X . Dizemos que $(x_n)_n$ é uma seqüência básica de X se $(x_n)_n$ é uma base de Schauder para o espaço vetorial fechado $[(x_n)_n]$ gerado por $(x_n)_n$.*

Teorema 1.22 (Nikolskii) *Seja $(x_n)_n$ uma seqüência de elementos não nulos no espaço de Banach X . Então $(x_n)_n$ é uma seqüência básica se e somente se existe um número real positivo M tal que, para cada seqüência de escalares $(a_i)_i$ e inteiros m, n com $1 < m < n$, temos que $\|\sum_{i=1}^m a_i x_i\| \leq M \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|$.*

Seja $(x_n)_n$ uma seqüência básica num espaço de Banach X . Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $y_k^* \in [(x_n)_n]'$ por $y_k^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_k$ para todo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in [(x_n)_n]$. Pelo teorema 1.11 (Hahn-Banach) podemos considerar $x_k^* \in X'$ a extensão de y_k^* para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.23 *Os funcionais $(x_k^*)_k$ definidos acima são chamados de funcionais coeficientes da seqüência básica $(x_n)_n$.*

Definição 1.24 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que duas bases de Schauder $(x_n)_n$ de X e $(y_n)_n$ de Y são equivalentes se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ também converge.*

Proposição 1.25 *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma base $(x_n)_n$ de X é equivalente à base $(y_n)_n$ de Y se e somente se existe um isomorfismo T de X em Y tal que $T(x_n) = y_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.26 *Seja $(x_n)_n$ uma seqüência básica de X com funcionais coeficientes $(x_n^*)_n$. Se uma seqüência $(y_n)_n$ de X satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \|x_n^*\| < \delta \leq 1$, então $(y_n)_n$ é uma seqüência básica equivalente a $(x_n)_n$.*

Teorema 1.27 *Seja $(x_n)_n$ uma seqüência de termos não nulos em c_o tal que existe uma seqüência crescente $(k_n)_n$ de inteiros positivos com $x_n = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} \alpha_i^{[n]} e_i$. Então $[(x_n)_n]$ e c_o são isomorfos.*

Definição 1.28 *Seja X um espaço vetorial normado. A topologia fraca de X é a topologia obtida tomando como base todos os conjuntos da forma:*

$$U(x_o, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon) = \left\{ x \in X : \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^*(x) - x_i^*(x_o)| < \varepsilon \right\}$$

onde $x_o \in X$; $x_1^*, \dots, x_n^* \in X'$ e $\varepsilon > 0$.

A partir daqui, denotaremos a topologia fraca por w . Conseqüentemente w -aberto, w -fechado, w -compacto, função w -contínua, aplicação w -compacta, etc estão se referindo a conjunto aberto, fechado, compacto, função contínua, aplicação compacta, etc com relação à topologia fraca. E denotaremos por $\overline{A}^w$, o fecho fraco do conjunto A .

Sejam X espaço vetorial normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X . Dizemos que $(x_n)_n$ é w -convergente para $x \in X$ (denotamos por $x_n \xrightarrow{w} x$) se e somente se, para qualquer $x^* \in X'$, temos que $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$. Dizemos que $(x_n)_n$ é w -Cauchy (fracamente de Cauchy) se, para qualquer $x^* \in X'$, temos que $(x^*(x_n))_n$ é convergente.

Definição 1.29 *Seja X um espaço vetorial normado. A topologia fraca estrela de X' é a topologia obtida tomando como base todos os conjuntos da forma:*

$$V(x_o^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) = \left\{ x^* \in X' : \sup_{1 \leq i \leq n} |x_o^*(x_i) - x^*(x_i)| < \varepsilon \right\}$$

onde $x_o^* \in X'$; $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Seja $(x_n^*)_n$ uma seqüência em X' . Dizemos que x_n^* converge fraca estrela para $x^* \in X'$ ($x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$) se, para qualquer $x \in X$, temos que $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$.

Teorema 1.30 (Rosenthal) *Toda seqüência limitada num espaço de Banach ou admite uma subseqüência w -Cauchy ou uma subseqüência equivalente à base canônica de l_1 . (ver [14]-p.201)*

Definição 1.31 *Um espaço de Banach tem a propriedade de Schur se as seqüências w -convergentes e convergentes coincidem.*

Teorema 1.32 *O espaço l_1 tem a propriedade de Schur. (ver [14]-p.85)*

Lema 1.33 *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $(X \times Y)'$ e $X' \times Y'$ são isomorfos.*

Demonstração: Consideremos $\varphi \in (X \times Y)'$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\varphi(x, y) = \varphi((x, 0) + (0, y)) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

onde $\varphi_1 \in X'$ é definido por $\varphi_1(x) = \varphi(x, 0)$, e $\varphi_2 \in Y'$ é definido por $\varphi_2(y) = \varphi(0, y)$.

Agora vamos definir $T : (X \times Y)' \rightarrow X' \times Y'$, por $T(\varphi) = (\varphi_1, \varphi_2)$, para todo $\varphi \in (X \times Y)'$.

Para provar a linearidade de T , vamos considerar $\varphi, \psi \in (X \times Y)'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi + \psi)(x, y) &= \lambda\varphi(x, y) + \psi(x, y) = \lambda(\varphi_1(x) + \varphi_2(y)) + \psi_1(x) + \psi_2(y) \\ &= (\lambda\varphi_1(x) + \psi_1(x)) + (\lambda\varphi_2(y) + \psi_2(y)) = (\lambda\varphi_1 + \psi_1)(x) + (\lambda\varphi_2 + \psi_2)(y). \end{aligned}$$

$$\text{Assim } T(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi_1 + \psi_1, \lambda\varphi_2 + \psi_2) = \lambda(\varphi_1, \varphi_2) + (\psi_1, \psi_2) = \lambda T(\varphi) + T(\psi).$$

Vamos provar que T é injetora. Sejam $\varphi, \psi \in (X \times Y)'$ tais que $T(\varphi) = T(\psi)$. Então $(\varphi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \psi_2)$, isto é, $\varphi_1 = \psi_1$ e $\varphi_2 = \psi_2$. Logo, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, segue que

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \psi_1(x) + \psi_2(y) = \psi(x, y),$$

ou seja, $\varphi = \psi$ e conseqüentemente T é injetora.

Afirmamos que T é sobrejetora, pois, para qualquer $(\varphi_1, \varphi_2) \in X' \times Y'$, podemos definir $\varphi \in (X \times Y)'$ por $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$, donde segue que $T(\varphi) = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Queremos provar a continuidade de T . Para tal consideremos $\varphi \in (X \times Y)'$ tal que $T(\varphi) = (\varphi_1, \varphi_2)$. Então

$$\|\varphi_1\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi_1(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x, 0)| \leq \sup_{\|(x, y)\| \leq 1} |\varphi(x, y)| = \|\varphi\|.$$

De modo análogo, temos que $\|\varphi_2\| \leq \|\varphi\|$, conseqüentemente

$$\|T(\varphi)\| = \|(\varphi_1, \varphi_2)\| \leq \|\varphi\|.$$

Logo T é contínua.

Finalmente, pelo teorema 1.10 (Aplicação Aberta), segue que T^{-1} é contínua. Portanto $(X \times Y)' \cong X' \times Y'$. ■

Se $X_1, \dots, X_k$ são espaços de Banach, de modo análogo ao lema anterior, temos que $(X_1 \times \dots \times X_k)' \cong X'_1 \times \dots \times X'_k$.

Proposição 1.34 *Sejam X, Y espaços de Banach: $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ seqüências w -Cauchy em X e Y , respectivamente. Então $(x_n, y_n)_n$ é uma seqüência w -Cauchy em $X \times Y$.*

Demonstração: Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ seqüências w -Cauchy em X e Y , respectivamente. Seja $\varphi \in (X \times Y)'$. Segue, do lema anterior, que existem $\varphi_1 \in X'$ e $\varphi_2 \in Y'$ tais que $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ para qualquer $x \in X$ e qualquer $y \in Y$. Assim $(\varphi(x_n, y_n))_n = (\varphi_1(x_n))_n + (\varphi_2(y_n))_n$ é uma seqüência convergente, pois $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são seqüências w -Cauchy.

Logo $(x_n, y_n)_n$ é uma seqüência w -Cauchy em $X \times Y$. ■

Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach, e $(x_n^{[1]})_n \subset X_1, \dots, (x_n^{[k]})_n \subset X_k$ seqüências w -Cauchy. Com um raciocínio análogo à do lema anterior, concluímos que $(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]})_n$ é uma seqüência w -Cauchy em $X_1 \times \dots \times X_k$.

Teorema 1.35 *Um espaço de Banach é reflexivo se e somente se a bola unitária fechada é w -compacto .
(ver [15]-p.425)*

Teorema 1.36 (Orlicz- Pettis) *Seja X um espaço de Banach e seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série em X . Suponhamos que, para cada seqüência crescente $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$, a seqüência $\left(\sum_{n=1}^k x_{r_n}\right)_k$ é w -convergente. Então para cada seqüência crescente $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$, temos que $\left(\sum_{n=1}^k x_{r_n}\right)_k$ é convergente.
(ver [14]-p.24)*

Definição 1.37 *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é denominada compacta se, para cada limitado $W \subset X$, temos que $T(W)$ é relativamente compacto em Y , ou seja, $\overline{T(W)}$ é compacto em Y .*

Observemos que toda aplicação linear compacta é contínua.

Proposição 1.38 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X; Y)$. Então:*

- (a) *se T é compacta, temos que T é w -seqüencialmente contínua, isto é, para toda seqüência $(x_n)_n$ em X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, temos que $T(x_n) \rightarrow T(x)$;*
- (b) *se X é reflexivo e T é w -seqüencialmente contínua, temos que T é compacta.*

(ver [11]-p.177)

Proposição 1.39 *Sejam X, Y espaços de Banach e T uma aplicação linear de X em Y . Então:*

- (a) *se T é limitada e $\dim T(X) < \infty$, temos que T é compacta;*
- (b) *se $\dim X < \infty$, temos que T é compacta.*

(ver [11]-p.178)

Teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) *Seja X um espaço de Banach e W um subconjunto de X . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *W é w -seqüencialmente compacto, isto é, qualquer seqüência em W tem uma subseqüência que converge fracamente para algum elemento de X ;*
- (ii) *todo subconjunto infinito e enumerável de W tem um limite fraco em X , isto é, um ponto tal que toda vizinhança fraca contém um elemento do subconjunto infinito;*
- (iii) *o fecho fraco de W é w -compacto, isto é, W é w -relativamente compacto.*

(ver [15]-p.434)

Definição 1.41 *Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é denominada w -compacta se, para cada limitado $W \subset X$, temos que $T(W)$ é w -relativamente compacto em Y , ou seja, $\overline{T(W)}^w$ é w -compacto em Y .*

O espaço de todas as aplicações lineares w -compactas de X em Y será denotado por $L_{wk}(X; Y)$.

Proposição 1.42 *O conjunto das aplicações lineares w -compactas é um subespaço fechado do espaço das aplicações lineares contínuas.*

(ver [15]-p.483)

Proposição 1.43 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Então valem as seguintes afirmações:*

- (a) *se X ou Y é reflexivo, então toda aplicação em $L(X, Y)$ é w -compacta ;*
- (b) *se $T : X \rightarrow Y$ é w -compacta e $S \in L(Y, Z)$, então $S \circ T$ é w -compacta ;*
- (c) *se $T : X \rightarrow Y$ é w -compacta e $S \in L(Z, X)$, então $T \circ S$ é w -compacta .*

(ver [11]-p.187)

Teorema 1.44 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é w -compacta;
- (ii) $T^{**}(X'') \subseteq Y$;
- (iii) T^* é w -compacta.

(ver [11]-p.189)

Teorema 1.45 (Krein-Šmulian) *Sejam X um espaço de Banach e W um subconjunto de X que é w -compacto. Então a envoltória convexa fechada de W é w -compacto .*
(ver [15]-p.434)

Exemplo 1.46 Seja c_o o espaço vetorial formado por todas as seqüências de elementos em $\mathbb{K}$ que convergem para zero. O espaço c_o é um espaço de Banach munido da norma do sup. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n^*)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X' . Vamos definir $T \in L(X, c_o)$ por $T(x) = (x_n^*(x))_n$ para todo $x \in X$.

Queremos mostrar que T é w -compacta. Faremos isso provando que a aplicação adjunta de T , T^* , é w -compacta. Seja $T^* : (c_o)' \rightarrow X'$ definida por

$$(T^*(\varphi))(x) = \varphi(T(x))$$

para todo $\varphi \in (c_o)' = l_1$ e todo $x \in X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja e_n o n -ésimo vetor unitário de l_1 . Então

$$(T^*e_n)(x) = e_n(T(x)) = e_n((x_m^*)_m) = x_n^*(x)$$

para cada $x \in X$.

Iremos provar que $T^*(B_{l_1})$ está contido em um conjunto w -compacto, ou seja, $T^*(B_{l_1})$ é w -seqüencialmente compacto. Seja $t \in B_{l_1}$. Assim $t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, para $\lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$. Conseqüentemente $T^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T^*(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^*$, para $\lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$. Logo, $T^*(B_{l_1}) \subset \overline{\text{coe}}(A)$, onde $A = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Consideremos $\text{ball}(A) = \{\alpha a : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \leq 1; a \in A\}$, a envoltória equilibrada de A . Primeiramente vamos verificar que $\text{ball}(A)$ é w -compacta. Seja $(\alpha_m x_{m_k}^*)_m \subset \text{ball}(A)$. Como A é w -compacto, existe uma subsequência $(x_{m_k}^*)_k$ de $(x_m^*)_m$ tal que $(x_{m_k}^*)_k \xrightarrow{w} 0$. Assim, para qualquer $\varphi \in X''$, temos que $\varphi(\alpha_{m_k} x_{m_k}^*) = \alpha_{m_k} \varphi(x_{m_k}^*) \rightarrow 0$. Logo $(\alpha_{m_k} x_{m_k}^*)_k \xrightarrow{w} 0$, e conseqüentemente $\text{ball}(A)$ é w -compacta.

Assim, pelo teorema 1.45 (Krein-Šmulian), temos que $\overline{co}(ball(A))$ é w -compacto. Uma vez que $coe(A) = co(ball(A))$, concluímos que $T^*(B_{l_1})$ é w -seqüencialmente compacto, pois $T^*(B_{l_1}) \subset \overline{coe}(A)$ e $\overline{coe}(A)$ é w -compacto. Então, pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian), temos que $\overline{T^*(B_{l_1})}^w$ é w -compacto, isto é, T^* é w -compacta. Logo, pelo teorema 1.44, T é w -compacta.

A seguir apresentamos alguns resultados da teoria de medida que serão necessários.

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Se uma propriedade vale exceto em um conjunto de medida nula, dizemos que vale quase sempre e abreviamos por q.s.

Seja l_∞ o espaço vetorial formado pelas seqüências escalares $x = (x_n)_n$ tais que $\sup_n |x_n| < \infty$. O espaço l_∞ é um espaço de Banach munido da norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$ para cada $x = (x_n)_n \in l_\infty$.

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida positiva. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L_p(\mu)$ o espaço vetorial formado pelas classes de equivalências $[f : \int |f|^p < \infty]$ das funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{K}$, onde $g \in [f : \int |f|^p < \infty]$ se f e g coincidem quase sempre. O espaço $L_p(\mu)$ é um espaço de Banach munido da norma $\|f\| = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ para cada $f \in L_p(\mu)$.

Analogamente, $L_\infty(\mu)$ representa o espaço vetorial formado pelas classe das funções mensuráveis $[f : \text{ess sup}|f| < \infty]$, onde $\text{ess sup}|f| = \inf\{\alpha : |f| \leq \alpha \text{ q.s.}\}$. O espaço $L_\infty(\mu)$ é um espaço de Banach munido da norma $\|f\| = \text{ess sup}|f|$ para cada $f \in L_\infty(\mu)$. Em particular, quando $\Omega = [0, 1]$ e μ é a medida de Lebesgue, representamos $L_p(\mu)$, para $1 \leq p < \infty$, por $L_p[0, 1]$, e $L_\infty(\mu)$ por $L_\infty[0, 1]$.

Teorema 1.47 *Seja f uma função limitada e Lebesgue mensurável em $[a, b]$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função escada h tal que $\int_a^b |f(t) - h(t)| dt < \varepsilon$.
(ver [3]-p.72)*

Teorema 1.48 *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida positiva. Então existe um espaço compacto Hausdorff K e uma isometria entre $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $C(K)$.
(ver [15]-p.445)*

Teorema 1.49 *Os espaços l_∞ e $L_\infty[0, 1]$ são isomorfos.
(ver [21]-p.111)*

Teorema 1.50 *Sejam X um espaço de Banach e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Se Y é um subespaço fechado de X , então toda aplicação linear $T : Y \rightarrow L_\infty(\mu)$ pode ser estendida para uma aplicação linear $\tilde{T} : X \rightarrow L_\infty(\mu)$ tal que $\tilde{T}|_Y = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
(ver [27]-p.17)*

Teorema 1.51 Em $L_\infty[0, 1]$ as funções de Rademacher, $r_n(t) = \text{sg}(\sin 2^{n-1} \pi t)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $t \in [0, 1]$, são equivalentes à base canônica de l_1 .
(ver [14]-p.203)

Teorema 1.52 Em $L_2[0, 1]$ as funções de Rademacher formam um sistema ortonormal.
(ver [36]-p.12)

Proposição 1.53 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida que contém uma seqüência de conjuntos disjuntos $(A_j)_j$ com $0 < \mu(A_j) < \infty$. Então $L_p(\mu)$ contém uma cópia de l_p , para $1 \leq p < \infty$.
(ver [36]-p.35)

Definição 1.54 Dizemos que um espaço de medida (Ω, Σ, μ) é um espaço de probabilidade se μ é uma medida de probabilidade, isto é, $\mu(\Omega) = 1$.

Definição 1.55 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que $A \in \Sigma$ é um átomo se $\mu(A) > 0$ e se, para qualquer $B \in \Sigma$ e $B \subset A$, ou $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Dizemos que μ é atômica se existe pelo menos um átomo em Σ .

Proposição 1.56 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ -finito e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma medida de probabilidade μ_1 sobre Ω tal que $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ são isomorfos.
(ver [36]-p.35)

Teorema 1.57 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Uma seqüência $(f_n)_n$ em $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ converge fracamente para $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ se e somente se $(f_n)_n$ é limitada e

$$\int_E f(t) d\mu = \lim_n \int_E f_n(t) d\mu \quad \forall E \in \Sigma$$

(ver [15]-p.291)

Definição 1.58 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções mensuráveis e f uma função mensurável. Então dizemos que f_n converge para f μ -uniformemente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) < \varepsilon$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $\Omega \setminus E$.

Definição 1.59 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Para cada $A \in \Sigma$, a variação de μ sobre A , que denotamos por $v(\mu, A)$, é definida por

$$v(\mu, A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : \cup_{i=1}^n A_i = A \right\},$$

onde o sup é tomado sobre todas as partições finitas de conjuntos dois a dois disjuntos de A em Σ .

Definição 1.60 A menor σ -álgebra $\mathcal{B}$ que contém todos os conjuntos fechados de um dado espaço topológico Ω é chamado de álgebra de Borel de Ω , e os conjuntos em $\mathcal{B}$ são chamados de conjuntos de Borel.

Definição 1.61 Sejam Ω um espaço topológico e Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω . A função aditiva μ definida em Σ é dita regular se, para cada $A \in \Sigma$ e cada $\varepsilon > 0$, existem $F \in \Sigma$, cujo fecho está contido em A , e $G \in \Sigma$, cujo interior contém A , tais que $|\mu(E)| < \varepsilon$ para qualquer $E \in \Sigma$ com $E \subseteq G \setminus F$.

Definição 1.62 Seja Ω um espaço topológico. O espaço $rca(\Omega)$ consiste de todas as funções enumeravelmente aditivas e regulares que estão definidas na σ -álgebra de Borel de Ω e com valores escalares. O espaço $rca(\Omega)$ munido da norma $\|\mu\| = v(\mu, \Omega)$ para todo $\mu \in rca(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.63 (Riesz) Seja K um compacto. Então existe uma isometria entre $C'(K)$ e $rca(K)$ tal que, a cada $x^* \in C'(K)$ associa uma medida $\mu \in rca(K)$, onde $x^*(f) = \int_K f d\mu$ para qualquer $f \in C(K)$ e $\|x^*\| = v(\mu, K) = \|\mu\|$.
(ver [15]-p.265)

A seguir apresentaremos alguns resultados à respeito de medidas vetoriais.

Definição 1.64 Sejam Ω um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω e X um espaço de Banach. Uma função $m : \Sigma \rightarrow X$ é uma medida vetorial se, para quaisquer $A_1, A_2 \in \Sigma$ disjuntos, temos que $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

Consideremos qualquer seqüência $(A_n)_n \subset \Sigma$ de conjuntos dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$. Se $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$ na topologia da norma de X , então m é dita medida vetorial σ -aditiva.

Teorema 1.65 Sejam Ω um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , X um espaço de Banach e $m : \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função m -mensurável tal que $\inf\{c > 0 : m(\{t \in \Omega : |f(t)| > c\}) = 0\}$ é finito, então f é m -integrável.
(ver [15]-p.323)

Teorema 1.66 Sejam Ω um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , X um espaço de Banach e $m : \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial. Se T é uma aplicação linear limitada de X no espaço de Banach Y , então $T \circ m : \Sigma \rightarrow Y$ é uma medida vetorial e, para qualquer $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ m -integrável, $A \in \Sigma$, temos que $T(\int_A f dm) = \int_A f d(T \circ m)$.
(ver [15]-p.324)

Teorema 1.67 *Sejam Ω um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , X um espaço de Banach e $m : \Sigma \rightarrow X$ uma medida vetorial. Se $(f_n)_n$ é uma seqüência de funções m -integráveis que converge m -q.s. para f , e se g é uma função m -integrável tal que $|f_n(s)| \leq g(s)$ m -q.s. para cada $n \in \mathbb{N}$, então f é m -integrável e $\int_A f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dm$ para qualquer $A \in \Sigma$.
(ver [15]-p.328)*

Capítulo 2

Polinômios

Este capítulo tem por objetivo estudar as aplicações multilineares contínuas, os polinômios k -homogêneos contínuos e os polinômios contínuos.

Apresentamos também o produto tensorial e através dele relacionamos as aplicações multilineares com as lineares.

Além disso, estudamos as aplicações multilineares w -compactas, os polinômios homogêneos w -compactos e os polinômios w -compactos.

2.1 Aplicações Multilineares

Definição 2.1 *Sejam $k \in \mathbb{N}$; $X_1, X_2, \dots, X_k$ e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : X_1 \times \dots \times X_k \rightarrow Y$ é k -linear (multilinear) se é linear em cada variável.*

Denotamos por $L_a(X_1, \dots, X_k; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações k -lineares de $X_1 \times \dots \times X_k$ em Y . Quando $X_1 = X_2 = \dots = X_k = X$ escrevemos $L_a(^k X; Y)$. Vamos considerar $L_a(^0 X; Y) = Y$ e $L_a(X; Y)$ o espaço das aplicações lineares de X em Y . Quando $Y = \mathbb{K}$ denotamos $L_a(X_1, \dots, X_k; \mathbb{K})$ por $L_a(X_1, \dots, X_k)$.

Se $X_1, \dots, X_k$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$, vamos considerar o espaço vetorial $X_1 \times \dots \times X_k$ munido da norma,

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|$$

para cada $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$.

O teorema a seguir apresenta alguns critérios de continuidade para aplicações multilineares.

Teorema 2.2 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Se $X_1, X_2, \dots, X_k$ e Y são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e*

$T : X_1 \times \cdots \times X_k \rightarrow Y$ uma aplicação multilinear, então são equivalentes:

- (a) T é contínua;
- (b) T é contínua na origem;
- (c) existe $M > 0$ tal que $\|T(x_1, \dots, x_k)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_k\|$ para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como T é contínua na origem, dado $\varepsilon = 1$ existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in X_1 \times \cdots \times X_k$, com $\|x\| \leq r$, temos que $\|T(x)\| \leq 1$. Seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Agora, para cada $i = 1, \dots, k$ chamamos $z_i = \frac{rx_i}{\|x_i\|}$. Então, se $z = (z_1, \dots, z_k)$, temos que $\|z\| = r$.

Assim,

$$\|T(z_1, \dots, z_k)\| = \frac{r^k \|T(x_1, \dots, x_k)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_k\|} \leq 1$$

e conseqüentemente, $\|T(x_1, \dots, x_k)\| \leq \frac{1}{r^k} \|x_1\| \cdots \|x_k\|$.

Logo para termos (c), no caso $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, basta considerar $M = \frac{1}{r^k}$.

Se $x_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, temos que $T(x_1, \dots, \overbrace{0}^i, \dots, x_k) = 0$, e portanto vale (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $a = (a_1, \dots, a_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$. Então para qualquer $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$ temos que

$$\begin{aligned} T(x) - T(a) &= T(x_1, x_2, \dots, x_k) - T(a_1, x_2, \dots, x_k) + \\ &+ \sum_{i=2}^{k-1} (T(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_k) - T(a_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots, x_k)) + \\ &+ T(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k) - T(a_1, \dots, a_k). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(a)\| &\leq \|T(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_k)\| + \sum_{i=2}^{k-1} \|T(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_k)\| + \\ &+ \|T(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k - a_k)\| \\ &\stackrel{(c)}{\leq} M(\|x_1 - a_1\| \|x_2\| \cdots \|x_k\| + \sum_{i=2}^{k-1} \|a_1\| \cdots \|a_{i-1}\| \|x_i - a_i\| \|x_{i+1}\| \cdots \|x_k\| \\ &+ \|a_1\| \cdots \|a_{k-1}\| \|x_k - a_k\|). \end{aligned}$$

Se $\|x - a\| < 1$, então $\|x_i\| \leq \|x\| < \|a\| + 1 = N$ para cada $i = 1, \dots, k$. Como $\|a\| < \|a\| + 1 = N$, segue que $\|a_i\| < N$ para cada $i = 1, \dots, k$ e assim

$$\|T(x) - T(a)\| \leq kM\|x - a\|N^{k-1}.$$

Portanto dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{kMN^{k-1}}\}$ tal que, se $\|x - a\| < \delta$, então $\|T(x) - T(a)\| < \varepsilon$. ■

Denotamos por $L(X_1, \dots, X_k; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações k -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_k$ em Y . Quando $X_1 = X_2 = \dots = X_k = X$ escrevemos $L^k(X; Y)$. Representamos $L^0(X; Y)$ por Y e $L^1(X; Y)$ por $L(X; Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$ denotamos $L(X_1, \dots, X_k; \mathbb{K})$ por $L(X_1, \dots, X_k)$.

Para cada $T \in L(X_1, \dots, X_k; Y)$ definimos

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X_1 \times \dots \times X_k, \|x\| \leq 1\}.$$

Damos algumas propriedades de $\|T\|$ na proposição abaixo.

Proposição 2.3 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Se $X_1, \dots, X_k$ e Y são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T \in L(X_1, \dots, X_k; Y)$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x_1\| \dots \|x_k\|$ para cada $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$;
- (b) $\|T\|$ é uma norma do espaço vetorial $L(X_1, \dots, X_k; Y)$;
- (c) $\|T\| = \inf\{M : \|T(x)\| \leq M\|x_1\| \dots \|x_k\|, \forall x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k\}$.

Demonstração: (a) Seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$ tal que $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, k$. Definimos, para cada $i = 1, \dots, k$, $z_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$. Então $\|z\| \leq 1$, onde $z = (z_1, \dots, z_k)$. Como

$$\|T(z)\| = \frac{1}{\|x_1\| \dots \|x_k\|} \|T(x_1, \dots, x_k)\|,$$

temos que

$$\|T(x)\| = \|T(z)\|\|x_1\| \dots \|x_k\| \leq \|T\|\|x_1\| \dots \|x_k\|.$$

Portanto $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x_1\| \dots \|x_k\|$.

(b) Da definição de $\|T\|$ segue que $\|T\| \geq 0$. Suponhamos que $\|T\| = 0$. Então, para qualquer $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$, temos que $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x_1\| \dots \|x_k\| = 0$.

Assim $\|T(x)\| = 0$ para qualquer $x \in X_1 \times \cdots \times X_k$, isto é, $T \equiv 0$. Logo $\|T\| = 0$ se e somente se $T = 0$.

Seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\|\alpha T\| = \sup\{\|\alpha T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\alpha| \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\alpha| \|T\|.$$

Portanto $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$.

Sejam $T_1, T_2 \in L(X_1, \dots, X_k; Y)$. Então, para qualquer $x \in X_1 \times \cdots \times X_k$ tal que $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Portanto $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

(c) Seja $M \geq 0$ tal que para qualquer $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$ temos que

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_k\|.$$

Agora consideremos qualquer $x \in X_1 \times \cdots \times X_k$ tal que $\|x\| \leq 1$. Então $\|T(x)\| \leq M$, isto é, M é uma cota superior de $\|T(x)\|$ para $\|x\| \leq 1$, conseqüentemente $\|T\| \leq M$. Portanto $\|T\|$ é uma cota inferior do conjunto

$$\{M > 0 : \|T(x)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_k\|, \forall x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k\},$$

e pelo item (a) obtemos que $\|T\|$ é o ínfimo. ■

Na proposição acima provamos que $L(X_1, \dots, X_k; Y)$ é um espaço normado se $X_1, \dots, X_k$ e Y são espaços normados sobre $\mathbb{K}$. A seguir, damos uma condição para que $L(X_1, \dots, X_k; Y)$ seja de Banach.

Teorema 2.4 *Se $k \in \mathbb{N}$ e Y é um espaço de Banach, então $L(X_1, \dots, X_k; Y)$ é espaço de Banach para quaisquer espaços normados $X_1, X_2, \dots, X_k$.*

Demonstração: Sabemos que $L(X_1, \dots, X_k; Y)$ é um espaço normado, logo basta provar que é completo. Para tal, seja $(T_n)_n$ uma seqüência de Cauchy em $L(X_1, \dots, X_k; Y)$. Considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$, tal que $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, k$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n > n_o$

$$\|T_m - T_n\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1\| \cdots \|x_k\|}.$$

Como, para quaisquer $m, n > n_o$

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x_1\| \cdots \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1\| \cdots \|x_k\|} \|x_1\| \cdots \|x_k\|,$$

segue que $(T_n(x))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y para qualquer $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$ tal que $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, k$. Mas, se $x_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, temos que $(T_n(x))_n$ é a seqüência nula. Logo $(T_n(x))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y para qualquer $x \in X_1 \times \dots \times X_k$. Como Y é um espaço de Banach, a seqüência será convergente. Então podemos definir

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

para cada $x \in X_1 \times \dots \times X_k$. Para cada $i = 1, \dots, k$, consideremos $x_i, y_i \in X_i$, e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, \alpha x_i + y_i, \dots, x_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1, x_2, \dots, \alpha x_i + y_i, \dots, x_k) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1, \dots, y_i, \dots, x_k) \\ &= \alpha T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k) + T(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Com isso provamos que T é k -linear.

Agora vamos provar que T é contínua em $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o > 0$ tal que, para qualquer $n > n_o$, $\|T(x) - T_n(x)\| < \varepsilon$, ou seja,

$$\|T(x)\| < \varepsilon + \|T_n(x)\|.$$

Como $(T_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy, existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\|T(x)\| < \varepsilon + M\|x_1\| \cdots \|x_k\|$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Assim $\|T(x)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_k\|$ para qualquer $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$. Logo pelo teorema 2.2 concluímos que $T \in L(X_1, \dots, X_k; Y)$.

Como $(T_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o > 0$ tal que

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon$$

para quaisquer $m, n > n_o$. Então para $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$, temos que

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x_1\| \cdots \|x_k\| < \varepsilon \|x_1\| \cdots \|x_k\|.$$

Logo $\|T_m(x) - T_n(x)\| < \varepsilon \|x_1\| \cdots \|x_k\|$.

Para m suficientemente grande e $n > n_o$ fixo, segue que

$$\|T(x) - T_n(x)\| < \varepsilon \|x_1\| \cdots \|x_k\|.$$

Portanto $\|T - T_n\| < \varepsilon$ para todo $n > n_o$ e conseqüentemente $L(X_1 \times \dots \times X_k; Y)$ é completo. ■

A seguir, damos alguns exemplos de aplicações multilineares contínuas.

Exemplo 2.5 Sejam X, Y e Z espaços normados. Vamos definir $T : L(X; Y) \times L(Y; Z) \rightarrow L(X; Z)$ por $T(f, g) = g \circ f$ para todo $f \in L(X; Y)$ e todo $g \in L(Y; Z)$.

Claramente T é uma aplicação bilinear. Vamos provar que T é contínua. Consideremos $f \in L(X; Y)$ e $g \in L(Y; Z)$. Então para qualquer $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\|g \circ f(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\| \|f\| \|x\| \leq \|g\| \|f\|.$$

Assim $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$ e $\|T(f, g)\| = \|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$. Portanto T é contínua.

Exemplo 2.6 Seja l_p , para $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial de todas as seqüências escalares $x = (x_n)_n$ tais que a norma $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é finita.

Para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$, definimos $T : l_2^k \rightarrow l_1$ por

$$T((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n) = (x_n^{[1]} \cdots x_n^{[k]})_n.$$

para todo $((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n) \in l_2^k$.

Afirmamos que T é uma aplicação k-linear contínua.

Primeiramente, observemos que $T(l_2^k) \subset l_1$. Para tal, utilizaremos a indução sobre k . Para $k = 2$, temos que

$$T((x_n^{[1]})_n, (x_n^{[2]})_n) = (x_n^{[1]} x_n^{[2]})_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| |x_n^{[2]}| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[2]}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Logo $T((x_n^{[1]})_n, (x_n^{[2]})_n) \in l_1$.

Suponhamos que para quaisquer $(x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k-1]})_n \in l_2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| \cdots |x_n^{[k-1]}| < \infty$. Agora consideremos quaisquer $(x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n \in l_2$. Como para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^{[k]}| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[k]}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n^{[k]})_n\|_2$, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| \cdots |x_n^{[k-1]}| |x_n^{[k]}| \leq \|(x_n^{[k]})_n\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| \cdots |x_n^{[k-1]}| < \infty.$$

Assim $T(l_2^k) \subset l_1$ para qualquer $k \geq 2$.

É claro que T é k-linear. Agora vamos provar por indução que T é contínua. Para quaisquer $(x_n^{[1]})_n, (x_n^{[2]})_n \in l_2$, temos que

$$\|T((x_n^{[1]})_n, (x_n^{[2]})_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| |x_n^{[2]}| \leq \|(x_n^{[1]})_n\|_2 \|(x_n^{[2]})_n\|_2.$$

Suponhamos que para quaisquer $(x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k-1]})_n \in l_2$

$$\|T((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k-1]})_n)\|_1 \leq M \|(x_n^{[1]})_n\|_2 \cdots \|(x_n^{[k-1]})_n\|_2$$

para algum $M \geq 0$. Sejam quaisquer $(x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n \in l_2$. Então

$$\begin{aligned} \|T((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n)\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| \cdots |x_n^{[k]}| \leq \|(x_n^{[k]})_n\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{[1]}| \cdots |x_n^{[k-1]}| \\ &\leq M \|(x_n^{[1]})_n\|_2 \cdots \|(x_n^{[k]})_n\|_2. \end{aligned}$$

Logo $T \in L({}^k l_2; l_1)$.

O próximo resultado será utilizado para provar o teorema de Banach-Steinhaus para polinômios homogêneos.

Teorema 2.7 *Sejam X, Y espaço vetoriais normados e $k \in \mathbb{N}$. Então $L({}^k X; Y) \cong L(X; L({}^{k-1} X; Y))$.*

Demonstração: Se $k = 1$ é trivial. Para $k \geq 2$, vamos considerar a aplicação Ψ que a cada $T \in L({}^k X; Y)$ associa $\psi_T \in L(X; L({}^{k-1} X; Y))$, onde ψ_T é dada por

$$\psi_T(x_1)(x_2, \dots, x_k) = T(x_1, \dots, x_k)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$. É claro que Ψ é linear. Afirmamos que Ψ é uma isomorfismo. De fato, se $T \in L({}^k X; Y)$, então

$$\begin{aligned} \|\Psi(T)\| &= \sup_{\|x_1\| \leq 1} \|\Psi(T)(x_1)\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1} \left(\sup_{\|(x_2, \dots, x_k)\| \leq 1} \|\Psi(T)(x_1)(x_2, \dots, x_k)\| \right) \\ &= \sup_{\|(x_1, \dots, x_k)\| \leq 1} \|T(x_1, \dots, x_k)\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Vamos agora verificar que Ψ é sobrejetora. Seja $S \in L(X; L({}^{k-1} X; Y))$, então podemos definir $T, T \in L({}^k X; Y)$ por

$$T(x_1, \dots, x_k) = S(x_1)(x_2, \dots, x_k)$$

para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. E assim $\Psi(T) = S$, isto é, Ψ é sobrejetora.

Logo $L({}^k X; Y) \cong L(X; L({}^{k-1} X; Y))$. ■

Definição 2.8 *Sejam X e Y espaços de Banach e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação k -linear $T : X^k \rightarrow Y$ é w -compacta (compacta) se aplica conjuntos limitados de X^k em conjuntos w -relativamente compactos (relativamente compactos) em Y .*

A seguir, damos uma caracterização das aplicações k -lineares w -compactas.

