Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

**Ciclos Canard e Bifurcação Homoclínica
em uma Família a 3 Parâmetros
de Campos de Vetores no Plano**

Paulo Ricardo da Silva

Tese Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática para Obtenção
do Título de Doutor em Matemática

Orientador
Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

São Paulo, Agosto de 1997.

**Ciclos Canard e Bifurcação Homoclínica
em uma Família a 3 Parâmetros
de Campos de Vetores no Plano**

Este exemplar corresponde à redação final da tese apresentada por Paulo Ricardo da Silva ,devidamente corrigida e aprovada pela pela comissão julgadora.

São Paulo , setembro de 1997.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Sotomayor Tello (Preseidente)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo
Prof. Dr. Robert Roussarie
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

IME-USP
IME-USP
UNIV. de DIJON
UFG
IMECC-UNICAMP

AGRADECIMENTOS

Aos amigos Patrícia , Víctor e Welby ; pelo apoio dado em todos os momentos.

Aos colegas Ana ,L.Fernando , Marcelo ,Mauro e Wania ;por acompanharem a elaboração deste trabalho.

Aos professores R.Garcia ,C.Ragazzo , R.Roussarie e M.Teixeira ; pelas suas críticas e sugestões.

A J.Sotomayor ; pela confiança ,pelos estímulos ,pelas críticas e pelas sugestões.

ÍNDICE

Resumo	3
Abstract	4
Introdução	5
1- Preliminares e Principais Resultados	7
2-A Transformação de Lienard	24
3-As Singularidades do Sistema $X_{\varepsilon,b,c} : \begin{cases} x' = y - (bx + cx^2 - 4x^3 + x^4) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases}$	29
4-Os Retratos de Fase do Sistema $X_{\varepsilon,b,c}$	34
5-A Desingularização de $X_{\varepsilon,b,c}$	41
6-O Fenômeno Canard	53
Bibliografia	64

RESUMO

Neste trabalho consideramos a família a 3-parâmetros de campos de vetores no plano dada por

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 + \mu + y(\nu_o + \nu_1 x + x^3) \end{cases} \quad (C)$$

com $(x, y, \mu, \nu_o, \nu_1) \in R^2 \times R^3$ [DRS 1].

Provamos que se $\mu \rightarrow -\infty$ então (C) é C^0 -equivalente a (D) para $\varepsilon > 0, \varepsilon \downarrow 0, b, c \in R$.

$$\begin{cases} x' = y - (bx + cx^2 - 4x^3 + x^4) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (D)$$

Provamos que ocorre uma Bifurcação de Hopf de codimensão 1 quando $b = 0$ e que quando $b = 0, c = 12$ e $\varepsilon > 0$ então ocorre uma Bifurcação de Hopf de codimensão 2. Estudamos o Fenômeno Canard e a Bifurcação Homoclínica na família (D). Provamos que quando $\varepsilon \downarrow 0, b = 0$ e $c = 12$ os ciclos criados apresentam um pequeno diâmetro e mudam para um grande diâmetro rapidamente num sentido a ser esclarecido aqui.

ABSTRACT

Let the 3-Parameter Family given by

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 + \mu + y(\nu_0 + \nu_1 x + x^3) \end{cases} \quad (\text{A})$$

with $(x, y, \mu, \nu_0, \nu_1) \in R^2 \times R^3$ [DRS1].

We prove that if $\mu \rightarrow -\infty$ then (A) is C^0 -equivalent to (B) for $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \downarrow 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = y - (bx + cx^2 - 4x^3 + x^4) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (\text{B})$$

We prove that there exists a Hopf Bifurcation of Codimension 1 when $b = 0$ and also that, if $b = 0$, $c = 12$ and $\varepsilon > 0$ then there exists a Hopf Bifurcation of codimension 2. We study the "Canard Phenomenon" and the Homoclinic Bifurcation in the family (B). We show that when $\varepsilon \downarrow 0$, $b = 0$ and $c = 12$ the cycles created stay with "small size" and change to a "big size" very quickly, in a sense made precise here.

INTRODUÇÃO

Consideremos X_o um campo de vetores no plano tal que $(0,0)$ é uma singularidade com parte linear nilpotente, isto é $j^1 X_o = y \frac{\partial}{\partial x}$.

Bogdanov mostrou em [B-1] e [B-2], que, genericamente, todos os desdobramentos locais a 2 parâmetros de X_o são topologicamente equivalentes. Os modelos para estes desdobramentos, conhecidos como cúspides de codimensão 2 (Bifurcação de Bogdanov-Takens) são:

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \mu + y(\nu \pm x)) \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{I})$$

Com uma condição extra de degenerescência, a saber $j^2 X = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$, Dumortier, Roussarie e Sotomayor provaram que, genericamente, todos os desdobramentos locais a 3-parâmetros, são topologicamente equivalentes. Os modelos para estes desdobramentos, conhecidos como cúspides de codimensão 3, [DRS-1], são:

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \mu + y(\nu_0 + \nu_1 x \pm x^3)) \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{II} \pm)$$

Neste trabalho estudamos os ciclos limites de (II^+) quando $\mu \rightarrow -\infty$.

Para a cúspide de codimensão 2 (I), tal estudo encontra-se em [B]. Boutat, além de estender o diagrama de bifurcação da cúspide de codimensão 2, para $\mu \rightarrow -\infty$, estudou o "Fenômeno Canard", ocorrendo com os ciclos limites. Basicamente ele provou que o ciclo criado numa bifurcação de Hopf permanece "pequeno" e muda para um tamanho "grande" muito rapidamente. Neste contexto entendemos por pequeno o ciclo próximo do foco e grande o ciclo com diâmetro próximo do diâmetro do laço onde ele desaparecerá em uma bifurcação homoclínica.

O "Fenômeno Canard" foi primeiramente estudado em [BCD] em termos de Análise Não Standard. Recentemente, uma interpretação geométrica deste fenômeno foi dada por Dumortier e Roussarie [DR1] utilizando variedades centrais e desingularização global.

Neste trabalho inicialmente mostramos que o estudo de (II^+) quando $\mu \rightarrow -\infty$ é equivalente ao estudo de (III) quando $\varepsilon \downarrow 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = y - (bx + cx^2 - 4x^3 + x^4) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (\text{III})$$

Provamos que quando $c = 12$, $b = 0$ e $\varepsilon > 0$ ocorre uma bifurcação de Hopf de codimensão 2 e que os ciclos criados permanecem pequenos e muito rapidamente mudam para um grande tamanho. Estudamos a bifurcação homoclínica quando $\varepsilon \downarrow 0$. O limite dos pontos (ε, b, c) , onde ocorre a Bifurcação Homoclínica de codimensão 2, é $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 4)$.

Em 1 apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares e colocamos os resultados numa forma precisa. Em 2 efetuamos algumas mudanças de coordenadas, destacando-se a transformação de Liénard e colocamos (II^+) na forma (III). Em 3 determinamos a bifurcação de Hopf ocorrendo em (III).

Em 4 estudamos o retrato de fase de (III) e em 5 e 6 estudamos o Fenômeno Canard e a bifurcação homoclínica.

1 - PRELIMINARES E PRINCIPAIS RESULTADOS

Dizemos que X_λ , $\lambda \in \mathbb{R}^k$, dada por (1), é uma família a k-parâmetros de campos de vetores no plano, onde $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e a, b são funções C^∞ .

$$X_\lambda = a(m, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + b(m, \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

A família é dita local quando m e λ estão em alguma vizinhança da origem, em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^k$, respectivamente. X_λ é dito um desdobramento ou uma deformação de X_0 .

Dizemos que X e Y são C^0 -equivalentes (ou topologicamente equivalentes) se existe h , um homeomorfismo em $\mathbb{R}^2$, levando X-órbitas em Y-órbitas e preservando a orientação.

Duas famílias X_λ e Y_μ são ditas C^0 -equivalentes por fibras se existem homeomorfismos $\mu = \phi(\lambda)$ e h_λ tais que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^k$, h_λ é uma equivalência topológica entre X_λ e $Y_{\phi(\lambda)}$.

O conjunto de bifurcação de X_λ é o menor subconjunto fechado $\Sigma \subset \mathbb{R}^k$ tal que o tipo topológico de X_λ é localmente constante em $\mathbb{R}^k \setminus \Sigma$.

Dizemos que X é C^∞ -equivalente a Y se $Y = g_* X$ onde $g_* X(x) = (dg_x)^{-1} X(g(x))$ e g é um difeomorfismo fixando a origem.

Consideremos $\mathfrak{X}_0$ o conjunto dado por (2):

$$\mathfrak{X}_0 = \left\{ X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \mid P, Q \in C^\infty, P(0) = Q(0) = 0 \right\}. \quad (2)$$

Dividimos $\mathfrak{X}_0$ em diferentes subconjuntos considerando as formas de Jordan de suas partes lineares na origem.

$$T_1 : \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad a \neq 0, c \neq 0 \text{ e } b = 0 \text{ ou } a = c \neq 0 \text{ e } b = 1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad a \neq 0, b \neq 0 \end{array} \right.$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$T_3 : \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0 \quad (3)$$

$$T_4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_5 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos W_i como sendo o subconjunto de $\mathfrak{X}_0$ tal que em W_i a forma de Jordan da parte linear é linearmente equivalente a dada em T_i . Assim $\mathfrak{X}_0 = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5$. W_1 é o conjunto dos campos cuja singularidade $(0,0)$ é hiperbólica. W_2 é o conjunto dos campos com singularidade $(0,0)$ do tipo sela-nó. W_3 é o conjunto dos campos com singularidade do tipo Hopf. Estamos interessados em W_4 onde a singularidade $(0,0)$ tem parte linear nilpotente.