Proposição 2.9 *Sejam X e Y espaços de Banach e $k \in \mathbb{N}$. Uma aplicação k -linear $T : X^k \rightarrow Y$ é w -compacta se e somente se aplica a bola unitária fechada de X^k em um conjunto w -relativamente compacto de Y .*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Seja $W \subset X^k$, limitado. Então existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $W \subset rB_{X^k}$. Logo $T(W) \subset T(rB_{X^k}) = r^k T(B_{X^k})$ e conseqüentemente $\overline{T(W)}^w \subset \overline{r^k T(B_{X^k})}^w$.

Consideremos $(y_n)_n \subset r^k T(B_{X^k}) \subset Y$. Como $T(B_{X^k})$ é w -relativamente compacto, segue do teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) que $T(B_{X^k})$ é w -seqüencialmente compacto. Conseqüentemente $\left(\frac{y_n}{r^k}\right)_n$ admite uma subsequência $\left(\frac{y_{n_j}}{r^k}\right)_j$ a qual é w -convergente em Y . Logo $r^k T(B_{X^k})$ é w -seqüencialmente compacto, e pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian), segue que $\overline{r^k T(B_{X^k})}^w$ é w -compacto. Como $\overline{T(W)}^w$ é w -fechado e está contido em $\overline{r^k T(B_{X^k})}^w$, temos que $\overline{T(W)}^w$ é w -compacto. ■

A proposição acima é demonstrada, de modo análogo, para aplicações k -lineares compactas.

Proposição 2.10 *Sejam X e Y espaços de Banach e $k \in \mathbb{N}$. Então toda aplicação k -linear w -compacta de X^k em Y é contínua.*

Demonstração: Seja $T : X^k \rightarrow Y$ uma aplicação k -linear w -compacta. Então $\overline{T(B_{X^k})}^w$ é w -compacto e conseqüentemente $T(B_{X^k})$ é limitado. Assim

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in X^k, \|x\| \leq 1\} = M < \infty$$

e portanto $\|T(x)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_k\|$ para todo $x = (x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Agora, pelo teorema 2.2, temos que $T \in L({}^k X; Y)$. ■

Denotamos por $L_{wk}({}^k X; Y)$ o subespaço vetorial de $L({}^k X; Y)$ formado pelas aplicações w -compactas. Consideremos $L_{wk}({}^0 X; Y) = Y$ e quando $Y = \mathbb{K}$ denotamos $L_{wk}({}^k X; Y)$ por $L_{wk}({}^k X)$.

2.2 Aplicações Multilineares Simétricas

Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{S}_k$ o grupo de todas as permutações de $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definição 2.11 Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação k -linear $T : X^k \rightarrow Y$ é simétrica se para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$, temos que

$$T(x_1, \dots, x_k) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

para toda permutação σ de S_k .

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $L_{as}(^kX; Y)$ o espaço vetorial das aplicações k -lineares simétricas de X^k em Y . Para X e Y espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, denotamos por $L_s(^kX; Y)$ o espaço vetorial das aplicações k -lineares simétricas contínuas de X^k em Y . Quando $Y = \mathbb{K}$, usamos a notação $L_s(^kX)$, e quando $k = 0$, denotamos $L_s(^0X; Y)$ por Y .

Definição 2.12 Sejam X, Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $k \in \mathbb{N}$. Para cada aplicação k -linear $T : X^k \rightarrow Y$, definimos a aplicação k -linear simétrica $T_s : X^k \rightarrow Y$ por

$$T_s(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}),$$

para todo $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Chamamos T_s de simetrização de T .

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $T \in L_{as}(^kX; Y)$, então

$$T_s(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} k! T(x_1, \dots, x_k)$$

para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Logo $T_s = T$ se $T \in L_{as}(^kX; Y)$.

Observemos que, se $T \in L(^kX; Y)$, então $T_s \in L_s(^kX; Y)$.

Na próxima proposição definimos uma aplicação linear contínua de $L(^kX; Y)$ em $L_s(^kX; Y)$.

Proposição 2.13 Sejam X e Y espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Consideremos $\Phi : L(^kX; Y) \rightarrow L_s(^kX; Y)$ definida por $\Phi(T) = T_s$ para todo $T \in L(^kX; Y)$. Então Φ é uma aplicação linear contínua e sobrejetora.

Demonstração: Segue claramente das observações anteriores que Φ é sobrejetora. Para verificar que Φ é linear consideremos $T_1, T_2 \in L(^kX; Y)$; $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Então

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha T_1 + T_2)(x_1, \dots, x_k) &= (\alpha T_1 + T_2)_s(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\alpha T_1 + T_2)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\alpha T_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) + T_2(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})) \\ &= \frac{\alpha}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) + \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_2(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \\ &= \alpha \Phi(T_1)(x_1, \dots, x_k) + \Phi(T_2)(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Logo Φ é linear.

A aplicação Φ também é contínua, pois para cada $T \in L({}^k X; Y)$ e quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \|T_s(x_1, \dots, x_k)\| &\leq \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \|T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})\| \leq \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \|T\| \|x_{\sigma(1)}\| \cdots \|x_{\sigma(k)}\| \\ &= \frac{1}{k!} k! \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_k\| = \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_k\|. \end{aligned}$$

Assim, $\|T_s\| \leq \|T\|$. Como $\|\Phi(T)\| = \|T_s\|$, segue que $\|\Phi(T)\| \leq \|T\|$ e conseqüentemente Φ é contínua. ■

Para apresentarmos os próximos resultados necessitamos das seguintes definições.

Definição 2.14 Para cada $r \in \mathbb{N}$ e cada $\gamma = (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_o^r$, definimos

$$|\gamma| = n_1 + \cdots + n_r \quad \text{e} \quad \gamma! = n_1! n_2! \cdots n_r!$$

Definição 2.15 Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $T \in L_a({}^k X; Y)$ e $r \in \mathbb{N}$. Então, para cada $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$ e para cada $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_o^r$ com $n_1 + \cdots + n_r = k$, definimos

$$T x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} = \begin{cases} T(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{n_1 \text{ vezes}}, \overbrace{x_2, \dots, x_2}^{n_2 \text{ vezes}}, \dots, \overbrace{x_r, \dots, x_r}^{n_r \text{ vezes}}) & \text{se } k \geq 1 \\ T & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.16 (Fórmula de Leibniz) Sejam X, Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}_o$ e $T \in L_{as}({}^k X; Y)$. Então para todo $x_1, \dots, x_r \in X$, temos que

$$T(x_1 + \cdots + x_r)^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} T x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r},$$

onde a soma é sobre todas as r -uplas $\gamma = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_o^r$ satisfazendo $|\gamma| = k$.

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre k . Para $k = 0$ e $k = 1$ o resultado é trivial. Assumindo que a fórmula vale para $k \geq 1$, mostraremos que é válido para $k + 1$. Se $T \in L_{as}({}^{k+1} X; Y)$, então podemos escrever $T(x_1 + \cdots + x_r)^{k+1} = T(x_1 + \cdots + x_r)(x_1 + \cdots + x_r)^k$, onde $T(x_1 + \cdots + x_r) \in L_{as}({}^k X; Y)$ é definido por

$$T(x_1 + \cdots + x_r)(z_1, \dots, z_k) = T(x_1 + \cdots + x_r, z_1, \dots, z_k)$$

para qualquer $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$. Agora, por indução

$$\begin{aligned}
T(x_1 + \dots + x_r)^{k+1} &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \dots n_r!} T(x_1 + \dots + x_r) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} \\
&= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \dots n_r!} T x_1^{n_1+1} \dots x_r^{n_r} + \\
&\quad + \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \dots n_r!} T x_1^{n_1} x_2^{n_2+1} \dots x_r^{n_r} + \\
&\quad + \dots + \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \dots n_r!} T x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r+1},
\end{aligned}$$

onde $\gamma = (n_1, \dots, n_r) \in N_o^r$ tal que $|\gamma| = k$.

Para cada $i = 1, \dots, r$, vamos considerar $\beta^{[i]} = (\beta_1^{[i]}, \dots, \beta_r^{[i]}) \in N_o^r$ tal que $\beta_i^{[i]} = n_i + 1$ e $\beta_j^{[i]} = n_j$ para $j \neq i, j = 1, \dots, r$. Assim

$$\begin{aligned}
T(x_1 + \dots + x_r)^{k+1} &= \sum_{|\beta^{[1]}|=k+1} \frac{k!}{(\beta_1^{[1]} - 1)! \beta_2^{[1]}! \dots \beta_r^{[1]}!} T x_1^{\beta_1^{[1]}} \dots x_r^{\beta_r^{[1]}} + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{|\beta^{[r]}|=k+1} \frac{k!}{\beta_1^{[r]}! \beta_2^{[r]}! \dots (\beta_r^{[r]} - 1)!} T x_1^{\beta_1^{[r]}} \dots x_r^{\beta_r^{[r]}} \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{(\beta_1 - 1)! \beta_2! \dots \beta_r!} T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r} + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{\beta_1! \dots (\beta_r - 1)!} T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r},
\end{aligned}$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in N_o^r$ tal que $|\beta| = k + 1$. Logo

$$\begin{aligned}
T(x_1 + \dots + x_r)^{k+1} &= \sum_{|\beta|=k+1} k! T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r} \left(\frac{1}{(\beta_1 - 1)! \beta_2! \dots \beta_r!} + \dots + \frac{1}{\beta_1! \dots (\beta_r - 1)!} \right) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} k! T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1! \dots \beta_r!} + \dots + \frac{\beta_r}{\beta_1! \dots \beta_r!} \right) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{\beta_1! \dots \beta_r!} T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r} (\beta_1 + \dots + \beta_r) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} \frac{(k+1)!}{\beta!} T x_1^{\beta_1} \dots x_r^{\beta_r}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.17 (Fórmula de Polarização) *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e*

$k \in \mathbb{N}$. Se $T \in L_{as}(^k X; Y)$, então

$$T(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)^k,$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$.

Demonstração: Para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$, seja

$$B = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)^k.$$

Pela fórmula de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)^k &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} T(\varepsilon_1 x_1)^{n_1} \cdots (\varepsilon_k x_k)^{n_k} \\ &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_k^{n_k} T x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}, \end{aligned}$$

onde $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_o^k$ com $|\gamma| = k$. Logo

$$B = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} \varepsilon_1^{1+n_1} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k} T x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}.$$

Se chamamos $\sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1^{1+n_1} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k}$ de $a(n_1, \dots, n_k)$, então

$$B = \frac{k!}{k!2^k} \sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} a(n_1, \dots, n_k) T x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}. \quad (*)$$

Agora vamos supor que $n_1 = 0$, então

$$\begin{aligned} a(n_1, \dots, n_k) &= \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1^{1+n_1} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k} = \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \varepsilon_2^{1+n_2} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k} \\ &= \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \overbrace{1}^{\varepsilon_1} \varepsilon_2^{1+n_2} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k} + \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \overbrace{-1}^{\varepsilon_1} \varepsilon_2^{1+n_2} \cdots \varepsilon_k^{1+n_k} = 0. \end{aligned}$$

Assim, sempre que $n_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, temos que $a(n_1, \dots, n_k) = 0$.

Logo em (*) só há um termo. $a(n_1, \dots, n_k)$ não nulo, quando $n_1 = \dots = n_k = 1$. Como $a(1, \dots, 1) = 2^k$, segue que

$$B = \frac{1}{2^k} \frac{1}{1! \dots 1!} 2^k T x_1 \dots x_k = T(x_1, \dots, x_k). \quad \blacksquare$$

A seguir estudaremos alguns tópicos de produto tensorial, pois no capítulo 3 precisaremos ter uma relação entre as aplicações multilineares e as aplicações lineares e tal relação é estabelecida via produto tensorial.

2.3 Produto Tensorial

Os resultados abaixo se encontram em [5].

Nesta seção estudamos o produto tensorial e definimos de forma que passa a ser uma das "realizações" do produto tensorial, outras realizações podem ser obtidas, embora sejam isomorfas.

Definição 2.18 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Definimos $x \otimes y \in L_a(X^*, Y^*; \mathbb{K})$ por*

$$x \otimes y(\varphi, \psi) = \varphi(x)\psi(y)$$

para todo $\varphi \in X^*$ e todo $\psi \in Y^*$.

Chamamos de produto tensorial algébrico de X e Y o espaço vetorial gerado por $\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$ no espaço das aplicações bilineares de $X^ \times Y^*$ em $\mathbb{K}$. Denotamos tal espaço por $X \otimes Y$.*

Note que cada elemento $u \in X \otimes Y$ pode ser escrito como $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, com $x_i \in X$ e $y_i \in Y$. Tal representação não é única. Além disso, se X e Y são espaços de Banach, então $X \otimes Y$ é um subespaço de $L(X', Y'; \mathbb{K})$.

Algumas propriedades do produto tensorial algébrico são mostradas a seguir.

Proposição 2.19 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $x_1, x_2 \in X$; $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y;$

(b) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2;$

$$(c) \alpha(x_1 \otimes y_1) = (\alpha x_1) \otimes y_1 = x_1 \otimes (\alpha y_1).$$

Demonstração: (a) Para quaisquer $\varphi \in X^*$ e $\psi \in Y^*$ temos que

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y(\varphi, \psi) &= \varphi(x_1 + x_2)\psi(y) = [\varphi(x_1) + \varphi(x_2)]\psi(y) = \varphi(x_1)\psi(y) + \varphi(x_2)\psi(y) \\ &= x_1 \otimes y(\varphi, \psi) + x_2 \otimes y(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Assim $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.

(b) Análogo ao item (a).

(c) Para quaisquer $\varphi \in X^*$ e $\psi \in Y^*$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 \otimes y_1)(\varphi, \psi) &= \alpha[\varphi(x_1)\psi(y_1)] = [\alpha\varphi(x_1)]\psi(y_1) = \varphi(\alpha x_1)\psi(y_1) \\ &= (\alpha x_1) \otimes y_1(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\alpha(x_1 \otimes y_1) = x_1 \otimes (\alpha y_1)$. Assim $\alpha(x_1 \otimes y_1) = (\alpha x_1) \otimes y_1 = x_1 \otimes (\alpha y_1)$. ■

Proposição 2.20 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dado $u \in X \otimes Y$, $u \neq 0$, existem conjuntos linearmente independentes $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ tais que $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.*

Demonstração: Seja $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, onde n é o menor possível. Suponhamos que $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i$. Então

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + x_n \otimes \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \otimes y_i + \alpha_i x_n \otimes y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + \alpha_i x_n) \otimes y_i. \end{aligned}$$

Absurdo, pois n é o menor possível. Logo $\{y_i\}$ é linearmente independente

Um argumento análogo se aplica a $\{x_i\}$. ■

Lema 2.21 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Seja $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0 \in X \otimes Y$, onde $\{x_i\}$ é linearmente independente. Então $y_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.*

Demonstração: Para quaisquer $\varphi \in X^*$ e $\psi \in Y^*$ temos que

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i \right) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) = 0.$$

Então $\sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i = 0$. Como $\{x_i\}$ é linearmente independente, temos que $\psi(y_i) = 0$ para qualquer $\psi \in Y^*$ e cada $i = 1, 2, \dots, n$. Assim $y_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. ■

Lema 2.22 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ subconjuntos linearmente independentes de X e Y respectivamente. Então $\{x_i \otimes y_j : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ é um subconjunto linearmente independente de $X \otimes Y$.*

Demonstração: Suponhamos que $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i \otimes y_j = 0$, isto é, $\sum_{i=1}^m x_i \otimes \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) = 0$.

Então, pelo lema 2.21, $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Como $\{y_j\}$ é linearmente independente, temos que $\alpha_{ij} = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$ e cada $j = 1, \dots, n$. ■

Teorema 2.23 *Sejam X , Y e Z espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então, dado uma aplicação bilinear $T : X \times Y \rightarrow Z$, podemos definir uma única aplicação linear $\tilde{T} : X \otimes Y \rightarrow Z$ tal que*

$$\tilde{T}(x \otimes y) = T(x, y)$$

para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$.

Demonstração: Seja $\tilde{T} : X \otimes Y \rightarrow Z$ definida por

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i)$$

para todo $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Vamos verificar que $\tilde{T}$ está bem definida. Primeiramente vamos provar que se $\sum_{r=1}^k x_r \otimes y_r = 0$, então $\sum_{r=1}^k T(x_r, y_r) = 0$. De fato, sejam $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ bases para os espaços vetoriais gerados por $\{x_r\}_{r=1}^k$ e $\{y_r\}_{r=1}^k$ respectivamente. Consideremos

$$x_r = \sum_i \alpha_i^{[r]} a_i, \quad y_r = \sum_j \beta_j^{[r]} b_j.$$

Assim,

$$\sum_i \sum_j \sum_r \alpha_i^{[r]} \beta_j^{[r]} a_i \otimes b_j = 0.$$

Do lema 2.22, segue que $\sum_r \alpha_i^{[r]} \beta_j^{[r]} = 0$ para quaisquer i e j . Logo

$$\sum_r T(x_r, y_r) = \sum_i \sum_j \sum_r T(\alpha_i^{[r]} a_i, \beta_j^{[r]} b_j) = \sum_i \sum_j \left(\sum_r \alpha_i^{[r]} \beta_j^{[r]} \right) T(a_i, b_j) = 0.$$

Agora consideremos $\sum_{r=1}^n x_r \otimes y_r = \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \in X \otimes Y$. Assim $\sum_{r=1}^n x_r \otimes y_r - \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j = 0$ e pelo raciocínio anterior, segue que

$$\sum_{r=1}^n T(x_r, y_r) - \sum_{j=1}^m T(x'_j, y'_j) = 0,$$

ou seja, $\sum_{r=1}^n T(x_r, y_r) = \sum_{j=1}^m T(x'_j, y'_j)$. Logo $\tilde{T}$ está bem definida.

Afirmamos que $\tilde{T}$ é linear. Para tal, sejam $\sum_{r=1}^n x_r \otimes y_r, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \in X \otimes Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} \tilde{T} \left(\lambda \left(\sum_{r=1}^n x_r \otimes y_r \right) + \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right) &= \tilde{T} \left(\sum_{r=1}^n (\lambda x_r) \otimes y_r + \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right) \\ &= \sum_{r=1}^n T(\lambda x_r, y_r) + \sum_{j=1}^m T(x'_j, y'_j) \\ &= \lambda \sum_{r=1}^n T(x_r, y_r) + \sum_{j=1}^m T(x'_j, y'_j) \\ &= \lambda \tilde{T} \left(\sum_{r=1}^n x_r \otimes y_r \right) + \tilde{T} \left(\sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right). \end{aligned}$$

Finalmente, vamos mostrar que $\tilde{T}$ é única. Suponhamos por absurdo que existe $\tilde{T}_1 : X \otimes Y \rightarrow Z$ tal que $\tilde{T}_1(x \otimes y) = T(x, y)$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$. Então, para qualquer $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, temos que

$$\tilde{T}_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n \tilde{T}_1(x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right).$$

Logo $\tilde{T}_1 = \tilde{T}$. ■

Definição 2.24 Sejam X e Y espaços de Banach. Chamamos a norma induzida em $X \otimes Y$ por $L(X', Y'; \mathbb{K})$ de norma tensorial fraca e denotamos por w . Assim ,

$$w(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) \right| : \varphi \in X', \|\varphi\| \leq 1; \psi \in Y', \|\psi\| \leq 1 \right\},$$

onde $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

A seguir damos uma propriedade da norma w .

Proposição 2.25 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $w(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$.*

Demonstração: Se $x = 0$ ou $y = 0$, então

$$w(x \otimes y) = \sup\{|\varphi(x)\psi(y)| : \|\varphi\| \leq 1, \|\psi\| \leq 1\} = 0 = \|x\| \|y\|.$$

Agora, vamos supor que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Para qualquer $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$ e $\psi \in Y'$ tal que $\|\psi\| \leq 1$, temos que

$$|\varphi(x)\psi(y)| = |\varphi(x)| |\psi(y)| \leq \|\varphi\| \|\psi\| \|x\| \|y\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Logo

$$w(x \otimes y) = \sup\{|\varphi(x)\psi(y)| : \|\varphi\| \leq 1, \|\psi\| \leq 1\} \leq \|x\| \|y\|. \quad (1)$$

Como $x \in X$ e $x \neq 0$, pelo corolário 1.12, existe $\varphi_1 \in X'$ tal que $\|\varphi_1\| = 1$ e $|\varphi_1(x)| = \|x\|$. Analogamente para $y \in Y$, $y \neq 0$ existe $\psi_1 \in Y'$ tal que $\|\psi_1\| = 1$ e $|\psi_1(y)| = \|y\|$. Assim,

$$w(x \otimes y) \geq |\varphi_1(x)\psi_1(y)| = \|x\| \|y\|. \quad (2)$$

Portanto de (1) e (2) temos que $w(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$. ■

Definição 2.26 *Sejam X e Y espaços de Banach. Definimos a função p sobre $X \otimes Y$ por*

$$p(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações finitas de u .

No lema que se segue mostramos que p é uma norma. Chamaremos a norma p de *norma tensorial projetiva*. Convém observar que esta definição é uma das caracterizações da norma projetiva que geralmente é obtida pela norma induzida do espaço $L(X, Y; \mathbb{K})'$.

Lema 2.27 *Sejam X e Y espaços de Banach. A função p definida acima satisfaz:*

- (a) $p(u) \geq w(u)$, $\forall u \in X \otimes Y$;
- (b) $p(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$;
- (c) p é norma sobre $X \otimes Y$.

Demonstração: (a) Sejam $\varphi \in X'$, $\psi \in Y'$ não nulos. e $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Então

$$|u(\varphi, \psi)| = \left| \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) \right| \leq \|\varphi\| \|\psi\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|$$

para toda representação de u . Logo $\frac{|u(\varphi, \psi)|}{\|\varphi\| \|\psi\|}$ é uma cota inferior de $\sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|$, isto é, $|u(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\| p(u)$. Agora da definição de $w(u)$, segue que $w(u) \leq p(u)$ para cada $u \in X \otimes Y$.

(b) Dados $x \in X$ e $y \in Y$, pela definição de p , temos que $p(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$. A outra desigualdade segue da proposição 2.25 e do item (a).

(c) Segue do item (a) que $p(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Assim basta verificar que p é uma semi-norma para termos o lema provado.

Para provar que $p : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma semi-norma, vamos considerar $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} p(\lambda u) &= p\left(\sum_{i=1}^n \lambda x_i \otimes y_i\right) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda| \|x_i\| \|y_i\| : \lambda u = \sum_{i=1}^n \lambda (x_i \otimes y_i) \right\} \\ &= \inf \left\{ |\lambda| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : \lambda u = \lambda \sum_{i=1}^n (x_i \otimes y_i) \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\} = |\lambda| p(u). \end{aligned}$$

Agora, sejam u e $v \in X \otimes Y$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos uma representação de u ,

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| < p(u) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, encontramos uma representação de v ,

$$v = \sum_{i=1}^m z_i \otimes w_i \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^m \|z_i\| \|w_i\| < p(v) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $u + v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^m z_i \otimes w_i$, temos que

$$\begin{aligned} p(u + v) &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| + \sum_{i=1}^m \|z_i\| \|w_i\| \leq p(u) + \frac{\varepsilon}{2} + p(v) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= p(u) + p(v) + \varepsilon \end{aligned}$$

Para ε suficientemente pequeno, segue que $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$. ■

Definição 2.28 Sejam X e Y espaços de Banach. Definimos o produto tensorial projetivo de X e Y como sendo o completamento de $X \otimes Y$ com respeito a norma p , que denotamos por $X \hat{\otimes} Y$.

Proposição 2.29 Sejam X e Y espaços de Banach. O produto tensorial projetivo, $X \hat{\otimes} Y$ pode ser representado como um subespaço vetorial de $L(X', Y'; \mathbb{K})$ formado por elementos da forma $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$, onde $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$. Além disso, $p(u)$ é o ínfimo das somas $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\|$ sobre todas as representações de u .

Demonstração: Vamos fixar qualquer $\delta > 0$. Se $u \in X \hat{\otimes} Y$, então existe uma sequência $(u_r)_r \subset X \otimes Y$ tal que

$$p(u - u_r) < \frac{1}{2^{r+2}} \delta$$

para cada $r \in \mathbb{N}$.

Vamos definir a sequência $(v_r)_r \subset X \otimes Y$ por:

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - u_1, \dots, \quad v_r = u_r - u_{r-1}, \dots$$

Para cada $r \geq 2$, temos que

$$p(v_r) = p(u_r - u_{r-1}) \leq p(u_r - u) + p(u - u_{r-1}) < \frac{1}{2^{r+2}} \delta + \frac{1}{2^{r+1}} \delta < \frac{1}{2^r} \delta.$$

Assim podemos considerar uma representação de v_r

$$v_r = \sum_{i=1}^{n_r} x_i^{[r]} \otimes y_i^{[r]} \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{n_r} \|x_i^{[r]}\| \|y_i^{[r]}\| < \frac{1}{2^r} \delta,$$

onde $x_i^{[r]} \in X$ e $y_i^{[r]} \in Y$ para todo $i = 1, \dots, n_r$ e $r \geq 2$.

Como

$$p(v_1) \leq p(u) + p(u - u_1) < p(u) + \frac{1}{2^3} \delta < p(u) + \frac{1}{2} \delta,$$

podemos representar v_1 por

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{[1]} \otimes y_i^{[1]} \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{n_1} \|x_i^{[1]}\| \|y_i^{[1]}\| < p(u) + \frac{1}{2} \delta,$$

com $x_i^{[1]} \in X$ e $y_i^{[1]} \in Y$ para todo $i = 1, \dots, n_1$.

Como $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{r=1}^k v_r \right) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r$, temos que $u = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n_r} x_i^{[r]} \otimes y_i^{[r]} \right)$.

Além disso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_r} \|x_i^{[r]}\| \|y_i^{[r]}\| < p(u) + \frac{1}{2} \delta + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{2^r} \delta \leq p(u) + \delta < \infty. \quad (*)$$

Agora, vamos verificar que

$$p(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right\}$$

para $u \in X \hat{\otimes} Y$. Seja $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$. Então

$$\begin{aligned} p(u) &= p \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i \otimes y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \end{aligned}$$

para qualquer representação de u . Além disso, para qualquer $\delta > 0$, encontramos uma representação de u que satisfaz a desigualdade (*). Assim

$$p(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right\}.$$

Por outro lado, seja $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ com $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$. Consideremos

$$u_n = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para provar que $u \in X \hat{\otimes} Y$, basta verificar que $(u_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Para tal, seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$, existe $n_o > 0$ tal que $\sum_{i=n_o}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \varepsilon$. Assim para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n > m > n_o$, temos que

$$p(u_n - u_m) \leq \sum_{i=m+1}^n \|x_i\| \|y_i\| \leq \sum_{i=n_o}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \varepsilon.$$

Logo $u \in X \hat{\otimes} Y$. ■

Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Vamos agora identificar o espaço $L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ com o espaço das aplicações bilineares de $X \times Y$ em Z . Ou seja, para cada $\hat{T} \in L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ podemos definir T de $X \times Y$ em Z por $T(x, y) = \hat{T}(x \otimes y)$ para cada $x \in X$ e $y \in Y$. É claro que $T \in L(X, Y; Z)$ e que tal correspondência fornece um isomorfismo isométrico de $L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ sobre $L(X, Y; Z)$, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.30 (Propriedade Universal da Aplicação p) *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Seja $\Phi : L(X \hat{\otimes} Y; Z) \rightarrow L(X, Y; Z)$ definida por $\Phi(\hat{T}) = T$, onde $T(x, y) = \hat{T}(x \otimes y)$ para cada $x \in X$ e $y \in Y$. A aplicação Φ é um isomorfismo isométrico de $L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ sobre $L(X, Y; Z)$.*

Demonstração: É claro que $\Phi(\hat{T}) \in L(X, Y; Z)$ pela observação acima.

Vamos primeiramente provar que Φ é linear. Para tal sejam $\hat{T}_1, \hat{T}_2 \in L(X \hat{\otimes} Y; Z)$; $\lambda \in \mathbb{K}$; $x \in X$ e $y \in Y$. Então

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\hat{T}_1 + \hat{T}_2)(x, y) &= (\lambda\hat{T}_1 + \hat{T}_2)(x \otimes y) = \lambda\hat{T}_1(x \otimes y) + \hat{T}_2(x \otimes y) \\ &= \lambda T_1(x, y) + T_2(x, y) = (\lambda T_1 + T_2)(x, y).\end{aligned}$$

$$\text{Assim } \Phi(\lambda\hat{T}_1 + \hat{T}_2) = \lambda T_1 + T_2 = \lambda\Phi(\hat{T}_1) + \Phi(\hat{T}_2).$$

Para verificar que Φ é injetora, vamos considerar $\hat{T}_1, \hat{T}_2 \in L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ tal que $\Phi(\hat{T}_1) = \Phi(\hat{T}_2)$, isto é, $T_1 = T_2$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\hat{T}_1(x \otimes y) = T_1(x, y) = T_2(x, y) = \hat{T}_2(x \otimes y).$$

Assim, para qualquer $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$, temos que

$$\begin{aligned}\hat{T}_2(z) &= \hat{T}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}_2\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \hat{T}_1(x_i \otimes y_i) = \hat{T}_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\right) = \hat{T}_1(z).\end{aligned}$$

Portanto $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$.

Agora, vamos mostrar que Φ é sobrejetora. Seja $T \in L(X, Y; Z)$. Pelo teorema 2.23 existe uma única aplicação linear $\tilde{T} : X \otimes Y \rightarrow Z$ tal que $\tilde{T}(x \otimes y) = T(x, y)$, para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$. Então para $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, segue que

$$\|\tilde{T}(u)\| = \left\| \tilde{T}\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) \right\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|,$$

e assim $\|\tilde{T}(u)\| \leq \|T\| p(u)$.

Pela proposição 3.13-A de [35], temos que dado $\tilde{T} : X \otimes Y \rightarrow Z$ existe $\hat{T} : X \hat{\otimes} Y \rightarrow Z$ tal que $\|\hat{T}\| = \|\tilde{T}\|$ e $\hat{T}(z) = \tilde{T}(z)$ para qualquer $z \in X \otimes Y$. Em particular, $\hat{T}(x \otimes y) = \tilde{T}(x \otimes y) = T(x, y)$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Logo $\Phi(\hat{T}) = T$.

Para cada $\hat{T} \in L(X \hat{\otimes} Y; Z)$, temos que $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$. Assim para completar a demonstração da proposição, é suficiente provar que $\|T\| \leq \|\hat{T}\|$. Para tal, seja $T \in L(X, Y; Z)$. Então

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|T(x, y)| : x \in B_X; y \in B_Y\} \\ &\leq \sup\{|\hat{T}(x \otimes y)| : x \otimes y \in X \otimes Y; p(x \otimes y) = \|x\| \|y\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|\hat{T}(z)| : z \in X \hat{\otimes} Y; p(z) \leq 1\} = \|\hat{T}\|.\end{aligned}$$

Assim $L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ e $L(X, Y; Z)$ são isometricamente isomorfos. ■

Chamamos a aplicação $\hat{T} \in L(X \hat{\otimes} Y; Z)$ dada acima, de *aplicação linear associada* a aplicação T , $T \in L(X, Y; Z)$

O teorema a seguir relaciona as aplicações bilineares w -compactas com as lineares w -compactas. Tal resultado se encontra em [25].

Teorema 2.31 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Uma aplicação bilinear $T : X \times Y \rightarrow Z$ é w -compacta se e somente se a aplicação linear associada a T , $\hat{T} : X \hat{\otimes} Y \rightarrow Z$, é w -compacta.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) basta provar que $T(B_{X \times Y})$ é w -seqüencialmente compacto. Para isso vamos considerar uma seqüência $(x_n, y_n)_n \subset B_{X \times Y}$.

Seja $W = \{x \otimes y \in X \hat{\otimes} Y : (x, y) \in B_{X \times Y}\}$. Então W é limitado em $X \hat{\otimes} Y$. Como, por hipótese, $\hat{T}$ é w -compacta, segue que $\hat{T}(W)$ é w -seqüencialmente compacto. Logo para $(x_n \otimes y_n)_n \subset W$, existe uma subseqüência $(x_{n_k} \otimes y_{n_k})_k$ de $(x_n \otimes y_n)_n$ tal que a seqüência $(\hat{T}(x_{n_k} \otimes y_{n_k}))_k = (T(x_{n_k}, y_{n_k}))_k$ é w -convergente em Z . Portanto $T(B_{X \times Y})$ é w -seqüencialmente compacto.

($\Rightarrow$) Por hipótese T é w -compacta, ou seja, $\overline{T(B_X \times B_Y)}^w$ é w -compacto. Logo, pelo teorema 1.45 (Krein-Šmulian), $\overline{\overline{T(B_X \times B_Y)}^w}$ é w -compacto.

Assim para demonstrar que $\hat{T}$ é w -compacta, basta provar que $\overline{\overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w} = \overline{\overline{T(B_X \times B_Y)}^w}$. Para verificar que $\overline{\overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w} \subset \overline{\overline{T(B_X \times B_Y)}^w}$, vamos considerar $z \in \overline{\overline{T(B_X \times B_Y)}^w}$. Então

$$z = \sum_{i=1}^k \lambda_i z_i, \text{ com } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ e } z_i \in \overline{\overline{T(B_X \times B_Y)}^w},$$

isto é, existe $(w_n^{[i]})_n \subset T(B_X \times B_Y)$ tal que $w_n^{[i]} \xrightarrow{w} z_i$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Como para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e cada $i = 1, \dots, k$ $w_n^{[i]} \in T(B_X \times B_Y)$, temos que $w_n^{[i]} = T(x_n^{[i]}, y_n^{[i]})$, onde $x_n^{[i]} \in B_X$ e $y_n^{[i]} \in B_Y$.

Desde que $w_n^{[i]} \xrightarrow{w} z_i$, segue que $\sum_{i=1}^k \lambda_i w_n^{[i]} \xrightarrow{w} \sum_{i=1}^k \lambda_i z_i$ e conseqüentemente

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i T(x_n^{[i]}, y_n^{[i]}) \xrightarrow{w} \sum_{i=1}^k \lambda_i z_i = z.$$

Mas

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i T(x_n^{[i]}, y_n^{[i]}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \hat{T}(x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]}) = \sum_{i=1}^k \hat{T}(\lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]}) = \hat{T}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]}\right),$$

logo $\hat{T}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]}\right) \xrightarrow{w} z$.

Para verificar que $z \in \overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w$, basta verificar que $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]} \in B_{X \hat{\otimes} Y}$. Como

$$p\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]}\right) \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|x_n^{[i]}\| \|y_n^{[i]}\| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

temos que $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^{[i]} \otimes y_n^{[i]} \in B_{X \hat{\otimes} Y}$. Portanto $co\left(\overline{T(B_X \times B_Y)}^w\right) \subset \overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w$ e consequentemente $\overline{co\left(\overline{T(B_X \times B_Y)}^w\right)} \subset \overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}$.

Agora vamos provar que $\overline{co\left(\overline{T(B_X \times B_Y)}^w\right)} \supset \overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w$. Como $\overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})} = \overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})}^w$, basta verificar que $\overline{\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})} \subset \overline{co\left(\overline{T(B_X \times B_Y)}^w\right)}$.

Primeiramente vamos considerar $\hat{T}(u) \in \hat{T}(\mathring{B}_{X \hat{\otimes} Y})$. Uma vez que $u \in \mathring{B}_{X \hat{\otimes} Y}$, podemos representar u por

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < 1,$$

onde $x_i \in X$, $x_i \neq 0$ e $y_i \in Y$, $y_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim

$$\hat{T}(u) = \hat{T}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{T}(x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i, y_i).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar

$$z_n = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|}\right).$$

Afirmamos que $z_n \in co(T(B_X \times B_Y))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De fato, sejam $n \in \mathbb{N}$, $r = 1 - \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| > 0$ e $T(x, y) \in T(B_X \times B_Y)$. Então

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|}\right) + \frac{r}{2} T(x, y) - \frac{r}{2} T(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|}\right) + \frac{r}{2} T(x, y) + \frac{r}{2} T(-x, y), \end{aligned}$$

onde $\sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 1$. Logo $z_n \in co(T(B_X \times B_Y))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Como $z_n \rightarrow \hat{T}(u)$, temos que $\hat{T}(u) \in \overline{co(T(B_X \times B_Y))} \subset \overline{co\left(\overline{T(B_X \times B_Y)}^w\right)}$.

Agora vamos considerar $\hat{T}(u) \in \hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y})$. Como $u \in B_{X \hat{\otimes} Y}$, existe $(u_n)_n \subset \mathring{B}_{X \hat{\otimes} Y}$ tal que $u_n \rightarrow u$. Assim

$$\hat{T}(u) = \hat{T}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}(u_n).$$

Uma vez que $u_n \in \mathring{B}_{X \hat{\otimes} Y}$, temos que $\hat{T}(u_n) \in \overline{\text{co}}(\overline{T(B_X \times B_Y)})^w$, e conseqüentemente $\hat{T}(u) \in \overline{\text{co}}(\overline{T(B_X \times B_Y)})^w$. Logo $\hat{T}(B_{X \hat{\otimes} Y}) \subset \overline{\text{co}}(\overline{T(B_X \times B_Y)})^w$. ■

Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach. De um modo análogo podemos definir o produto tensorial de $X_1, X_2, \dots, X_k$. Com as devidas alterações, todos os resultados apresentados nesta secção também valem para o produto tensorial de $X_1, X_2, \dots, X_k$. Denotamos o produto tensorial de $X_1, \dots, X_k$ por $X_1 \otimes \dots \otimes X_k$, e quando $X_1 = \dots = X_k = X$ representamos por $\otimes^k X$. Analogamente, utilizamos a notação $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ para representar o produto tensorial projetivo de $X_1, \dots, X_k$, e se $X_1 = \dots = X_k = X$ escrevemos $\hat{\otimes}^k X$.

2.4 Polinômios k -Homogêneos

Nesta seção vamos definir os polinômios k -homogêneos e os polinômios.

Definição 2.32 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $P : X \rightarrow Y$ é um polinômio k -homogêneo ou um polinômio homogêneo de grau k se existe uma aplicação k -linear $T : X^k \rightarrow Y$ tal que $P(x) = Tx^k$ para todo $x \in X$. Dizemos que P é o polinômio associado a T .*

Seja $P : X \rightarrow Y$ um polinômio k -homogêneo associado a $T \in L(kX; Y)$. Então, para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, temos que

$$P(\alpha x) = T(\alpha x, \dots, \alpha x) = \alpha^k T(x, \dots, x) = \alpha^k Tx^k = \alpha^k P(x).$$

Logo $P(\alpha x) = \alpha^k P(x)$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$.

Denotamos por $P_a(kX; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios k -homogêneos de X em Y . Quando $Y = \mathbb{K}$, usaremos a notação $P_a(kX)$, e quando $k = 0$, denotamos $P(0X; Y)$ por Y .

No próximo teorema relacionamos os polinômios k -homogêneos com as aplicações k -lineares simétricas.

Teorema 2.33 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Para $k \in \mathbb{N}_o$, as afirmações abaixo são verdadeiras:*

- (a) *se $P \in P_a({}^kX; Y)$, então existe uma única aplicação k -linear simétrica $T \in L_{as}({}^kX; Y)$ tal que $P(x) = Tx^k$ para todo $x \in X$;*
- (b) *seja $\Psi : L_{as}({}^kX; Y) \rightarrow P_a({}^kX; Y)$ definido por $\Psi(T) = P$, onde P é o polinômio k -homogêneo que está associado a $T \in L_{as}({}^kX; Y)$. Então Ψ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

Demonstração: (a) Dado $P \in P_a({}^kX; Y)$, existe $T \in L_a({}^kX; Y)$ tal que $P(x) = Tx^k$ para todo $x \in X$. Então para T_s , a simetrização de T , temos que

$$T_s x^k = T_s(x, \dots, x) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(x, \dots, x) = T(x, \dots, x) = Tx^k = P(x)$$

para qualquer $x \in X$.

Para verificar a unicidade, consideremos $T_1, T_2 \in L_{as}({}^kX; Y)$ tais que $T_1 x^k = P(x) = T_2 x^k$ para qualquer $x \in X$. Então $(T_1 - T_2)x^k = 0$ para qualquer $x \in X$.

Uma vez que $(T_1 - T_2) \in L_{as}({}^kX; Y)$, segue da fórmula de polarização que

$$(T_1 - T_2)(z) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k (T_1 - T_2)(\varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_k z_k)^k$$

para cada $z = (z_1, \dots, z_k) \in X^k$. Como $(T_1 - T_2)(\varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_k z_k)^k = 0$, temos que $T_1(z) = T_2(z)$ para qualquer $z \in X^k$.

(b) Pelo item (a), segue que Ψ é uma bijeção, logo basta provar que Ψ é linear. Sejam $T_1, T_2 \in L_{as}({}^kX; Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$. Então

$$\Psi(\alpha T_1 + T_2)(x) = (\alpha T_1 + T_2)x^k = \alpha T_1 x^k + T_2 x^k = (\alpha \Psi(T_1) + \Psi(T_2))(x),$$

consequentemente $\Psi(\alpha T_1 + T_2) = \alpha \Psi(T_1) + \Psi(T_2)$. ■

A seguir demonstramos uma proposição que utilizaremos na caracterização de polinômios w -compactos.

Proposição 2.34 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $P : X \rightarrow Y$ um polinômio homogêneo de grau $k > 0$, associado a $T \in L_{as}({}^kX; Y)$, e $N \geq k$. Então*

$$\frac{1}{N!} \sum_{r=1}^N (-1)^{N-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} P(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_r}) = \begin{cases} T(x_1, \dots, x_k) & : N = k \\ 0 & : N > k \end{cases}$$

Demonstração: Sejam $P \in P(kX; Y)$ e $T \in L_{as}(kX; T)$ tais que $P(x) = Tx^k$ para qualquer $x \in X$. Pela fórmula de Leibniz temos que

$$P(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_r}) = T(x_{i_1} + \cdots + x_{i_r})^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_r!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_r}^{n_r},$$

onde $\gamma = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}_o^r$ e $|\gamma| = k$.

Para $1 \leq r \leq N$ fixo, vamos analisar

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} P(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} \left(\sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_r!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_r}^{n_r} \right). (*)$$

Seja $\frac{k!}{n_1! \cdots n_r!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_r}^{n_r}$ um termo da soma $(*)$ tal que $n_1 + \cdots + n_r = k$ e $n_i \geq 0$, onde $i = 1, \dots, r$. Para "eliminar" os $n_i = 0$ consideremos t o número de n_i não nulos e assim escreveremos, com abuso de notação, que

$$\frac{k!}{n_1! \cdots n_r!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_r}^{n_r} = \frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}.$$

Agora vamos provar que o termo da soma $(*)$, $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$, aparece $\binom{N-k}{t-k}$ vezes. Para tal, consideremos a r -upla $(i'_1, \dots, i'_r)$ tal que $1 \leq i'_1 < \cdots < i'_r \leq N$ e $\{i_1, \dots, i_t\} \subset \{i'_1, \dots, i'_r\}$. Sabemos que $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$ é um termo de $\sum_{|\gamma'|=k} \frac{k!}{n'_1! \cdots n'_r!} T x_{i'_1}^{n'_1} \cdots x_{i'_r}^{n'_r}$ para $(i'_1, \dots, i'_r)$ citado acima, onde $\gamma' = (n'_1, \dots, n'_r) \in \mathbb{N}_o^r$ e $|\gamma'| = k$.

Portanto o número de vezes que o termo $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$ aparece na soma $(*)$ é igual ao número de r -uplas $(i'_1, \dots, i'_r)$ que possuem entre suas coordenadas os elementos $\{i_1, \dots, i_t\}$. Para essas r -uplas sobram $r - t$ coordenadas para serem completadas por $(N - t)$ elementos. Logo temos $\binom{N-t}{r-t}$ r -uplas que possuem entre suas coordenadas os elementos $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$.

Portanto existem $\binom{N-t}{r-t}$ elementos da forma $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$ para cada r fixo.

Agora vamos analisar a seguinte soma

$$\sum_{r=1}^N (-1)^{N-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} \left(\sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_r!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_r}^{n_r} \right) \quad (**)$$

Seja $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$ um termo de (**), onde $n_1, \dots, n_t$ não nulos e $n_1 + \dots + n_t = k$. Tal termo aparece em (**) apenas quando estivermos efetuando a soma para $r \geq t$. Então o coeficiente que multiplica o termo $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$ será:

$$\sum_{r=t}^N (-1)^{N-r} \binom{N-t}{r-t} \stackrel{j=N-r}{=} \sum_{j=0}^{N-t} (-1)^j \binom{N-t}{N-t-j} . (***)$$

Suponhamos, primeiro, que $k = N$.

i) Para $t < k = N$, temos que $N - t > 0$. Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-t} (-1)^j \binom{N-t}{N-t-j} &= \binom{N-t}{N-t} - \binom{N-t}{N-t-1} + \cdots + (-1)^{(N-t)-1} \binom{N-t}{1} \\ &\quad + (-1)^{N-t} \binom{N-t}{0} \\ &\stackrel{teo. Binomial}{=} ((-1) + 1)^{N-t} = 0, \end{aligned}$$

segue de (**), que o coeficiente do termo $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t}$, para $t < N$ é nulo, isto é, esse termo não aparece em (**).

ii) Para $t = k$, temos que $n_1 + \dots + n_t = n_1 + \dots + n_k = k$ e como $n_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, t$, concluímos que $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$. Assim $\frac{k!}{n_1! \cdots n_t!} T x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t} = \frac{N!}{1! \cdots 1!} T(x_1, \dots, x_k)$. Desde que $(-1)^0 \binom{N-t}{N-t} = \binom{N-t}{N-t} = 1$, por (**), segue que o termo $\frac{N!}{1! \cdots 1!} T(x_1, \dots, x_k)$ tem coeficiente igual a 1, isto é, aparece uma vez na soma (**).

Então de (i) e (ii) concluímos que, para $N = k$

$$\frac{1}{N!} \sum_{r=1}^N (-1)^{N-r} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N} P(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = \frac{1}{N!} (N! T(x_1, \dots, x_N)) = T(x_1, \dots, x_k).$$

Consideremos agora $k < N$.

Como $t \leq k < N$, temos que $N - t > 0$. Então, $\sum_{j=0}^{N-t} (-1)^j \binom{N-t}{N-t-j} = 0$.

Logo, quando $k < N$, o coeficiente de qualquer termo de (**) é zero, isto é, a soma é nula. Portanto

$$\frac{1}{N!} \sum_{r=1}^N (-1)^{N-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N} P(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}) = \begin{cases} T(x_1, \dots, x_k) & : N = k \\ 0 & : N > k \end{cases} \quad \blacksquare$$

Definição 2.35 Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função

$P : X \rightarrow Y$ é um polinômio de grau m se P pode ser representado como uma soma

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m,$$

onde $P_j \in P_a(jX; Y)$ para cada $j = 0, 1, \cdots, m$.

Denotamos por $P_a(X; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios de X em Y .

A seguir provamos que a representação de um polinômio é única.

Teorema 2.36 *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $P : X \rightarrow Y$ um polinômio de grau $m \in \mathbb{N}_0$. Então P se escreve de modo único por $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$, com $P_k \in P_a(kX; Y)$ para $k = 1, \cdots, m$.*

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que se $P = P_0 + \cdots + P_m = 0$, então $P_0 = P_1 = \cdots = P_m = 0$.

Para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} P(\alpha x) &= P_0(\alpha x) + P_1(\alpha x) + \cdots + P_m(\alpha x) = 0 \\ \Rightarrow \alpha^0 P_0(x) + \alpha P_1(x) + \cdots + \alpha^m P_m(x) &= 0 \\ \xrightarrow{\div \alpha^m} \frac{1}{\alpha^m} P_0(x) + \frac{\alpha}{\alpha^m} P_1(x) + \cdots + \frac{\alpha^m}{\alpha^m} P_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Para α suficientemente grande, segue que $P_m(x) = 0$ para qualquer $x \in X$. Logo $P(x) = P_0(x) + \cdots + P_{m-1}(x) = 0$. Então

$$\begin{aligned} P(\alpha x) &= P_0(x) + \alpha P_1(x) + \cdots + \alpha^{m-1} P_{m-1}(x) = 0 \\ \xrightarrow{\div \alpha^{m-1}} \frac{1}{\alpha^{m-1}} P_0(x) + \frac{\alpha}{\alpha^{m-1}} P_1(x) + \cdots + \frac{\alpha^{m-1}}{\alpha^{m-1}} P_{m-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Para α suficientemente grande, obtemos que $P_{m-1}(x) = 0$ para qualquer $x \in X$. Com raciocínio análogo, concluimos que $P_0 = P_1 = \cdots = P_m = 0$.

Agora consideremos um polinômio qualquer P tal que

$$P = P_0 + \cdots + P_m = Q_0 + \cdots + Q_m,$$

onde $P_i, Q_i \in P(iX; Y)$ para cada $i = 1, \cdots, m$. Então

$$(P_0 - Q_0) + (P_1 - Q_1) + \cdots + (P_m - Q_m) = 0$$

e pela parte anterior, temos que

$$(P_0 - Q_0) = (P_1 - Q_1) = \cdots = (P_m - Q_m) = 0.$$

Logo $P_0 = Q_0, P_1 = Q_1, \cdots, P_m = Q_m$. ■

2.5 Polinômios k -Homogêneos Contínuos

Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $P(kX; Y)$ o subespaço vetorial de $P_a(kX; Y)$ formado pelos polinômios k -homogêneos contínuos de X em Y . Quando $Y = \mathbb{K}$ usaremos a notação $P(kX)$, e quando $k = 0$, vamos representar $P(0X; Y)$ por Y .

O seguinte teorema fornece um critério para a continuidade de um polinômio k -homogêneo.

Teorema 2.37 *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $P \in P_a(kX; Y)$ e $T \in L_{as}(kX; Y)$ associado a P . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $T \in L_s(kX; Y)$;
- (b) $P \in P(kX; Y)$;
- (c) P é contínua na origem;
- (d) existe uma constante $M > 0$, tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^k$ para qualquer $x \in X$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $x_o \in X$. Por hipótese, T é contínua em $(x_o, \dots, x_o) \in X^k$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ com $\|(x_1, \dots, x_k) - (x_o, \dots, x_o)\| < \delta$, temos que

$$\|T(x_1, \dots, x_k) - T(x_o, \dots, x_o)\| < \varepsilon.$$

Em particular, se $x^k \in X^k$ e $\|(x, \dots, x) - (x_o, \dots, x_o)\| = \|x - x_o\| < \delta$, então $\|Tx^k - Tx_o^k\| = \|P(x) - P(x_o)\| < \varepsilon$. Logo $P \in P(kX; Y)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Trivial.

(c) $\Rightarrow$ (d) Como P é contínua na origem, dado $\varepsilon = 1$ existe $r > 0$ tal que, se $x \in X$ e $\|x\| < r$, então $\|P(x)\| \leq 1$. Para qualquer $x \in X$, $x \neq 0$, consideremos $z = \frac{rx}{2\|x\|}$. Então $\|z\| < r$, e pela hipótese segue que $\|P(z)\| \leq 1$. Agora como

$$\|P(z)\| = \|Tz^k\| = \frac{r^k \|Tx^k\|}{2^k \|x\|^k} \leq 1,$$

temos que

$$\|Tx^k\| \leq \overbrace{\frac{2^k}{r^k}}^M \|x\|^k = M\|x\|^k$$

para qualquer $x \in X$, $x \neq 0$. Como a desigualdade também vale para $x = 0$, segue que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^k$ para qualquer $x \in X$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Seja $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^k$ para qualquer $x \in X$.

Agora consideremos $x_1, \dots, x_k \in X$ tais que $\|x_i\| \leq \frac{1}{k}$ para cada $i = 1, \dots, k$, e usando a fórmula de polarização, concluímos que

$$\begin{aligned} \|T(x_1, x_2, \dots, x_k)\| &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} |\varepsilon_1| \cdots |\varepsilon_k| \|T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)\|^k \\ &= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)\| \\ &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} M \|(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)\|^k \\ &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} M (\|x_1\| + \cdots + \|x_k\|)^k \\ &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} M = \frac{1}{k!2^k} 2^k M = \frac{M}{k!}. \end{aligned}$$

Logo $\|T(x_1, \dots, x_k)\| \leq \frac{M}{k!}$, quando $\|x_i\| \leq \frac{1}{k}$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$. (*)

Sejam quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tais que $x_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, k$. Vamos definir $y_i = \frac{x_i}{k\|x_i\|}$ para cada $i = 1, \dots, k$, então $\|y_i\| \leq \frac{1}{k}$. Assim de (*) obtemos que

$$\|T(y_1, \dots, y_k)\| = \frac{\|T(x_1, \dots, x_k)\|}{k^k \|x_1\| \cdots \|x_k\|} \leq \frac{M}{k!},$$

ou seja,

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\| \leq \frac{M k^k}{k!} \|x_1\| \cdots \|x_k\|$$

para $x_1, \dots, x_k \in X$ tais que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Mas como a desigualdade também vale, se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, concluímos que $T \in L_s(kX; Y)$. ■

Proposição 2.38 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in P(kX; Y)$. Então*

$$\sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^k\} = \|P\|.$$

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar a igualdade $\sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\|$.

Como $\sup_{\|x\|=1} \|P(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\|$, basta provar o outro lado da desigualdade.

Consideremos qualquer $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, $x \neq 0$ e definimos $y = \frac{x}{\|x\|}$. Então

$$\|P(y)\| = \|Ty^k\| = \frac{\|Tx^k\|}{\|x\|^k} \geq \|Tx^k\| = \|P(x)\|.$$

Assim

$$\sup_{\|w\|=1} \|P(w)\| \geq \|P(y)\| \geq \|P(x)\|$$

para qualquer $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $x \neq 0$. Como esta desigualdade também vale para $x = 0$, segue que $\sup_{\|w\|=1} \|P(w)\| \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\|$.

Agora, vamos provar que $\sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\| \geq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^k\}$. Seja $x \in X$, $x \neq 0$ e consideremos $y = \frac{x}{\|x\|}$, então temos que

$$\|P(y)\| = \frac{\|P(x)\|}{\|x\|^k} \leq \sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\|.$$

Logo $\|P(x)\| \leq \sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\| \|x\|^k$. Como a desigualdade também vale quando $x = 0$, concluímos que

$$\sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\| \geq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^k\}.$$

Para verificar a outra desigualdade, consideremos qualquer $M \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^k$ para todo $x \in X$. Se $\|x\| \leq 1$ temos que $\|P(x)\| \leq M$. Assim $\sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\| \leq M$, e conseqüentemente $\sup_{\|z\|\leq 1} \|P(z)\| \leq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^k\}$. ■

Corolário 2.39 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in P(^kX; Y)$. Então a função $P \rightarrow \|P\|$ é uma norma.*

Demonstração: Análoga à proposição 2.3 . ■

O teorema que demonstraremos a seguir nos fornece uma correspondência entre os espaços normados $P(^kX; Y)$ e $L_s(^kX; Y)$.

Teorema 2.40 *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Seja $\Phi : L_s(^kX; Y) \rightarrow P(^kX; Y)$ definido por $\Phi(T) = P$, onde P é o polinômio associado a $T \in L_s(^kX; Y)$. Então Φ é um isomorfismo e, além disso, $\|\Phi(T)\| \leq \|T\| \leq \frac{k^k}{k!} \|\Phi(T)\|$.*

Demonstração: Como Φ é a restrição da função Ψ , dada no teorema 2.33, ao subespaço $L_s(^kX; Y)$, segue que Φ é linear e injetora. Agora, da sobrejetividade da Ψ e do teorema 2.37, temos que Φ é sobrejetora.

Assim resta provar que Φ e Φ^{-1} são contínuas. Para tal vamos provar a seguinte desigualdade

$$\|\Phi(T)\| \leq \|T\| \leq \frac{k^k}{k!} \|\Phi(T)\|,$$

para $T \in L_s(^kX; Y)$.

Para $k = 0$ e $k = 1$, temos que $\Phi(T) = T$, logo temos que $\|\Phi(T)\| = \|T\| = \frac{k^k}{k!} \|\Phi(T)\|$.

Consideremos $k > 1$. Como $\|\Phi(T)(x)\| = \|Tx^k\| \leq \|T\| \|x\|^k$, concluímos que $\|\Phi(T)\| \leq \|T\|$. O outro lado da desigualdade segue da fórmula de polarização. De fato, seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in X^k$, então

$$\begin{aligned} \|T(x_1, \dots, x_k)\| &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|\Phi(T)(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k)\| \\ &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|\Phi(T)\| \|\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k\|^k \\ &\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|\Phi(T)\| (\|x_1\| + \dots + \|x_k\|)^k \\ &= \frac{1}{k!} \|\Phi(T)\| (\|x_1\| + \dots + \|x_k\|)^k \leq \frac{1}{k!} \|\Phi(T)\| k^k \|x\|^k. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \|T\| \leq \frac{k^k}{k!} \|\Phi(T)\|. \quad \blacksquare$$

Observe que $\frac{k^k}{k!}$ é a melhor constante que satisfaz o teorema 2.40, como mostra o exemplo 4.14 de [9].

Corolário 2.41 *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e Y um espaço de Banach. Então $P(^kX; Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Análogo ao teorema 2.4 ■

A seguir provaremos o teorema de Banach-Steinhaus para polinômios k -homogêneos, o qual se deve a Mazur e Orlicz.

Teorema 2.42 *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Seja $(P_n)_n \subset P(^kX; Y)$ tal que para cada $x \in X$, a seqüência $(P_n(x))_n$ é convergente. Se P é o limite pontual de $(P_n)_n$, então $P \in P(^kX; Y)$.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n \in P(kX; Y)$ associado a $T_n \in L_s(kX; Y)$ tal que, para qualquer $x \in X$ a sequência $(P_n(x))_n$ é convergente. Se P é o limite pontual da sequência $(P_n)_n$, então pela fórmula de polarização, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1, \dots, x_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k T_n(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)^k \\ &= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k) \\ &= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k) \end{aligned}$$

para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Conseqüentemente, para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ a sequência $(T_n(x_1, \dots, x_k))_n$ é convergente. Consideremos T o limite pontual da sequência $(T_n)_n$. Então $T \in L_{as}(kX; Y)$.

Agora, pelo teorema 2.7, temos que $L(kX; Y) \cong L(X; L(k-1X; Y))$, conseqüentemente $T_n \in L(X; L(k-1X; Y))$. Assim, pelo teorema 1.14 (Banach-Steinhaus), temos que $T \in L(X; L(k-1X; Y)) \cong L(kX; Y)$.

Como para qualquer $x \in X$,

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x^k = T x^k,$$

concluimos que $P \in P(kX; Y)$. ■

A próxima proposição fornece uma propriedade dos polinômios k -homogêneos.

Proposição 2.43 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in P(kX; Y)$. Então P é uniformemente contínuo sobre os limitados.*

Demonstração: Consideremos $P : X \rightarrow Y$ um polinômio k -homogêneo associado a $T \in L(kX; Y)$. Seja $W \subset X$ limitado e $r > 0$ tal que $W \subset r\mathring{B}_X$. Para $x, z \in W$, temos que

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(z)\| &= \|T(x, \dots, x) - T(z, \dots, z)\| = \|T(x, \dots, x) - T(z, x, \dots, x) \\ &\quad + T(z, x, \dots, x) - T(z, z, x, \dots, x) + T(z, z, x, \dots, x) - \\ &\quad \cdots - T(z, \dots, z, x) + T(z, \dots, z, x) - T(z, \dots, z)\| \\ &\leq \|T(x - z, x, \dots, x)\| + \|T(z, x - z, x, \dots, x)\| + \cdots + \|T(z, \dots, z, x - z)\| \\ &\leq k\|T\|r^{k-1}\|x - z\|. \end{aligned}$$

Chamando $M = k\|T\|r^{k-1}$, obtemos que

$$\|P(x) - P(z)\| \leq M\|x - z\|.$$

Logo P é uniformemente contínuo em cada conjunto limitado de X . ■

Denotaremos por $P(X; Y)$ o subespaço vetorial de $P_a(X; Y)$ formado pelos polinômios contínuos. Se $Y = \mathbb{K}$ denotaremos $P(X; \mathbb{K})$ por $P(X)$.

Vamos fornecer um critério de continuidade para polinômios de X em Y . Para tal, precisaremos do próximo lema e da fórmula de polarização, do seguinte modo.

Para $f : X \rightarrow Y$ e $x_1, \dots, x_m \in X$ vamos definir

$$\mathcal{F}_m(f) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m f(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m).$$

Vamos chamar $\mathcal{F}_m(f)$ a polarização de f com respeito a $x_1, \dots, x_m$.

Lema 2.44 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Seja $P : X \rightarrow Y$ o polinômio k -homogêneo associado a $T \in L_{as}(^k X; Y)$, para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mathcal{F}_m(P) = \begin{cases} T(x_1, \dots, x_k) & : k = m \\ 0 & : k < m \end{cases}$$

Demonstração: O caso $k = m$, segue do teorema 2.17.

Para $k < m$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(P) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^k. \end{aligned}$$

Para $\gamma = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}_o^m$ com $|\gamma| = k$ e usando a fórmula de Leibniz segue que

$$\begin{aligned} T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^k &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_m!} T(\varepsilon_1 x_1)^{n_1} \cdots (\varepsilon_m x_m)^{n_m} \\ &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_m!} \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_m^{n_m} T(x_1)^{n_1} \cdots (x_m)^{n_m}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m(P) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \cdots n_m!} \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_m^{n_m} T(x_1)^{n_1} \cdots (x_m)^{n_m} \\ &= \frac{k!}{m!2^m} \sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{n_1! \cdots n_m!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} T(x_1)^{n_1} \cdots (x_m)^{n_m}.\end{aligned}$$

Para qualquer $\gamma = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}_o^m$ tal que $|\gamma| = n_1 + \cdots + n_m = k < m$, existe $n_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, m$. Logo $a(n_1, \dots, n_m) = \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} = 0$. Portanto

$\mathcal{F}_m(P) = 0$ para qualquer $k < m$. ■

Teorema 2.45 *Sejam X, Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in P_a(X; Y)$. Se $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$ com $m \in \mathbb{N}_o$ e $P_j \in P_a(jX; Y)$ para cada $j = 0, 1, \dots, m$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $P_0, P_1, \dots, P_m$ são contínuos;
- (b) P é contínuo;
- (c) P é contínuo na origem;
- (d) P é limitado na bola unitária fechada.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) São triviais.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que P é contínuo. Vamos mostrar que P_j é contínuo para cada $j = 0, 1, \dots, m$. A prova será feita por indução sobre m . Para $m = 0$ é evidente. Vamos supor que vale para $m - 1$. Mostraremos que é válido para m . Para todo $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$(1) \quad \sum_{j=0}^m P_j(x) = P(x) \quad \text{e} \quad (2) \quad \sum_{j=0}^m P_j(\alpha x) = P(\alpha x).$$

Multiplicando (1) por $\alpha^m \in \mathbb{K}$ e subtraindo (2) temos que

$$\alpha^m P(x) - P(\alpha x) = \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha^m - \alpha^j) P_j(x)$$

para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Como P é contínuo, temos que $\alpha^m P(x) - P(\alpha x)$ é contínuo em X . Assim, se $\alpha \in \mathbb{K}$ é tal que $\alpha^m - \alpha^j \neq 0$ para cada $j = 0, \dots, m - 1$, temos que $\sum_{j=0}^{m-1} Q_j(x)$ é um polinômio

contínuo. onde $Q_j = (\alpha^m - \alpha^j)P_j \in P_a({}^jX; Y)$ para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$. Da hipótese de indução, segue que Q_j é contínuo para todo $j = 0, 1, \dots, m-1$. Assim $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ são contínuos, e como P também é contínuo, segue que $P - \sum_{j=0}^{m-1} P_j = P_m$ é contínuo.

(c) $\Rightarrow$ (d) Se P é contínuo na origem, então, usando o mesmo raciocínio anterior, temos que P_j é contínuo na origem para cada $j = 0, 1, \dots, m$. Assim segue do teorema 2.37 que para cada $j = 0, 1, \dots, m$, existe $M_j > 0$ tal que $\|P_j(x)\| \leq M_j$ para qualquer $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$. Como $\|P(x)\| \leq \sum_{j=0}^m \|P_j(x)\|$, temos que

$$\|P(x)\| \leq \sum_{j=0}^m M_j$$

para qualquer $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$. Portanto P é limitado na bola unitária fechada.

(d) $\Rightarrow$ (a) Seja $P = P_0 + \dots + P_m \in P_a(X; Y)$, limitado na bola unitária fechada. Como P_0 é contínuo, podemos considerar $P_0 = 0$, isto é, $P = P_1 + \dots + P_m$.

Então, pela fórmula de polarização de P com respeito a quaisquer $x_1, \dots, x_k \in X$, segue que

$$\mathcal{F}_m(P) = \mathcal{F}_m(P_1 + \dots + P_m) = \mathcal{F}_m(P_1) + \dots + \mathcal{F}_m(P_m).$$

Agora usando o lema 2.44, temos que

$$\mathcal{F}_m(P) = \mathcal{F}_m(P_m) = T_m(x_1, \dots, x_m),$$

onde $T_m \in L_{as}({}^mX; Y)$ é a aplicação multilinear simétrica associada a P_m . Como P é limitada na bola unitária fechada, existe $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M$ para qualquer $x \in B_X$. Assim para $x_1, \dots, x_m \in X$ com $\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|T_m(x_1, \dots, x_m)\| &= \|\mathcal{F}_m(P)\| \leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|P(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} M = \frac{M}{m!}, \end{aligned}$$

pois $\|(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)\| \leq 1$.

Logo $\|T_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{M}{m!}$ se $\|x_1\| + \dots + \|x_m\| \leq 1$.

Agora, vamos considerar qualquer $x = (x_1, \dots, x_m)$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Vamos definir $y_i = \frac{x_i}{m\|x_i\|}$ para cada $i = 1, \dots, k$. Então $\|y_1\| + \dots + \|y_m\| \leq 1$, e pelo resultado provado acima, obtemos que

$$\|T_m(y_1, \dots, y_m)\| = \frac{1}{m^m \|x_1\| \dots \|x_m\|} \|T_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{M}{m!}.$$

Portanto

$$\|T_m(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{m^m M}{m!} \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para qualquer $x = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$. Então se $N = \frac{m^m M}{m}$, temos que $\|P_m(x)\| \leq N\|x\|^m$ para qualquer $x \in X$. Assim, segue do teorema 2.37 que P_m é contínuo e $P - P_m$ é limitado na bola unitária fechada. Repetindo o mesmo raciocínio para $P_1 + \dots + P_{m-1}$, podemos concluir $P_{m-1}, \dots, P_1$ são contínuos. ■

2.6 Polinômios w -Compactos

Nesta seção estudamos os polinômios w -compactos. Usaremos tais resultados no capítulo 3 para estudar a propriedade de Dunford-Pettis polinomial.

Definição 2.46 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um polinômio k -homogêneo $P : X \rightarrow Y$ é w -compacto (compacto) se leva conjuntos limitados de X em conjuntos w -relativamente compactos (relativamente compactos) de Y .*

Exemplo 2.47 Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $P : l_2 \rightarrow l_2$ definido por

$$P((x_n)_n) = \left(\frac{1}{n} x_n^k \right)_n$$

para todo $(x_n)_n \in l_2$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos $\pi_i \in l'_2$ definido por $\pi_i((x_n)_n) = x_i$ para todo $(x_n)_n \in l_2$. Assim, podemos escrever P da seguinte forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i \pi_i^k(x)$$

para cada $x \in l_2$.

Agora, se para cada $r \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_r(x) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} e_i \pi_i^k(x)$$

para todo $x \in l_2$, então P_r converge pontualmente para P . Como $P_r \in P(kl_2; l_2)$ para cada $r \in \mathbb{N}$, segue do teorema 2.42 que $P \in P(kl_2; l_2)$.

Afirmamos que $P_r(B_{l_2})$ é compacto para todo $r \in \mathbb{N}$. De fato, sejam $r \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_n \subset P_r(B_{l_2})$. Então existe uma seqüência $(x_n)_n \subset B_{l_2}$ tal que $P_r(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como l_2 é reflexivo, pelo teorema 1.35, B_{l_2} é w -compacto. Assim existe uma

subseqüência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(x_{n_k})_k$ converge fracamente para $x \in l_2$. Conseqüentemente a seqüência $(P_r(x_{n_k}))_k$ converge em l_2 e portanto $P_r(B_{l_2})$ é compacto.

Agora vamos verificar que P é w -compacto. Para tal, verificaremos que P_r converge uniformemente para P . Seja $x \in l_2$ tal que $\|x\| \leq 1$. Então

$$\begin{aligned}\|P(x) - P_r(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i \pi_i^k(x) \right\|^2 \leq \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |\pi_i^k(x)|^2 \\ &\leq \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |x_i^k|^2 \leq \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \|x\|^{2k} \leq \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Conseqüentemente } \|P - P_r\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x) - P_r(x)\| \leq \left(\sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sum_{i=r_0+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Logo $\|P - P_r\| < \varepsilon$ para qualquer $r > r_0$, ou seja, P_r converge uniformemente para P .

Finalmente provaremos que $P \in P_{wk}(^k l_2; l_2)$. Seja $(y_n)_n \subset P(B_{l_2})$. Então existe uma seqüência $(x_n)_n$ em B_{l_2} tal que $P(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sendo que $(P_r)_r$ converge uniformemente para P , dado $\varepsilon > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que $\|P - P_{r_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $P_{r_0}(B_{l_2})$ é compacto, existe uma subseqüência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $(P_{r_0}(x_{n_j}))_j$ converge para $y_{r_0} \in l_2$. Conseqüentemente existe $j_{r_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{r_0}(x_{n_j}) - y_{r_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para qualquer $j > j_{r_0}$. Assim para $j > j_{r_0}$

$$\begin{aligned}\|P(x_{n_j}) - y_{r_0}\| &\leq \|P(x_{n_j}) - P_{r_0}(x_{n_j})\| + \|P_{r_0}(x_{n_j}) - y_{r_0}\| \\ &\leq \|P - P_{r_0}\| \|x_{n_j}\|^k + \|P_{r_0}(x_{n_j}) - y_{r_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Logo $P(B_{l_2})$ é w -seqüencialmente compacto e pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian), $P(B_{l_2})$ é w -compacto e conseqüentemente P é w -compacto.

Nem todos os polinômios k -homogêneos são w -compactos, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.48 Para $k \geq 2$, definimos $Q : l_2 \rightarrow l_1$ por $Q((x_n)_n) = (x_n^k)_n$ para todo $(x_n)_n \in l_2$. Claramente Q é um polinômio k -homogêneo, pois existe $T \in L(^k l_2; l_1)$ definido por

$$T((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n) = (x_n^{[1]} \cdots x_n^{[k]})_n$$

para qualquer $((x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n) \in l_2^k$ tal que

$$Q((x_n)_n) = T((x_n)_n, \dots, (x_n)_n)$$

para qualquer $(x_n)_n \in l_2$.

Vamos supor que Q é w -compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja e_n o elemento da base canônica de l_2 . Então para o conjunto limitado $W = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos que

$$\overline{Q(W)}^w = \overline{\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^w$$

é w -compacto. Como $(e_n)_n \subset Q(W)$, existe uma subsequência $(e_{n_k})_k$ w -convergente em l_1 . Usando que $l'_1 = l_\infty$, temos que, para qualquer $(b_n)_n \in l_\infty$, existe $\varphi \in l'_1$ tal que $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$ para todo $(x_n)_n \in l_1$. Consideremos, agora, uma seqüência $(b_n)_n \in l_\infty$ tal que

$$b_{n_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ par} \\ -1 & \text{se } k \text{ ímpar} \end{cases}, \text{ assim } \varphi(e_{n_k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ par} \\ -1 & \text{se } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo $(\varphi(e_{n_k}))_k$ não é convergente, isto é, $(e_{n_k})_k$ não é w -Cauchy em l_1 . Absurdo, pois $(e_{n_k})_k$ é w -convergente em l_1 . Portanto Q não é w -compacto.

Proposição 2.49 *Sejam X, Y espaços de Banach e $P \in P_a(kX; Y)$, onde $k \in \mathbb{N}_o$. Então P é w -compacto (respectivamente compacto) se e somente se P leva a bola unitária fechada de X em um conjunto w -relativamente compacto (respectivamente relativamente compacto) de Y .*

Demonstração: Análoga à prova da proposição 2.9 . ■

A seguir relacionamos os polinômios k -homogêneos w -compactos com as aplicações multilineares simétricas w -compactas.

Teorema 2.50 *Sejam X e Y espaços de Banach. Sejam $P : X \rightarrow Y$, um polinômio k -homogêneo, para $k \in \mathbb{N}_o$ e T a aplicação k -linear simétrica associada a P . Então P é w -compacto se e somente se T é w -compacta.*

Demonstração: Sejam $P \in P_a(kX; Y)$ e $T \in L_{as}(kX; Y)$ tal que $P(x) = T(x, \dots, x)$ para qualquer $x \in X$.

Primeiramente, vamos supor que T é w -compacta. Como $P(B_X) \subset T(B_X \times \dots \times B_X)$, temos que

$$\overline{P(B_X)}^w \subset \overline{T(B_X \times \dots \times B_X)}^w. \quad (1)$$

Como $\overbrace{B_X \times \dots \times B_X}^{k\text{-vezes}} \subset X^k$ é limitado e T é w -compacta, segue que $\overline{T(B_X \times \dots \times B_X)}^w$ é w -compacto. Logo $\overline{P(B_X)}^w$ é w -compacto .

Por outro lado, vamos supor que P é um polinômio w -compacto. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos $x_n = (x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) \in B_{X^k}$.

Como T é uma aplicação k -linear simétrica, segue da fórmula de polarização que

$$T(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)^k.$$

Para cada k -upla $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ tal que $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, \dots, k$, consideremos

$$\begin{array}{l} y_1 = \varepsilon_1 x_1^{[1]} + \cdots + \varepsilon_k x_1^{[k]} \\ y_2 = \varepsilon_1 x_2^{[1]} + \cdots + \varepsilon_k x_2^{[k]} \\ \vdots \\ y_n = \varepsilon_1 x_n^{[1]} + \cdots + \varepsilon_k x_n^{[k]} \\ \vdots \end{array}$$

Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\|y_n\| \leq \|x_n^{[1]}\| + \cdots + \|x_n^{[k]}\| \leq k,$$

ou seja, $(y_n)_n \subset k B_X$. Como P é w -compacto temos que $P(k B_X)$ é w -seqüencialmente compacto. Logo existe uma subsequência $(y_{n_i})_i$ de $(y_n)_n$ tal que

$$(P(y_{n_l}))_l = (T(\varepsilon_1 x_{n_l}^{[1]} + \cdots + \varepsilon_k x_{n_l}^{[k]})^k)_l$$

é w -convergente em Y . Assim para qualquer $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ fixo existe uma subsequência $(x_{n_l})_l$ de $(x_n)_n$ tal que $(P(\varepsilon_1 x_{n_l}^{[1]} + \dots + \varepsilon_k x_{n_l}^{[k]}))_l$ é w -convergente em Y (1).