Se $X_0 \in W_4$ então podemos escrever, conforme [DRS-1], $j^2 X_0$ na forma:

$$j^2 X_0 = y \frac{\partial}{\partial x} + (ax^2 + bxy) \frac{\partial}{\partial y} \quad (4)$$

Se $a \neq 0$ dizemos que $X_0 \in W_4$ tem singularidade tipo cúspide. Para o caso $a = 0$ indicamos [DRS-2].

Genericamente temos que $ab \neq 0$ e, conforme [D], temos que X_0 é C^∞ -equivalente a

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm xy) \frac{\partial}{\partial y} \quad (5)$$

A bifurcação de Bogdanov-Takens [RW] é a bifurcação da família X_λ , $\lambda = (\mu, \nu)$, dada por

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \mu + y(\nu \pm x)) \frac{\partial}{\partial y} \quad (6)$$

Se $\mu > 0$ o campo de vetores não admite singularidades e seu retrato de fase é trivial. Se $\mu = 0$ e $\nu \neq 0$ temos uma bifurcação do tipo sela-nó isto é, quando os parâmetros cruzam a linha $\mu = 0$ surgem duas singularidades, um foco (ou nó) e uma sela. A curva H , onde a divergência anula-se no foco, é a curva de bifurcação genérica de Hopf (isto é, na forma normal

em coordenadas polares , o campo começa com termos de ordem 3) . Ao cruzar a linha H surge um ciclo limite que irá desaparecer na curva L onde temos uma órbita homoclínica (isto é , uma sela que tem uma separatriz instável coincidindo com uma separatriz estável).

Figura 1: Diagrama de Bifurcação de (6^-)

Em [DR2] encontramos a prova de que o diagrama de bifurcação de (6) pode ser estendido para os parâmetros μ e ν arbitrários.

Boutat, em [B], estudou o comportamento dos ciclos de (6) quando $\mu \rightarrow -\infty$. Efetuando algumas mudanças de coordenadas temos que $(6+)$, onde $\varepsilon \downarrow 0$ e $a \in \mathbb{R}$,é equivalente a

$$X_{\varepsilon,a} : \begin{cases} x' = y - \frac{x^2}{2} \\ y' = \varepsilon(2(a-x) - (x-a)^2) \end{cases} \quad (7)$$

Se $\varepsilon = 0$ o retrato de fase de $X_{0,a}$ é dado por

Figura 2: Retrato de Fase de $X_{0,a}$

Os pontos ao longo da curva $y = \frac{x^2}{2}$, exceto $(0,0)$, são normalmente hiperbólicos. Para $\varepsilon \neq 0$, obtemos duas singularidades $(a, a^2/2)$ e $(a - 2, \frac{(a-2)^2}{2})$. A primeira é um nó ou foco atrator para $a > 0$ e um nó ou foco repulsor para $a < 0$. A segunda é um ponto de sela.

Figura 3: Bifurcação de Hopf de $X_{\varepsilon,a}$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno os retratos de fase de $X_{\varepsilon,a}$ são dados por

Figura 4: Retratos de Fase de $X_{\epsilon,a}$ para $\epsilon \downarrow 0$

Quando $a = 0$ ocorre uma bifurcação genérica de Hopf e um ciclo limite surge. Boutat analisou o que ocorre com o ciclo quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Chamamos de *Limite de Conjunto Periódico* (LCP) um possível limite de uma seqüência de ciclos limites. Precisamente, dizemos que $\Gamma \in R^2$, compacto, é um LCP de $X_{\varepsilon,a}$ se $\exists \varepsilon_n \downarrow 0$, $a_n \downarrow 0$ e $\Gamma_n \subset R^2$ ciclo limite de X_{ε_n,a_n} tais que $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$, segundo a distância de Hausdorff. Lembramos que a distância de Hausdorff entre dois compactos A e B do plano é dada por $d(A, B) = \max_{x \in A, y \in B} \{d(x, B), d(y, A)\}$. É fácil ver que os possíveis LCP 's de $X_{\varepsilon,a}$ são dados pela figura :

Figura 5: LCP 's de $X_{\varepsilon,a}$

Os LCP's são conhecidos por *Ciclos Canard*, ao que tudo indica ,devido ao fato dos ciclos limites da equação de Van der Pol possuírem um aspecto semelhante a um pato [E].

Definição : Seja $X_\lambda = X(\lambda, p)$ uma família a k -parâmetros de campos de vetores no plano. Dizemos que ocorre o Fenômeno Canard na família X_λ se:

- a) Existem sequências α_n e β_n em R^k tais que $\|\alpha_n - \beta_n\| \rightarrow 0$.
- b) Existe h_n , homeomorfismo, levando órbitas de X_{α_n} em órbitas de X_{β_n} .
- c) X_{α_n} admite um ciclo limite C_n e X_{β_n} um ciclo limite D_n tais que $h_n(C_n) = D_n$.
- d) Existe um número positivo r tal que $\text{diam } D_n \rightarrow r$ e $\text{diam } C_n \rightarrow 0$.

O Fenômeno Canard tem sido caracterizado através do contato flat entre gráficos no espaço de parâmetros $([B], [DR1], [E])$.

Boutat empregou a técnica recente de Desingularização Global e Variedades Centrais, introduzida por Dumortier e Roussarie [DR1] e provou o seguinte teorema:

Teorema 1 Sejam Γ_P e Γ_G os LCP's indicados na figura 5 .Existem curvas $a_1 = a_1(\varepsilon)$, $a_2 = a_2(\varepsilon)$, a_1 e $a_2 \in C^\infty$, definidas para $\varepsilon > 0$ com $a_1(0) = a_2(0) = 0$, tendo um contato flat com o eixo ε , tais que $X_{\varepsilon, a_1(\varepsilon)}$ admite um ciclo limite Γ_ε , $X_{\varepsilon, a_2(\varepsilon)}$ admite um ciclo $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$, com $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma_G$ e $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon \rightarrow \Gamma_P$, segundo a distância de Hausdorff, quando $\varepsilon \downarrow 0$.

As curvas $a_1(\varepsilon)$ e $a_2(\varepsilon)$ são chamadas de *Curvas Canard*.

Figura 6: Curvas Canard

Interpretamos o teorema 1, geometricamente, como um crescimento muito rápido do ciclo criado em $\{a = 0\}$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Segundo a nossa definição ocorre o Fenômeno Canard na família $X_{\varepsilon,a}$, estudada por Boutat. De fato basta considerarmos $\beta_n = (\frac{1}{n}, a_1(\frac{1}{n}))$ e $\alpha_n = (\frac{1}{n}, a_2(\frac{1}{n}))$.

O ponto de partida deste trabalho é a cúspide de codimensão 3, isto é, o desdobramento de $X_0 \in W_4$ tal que $j^2 X_0$ é do tipo

$$j^2 X_0 = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (8)$$

Consideremos a família a 3 parâmetros em dada por:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 + \mu + y(\nu_0 + \nu_1 x + x^3) \end{cases} \quad (9)$$

Esta família é o desdobramento genérico da cúspide de codimensão 3 [DRS-1]. O diagrama de bifurcação para $(x, y, \mu, \nu_0, \nu_1)$ em uma vizinhança da origem $(0, 0, 0, 0, 0)$ está representado nas figuras 7 e 8. Para μ positivo o retrato de fase de (9) é trivial já que o sistema não admite singularidades.

Figura 7 : A Intersecção do Diagrama de (9) com S_δ

Figura 8 :Retratos de Fase de (9)

A figura (7) mostra a intersecção do diagrama de bifurcação com a esfera $S_\delta = \{(\mu, \nu_0, \nu_1) \mid \mu^2 + \nu_0^2 + \nu_1^2 = \delta^2\}$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Existem um ciclo limite repulsor e um foco atrator em (I) e existem um ciclo limite atrator e um foco repulsor em (II). Para valores do parâmetro em (III) existem dois ciclos limites sendo o interno atrator e o outro repulsor. No plano dado por $\mu = 0$ ocorre a bifurcação do tipo Sela-Nó isto é, sela e nó colapsam e desaparecem para μ positivo. A superfície H representa a Bifurcação de Hopf e a curva H_2 a Bifurcação de Hopf de codimensão 2. Na superfície L ocorre a Bifurcação Homoclínica e na curva L_2 a Bifurcação Homoclínica de codimensão 2.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dos ciclos limites quando $\mu \rightarrow -\infty$.