Consideremos $(x_{n_j})_j$ a subsequência de $(x_n)_n$ que satisfaz (1) para toda k -upla $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ tal que $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Então

$$T(x_{n_j}) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k P(\varepsilon_1 x_{n_j}^{[1]} + \cdots + \varepsilon_k x_{n_j}^{[k]})$$

é w -convergente em Y .

Assim $T(B_{X^*})$ é w -seqüencialmente compacto e pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) T é w -compacta. ■

Fazendo as devidas modificações na demonstração acima, podemos provar que P é compacto se e somente se T é compacta.

Corolário 2.51 *Todo polinômio k -homogêneo w -compacto é contínuo.*

Demonstração: Sejam $P : X \rightarrow Y$ um polinômio k -homogêneo w -compacto associado a $T \in L_{as}(^k X; Y)$. Pelo teorema 2.50 temos que T é w -compacta, logo T é contínua, e pelo teorema 2.37, P também é contínuo. ■

Denotamos por $P_{wk}(^k X; Y)$ o subespaço de $P(^k X; Y)$ formado pelos polinômios k -homogêneos w -compactos.

Definição 2.52 Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um polinômio, $P : X \rightarrow Y$ é w -compacto (compacto) se leva conjuntos limitados de X em conjuntos w -relativamente compactos (relativamente compactos) em Y .

A seguir damos critérios para que um polinômio seja w -compacto.

Proposição 2.53 Sejam X, Y espaços de Banach e $P \in P_a(X; Y)$. Então as seguintes condições são equivalentes.

- (i) P é w -compacto ;
- (ii) P leva a bola unitária fechada de X em um conjunto w -seqüencialmente compacto;
- (iii) $P = \sum_{k=0}^m P_k$, onde P_k é um polinômio k -homogêneo w -compacto ($k = 0, 1, 2, \dots, m$).

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $P = \sum_{k=0}^m P_k$, onde P_k é o polinômio k -homogêneo associado a $T_k \in L_{as}(^k X; Y)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $P_0 = 0$, pois caso contrário podemos considerar o polinômio $P - P_0$.

Pela proposição 2.34 temos que

$$\frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P_k(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = \begin{cases} T_m(x_1, \dots, x_m) & : k = m \\ 0 & : k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

$$\text{Logo } \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P_k(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) \right) = T_m(x_1, \dots, x_m)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} \left(\sum_{k=1}^m P_k(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) \right) = T_m(x_1, \dots, x_m)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = T_m(x_1, \dots, x_m). \quad (1)$$

Vamos provar que T_m é w -compacta. Sejam B_{X^m} a bola unitária fechada de X^m e $(x_n)_n = (x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[m]})_n \subset B_{X^m}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$y_n = (y_n^{[1]}, \dots, y_n^{[m]}) = \left(\frac{x_n^{[1]}}{m}, \dots, \frac{x_n^{[m]}}{m} \right) \subset B_{X^m}.$$

Por (1), segue que

$$T_m(y_n) = T_m(y_n^{[1]}, \dots, y_n^{[m]}) = \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(y_n^{[i_1]} + \dots + y_n^{[i_r]}). \quad (2)$$

Para cada $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$ temos que

$$\|y_n^{[i_1]} + y_n^{[i_2]} + \dots + y_n^{[i_r]}\| \leq \|y_n^{[i_1]}\| + \|y_n^{[i_2]}\| + \dots + \|y_n^{[i_r]}\| \leq r \frac{1}{m} \leq 1,$$

pois $r \leq m$. Logo $(y_n^{[i_1]} + y_n^{[i_2]} + \dots + y_n^{[i_r]}) \subset B_X$ e, por (ii), existe uma subsequência $(y_{n_j}^{[i_1]} + y_{n_j}^{[i_2]} + \dots + y_{n_j}^{[i_r]})_j$ de $(y_n^{[i_1]} + y_n^{[i_2]} + \dots + y_n^{[i_r]})_n$ tal que

$$(P(y_{n_j}^{[i_1]} + y_{n_j}^{[i_2]} + \dots + y_{n_j}^{[i_r]}))_j$$

é w -convergente em Y . (3)

Seja $(y_{n_j})_j$ uma subsequência de $(y_n)_n$ que satisfaz (3) para cada $1 \leq r \leq m$ e cada $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$. Assim, segue que

$$\frac{1}{m!} \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m} P(y_{n_j}^{[i_1]} + y_{n_j}^{[i_2]} + \dots + y_{n_j}^{[i_r]})$$

é w -convergente em Y , pois todos os termos da soma são fracamente convergentes. Logo $(T_m(y_{n_j}))_j$ é w -convergente.

Como $T_m(y_{n_j}) = \frac{1}{m^m} T_m(x_{n_j}^{[1]}, \dots, x_{n_j}^{[m]})$, temos que $T_m(x_{n_j}^{[1]}, \dots, x_{n_j}^{[m]})$ é w -convergente em Y , conseqüentemente $T_m(B_{X^m})$ é w -seqüencialmente compacto. Assim, pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) concluímos que T_m é w -compacto e, pelo teorema 2.50, segue que P_m é w -compacto.

Agora, como $(P - P_m)(B_X)$ é w -seqüencialmente compacto, repetindo o processo, temos que $P_{m-1}, \dots, P_1$ são w -compactos.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja M um subconjunto limitado em X . Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em M . Como P_0 é w -compacto, $P_0(M)$ é w -seqüencialmente compacto. Logo existe uma subsequência $(x_{n_{k_0}})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(P_0(x_{n_{k_0}}))_k$ é w -convergente em Y . Como P_1 é w -compacto, existe uma subsequência $(x_{n_{k_1}})_k$ de $(x_{n_{k_0}})_k$ tal que $(P_1(x_{n_{k_1}}))_k$ é w -convergente em Y . E assim sucessivamente até P_m . Logo encontramos uma subsequência $(x_{n_{k_m}})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(P_i(x_{n_{k_m}}))_k$ é w -convergente em Y para todo $i =$

$1, 2, \dots, m$. Conseqüentemente

$$P(x_{n_{km}}) = P_0(x_{n_{km}}) + P_1(x_{n_{km}}) + \dots + P_m(x_{n_{km}})$$

é w -convergente em Y .

Portanto $P(M)$ é w -seqüencialmente compacto, e pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) P é w -compacto . ■

Podemos provar uma proposição análoga à proposição 2.53 para polinômios compactos fazendo as adaptações necessárias.

Vamos denotar por $P_{wk}(X; Y)$ o subespaço de $P(X; Y)$ formado por todos os polinômios w -compactos.

Capítulo 3

Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial

Este capítulo consiste basicamente em apresentar as propriedades de Dunford-Pettis e de Dunford-Pettis polinomial. Veremos também que essas propriedades são equivalentes, e apresentaremos alguns resultados envolvendo essas propriedades.

3.1 Propriedade de Dunford-Pettis

Definição 3.1 Dizemos que um espaço de Banach X tem a propriedade de Dunford-Pettis se, dado qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear w -compacta $T : X \rightarrow Y$, T aplica seqüências w -Cauchy em X sobre seqüências de Cauchy em Y .

Na seqüência deste trabalho usaremos a notação *propriedade DP* para referir-se a propriedade de Dunford-Pettis.

Teorema 3.2 Seja X um espaço de Banach. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) X tem a propriedade DP;
- (b) dado qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear w -compacta $T : X \rightarrow Y$, T aplica seqüências w -Cauchy em seqüências convergentes;
- (c) dado qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear w -compacta $T : X \rightarrow Y$, T aplica seqüências w -convergentes para zero em seqüências convergentes para zero, isto é, qualquer aplicação w -compacta é w -seqüencialmente contínua;
- (d) a condição (c) é satisfeita para $Y = c_0$;

- (e) se $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ são seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$;
- (f) se $(x_n)_n$ é uma seqüência w -Cauchy em X e $(x_n^*)_n$ é uma seqüência w -convergente para zero em X' , então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$;
- (g) se $(x_n)_n$ é uma seqüência w -convergente para zero em X e $(x_n^*)_n$ é w -Cauchy em X' , então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$;
- (h) se $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ são seqüências w -Cauchy em X e X' respectivamente, então existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n)$.

Demonstração: (a) $\Leftrightarrow$ (b) Trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sejam Y um espaço de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta. Consideremos $(x_n)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X , então $(x_n)_n$ é w -Cauchy. Pela hipótese, existe $y \in Y$ tal que $T(x_n) \rightarrow y$, e como $(T(x_n)) \xrightarrow{w} 0$, temos que $y = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sejam Y um espaço de Banach, $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta e $(x_n)_n$ uma seqüência w -Cauchy em X . Suponhamos por absurdo que $(T(x_n))_n$ não é uma seqüência de Cauchy, ou seja, existem duas seqüências de índices $\{n'_j\}_{j=1}^\infty$, $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ e $\varepsilon_o > 0$ tais que

$$\|T(x_{n_j}) - T(x_{n'_j})\| > \varepsilon_o$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_n$ é uma seqüência w -Cauchy, $(x_{n'_j} - x_{n_j})_j$ é w -convergente para zero, e pela hipótese, temos que $(T(x_{n'_j} - x_{n_j}))_j$ converge a zero. Então para $\varepsilon_o > 0$, encontrado acima, existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T(x_{n_j} - x_{n'_j})\| = \|T(x_{n_j}) - T(x_{n'_j})\| < \varepsilon_o$$

para qualquer $j > j_o$. Absurdo, pois $\|T(x_{n_j}) - T(x_{n'_j})\| > \varepsilon_o$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Logo $(T(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy. Como Y é completo, $(T(x_n))_n$ é uma seqüência convergente.

(c) $\Rightarrow$ (d) Trivial.

(d) $\Rightarrow$ (e) Sejam $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente. Definimos $T : X \rightarrow c_o$ por

$$T(x) = (x_n^*(x))_n$$

para todo $x \in X$. Assim, pelo exemplo 1.46, temos que $T \in L_{wk}(X, c_o)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|T(x_n)\| = \sup_m |x_m^*(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)|$$

e, por hipótese, $(T(x_n))_n$ converge para zero, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.

(e) $\Rightarrow$ (f) Sejam $(x_n)_n$ uma seqüência w -Cauchy em X e $(x_n^*)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X' . Suponhamos por absurdo que $(x_n^*x_n)_n$ não converge para zero. Então existe uma subsequência $(x_{n_k}^*x_{n_k})_k$ de $(x_n^*x_n)_n$ tal que $|x_{n_k}^*x_{n_k}| > \delta$ para algum $\delta > 0$ e qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Como $x_{n_k}^* \xrightarrow{w} 0$, temos que $x_{n_k}^*(x) \rightarrow 0$ para cada $x \in X$. Então para $x = x_1$ existe $k_1 > 0$ tal que $|x_{n_{k_1}}^*(x_1)| \leq \frac{\delta}{2}$. Para $x = x_2$ existe $k_2 > k_1$ tal que $|x_{n_{k_2}}^*(x_2)| \leq \frac{\delta}{2}$. E assim sucessivamente. Portanto existe uma subsequência $(x_{n_{k_i}}^*)_i$ de $(x_n^*)_n$ tal que

$$|x_{n_{k_i}}^*(x_i)| < \frac{\delta}{2}$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$.

Agora como $(x_n)_n$ é w -Cauchy, temos que $(x_{n_{k_i}} - x_i) \xrightarrow{w} 0$. Assim segue da hipótese que $|x_{n_{k_i}}^*(x_{n_{k_i}} - x_i)| < \frac{\delta}{4}$ para i suficientemente grande. Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \delta &< |x_{n_{k_i}}^*x_{n_{k_i}}| = |x_{n_{k_i}}^*(x_{n_{k_i}} - x_i) + x_{n_{k_i}}^*(x_i)| \\ &\leq |x_{n_{k_i}}^*(x_{n_{k_i}} - x_i)| + |x_{n_{k_i}}^*(x_i)| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} \end{aligned}$$

para i suficientemente grande, e assim obtemos uma contradição.

(f) $\Rightarrow$ (e) Sejam $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente. Então $(x_n)_n$ é w -Cauchy e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ e pelo item (f) concluímos que $\lim_n x_n^*x_n = 0$.

(e) $\Leftrightarrow$ (g) Análoga à prova (e) $\Leftrightarrow$ (f).

(e) $\Rightarrow$ (h) Sejam $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -Cauchy em X e X' respectivamente. Suponhamos por absurdo que $(x_n^*x_n)_n$ não é uma seqüência de Cauchy, isto é, existem duas seqüências de índices $(n_k)_k$, $(n'_k)_k$ e $\varepsilon_o > 0$ tais que

$$|x_{n_k}^*x_{n_k} - x_{n'_k}^*x_{n'_k}| > \varepsilon_o$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ são seqüências w -Cauchy, temos que $(x_{n_k} - x_{n'_k})_k$ e $(x_{n_k}^* - x_{n'_k}^*)_k$ são w -convergentes para zero.

Assim segue da hipótese que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n'_k}^*(x_{n_k} - x_{n'_k})| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} |(x_{n_k}^* - x_{n'_k}^*)(x_{n_k})| = 0$.

Agora como

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k}^*x_{n_k} - x_{n'_k}^*x_{n'_k}| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |(x_{n_k}^* - x_{n'_k}^*)(x_{n_k})| + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |x_{n'_k}^*(x_{n_k} - x_{n'_k})|,$$

temos que $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k}^*x_{n_k} - x_{n'_k}^*x_{n'_k}| = 0$. Absurdo, pois $|x_{n_k}^*x_{n_k} - x_{n'_k}^*x_{n'_k}| > \varepsilon_o$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n^*x_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{IK}$. Como $\mathbb{IK}$ é completo, segue que $(x_n^*x_n)_n$ é uma seqüência convergente.

(h) $\Rightarrow$ (e) Sejam $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente. Então ambas são w -Cauchy, e por (h), existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* x_n = M$. Suponhamos que $M \neq 0$. Vamos definir

$$y_k = \begin{cases} x_n & : k = 2n \\ 0 & : k = 2n - 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad y_k^* = \begin{cases} x_n^* & : k = 2n \\ 0 & : k = 2n - 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $(y_k)_k$ e $(y_k^*)_k$ são seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente.

Como

$$y_k^*(y_k) = \begin{cases} x_n^*(x_n) & : k = 2n \\ 0 & : k = 2n - 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n}^*(y_{2n}) = M \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n-1}^*(y_{2n-1})$. Então não existe $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k^*(y_k)$, contrariando (h).

(g) $\Rightarrow$ (c) Sejam Y espaço de Banach, $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta e $(x_n)_n$ seqüência w -convergente para zero em X . Vamos supor por absurdo que $T(x_n)_n \not\rightarrow 0$. ou seja, existem $\delta > 0$ e uma subsequência de $(x_n)_n$, que por abuso de notação denotaremos por $(x_n)_n$, tais que $\|T(x_n)\| > \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Pelo corolário 1.12, existe $y_n^* \in Y'$ tal que $\|y_n^*\| = 1$ e $y_n^*(T(x_n)) = \|T(x_n)\|$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Seja $W = \{x_n^* \in X' : x_n^* = T^*(y_n^*) : n \in \mathbb{N}\}$. Como T^* é w -compacto (ver teorema 1.44) e $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, W é w -seqüencialmente compacto.

Assim, dado $(x_n^*)_n$ uma seqüência em W , existe uma subsequência $(x_{n_k}^*)_k$ de $(x_n^*)_n$ que é w -convergente em X' , logo $(x_{n_k}^*)_k$ é w -Cauchy. Como por hipótese $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^* x_{n_k} = 0$ e

$$x_{n_k}^* x_{n_k} = (T^*(y_{n_k}^*))(x_{n_k}) = y_{n_k}^*(T(x_{n_k})) = \|T(x_{n_k})\|,$$

segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(x_{n_k})\| = 0$. Absurdo, pois $\|T(x_{n_k})\| > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.3 Se X é um espaço de Banach com a propriedade DP, então, para quaisquer espaços de Banach Y_1 e Y_2 e quaisquer aplicações lineares w -compactas $T_1 : Y_1 \rightarrow X$ e $T_2 : X \rightarrow Y_2$, a composição $T_2 \circ T_1$ é compacta.

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em B_{Y_1} . Como T_1 é w -compacta, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(T_1(x_{n_k}))_k$ é w -convergente em X . Como $T_2 : X \rightarrow Y_2$ também é w -compacta e X tem a propriedade DP, $(T_2(T_1(x_{n_k})))_k$ é convergente em Y_2 . Portanto $T_2 \circ T_1$ é compacta. ■

Corolário 3.4 Um espaço de Banach reflexivo X tem a propriedade DP se e somente se $\dim X < \infty$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja X um espaço de Banach reflexivo tal que $\dim X < \infty$. Sejam Y espaço de Banach e $T \in L_{wk}(X; Y)$. Como $\dim X < \infty$, segue da proposição 1.39 que T é compacta. Consequentemente, pela proposição 1.38, T é w -seqüencialmente contínua, e portanto pelo teorema 3.2 (c), X tem a propriedade DP.

($\Rightarrow$) Sejam X um espaço de Banach reflexivo com a propriedade DP, Y um espaço de Banach qualquer e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta. Pelo teorema 3.2, T é w -seqüencialmente contínua. Como X é reflexivo, segue da proposição 1.38, que T é compacta.

Assim para qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear w -compacta $T : X \rightarrow Y$, temos que T é compacta.

Agora consideremos $Y = X$ e $T = Id$ a função identidade de X em X . Como X é reflexivo, segue da proposição 1.43 que Id é w -compacta, e assim Id é compacta, ou seja, B_X é compacto. Portanto $\dim X < \infty$. ■

O próximo exemplo é uma consequência imediata do corolário anterior.

Exemplo 3.5 Considere $X = l_p$, para $1 < p < \infty$. Como X é reflexivo e $\dim X = \infty$, X não tem a propriedade DP.

Corolário 3.6 Se X é um espaço de Banach com a propriedade de Schur, então X tem a propriedade DP.

Demonstração: Sejam Y um espaço de Banach, $T \in L_{wk}(X; Y)$ e $(x_n)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X . Assim a seqüência $(x_n)_n$ converge para zero em X . Como T é contínua, $(T(x_n))_n$ converge para zero. Logo X tem a propriedade DP. ■

Vimos no teorema 1.32, que l_1 tem a propriedade de Schur. Assim pelo corolário acima, l_1 tem a propriedade DP.

Corolário 3.7 Seja X um espaço de Banach. Se X' tem a propriedade DP, então X também tem a propriedade DP.

Demonstração: Sejam $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente. Seja $C : X \rightarrow X''$ a função canônica definida por $C(x) = \tilde{x}$ para todo $x \in X$. Como $C \in L(X; X'')$ e $x_n \xrightarrow{w} 0$, temos que $C(x_n) = \tilde{x}_n \xrightarrow{w} 0$ em X'' , consequentemente $\tilde{x}_n(x_n^*) = x_n^*(x_n) \rightarrow 0$. Agora do teorema 3.2 (e), segue que X tem a propriedade DP. ■

Exemplo 3.8 Seja $X = c_o$. Como $c_o' \cong l_1$, segue que X' tem a propriedade DP. Assim usando o corolário acima temos que c_o tem a propriedade DP.

Vamos mostrar através de um exemplo que a recíproca do corolário 3.7 não vale. Para tal vamos provar o seguinte lema.

Lema 3.9 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade DP. Então todo subespaço complementado de X tem a propriedade DP.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach com a propriedade DP. Seja Z um subespaço complementado de X . Assim existe uma projeção $\pi \in L(X; Z)$.

Consideremos agora Y um espaço de Banach qualquer, $T : Z \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta e $(z_n)_n$ uma seqüência em Z tal que $z_n \xrightarrow{w} 0$. Pela proposição 1.43(b), $T \circ \pi : X \rightarrow Y$ é w -compacta. Como $z_n \xrightarrow{w} 0$ em Z , então $z_n \xrightarrow{w} 0$ em X , uma vez que dado qualquer $x^* \in X'$ temos $x^*|_Z \in Z'$. Assim usando o fato que X tem a propriedade DP, segue que $(T \circ \pi(z_n))_n$ converge para zero em Y . Agora como

$$(T \circ \pi)(z_n) = T(\pi(z_n)) = T(z_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $(T(z_n))_n$ converge para zero em Y . Logo Z tem a propriedade DP. ■

O próximo exemplo foi mostrado por Stegall em [33].

Exemplo 3.10 Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $l_2^{(n)}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a norma de l_2 . Seja $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_2^{(n)} \right)_1$, isto é, cada $x \in X$ é tal que $x = (x^{(n)})_n$, onde $x^{(n)} \in l_2^{(n)}$ e $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(n)})^2}$.

É claro que X é um espaço de Banach. Vamos mostrar que X tem a propriedade DP, mas X' não tem a propriedade DP.

Para verificar que X tem a propriedade DP, vamos considerar os conjuntos

$$D_1 = \{1, -1\}, D_2 = \{(1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (1, 1)\}, \dots,$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \{1, -1\}\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos indicar os elementos de D_n por $\varepsilon_k^{(n)}$, onde $k = 1, \dots, 2^n$.

Definimos a aplicação $T_1 : X \rightarrow l_1$ por:

$$T_1(x) = T_1((x^{(n)})_n) = \left(\frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^{(1)}, x^{(1)} \rangle, \frac{1}{2} \langle \varepsilon_2^{(1)}, x^{(1)} \rangle, \frac{1}{2^2} \langle \varepsilon_1^{(2)}, x^{(2)} \rangle, \frac{1}{2^2} \langle \varepsilon_2^{(2)}, x^{(2)} \rangle, \right. \\ \left. \frac{1}{2^2} \langle \varepsilon_3^{(2)}, x^{(2)} \rangle, \frac{1}{2^2} \langle \varepsilon_4^{(2)}, x^{(2)} \rangle, \frac{1}{2^3} \langle \varepsilon_1^{(3)}, x^{(3)} \rangle, \dots, \dots \right)$$

onde $\langle \varepsilon_k^{(n)}, x^{(n)} \rangle$ é o produto interno em $l_2^{(n)}$.

Observemos que $T_1(x) \in l_1$ para cada $x \in X$. De fato, pela desigualdade de Khintchine (ver [32], p.425 e p.600) existem as constantes $M > 0$ e $N > 0$ tais que

$$M\|x^{(n)}\|_2 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} |\langle \varepsilon_k^{(n)}, x^{(n)} \rangle| \leq N\|x^{(n)}\|_2$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$M\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} M\|x^{(n)}\|_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} |\langle \varepsilon_k^{(n)}, x^{(n)} \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} N\|x^{(n)}\|_2 = N\|x\|$$

e conseqüentemente $\|T_1(x)\| < \infty$ e $M\|x\| \leq \|T_1(x)\| \leq N\|x\|$. (1)

É claro que T_1 é uma aplicação linear. Daí, por (1), concluímos que T_1 é um isomorfismo sobre a sua imagem. Assim X é isomorfo a um subespaço de l_1 , e conseqüentemente X tem a propriedade de Schur. Portanto X tem a propriedade DP.

Agora para verificar que X' não tem a propriedade DP, vamos definir a aplicação linear $T_2 : X \rightarrow l_2$ por

$$T_2(x) = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \dots, x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + \dots, x_n^{(n)} + x_n^{(n+1)} + \dots, \dots)$$

onde $x = (x_1^{(1)}, (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}), \dots) \in X$. Afirmamos que T_2 é contínua. De fato, para $x = (x_1^{(1)}, (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}), \dots) \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \|T_2(x)\|_2 &= \|T_2(x_1^{(1)}, (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}), \dots)\|_2 \\ &= \|(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + \dots, x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + \dots, \dots)\|_2 \\ &\leq \|(x_1^{(1)}, 0, \dots)\|_2 + \|(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, 0, \dots)\|_2 + \|(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, 0, \dots)\|_2 + \dots \\ &= |x_1^{(1)}| + \|(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})\| + \|(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})\| + \dots = \|x\|. \end{aligned}$$

Vamos verificar que $T_2^*(l_2)$ é um subespaço complementado em X' . Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja Y_i o espaço vetorial gerado por $e_1, \dots, e_i$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de l_2 . Então

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = l_2.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação linear $S_i : Y_i \rightarrow X$ definida por

$$S_i(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i) = (0, (0, 0), (0, 0, 0), \dots, \overbrace{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)}^{i\text{-ésimo}}, (0, \dots, 0), \dots),$$

para todo $(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i) \in Y_i$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} T_2 \circ S_i(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i) &= T_2(0, (0, 0), (0, 0, 0), \dots, (\alpha_1, \dots, \alpha_i), (0, \dots, 0), \dots) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i, \end{aligned}$$

para todo $(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i) \in Y_i$ e para cada $i \in \mathbb{N}$. Portanto $T_2 \circ S_i = Id_{Y_i}$, onde Id_{Y_i} é a função identidade definida em Y_i .

Além disso,

$$\begin{aligned} \|S_i\| &= \sup\{\|S_i(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i)\| : \|(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i)\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(0, (0, 0), \dots, (\alpha_1, \dots, \alpha_i), (0, \dots, 0), \dots)\| : \|(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_i e_i)\| \leq 1\} = 1 \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|S_i\| = 1 < \infty$.

Então, usando "The Principle of Local Selection" (ver [13], p.23), segue que T_2 é sobrejetora e $T_2^*(l_2)$ é um subespaço complementado em X' .

Vamos provar que $T_2^* : l_2 \rightarrow X'$ é injetora. Seja $r = (r_n)_n \in l_2$ tal que $T_2^*(r) = 0$. Então para qualquer $x \in X$, temos

$$(T_2^*(r))(x) = r \circ T_2(x) = 0.$$

Agora, como T_2 é sobrejetora para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $T_2(x_n) = e_n$. Assim para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$r \circ T_2(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i e_n^{[i]} = r_n = 0,$$

conseqüentemente T_2^* é injetora.

Desde que T_2^* é uma aplicação linear contínua e injetora, segue do teorema 1.10 (Aplicação Aberta), que $l_2 \cong T_2^*(l_2)$.

Suponhamos por absurdo que X' tem a propriedade DP. Então, pelo lema 3.9, o subespaço complementado de X' , $T_2^*(l_2)$ tem a propriedade DP. Absurdo, pois $T_2^*(l_2) \cong l_2$ e l_2 não tem a propriedade DP. Assim X' não tem a propriedade DP.

A seguir damos uma condição suficiente para que X' tenha a propriedade DP quando X tiver a propriedade DP.

Teorema 3.11 (Petthe e Thakare) *Seja X um espaço de Banach. Então X' tem a propriedade de Schur se e somente se X tem a propriedade DP e não contém cópias de l_1 .*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Vamos supor por absurdo que X' não tem a propriedade de Schur. Então existe $(x_k^*)_k$ uma sequência w -convergente para zero em X' , mas que não converge para zero. Logo existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(x_{k_n}^*)_n$ de $(x_k^*)_k$ tais que $\|x_{k_n}^*\| > \epsilon$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Agora consideremos $x_{k_n} \in X$ tal que

$$\|x_{k_n}\| \leq 1 \text{ e } \|x_{k_n}^*(x_{k_n})\| > \frac{\epsilon}{2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $(x_{k_n})_n$ é uma sequência limitada em X e $l_1 \not\hookrightarrow X$, pelo teorema 1.30 (Rosenthal), existe uma subsequência $(x_{k_{n_j}})_j$ de $(x_{k_n})_n$ que é w -Cauchy.

Assim $(x_{k_{n_j}})_j$ é uma sequência w -Cauchy e $(x_{k_{n_j}}^*)_j$ é w -convergente para zero, e como X tem a propriedade DP, segue do teorema 3.2, que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_{n_j}}^* x_{k_{n_j}} = 0$. Absurdo, pois $|x_{k_{n_j}}^* x_{k_{n_j}}| > \frac{1}{2}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Logo X' tem a propriedade de Schur.

($\Rightarrow$) Como X' tem a propriedade de Schur, segue que X' tem a propriedade DP, e conseqüentemente X tem a propriedade DP. Assim basta provar que $l_1 \not\hookrightarrow X$. Vamos supor, por absurdo, que $l_1 \hookrightarrow X$, então existe uma sequência $(u_n)_n \subset X$ equivalente a base canônica de l_1 .

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ as funções de Rademacher, isto é,

$$r_n(t) = \text{Sg}(\sin(2^{n-1}\pi t))$$

para cada $t \in [0, 1]$. Pelo teorema 1.51, $(r_n)_n \subset L_\infty[0, 1]$ é equivalente a base canônica do l_1 , então $(u_n)_n$ e $(r_n)_n$ são equivalentes. Assim podemos definir uma aplicação linear $S_1 : [u_n : n \in \mathbb{N}] \rightarrow L_\infty[0, 1]$ por

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} t_n r_n,$$

a qual é um isomorfismo sobre sua imagem. Logo, pelo teorema 1.50, S_1 admite uma extensão linear e contínua $S : X \rightarrow L_\infty[0, 1]$.

Pelo teorema 1.52 as funções de Rademacher $(r_n)_n \subset L_2[0, 1]$ formam um sistema ortonormal. Assim para cada $f \in L_\infty[0, 1] \subset L_2[0, 1]$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, r_n \rangle|^2 < \infty$, onde $\langle, \rangle$ é o produto interno em $L_2[0, 1]$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, r_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f \overline{r_n} d\mu \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f r_n d\mu \right|^2 < \infty,$$

concluimos que $\left(\int_0^1 f r_n d\mu\right)_n \in l_2$ para cada $f \in L_\infty[0, 1]$. Portanto, podemos definir uma aplicação linear $R : L_\infty[0, 1] \rightarrow l_2$ por

$$R(f) = \left(\int_0^1 f r_n\right)_n$$

para todo $f \in L_\infty[0, 1]$. Claramente R é contínua e $R(r_n) = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como l_2 é reflexivo, segue da proposição 1.43, que $L(L_\infty[0, 1]; l_2) = L_{wk}(L_\infty[0, 1]; l_2)$, conseqüentemente $R \in L_{wk}(L_\infty[0, 1]; l_2)$. Desde que $S \in L(X; L_\infty[0, 1])$, temos que $T = R \circ S \in L_{wk}(X; l_2)$ e $T(u_n) = e_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim a seqüência $(T(u_n))_n \subset l_2$ não converge, e portanto T não é uma aplicação compacta. Por outro lado, se considerarmos a seqüência $(y_n^*)_n \subset B_{l_2}$, como $T \in L_{wk}(X; l_2)$, temos que $T^*(B_{l_2})$ é w -relativamente compacto. Portanto existem $x^* \in X'$ e uma subseqüência $(y_{n_k}^*)_k$ de $(y_n^*)_n$ tais que $T^*(y_{n_k}^*) \xrightarrow{w} x^*$. Pela hipótese, X' tem a propriedade de Schur, então $T^*(y_{n_k}^*) \rightarrow x^*$, e portanto $T^*(B_{l_2})$ é relativamente compacto, o que é um absurdo. ■

Este teorema foi demonstrado por Pethe e Thakare em [26] e garante, em particular, que se X tem a propriedade DP e $l_1 \not\hookrightarrow X$, então X' também tem a propriedade DP.

O próximo resultado se encontra em [8] e fornece uma condição necessária e suficiente para que X' tenha a propriedade DP.

Proposição 3.12 *Seja X um espaço de Banach. O espaço X' tem a propriedade DP se e somente se para qualquer espaço de Banach Y e qualquer aplicação linear w -compacta $T : X \rightarrow Y$ tem a bitransposta w -seqüencialmente contínua.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja X um espaço de Banach tal que X' tem a propriedade DP. Sejam Y espaço de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta. Suponhamos que T^{**} não é w -seqüencialmente contínua. Então existe uma seqüência $(x_n^{**})_n$ w -convergente para zero em X'' tal que $(T^{**}(x_n^{**}))_n$ não converge para zero em Y'' , isto é, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma subseqüência de $(x_n^{**})_n$, a qual denotaremos sem perda de generalidade por $(x_n^{**})_n$, tais que $\|T^{**}(x_n^{**})\| \geq \varepsilon_0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Como T é w -compacta, pelo teorema 1.44, temos que $T^{**}(X'') \subset Y$, conseqüentemente $T^{**}(x_n^{**}) \in Y$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como $T^{**}(x_n^{**}) \neq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo corolário 1.12, existe $y_n^* \in Y'$ tal que $\|y_n^*\| = 1$ e $\|T^{**}(x_n^{**})\| = y_n^*(T^{**}(x_n^{**}))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Agora vamos provar que existe uma subseqüência $(T^*(y_{n_k}^*))_k$ de $(T^*(y_n^*))_n$ que é w -convergente e que nos fornecerá uma contradição. Seja $W = \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset Y'$. Então

W é limitado. Como $T^* : Y' \rightarrow X'$ é w -compacta, $\overline{T^*(W)}^w$ é w -compacto, conseqüentemente $T^*(W)$ é w -seqüencialmente compacto. Assim como $(T^*(y_n^*))_n \subset T^*(W)$, existe uma subsequência $(T^*(y_{n_k}^*))_k$ w -convergente em X' . Como $x_{n_k}^{**} \xrightarrow{w} 0$ em X'' e X' tem a propriedade DP, temos, pelo teorema 3.2 (g), que $x_{n_k}^{**}(T^*(y_{n_k}^*)) \rightarrow 0$.

Mas

$$y_{n_k}^*(T^{**}(x_{n_k}^{**})) = (T^{**}(x_{n_k}^{**}))(y_{n_k}^*) = (x_{n_k}^{**} \circ T^*)(y_{n_k}^*) = x_{n_k}^{**}(T^*(y_{n_k}^*)) \rightarrow 0.$$

Contradição, pois $\|T^{**}(x_n^{**})\| = y_n^*(T^{**}(x_n^{**})) \geq \varepsilon_0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Consideremos $(x_n^{**})_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X'' e X' respectivamente. Como $x_n^* \xrightarrow{w} 0$, temos que $x_n^*(x) \rightarrow 0$ para cada $x \in X$. Assim podemos definir $T \in L(X; c_0)$ por $T(x) = (x_n^*(x))_n$ para todo $x \in X$. Do exemplo 1.46, segue que T é w -compacta, então pela hipótese, T^{**} é w -seqüencialmente contínua. Portanto temos que $T^{**}(x_n^{**}) \rightarrow 0$, ou seja,

$$\|T^{**}(x_n^{**})\| = \sup_{\substack{\psi \in c'_0 \\ \|\psi\| \leq 1}} |(T^{**}(x_n^{**}))(\psi)| = \sup_{\substack{\psi \in c'_0 \\ \|\psi\| \leq 1}} |x_n^{**}(T^*(\psi))| \rightarrow 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $e_n \in l_1$, o n -ésimo vetor da base canônica de l_1 , então

$$|x_n^{**}(T^*(e_n))| \leq \sup_{\substack{\psi \in c'_0 \\ \|\psi\| \leq 1}} |x_n^{**}(T^*(\psi))|,$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{**}(T^*(e_n))| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\psi \in c'_0 \\ \|\psi\| \leq 1}} |x_n^{**}(T^*(\psi))| = 0.$$

Mas, para qualquer $x \in X$, temos $T^*(e_n)(x) = e_n(T(x)) = e_n((x_k^*(x))_k) = x_n^*(x)$, ou seja, $T^*(e_n) = x_n^*$.

Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{**}(x_n^*)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{**}(T^*(e_n))| = 0$ e pelo teorema 3.2, temos que X' tem a propriedade DP. ■

Apresentamos a seguir outros exemplos de espaços com a propriedade DP.

Já vimos que c_0 tem a propriedade DP. Na verdade todo subespaço fechado de c_0 tem a propriedade DP, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 3.13 *Todo subespaço fechado de c_0 tem a propriedade DP.*

Demonstração: Sejam X um subespaço fechado de c_0 , $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ seqüências w -convergentes para zero em X e X' respectivamente. Vamos supor por absurdo que $(x_n^*(x_n))_n$ não converge a zero. Então existem $\delta > 0$ e uma subsequência de $(x_n^*(x_n))_n$, que

por abuso de notação continuaremos a representar por $(x_n^*(x_n))_n$, tais que $|x_n^*(x_n)| > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos supor que $\|x_n^*\| \leq 1$. Então, pelo corolário 1.13,

$$\|x_n\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x_n)| \geq \|x_n^*(x_n)\| > \delta$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X \subset c_o$, vamos representar $x_n = (x_n^{[m]})_m$. Então para $n=1$, existe $k_1 > 0$ tal que $|x_1^{[m]}| \leq \frac{1}{2} \frac{\delta}{8}$ para qualquer $m > k_1$, isto é, $\sup_{k_1 < m} |x_1^{[m]}| \leq \frac{1}{2} \frac{\delta}{8}$.

Para cada $i = 1, \dots, k_1$, consideremos $\psi_i \in X'$ definido por $\psi_i(x) = x^{[i]}$ para todo $x = (x^{[1]}, x^{[2]}, \dots) \in c_o$. Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, temos que $\psi_i(x_n) \rightarrow 0$ para cada $i = 1, \dots, k_1$. Então existe $n'_i > 0$ tal que $|\psi_i(x_n)| \leq \frac{1}{2^2} \frac{\delta}{8}$ para cada $n > n'_i$.

Consideremos $N_1 = \max\{n'_1, \dots, n'_{k_1}\}$. Então $|\psi_i(x_n)| = |x_n^{[i]}| \leq \frac{1}{2^2} \frac{\delta}{8}$ para qualquer $n > N_1$ e qualquer $i = 1, \dots, k_1$, isto é, para qualquer $n > N_1$, temos

$$\sup_{1 \leq m \leq k_1} |x_n^{[m]}| \leq \frac{1}{2^2} \frac{\delta}{8}.$$

Seja $n_2 > N_1$ e escolhamos $k_2 > k_1$ tal que

$$\sup_{k_2 < m} |x_{n_2}^{[m]}| \leq \frac{1}{2^2} \frac{\delta}{8}.$$

Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, para cada $i = 1, \dots, k_2$ temos que $x_n^{[i]} \rightarrow 0$. Logo existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $N_2 > N_1$ e para qualquer $n > N_2$, temos

$$\sup_{1 \leq m \leq k_2} |x_n^{[m]}| \leq \frac{1}{2^3} \frac{\delta}{8}.$$

Seja $n_3 > N_2$ e escolhamos $k_3 > k_2$ tal que $\sup_{k_3 < m} |x_{n_3}^{[m]}| \leq \frac{1}{2^3} \frac{\delta}{8}$.

Assim sucessivamente, vamos obter 3 seqüências $(k_j)_j$, $(n_j)_j$ e $(N_j)_j$, onde $n_1 = 1$ e $k_0 = N_0 = 0$. Claramente, $(k_j)_j$ e $(N_j)_j$ são seqüências estritamente crescentes. Afirmamos que $(n_j)_j$ também é estritamente crescente. Para tal, basta observar que $n_j < N_j$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$, pois caso contrário,

$$\sup_{1 \leq m \leq k_j} |x_{n_j}^{[m]}| \leq \frac{1}{2^{j+1}} \frac{\delta}{8} \quad e \quad \sup_{k_j < m} |x_{n_j}^{[m]}| \leq \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8},$$

e conseqüentemente $\|x_{n_j}\| \leq \delta$. Absurdo, já que $\|x_n\| > \delta$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $N_{j-1} < n_j \leq N_j$ e como $(N_j)_j$ é estritamente crescente, segue que $(n_j)_j$ é estritamente crescente.

Estas 3 subsequências satisfazem as seguintes desigualdades:

$$(1) \sup_{k_j < m} |x_{n_j}^{[m]}| \leq \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$(2) \sup_{1 \leq m \leq k_j} |x_n^{[m]}| \leq \frac{1}{2^{j+1}} \frac{\delta}{8}, \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}, \forall n > N_j,$$

ou seja,

$$(3) \left\| \sum_{i=k_j+1}^{\infty} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| = \sup_{i \geq k_j+1} |x_{n_j}^{[i]}| \leq \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$(4) \left\| \sum_{i=1}^{k_j-1} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| = \sup_{1 \leq i \leq k_j-1} |x_{n_j}^{[i]}| \leq \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2.$$

Agora vamos definir para cada $j \in \mathbb{N}$, $y_j = \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} x_{n_j}^{[i]} e_i$. Como $\|x_{n_j}\| > \delta$ e por (3) e (4), $|x_{n_j}^{[i]}| < \delta$ para qualquer $i \geq k_j + 1$ ou $1 \leq i \leq k_{j-1}$, temos que

$$\|y_j\| = \sup_{k_{j-1}+1 \leq i \leq k_j} |x_{n_j}^{[i]}| > \delta > \frac{\delta}{2}, \quad (*)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Vamos verificar que $(y_j)_j$ é uma sequência básica de c_o , utilizando o teorema 1.22 (Nikolskii). Se $(a_j)_j$ é uma sequência em $\mathbb{IK}$ e m, l são inteiros positivos, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\| &= \sup_{1 \leq j \leq m} \{ \sup \{ |a_j x_{n_j}^{[i]}| : k_{j-1} + 1 \leq i \leq k_j \} \} \\ &\leq \sup_{1 \leq j \leq m+l} \{ \sup \{ |a_j x_{n_j}^{[i]}| : k_{j-1} + 1 \leq i \leq k_j \} \} = \left\| \sum_{j=1}^{m+l} a_j y_j \right\|. \end{aligned}$$

Portanto $\left\| \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{m+l} a_j y_j \right\| \quad (**).$

Afirmamos que $(x_{n_j})_j$ e $(y_j)_j$ são sequências básicas equivalentes de X e de c_o respectivamente. De fato, pelo teorema 1.26 basta verificar que $\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j - x_{n_j}\| \|y_j^*\| < 1$, onde y_j^* são os funcionais coeficientes da sequência básica $(y_j)_j$. Primeiramente vamos analisar $\|y_j^*\|$. Se $y \in [(y_j)_j]$ tal que $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, então para $j \geq 2$

$$|y_j^*(y)| = |a_j| = \left\| \sum_{i=1}^j a_i y_i - \sum_{i=1}^{j-1} a_i y_i \right\| \frac{1}{\|y_j\|}$$

$$\leq \frac{1}{\|y_j\|} \left(\left\| \sum_{i=1}^j a_i y_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} a_i y_i \right\| \right) \stackrel{(**)}{\leq} \frac{2\|y\|}{\|y_j\|}.$$

Como a desigualdade acima também vale para y_1^* , concluímos que $\|y_j^*\| \leq \frac{2}{\|y_j\|} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{4}{\delta}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$.

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j - x_{n_j}\| \|y_j^*\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\delta} \|y_j - x_{n_j}\| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\delta} \left\| \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} x_{n_j}^{[i]} e_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| \\ &= \frac{4}{\delta} \left\| \sum_{i=k_1+1}^{\infty} x_{n_1}^{[i]} e_i \right\| + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{4}{\delta} \left\| \sum_{i=1}^{k_{j-1}} x_{n_j}^{[i]} e_i + \sum_{i=k_j+1}^{\infty} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| \\ &\leq \frac{4}{\delta} \frac{1}{2} \frac{\delta}{8} + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{4}{\delta} \left\| \sum_{i=1}^{k_{j-1}} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| + \frac{4}{\delta} \left\| \sum_{i=k_j+1}^{\infty} x_{n_j}^{[i]} e_i \right\| \right) \\ &\leq \frac{1}{4} + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{4}{\delta} \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8} + \frac{4}{\delta} \frac{1}{2^j} \frac{\delta}{8} \right) = \frac{1}{4} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Portanto $(x_{n_j})_j$ e $(y_j)_j$ são seqüências básicas equivalentes de X e de c_0 respectivamente. Assim, pela proposição 1.25, $[(x_{n_j})_j]$ e $[(y_j)_j]$ são isomorfos. Mas pelo teorema 1.27, temos que $[(y_j)_j]$ e c_0 são isomorfos, conseqüentemente $[(x_{n_j})_j]$ e c_0 também são isomorfos.

Logo $\left(x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]} \right)_j$ pode ser visto como uma seqüência em l_1 . Como l_1 tem a propriedade de Schur e $x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]} \xrightarrow{w} 0$, temos que $x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]} \rightarrow 0$.

Desde que $x_n \xrightarrow{w} 0$, existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| < M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então

$$|x_{n_j}^*(x_{n_j})| \leq \|x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]}\| \|x_{n_j}\| \leq \|x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]}\| M.$$

Assim para j suficientemente grande, temos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_{n_j}^*(x_{n_j})| \leq M \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}^* \Big|_{[(x_{n_j})_j]}\| = 0.$$

Portanto $x_{n_j}^*(x_{n_j}) \rightarrow 0$. Absurdo, pois $|x_{n_j}^*(x_{n_j})| > \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$. ■

A demonstração da proposição anterior se encontra em [13]-p.25.

Seja K um espaço Hausdorff compacto. Iremos denotar por $C(K)$ o conjunto formado pelas funções contínuas de K em $\mathbb{K}$. O espaço vetorial $C(K)$ munido da norma do sup é um espaço de Banach. Provaremos que $C(K)$, tem a propriedade DP. Para tal utilizaremos o seguinte teorema que se encontra em [15]-p.493.

Teorema 3.14 *Sejam Y um espaço de Banach, K um espaço Hausdorff compacto e $T : C(K) \rightarrow Y$ uma aplicação linear w -compacta. Então existe uma medida vetorial σ -aditiva, m definida em $\mathcal{B}$, conjunto de Borel em K , e com valores em Y tal que:*

- (a) $y^* \circ m \in rca(K)$, para $y^* \in Y'$;
- (b) $T(f) = \int_K f(t) dm$, para $f \in C(K)$.

Demonstração: Pelo teorema 1.63 (Riesz), $C'(K) \cong rca(K)$. Assim, para cada $A \in \mathcal{B}$, definimos a aplicação linear $\varphi_A : C'(K) \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$\varphi_A(\mu) = \mu(A)$$

para todo $\mu \in C'(K) \cong rca(K)$.

Para verificar a continuidade de φ_A , consideremos $\mu \in C'(K) \cong rca(K)$. Então

$$|\varphi_A(\mu)| = |\mu(A)| \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A = \bigcup_{i=1}^n A_i \right\} \leq v(\mu, K) \stackrel{Riesz}{=} \|\mu\|.$$

Logo φ_A é contínua.

Seja $T : C(K) \rightarrow Y$ uma aplicação w -compacta. Segue do teorema 1.44 que $T^{**}(C''(K)) \subset Y$. Assim para $\varphi_A \in C''(K)$, temos que $T^{**}(\varphi_A) \in Y$.

Agora vamos definir $m : \mathcal{B} \rightarrow Y$ por $m(A) = T^{**}(\varphi_A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

A seguir iremos provar que m é uma medida vetorial. Para tal observemos que se $A, B \in \mathcal{B}$ e $\mu \in rca(K)$, então

$$\varphi_{(A \dot{\cup} B)}(\mu) = \mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B) = \varphi_A(\mu) + \varphi_B(\mu).$$

Logo $\varphi_{(A \dot{\cup} B)} = \varphi_A + \varphi_B$, e conseqüentemente

$$m(A \dot{\cup} B) = T^{**}(\varphi_{(A \dot{\cup} B)}) = T^{**}(\varphi_A + \varphi_B) = T^{**}(\varphi_A) + T^{**}(\varphi_B) = m(A) + m(B).$$

Agora vamos provar o item (a). Como $C'(K) \cong rca(K)$, para cada $y^* \in Y'$, existe $\mu_{y^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(y^*) = \mu_{y^*}$. Assim, para $y^* \in Y'$ e $A \in \mathcal{B}$, temos que

$$y^*(m(A)) = T^{**}(\varphi_A)(y^*) = \varphi_A(T^*(y^*)) = \varphi_A(\mu_{y^*}) = \mu_{y^*}(A).$$

Logo $y^* \circ m = \mu_{y^*} \in rca(K)$ para qualquer $y^* \in Y'$.

A medida vetorial $m : \mathcal{B} \rightarrow Y$ é σ -aditiva. De fato, seja $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $A_i \in \mathcal{B}$ tal que $A_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para cada $y^* \in Y'$, temos que

$$y^* \circ m(A) = \mu_{y^*}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{y^*}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y^* \circ m(A_i).$$

Então pelo teorema 1.36 (Orlicz-Pettis), $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ converge. Portanto

$$y^* \circ m(A) = y^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \right)$$

para qualquer $y^* \in Y'$. Assim $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Para cada $f \in C(K)$, temos que f é m -mensurável. Além disso, f é m -integrável. De fato, como f é contínua no compacto K , existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq |f(t)| \leq b$ para qualquer $t \in K$. Consequentemente $\inf\{c > 0 : m(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\}$ é finito, então pelo teorema 1.65, segue que f é m -integrável.

Agora vamos provar o item (b). Seja $y^* \in Y'$, pelo teorema 1.63 (Riesz), existe $\mu_{y^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(y^*)(f) = \int_K f d\mu_{y^*}$ para todo $f \in C(K)$. Uma vez que $\mu_{y^*} = y^* \circ m$, temos que $y^*(T(f)) = T^*(y^*)(f) = \int_K f d(y^* \circ m)$ para qualquer $f \in C(K)$. Como para qualquer $f \in C(K)$, f é m -integrável, pelo teorema 1.66, segue que $y^*(T(f)) = y^*(\int_K f dm)$ para qualquer $y^* \in Y'$. Logo $T(f) = \int_K f dm$ para qualquer $f \in C(K)$. ■

O próximo exemplo se encontra em [15]-p.494.

Exemplo 3.15 Seja K um espaço Hausdorff compacto, então $C(K)$ tem a propriedade DP. De fato, consideremos Y um espaço de Banach e $T \in L_{wk}(C(K); Y)$. Seja $(f_n)_n \subset C(K)$ uma seqüência w -Cauchy. Então existe $M > 0$, tal que $\|f_n\| \leq M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 3.14, existe uma medida vetorial σ -aditiva $m : \mathcal{B} \rightarrow Y$, tal que $T(f_n) = \int_K f_n(t) dm$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in K$, definimos $\psi_t \in C'(K)$ por $\psi_t(f) = f(t)$ para todo $f \in C(K)$. Como $(f_n)_n$ é w -Cauchy, $\psi_t(f_n) = f_n(t)$ é convergente. Portanto, podemos definir $f_o : K \rightarrow \mathbb{K}$, por $f_o(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ para cada $t \in K$.

Seja $g \in C(K)$ a função constante igual a M . Como $f_n, g \in C(K)$, pela prova do teorema 3.14, segue que f_n, g são m -mensuráveis. Além disso, para cada $t \in K$, temos que $|f_n(t)| \leq \|f_n\| \leq M = g(t)$, então pelo teorema 1.67, concluímos que f_o é m -integrável e $\int_K f_o dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)$. Logo $(T(f_n))_n$ é uma seqüência convergente e portanto $C(K)$ tem a propriedade DP.

Exemplo 3.16 Vamos provar que l_∞ tem a propriedade DP. Para isto, verificaremos que $l_\infty \approx C(\beta\mathbb{N})$, onde $(\beta, \beta\mathbb{N})$ é a compactificação de Stone – Čech de $\mathbb{N}$ com a topologia discreta.

Para cada $a = (a_n)_n \in l_\infty$, definimos a função contínua limitada $f_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ por $f_a(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\beta\mathbb{N}$ é o compactificado de Stone – Čech, existe uma função contínua $\beta f_a : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\beta f_a \circ \beta = f_a$.

Agora vamos definir $T : l_\infty \rightarrow C(\beta\mathbb{N})$ por $T(a) = \beta f_a$ para todo $a \in l_\infty$. Afirmamos que T é um isomorfismo. Primeiramente vamos verificar a linearidade de T . Para tal, consideremos $a = (a_n)_n, b = (b_n)_n \in l_\infty$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T(\lambda a + b)(\beta(n)) &= \beta f_{\lambda a + b} \circ \beta(n) = f_{\lambda a + b}(n) = \lambda a_n + b_n = \lambda f_a(n) + f_b(n) \\ &= \lambda \beta f_a \circ \beta(n) + \beta f_b \circ \beta(n) = \lambda T(a)(\beta(n)) + T(b)(\beta(n)). \end{aligned}$$

Como $\beta(\mathbb{N})$ é denso em $\beta\mathbb{N}$, temos

$$T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b).$$

Agora demonstraremos que T é sobrejetora. Para tal, consideremos $g \in C(\beta\mathbb{N})$. Seja f a função contínua e limitada dada por $f = g \circ \beta$. Para $a = (f(n))_n \in l_\infty$, temos que $\beta f_a \circ \beta = f_a = f$. Assim para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\beta f_a(\beta(n)) = f(n) = g(\beta(n)).$$

Uma vez que $\beta(\mathbb{N})$ é denso em $\beta\mathbb{N}$, temos que $\beta f_a = g$, e conseqüentemente $T(a) = \beta f_a = g$. Logo T é sobrejetora.

Finalmente vamos provar que T é uma isometria. Para $a = (a_n)_n \in l_\infty$, temos que

$$\|f_a\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_a(n)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \|a\|,$$

assim $\|\beta f_a\| = \|f_a\| = \|a\|$. Portanto T é uma isometria.

Como $\beta\mathbb{N}$ é compacto, pelo exemplo anterior, $C(\beta\mathbb{N})$ tem a propriedade DP, conseqüentemente l_∞ também tem a propriedade DP.

Para os próximos exemplos, necessitamos da definição a seguir.

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida positiva. Para $1 \leq p < \infty$, seja $L_p(\mu)$ o espaço vetorial formado pelas classes de equivalências, $[f : \int |f|^p < \infty]$, das funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{K}$, onde $g \in [f : \int |f|^p < \infty]$ se f e g coincidem quase sempre. O espaço $L_p(\mu)$ é um espaço de Banach munido da norma, $\|f\| = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ para cada $f \in L_p(\mu)$.

Analogamente, $L_\infty(\mu)$ representa o espaço vetorial formado pelas classe das funções mensuráveis, $[f : \text{ess sup}|f| < \infty]$, onde $\text{ess sup}|f| = \inf\{\alpha : |f| \leq \alpha \text{ q.s.}\}$. O espaço $L_\infty(\mu)$ é um espaço de Banach munido da norma, $\|f\| = \text{ess sup}|f|$ para cada $f \in L_\infty(\mu)$.

Em particular, quando $\Omega = [0, 1]$ e μ for a medida de Lebesgue, representaremos $L_p(\mu)$ por $L_p[0, 1]$ (para $1 \leq p < \infty$), e $L_\infty(\mu)$ por $L_\infty[0, 1]$.

Exemplo 3.17 O espaço $L_1[0, 1]$ tem a propriedade DP. De fato, pelo teorema 1.49 $L_\infty[0, 1] \cong l_\infty$. Então, pelo exemplo anterior, $L_\infty[0, 1]$ tem a propriedade DP. Como $L_\infty[0, 1] \cong L'_1[0, 1]$, pelo corolário 3.7 concluímos que $L_1[0, 1]$ tem a propriedade DP.

Exemplo 3.18 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida positiva. Então, pelo teorema 1.48, existe um espaço compacto Hausdorff K e um isomorfismo entre $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $C(K)$. Pelo exemplo 3.15, $C(K)$ tem a propriedade DP, conseqüentemente $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ também tem a propriedade DP. Assim, pelo corolário 3.7, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ tem a propriedade DP.

Antes do próximo exemplo, daremos uma definição e alguns resultados que se encontram em [10]. Agora estaremos denotando por K um conjunto compacto em $\mathbb{C}$ e por $C(K)$ o conjunto das funções contínuas de K em $\mathbb{C}$.

Definição 3.19 *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Seja X um subespaço de $C(K)$. Denotaremos por X_b o espaço de todas as funções $g \in C(K)$ que satisfazem a seguinte condição: se $(f_n)_n \xrightarrow{w} 0$ em X , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(gf_n, X) = 0,$$

onde $\text{dist}(gf_n, X) = \inf_{f \in X} \|gf_n - f\|$.

Teorema 3.20 *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Seja X um subespaço fechado de $C(K)$. Se $X_b = C(K)$, então X tem a propriedade DP.*

Demonstração: Ver teorema 3 em [10], a qual é uma adaptação da prova da proposição 2 de [6].

Proposição 3.21 *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Seja X um subespaço de $C(K)$. Então*

- (i) X_b é uma subálgebra fechada de $C(K)$ e contém as funções constantes;
- (ii) se X é uma subálgebra de $C(K)$ que contém as funções constantes e a função identidade Id , então $X_b = C(K)$ se e somente se a função $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \bar{z}$ para todo $z \in K$, está em X_b .

Demonstração: (i) Claramente X_b contém as funções constantes, pois para $g \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, e para $f_n \xrightarrow{w} 0$ em X , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(gf_n, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\lambda f_n, X) = 0.$$

Para mostrar que X_b é uma álgebra, basta provar que se $g, h \in X_b$ então $g + h \in X_b$ e $gh \in X_b$.

Primeiramente, vamos verificar que $g + h \in X_b$. Seja $f_n \xrightarrow{w} 0$ em X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos escolher $g_n, h_n \in X$ tais que:

$$\|gf_n - g_n\| \leq \text{dist}(gf_n, X) + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|hf_n - h_n\| \leq \text{dist}(hf_n, X) + \frac{1}{n}.$$

Então

$$\begin{aligned} \|(g + h)f_n - (g_n + h_n)\| &\leq \|gf_n - g_n\| + \|hf_n - h_n\| \\ &\leq \text{dist}(gf_n, X) + \frac{1}{n} + \text{dist}(hf_n, X) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g + h)f_n - (g_n + h_n)\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(gf_n, X) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(hf_n, X) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}((g + h)f_n, X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g + h)f_n - (g_n + h_n)\| = 0$. Portanto $g + h \in X_b$.

Agora mostraremos que $gh \in X_b$. Seja $f_n \xrightarrow{w} 0$ em X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos escolher $g_n \in X$ tal que

$$\|gf_n - g_n\| \leq \text{dist}(gf_n, X) + \frac{1}{n}.$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|gf_n - g_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(gf_n, X) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Logo $gf_n - g_n \rightarrow 0$ e conseqüentemente $gf_n - g_n \xrightarrow{w} 0$.

Agora vamos definir $T_1 \in L(C(K); C(K))$ por $T_1(f) = gf$, onde $f \in C(K)$. Para $f_n \xrightarrow{w} 0$ em $C(K)$, temos que $T_1(f_n) \xrightarrow{w} 0$, isto é, $gf_n \xrightarrow{w} 0$. Como

$$g_n = gf_n - (gf_n - g_n),$$

então $g_n \xrightarrow{w} 0$.

Agora para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $h_n \in X$ tal que

$$\|hg_n - h_n\| \leq \text{dist}(hg_n, X) + \frac{1}{n},$$

daí, usando a desigualdade triangular para $\|ghf_n - h_n\|$,

$$\|ghf_n - h_n\| \leq \|h\| \|gf_n - g_n\| + \|hg_n - h_n\|,$$

obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(ghf_n, X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|ghf_n - h_n\| = 0.$$

Logo $gh \in X_b$.

Finalmente, mostraremos que X_b é fechado. Seja $h \in \overline{X_b}$. Então existe $(h_m)_m \subset X_b$ tal que $h_m \rightarrow h$. Seja $(f_n)_n \subset X$ tal que $f_n \xrightarrow{w} 0$. Então existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| < M$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|h - h_{m_o}\| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Como $h_{m_o} \in X_b$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(h_{m_o}f_n, X) = 0$. Então para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\text{dist}(h_{m_o}f_n, X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para qualquer $n > N$.

Agora para cada $n > N$, seja $g_n \in X$ tal que

$$\|h_{m_o}f_n - g_n\| \leq \text{dist}(h_{m_o}f_n, X) + \|h_{m_o}f_n - h_{m_o}f_n\|.$$

Como

$$\text{dist}(hf_n, X) \leq \|hf_n - g_n\| \leq \|hf_n - h_{m_o}f_n\| + \|h_{m_o}f_n - g_n\|,$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{dist}(hf_n, X) &\leq \|hf_n - h_{m_o}f_n\| + \text{dist}(h_{m_o}f_n, X) + \|h_{m_o}f_n - g_n\| \\ &= 2\|h - h_{m_o}\|\|f_n\| + \text{dist}(h_{m_o}f_n, X) \\ &\leq 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para qualquer $n > N$. Portanto $h \in X_b$.

(ii)($\Rightarrow$) Seja $f(z) = \bar{z}$ para todo $z \in K$. Como $X_b = C(K)$, concluímos que $f \in X_b$.

($\Leftarrow$) Seja X uma subálgebra de $C(K)$ com as propriedades descritas em (ii) tal que $f(z) = \bar{z}$ pertence a X_b . Para provar que $X_b = C(K)$ usaremos o teorema 1.1 (Stone-Weierstrass).

Pelo item (i), temos que X_b é uma subálgebra fechada de $C(K)$ e contém a função constante igual a 1. Então para X_b satisfazer as hipóteses do teorema 1.1 (Stone-Weierstrass), basta verificar que X_b é fechado com relação ao conjugado complexo e que separa pontos de K .

É claro que X_b separa pontos de K , uma vez que X é uma álgebra contida em X_b e $Id \in X$.

Agora vamos provar que X_b é fechado com relação ao conjugado complexo. Seja $g \in X_b$. Como $\bar{g} \in C(K)$, segue do teorema de Aproximação de Weierstrass que existe uma seqüência $(p_n(z, \bar{z}))_n$ de polinômios em z e $\bar{z}$ tal que $p_n(z, \bar{z}) \rightarrow \bar{g}$. Desde que $f, Id \in X_b$ e X_b é uma subálgebra de $C(K)$, segue que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $p_n(z, \bar{z}) \in X_b$, e conseqüentemente $\bar{g} \in X_b$, pois X_b é fechado.

Assim pelo teorema 1.1 (Stone-Weierstrass), temos que $X_b = C(K)$. ■

Exemplo 3.22 Vamos denotar por $A(D)$ as funções em $C(\bar{D})$ que são analíticas em D , onde D é o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$. Provaremos que $A(D)$ tem a propriedade DP.

Sabemos que $A(D)$ é uma subálgebra fechada de $C(\bar{D})$ que contém as funções constantes e a função Id . Então pelo teorema 3.20 e pela proposição 3.21, basta provar que $f(z) = \bar{z}$ para cada $z \in \bar{D}$ pertence a $A(D)_b$. Sejam $f_n \xrightarrow{w} 0$ em $A(D)$ e $g_n : \bar{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - f_n(0)}{z}$$

para todo $z \in \bar{D} \setminus \{0\}$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como g_n é analítica em $D \setminus \{0\}$, concluímos que $z = 0$ é uma singularidade isolada de g_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, como

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)g_n(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{f_n(z) - f_n(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} (f_n(z) - f_n(0)) = 0,$$

temos que $z = 0$ é uma singularidade removível. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $h_n : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em D tal que $h_n(z) = g_n(z)$ para qualquer $z \in \bar{D} \setminus \{0\}$. É claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n é contínua em $\bar{D}$, pois g_n é contínua em $\bar{D} \setminus \{0\}$. Assim pelo teorema do módulo máximo

$$\|ff_n - h_n\| = \sup_{z=e^{i\theta}} |f(z)f_n(z) - h_n(z)| = \sup_{z=e^{i\theta}} |\bar{z}f_n(z) - g_n(z)|.$$

Como $zg_n(z) = f_n(z) - f_n(0)$ para qualquer $z \in \bar{D} \setminus \{0\}$, temos, para $z = e^{i\theta}$, que

$$\begin{aligned} |f_n(0)| &= |f_n(z) - zg_n(z)| = |\bar{z}||f_n(z) - zg_n(z)| = |\bar{z}f_n(z) - \bar{z}zg_n(z)| \\ &= |\bar{z}f_n(z) - g_n(z)|. \end{aligned}$$

Então, para n suficientemente grande, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(ff_n, A(D)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|ff_n - h_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(0)| = 0,$$

pois $f_n \xrightarrow{w} 0$. Portanto $f \in A(D)_b$.

3.2 Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial

Vamos nesta seção definir a propriedade de Dunford-Pettis polinomial e mostrar que tal propriedade é equivalente a propriedade DP.

Sabemos que toda aplicação linear contínua aplica seqüências w -Cauchy em seqüências w -Cauchy. Mas esta propriedade nem sempre vale para aplicações multilineares, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.23 Sejam $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fixo e $T \in L(kl_2; l_1)$ definida por

$$T((x_n^{[1]})_n, (x_n^{[2]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n) = (x_n^{[1]}x_n^{[2]} \dots x_n^{[k]})_n,$$

onde $(x_n^{[i]})_n \in l_2$ para cada $i = 1, \dots, k$. Vamos mostrar que T aplica uma seqüência w -Cauchy em uma seqüência que não é w -Cauchy. Para tal, provaremos que $\overbrace{(e_n, \dots, e_n)_n}^{k\text{-vezes}}$ é w -Cauchy em l_2^k , mas $(T(e_n, \dots, e_n))_n$ não é w -Cauchy.

Primeiramente vamos verificar que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em l_2 . Para isso, consideremos $\psi \in l'_2$. Então existe $(a_n)_n \in l_2$ tal que $\psi((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ para todo $(x_n)_n \in l_2$. Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(e_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ uma vez que $(a_n)_n \in l_2$. Logo $e_n \xrightarrow{w} 0$ em l_2 , e pelo lema 1.34, temos que $(e_n, \dots, e_n)_n$ é w -Cauchy em l_2^k .

Como $T(e_n, e_n, \dots, e_n) = e_n \in l_1$, resta verificar que $(e_n)_n$ não é w -Cauchy em l_1 . Sabemos que $l'_1 = l_\infty$. Então, para qualquer $(b_n)_n \in l_\infty$, existe $\varphi \in l'_1$ tal que $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$ para todo $(x_n)_n \in l_1$. Em particular, consideremos $(b_n)_n \in l_\infty$ definido por

$$b_n = \begin{cases} 1 & : n \text{ par} \\ -1 & : n \text{ impar} \end{cases}, \text{ então } \varphi(e_n) = \begin{cases} 1 & : n \text{ par} \\ -1 & : n \text{ impar} \end{cases}$$

Assim, $(\varphi(e_n))_n$ não é convergente. Logo $(e_n)_n$ não é w -Cauchy em l_1 .

A próxima proposição fornece uma condição para que as aplicações multilineares apliquem seqüências w -Cauchy em seqüências w -Cauchy.

Proposição 3.24 Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach com a propriedade DP e Y um espaço de Banach qualquer. Então qualquer aplicação k -linear $T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow Y$ (não necessariamente w -compacta) aplica seqüências w -Cauchy de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ em seqüências w -Cauchy em Y .

Demonstração: Vamos provar por indução em relação k .

Para $k=1$ é imediato. De fato, sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma seqüência w -Cauchy em X . Como $\varphi \circ T \in X'$ para qualquer $\varphi \in Y'$, segue que $(\varphi(T(x_n)))_n$ é convergente. Logo $(T(x_n))_n$ é w -Cauchy em Y .

Pela hipótese de indução toda aplicação k -linear contínua ($k \geq 1$) aplica seqüências w -Cauchy em seqüências w -Cauchy. Seja $T : X_1 \times \cdots \times X_{k+1} \rightarrow Y$ uma aplicação $(k+1)$ -linear contínua. Para cada $y^* \in Y'$, seja a aplicação k -linear $T_{y^*} : X_1 \times \cdots \times X_k \rightarrow X'_{k+1}$ definida por

$$T_{y^*}(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}) = y^*(T(x_1, \dots, x_{k+1}))$$

para todo $x_i \in X_i; i = 1, 2, \dots, k+1$.

Agora para $(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$, temos

$$\begin{aligned} \|T_{y^*}(x_1, \dots, x_k)\| &= \sup_{\|x_{k+1}\| \leq 1} |T_{y^*}(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1})| = \sup_{\|x_{k+1}\| \leq 1} |y^* \circ T(x_1, \dots, x_{k+1})| \\ &\leq \|y^*\| \sup_{\|x_{k+1}\| \leq 1} \|T(x_1, \dots, x_{k+1})\| \leq \|y^*\| \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_k\|. \end{aligned}$$

Logo $T_{y^*} \in L(X_1, \dots, X_k; X'_{k+1})$.

Seja $(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]})_n$ uma seqüência w -Cauchy em $X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$. Afirmamos que a seqüência $(x_n^{[k+1]})_n$ é w -Cauchy em X_{k+1} . De fato, seja $\pi_{k+1} \in L(X_1 \times \cdots \times X_{k+1}; X_{k+1})$ tal que $\pi_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = x_{k+1}$ para todo $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$. Como $(\pi_{k+1}(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n = (x_n^{[k+1]})_n$, concluímos que $(x_n^{[k+1]})_n$ é w -Cauchy em X_{k+1} .

Agora vamos provar que a seqüência $(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})_n$ é w -Cauchy em $X_1 \times \cdots \times X_k$. Para isso, vamos definir $\Gamma \in L(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{k+1}; X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k)$ por

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

para todo $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}) = (x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})$ e $(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]})_n$ é w -Cauchy, temos que $(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})_n$ é w -Cauchy.

Assim pela hipótese de indução, temos que $(T_{y^*}(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é w -Cauchy em X'_{k+1} . Como a seqüência $(x_n^{[k+1]})_n$ é w -Cauchy em X_{k+1} , e por hipótese, X_{k+1} tem a propriedade DP, então pela proposição 3.2 existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{y^*}(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})x_n^{[k+1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} y^*T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]})$ para qualquer $y^* \in Y'$. Logo $(T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n$ é w -Cauchy em Y . ■

Corolário 3.25 *Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach com a propriedade DP. Seja Y um espaço de Banach tal que qualquer seqüência w -Cauchy é uma seqüência de Cauchy. Então toda aplicação k -linear de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ em Y aplica seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy.*

Demonstração: Seja $T \in L(X_1, \dots, X_k; Y)$. Pela proposição anterior, T aplica seqüências w -Cauchy em seqüências w -Cauchy em Y . Como, por hipótese, toda seqüência w -Cauchy em Y é de Cauchy, T aplica seqüência w -Cauchy em seqüência de Cauchy. ■

Como consequência podemos provar o seguinte corolário para polinômios.

Corolário 3.26 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade DP. Seja Y um espaço de Banach tal que toda seqüência w -Cauchy é de Cauchy. Então todo polinômio de X em Y leva seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy.*

Demonstração: Seja $P_0 \in P(^0X; Y)$. Como P_0 leva seqüência w -Cauchy em seqüência de Cauchy, podemos considerar $P \in P(X; Y)$ tal que $P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$, onde P_i é um polinômio i -homogêneo associado a $T_i \in L(^iX; Y)$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Consideremos $(x_n)_n$ uma seqüência w -Cauchy em X e $T \in L(X; \overbrace{X \times \dots \times X}^{i\text{-vezes}})$ definido por $T(x) = \overbrace{(x, x, \dots, x)}^{i\text{-vezes}}$ para todo $x \in X$. Então $(T(x_n))_n = \overbrace{(x_n, x_n, \dots, x_n)}^{i\text{-vezes}}$ é w -Cauchy e pelo corolário 3.25 concluímos que $(T_i(\overbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}^{i\text{-vezes}}))_n = (P_i(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_i > 0$ tal que, para quaisquer $m, n > n_i$, temos que $\|P_i(x_n) - P_i(x_m)\| < \frac{\varepsilon}{k}$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Consideremos $m, n > \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Então

$$\begin{aligned} \|P(x_n) - P(x_m)\| &= \|P_1(x_n) + P_2(x_n) + \dots + P_k(x_n) - P_1(x_m) \\ &\quad - P_2(x_m) - \dots - P_k(x_m)\| \\ &\leq \|P_1(x_n) - P_1(x_m)\| + \dots + \|P_k(x_n) - P_k(x_m)\| < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $(P(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y . ■

A seguir damos a definição da propriedade de Dunford-Pettis polinomial.

Definição 3.27 *Dizemos que um espaço de Banach X tem a propriedade Dunford-Pettis polinomial se, dado qualquer espaço de Banach Y e qualquer polinômio w -compacto $P : X \rightarrow Y$, P leva seqüências w -Cauchy em X sobre seqüências de Cauchy em Y .*

No decorrer deste trabalho usaremos a notação *propriedade DPP* para significar a propriedade de Dunford-Pettis polinomial.

Se X é um espaço de Banach com a propriedade DPP, então X também terá a propriedade DP. De fato, dado qualquer espaço de Banach Y , temos que $L_{wk}(X; Y) =$

$P_{wk}(^1X; Y) \subset P_{wk}(X; Y)$. Assim toda aplicação linear w -compacta de X em Y aplica seqüência w -Cauchy em seqüência de Cauchy.

A seguir damos um lema que é uma versão do corolário 3.3 para polinômios w -compactos.

Lema 3.28 *Sejam X, Z espaços de Banach e Y um espaço de Banach com a propriedade DPP. Considere $P : X \rightarrow Y$ e $Q : Y \rightarrow Z$ polinômios w -compactos. Então o polinômio $Q \circ P : X \rightarrow Z$ é compacto. Em particular, se o espaço X tem DPP, então o quadrado de todo polinômio w -compacto de X em X é compacto.*

Demonstração: Sejam $P : X \rightarrow Y$ e $Q : Y \rightarrow Z$ polinômios w -compactos tais que $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$, onde P_i é um polinômio i -homogêneo associado a $T_i \in L(^iX; Y)$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$ e $Q = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_m$, onde Q_j é um polinômio j -homogêneo associado a $S_j \in L(^jY; Z)$ para cada $j = 0, 1, \dots, m$.

$$\text{Assim } Q \circ P(x) = Q\left(\sum_{i=0}^n P_i(x)\right) = \sum_{j=0}^m S_j\left(\sum_{i=0}^n P_i(x)\right)^j.$$

Primeiramente vamos verificar que $Q \circ P$ é um polinômio. Para tal, vamos analisar um termo da soma acima. Para $j = 0$, temos que $S_j\left(\sum_{i=0}^n P_i(x)\right)^j \in P(^0X; Z)$. Agora se $0 < j \leq m$, então

$$\begin{aligned} S_j\left(\sum_{i=0}^n P_i(x)\right)^j &= S_j(P_0(x) + \cdots + P_n(x), \dots, P_0(x) + \cdots + P_n(x)) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_j \in \{0, \dots, n\}} S_j(P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots, P_{i_j}(x)). \end{aligned}$$

Sejam $i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, n\}$. Afirmamos que $S_j(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_j})$ é um polinômio k -homogêneo, onde $k = (i_1 + \cdots + i_j)$. De fato, consideremos $T \in L(^kX; Z)$ definida por

$$\begin{aligned} T(x_1^{[1]}, \dots, x_{i_1}^{[1]}, x_1^{[2]}, \dots, x_{i_2}^{[2]}, \dots, x_1^{[j]}, \dots, x_{i_j}^{[j]}) &= \\ &= S_j(T_{i_1}(x_1^{[1]}, \dots, x_{i_1}^{[1]}), T_{i_2}(x_1^{[2]}, \dots, x_{i_2}^{[2]}), \dots, T_{i_j}(x_1^{[j]}, \dots, x_{i_j}^{[j]})) \end{aligned}$$

para todo $(x_1^{[1]}, \dots, x_{i_1}^{[1]}, x_1^{[2]}, \dots, x_{i_2}^{[2]}, \dots, x_1^{[j]}, \dots, x_{i_j}^{[j]}) \in X^k$. Como

$$Tx^k = S_j(T_{i_1}x^{i_1}, T_{i_2}x^{i_2}, \dots, T_{i_j}x^{i_j}) = S_j(P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots, P_{i_j}(x))$$

para todo $x \in X$, temos que $S_j(P_{i_1}, \dots, P_{i_j})$ é um polinômio k -homogêneo.