Em 2 realizamos algumas mudanças de coordenadas, destacando-se a transformação de Liénard, e provamos que o conjunto de bifurcação de (9), para $\mu \rightarrow -\infty$, é equivalente ,quando $\varepsilon \downarrow 0$, $b, c \in \mathbb{R}$,ao conjunto de bifurcação de

$$\begin{cases} x' = y - F_{b,c}(x) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (10)$$

Denotamos por $F_{b,c}$ a função real dada por

$$F_{b,c}(x) = bx + cx^2 - 4x^3 + x^4 \quad (11)$$

Em 2 estudamos o conjunto de bifurcação da família de funções dadas por (11). Tal conjunto está representado na figura

Figura 9: Diagrama de Bifurcação de $F_{b,c}$

Em **3** estudamos as singularidades do sistema (10). Quando $\varepsilon = 0$ e (b, c) está fixo as singularidades encontram-se na curva $L_{b,c}$ onde $L_{b,c}$ é dada por

$$L_{b,c} = \{(x, y) \mid y = F_{b,c}(x)\} \quad (12)$$

Os pontos em $L_{b,c}$, que não são críticos, são pontos singulares normalmente hiperbólicos. O retrato de fase está representado na figura

Figura 10: Retrato de Fase Quando $\varepsilon = 0$

Para ε positivo (10) admite 2 singularidades: $(0, 0)$ e $(2, F_{b,c}(2))$.

$$0 < \varepsilon \leq b^2/8$$

$(0, 0)$	$b > 0$	Nó Atrator
	$b < 0$	Nó Repulsor
$(2, F_{b,c}(2))$	$b, c \in R$	Sela

$$\varepsilon > b^2/8$$

$(0, 0)$	$b > 0$	Foco Atrator
	$b < 0$	Foco Repulsor
$(2, F_{b,c}(2))$	$b, c \in R$	Sela

Tabela I : Classificação das Singularidades de (10)

Figura 11 : A Superfície $\varepsilon = \frac{b^2}{8}$

Devemos ter um cuidado maior para classificar a singularidade $(0,0)$ quando $b = 0$ pois neste caso o autor-valor associado apresenta parte real nula. Provamos em 3 que ocorre uma Bifurcação de Hopf em $H = \{b = 0, c \neq 12\}$ e uma Bifurcação de Hopf de codimensão 2 em $H_2 = \{b = 0, c = 12\}$. Provamos que surgem 2 ciclos limites em $\{b > 0, c < 12\}$ sendo o interno repulsor e o outro atrator.

Figura 12: Bifurcação de Hopf em (10)

Estudamos o que ocorre com os ciclos criados em H_2 quando $\varepsilon \downarrow 0$. Quando $\varepsilon \downarrow 0$ os LCP's são aqueles onde y é constante ou $y = F_{b,c}(x)$.

Os principais resultados deste trabalho são os seguintes teoremas:

Teorema 2 Consideremos a família dada por (10). Seja Γ o LCP ilustrado na figura 13. Existe uma superfície $S = \{b = \varphi(\sqrt{\varepsilon}, c)\}$, $\varphi \in C^\infty$, $\varphi(0, c) = 0$, $(\varepsilon, b, c) \in \text{viz}(0, 0, 12)$, tal que $(\varepsilon, b, c) \in S$ então (10) admite um ciclo $\Gamma_{(\varepsilon, b, c)}$, $\Gamma_{(\varepsilon, b, c)} \rightarrow \Gamma$ segundo a distância de Hausdorff, quando $(\varepsilon, b, c) \rightarrow (0, 0, 12)$.

A superfície S será chamada de *Superfície Canard*.

Figura 13: Ciclo Canard

Figura 14: Superfície Canard

Teorema 3 Consideremos a família dada por (10) e (ε, b, c) em uma vizinhança de $(0, 0, 4)$. Existe uma superfície $L = \{b = v(\varepsilon, c)\}$, $v \in C^\infty$, $(0, 0, 4) \in L$, tal que para $(\varepsilon, b, c) \in L$, duas separatrizes do ponto de sela $(2, F_{b,c}(2))$ formam uma órbita homoclínica. Em $\mathcal{L}_2 = SC \cap L$, $SC = \{b = -4c + 16\}$ temos uma órbita homoclínica de codimensão 2. Quando $\varepsilon \downarrow 0$ os pontos em $\mathcal{L}_2$ convergem para $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 4)$.

Em 6 provamos que esta superfície é tal que para $b < 0$, está à direita do plano, isto é, para $b < 0$, $X_{\varepsilon,b,c}$ admite uma órbita homoclínica atratora. Em $\mathcal{L}_1 = L \cap H$ temos uma órbita homoclínica atratora e um foco fraco repulsor. A partir de $\mathcal{L}_2$, L está à esquerda do plano SC isto é, $X_{\varepsilon,b,c}$ admite uma órbita homoclínica repulsora.

Figura 15: Diagrama de Bifurcação de $X_{\varepsilon,b,c}$

Lembramos que uma órbita homoclínica é dita de codimensão 2 quando a derivada da transformação de retorno , definida num dos lados da separatriz , for não nula .

As provas destes teoremas são dadas em 5 e 6. Usamos o método introduzido em [DR1] que consiste basicamente na Desingularização Global e em Variedades Centrais.

Em 4 estudamos os retratos de fase de (10). Provamos que quando $\varepsilon \downarrow 0$ os valores dos parâmetros para os quais $X_{\varepsilon,b,c}$ admite ciclos limites convergem para $\{b = 0\}$.

Os teoremas 2 e 3 mostram que quando $\varepsilon \downarrow 0$ os ciclos limites criados na Bifurcação de Hopf mudam para um grande tamanho e em seguida desaparecem em uma Bifurcação Homoclínica.

No final de 6 indicamos alguns problemas em aberto que podem ser estudados.

2 - A TRANSFORMAÇÃO DE LIÉNARD

Consideremos X_{μ, ν_0, ν_1} dado por (9). Começamos com a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x &= t^2 x_1 & \mu &= -t^4 \\ y &= t^3 y_1 & \nu_0 &= t^6 \nu'_0 \\ & & \nu_1 &= t^4 \nu'_1 \\ & & T &= t^5 \end{aligned} \tag{13}$$

Dividindo por t e voltando a chamar x, y, ν_0, ν_1 obtemos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - 1 + Ty (\nu_0 + \nu_1 x + x^3) \end{cases} \tag{14}$$

Efetuada a transformação de Liénard (15) e denotando novamente por x e y obtemos (16)

$$\begin{cases} Ty_1 = \int T (\nu_0 + \nu_1 x + x^3) dx - y \\ x_1 = x \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} x' = T \left(\nu_0 x + \frac{\nu_1}{2} x^2 + \frac{x^4}{4} \right) - Ty \\ y' = -\frac{1}{T} (x^2 - 1) \end{cases} \tag{16}$$

A transformação de Liénard (15) é um difeomorfismo do plano (x, y) no plano (x_1, y_1) .

Multiplicando por $\frac{-1}{T}$ e denotando $\varepsilon = \frac{1}{T^2}$ obtemos

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{4} (4\nu_0 + 2\nu_1 x^2 + x^4) \\ y' = \varepsilon (x^2 - 1) \end{cases} \tag{17}$$

Multiplicando por 4, fazendo $y_1 = 4y$, $\nu'_0 = 4\nu_0$, $\nu'_1 = 2\nu_1$, $\varepsilon' = \frac{1}{16}\varepsilon$ e voltando a chamar

$x, y, \nu_0, \nu_1, \varepsilon$ obtemos

$$\begin{cases} x' = y - (\nu_0 x + \nu_1 x^2 + x^4) \\ y' = \varepsilon (x^2 - 1) \end{cases} \quad (18)$$

Efetuada a mudança (19) e voltando a chamar x e y obtemos (10)

$$\begin{aligned} x_1 &= x + 1 \\ y_1 &= y - 1 + \nu_0 - \nu_1 \\ b &= \nu_0 - 2\nu_1 \\ c &= \nu_1 - 6 \end{aligned} \quad (19)$$

Vamos estudar a função dada por (11).

Proposição 4 $F_{b,c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por (11) admite um zero em $x_0 = 0$ e temos:

- a) Se $b = 0$ então $F_{b,c}$ admite um zero para $c > 4$, 2 zeros para $c = 4$ ou $c = 0$ e 3 zeros para $c < 0$ ou $0 < c < 4$.
- b) A equação (20) define uma cúspide no plano (b, c) . A cúspide é tangente ao eixo c em $(b, c) = (0, 0)$, cruza o eixo c em $(b, c) = (0, 4)$ e cruza o eixo b em $(b, c) = (9.48 \dots, 0)$.

$$\left(\frac{3c - 16}{9} \right)^3 + \left(\frac{-36c + 128 - 27b}{54} \right)^2 = 0 \quad (20)$$

- c) A cúspide e o eixo c particionam o plano (b, c) definindo o número de zeros de $F_{b,c}$ (figura 16).

Figura 16: Zeros de $F_{b,c}$

Demonstração:

A equação (20) é a expressão $D = 0$ onde D é o discriminante de $\frac{F_{b,c}(x)}{x} = 0$. $\square$

Proposição 5 Seja $F_{b,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (11). Temos:

- a) Se $b = 0$ então $F_{b,c}$ admite 3 pontos críticos quando $c < 0$ ou $0 < c < 4.5$, 1 ponto crítico quando $c > 4.5$ e 2 pontos críticos se $c = 0$ ou $c = 4.5$.
- b) A equação 21 define uma cúspide no plano (b, c) tangente ao eixo c em $(0, 0)$, cruzando-o em $(0, 4.5)$, cruzando o eixo b em $(16, 0)$, tendo como vértice $(-4, 6)$ e particionando, junto com o eixo c , o (b, c) -plano, definindo o número de pontos críticos de $F_{b,c}$.

$$\left(\frac{c-6}{6}\right)^3 + \left(\frac{-2c-b+8}{8}\right)^2 = 0 \quad (21)$$

- c) Se $c \geq 6$ então $F_{b,c}$ não admite inflexões e se $c < 6$ então $F_{b,c}$ admite 2 inflexões. Além disso um ponto de inflexão será crítico se e somente se (b, c) estiver em (21).

Figura 17: Pontos Críticos de $F_{b,c}$

Demonstração:

A equação (21) é a expressão $D = 0$ onde D é o discriminante de $F'_{b,c}(x) = 0$. $\square$

As figuras 9 e 18 e a tabela II resumem as informações das proposições 4 e 5.