Analogamente, se existir $P_{i_l} \in P(^0X; Y)$ para algum $l = 1, \dots, j$, então $S_j(P_{i_1}, \dots, P_{i_j})$ é um polinômio k -homogêneo.

Logo $Q \circ P$ é um polinômio.

Agora vamos provar que $Q \circ P : X \rightarrow Z$ é compacto. Seja $(x_n)_n \subset B_X$. Como P é um polinômio w -compacto, pela proposição 2.53, $P(B_X)$ é w -seqüencialmente compacto. Logo existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(P(x_{n_k}))_k$ é w -convergente em Y , e conseqüentemente $(P(x_{n_k}))_k$ é w -Cauchy em Y . Como Y tem a propriedade DPP e $Q : Y \rightarrow Z$ é um polinômio w -compacto, $(Q(P(x_{n_k})))_k$ é uma seqüência de Cauchy em Z . Como Z é um espaço de Banach, $(Q \circ P(x_{n_k}))_k$ é convergente.

Logo $Q \circ P(B_X)$ é seqüencialmente compacto. Então, pela proposição 2.53, segue que $Q \circ P$ é compacto. ■

A seguir damos alguns resultados provados por Pelczyński em [25] na tentativa de verificar que a propriedade DP implica na propriedade DPP.

Proposição 3.29 *Sejam X e Y espaços de Banach tal que $X \hat{\otimes} Y$ tem a propriedade DP. Então X e Y possuem a propriedade DP.*

Demonstração: Vamos provar que X tem a propriedade DP, mostrando que X é isomorfo a um subespaço complementado de $X \hat{\otimes} Y$.

Sejam $y \in Y$ e $y^* \in Y'$ tais que $\|y\| = \|y^*\| = 1$ e $y^*(y) = 1$. Queremos provar que $X \otimes \{y\}$ é um subespaço complementado de $X \hat{\otimes} Y$. Para tal, vamos definir $\pi : X \hat{\otimes} Y \rightarrow X \otimes \{y\}$ por

$$\pi(z) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i \right) \otimes y$$

para todo $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$. Observamos que $\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i$ converge para cada $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$, uma vez que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y^*(y_i)| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|y^*\| \|y_i\| \|x_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \|x_i\| < \infty.$$

Vamos verificar que π está bem definida. Seja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y'_i \in X \hat{\otimes} Y$. Então para qualquer $\varphi \in X'$ e $y^* \in Y'$ (definido acima), temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right) (\varphi, y^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) y^*(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(y^*(y_i) x_i) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i \right),$$

analogamente $\left(\sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y'_i \right) (\varphi, y^*) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y'_i) x'_i \right)$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y'_i$, segue que $\varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i \right) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y'_i) x'_i \right)$. Logo pelo corolário 1.12,

$$\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y^*(y'_i) x'_i$$

e conseqüentemente $\left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i)x_i\right) \otimes y = \left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y'_i)x'_i\right) \otimes y$, isto é, $\pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\right) = \pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y'_i\right)$.

Claramente π é uma aplicação linear. Além disso, π também é contínua, pois para qualquer $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$, temos

$$p(\pi(z)) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i)x_i \right\| \|y\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y^*(y_i)| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \|x_i\|.$$

Logo $p(\pi(z)) \leq p(z)$.

É claro que π é sobrejetora. Assim, para verificar que π é uma projeção, basta provar que $\pi(\pi(z)) = \pi(z)$ para qualquer $z \in X \hat{\otimes} Y$. Seja $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \in X \hat{\otimes} Y$. Então

$$\pi(\pi(z)) = \pi\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i)x_i\right) \otimes y\right) = \left(y^*(y) \sum_{i=1}^{\infty} y^*(y_i)x_i\right) \otimes y.$$

Como $y^*(y) = 1$, temos que $\pi(\pi(z)) = \pi(z)$. Portanto π é uma projeção linear de $X \hat{\otimes} Y$ sobre o seu subespaço $X \otimes \{y\}$.

Agora para provar que X é isomorfo a um subespaço complementado de $X \hat{\otimes} Y$, basta verificar que $X \approx X \otimes \{y\}$. Para tal, consideraremos a aplicação linear $T : X \rightarrow X \otimes \{y\}$ definida por $T(x) = x \otimes y$ para todo $x \in X$.

Provaremos que T é uma isometria. Para qualquer $x \in X$, segue que $p(T(x)) = p(x \otimes y) = \|x\| \|y\| = \|x\|$.

Além disso, T é sobrejetora. De fato, para $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \otimes y \in X \otimes \{y\}$, consideraremos $x = \sum_{i=1}^n x_i \in X$, e assim $T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \otimes y = z$.

Logo $X \otimes \{y\} \approx X$.

De modo análogo, provamos que Y é isomorfo a um subespaço complementado de $X \hat{\otimes} Y$.

Portanto, pelo lema 3.9, X e Y possuem a propriedade DP. ■

Corolário 3.30 *Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach tal que $X_1 \hat{\otimes} X_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ tem a propriedade DP. Então $X_1, \dots, X_k$ possuem a propriedade DP.*

Demonstração: Consideremos $X = X_i$ e $Y = X_1 \hat{\otimes} X_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_{i-1} \hat{\otimes} X_{i+1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ para cada $i \in \{2, \dots, k-1\}$. Como $X_i \hat{\otimes} X_1 \hat{\otimes} X_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_{i-1} \hat{\otimes} X_{i+1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k \cong X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$,

temos que $X \hat{\otimes} Y$ tem a propriedade DP. Assim, pela proposição 3.29, X_i tem a propriedade DP para $i \in \{2, \dots, k-1\}$. Com um raciocínio análogo, obtemos que X_1 e X_k possuem a propriedade DP. ■

Proposição 3.31 *Sejam $X_1, \dots, X_k$ espaços de Banach tal que o espaço $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ tem a propriedade DP e Y um espaço de Banach qualquer. Então toda aplicação k -linear w -compacta de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ em Y aplica seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy em Y .*

Demonstração: Consideremos $T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow Y$ uma aplicação k -linear w -compacta e $(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})_n$ w -Cauchy em $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$. Queremos provar que $(T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y .

Afirmamos que $(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]})_n$ é w -Cauchy em $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$. De fato, seja $\hat{S}$ um funcional linear contínuo de $X_1 \hat{\otimes} X_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$. Então pela proposição 2.30 existe S , funcional k -linear em $X_1 \times \dots \times X_k$, tal que $\hat{S}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = S(x_1, \dots, x_k)$ para todo $x_i \in X_i$ onde $i = 1, \dots, k$.

Como $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ tem a propriedade DP, pelo corolário 3.30, X_i tem a propriedade DP para cada $i = 1, \dots, k$. Então pelo corolário 3.25 $(S(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Assim $(\hat{S}(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]}))_n$ é convergente para todo $\hat{S} \in (X_1 \hat{\otimes} X_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k)'$. Portanto $(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]})_n$ é w -Cauchy.

Para $T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow Y$ uma aplicação k -linear w -compacta, existe pelo teorema 2.31, uma aplicação linear w -compacta $\hat{T} : X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k \rightarrow Y$ tal que $T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}) = \hat{T}(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]})$ para todo $x_i \in X_i$, onde $i = 1, \dots, k$. Como $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k$ tem a propriedade DP e $(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]})_n$ é uma seqüência w -Cauchy, pela proposição 3.2, $(\hat{T}(x_n^{[1]} \otimes x_n^{[2]} \otimes \dots \otimes x_n^{[k]}))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y . Logo $(T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ também é uma seqüência de Cauchy em Y . ■

Corolário 3.32 *Seja X um espaço de Banach. Se para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e qualquer espaço de Banach Y , temos que toda aplicação k -linear w -compacta de X^k em Y aplica seqüências w -Cauchy em seqüências de Cauchy, então X tem a propriedade DPP.*

Demonstração: Sejam Y um espaço de Banach e $P \in P_{wk}(X; Y)$ tal que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$, onde P_i é o polinômio i -homogêneo w -compacto (ver proposição 2.53) associado a $T_i \in L_{wk}(^i X; Y)$ para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Consideremos $(x_n)_n$ uma seqüência w -Cauchy em X . Vamos provar que $(P(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y . Como $(x_n)_n$ é w -Cauchy em X , pela proposição 1.34, $(x_n, \dots, x_n)_n$ também é w -Cauchy em X^i para qualquer $i = 1, \dots, m$. Uma vez que T_i é w -compacta, segue, pela hipótese, que $(T_i(x_n, \dots, x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy.

Portanto $(P(x_n))_n = (P_0(x_n))_n + (P_1(x_n))_n + \dots + (P_m(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy. ■

Em [25], Pelczyński perguntou se a recíproca do corolário 3.30 era verdadeira. Caso tivesse uma resposta afirmativa, pela proposição 3.31 e pelo corolário 3.32 teríamos a equivalência das propriedades DP e DPP. Mas Ryan observou em [31] que Talagrand em [34] construiu um espaço de Banach X tal que X' é Schur, mas $L([0, 1], X') = L_1[0, 1] \hat{\otimes} X'$ não tem a propriedade DP, portanto a volta do corolário 3.30 não é verdadeira.

Agora vamos provar os resultados demonstrados por Ryan em [30] com o objetivo de verificar que as propriedades DP e DPP são equivalentes.

Para X um espaço de Banach, denotamos por $c_o(X)$ o espaço de Banach formado por todas as seqüências $x = (x_n)_n$ de elementos de X tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$, onde a norma de $x \in c_o(X)$ é dado por

$$\|x\| = \sup_n \|x_n\|.$$

Analogamente, $l_p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é o espaço de Banach formado por todas as seqüências $x = (x_n)_n$ de elementos de X tal que $(\|x_n\|)_n \in l_p$, onde a norma de x será a norma da seqüência $(\|x_n\|)_n$ em l_p .

A seguir daremos alguns resultados relacionados com os espaços definidos acima.

Proposição 3.33 *Seja X um espaço de Banach. O dual de $c_o(X)$ é isomorfo a $l_1(X')$.*

Demonstração: Dado $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$, definimos $\psi_\varphi : c_o(X) \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$\psi_\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n)$$

para todo $x = (x_n)_n \in c_o(X)$. É claro que $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n(x_n)$ converge para cada $x = (x_n)_n \in c_o$, pois

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k \varphi_n(x_n) \right| &\leq \sum_{i=1}^k |\varphi_n(x_n)| \leq \sum_{n=1}^k \|\varphi_n\| \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| \|x_n\| \\ &\leq \sup_n \|x_n\| \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| \leq \|x\| \|\varphi\| < \infty \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Claramente ψ_φ é linear. Como

$$|\psi_\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| \|\varphi_n\| \leq \|x\| \|\varphi\|,$$

temos que ψ_φ é limitado. Portanto $\psi_\varphi \in (c_o(X))'$.

Agora podemos definir a aplicação linear $T : l_1(X') \rightarrow (c_o(X))'$ por

$$T(\varphi) = \psi_\varphi$$

para todo $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$.

Afirmamos que T é um isomorfismo. De fato, vamos primeiro provar que T é contínua. Para cada $\varphi \in l_1(X')$ temos

$$\|T(\varphi)\| = \|\psi_\varphi\| = \sup_{\substack{x \in c_o(X) \\ \|x\| \leq 1}} |\psi_\varphi(x)| \leq \sup_{\substack{x \in c_o(X) \\ \|x\| \leq 1}} \|x\| \|\varphi\| = \|\varphi\|.$$

Agora vamos provar que T é injetora. Seja $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$ tal que $T(\varphi) = 0$. Para quaisquer $x \in X$ e $i \in \mathbb{N}$, seja $x^{[i]} = (0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots) \in c_o(X)$, ou seja, $x^{[i]}$ assume o valor $x \in X$ na sua i -ésima coordenada. Então

$$T(\varphi)(x^{[i]}) = \psi_\varphi(x^{[i]}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n^{[i]}) = \varphi_i(x) = 0$$

para qualquer $x \in X$. Logo $\varphi_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, isto é, $\varphi = 0$. Portanto T é injetora.

Finalmente vamos mostrar que T é sobrejetora. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $S_n \in L(X, c_o(X))$ por

$$S_n(a) = (0, 0, \dots, \overbrace{a}^{n\text{-ésima}}, 0, \dots)$$

para todo $a \in X$. Então para qualquer $x = (x_n)_n \in c_o(X)$, temos

$$\|x - \sum_{n=1}^N S_n(x_n)\| = \|(0, 0, \dots, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)\| = \sup_{n > N} \|x_n\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Logo $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N S_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x_n)$. Assim, se $\psi \in (c_o(X))'$

$$\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \psi \circ S_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi \circ S_n(x_n).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n = \psi \circ S_n \in X'$. Então $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n)$ para qualquer $x = (x_n)_n \in c_o(X)$. Agora, resta verificar que $(\varphi_n)_n \in l_1(X')$. Para tal, fixemos r tal que $0 < r < 1$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_n\| = \sup\{|\varphi_n(x)| : \|x\| \leq 1\}$, então existe $x_n \in X$ tal que

$$\|x_n\| \leq 1 \quad \text{e} \quad r\|\varphi_n\| \leq |\varphi_n(x_n)|. \quad (*)$$

Mas podemos escrever $\varphi_n(x_n) = e^{i\theta_n} |\varphi_n(x_n)|$, logo

$$|\varphi_n(x_n)| = e^{-i\theta_n} \varphi_n(x_n) = \varphi_n(e^{-i\theta_n} x_n).$$

De (*) segue que $r\|\varphi_n\| \leq |\varphi_n(x_n)| = \varphi_n(e^{-i\theta_n}x_n)$. Assim para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} r \sum_{n=1}^N \|\varphi_n\| &\leq \sum_{n=1}^N |\varphi_n(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(e^{-i\theta_n}x_n) \right| = |\psi((e^{-i\theta_n}x_n)_n)| \\ &\leq \|\psi\| \sup_n \|e^{-i\theta_n}x_n\| = \|\psi\| \sup_n \|x_n\| \leq \|\psi\|. \end{aligned}$$

Então, para r suficientemente próximo de 1, temos $\sum_{n=1}^N \|\varphi_n\| \leq \|\psi\|$ para cada $N \in \mathbb{N}$.

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| \leq \|\psi\|$ e $(\varphi_n)_n \in l_1(X')$.

Assim para qualquer $\psi \in (c_o(X))'$ existe $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$ tal que $T(\varphi) = \psi$, isto é, T é sobrejetora.

Como T é linear, contínua e bijetora, pelo teorema da Aplicação Aberta, T^{-1} é contínua. Logo $(c_o(X))' \cong l_1(X')$. ■

Proposição 3.34 *Seja X um espaço de Banach. O dual de $l_1(X')$ é isomorfo a $l_{\infty}(X'')$.*

Demonstração: Seja $T : l_{\infty}(X'') \rightarrow (l_1(X'))'$, definida por

$$T((x_n^{**})_n)(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(\varphi_n)$$

para todo $(x_n^{**})_n \in l_{\infty}(X'')$ e para todo $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$. Vamos provar que T é um isomorfismo. De fato, fazendo as devidas alterações na demonstração da proposição 3.33, obtemos que T é uma aplicação linear contínua e injetora.

Assim basta provar que T é sobrejetora. Seja $\psi \in (l_1(X'))'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $S_n \in L(X', l_1(X'))$, por $S_n(x^*) = (0, 0, \dots, \overbrace{x^*}^{n\text{-ésimo}}, 0, \dots)$ para todo $x^* \in X'$. Assim $x_n^{**} = \psi \circ S_n \in X''$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $(x_n^{**})_n \in l_{\infty}(X'')$ e $\psi(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(\varphi_n)$ para cada $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$. De fato, para $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$ temos

$$\|\varphi - \sum_{n=1}^N S_n(\varphi_n)\| = \|(0, 0, \dots, \varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \dots)\| = \sum_{n>N} \|\varphi_n\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

ou seja, $\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N S_n(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\varphi_n)$. Assim

$$\psi(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \psi \circ S_n(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi \circ S_n(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(\varphi_n)$$

para todo $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(X')$. Claramente $(x_n^{**})_n \in l_\infty(X'')$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_n^{**}\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in X'}} |x_n^{**}(x^*)| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in X'}} |\psi \circ S_n(x^*)| \leq \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in X'}} \|\psi\| \|S_n\| \|x^*\| \leq \|\psi\|.$$

Portanto para qualquer $\psi \in (l_1(X'))'$ existe $(x_n^{**})_n \in l_\infty(X'')$ tal que $T((x_n^{**})_n) = \psi$.

Como T é linear, contínua e bijetora, pelo teorema 1.10 (Aplicação Aberta), T^{-1} é contínua. Portanto $(l_1(X'))' \cong l_\infty(X'')$. ■

Para demonstrar os próximos resultados, utilizaremos a seguinte notação. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; c_o(Y))$. Para cada $x \in X$, temos que $T(x) \in c_o(Y)$. Assim denotaremos $T(x)$ por $(T_n(x))_n$, onde $T_n \in L(X; Y)$ e $\|T_n(x)\| \rightarrow 0$.

Convém observar que, para qualquer $x \in X$, temos que $\|T_n(x)\| \leq \sup_n \|T_n(x)\| = \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$. Assim $\|T_n\| \leq \|T\|$.

Proposição 3.35 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; c_o(Y))$ tal que $T(x) = (T_n(x))_n$ para todo $x \in X$. Então $T^* : l_1(Y') \rightarrow X'$, o adjunto de T , é dado por $T^*(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(\varphi_n)$ para cada $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(Y')$.*

Demonstração: Seja $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(Y') \cong (c_o(Y))'$. Então

$$\|T^*(\varphi) - \sum_{n=1}^N T_n^*(\varphi_n)\| = \|\varphi \circ T - \sum_{n=1}^N \varphi_n \circ T_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi \circ T(x) - \sum_{n=1}^N \varphi_n \circ T_n(x)|,$$

mas

$$\begin{aligned} |\varphi \circ T(x) - \sum_{n=1}^N \varphi_n \circ T_n(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(T_n(x)) - \sum_{n=1}^N \varphi_n(T_n(x)) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n(T_n(x)) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\| \|T_n\| \|x\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\| \|T\| \|x\|. \end{aligned}$$

Assim $\|T^*(\varphi) - \sum_{n=1}^N T_n^*(\varphi_n)\| \leq \|T\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\|$. Como $(\varphi_n)_n \in l_1(Y')$, para N suficientemente grande, temos que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\| \rightarrow 0$ e conseqüentemente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N T_n^*(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(\varphi_n) = T^*(\varphi). \quad \blacksquare$$

Proposição 3.36 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; c_o(Y))$ tal que $T(x) = (T_n(x))_n$ para todo $x \in X$. Então $T^{**} : X'' \rightarrow l_\infty(Y'')$, o segundo adjunto de T , é dado por $T^{**}(x^{**}) = (T_n^{**}(x^{**}))_n$ para todo $x^{**} \in X''$.*

Demonstração: Seja qualquer $x^{**} \in X''$. Como, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|T_n^{**}(x^{**})\| = \|x^{**} \circ T_n^*\| \leq \|x^{**}\| \|T_n^*\| = \|x^{**}\| \|T_n\| \leq \|x^{**}\| \|T\| < \infty$, concluímos que $(T_n^{**}(x^{**}))_n \in l_\infty(Y'')$.

Considere $\psi = (T_n^{**}(x^{**}))_n \in l_\infty(Y'') \cong (l_1(Y'))'$ e seja $\varphi = (\varphi_n)_n \in l_1(Y')$. Então

$$\begin{aligned} (T^{**}(x^{**}))(\varphi) &= (x^{**} \circ T^*)(\varphi) = x^{**}\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(\varphi_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(T_n^*(\varphi_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (T_n^{**}(x^{**}))(\varphi_n) = \psi(\varphi). \end{aligned}$$

Logo $T^{**}(x^{**}) = \psi = (T_n^{**}(x^{**}))_n$. ■

Lema 3.37 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X; c_o(Y))$ tal que $T(x) = (T_n(x))_n$ para todo $x \in X$. Então T é w -compacta se e somente se*

- (i) $T_n \in L_{wk}(X; Y)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{**}(x^{**})\| = 0$ para qualquer $x^{**} \in X''$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que T é w -compacta. Seja $\pi_n \in L(c_o(Y); Y)$, dado por $\pi_n(y) = y_n$ para cada $y = (y_n)_n \in c_o(Y)$. Segue da proposição 1.43 que $\pi_n \circ T \in L_{wk}(X; Y)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $T_n \in L_{wk}(X; Y)$.

Agora do item (ii) do teorema 1.44, temos que $T^{**}(X'') \subset c_o(Y)$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{**}(x^{**})\| = 0$ para qualquer $x^{**} \in X''$.

($\Leftarrow$) Por (i) temos que $T_n \in L_{wk}(X; Y)$. Assim pelo teorema 1.44, concluímos que $T_n^{**}(X'') \subset Y$. Agora do item (ii), segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{**}(x^{**})\| = 0$, e conseqüentemente $T^{**}(x^{**}) = (T_n^{**}(x^{**}))_n \in c_o(Y)$ para qualquer $x^{**} \in X''$. Portanto, pelo teorema 1.44, T é w -compacta. ■

O nosso objetivo agora é provar que a propriedade DP implica a propriedade DPP. Para tal precisamos do seguinte teorema provado por Ryan em [30].

Teorema 3.38 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade DP, Y um espaço de Banach qualquer, $k \in \mathbb{N}$ e $T \in L_{wk}(^k X; Y)$. Se $(x_n^{[1]})_n, \dots, (x_n^{[k]})_n$ são seqüências w -Cauchy em X , então a seqüência $(T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ converge em Y .*

Demonstração: Faremos a prova por indução em k . Para $k=1$ é trivial, pois X tem a propriedade DP.

Suponhamos que o resultado é válido para aplicações k -lineares. Vamos provar que vale para as aplicações $(k+1)$ -lineares. Sejam $T \in L_{wk}(^{k+1}X; Y)$ e $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k+1]})_n$ seqüências w -Cauchy em X .

Primeiramente vamos supor que uma das seqüências é w -convergente para zero. Sem perda de generalidade, consideraremos $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$. Vamos provar que $(T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n$ converge para zero em Y .

Seja $(z_1, z_2, \dots, z_k) \in X^k$ e vamos definir $H \in L(X; Y)$ por

$$H(x) = T(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$$

para cada $x \in X$. Afirmamos que H é w -compacta. De fato, seja $W \subset X$, limitado. Definimos o conjunto $W_1 \subset X^{k+1}$ por

$$W_1 = \{(x, z_1, z_2, \dots, z_k), \text{ com } x \in W\}.$$

É claro que W_1 é limitado. Agora como T é w -compacta, segue que $\overline{T(W_1)}^w$ é w -compacto. Mas $H(W) = T(W_1)$, logo $\overline{H(W)}^w = \overline{T(W_1)}^w$ é w -compacto e conseqüentemente H é w -compacta.

Como X tem a propriedade DP e $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n^{[1]}, z_1, \dots, z_k)\| = 0,$$

ou seja, para cada $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$, a seqüência $(T(x_n^{[1]}, z_1, \dots, z_k))_n \in c_o(Y)$. Assim, podemos definir uma aplicação k -linear contínua $S : X^k \rightarrow c_o(Y)$ por

$$S(z_1, z_2, \dots, z_k) = (T(x_n^{[1]}, z_1, z_2, \dots, z_k))_n$$

para todo $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$.

Para verificar que $T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]}) \rightarrow 0$ em Y , basta provar que S é w -compacta, pois, aplicando a hipótese de indução, obtemos que a seqüência $(S(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n$ converge em $c_o(Y)$. Assim denotando por $w = (w_m)_m$ o limite desta seqüência, temos que

$$\sup_m \|T(x_m^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}) - w_m\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \|T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]})\| &\leq \|T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]}) - w_n\| + \|w_n\| \\ &\leq \sup_m \|T(x_m^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k+1]}) - w_m\| + \|w_n\|, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]})\| = 0$.

Agora vamos provar que S é w -compacta. Para tal, usaremos o lema 3.37 para a aplicação linear associada a S , $\hat{S} : \hat{\otimes}^k X \rightarrow c_o(Y)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por S_n a n -ésima coordenada da aplicação S , isto é.

$$S_n(z_1, \dots, z_k) = T(x_n^{[1]}, z_1, \dots, z_k)$$

para todo $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$. Assim $\hat{S}(z_1 \otimes \dots \otimes z_k) = (\hat{S}_n(z_1 \otimes \dots \otimes z_k))_n$, onde $\hat{S}_n : \hat{\otimes}^k X \rightarrow Y$ é a aplicação linear associada a S_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente vamos verificar que $\hat{S}_n$ é w -compacta para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 2.31, basta provar que S_n é w -compacta. Para tal, fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mathcal{W} \subset X^k$ limitado. Definimos $\mathcal{W}_1 \subset X^{k+1}$ por

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_n^{[1]}, z_1, \dots, z_k), \text{ com } (z_1, \dots, z_k) \in \mathcal{W}\}.$$

É claro que $\mathcal{W}_1$ é limitado. Agora como T é w -compacta, temos que $\overline{T(\mathcal{W}_1)}^w$ é w -compacto. Mas $S_n(\mathcal{W}) = T(\mathcal{W}_1)$, logo $\overline{S_n(\mathcal{W})}^w$ é w -compacto, conseqüentemente a condição (i) do lema 3.37 está satisfeita.

Assim falta verificar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{S}_n^{**}(\hat{\varphi})\| = 0$ para qualquer $\hat{\varphi} \in (\hat{\otimes}^k X)''$. Para tal, fixemos $\hat{\varphi} \in (\hat{\otimes}^k X)''$. Como $(\hat{\otimes}^k X)'' \cong L({}^k X)'$ existe $\varphi \in L({}^k X)'$ tal que $\varphi(R) = \hat{\varphi}(\hat{R})$ para qualquer $R \in L({}^k X)$, onde $\hat{R} \in (\hat{\otimes}^k X)'$ é a aplicação linear associada a R .

Agora podemos definir a aplicação linear contínua $\bar{\varphi} : X \rightarrow L({}^{k+1} X)'$ por

$$(\bar{\varphi}(x))(R) = \varphi(R_1(x)), \quad \forall x \in X; \quad \forall R \in L({}^{k+1} X),$$

onde $R_1(x) \in L({}^k X)$ é obtido fixando x na primeira coordenada de R , isto é, para cada $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$

$$R_1(x)(z_1, \dots, z_k) = R(x, z_1, \dots, z_k).$$

Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(z_1, \dots, z_k) = T_1(x_n^{[1]})(z_1, \dots, z_k)$$

para cada $(z_1, \dots, z_k) \in X^k$. Seja h o isomorfismo de $L({}^{k+1} X)'$ em $(\hat{\otimes}^{k+1} X)''$ e considere-mos a aplicação linear contínua $\hat{T}^{**} \circ h \circ \bar{\varphi} : X \rightarrow Y''$. Claramente $\hat{T}^{**} \circ h \circ \bar{\varphi}$ é w -compacta, pois, como T é w -compacta, segue dos teoremas 2.31 e 1.44 que $\hat{T}^{**}$ é w -compacta, e pela proposição 1.43, temos que $\hat{T}^{**} \circ h \circ \bar{\varphi}$ é w -compacta.

Como X tem a propriedade DP e $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$, concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{T}^{**} \circ h \circ \bar{\varphi}(x_n^{[1]})\| = 0$. Assim, para verificar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{S}_n^{**}(\hat{\varphi})\| = 0$, basta mostrar que $\hat{S}_n^{**}(\hat{\varphi}) = \hat{T}^{**} \circ h(\bar{\varphi}(x_n^{[1]}))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para tal, sejam $\psi \in Y'$ e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\hat{S}_n^{**}(\hat{\varphi})(\psi) = (\hat{\varphi} \circ \hat{S}_n^*)(\psi) = \hat{\varphi}(\hat{S}_n^*(\psi)) = \hat{\varphi}(\psi \circ \hat{S}_n).$$

Claramente $\psi \circ \hat{S}_n$ é a aplicação linear associada a $\psi \circ S_n$, pois $\psi \circ \hat{S}_n \in (\hat{\otimes}^k X)'$ e para $\sum_{i=1}^m x_{1_i} \otimes \cdots \otimes x_{k_i} \in \hat{\otimes}^k X$, segue que

$$\psi \circ \hat{S}_n \left(\sum_{i=1}^m x_{1_i} \otimes \cdots \otimes x_{k_i} \right) = \sum_{i=1}^m \psi \circ \hat{S}_n(x_{1_i} \otimes \cdots \otimes x_{k_i}) = \sum_{i=1}^m \psi \circ S_n(x_{1_i}, \dots, x_{k_i}),$$

ou seja, $\psi \circ \hat{S}_n|_{\hat{\otimes}^k X} = \psi \circ S_n \in (\hat{\otimes}^k X)'$. Analogamente concluímos que $\psi \circ \hat{T}$ é a aplicação linear associada a $\psi \circ T$. Assim

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\psi \circ \hat{S}_n) &= \varphi(\psi \circ S_n) = \varphi(\psi \circ T_1(x_n^{[1]})) = \varphi[(\psi \circ T)_1(x_n^{[1]})] = \overline{\varphi}(x_n^{[1]})(\psi \circ T) \\ &= h(\overline{\varphi}(x_n^{[1]}))(\psi \circ \hat{T}) = h(\overline{\varphi}(x_n^{[1]}))(\hat{T}^*(\psi)) = \hat{T}^{**}(h(\overline{\varphi}(x_n^{[1]}))(\psi)), \end{aligned}$$

para qualquer $\psi \in Y'$. Logo $\hat{S}_n^{**}(\hat{\varphi}) = \hat{T}^{**}(h(\overline{\varphi}(x_n^{[1]})))$ e conseqüentemente a condição (ii) do lema 3.37 está satisfeita, ou seja, $\hat{S}$ é w -compacta. Portanto, pelo teorema 2.31, temos que S é w -compacta.

Agora, no caso geral, se $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k+1]})_n$ são seqüências w -Cauchy em X , basta provar que $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y , pois Y é um espaço de Banach. Vamos supor por absurdo que existam $\varepsilon > 0$ e $(r_n)_n, (s_n)_n$ seqüências de índices crescentes tais que

$$\|T(x_{r_n}^{[1]}, \dots, x_{r_n}^{[k+1]}) - T(x_{s_n}^{[1]}, \dots, x_{s_n}^{[k+1]})\| > \varepsilon.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} &\|T(x_{r_n}^{[1]}, \dots, x_{r_n}^{[k+1]}) - T(x_{s_n}^{[1]}, \dots, x_{s_n}^{[k+1]})\| \leq \\ &\leq \|T(x_{r_n}^{[1]} - x_{s_n}^{[1]}, x_{r_n}^{[2]}, \dots, x_{r_n}^{[k+1]})\| \\ &\quad + \sum_{j=2}^k \|T(x_{s_n}^{[1]}, \dots, x_{s_n}^{[j-1]}, x_{r_n}^{[j]} - x_{s_n}^{[j]}, x_{r_n}^{[j+1]}, \dots, x_{r_n}^{[k+1]})\| \\ &\quad + \|T(x_{s_n}^{[1]}, x_{s_n}^{[2]}, \dots, x_{s_n}^{[k]}, x_{r_n}^{[k+1]} - x_{s_n}^{[k+1]})\|. \quad (*) \end{aligned}$$

Além disso, para cada $j = 1, \dots, k+1$, a seqüência $(x_n^{[j]})_n$ é w -Cauchy, logo $x_{r_n}^{[j]} - x_{s_n}^{[j]} \xrightarrow{w} 0$. Assim, pela primeira parte da demonstração, cada termo da soma finita (*) converge para zero. Absurdo, pois

$$\|T(x_{r_n}^{[1]}, \dots, x_{r_n}^{[k+1]}) - T(x_{s_n}^{[1]}, \dots, x_{s_n}^{[k+1]})\| > \varepsilon$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.39 *Se X tem a propriedade DP, então X tem a propriedade DPP.*

Demonstração: Sejam Y um espaço de Banach e $P \in P_{wk}(X; Y)$ tal que $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$, onde P_j é o polinômio j -homogêneo w -compacto que está associado a $T_j \in L_{wk}(^jX; Y)$ para cada $j = 0, 1, \dots, m$. Se $(x_n)_n$ é uma seqüência w -Cauchy em X , segue do teorema 3.38 que, para todo $j = 1, 2, \dots, m$, a seqüência $(T_j(x_n, \dots, x_n))_n$ converge em Y , e como $(P_0(x_n))_n$ é uma seqüência constante, segue que $(T_j(x_n, \dots, x_n))_n$ converge em Y para todo $j = 0, 1, \dots, m$. Então

$$\begin{aligned} (P(x_n))_n &= (P_0(x_n))_n + \cdots + (P_m(x_n))_n \\ &= (T_0(x_n))_n + (T_1(x_n))_n + (T_2(x_n, x_n))_n + \cdots + (T_m(x_n, \dots, x_n))_n \end{aligned}$$

converge em Y . ■

3.3 Polinômios w -Seqüencialmente Contínuos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados provados por Gonzáles e Gutiérrez em [17].

Definição 3.40 *Consideremos X e Y espaços de Banach.*

- (a) *Seja $P \in P(^kX; Y)$. Dizemos que P é w -seqüencialmente contínuo se, para qualquer seqüência $(x_n)_n$ w -convergente para x em X , temos que $(P(x_n))_n$ converge para $P(x)$ em Y .*
- (b) *Seja $P \in P(X; Y)$. Dizemos que P é w -seqüencialmente contínuo se, para qualquer seqüência $(x_n)_n$ w -convergente para x em X , temos que $(P(x_n))_n$ converge para $P(x)$ em Y .*

Vamos denotar por $P_{wsc}(^kX; Y)$ o subespaço de $P(^kX; Y)$ formado pelos polinômios k -homogêneos w -seqüencialmente contínuos, e por $P_{wsc}(X; Y)$ o subespaço vetorial de $P(X; Y)$ formado pelos polinômios w -seqüencialmente contínuos.

Lema 3.41 *Um espaço de Banach X contém uma cópia de l_1 se e somente se existe uma aplicação linear sobrejetora e w -seqüencialmente contínua de X sobre l_2 .*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $T : X \rightarrow l_2$ uma aplicação linear sobrejetora e w -seqüencialmente contínua. Vamos mostrar que X possui uma cópia de l_1 utilizando o teorema 1.30 (Rosenthal).

Primeiramente, afirmamos que existe uma seqüência limitada $(x_n)_n$ em X tal que $T(x_n) = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela proposição 1.9, dado $r > 0$ existe $s > 0$ tal

que $s \mathring{B}_{l_2} \subset T(r \mathring{B}_X)$. Assim $\frac{s}{2} 2 \mathring{B}_{l_2} \subset T(r \mathring{B}_X)$, ou seja, $2 \mathring{B}_{l_2} \subset T(\frac{2r}{s} \mathring{B}_X)$. Como para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $e_n \in 2 \mathring{B}_{l_2}$, segue que $e_n \in T(\frac{2r}{s} \mathring{B}_X)$. Logo existe $(x_n)_n \subset \frac{2r}{s} \mathring{B}_X$ tal que $T(x_n) = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora vamos supor que existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que é w -Cauchy. Como T é w -seqüencialmente contínua, temos que $T(x_{n_k}) = e_{n_k}$ é uma seqüência de Cauchy, absurdo. Logo $(x_n)_n$ não tem subsequência w -Cauchy e pelo teorema 1.30 (Rosenthal), segue que X contém uma cópia de l_1 .

($\Rightarrow$) Vamos supor que X contém uma cópia de l_1 . Como l_2 é um espaço de Banach separável, pelo teorema 1.8 (Banach-Mazur), existe uma aplicação linear contínua T de l_1 sobre l_2 . Agora pelos teoremas 1.19 e 1.18, temos que T é 2-absolutamente somável. Então segue do corolário 1.8 de [27] que existem uma medida μ e aplicações $T_1 : l_1 \rightarrow L_\infty(\mu)$, $T_2 : L_\infty(\mu) \rightarrow l_2$ tais que $T_2 \circ T_1 = T$. Desde que X contém uma cópia de l_1 e $L_\infty(\mu)$ tem a propriedade de extensão (ver teorema 1.50), então existe $S : X \rightarrow L_\infty(\mu)$ uma aplicação linear contínua que é uma extensão de T_1 .

Agora vamos verificar que $T_2 \circ S$ é w -seqüencialmente contínua. Como l_2 é reflexivo, temos que $L(L_\infty(\mu); l_2) = L_{wk}(L_\infty(\mu); l_2)$, e por $L_\infty(\mu)$ ter a propriedade DP, segue que $L(L_\infty(\mu); l_2) = L_{wsc}(L_\infty(\mu); l_2)$ e conseqüentemente T_2 é w -seqüencialmente contínua. Consideremos $x_n \xrightarrow{w} x$ em X . Por S ser linear e contínua, temos que $S(x_n) \xrightarrow{w} S(x)$, e como T_2 é w -seqüencialmente contínua $T_2 \circ S(x_n) \rightarrow T_2 \circ S(x)$.

Claramente $T_2 \circ S$ é sobrejetora, pois $T = T_2 \circ T_1$ é sobrejetora e S é uma extensão da aplicação T_1 . Portanto existe $T_2 \circ S$ sobrejetora e w -seqüencialmente contínua. ■

Proposição 3.42 Sejam X um espaço de Banach que contém uma cópia de l_1 e Y um espaço não reflexivo. Então existe $P \in P_{wsc}(^k X; Y) \setminus P_{wk}(^k X; Y)$ para $k \geq 2$.