Figura 18 : Cúspide que Definem o Número de Zeros e Pontos Críticos

REGIÃO	ZEROS	CRÍTICOS	INFLEXÕES
I	2	1	0
II	2	1	2
III	2	3	2
IV	4	3	2
V	4	3	2
VI	2	3	2
VII	2	1	2
VIII	2	3	2
IX	4	3	2
X	3	3	2
XI	1	3	3
XII	1	1	2
XIII	1	1	0
XIV	3	3	2
L11	2	2	2
L12	2	2	2
L13	2	2	2
L14	2	2	2
L21	3	3	2
L22	3	3	2
L23	3	3	2
L24	3	3	2
P	2	2	2
Q	2	3	2
R	1	2	2

Tabela II: Número de Zeros, Pontos Críticos e Pontos de Inflexão de $F_{b,c}$

3 - AS SINGULARIDADES DO SISTEMA $X_{\varepsilon,b,c} : \begin{cases} x' = y - (bx + cx^2 - 4x^3 + x^4) \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases}$

A singularidades do sistema $X_{\varepsilon,b,c}$, dado por (10), são os pontos $(0,0)$ e $(2, F_{b,c}(2))$ se $\varepsilon \neq 0$. A matriz representando $j^1 X_{\varepsilon,b,c}$ em $(0,0)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} -b & 1 \\ -2\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

A equação dos auto-valores é dada por:

$$z^2 + bz + 2\varepsilon = 0 \quad (23)$$

Se $b^2 - 8\varepsilon < 0$ temos um foco repulsor para $b < 0$ e um foco atrator para $b > 0$. Os auto-valores admitem parte real igual a zero se e somente se $b = 0$. Para $b^2 - 8\varepsilon \geq 0$ temos um nó repulsor se $b < 0$ e um nó atrator se $b > 0$.

A matriz representando $j^1 X_{\varepsilon,b,c}$ em $(2, 2b + 4c - 16)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} -(b + 4c - 16) & 1 \\ 2\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A equação dos auto-valores é dada por:

$$z^2 + (b + 4c - 16)z - 2\varepsilon = 0 \quad (25)$$

Para $\varepsilon > 0$ segue que a singularidade $(2, 2b + 4c - 16)$ é um ponto de sela. A sela ocorre num ponto crítico do gráfico de $F_{b,c}$ para valores do parâmetro no plano dado por:

$$(SC') : b = -4c + 16 \quad (26)$$

Vamos agora analisar a singularidade $(0,0)$ quando $b = 0$.

Teorema. 6

Seja $X_{\varepsilon,b,c}$ dado por (10). Temos:

a) $(x, y) = (0, 0)$ é um foco atrator (ou nó) se $b > 0$ e um foco repulsor (ou nó) se $b < 0$.

b) $(x, y) = (0, 0)$ é um foco atrator fraco se $b = 0$ e $c \geq 12$ e um foco repulsor fraco se $b = 0$ e $c < 12$.

c) Para valores do parâmetro em $H = \{b = 0, c \neq 12\}$ ocorre uma Bifurcação de Hopf de codimensão 1, surgindo um ciclo atrator em $b < 0$ e $c > 12$ e um ciclo repulsor em $b > 0$ e $c < 12$.

d) Para valores do parâmetro em $H_2 = \{b = 0, c = 12\}$ ocorre uma Bifurcação de Hopf de codimensão 2 surgindo 2 ciclos em $b > 0$ e $c < 12$. O ciclo interno será repulsor e o outro atrator.

Demonstração:

A divergência de $X_{\varepsilon,b,c}$ é nula em $(0, 0)$ se e somente se $b = 0$. Tomando $b = 0$, $X_{\varepsilon,b,c}$ assume a forma

$$\begin{cases} x' = y - cx^2 + 4x^3 - x^4 \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (27)$$

Efetuada a mudança (28) e denotando $y = y_1$ obtemos (29)

$$y = \sqrt{2\varepsilon}y_1 \quad (28)$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2\varepsilon}y - cx^2 + 4x^3 - x^4 \\ y' = -\sqrt{2\varepsilon}x + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}x^2 \end{cases} \quad (29)$$

Efetuamos a mudança (30):

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{30}$$

Em coordenadas polares (27) é expresso por:

$$\begin{cases} r' = (\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \sin \theta - c \cos \theta) \cos^2 \theta r^2 + 4 \cos^4 \theta r^3 - \cos^5 \theta r \\ \theta' = -\sqrt{2\varepsilon} + (\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \cos \theta + c \sin \theta) \cos^2 \theta r - 4 \cos^3 \theta \sin \theta r^2 + \cos^4 \theta \sin \theta r^3 \end{cases}\tag{31}$$

O retrato de fase de (31) corresponde aos gráficos das funções $r = f_\rho(\theta)$, $f_\rho(0) = \rho$, soluções de:

$$R(r, \theta) = \frac{dr}{d\theta} = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \dots\tag{32}$$

$$R_k(\theta) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k R(r, \theta)}{\partial r^k} \Big|_{r=0}\tag{33}$$

Desenvolvendo $f_\rho(\theta)$ em potências de ρ obtemos:

$$f_\rho(\theta) = u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + \dots\tag{34}$$

Substituindo $r = f_\rho(\theta)$ em (32) obtemos:

$$u_1'(\theta)\rho + u_2'(\theta)\rho^2 + \dots = R_1(\theta)[u_1(\theta)\rho + \dots] + R_2(\theta)[u_1(\theta)\rho + \dots]^2 + \dots\tag{35}$$

Assim, conforme [ALGM], os valores de $u_i(\theta)$ são obtidos recursivamente por:

$$\begin{aligned}
u_1(\theta) &= 1 \\
u_2(\theta) &= \int R_2(s) ds \\
u_3(\theta) &= \int (2R_2(s)u_2(s) + R_3(s)) ds \\
u_4(\theta) &= \int [2R_2(s)u_3(s) + R_2(s)u_2^2(s) + 3R_3(s)u_2(s) + R_4(s)] ds \\
u_5(\theta) &= \int [2R_2(s)(u_4(s) + u_2(s)u_3(s)) + 3R_3(s)(u_3(s) + u_2^2(s)) + 4R_4(s)u_2(s)] ds
\end{aligned} \tag{36}$$

A aplicação de retorno $\pi : R^+ \rightarrow R$ é definida por:

$$\pi(\rho) = f_\rho(2\pi) - \rho = u_2(2\pi)\rho^2 + \dots \tag{37}$$

Os coeficientes de Lyapunov são dados por:

$$V_k = \frac{\pi^{(k)}(0)}{k!} \tag{38}$$

Para o cálculo dos coeficientes utilizamos o MAPLE e obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
V_1 &= 0 \\
V_2 &= 0 \\
V_3 &= \frac{\pi(c-12)}{4\sqrt{2\varepsilon}} \\
V_4 &= 0 \\
V_5 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{1024(\sqrt{2\varepsilon})^3} (-168c^2 + 21\varepsilon c - 1152\sqrt{2\varepsilon}\pi c + 6912\sqrt{2\varepsilon}\pi - 76\varepsilon + 14c^3 + 48\sqrt{2\varepsilon}\pi c^2)
\end{aligned} \tag{39}$$

Quando $b = 0$ temos $V_1 = V_2 = 0$ e $V_3 = 0 \iff c = 12$. Assim quando $c > 12$ temos que $V_3 > 0$

O sentido da rotação é o sentido horário. Assim para $V_3 > 0$ temos um foco fraco atrator e para $V_3 < 0$ um foco fraco repulsor.

Figura 19: A Aplicação de Retorno π

Quando $c = 12$ temos:

$$V_5 = \frac{11}{32} \frac{\pi}{\sqrt{2\varepsilon}} \quad (40)$$

Como V_5 é positivo segue que $(0,0)$ é um foco fraco atrator. Observemos também que quando $\varepsilon \downarrow 0$ temos $V_5 \rightarrow +\infty$.

4 - OS RETRATOS DE FASE DO SISTEMA $X_{\varepsilon,b,c}$

Inicialmente vamos analisar o retrato de fase de $X_{\varepsilon,b,c}$ dado por (10) quando $\varepsilon = 0$. Neste caso o sistema (10) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y - F_{b,c}(x) \\ y' = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Para cada par de valores fixados b e c temos que as singularidades de (41) são os pontos (x, y) tais que $y = F_{b,c}(x)$ (ou seja na curva $L_{b,c}$ dada por 12). Excluindo os pontos críticos, todas as singularidades são normalmente hiperbólicas. A figura 23 mostra o retrato de fase para um valor fixo (b, c) .

Figura 20 : Retratos de Fase de $X_{0,b,c}$

Vamos agora analisar quando $\varepsilon \neq 0$. Quando as retas $x = 0$ e $x = 2$ cruzam transversalmente o gráfico de $y = F_{b,c}(x)$ em pontos não críticos podemos utilizar o lema de R. Lutz e M. Goze [LG] para esboçar os retratos de fase. As trajetórias são tais que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(x^2 - 2x)}{y - F_{b,c}(x)} \quad (42)$$

Assim o campo de vetores é "quase" horizontal quando $\varepsilon \downarrow 0$. Como vimos em 3, em $b = 0$ nasce um ciclo limite (ou 2 ciclos limites, quando $c = 12$).

Figura 21 : Alguns Pontos do Espaço (ε, b, c)

Assim para $\varepsilon \downarrow 0$ e $b \rightarrow 0$ uma parte do retrato de fase é dada na figura 22

Figura 22 : Retratos de Fase em A, B, C, D e E..

Surtem duas dificuldades para obtenção total do retrato de fase:

- 1) O número de ciclos que o sistema admite.
- 2) As posições das separatrizes de sela.