Demonstração: Como Y é um espaço de Banach não reflexivo, segue do teorema 1.35 que B_Y não é w -compacto. Logo existe uma seqüência $(y_n)_n$ em B_Y que não admite subsequências w -convergentes. Agora vamos definir uma aplicação linear contínua $T_1 : l_1 \rightarrow Y$ por $T_1(e_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde e_n é o n -ésimo vetor unitário da base canônica de l_1 .

Como X contém uma cópia de l_1 , pelo lema 3.41, existe $T_2 : X \rightarrow l_2$ uma aplicação linear sobrejetora e w -seqüencialmente contínua. Assim considerando $P = T_1 \circ Q \circ T_2$, onde Q é o polinômio k -homogêneo de l_2 em l_1 dado no exemplo 2.48, afirmamos que $P \in P_{wsc}(^k X; Y) \setminus P_{wk}(^k X; Y)$ para $k \geq 2$. De fato, como $Q \in P(^k l_2; l_1)$ para $k \geq 2$, existe $S \in L(^k l_2; l_1)$ tal que $S(x, \dots, x) = Q(x)$ para qualquer $x \in l_2$. Agora consideremos $G : X^k \rightarrow l_2^k$, definida por $G(x_1, \dots, x_k) = (T_2(x_1), \dots, T_2(x_k))$ para cada $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Claramente $T_1 \circ S \circ G$ é uma aplicação k -linear e contínua. Como para cada $x \in X$,

$$P(x) = T_1 \circ Q \circ T_2(x) = T_1(Q(T_2(x))) = T_1(S(T_2(x), \dots, T_2(x))) = T_1 \circ S \circ G(x, \dots, x),$$

concluimos que $P \in P({}^kX; Y)$. É claro que $P \in P_{wsc}({}^kX; Y)$, uma vez que T_2 é w -seqüencialmente contínua e $T_1 \circ Q$ é contínua.

Agora, resta verificar que $P \notin P_{wk}({}^kX; Y)$. Vamos supor por absurdo que $P \in P_{wk}({}^kX; Y)$.

Como T_2 é sobrejetora, para cada $e_n \in l_2$, existe $x_n \in X$ tal que $T_2(x_n) = e_n$. Com uma demonstração análoga à do lema 3.41, podemos concluir que $W = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Assim $P(W)$ é w -seqüencialmente compacto e conseqüentemente $(P(x_n))_n$ tem uma subsequência w -convergente. Absurdo, pois

$$(P(x_n))_n = (T_1 \circ Q \circ T_2(x_n))_n = (T_1 \circ Q(e_n))_n = (T_1(e_n))_n = (y_n)_n. \quad \blacksquare$$

Agora vamos analisar os espaços vetoriais $P_{wsc}(X; Y)$ e $P_{wk}(X; Y)$ quando X tem a propriedade DP.

Lema 3.43 *Sejam X e Y espaços de Banach tal que X tem a propriedade DP. Então $P_{wk}(X; Y) \subset P_{wsc}(X; Y)$.*

Demonstração: Sejam $P \in P_{wk}(X; Y)$ e $(x_n)_n$ uma seqüência em X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, para $x \in X$.

Vamos supor por absurdo que $P(x_n) \not\rightarrow P(x)$, isto é, existem $\varepsilon_o > 0$ e uma subseqüência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tais que

$$\|P(x_{n_k}) - P(x)\| > \varepsilon_o$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora vamos considerar uma seqüência w -Cauchy $a = (a_m)_m$ dada por

$$a_m = \begin{cases} x_{n_k} & \text{se } m = 2k - 1 \\ x & \text{se } m = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Assim, como X tem a propriedade DP, temos pelo corolário 3.39 que $(P(a_m))_m$ é uma seqüência de Cauchy. Como

$$P(a_m) = \begin{cases} P(x_{n_k}) & \text{se } m = 2k - 1 \\ P(x) & \text{se } m = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

para $\varepsilon_o > 0$ dado acima, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k > n_o$, temos que

$$\|P(x_{n_k}) - P(x)\| < \varepsilon_o.$$

Absurdo, pois $\|P(x_{n_k}) - P(x)\| > \varepsilon_o$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $P \in P_{wsc}(X; Y)$. $\blacksquare$

Uma modificação na hipótese do lema 3.43 nos permite provar que se X tem a propriedade DP e $L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$, então $P({}^kX; Y) = P_{wsc}({}^kX; Y)$. Para isso, vamos utilizar os dois resultados a seguir.

Proposição 3.44 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade DP, Y um espaço de Banach, $T \in L({}^k X; Y)$ e $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k]})_n$ seqüências w -Cauchy em X , uma das quais é w -convergente para zero. Se $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é convergente, então $T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) \rightarrow 0$.*

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$.

Para cada $y^* \in Y'$, definimos $T_{y^*} \in L({}^{k-1} X; X')$ por

$$T_{y^*}(x_2, \dots, x_k)(x) = y^* \circ T(x, x_2, \dots, x_k)$$

para quaisquer $x, x_2, \dots, x_k \in X$. Afirmamos que a seqüência $(T_{y^*}(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é w -Cauchy em X' . De fato, uma vez que $(x_n^{[2]}), \dots, (x_n^{[k]})_n$ são seqüências w -Cauchy, segue do lema 1.34 que a seqüência $(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})_n$ é w -Cauchy em X^{k-1} . Como $T_{y^*} \in L({}^{k-1} X; X')$ e X tem a propriedade DP, segue da proposição 3.24, que $(T_{y^*}(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é w -Cauchy em X' . Desde que X tem a propriedade DP e $(x_n^{[1]})_n \xrightarrow{w} 0$, segue do teorema 3.2 (g), que $T_{y^*}(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})(x_n^{[1]}) \rightarrow 0$. Assim

$$T_{y^*}(x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]})(x_n^{[1]}) = y^* \circ T(x_n^{[1]}, x_n^{[2]}, \dots, x_n^{[k]}) \rightarrow 0$$

para qualquer $y^* \in Y'$ e conseqüentemente $T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) \xrightarrow{w} 0$. Mas por hipótese, $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é convergente, então $T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) \rightarrow 0$. ■

Esta proposição foi também demonstrada por Aron-Hervés-Valdivia em [2] (ver teorema 2.3 e lema 2.4), numa versão mais geral.

Teorema 3.45 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade DP e Y um espaço de Banach tais que $L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $T \in L({}^k X; Y)$. Se $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k]})_n$ são seqüências w -Cauchy em X , então a seqüência $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é convergente.*

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre k . Para $k = 1$ o resultado é trivial, pois X tem a propriedade DP.

Vamos supor que o teorema vale para aplicações k -lineares e vamos provar o resultado para as aplicações $(k+1)$ -lineares. Para tal, consideremos $T \in L({}^{k+1} X; Y)$ e as seqüências $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k+1]})_n$ w -Cauchy em X .

Vamos supor primeiro, que uma das seqüências é w -convergente para zero. Sem perda de generalidade, consideremos $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$. Agora seja $S : X \rightarrow c_o(Y)$ dada por

$$S(x) = (T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x))_n$$

para todo $x \in X$. Observemos que $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x))_n \in c_o(Y)$ para cada $x \in X$. De fato, para cada $x \in X$, definimos $T_x \in L({}^k X; Y)$ por

$$T_x(x_1, \dots, x_k) = T(x_1, \dots, x_k, x)$$

para cada $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Pela hipótese de indução a seqüência $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x))_n$ é convergente, então pela proposição 3.44, temos que $T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x) \rightarrow 0$, ou seja $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x))_n \in c_o(Y)$.

Claramente $S \in L(X, c_o(Y))$. Vamos provar que S é w -compacta. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n \in L(X, Y)$ dada por $S_n(x) = T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}, x)$ para todo $x \in X$. Agora por hipótese, $L(X, Y) = L_{wk}(X; Y)$, logo $S_n \in L_{wk}(X; Y)$. Assim, pelo lema 3.37, basta verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^{**}(x^{**})\| = 0$$

para qualquer $x^{**} \in X''$.

Para cada $x^{**} \in X''$, definimos $S_{x^{**}} : X^k \rightarrow Y$ por

$$S_{x^{**}}(x_1, \dots, x_k) = (T_1(x_1, \dots, x_k))^{**}(x^{**}) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \in X^k,$$

onde $T_1(x_1, \dots, x_k) \in L(X; Y)$ é dado por $T_1(x_1, \dots, x_k)(x) = T(x_1, \dots, x_k, x)$ para cada $x \in X$. Observemos que $S_{x^{**}}(x_1, \dots, x_k) \in Y$ para todo $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. De fato, como $T_1(x_1, \dots, x_k) \in L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$, pelo teorema 1.44, $T_1(x_1, \dots, x_k)^{**}(X'') \subseteq Y$.

Claramente $S_{x^{**}}$ é k -linear e contínua.

Assim como X tem a propriedade DP e $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k]})_n$ são seqüências w -Cauchy em X , pela hipótese de indução, a seqüência $(S_{x^{**}}(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}))_n$ é convergente. Uma vez que $x_n^{[1]} \xrightarrow{w} 0$, segue da proposição 3.44 que $S_{x^{**}}(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) \rightarrow 0$ e conseqüentemente

$$\|S_n^{**}(x^{**})\| = \|(T_1(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}))^{**}(x^{**})\| = \|S_{x^{**}}(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]})\| \rightarrow 0.$$

Logo S é w -compacta. Como X tem a propriedade DP, a seqüência $(S(x_n^{[k+1]}))_n$ converge para algum $w = (w_j)_j \in c_o(Y)$. Então

$$\|T(x_j^{[1]}, \dots, x_j^{[k]}, x_n^{[k+1]}) - w_j\| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|T((x_j^{[1]}, \dots, x_j^{[k]}, x_n^{[k+1]}) - w_j)\| = \|S(x_n^{[k+1]}) - w\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Assim

$$\|T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]})\| \leq \|T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]}) - w_n\| + \|w_n\| \rightarrow 0.$$

Agora se $(x_n^{[1]}), \dots, (x_n^{[k+1]})_n$ são seqüências w -Cauchy em X , basta provar que $(T(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k+1]}))_n$ é uma seqüência de Cauchy em Y , pois Y é um espaço de Banach. A ideia da demonstração é análoga à prova do teorema 3.38 para o caso geral. ■

Corolário 3.46 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade DP e Y um espaço de Banach tais que $L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$. Então $P(kX; Y) = P_{wsc}(kX; Y)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Sejam $P \in P({}^kX; Y)$ e $(x_n)_n$ uma seqüência w -convergente para x em X . Suponhamos que $P(x_n) \not\rightarrow P(x)$, isto é. existem $\varepsilon > 0$ e uma subseqüência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tais que

$$\|P(x_{n_k}) - P(x)\| > \varepsilon$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Consideremos uma seqüência w -Cauchy $a = (a_m)_m$ em X definida por

$$a_m = \begin{cases} x_{n_k} & \text{se } m = 2k - 1 \\ x & \text{se } m = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como X tem a propriedade DP e $L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$, segue do teorema anterior que a seqüência

$$P(a_m) = \begin{cases} P(x_{n_k}) & \text{se } m = 2k - 1 \\ P(x) & \text{se } m = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

é uma seqüência de Cauchy, e assim obtemos uma contradição. Logo $P \in P_{wsc}({}^kX; Y)$. ■

Observemos que a hipótese de X ter a propriedade DP é importante. De fato, consideremos $X = l_2$, $Y = l_1$ e $Q \in P({}^kl_2; l_1)$, definido por $Q((x_n)_n) = (x_n^k)_n$ para todo $(x_n)_n \in l_2$ e $k \geq 2$. Pela proposição 1.43, temos que $L(l_2; l_1) = L_{wk}(l_2; l_1)$, e pelo exemplo 3.23, concluímos que Q não é w -seqüencialmente contínuo. Portanto, $L(l_2; l_1) = L_{wk}(l_2; l_1)$, mas $P({}^kl_2; l_1) \not\subset P_{wsc}({}^kl_2; l_1)$.

A seguir daremos alguns exemplos de espaços que satisfazem as hipóteses do teorema 3.45.

Exemplo 3.47 Sejam X um espaço de dimensão finita e Y um espaço de Banach qualquer. Segue do corolário 3.4 que X tem a propriedade DP, e usando a proposição 1.43, temos que $L(X; Y) = L_{wk}(X; Y)$.

Exemplo 3.48 Sejam $X = l_\infty$ e Y um espaço de Banach tal que $l_\infty \not\rightarrow Y$. Do exemplo 3.16 segue que X tem a propriedade DP. Agora pelo teorema 3.7 de [29], temos que $L(l_\infty; Y) = L_{wk}(l_\infty; Y)$.

Exemplo 3.49 Sejam $X = C(K)$, para K um espaço Hausdorff compacto e Y um espaço de Banach tal que $c_0 \not\rightarrow Y$. Segue do exemplo 3.15 que X tem a propriedade DP, e pelo teorema 5 de [24] temos que $L(C(K); Y) = L_{wk}(C(K); Y)$.

Exemplo 3.50 Sejam $X = A(D)$ e Y um espaço de Banach tal que $c_0 \not\rightarrow Y$. No exemplo 3.22 verificamos que X tem a propriedade DP, e por um resultado de Delbaen em [12]-p.293, segue que $L(A(D); Y) = L_{wk}(A(D); Y)$.

Capítulo 4

Espaços Polinomialmente de Schur

Vimos no capítulo 3, que todo espaço de Banach X com a propriedade de Schur também possui a propriedade DP. A recíproca, porém, não é verdadeira. Se considerarmos, por exemplo, o espaço c_0 , este é um espaço de Banach com a propriedade DP, mas não tem a propriedade de Schur, uma vez que $(e_n)_n \subset X$, $e_n \xrightarrow{w} 0$ e $\|e_n\| = 1$.

Neste capítulo apresentaremos uma condição que torna a recíproca verdadeira. Para tal estudaremos os espaços polinomialmente de Schur. Os resultados deste capítulo estão em [7].

Definição 4.1 *Seja X um espaço de Banach. A topologia polinomial fraca de X é a topologia obtida tomando como base todos os conjuntos da forma:*

$$U(x_o, P_1, P_2, \dots, P_n, \varepsilon) = \left\{ x \in X : \sup_{1 \leq i \leq n} |P_i(x) - P_i(x_o)| < \varepsilon \right\}$$

onde $x_o \in X$; $P_1, \dots, P_n \in P(X)$ e $\varepsilon > 0$.

Definição 4.2 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma seqüência $(x_n)_n$ em X converge polinomial fracamente para x se $P(x_n) \rightarrow P(x)$ para todo polinômio $P \in P(X)$. Denotamos tal convergência por $x_n \xrightarrow{P} x$.*

Se $(x_n)_n$ converge para x em X , então, para todo $P \in P(X)$, temos que $P(x_n) \rightarrow P(x)$ uma vez que P é contínuo. Logo, a convergência na norma implica a convergência na topologia polinomial fraca. Além disso, a convergência polinomial fraca implica a convergência fraca, pois $P(X) = X' \subset P(X)$.

Definição 4.3 *Dizemos que um espaço de Banach X é um espaço polinomialmente de Schur (ou Λ -espaço) se toda seqüência em X que converge polinomial fracamente para zero, converge para zero na norma.*

Para simplificar a notação, estaremos sempre usando Λ -espaço no lugar de espaço polinomialmente de Schur.

Qualquer espaço de Banach com a propriedade de Schur é um Λ -espaço, pois toda seqüência que converge polinomial fracamente para zero converge fracamente para zero, e como o espaço tem a propriedade de Schur, temos que a seqüência converge para zero. Assim espaços de dimensão finita e o espaço l_1 são exemplos de Λ -espaços.

Teorema 4.4 *Qualquer subespaço fechado de um Λ -espaço é um Λ -espaço.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach tal que X é um Λ -espaço. Seja Y um subespaço fechado de X . Então Y é um espaço de Banach.

Consideremos $(x_n)_n \subset Y$ tal que $x_n \xrightarrow{P} 0$ em Y , isto é. $P(x_n) \rightarrow P(0)$ para qualquer $P \in P(Y)$. Se $Q \in P(X)$, então $Q(x_n) \rightarrow Q(0)$, pois $Q|_Y \in P(Y)$ e $x_n \xrightarrow{P} 0$ em Y . Como X é um Λ -espaço, segue que $x_n \rightarrow 0$. Portanto Y é um Λ -espaço. ■

Proposição 4.5 *O espaço de Banach c_o não é um Λ -espaço.*

Demonstração: Segue do teorema Bogdanowicz-Pelczyński-Littlewood (ver teorema 3.4.1 de [16]) que, para todo $P \in P({}^k c_o)$, $k \geq 2$, existe uma seqüência $(P_n)_n$ tal que $P_n \rightarrow P$, onde $P_n(x) = \sum_{l=1}^{m_n} \alpha_l^{[n]} \psi_{l1}^{[n]}(x) \psi_{l2}^{[n]}(x) \cdots \psi_{lk}^{[n]}(x)$ para todo $x \in c_o$, para $\psi_{l1}^{[n]}, \dots, \psi_{lk}^{[n]} \in c'_o$ e $\alpha_l^{[n]} \in \mathbb{K}$, onde $l = 1, \dots, m_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o > 0$ tal que $\|P_{n_o} - P\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e conseqüentemente,

$$\|P_{n_o}(e_j) - P(e_j)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Desde que $e_j \xrightarrow{w} 0$ em c_o , temos que $P_{n_o}(e_j) \rightarrow 0$, isto é, existe j_o tal que

$$\|P_{n_o}(e_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j > j_o.$$

Como

$$\|P(e_j)\| \leq \|P_{n_o}(e_j) - P(e_j)\| + \|P_{n_o}(e_j)\|,$$

temos que $\|P(e_j)\| < \varepsilon$ para todo $j > j_o$. Logo $e_j \xrightarrow{P} 0$.

Mas $\|e_j\| = 1$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$, conseqüentemente $\|e_j\| \not\rightarrow 0$. Portanto c_o não é Λ -espaço. ■

Lema 4.6 *Sejam X e Y espaços de Banach isomorfos. Se Y é um Λ -espaço, então X é um Λ -espaço.*

Demonstração: Seja $T : X \rightarrow Y$ um isomorfismo. Consideremos $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{P} 0$. Como para cada $P \in P(Y)$ temos que $P \circ T \in P(X)$, então $P \circ T(x_n) \rightarrow 0$, ou seja, $T(x_n) \xrightarrow{P} 0$. Agora, por hipótese Y é um Λ -espaço, então $T(x_n) \rightarrow 0$ e conseqüentemente $x_n \rightarrow 0$, uma vez que T é um isomorfismo. Logo X é um Λ -espaço. ■

Proposição 4.7 *Se um espaço de Banach X tem um subespaço isomorfo a c_o , então X não é um Λ -espaço.*

Demonstração: Seja Y um subespaço de X tal que $Y \cong c_o$. Como c_o não é Λ -espaço, Y também não é Λ -espaço. Assim segue do teorema 4.4 que X não é Λ -espaço. ■

Exemplo 4.8 O espaço de Banach $A(D)$ tem um subespaço isomorfo a c_o .

Seja $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Como ∂D é compacto e infinito, temos que ∂D tem um ponto de acumulação λ . Seja $\lambda_1 \in \partial D$ tal que $\lambda_1 \neq \lambda$. Então existem abertos disjuntos U_1 e V_1 tais que $\lambda_1 \in U_1$ e $\lambda \in V_1$. Seja $\lambda_2 \in \partial D \cap V_1$ tal que $\lambda_2 \neq \lambda$. Então existem abertos disjuntos U_2 e V_2 contidos em V_1 tais que $\lambda_2 \in U_2$ e $\lambda \in V_2$.

Assim podemos construir por indução uma seqüência $(\lambda_n)_n \subset \partial D$ e uma seqüência de abertos disjuntos $(U_n)_n$, com $\lambda_n \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n \in A(D)$ por

$$f_n(z) = \frac{1 + \overline{\lambda_n}z}{2},$$

para todo $z \in \overline{D}$. Então $f_n(\lambda_n) = 1$ e $|f_n(z)| < 1$ se $z \in \overline{D} \setminus \{\lambda_n\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|f_n\| = 1$. Se fixarmos $0 < \varepsilon_o < 1$, podemos supor que $|f_n(z)| < \frac{\varepsilon_o}{2^n}$ para todo $z \in \overline{D} \setminus U_n$, pois caso contrário, basta trocar f_n por uma potência de f_n conveniente, de forma a obter $|f_n(z)| < \frac{\varepsilon_o}{2^n}$ para todo $z \in \overline{D} \setminus U_n$.

Queremos definir uma aplicação linear T de c_o em $A(D)$. Para tal, provaremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n \in A(D)$ para cada $x = (x_n)_n \in c_o$. Seja $x = (x_n)_n \in c_o$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon_o}$ para qualquer $n \geq n_o$. Assim para qualquer $t \in \overline{D}$, temos que

$$\left| \sum_{n=n_o}^{\infty} x_n f_n(t) \right| \leq \sum_{n=n_o}^{\infty} |x_n| |f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon_o} \sum_{n=n_o}^{\infty} |f_n(t)|.$$

Se $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_o}{2^n} = \varepsilon_o$.

Se $t \in U_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$, então $t \notin U_n$ para todo $n \neq i$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| = \sum_{n \neq i} |f_n(t)| + |f_i(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_o}{2^n} + \|f_i\| = 1 + \varepsilon_o$$

Assim $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \leq 1 + \varepsilon_o$ para qualquer $t \in \overline{D}$, e conseqüentemente $\left| \sum_{n=n_o}^{\infty} x_n f_n(t) \right| < \varepsilon$ para qualquer $t \in \overline{D}$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ converge uniformemente.

Seja T a aplicação linear de c_o em $A(D)$ dada por

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$$

para cada $x = (x_n)_n \in c_o$. Afirmamos que para cada $x \in c_o$

$$(1 - \varepsilon_o)\|x\| \leq \|T(x)\| \leq (1 + \varepsilon_o)\|x\|.$$

De fato,

$$\|T(x)\| = \sup_{t \in \overline{D}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(t) \right| \leq \sup_{t \in \overline{D}} (\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|)$$

e conseqüentemente

$$\|T(x)\| \leq \|x\|(1 + \varepsilon_o) \quad (*)$$

Por outro lado, se $x = (x_n)_n \in c_o$, então, para a seqüência $(\lambda_i)_i \subset \partial D$ construída acima, temos que

$$\|T(x)\| \geq |T(x)(\lambda_i)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(\lambda_i) \right| = |x_i + \sum_{n \neq i} x_n f_n(\lambda_i)| \geq |x_i| - \left| \sum_{n \neq i} x_n f_n(\lambda_i) \right|.$$

Como

$$\left| \sum_{n \neq i} x_n f_n(\lambda_i) \right| \leq \sum_{n \neq i} |x_n| |f_n(\lambda_i)| \leq \|x\| \sum_{n \neq i} |f_n(\lambda_i)| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_o}{2^n} \leq \|x\| \varepsilon_o,$$

temos que

$$\|T(x)\| \geq |x_i| - \varepsilon_o \|x\|,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim $\|T(x)\| + \varepsilon_o \|x\| \geq \|x\|$, isto é,

$$\|T(x)\| \geq (1 - \varepsilon_o)\|x\|. \quad (**)$$

Agora de (*) e (**) temos que

$$(1 - \varepsilon_o)\|x\| \leq \|T(x)\| \leq (1 + \varepsilon_o)\|x\|.$$

Assim T é um isomorfismo sobre sua imagem, ou seja, $A(D)$ tem um subespaço isomorfo a c_o . Agora, segue da proposição 4.7 que $A(D)$ não é um Λ -espaço.

Com uma demonstração análoga à do exemplo 4.8 e utilizando o teorema de Urysohn, concluímos que $C(K)$ não é um Λ -espaço para K compacto e infinito.

Teorema 4.9 *Sejam $p \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $1 < p < \infty$ e $N \geq p$. Se $(x_n)_n$ é uma seqüência em l_p tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $P(x_n) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N l_p)$, então $\|x_n\| \rightarrow 0$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n \subset l_p$ tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $P(x_n) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N l_p)$, $N \geq p$. Assim $(x_n)_n$ é limitada. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\|x_n\| \leq 1$.

Além disso, vamos supor por absurdo que $x_n \not\rightarrow 0$, isto é, existe uma subseqüência de $(x_n)_n$, que por abuso de notação denotaremos por $(x_n)_n$, e $\varepsilon > 0$, onde $\|x_n\| > \varepsilon$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para obter uma contradição, vamos construir uma subseqüência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_j} \rightarrow 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $x_n = (x_n^{[i]})_i \in l_p$. Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, para cada ε_k , k -ésimo elemento da base canônica de l_p , $q = \frac{p}{p-1}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n^{[i]} e_k^{[i]} = x_n^{[k]} \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \quad (I)$$

e cada $k \in \mathbb{N}$.

Para encontrar uma subseqüência de $(x_n)_n$ que converge para zero, vamos construir indutivamente uma seqüência $(m_i, n_i)_i \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Seja $m_0 = n_0 = 1$. Usando (I) para $k=1$, encontramos $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1}^{[1]}|^{p^{1/2}} < \frac{1}{2^2}$.

Como $x_{n_1} \in l_p$, sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_1}^{[i]}|^{p^{1/2}} < \infty$, logo existe $m_1 > m_0$ tal que

$$\sum_{i=m_1}^{\infty} |x_{n_1}^{[i]}|^{p^{1/2}} < \frac{1}{2^2}.$$

Agora, de (I) para cada $k \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n^k| < \left(\frac{1}{2^{3m_1}} \right)^{\frac{1}{p^{1/2}}} \quad \forall n > s_k.$$

Consideremos $s' = \max\{s_1, s_2, \dots, s_{m_1}\}$, então

$$|x_n^k| < \left(\frac{1}{2^{3m_1}} \right)^{\frac{1}{p^{1/2}}} \quad \forall n > s', \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m_1\}.$$

Assim para $n_2 > \max\{s', n_1\}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{m_1} |x_{n_2}^{[i]}|^{p^{1/2}} < \frac{1}{2^3}.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_2}^{[i]}|^{p_j} < \infty$, existe $m_2 > m_1$ tal que

$$\sum_{i=m_2}^{\infty} |x_{n_2}^{[i]}|^{p_j} < \frac{1}{2^3}.$$

Suponhamos que $n_1, n_2, \dots, n_{j-1}, m_1, m_2, \dots$ e m_{j-1} já foram escolhidos. Então, de (I), para cada $k \in \{1, 2, \dots, m_{j-1}\}$ existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n^{[k]}| < \left(\frac{1}{2^{j+1} m_{j-1}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \quad \forall n > s_k.$$

Consideremos $s_o = \max\{s_k : k \in \{1, 2, \dots, m_{j-1}\}\}$, então

$$|x_n^{[k]}| < \left(\frac{1}{2^{j+1} m_{j-1}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \quad \forall n > s_o \text{ e } \forall k \in \{1, 2, \dots, m_{j-1}\}.$$

Logo para $n_j > \max\{n_{j-1}, s_o\}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{m_{j-1}} |x_{n_j}^{[i]}|^{p_j} < \frac{1}{2^{j+1}}. \quad (II)$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_j}^{[i]}|^{p_j} < \infty$, existe $m_j > m_{j-1}$ tal que

$$\sum_{i=m_j}^{\infty} |x_{n_j}^{[i]}|^{p_j} < \frac{1}{2^{j+1}}. \quad (III)$$

Agora, consideremos a subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_j)_j$, para $(n_j)_j$ encontrada acima. Para provar que $(x_{n_j})_j$ converge para zero, vamos substituir $(x_{n_j})_j$ por uma sequência $(y_j)_j$ tal que $\|x_{n_j} - y_j\| \rightarrow 0$ e $y_j \rightarrow 0$. Para tal, vamos definir $y_j = (y_j^{[i]})_i \in l_p$ por:

$$y_j^{[i]} = \begin{cases} x_{n_j}^{[i]} & : i \in E_j \\ 0 & : i \notin E_j \end{cases} \quad j \in \mathbb{N}$$

onde $E_j = \{m_{j-1} < k < m_j\}$.

Como

$$\begin{aligned} \|y_j - x_{n_j}\|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |y_j^{[i]} - x_{n_j}^{[i]}|^p = \sum_{i \notin E_j} |x_{n_j}^{[i]}|^p = \sum_{i=1}^{m_{j-1}} |x_{n_j}^{[i]}|^p + \sum_{i=m_j}^{\infty} |x_{n_j}^{[i]}|^p \\ &\stackrel{(II), (III)}{\leq} \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^j}, \end{aligned}$$

segue que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j - x_{n_j}\|^p \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^j} = 0$. Assim basta verificar que $y_j \rightarrow 0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, vamos definir $z_j = (z_j^{[i]})_i$, onde

$$z_j^{[i]} = \begin{cases} \overline{y_j^{[i]}} |y_j^{[i]}|^{p-2} & : y_j^{[i]} \neq 0 \\ 0 & : y_j^{[i]} = 0 \end{cases}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $y_j^{[i]} \neq 0$ para $i \in E_j$, pois caso isso ocorresse não alteraria as somas abaixo. Desta forma podemos escrever

$$z_j^{[i]} = \begin{cases} \overline{y_j^{[i]}} |y_j^{[i]}|^{p-2} & : i \in E_j \\ 0 & : i \notin E_j \end{cases}$$

Claramente $z_j \in l_p$ uma vez que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_j^{[i]}|^q = \sum_{i \in E_j} \left| \overline{y_j^{[i]}} |y_j^{[i]}|^{p-2} \right|^q = \sum_{i \in E_j} |y_j^{[i]}|^p = \sum_{i \in E_j} |x_{n_j}^{[i]}|^p \leq \|x_{n_j}\|^p \leq 1.$$

Como $l_q \approx l'_p$, podemos definir $T_j \in (l_p)'$ por $T_j((a_i)_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_j^{[i]}$ para qualquer $(a_i)_i \in l_p$. Consideremos agora $P : l_p \rightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$P(a) = \sum_{j=1}^{\infty} (T_j(a))^N$$

para todo $a \in l_p$. Observe que $\sum_{j=1}^{\infty} (T_j(a))^N$ converge para cada $a \in l_p$, uma vez que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |T_j(a)|^N = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_j^{[i]} \right|^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |z_j^{[i]}| \right)^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_j^{[i]}| |z_j^{[i]}| \right)^N,$$

para $b_j = (b_j^{[i]})_i \in l_p$ tal que $b_j^{[i]} = \begin{cases} a_i & : i \in E_j \\ 0 & : i \notin E_j \end{cases}$ $j \in \mathbb{N}$. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_j^{[i]}| |z_j^{[i]}| \right)^N &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_j^{[i]}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_j^{[i]}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^N \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\|b_j\| \left(\sum_{i \in E_j} |y_j^{[i]}|^p \right)^{\frac{1}{q}} \right]^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} [\|b_j\| \|y_j\|^{\frac{p}{q}}]^N \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j\|^N = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in E_j} |b_j^{[i]}|^p \right)^{\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{i \in E_j} |b_j^{[i]}|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p = \|a\|^p$, para $\|a\| \leq 1$ segue que $\sum_{i \in E_j} |b_j^{[i]}|^p \leq 1$. Desde que $\frac{N}{p} > 1$, concluímos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in E_j} |b_j^{[i]}|^p \right)^{\frac{N}{p}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in E_j} |b_j^{[i]}|^p \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in E_j} |a_i|^p \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p = \|a\|^p \leq 1.$$

Logo $\sum_{j=1}^{\infty} |T_j(a)|^N \leq 1$ para qualquer $a \in l_p$, tal que $\|a\| \leq 1$. Consideremos, agora qualquer $a \in l_p$ tal que $\|a\| \neq 0$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| T_j \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \right|^N = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|a\|^N} |T_j(a)|^N \leq 1,$$

isto é, $\sum_{j=1}^{\infty} |T_j(a)|^N \leq \|a\|^N$. Logo a série definida por $P(a)$ converge absolutamente para cada $a \in l_p$ e $\sup\{|P(a)| : \|a\| \leq 1\} \leq 1$.

Afirmamos que $P \in P(Nl_p)$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos o polinômio N -homogêneo $P_k : l_p \rightarrow \mathbb{K}$ definido por $P_k(a) = \sum_{j=1}^k (T_j(a))^N$ para qualquer $a \in l_p$. Assim, $P_k(a) \rightarrow P(a)$ para cada $a \in l_p$, e pelo teorema 2.42 concluímos que $P \in P(Nl_p)$.

Como $\|x_{n_j} - y_j\| \rightarrow 0$, segue do teorema 2.43 que $|P(x_{n_j}) - P(y_j)| \rightarrow 0$. Agora, pela hipótese temos que $P(x_{n_j}) \rightarrow 0$, então

$$|P(y_j)| = |P(y_j) - P(x_{n_j}) + P(x_{n_j})| \leq |P(y_j) - P(x_{n_j})| + |P(x_{n_j})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} P(y_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} (T_k(y_j))^N = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_j^{[i]} z_k^{[i]} \right)^N = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in E_k} y_j^{[i]} \overline{y_k^{[i]}} |y_k^{[i]}|^{p-2} \right)^N \\ &= \left(\sum_{i \in E_j} |y_j^{[i]}|^2 |y_j^{[i]}|^{p-2} \right)^N = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_j^{[i]}|^p \right)^N = \|y_j\|^{pN} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo $y_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ e conseqüentemente $x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Assim obtemos uma contradição, pois $\|x_n\| > \varepsilon$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. ■

Note que a condição $N \geq p$ do teorema anterior é fundamental. Consideremos $1 < p < \infty$ e $N < p$. Seja $(e_n)_n$ a base canônica do l_p . Assim $e_n \xrightarrow{w} 0$ e $\|e_n\| \not\rightarrow 0$. A seguir, mostraremos que $P(e_n) \rightarrow 0$ para cada $P \in P(Nl_p)$. Seja $T \in L(Nl_p)$. Pelo teorema de Pitt (ver [28] ou teorema 3.5.1 de [16]), existe a seqüência $(T_n)_n$ tal que

$T_n \rightarrow T$, onde $T_n(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^{[n]} \psi_{i_1}^{[n]}(x_1) \psi_{i_2}^{[n]}(x_2) \cdots \psi_{i_N}^{[n]}(x_N)$ para $\psi_{i_1}^{[n]}, \dots, \psi_{i_N}^{[n]} \in l'_p$ e $\alpha_i^{[n]} \in \mathbb{K}$, onde $i = 1, \dots, m_n$ e para todo $x_1, \dots, x_n \in l_p$. Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o > 0$ tal que $\|T_{n_o} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$, conseqüentemente

$$\|T_{n_o}(e_j, \dots, e_j) - T(e_j, \dots, e_j)\| \leq \|T_{n_o} - T\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $e_j \xrightarrow{w} 0$ em l_p , temos que $\sum_{i=1}^{m_{n_o}} \alpha_i^{[n_o]} \psi_{i_1}^{[n_o]}(e_j) \psi_{i_2}^{[n_o]}(e_j) \cdots \psi_{i_N}^{[n_o]}(e_j) \rightarrow 0$, ou seja, $T_{n_o}(e_j, \dots, e_j) \rightarrow 0$. Logo existe $j_o > 0$ tal que

$$\|T_{n_o}(e_j, \dots, e_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j > j_o.$$

Assim, para qualquer $j > j_o$

$$\|T(e_j, \dots, e_j)\| \leq \|T_{n_o}(e_j, \dots, e_j) - T(e_j, \dots, e_j)\| + \|T_{n_o}(e_j, \dots, e_j)\| < \varepsilon.$$

Logo $T(e_j, \dots, e_j) \rightarrow 0$. Se $P \in P(^N l_p)$ é o polinômio associado a T , então $P(e_j) \rightarrow 0$. Conseqüentemente $P(e_j) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N l_p)$.

Corolário 4.10 Para $1 \leq p < \infty$, l_p é Λ - espaço.

Demonstração: Para $p = 1$ é trivial. Para $1 < p < \infty$, vamos considerar $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > p$. Seja $(f_j)_j \subset l_p$ tal que $f_j \xrightarrow{P} 0$. Assim $f_j \xrightarrow{w} 0$ e $P(f_j) \rightarrow 0$ para cada $P \in P(^N l_p)$. Agora, do teorema 4.9 temos que $\|f_j\| \rightarrow 0$. ■

Agora consideraremos os espaços da forma $L_p(\mu)$. Como o teorema 4.9 é válido para o espaço l_2 , então, pelo teorema 1.3, ele também é válido para $L_2(\mu)$. Para os outros espaços $L_p(\mu)$ usaremos o teorema abaixo.

Teorema 4.11 Sejam Ω um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω e μ uma medida positiva de Ω . Consideremos $2 \leq p < \infty$ e N inteiro tal que $N \geq p$. Se $(f_n)_n \subset L_p(\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{w} 0$ e $P(f_n) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N L_p(\mu))$, então $\|f_n\| \rightarrow 0$.

Demonstração: Como $f_n \xrightarrow{w} 0$, temos que $(f_n)_n$ é limitada. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\|f_n\|_p \leq 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, vamos supor por absurdo que $f_n \not\xrightarrow{w} 0$ em $L_p(\mu)$, isto é, existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência de $(f_n)_n$, que por abuso de notação denotaremos por $(f_n)_n$, tais que $\|f_n\| > \varepsilon$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente vamos provar que $(f_n)_n \subset L_2(\mu)$ e $f_n \rightarrow 0$ em $L_2(\mu)$. Seja W o espaço gerado por $(f_n)_n$. Então W é separável. Assim pelo lema III.8.5 de [15], existem $\Omega_1 \in \Sigma$, Σ_1 uma álgebra e $\mu_1 = \mu|_{\Sigma_1}$ tal que $W \subset L_p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ e $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ é σ -finito. Logo podemos assumir que (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita e pela proposição 1.56, podemos considerar (Ω, Σ, μ) um espaço de probabilidade. Logo $(f_n)_n \subset L_2(\mu)$, pois $2 \leq p$.

Afirmamos que $f_n \xrightarrow{w} 0$ em $L_2(\mu)$. De fato, como $2 \leq p$, para $q = \frac{p}{p-1}$, temos que $q \leq 2$ e conseqüentemente $L_2(\mu) \subset L_q(\mu)$. Pela hipótese $f_n \xrightarrow{w} 0$ em $L_p(\mu)$, isto é, $\psi(f_n) \rightarrow 0$ para qualquer $\psi \in (L_p(\mu))' \cong L_q(\mu)$. Assim $\varphi(f_n) \rightarrow 0$ para qualquer $\varphi \in L_2(\mu) \subset L_q(\mu)$, isto é, $f_n \xrightarrow{w} 0$ em $L_2(\mu)$.

Claramente $P(f_n) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N L_2(\mu))$, pois $P|_{L_p(\mu)}$ é um polinômio N -homogêneo contínuo em $L_p(\mu)$ e por hipótese $P|_{L_p(\mu)}(f_n) \rightarrow 0$. Logo pelo comentário efetuado depois do corolário 4.10 para espaços de Hilbert, obtemos que $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$ em $L_2(\mu)$.

Para obter uma contradição vamos construir uma subsequência $(f_{n_j})_j$ de $(f_n)_n$ tal que $f_{n_j} \rightarrow 0$ em $L_p(\mu)$. Como $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$ em $L_2(\mu)$, então, pelo teorema III.3.6 e pelo corolário III.6.3 de [15], existe uma subsequência de $(f_n)_n$ que converge para zero μ -uniformemente. Por abuso de notação, vamos representar essa subsequência por $(f_n)_n$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $A_j \in \Sigma$ tal que $\mu(A_j) < \frac{1}{j}$ e $f_n \rightarrow 0$ em $\Omega \setminus A_j$. Consideremos $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Então $\mu(A) = 0$ e $f_n \rightarrow 0$ em $\Omega \setminus A$. Logo para qualquer $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j > 0$ tal que $|f_{n_j}(t)| < \frac{1}{2^j}$, para qualquer $t \notin A$, ou seja $|f_{n_j}(t)| \leq \frac{1}{2^j}$ em Ω e para qualquer $j \in \mathbb{N}$.

Agora vamos verificar que $f_{n_j} \rightarrow 0$ em $L_p(\mu)$. Sejam

$$E_1 = A_1; E_2 = A_2 \setminus A_1; \dots; E_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right), \dots$$

Claramente $(E_j)_j \subset \Sigma$, são dois a dois disjuntos e $|f_{n_j}(t)| \leq \frac{1}{2^j}$ em $\Omega \setminus E_j$.

Desde que

$$\begin{aligned} \|f_{n_j} \chi_{E_j} - f_{n_j}\|_p^p &= \int_{\Omega} |f_{n_j} \chi_{E_j}(t) - f_{n_j}(t)|^p d\mu = \int_{\Omega \setminus E_j} |f_{n_j}(t)|^p d\mu \\ &\leq \int_{\Omega \setminus E_j} \left(\frac{1}{2^j}\right)^p d\mu = \left(\frac{1}{2^j}\right)^p \mu(\Omega \setminus E_j) \\ &\leq \left(\frac{1}{2^j}\right)^p \mu(\Omega), \end{aligned}$$

temos que $\|f_{n_j} \chi_{E_j} - f_{n_j}\|_p \rightarrow 0$. Assim, para verificar que $f_{n_j} \rightarrow 0$ em $L_p(\mu)$, basta provar que $f_{n_j} \chi_{E_j} \rightarrow 0$ em $L_p(\mu)$. Para tal, vamos proceder de modo análogo à demonstração do teorema 4.9. Consideremos

$$g_j(t) = f_{n_j} \chi_{E_j}(t) = \begin{cases} f_{n_j}(t) & : t \in E_j \\ 0 & : t \notin E_j \end{cases}$$

É claro que $\overline{g_j(t)}|g_j(t)|^{p-2} \in L_q(\mu)$ para $q = \frac{p}{p-1}$. pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\overline{g_j(t)}|g_j(t)|^{p-2}|^q d\mu(t) &= \int_{\Omega} (|g_j(t)|^{p-1})^q d\mu(t) = \int_{\Omega} (|g_j(t)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} d\mu(t) \\ &= \int_{\Omega} |g_j(t)|^p d\mu(t) = \int_{E_j} |f_{n_j}(t)|^p d\mu(t) \leq \int_{\Omega} |f_{n_j}(t)|^p d\mu(t) < \infty. \end{aligned}$$

Assim para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos definir $T_j \in (L_p(\mu))'$ por

$$T_j(h) = \int_{E_j} h(t) \overline{g_j(t)} |g_j(t)|^{p-2} d\mu(t)$$

para todo $h \in L_p(\mu)$.

Agora vamos definir $P : L_p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$ por $P(f) = \sum_{j=1}^{\infty} (T_j(f))^N$ para qualquer $f \in L_p(\mu)$. Observemos que, para cada $f \in L_p(\mu)$, a série $\sum_{j=1}^{\infty} (T_j(f))^N$ é convergente, uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |T_j(f)|^N &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{E_j} f(t) \overline{g_j(t)} |g_j(t)|^{p-2} d\mu(t) \right|^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} |f(t)| |\overline{g_j(t)}| |g_j(t)|^{p-2} d\mu(t) \right)^N \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} |f(t)| |g_j(t)|^{p-1} d\mu(t) \right)^N = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} |f \chi_{E_j}(t)| |g_j(t)|^{p-1} d\mu(t) \right)^N \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |T_j(f)|^N &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} |f \chi_{E_j}(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g_j(t)|^{(p-1)q} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} \right]^N \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\|f \chi_{E_j}\| \left(\int_{\Omega} |g_j(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} \right]^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f \chi_{E_j}\|^N = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t) \leq \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) = \|f\|^p$, para $\|f\| \leq 1$ segue que $\int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t) \leq 1$. Desde que $\frac{N}{p} > 1$, temos que $\sum_{j=1}^{\infty} |T_j(f)|^N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{N}{p}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t)$ e pelo corolário III.6.18 de [15] concluímos que $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} |f(t)|^p d\mu(t) = \int_{\cup E_j} |f(t)|^p d\mu(t) \leq \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) = \|f\|^p \leq 1$.

Consideremos agora qualquer $f \in L_p(\mu)$ tal que $f \neq 0$. Então

$$\left| P\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| T_j\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \right|^N = \frac{1}{\|f\|^N} \sum_{j=1}^{\infty} |T_j(f)|^N \leq 1,$$

isto é, $\sum_{j=1}^{\infty} |T_j(f)|^N \leq \|f\|^N$. Conseqüentemente, para cada $f \in L_p(\mu)$, a série definida por $P(f)$ converge absolutamente e $\sup\{|P(f)| : \|f\| \leq 1\} \leq 1$.

Afirmamos que $P \in P(^N L_p(\mu))$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $P_k \in P(^N L_p(\mu))$ definido por

$$P_k(f) = \sum_{j=1}^k (T_j(f))^N$$

para cada $f \in L_p(\mu)$. Assim $P_k(f) \rightarrow P(f)$ para cada $f \in L_p(\mu)$ e pelo teorema 2.42, segue que $P \in P(^N L_p(\mu))$.

Então, pela hipótese temos que $P(f_{n_j}) \rightarrow 0$, e como $|g_j - f_{n_j}| \rightarrow 0$, pelo teorema 2.43, segue que $|P(g_j)| \rightarrow 0$.

Mas $|P(g_j)| \leq \left(\int_{E_j} |g_j(t)|^p d\mu(t) \right)^N = \left(\int_{\Omega} |g_j(t)|^p d\mu(t) \right)^N = \|g_j\|^{pN}$. Logo $g_j \rightarrow 0$ e conseqüentemente $f_{n_j} \rightarrow 0$. Absurdo, pois $\|f_{n_j}\| > \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. ■

A condição $N \geq p$ é necessária. De fato, seja $p \geq 2$ e considere um espaço de medida que possui uma seqüência de conjuntos disjuntos $(A_j)_j$ com $0 < \mu(A_j) < \infty$. Como, pela proposição 1.53, $L_p(\mu)$ tem uma cópia isomorfa de l_p , então existe uma aplicação linear contínua $T : l_p \rightarrow L_p(\mu)$ tal que $\|T(x)\| \geq M\|x\|$ para algum $M > 0$ e qualquer $x \in l_p$. Sabemos que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em l_p , mas $e_n \not\xrightarrow{w} 0$ em l_p . Além disso, aplicando o teorema de Pitt (ver [28] ou teorema 3.5.1 de [16]), temos que $Q(e_n) \rightarrow 0$ para qualquer $Q \in P(^N l_p)$.

Consideremos, agora a seqüência $(T(e_n))_n$ w -convergente para zero em $L_p(\mu)$. Para qualquer $P \in P(^N L_p(\mu))$, temos que $P \circ T \in P(^N l_p)$, então $P \circ T(e_n) \rightarrow 0$ para qualquer $P \in P(^N L_p(\mu))$. Como $\|T(x)\| \geq M\|x\|$ para qualquer $x \in l_p$ e $e_n \not\xrightarrow{w} 0$, concluímos que $(T(e_n))_n$ não é convergente para zero.

Portanto encontramos $(T(e_n))_n$ uma seqüência w -convergente para zero em $L_p(\mu)$ tal que para qualquer $P \in P(^N L_p(\mu))$ temos que $P(T(e_n)) \rightarrow 0$, mas $(T(e_n))_n$ não converge para zero.

Corolário 4.12 $L_p(\mu)$ é um Λ -espaço para $2 \leq p < \infty$.

Demonstração: Segue de modo análogo à demonstração do corolário 4.10. ■

Os resultados 4.11 e 4.12 foram demonstrados por Carne-Cole-Gamelin em [7] e nesse mesmo trabalho eles questionam se $L_p(\mu)$, para $1 < p < 2$, é um Λ -espaço. Em [19] Jaramillo e Prieto respondem positivamente tal questão, mostrando que os espaços de Banach super-reflexivos são Λ -espaços. Em particular, $L_p(\mu)$ para $1 < p < \infty$ e μ qualquer é um Λ -espaço.

Teorema 4.13 *Seja μ uma medida. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) μ é atômica:

(ii) $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Pelo teorema 9 do capítulo 5 de [20], se μ é atômica, então $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos por absurdo que μ não é atômica. Neste caso, $L_1(\mu)$ contém uma cópia isométrica de $L_1[0, 1]$ (ver teorema 5 do capítulo 5 de [20]). Assim para obter uma contradição, basta verificar que $L_1[0, 1]$ não tem a propriedade de Schur. Para tal, consideremos a seqüência $(\text{sen}2\pi mt)_m$ em $L_1[0, 1]$. Então

$$\begin{aligned} \|\text{sen}2\pi mt\| &= \int_0^1 |\text{sen}2\pi mt| dt = \int_0^{\frac{1}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt + \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} -\text{sen}2\pi mt dt \\ &\quad + \int_{\frac{2}{2m}}^{\frac{3}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt + \cdots + \int_{\frac{2m-1}{2m}}^{\frac{2m}{2m}} -\text{sen}2\pi mt dt \\ &= m \int_0^{\frac{1}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt - m \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\int_0^{\frac{1}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt = \left(\frac{-\cos2\pi mt}{2\pi m} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2m}} = \frac{-1}{2\pi m} (\cos2\pi mt) \Big|_0^{\frac{1}{2m}} = \frac{1}{\pi m},$$

e

$$\int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} \text{sen}2\pi mt dt = \left(\frac{-\cos2\pi mt}{2\pi m} \right) \Big|_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} = \frac{-1}{2\pi m} (\cos2\pi mt) \Big|_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} = \frac{-1}{\pi m},$$

temos que

$$\int_0^1 |\text{sen}2\pi mt| dt = m \frac{1}{\pi m} - m \left(\frac{-1}{\pi m} \right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Logo $\text{sen}2\pi mt \not\rightarrow 0$ em $L_1[0, 1]$.

Por outro lado, $\text{sen}2\pi mt \xrightarrow{w} 0$ em $L_1[0, 1]$. De fato, como $(\text{sen}2\pi mt)_m$ é limitada, pelo teorema 1.57 basta provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \text{sen}2\pi mt dt = 0$ para qualquer $E \subset [0, 1]$ mensurável.

Primeiramente vamos considerar $E = [a, b]$, onde $0 \leq a < b \leq 1$. Então

$$\left| \int_a^b \text{sen}2\pi mt dt \right| = \left| \frac{-1}{2\pi m} (\cos2\pi mb - \cos2\pi ma) \right| \leq \frac{1}{2\pi m} |\cos2\pi mb - \cos2\pi ma| \leq \frac{1}{\pi m} \rightarrow 0.$$

Assim $\int_0^1 \chi_E(t) \text{sen}2\pi mt dt \rightarrow 0$ para $E = [a, b]$, onde $0 \leq a < b \leq 1$. Conseqüentemente, se f é uma função escada definida em $[0, 1]$, temos que $\int_0^1 f(t) \text{sen}2\pi mt dt \rightarrow 0$

uma vez que $f(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{I_k}(t)$ para cada $t \in [0, 1]$, onde λ_k são constantes e I_k são subintervalos disjuntos de $[0, 1]$.

Agora, seja qualquer $E \subset [0, 1]$ mensurável. Como χ_E é uma função limitada e mensurável, pelo teorema 1.47 existe uma seqüência $(f_n)_n$ de funções escadas tal que $\int_0^1 |\chi_E(t) - f_n(t)| dt \rightarrow 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\int_0^1 |\chi_E(t) - f_{n_o}(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Como f_{n_o} é uma função escada, temos que $\int_0^1 f_{n_o}(t) \operatorname{sen} 2\pi m t dt \rightarrow 0$. Logo existe $m_o \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int_0^1 f_{n_o}(t) \operatorname{sen} 2\pi m_o t dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ para qualquer $m > m_o$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \chi_E(t) \operatorname{sen} 2\pi m t dt \right| &\leq \left| \int_0^1 (\chi_E(t) - f_{n_o}(t)) \operatorname{sen} 2\pi m t dt \right| + \left| \int_0^1 f_{n_o}(t) \operatorname{sen} 2\pi m t dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\chi_E(t) - f_{n_o}(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para qualquer $m \geq m_o$. Portanto $\operatorname{sen} 2\pi m t \xrightarrow{w} 0$. ■

Iremos provar que se X é um Λ -espaço com a propriedade DP, então X tem a propriedade de Schur. Para tal, verificaremos que a topologia fraca polinomial coincide com a topologia fraca sobre conjuntos w -compactos. A seguir, damos uma seqüência de resultados que permitirão provar as afirmações acima.

Definição 4.14 *Sejam X e Y espaços normados e h uma função contínua de X em Y . Dizemos que h é seqüencialmente contínua com relação às topologias fracas se, para qualquer seqüência $(x_n)_n$ w -convergente para x em X , temos que $(h(x_n))_n$ é w -convergente para $h(x)$ em Y .*

Lema 4.15 *Sejam X e Y espaços de Banach, K um subconjunto w -compacto de X e $h : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então $h|_K$ é seqüencialmente contínua com relação às topologias fracas se e somente se $h|_K$ é contínua com relação às topologias fracas.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $\Gamma = \{(x, h(x)) : x \in K\}$. Primeiramente vamos provar que Γ é um subconjunto w -compacto em $X \times Y$. Seja $(x_n, h(x_n))_n$ uma seqüência em Γ . Como K é w -compacto, existe uma subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$, $x \in K$. Por hipótese, h é seqüencialmente contínua com respeito às topologias fracas, logo $h(x_{n_j}) \xrightarrow{w} h(x)$. Assim, $(x_{n_j}, h(x_{n_j}))_j$ é w -convergente em $X \times Y$ para $(x, h(x)) \in \Gamma$. Logo, pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian) Γ é w -compacto.

Agora, vamos verificar que $h|_K$ é contínua com respeito às topologias fracas. Seja $\mathcal{G}$ um conjunto qualquer w -fechado em Y . Vamos provar que $h^{-1}(\mathcal{G}) \cap K$ é w -compacto e conseqüentemente w -fechado. Seja $(x_n)_n \subset h^{-1}(\mathcal{G}) \cap K$. Como Γ é w -compacto e

$(x_n, h(x_n))_n \subset \Gamma$, existe uma subsequência $(x_{n_j}, h(x_{n_j}))_j$ de $(x_n, h(x_n))_n$ tal que $(x_{n_j}, h(x_{n_j})) \xrightarrow{w} (a, h(a)) \in \Gamma$. Assim $x_{n_j} \xrightarrow{w} a \in K$ e $h(x_{n_j}) \xrightarrow{w} h(a)$. Como $h(x_{n_j})_j \subset \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ é w -fechado, temos que $h(a) \in \mathcal{G}$, isto é, $a \in h^{-1}(\mathcal{G})$. Assim, pelo teorema 1.40 (Eberlein-Šmulian), $h^{-1}(\mathcal{G}) \cap K$ é w -compacto.

($\Leftarrow$) Seja $(x_n)_n \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Vamos provar que $h(x_n) \xrightarrow{w} h(x)$. Consideremos $V \subset Y$, vizinhança fraca de $h(x)$. Como $h|_K$ é contínua com respeito às topologias fracas, existe U , vizinhança fraca de x tal que para qualquer $u \in U \cap K$, temos que $h(u) \in V$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$, existe $n_o > 0$ tal que para qualquer $n > n_o$ temos que $x_n \in U \cap K$ e assim $h(x_n) \in V$ para qualquer $n > n_o$. ■

Se no lema 4.15 Y for igual a $\mathbb{K}$, dizemos que h é w -contínua sobre um conjunto w -compacto K se e somente se h é w -seqüencialmente contínua em K .

Lema 4.16 Para X um espaço de Banach, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) cada subconjunto w -compacto de X é polinomial w -compacto;
- (b) qualquer polinômio contínuo, $P : X \rightarrow \mathbb{K}$, restrito a um subconjunto w -compacto de X é w -contínuo;
- (c) qualquer polinômio contínuo, $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ é w -seqüencialmente contínuo;
- (d) se $(x_k)_k$ é uma seqüência w -convergente para zero em X , então para qualquer $m \geq 1$, temos que $\overbrace{(x_k \otimes \cdots \otimes x_k)_k}^{m\text{-vezes}}$ é uma seqüência w -convergente para zero no produto tensorial projetivo $\hat{\otimes}^m X$;
- (e) para qualquer $m \geq 1$, a função $\theta : X \rightarrow \hat{\otimes}^m X$, definida por $\theta(x) = x \otimes \cdots \otimes x$ é seqüencialmente contínua com respeito às topologias fracas de X e de $\hat{\otimes}^m X$;
- (f) a restrição de θ a qualquer subconjunto w -compacto de X é contínua com respeito às topologias fracas de X e de $\hat{\otimes}^m X$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Sejam $P \in P(X)$ e $K \subset X$ w -compacto. Pelo lema 4.15, basta provar que $P|_K$ é w -seqüencialmente contínuo. Vamos supor, por absurdo, que existe $(x_n)_n \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ e $P(x_n) \not\xrightarrow{w} P(x)$. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência de $(x_n)_n$, que por abuso de notação representaremos por $(x_n)_n$, tal que

$$|P(x_n) - P(x)| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como K é w -compacto, pela hipótese segue que K é polinomial w -compacto. Agora se $W = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$, então existe um ponto de acumulação de W , $x_o \in K$, com relação à topologia polinomial fraca. Então, considerando as vizinhanças de x_o ,

$U_k = U(x_o, P, \frac{1}{k})$ para $k \in \mathbb{N}$ e $P \in P(X)$ dado acima, encontramos a subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_k} \in U_k$, ou seja, $|P(x_{n_k}) - P(x_o)| < \frac{1}{k}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Assim para obter uma contradição, basta provar que $x_o = x$. Seja $\varphi \in X' \subset P(X)$. Como x_o é ponto de acumulação de W , existe uma subsequência $(x_{n_i})_i$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_i} \in U_i = U(x_o, \varphi, \frac{1}{i})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo $\varphi(x_{n_i}) \rightarrow \varphi(x_o)$, e conseqüentemente $\varphi(x_o) = \varphi(x)$ para qualquer $\varphi \in X'$, ou seja, $x = x_o$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja K um subconjunto w -compacto de X . Consideremos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de abertos na topologia polinomial fraca em X tal que $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Vamos provar que $\{A_\alpha \cap K\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura w -aberta de K .

Para cada $\alpha \in I$, A_α é um aberto na topologia polinomial fraca, então para cada $a \in A_\alpha \cap K$ existem $P_1, \dots, P_{m_\alpha} \in P(X)$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$U_\alpha(a, P_1, \dots, P_{m_\alpha}, \varepsilon) = \{x \in X : |P_i(x) - P_i(a)| < \varepsilon; i = 1, \dots, m_\alpha\} \subset A_\alpha.$$

Por hipótese, P_i restrito a K é w -contínuo para todo $i = 1, \dots, m_\alpha$. Então para cada $i \in \{1, \dots, m_\alpha\}$, temos que $(P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a)))$ é w -aberto e assim

$$\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} (P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a))) \subset K$$

é w -aberto e contém a . Logo existem $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in X'$ e $\delta > 0$ tais que a vizinhança w -aberta de a , $V_\alpha(a, \varphi_1, \dots, \varphi_s, \delta) = \{x \in K : \sup_{1 \leq i \leq s} |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| < \delta\}$, está contida em

$$\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} (P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a))).$$
 Como

$$\bigcap_{i=1}^{m_\alpha} (P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a))) = U_\alpha(a, P_1, \dots, P_{m_\alpha}, \varepsilon) \cap K \subset A_\alpha \cap K,$$

então, para qualquer $\alpha \in I$, segue que $A_\alpha \cap K$ é w -aberto. Como K é w -compacto e $\{A_\alpha \cap K\}_\alpha$ é uma cobertura fraca de K , existe uma subcobertura finita de K , isto é, $K = \bigcup_{i=1}^r A_{\alpha_i} \cap K$. Logo $K \subset \bigcup_{i=1}^r A_{\alpha_i}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Segue diretamente do lema 4.15.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sejam $P \in P(X)$ e $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Consideremos $K = \{x_n, x : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente K é w -compacto. Assim pela hipótese, temos que $P|_K$ é w -contínuo e pelo lema 4.15, segue que $P|_K$ é w -seqüencialmente contínuo. Portanto $P(x_n) \xrightarrow{w} P(x)$ e P é w -seqüencialmente contínuo em X .

(e) $\Leftrightarrow$ (f) Análogo a prova (b) $\Leftrightarrow$ (c).

(e) $\Rightarrow$ (c) Para provar que qualquer polinômio de X em $\mathbb{K}$ é w -seqüencialmente contínuo, basta verificar que os polinômios m -homogêneos de X em $\mathbb{K}$ são w -seqüencialmente contínuos. Para tal, sejam $m \geq 1$ e P_m um polinômio m -homogêneo de X em

$\mathbb{K}$ que está associado a $T \in L({}^m X)$. Segue da proposição 2.30 que $L({}^m X) \approx (\hat{\otimes}^m X)'$. Assim existe $\hat{T} \in (\hat{\otimes}^m X)'$ tal que $\hat{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = T(x_1, \dots, x_m)$ para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in X$. Conseqüentemente, para qualquer $x \in X$, temos que

$$\hat{T} \circ \theta(x) = \hat{T}(x \otimes \cdots \otimes x) = T(x, \dots, x) = P_m(x),$$

ou seja, $\hat{T} \circ \theta = P_m$.

Agora, como por hipótese θ é seqüencialmente contínua com respeito às topologias fracas, e $\hat{T}$ é linear contínua, temos que P_m é w -seqüencialmente contínuo.

(c) $\Rightarrow$ (e) Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Seja $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Vamos provar que $\theta(x_n) \xrightarrow{w} \theta(x)$ em $\hat{\otimes}^m X$. Como $L({}^m X) \approx (\hat{\otimes}^m X)'$, para cada $\hat{T} \in (\hat{\otimes}^m X)'$ existe $T \in L({}^m X)$ tal que $T(x_1, \dots, x_m) = \hat{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)$ para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in X$. Seja P_m o polinômio m -homogêneo associado a T . Então $P_m = \hat{T} \circ \theta$ e pela hipótese, segue, para todo $\hat{T} \in (\hat{\otimes}^m X)'$, que $\hat{T}(\theta(x_n))$ converge para $\hat{T}(\theta(x))$. Portanto $\theta(x_n) \xrightarrow{w} \theta(x)$.

(e) $\Rightarrow$ (d) Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Seja $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Como θ é seqüencialmente contínua com respeito às topologias fracas, temos que $\theta(x_n) \xrightarrow{w} \theta(0) = 0$, isto é, $(x_n \otimes \cdots \otimes x_n) \xrightarrow{w} 0$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Sejam $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ e $\theta : X \rightarrow \hat{\otimes}^m X$. Seja $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $y_n = x_n - x$. Então $(y_n)_n$ é uma seqüência em X w -convergente para zero.

Como $L({}^m X) \approx (\hat{\otimes}^m X)'$, dado $\hat{T} \in (\hat{\otimes}^m X)'$ existe $T \in L({}^m X)$ tal que $T(x_1, \dots, x_m) = \hat{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)$ para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in X$. Assim

$$\begin{aligned} \hat{T}(\theta(x_n)) &= T(x_n, \dots, x_n) = T(x + y_n, \dots, x + y_n) \\ &= T(x, \dots, x) + T(y_n, x, \dots, x) + T(x, y_n, x, \dots, x) \\ &\quad T(y_n, y_n, x, \dots, x) + \cdots + T(y_n, \dots, y_n). \quad (*) \end{aligned}$$

Seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq q \leq m$. Vamos definir $S \in L({}^q X)$ por

$$S(x_1, \dots, x_q) = T(x, \dots, x, x_1, \dots, x_q)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_q \in X$ e $x \in X$ dado acima. Se $\hat{S} \in (\hat{\otimes}^q X)'$ é a linear associada a S , então

$$\hat{S}(y_n \otimes \cdots \otimes y_n) = S(y_n, \dots, y_n) = T(x, \dots, x, y_n, \dots, y_n).$$

Como $y_n \xrightarrow{w} 0$, pela hipótese temos que $(y_n \otimes \cdots \otimes y_n) \xrightarrow{w} 0$ em $\hat{\otimes}^q X$ e uma vez que $\hat{S}$ é linear contínua, segue que $\hat{S}(y_n \otimes \cdots \otimes y_n) = T(x, \dots, x, y_n, \dots, y_n) \rightarrow 0$ em $\mathbb{K}$. Como a aplicação S , definida acima, independe da coordenada em que a variável x aparece, então podemos concluir que todos os termos de $(*)$ envolvendo y_n converge para zero. Assim $\hat{T}(\theta(x_n)) \rightarrow T(x, \dots, x) = \hat{T}(\theta(x))$ para qualquer $\hat{T} \in (\hat{\otimes}^m X)'$ e conseqüentemente $\theta(x_n) \xrightarrow{w} \theta(x)$. ■

Lema 4.17 *Sejam $m \geq 1$ e $X_1, \dots, X_m$ espaços de Banach. Vamos supor que apenas um dos X_i , $1 \leq i \leq m$, não tem a propriedade DP. Sejam $(x_k^{[i]})_k$ seqüências w -convergentes para zero em X_i , para $i = 1, \dots, m$. Então $(x_k^{[1]} \otimes \dots \otimes x_k^{[m]})_k$ é uma seqüência w -convergente para zero em $X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_m$.*

Demonstração: A prova será feita por indução com relação a m . Para $m = 1$ é trivial. Suponhamos que $m \geq 2$ e que $X_2, \dots, X_m$ tenham a propriedade DP. Vamos definir $W = X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_{m-1}$. Então pela hipótese de indução, temos que $w_k = x_k^{[1]} \otimes \dots \otimes x_k^{[m-1]} \xrightarrow{w} 0$ em W . Seja $\hat{S} \in (X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_m)' = (W \hat{\otimes} X_m)'$. Como $(W \hat{\otimes} X_m)' \approx L(W, X_m; \mathbb{K})$, existe $S \in L(W, X_m; \mathbb{K})$ tal que $S(w, x) = \hat{S}(w \otimes x)$ para quaisquer $w \in W$ e $x \in X_m$.

Agora vamos definir a aplicação linear contínua $T : W \rightarrow X'_m$ por

$$T(w)(x) = S(w, x)$$

para todo $w \in W$ e todo $x \in X_m$. Como $w_k \xrightarrow{w} 0$, temos que $T(w_k) \xrightarrow{w} 0$ em X'_m . Por hipótese, $x_k^{[m]} \xrightarrow{w} 0$ em X_m e X_m tem a propriedade DP. Logo, pelo teorema 3.2, segue que $(T(w_k))(x_k^{[m]}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e conseqüentemente $\hat{S}(x_k^{[1]} \otimes \dots \otimes x_k^{[m]}) \rightarrow 0$ para qualquer $\hat{S} \in (X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_m)'$. Portanto $(x_k^{[1]} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} x_k^{[m]}) \xrightarrow{w} 0$. ■

Com base no lema 4.17, uma propriedade mais forte que a do item (f) do lema 4.16 pode ser estabelecida para espaços com a propriedade DP. De fato, com uma prova análoga ao lema 4.17, mostramos que as condições do lema 4.17 implicam que a função $\theta : X_1 \times \dots \times X_k \rightarrow (X_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} X_k)$, definida por $\theta(x_1, \dots, x_k) = x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$, é contínua com respeito às topologias fracas sobre qualquer subconjunto w -compacto de $X_1 \times \dots \times X_k$.

Teorema 4.18 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade DP. Então a restrição de qualquer polinômio $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ a um conjunto w -compacto é w -contínuo. Em particular a topologia fraca coincide com a topologia fraca polinomial sobre conjuntos w -compactos.*

Demonstração: Sejam $m \geq 1$ e $(x_n)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X . Pelo lema 4.17 temos que $(x_n \otimes \dots \otimes x_n) \xrightarrow{w} 0$ em $\hat{\otimes}^m X$. Logo vale o item (d) do lema 4.16, e conseqüentemente qualquer polinômio $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ restrito a um subconjunto w -compacto de X é w -contínuo.

Agora, vamos provar que a topologia fraca coincide com a topologia polinomial fraca sobre conjuntos w -compactos. Seja $K \subset X$, um subconjunto w -compacto. Consideremos A um conjunto aberto na topologia polinomial fraca de X . Vamos provar que $A \cap K$ é w -aberto. Para $a \in A \cap K$, existem $P_1, \dots, P_n \in P(X)$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$U(a, P_1, \dots, P_n, \varepsilon) = \{b \in K : \sup_{1 \leq i \leq n} |P_i(a) - P_i(b)| < \varepsilon\} \subset A \cap K.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, temos que $(P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a)))$ é w -aberto, pois P_i restrito a K é w -contínuo. Assim $U(a, P_1, \dots, P_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^n (P_i|_K)^{-1}(\varepsilon \overset{\circ}{B}(P_i(a)))$ é w -aberto. Então para $a \in A \cap K$ existem $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in X'$ e $\varepsilon_1 > 0$ tais que $V(a, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \varepsilon_1) \subset U(a, P_1, \dots, P_n, \varepsilon) \subset A \cap K$. Logo $A \cap K$ é w -aberto.

Agora, seja A um conjunto w -aberto. Para qualquer $a \in A \cap K$ existem $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X'$ e $\varepsilon > 0$ tais que $V(a, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon) = \{b \in K : \sup_{1 \leq i \leq n} |\varphi_i(a) - \varphi_i(b)| < \varepsilon\} \subset A \cap K$. Para cada $i = 1, \dots, n$, temos que $\varphi_i \in X' \subset P(X)$, logo $A \cap K$ também é um conjunto aberto na topologia polinomial fraca. ■

Teorema 4.19 *Um espaço de Banach X tem a propriedade de Schur se e somente se X é um Λ -espaço e tem a propriedade DP.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Já foi demonstrado no corolário 3.6 e no início do capítulo 4.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X é um Λ -espaço e tem a propriedade DP. Sejam $(x_n)_n$ uma seqüência w -convergente para zero em X e $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset X$. Então K é um subconjunto w -compacto de X . Pelo teorema 4.18, temos que $(x_n)_n \xrightarrow{P} 0$ e como X é um Λ -espaço segue que $(x_n)_n \rightarrow 0$. Portanto X tem a propriedade de Schur. ■

Observemos que do teorema 4.13 segue que, para uma medida μ não atômica, $L_1(\mu)$ não possui a propriedade de Schur. Assim, como $L_1(\mu)$ tem a propriedade DP, pelo teorema 4.19, concluímos que $L_1(\mu)$ não é um Λ -espaço para μ não atômica.

Referências Bibliográficas

- [1] R.M.Aron, B.Cole e T.W.Gamelin, *Weak Star Continuous Analytics Functions*, Can.J.Math. vol.47 (4) (1995),673-683.
- [2] R.M.Aron, C.Hervés e M.Valdivia, *Weakly Continuous Mappings on Banach Spaces*, J.Funct. Anal. 52 (1983), 189-204.
- [3] G. de Barra, *Introduction to Measure Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974
- [4] F.Bombal, *Sobre Algunas Propiedades de Espacios de Banach*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid; Tomo 84(1990), 83-116.
- [5] F.F.Bonsall e J.Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [6] J.Bourgain, *The Dunford-Pettis property for the ball-algebras, the polydisc-algebras and the Sobolev spaces*, Studia Math.77 (1984), 245-253.
- [7] T.K.Carne, B.Cole e T.W.Gamelin, *A Uniform Algebra of Analytic Function on a Banach Spaces*, Trans. of the American Mathematical Society vol.314, 2 (1989),639-659.
- [8] J.M.F. Castillo e M.Gonzáles, *New Results About the Dunford-Pettis Property in Banach Spaces*, Bull. London Math. Soc. 27 (1995), 599-605.
- [9] S.B.Chae, *Holomorphy and Calculus in Normed Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- [10] J.A.Cima e R.M.Timoney, *The Dunford-Pettis Property For Certain Planar Uniform Algebras*, Michigan Math.J. 34 (1987), 99-104.
- [11] J.B.Conway, *A Course in Function Analysis*, Springer-Verlag, 1985.
- [12] F.Delbaen, *Weakly Compact Operators on the Disc Algebra*, Journal of Algebra 45 (1977), 284-294.

- [13] J.Diestel, *A Survey of Results to the Dunford-Pettis Property*, Proc.Conference on Integration, Topology and Geometry in Linear Spaces, W.Graves(ed.), Contemp. Math. vol.2, Amer.Math. Soc., Providence, R.I., 1980, 15-60.
- [14] J.Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [15] N.Dunford e J.T.Schwartz, *Linear Operators I*, New York, 1958.
- [16] T.W.Gamelin, *Analytic Functions on Banach Spaces*, P.M.Ganathter(ed.), Kluwer Academic Publishers, (1994), 187-233
- [17] M.González, J.M.Gutiérrez, *When Every Polynimial Is Unconditionally Convering*, Arch. Math. vol.63 (1994), 145-151.
- [18] M.González, J.M.Gutiérrez, *Unconditionally Convering Polynomials on Banach Spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol.117 part 2, (1995), 321-331.
- [19] J.A.Jaramillo e A.Prieto, *Weak-Polynomial Convergence on a Banach Space*, (Proc.) American Math. Society 118 n.2 (1993), 463-468.
- [20] H.E.Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1974, 101-105.
- [21] J.Lindenstrauss e L.Tzafriri, *Classical Banach Spaces I-Sequence Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1977
- [22] B.Mitiagin, S.Rolewicz e W.Zelazko, *Entire Functions in B_0 Algebras*, Studia Math. 21 (1962),291-306.
- [23] J.Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Math.Stud.120, Amsterdam, 1986.
- [24] A.Pelczyński, *A Projections in Certain Banach Spaces*, Studia Math. 19 (1960), 209-228.
- [25] A.Pelczyński, *On Weakly Compact Polynomial Operators on B-Space with Dunford-Pettis Property*, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math.Astr.et Phys., 11(1963), 379-386.
- [26] Pethe, Thakare *A Note on the Dunford-Pettis Property and a Schur Property*, Indiana Univ.J.Math. 27(1978),91-92.
- [27] G.Pisier *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Space*, CBMS Regional Conf. Series 60, Amer. Math. Soc.,1986.
- [28] H.R.Pitt, *A Note on Bilinear Forms*, J. London Math. Soc. 11 (1936), 174-180.
- [29] H.P.Rosenthal *On Relatively Disjoint Families of Measures With Some Applications To Banach Spaces Theory*, Studia Math. 37 (1970), 13-36.

- [30] R.A.Ryan, *Dunford-Pettis Properties*, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math. 27 (1979), 373-379.
- [31] R.A.Ryan, *The Dunford-Pettis Property and Tensor Producted*, Bull.Polish Acad.Sci.Math. 35(1987), n.11-12, 785-792.
- [32] I.Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, 1970.
- [33] C.Stegall, *Duals of Certain Spaces With the Dunford-Pettis Property*, Notices Amer.Math.Soc. 19(1972), 799.
- [34] M.Talagrand, *La Propriété de Dunford-Pettis dans $C(K, E)$ et $L_1(E)$* , Israel J. Math. 44(1983), 317-321.
- [35] A.E.Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Jonh Wiley, New York, 1958.
- [36] P.Wojtaszczyk *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991.