Consideremos o plano dado por (26), isto é, valores do parâmetro para os quais o ponto de sela ocorre num ponto crítico.

Quando $b > -4c + 16$ o ponto de sela está à direita do mínimo local e quando $b < -4c + 16$ está à esquerda do mínimo local.

Figura 23 : Gráficos de $F_{b,c}$ no plano (SC)

Consideremos também o plano dado por (43). Para valores do parâmetro em (43) temos $F_{b,c}(0) = F_{b,c}(2)$.

$$(SC_2) \quad b = -2c + 8 \quad ((43))$$

Figura 24 : Planos SC e SC_2

Se $\varepsilon \downarrow 0$, I e II assumem as posições indicadas na figura 23 pois o campo de vetores é quase horizontal. III e IV estão numa vizinhança do gráfico de $y = F_{b,c}(x)$ (conhecido por Variedade Lenta) e as orientações são conseqüências das orientações de I e II. Quando II cruza o gráfico de $y = F_{b,c}(x)$ não pode descer pois se isto ocorresse teríamos uma terceira singularidade. A mesma razão justifica III.

Este comportamento é o mesmo até atingirmos o plano dado por (26).

A mudança nas posições relativas das separatrizes de sela, para os parâmetros em (26), poderá ocorrer quando a separatriz instável deixar a variedade lenta num ponto com a mesma altura que o ponto de mínimo. Assim, para $\varepsilon \downarrow 0$, o limite dos pontos que satisfazem esta condição é $(b, c) = (0, 4)$.

Figura 25: Limite das Órbitas Homoclínicas de Codimensão 2 quando $\varepsilon \downarrow 0$

Com relação ao número de ciclos vamos utilizar o seguinte lema (Teorema de Copel) que encontra-se em [DR2].

Lema 7 Consideremos o sistema (44):

$$\begin{cases} x' = F(x) - y \\ y' = g(x) \end{cases} \quad (44)$$

Suponhamos que F é de classe C^2 e que g é de classe C^1 . Além disso supomos F e g definidas para $x \in (\alpha, \beta)$, satisfazendo:

- 1) $f(x) = F'(x)$ admite um único zero $x_0 < 0$, $f(x) < 0$ (> 0) quando $\alpha < x < x_0$ ($x_0 < x < \beta$).
- 2) $F(0) = 0$, $F(\xi_0) = 0$ para $\alpha < \xi_0 < x_0$.
- 3) $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Então não existe ciclo limite na região $\xi_0 < x < \beta$.

Figura 26 : As funções F e g do Lema 7

A prova do Lema de Copel baseia-se numa simetria dada pela reta onde a divergência anula-se.

Consideremos $b \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$ fixos e suponhamos que $X_{\varepsilon,b,c}$, dado por (10), admite um ciclo limite Γ_ε . Quando $\varepsilon \downarrow 0$ ou este ciclo desaparece ou ele terá como LCP o ponto $(0,0)$. De fato, se $b \neq 0$ a singularidade $(0,0)$ não ocorre num ponto crítico.

Figura 27 : LCP's para $b \neq 0$

Teorema. 8 *Seja $X_{\varepsilon,b,c}$ dado por (10) com $b \neq 0$. Então $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(b,c)$, tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ então $X_{\varepsilon,b,c}$ não admite ciclos limites.*

Demonstração:

Suponhamos que dados $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\exists \varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que $X_{\varepsilon_n,b,c}$ admite um ciclo limite Γ_{ε_n} . Pela observação anterior segue $\Gamma_{\varepsilon_n} \rightarrow \{(0,0)\}$.

Se $b > 0$ então $-X_{\varepsilon_n,b,c}$ satisfaz as hipóteses 1, 2 e 3 do lema 7, para uma conveniente escolha de (α, β) . Logo $X_{\varepsilon_n,b,c}$ não admite ciclos numa vizinhança de $\{(0,0)\}$.

Se $b < 0$ então consideremos a substituição $x_1 = -x$, $y_1 = y$. Temos que

$$Y_{\varepsilon_n,b,c} : \begin{cases} x'_1 = \tilde{F}_{b,c}(x_1) - y_1 \\ y'_1 = \varepsilon(x_1^2 + 2x_1) \end{cases} \quad (45)$$

satisfaz as hipóteses do lema 6 e portanto $Y_{\varepsilon_n,b,c}$ não admite ciclos numa vizinhança de $\{(0,0)\}$. Estamos considerando $\tilde{F}_{b,c}(x_1) = F_{b,c}(-x_1)$.

5 - A DESINGULARIZAÇÃO DE $X_{\varepsilon,b,c}$

5-1-A desingularização em $(x, y, \varepsilon, b, c) = (0, 0, 0, 0, 12)$

Como vimos em 3, $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 12)$ é o limite dos pontos onde ocorre a Bifurcação de Hopf de codimensão 2. Além disso $(x, y) = (0, 0)$ não é uma singularidade normalmente hiperbólica quando $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 12)$. Para simplificar os cálculos vamos transladar $c = 12$ para $c = 0$. Começamos com a mudança (46)

$$c_1 = c - 12 \quad (46)$$

Se denotamos $c = c_1$ obtemos

$$X_{\varepsilon,b,c} : \begin{cases} x' = y - bx - cx^2 - 12x^2 + 4x^3 - x^4 \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x) \end{cases} \quad (47)$$

Quando $\varepsilon = b = c = 0$ o retrato de fase é dado por

Figura 28 : Retrato de Fase Quando $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 0)$

O ponto $(x, y) = (2, 32)$ é o limite dos pontos de sela quando $(\varepsilon, b, c) \rightarrow (0, 0, 0)$. Para (ε, b, c) numa vizinhança de $(0, 0, 0)$, $X_{\varepsilon,b,c}$ admite até dois ciclos limites. Nosso objetivo é estudar o que ocorre com estes ciclos quando $(\varepsilon, b, c) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Consideremos a aplicação $\varphi : [0, T] \times S_+^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por

$$\begin{aligned} x &= u\bar{x} & \varepsilon &= u^2\bar{\varepsilon} \\ y &= u^2\bar{y} & b &= u\bar{b} \\ & & c &= u\bar{c} \end{aligned} \quad (48)$$

com $u \in [0, T]$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{b}, \bar{c}) \in S_+^4$ e $T > 0$.

Temos que existe $\hat{X}$ em $[0, T] \times S_+^4$ tal que $\varphi_*(\hat{X}) = X_{\varepsilon, b, c}$. Dividindo $\hat{X}$ por u o campo de vetores resultante $\bar{X}$ será chamado de campo de vetores desingularizado em $[0, T] \times S_+^4$.

$$\bar{X} : \begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - \bar{b}\bar{x} - u\bar{c}\bar{x}^2 - 12\bar{x}^2 + 4u\bar{x}^3 - u^2\bar{x}^4 \\ \bar{y}' = \bar{\varepsilon}(u\bar{x}^2 - 2\bar{x}) \end{cases} \quad (49)$$

Estamos considerando $S^4 = (S^2 \times D) \cup (D^2 \times S^1)$ onde $S^2 = \{(\bar{\varepsilon}, \bar{b}, \bar{c}) \mid \bar{\varepsilon}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 1\}$, $D = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} \in [0, 1], \bar{y} \in [0, 1]\}$, $D^2 = \{(\bar{\varepsilon}, \bar{b}, \bar{c}) \mid \bar{\varepsilon}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 < 1, \bar{\varepsilon} > 0\}$ e $S^1 = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1\}$.

Seja $M_0 = \{(x, y)\} \times \{(\varepsilon, b, c)\}$ e $T_1 = [0, T] \times S_+^4$.

Definimos $M_1 = (T_1 \cup M_0 - \{0\})/m \sim \varphi(m)$.

Sejam $\phi : M_1 \rightarrow M_0$ tal que $\phi \mid (S^4 \times \{0\}) = \varphi$ e $\phi \mid M_0 - \{0\} = id$

Definimos $\pi : M_0 \rightarrow \{(\varepsilon, b, c)\}$ por $\pi(x, y, \varepsilon, b, c) = (\varepsilon, b, c)$ e $\hat{\pi} : M_1 \rightarrow \{(\varepsilon, b, c)\}$ por $\hat{\pi}(x, y, \varepsilon, b, c) = \pi(\phi(x, y, \varepsilon, b, c))$.

A fibra singular F_0 corresponde a $\hat{\pi}^{-1}(0, 0, 0)$ e equivale a $(S^4 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \mathbb{R})$.

Sejam $\bar{\lambda}_0 = (\varepsilon_0, b_0, c_0) \in S^2$, $l_{\bar{\lambda}_0}^- = \{t\bar{\lambda}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $P_{\bar{\lambda}_0}^- = \hat{\pi}^{-1}(l_{\bar{\lambda}_0}^-)$. Temos que $P_{\bar{\lambda}_0}^-$ é um espaço tridimensional e que λ define uma fibra regular F_λ quando $\lambda \neq 0$.

Figura 29 : Folheação de M_1

Definimos $\tilde{X}$ em M_1 por

$$\tilde{X} : \begin{cases} X_{\varepsilon, b, c} \text{ em } M_1 - \{0\} \\ \bar{X} \text{ em } T_1 \end{cases} \quad (50)$$

Em $S^1 \times \mathbb{R}$ temos $\bar{\varepsilon} = \bar{b} = \bar{c} = 0$. Efetuamos a mudança (51) e obtemos (52) onde $c = \cos \theta$ e $s = \sin \theta$.

$$x = u \cos \theta \quad (51)$$

$$y = u^2 \sin \theta$$

$$\begin{cases} u' = \frac{uc}{c^2 + 2s^2} (s - 12c^2 + 4uc^2 - u^2c^4) \\ \theta' = \frac{-2s}{c^2 + 2s^2} (s - 12c^2 + 4uc^2 - u^2c^4) \end{cases} \quad (52)$$

As singularidades de (52) são $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\theta_1, 0)$ e $(\theta_2, 0)$ onde θ_1 e θ_2 são soluções de $s = 12c^2$. Temos que $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e que $\theta_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Multiplicando (52) por $(c^2 + 2s^2)$ obtemos

$$\begin{cases} \theta' = -2s(s - 12c^2 + 4uc^2 - u^2c^4) \\ u' = uc(s - 12c^2 + 4uc^2 - u^2c^4) \end{cases} \quad (53)$$

Assim obtemos:

$$DX(\theta, 0) = \begin{bmatrix} -4sc + 24c^3 - 48s^2c & -8c^2s \\ 0 & sc - 12c^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
DX(0,0) &= \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \\
DX(\pi,0) &= \begin{bmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

Em $(\theta, u) = (0, 0)$ temos que o auto-valor angular é positivo e o auto-valor radial é negativo.

Em $(\theta, u) = (\pi, 0)$ temos auto-valor angular negativo e auto-valor radial positivo.

Se $\theta = \theta_1$ ou $\theta = \theta_2$ temos $-4sc + 24c^3 - 48s^2c = -2sc - 48s^2c < 0$ para $\theta = \theta_1$ e $-2sc - 48s^2c > 0$ para $\theta = \theta_2$. Além disso os auto-valores são nulos na parte radial.

$$\begin{aligned}
DX(\theta_1,0) &= \begin{bmatrix} < 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
DX(\theta_2,0) &= \begin{bmatrix} > 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{55}$$

Figura 30: Retrato de Fase de $\tilde{X}$ em $F_0|S^1 \times R$

Vamos fixar $\bar{\varepsilon} = 1$. Tomando $u = 0$ em (49) obtemos

$$\bar{X}_{\bar{b}, \bar{\varepsilon}} : \begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - \bar{b}\bar{x} - 12\bar{x}^2 \\ \bar{y}' = -2\bar{x} \end{cases} \tag{56}$$

Temos que $\bar{X}_{\bar{b}, \bar{\varepsilon}}$ independe do valor de $\bar{\varepsilon}$ e quando $\bar{b} = 0$ (49) apresenta um centro simétrico em $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$

$$\bar{X}_0 : \begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - 12\bar{x}^2 \\ \bar{y}' = -2\bar{x} \end{cases} \tag{57}$$

O retrato de fase de $\tilde{X}$ em $P_{(1,0,\bar{\varepsilon})}$ quando $u = 0$ é dado por

Figura 31 : Retrato de Fase de $\tilde{X}$ quando $\bar{\varepsilon} = 1, \bar{b} = 0$ e $u=0$

Se tomamos $\bar{\varepsilon} = 1, \bar{b} = \bar{b}_0 > 0, u = 0$ ou $\bar{\varepsilon} = 1, \bar{b} = \bar{b}_1 < 0, u = 0$ os retratos estão representados na figura

Figura 32 :Retratos de Fase de $\tilde{X}$ Quando $\bar{b} > 0$ ou $\bar{b} < 0$

5.2-A desingularização em $(x, y, \varepsilon, b, c) = (2, 0, 0, 0, 4)$

Iniciamos com a seguinte mudança:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - 2 & b_1 &= -b - 4c + 16 \\ y_1 &= y + 2b - 4c + 16 & c_1 &= c - 4 \end{aligned} \tag{58}$$

A mudança (58) transforma (10), voltando a chamar x, y, b, c , em:

$$\begin{cases} x' = y + bx - cx^2 - 4x^2 - 4x^3 - x^4 \\ y' = \varepsilon(x^2 + 2x) \end{cases} \tag{59}$$

Vamos efetuar a desingularização no ponto $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Figura 33: Retrato de Fase de $X_{0,0,4}$

Consideremos a aplicação $\Psi : [0, T] \times S_+^4 \rightarrow R^5$ dada por:

$$\begin{aligned} x &= u\bar{x} & b &= u\bar{b} \\ y &= u^2\bar{y} & c &= u\bar{c} \\ \varepsilon &= u^2\bar{\varepsilon} \end{aligned} \tag{60}$$

Como antes, fazendo $\bar{X} = \frac{1}{u}\hat{X}$ e tomando $\bar{\varepsilon} = 1$ obtemos:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} + \bar{b}\bar{x} - 4\bar{x}^2 - 4u\bar{x}^3 - u^2\bar{x}^4 \\ \bar{y}' = 2\bar{x} + u\bar{x}^2 \end{cases} \tag{61}$$

Quando $\bar{b} = \bar{c} = u = 0$ obtemos:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - 4\bar{x}^2 \\ \bar{y}' = 2\bar{x} \end{cases} \tag{62}$$

A singularidade $(0,0)$ de (62) é tal que

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

O polinômio característico é

$$z^2 - 2 = 0 \quad (64)$$

Assim (0,0) é um ponto de sela.

Consideremos a mudança

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta \\ y &= u^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (65)$$

Tomando $\varepsilon = b = c = 0$ em (59) e chamando $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$ obtemos:

$$\begin{cases} \theta' = \frac{-2us}{c^2+2s^2}(s-4c^2-4uc^3-u^2c^4) \\ u' = \frac{u^2c}{c^2+2s^2}(s-4c^2-4uc^3-u^2c^4) \end{cases} \quad (66)$$

Multiplicando por $(c^2 + 2s^2)$ obtemos

$$\begin{cases} \theta' = -2s(s-4c^2-4uc^3-u^2c^4) \\ u' = uc(s-4c^2-4uc^3-u^2c^4) \end{cases} \quad (67)$$

As singularidades de (67), quando $u = 0$, são dadas por $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\varphi_1)$ e $(0,\varphi_2)$ onde φ_1 e φ_2 são soluções de $\sin \varphi = 4 \cos^2 \varphi$.

Temos que:

$$DX(\theta, u) = \begin{bmatrix} -4sc - 16s^2c + 8c^3 & 8sc^3 \\ 0 & sc - 4c^3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} DX(\pi, 0) &= \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ DX(0, 0) &= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

Isto implica que a singularidade $(\pi, 0)$ apresenta auto-valor angular negativo e auto-valor radial positivo e a singularidade $(0,0)$ apresenta auto-valor angular positivo e radial negativo.

Também temos que $sc - 4c^3 = -8c^3 - 16s^2c$ quando $\theta = \varphi_1$ ou $\theta = \varphi_2$. Assim $sc - 4c^3$ é

negativo para $\theta = \varphi_1$ e positivo para $\theta = \varphi_2$. Assim temos:

$$\begin{aligned} DX(\varphi_1, 0) &= \begin{bmatrix} < 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ DX(\varphi_2, 0) &= \begin{bmatrix} > 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

Em $(\varphi_1, 0)$ temos auto-valor angular negativo e auto-valor radial nulo. Em $(\varphi_2, 0)$ temos auto-valor angular positivo e radial nulo.

Figura 34: Desingularização em $(2, 0, 0, 0, 4)$

5.3-A desingularização em $(x, y, \varepsilon, b, c) = (1, 1, 0, 0, 4)$

Iniciamos com a seguinte mudança:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - 1 & b_1 &= -b - 2c + 8 \\ y_1 &= y - b - c + 3 & c_1 &= c - 4 \end{aligned} \quad (71)$$

A mudança (71) transforma (10), voltando a chamar x, y, b, c em

$$\begin{cases} x' = y + bx - cx^2 + 2x^2 - x^4 \\ y' = \varepsilon(x^2 - 1) \end{cases} \quad (72)$$

Vamos efetuar a desingularização no ponto $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Figura 35: Retrato de Fase de $X_{0,0,4}$

Consideremos a aplicação $\delta : [0, T] \times S_+^4 \rightarrow R^5$ dada por

$$\begin{aligned} x &= u\bar{x} & b &= u\bar{b} \\ y &= u^2\bar{y} & c &= u\bar{c} \\ \varepsilon &= u^3\bar{\varepsilon} \end{aligned} \tag{73}$$

Como antes, fazendo $\bar{X} = \frac{1}{u}X$ e tomando $\bar{\varepsilon} = 1$ obtemos

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} + \bar{b}\bar{x} - u\bar{c}\bar{x}^2 + 2\bar{x}^2 - u^2\bar{x}^4 \\ \bar{y}' = (u^2\bar{x}^2 - 1) \end{cases} \tag{74}$$

Quando $\bar{b} = \bar{c} = u = 0$ obtemos

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} + 2\bar{x}^2 \\ \bar{y}' = -1 \end{cases} \tag{75}$$

O campo de vetores (75) não admite singularidades e seu retrato de fase é dado por

Figura 36: Retrato de Fase de (75)

Consideremos a mudança

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta \\ y &= u \sin \theta \end{aligned} \quad (76)$$

Tomando $\varepsilon = b = c = 0$ em (72) e denotando $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$ obtemos

$$\begin{cases} \theta' = \frac{-2s}{(c^2+2s^2)}(s+2c^2-u^2c^4) \\ u' = \frac{uc}{(c^2+2s^2)}(s+2c^2-u^2c^4) \end{cases} \quad (77)$$

Multiplicando por $c^2 + 2s^2$ obtemos

$$\begin{cases} \theta' = -2s(s+2c^2-u^2c^4) \\ u' = uc(s+2c^2-u^2c^4) \end{cases} \quad (78)$$

As singularidades de (78), quando $u = 0$, são dadas por $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\theta_1,0)$ e $(\theta_2,0)$ onde $\pi < \theta_1 < \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \theta_2 < 2\pi$ são soluções de $s+2c^2=0$.

Temos que

$$DX(\theta,0) = \begin{bmatrix} -4sc - 4c^3 + 8cs^2 & 0 \\ 0 & sc + 2c^3 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} DX(0,0) &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ DX(\pi,0) &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (80)$$

Isto implica que a singularidade $(0,0)$ apresenta auto-valor angular negativo e radial positivo e a singularidade $(\pi,0)$ apresenta auto-valor angular positivo e radial negativo.

Temos que $sc + 2c^3 = 0$ em $\theta = \theta_1$ e em $\theta = \theta_2$. Assim $-4sc - 4c^3 + 8s^2c = 4c(c^2 + 2s^2)$ é positivo para $\theta = \theta_2$ e negativo para $\theta = \theta_1$.

Assim temos

$$\begin{aligned} DX(\theta_1,0) &= \begin{bmatrix} < 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ DX(\theta_2,0) &= \begin{bmatrix} > 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (81)$$

Em $(\theta_1,0)$ temos auto-valor angular negativo e radial nulo e em $(\theta_2,0)$ temos auto-valor angular positivo e radial nulo.

Figura 37: Desingularização em $(1,1,0,0,4)$

Figura 38: Desingularização Simultânea

6 - O FENÔMENO CANARD

Tendo efetuado a desingularização de (40) estamos agora em condições de provar os teoremas 2 e 3

6.1-Demonstração do Teorema 2

Para simplificar os cálculos trasladamos o parâmetro c (46) e trabalhamos com $X_{\varepsilon,b,c}$ na forma (47).

Vamos provar inicialmente que existe um Hamiltoniano H com fator integrante K tal que $K\overline{X}_0 = dH$, $\overline{X}_0$ dado por (57).

Consideremos a mudança (82):

$$\begin{aligned} X &= \overline{x} \\ Y &= \overline{y} - 12\overline{x}^2 \end{aligned} \tag{82}$$

Assim (57) assume a forma

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -2X - 24XY \end{cases} \tag{83}$$

Consideremos $F(X, Y)$ dada por

$$F(X, Y) = 144X^2 + (1 + 12Y) - \ln(1 + 12Y) \tag{84}$$

Temos que $F(X, Y)$ é uma integral primeira de (83). De fato

$$(F_X, F_Y)(Y, -2X - 24XY) = 0 \tag{85}$$

Sejam $G(\overline{x}, \overline{y})$ e $H(\overline{x}, \overline{y})$ dadas por

$$G(\overline{x}, \overline{y}) = (1 + 12\overline{y}) - \ln(1 + 12\overline{y} - 144\overline{x}^2) \tag{86}$$

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = [\exp(1 - 12\bar{y})](1 + 12\bar{y} - 144\bar{x}^2)$$

Temos

$$H_{\bar{x}} = -144 e^{(1-12\bar{y})} (2\bar{x}) \quad (87)$$

$$H_{\bar{y}} = -144 e^{(1-12\bar{y})} (\bar{y} - 12\bar{x}^2)$$

Assim

$$K(\bar{x}, \bar{y}) = -144 e^{(1-12\bar{y})} \quad (88)$$

é o fator integrante e o Hamiltoniano H é dado por (86).

Agora consideremos $P_{(1,0,0)}$ definido em 5. Temos que $P_{(1,0,0)}$ é um espaço 3-dimensional .

Um ponto em $P_{(1,0,0)}$ admite 3 coordenadas (u, v, θ) , indicadas na figura

Figura 39: O Espaço $P_{(1,0,0)}$

Quando $u = 0$, chamamos D a parte correspondente a $v = 0$. Seja R um retângulo em $P_{(1,0,0)}$ com um lado r em D e tal que R é transversal a ∂P . Tomamos R tal que a conexão c unindo $(\theta_1, 0)$ a $(\theta_2, 0)$ é transversal a r em seu ponto médio. Seja S um subretângulo em R com um lado s em D e tal que $c \cap r$ é o ponto médio de s .

Figura 40: Os retângulos R e S em $P_{(1,0,0)}$

Sejam T , dada por $y = 32$ unindo os pontos do gráfico de $F_{0,0}$ e $N = T^\perp$ em $(0, F_{0,0}(0,))$, $T^\perp \subset P_{(1,0,0)}$. Seja C_N a saturada de N , isto é, o fecho da união de segmentos de órbitas de $X_{(u,v,\theta)}$ por pontos de N e tomados entre a primeira intersecção de sua trajetória com S em tempo negativo e com R em tempo positivo.

Figura 41: Variedade Central

Seja $w_{u,\bar{b},\bar{c}}$ a 1-forma dual associada a (49).

$$w_{u,\bar{b},\bar{c}} = \left(\bar{y} - \bar{b}\bar{x} - u\bar{c}\bar{x}^2 - 12\bar{x}^2 + 4u\bar{x}^3 - u^2\bar{x}^4 \right) d\bar{y} - \left(u\bar{x}^2 - 2\bar{x} \right) d\bar{x} \quad (89)$$

Temos

$$-144e^{(1-12\bar{y})}w_{u,\bar{b},\bar{c}} = dH(\bar{x},\bar{y}) - 144e^{(1-12\bar{y})} \left(\left(-\bar{b}\bar{x} - u\bar{c}\bar{x}^2 + 4u\bar{x}^3 - u^2\bar{x}^4 \right) d\bar{y} - u\bar{x}^2 d\bar{x} \right) \quad (90)$$

Consideremos a seção $[\alpha, \beta]$ unindo o centro $\alpha = (0, 0)$ e o ponto $\beta = (0, -\frac{1}{12})$ na conexão c . Parametrizamos $[\alpha, \beta]$ pelo valor do Hamiltoniano H . Denotamos $C_h = H^{-1}(h)$ com $h \in (0, e)$ ($H(0, 0) = e$, $H(0, -\frac{1}{12}) = 0$).

Figura 42 : Seção $[\alpha, \beta]$ em D

O desenvolvimento assintótico da aplicação de Poincaré $P_{u,\bar{b},\bar{c}}$ usando o lema de Perturbação [DRS1], é dado por

$$P_{u,\bar{b},\bar{c}}(h) = h + \bar{b}I_1(h) + \bar{c}I_2(h) + uI_3(h) + o(|u, \bar{b}, \bar{c}|) \quad (91)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(h) &= 144 \int_{C_h} e^{(1-12\bar{y})} \bar{x} d\bar{y} \\ I_2(h) &= 144u \int_{C_h} e^{(1-12\bar{y})} \bar{x}^2 d\bar{y} = 0 \\ I_3(h) &= -576 \int_{C_h} e^{(1-12\bar{y})} \bar{x}^3 d\bar{y} + 144 \int_{C_h} e^{(1-12\bar{y})} \bar{x}^2 d\bar{x} \end{aligned} \quad (92)$$

Se $u = h = 0$ o desenvolvimento de separação entre $C_{b,c}^+$ e $C_{b,c}^-$ (figura 47) é dado por

$$\Delta(\bar{b}, \bar{c}) = \bar{b}I_1(0) \quad (93)$$

Figura 43: Separatrizes $c_{b,c}^+$ e $c_{b,c}^-$

Se $h = f(u, \bar{b}, \bar{c})$ e $h = g(u, \bar{b}, \bar{c})$ denotam as intersecções de $C_N(\bar{b}, \bar{c})$ com R então, de acordo com [DR1], temos que

$$f(u, \bar{b}, \bar{c}) - g(u, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{b}I_1(0) + uI_3(0) + o(|u, \bar{b}, \bar{c}|) \quad (94)$$

Seja $\Delta(u, b, c)$ dada por

$$\Delta(u, b, c) = f(u, \bar{b}, \bar{c}) - g(u, \bar{b}, \bar{c}) \quad (95)$$

Para $h = 0$ temos que $K(\bar{x}, \bar{y}) = -144e^{(2-144\pi^2)}$ é uma função par e $d\bar{y} = 24\bar{x}d\bar{x}$. Utilizando integração por partes obtemos $I_1(0) \neq 0$, $I_2(0) = 0$ e $I_3(0) = 0$. Segue então que as equações

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial b} \neq 0 \end{cases} \quad (96)$$

definem $\bar{b} = \varphi(\bar{c}, u)$ a superfície Canard.

Figura 44: Superfície Canard

Para avaliarmos a estabilidade dos ciclos γ associados aos valores dos parâmetros $(\varepsilon, b, c) \in S$ devemos calcular $\int_{\gamma} \text{div} X_{\varepsilon, b, c}$.

Aproximamos γ do LCP Γ , dado pela figura 13.

Temos

$$I_{b,c} = \int_{\gamma} \text{div} X_{\varepsilon, b, c} \simeq \int_{-1.3013}^2 (b + 2cx - 12x^2 + 4x^3)(\sqrt{1 + (24x - 12x^2 + 4x^3)^2} + 1)dx \quad (97)$$

Com o auxílio do MAPLE obtemos

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{subs}(b = 0.0001, c = 12.0001, I_{b,c}) \simeq -518.12 \\ S_2 &= \text{subs}(b = 0.0001, c = 11.9999, I_{b,c}) \simeq -523.55 \\ S_3 &= \text{subs}(b = -0.0001, c = 11.9999, I_{b,c}) \simeq -537.06 \\ S_4 &= \text{subs}(b = -0.0001, c = 12.0001, I_{b,c}) \simeq -531.63 \end{aligned} \quad (98)$$

Os valores obtidos em (98) nos levam a crer que os ciclos associados aos valores dos parâmetros na superfície canard são atratores.

6.2-Demonstração do Teorema 3

A superfície L é obtida implicitamente de maneira análoga a Superfície Canard. Para tal consideramos $\gamma = \{(2, F_{b,c}(2)) | b, c \in R, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ formado por selas de $X_{\varepsilon,b,c}$. Saturando γ pelo fluxo de $X_{\varepsilon,b,c}$ temos que as intersecções das variedades obtidas a partir das separatrizes definem a superfície das órbitas homoclínicas. As órbitas homoclínicas limites são dadas pela figura

Figura 45: Órbitas Homoclínicas Limites para $\varepsilon \downarrow 0$

Seja $l(\varepsilon, b, c)$ a órbita homoclínica associada aos parâmetros (ε, b, c) . Temos que não existe limite de $l(\varepsilon, b, c)$, quando $\varepsilon \downarrow 0$ e $c < 4$, segundo a distância de Hausdorff. Isto segue do fato que a separatriz instável não atinge a variedade lenta quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Figura 46: Não Existência de Limites Homoclínicos em $\{b = 0, c < 4\}$

Para avaliar a estabilidade da órbita homoclínica estudamos a divergência de $X_{\varepsilon,b,c}$ em $(2, F_{b,c}(2))$. Temos que $\text{div } X_{\varepsilon,b,c}(2, F_{b,c}(2)) = -F'_{b,c}(2) = -(b+4c-16)$. Segue então que para valores dos parâmetros em L e à direita de SC temos órbitas homoclínicas atratoras e à esquerda de (SC) repulsoras. Quando $\varepsilon \downarrow 0$ os valores dos parâmetros para os quais os respectivos campos admitem ciclos limites tendem para $\{b=0\}$. Assim a superfície L tenderá para $\{b=0\}$. Segue que os valores dos parâmetros onde teremos órbitas homoclínicas não genéricas tenderão ao ponto $(\varepsilon, b, c) = (0, 0, 4)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. De fato, as órbitas homoclínicas não genéricas ocorrem quando os parâmetros estão em SC .

Precisamos avaliar o grau de degenerescência das órbitas homoclínicas correspondentes aos pontos em $\mathcal{L}_2 = L \cap SC$. Para isso vamos efetuar a desingularização de $X_{\varepsilon,b,c}$ em $(x, y, \varepsilon, b, c) = (0, 0, 0, 0, 4)$. Efetuamos a mudança

$$c_1 = c - 4 \quad (99)$$

Voltando a chamar c e efetuando a mudança (48) obtemos de maneira análoga

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - \bar{b}\bar{x} - 4\bar{x}^2 - u\bar{c}\bar{x}^2 + 4u\bar{x}^3 - u^2\bar{x}^4 \\ \bar{y}' = u\bar{x}^2 - 2\bar{x} \end{cases} \quad (100)$$

Temos que $H(\bar{x}, \bar{y})$ e $K(\bar{x}, \bar{y})$ dados por (100) são tais que KX_0 é o Hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} H(\bar{x}, \bar{y}) &= (\exp(1 - 4\bar{y}))(1 + 4\bar{y} - 16\bar{x}^2) \\ K(\bar{x}, \bar{y}) &= 16 \exp(1 - 4\bar{y}) \end{aligned} \quad (101)$$

$$KX_0 : \begin{cases} \bar{x}' = -H_{\bar{y}} \\ \bar{y}' = H_{\bar{x}} \end{cases} \quad (102)$$

Para avaliar o grau de degenerescência das órbitas homoclínicas utilizamos a aplicação:

$$R(h) = \bar{b}I_1(h) + u\bar{c}I_2(h) + uI_3(h) + o(u, b, c) \quad (103)$$

onde I_1, I_2 e I_3 são dados por

$$\begin{aligned} I_1(h) &= - \int_{c_h} K \bar{x} d\bar{y} \\ I_2(h) &= - \int_{c_h} K \bar{x}^2 d\bar{y} = 0 \\ I_3(h) &= \int_{c_h} 4K \bar{x}^3 d\bar{y} - \int_{c_h} K \bar{x}^2 d\bar{x} \end{aligned} \quad (104)$$

A equação $R(h) = 0$ define a superfície L . Além disso $R'(h)$ é finito se e somente se a divergência no ponto de sela é nula [R]. Efetuando o cálculo obtemos $R'(h)$ finito se e somente se $\bar{b} = -4\bar{c}$. Para provarmos que em $\mathcal{L}_2$ temos órbita homoclínica de codimensão 2 temos que provar que $R'(h) \neq 0$. Utilizamos a aplicação $\tilde{R}(h) = \bar{b} + u \frac{I_3(h)}{I_1(h)}$ e temos que

$$\tilde{R}'(h) = u \left(\frac{I_3(h)}{I_1(h)} \right)' \quad (105)$$

Com argumento similar ao utilizado em [CW] ,conforme o apêndice de [DR1] , temos que

$$\left(\frac{I_3(h)}{I_1(h)} \right)' < 0 \quad (106)$$

para $h < e$. Segue que para $\bar{c} < 0$ temos $\tilde{R}'(h) < 0$.

Figura 47: Órbita Homoclínica Limite de Codimensão 2

6.3-Considerações Finais

Vamos interpretar a superfície Canard como a transição entre curvas Canard estudadas por Boutat [B].

Boutat estudou o caso cúspide de codimensão 2 quando o sinal é positivo em (6) e com substituição análogas as feitas em 2 obtem-se

$$\begin{cases} x' = y - \left(\frac{x^2}{2} + ax\right) \\ y' = -\varepsilon(x^2 + 2x) \end{cases} \quad (107)$$

Considerando o sinal negativo em (6) obtemos

$$\begin{cases} x' = y - \left(-\frac{x^2}{2} - bx\right) \\ y' = -\varepsilon(x^2 + 2x) \end{cases} \quad (108)$$

onde

$$a + b = 2. \quad (109)$$

As curvas Canard obtidas são respectivamente

Figura 48: Curvas canard dos casos (+) e (-)

A figura (14) pode ser interpretada como a transição entre as figuras dadas em (48).

Figura 49: Transição entre Curvas Canard

Outros fenômenos podem ser estudados.. Com a mesma técnica se considerarmos $y = y_0$ com $0 \leq y_0 < 32$ obteremos uma nova superfície tal que para os parâmetros nesta superfície o LCP será dado na figura

Figura 50: Ciclo Canard para $y=y_0 < 32$

A intersecção das duas superfícies Canard geram uma curva tal que para os valores do parâmetro nesta curva o par de ciclos converge para o anel dado na figura

Figura 51: Anel Limite

Outras intersecções podem ser estudadas e assim a distância de Hausdorff dos ciclos que formam o anel sofre significativas alterações em um vizinhança de $(0, 0, 12)$.

BIBLIOGRAFIA

- [AGLM] A.Andronov, E.Leontovich, I.Gordon, A.Maier -Theory of bifurcations of dynamical sytems on a plane, I.P.S.T., Jerusalem, 1971.
- [B] M.A. Boutat - "Famille de Champs de Vecteurs Quadratiques du Plan de Type-Bogdanov - Takens" - These - Universite de Bourgogne - 1991.
- [B-1] R. Bogdanov - Versal Deformations of a Singular Point of a Vector Field on the Plane in the Case of Zero Eigenvalues. Seminar Petrovski, 1976. Sel. Math. Sov. 1 (4) - 1981.
- [B-2] R. Bogdanov - Bifurcation of a Limit Cycle for a Family of Vector Fields on the Plane. - Seminar Petrovski, 1976. Sel. Math. Sov. 1 (4) - 1981.
- [BCD] Benoit, E., Callot, J. L., Diener, F., Diener, M., - Chasse au Canard - Collect. Math. 31 - 32 (1 - 3) (1981).
- [CW] Chow, Li and Wang -Uniqueness of Periodic Orbits in Some Vector Fields with cod.2 Singularities- JDE, 77 (2) (1989).
- [D] Dumortier, F. - "Local Study of Planar Vector Fields: Singularities and their unfoldings", Stud. Math Phys. 2, Amsterdam 1991.
- [DR1] Dumortier, F., Roussarie, R. - "Canard Cycles and Center Manifolds" - Memoirs of The American Mathematical Society 121(577)-1996
- [DR2] Dumortier, F., Rousseau, C. - "Cubic Liénard Equations with Linear Damping," Non-Linearity 3 (1990).
- [DRS-1] Dumortier, F., Roussarie, R., Sotomayor, J. - "Generic 3 - parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part - The cusp case" , Ergodic Theory Dynamical Systems 7 (1987).
- [DRS-2] Dumortier, F., Roussarie, R. , Sotomayor, J. - "Generic 3 - parameter families of planar vector fields, unfoldings of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear part, in : Bifurcations of Planar Vector Fields: Nilpotent Singularities and Abelian Integrals (F. Dumortier et al., eds.), Lecture Notes in Math. 1480, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1991.

[E] W. Eckhaus, "Relaxation Oscillations Including a Standard Chase on French Ducks", in Asymptotic Analysis II, Springer Lect. Notes in Math. 985, 449 - 494, 1983.

[LG] R. Lutz, M. Goze - "Non Standard Analysis. A Practical Guide with Applications". LN - 881.

[R] Roussarie, R. - On the number of limit cycles which appear by perturbation of a separatix loop of planar vector fields, Bol.Soc.Brasil.Mat. 17 (1986) , 67-101.

[RW]-Roussarie, R.; Wagener, F. - A Study of The Bogdanov-Takens Bifurcation-Resenhas IME-USP, vol.2.No.1,1995.