**Regularidade de Soluções para Equações
Diferenciais Parciais Elípticas Degeneradas**

Albo Carlos Cavalheiro

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Análise Matemática**
Orientador: **Prof.Dr. José Carlos Diniz Fernandes**

- São Paulo, Março de 1997 -

Regularidade de Soluções para Equações Diferenciais
Parciais Elípticas Degeneradas

Este exemplar corresponde à redação
da Tese devidamente corrigida e
apresentada por Albo Carlos Cavalheiro
e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 07 de Março de 1997

Banca Examinadora:

- Prof.Dr. José Carlos Diniz Fernandes (orientador) - IME/USP
- Prof.Dr. Paulo Domingos Cordaro - IME/USP
- Prof.Dr. Adalberto P. Bergamasco - UFScar
- Prof.Dr. Sergio Luis Zani - ICMSC/USP
- Prof.Dr. Jorge Hounie - UFScar

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de soluções (fracas) de certas equações elípticas degeneradas com o operador na forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)),$$

onde os coeficientes a_{ij} são funções mensuráveis reais cuja matriz dos coeficientes $A(x) = (a_{ij}(x))$ satisfaz a condição

$$\lambda|\xi|^2\omega(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2v(x), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$x \in \Omega$ aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, onde ω e v são funções pesos, λ e Λ constantes positivas.

O principal resultado garante a regularidade interior para a solução da equação $Lu = g$ (no caso $\omega = v$). Precisamos da seguinte definição

Definição Dizemos que um peso ω é uniformemente A_p em cada coordenada se $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ e $\omega_i(t) = \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A_p(\mathbb{R})$, para quase todo $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, com constante A_p independente de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Teorema Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ uma solução fraca da equação $Lu = g$ verificando as seguintes condições

- (i) $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$;
- (ii) ω é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada ;
- (iii) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h , onde $\Delta_k^h a_{ij}(x) = (a_{ij}(x + he_k) - a_{ij}(x))/h$.

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the behaviour of (weak) solutions of certain classes of degenerate elliptic equations in the divergence form

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)),$$

where the coefficients a_{ij} are measurable, real-valued functions whose coefficient matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ satisfies

$$\lambda|\xi|^2\omega(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2v(x),$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \Omega$ a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, and ω and v weight functions, λ and Λ positive constants.

The principal theorem guarantees the interior regularity for a solution of the equation $Lu = g$ (in the case $\omega = v$). We need the following definition

Definition A weight ω is uniformly A_p in each coordinate if $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ and $\omega_i(t) = \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A_p(\mathbb{R})$ a.e., with A_p constant independent of $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Theorem Let $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ be a weak solution of the equation $Lu = g$ in Ω where

- (i) $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$;
- (ii) ω is a weight uniformly A_p in each coordinate;
- (iii) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, with constant C_1 independent of Ω' and h , where $\Delta_k^h a_{ij}(x) = (a_{ij}(x + he_k) - a_{ij}(x))/h$.

Then for any $\Omega' \subset \subset \Omega$ we have $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ and

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

ÍNDICE

Prefácio	i
Notações Básicas	vii
Capítulo 1 Definições e Propriedades Fundamentais	1
Capítulo 2 Regularidade Interior	23
Capítulo 3 Regularidade Global	48
Capítulo 4 Aproximação de Solução	72
Capítulo 5 Caso Geral	92
Bibliografia	133
Índice Alfabético	135

Prefácio

O presente trabalho tem como objetivo estudar o comportamento de soluções de uma classe de equações elípticas degeneradas do tipo

$$Lu = g - \operatorname{div} \vec{f} \quad (1)$$

onde L é um operador na forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)) \quad (2)$$

e os coeficientes a_{ij} são funções a valores reais, mensuráveis e cuja matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ satisfaz as condições

$$\omega(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq v(x)|\xi|^2 \quad (3)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C v(x) \quad (4)$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, onde ω e v são funções pesos (funções não-negativas e localmente integráveis).

Um operador L com os coeficientes satisfazendo a condição (3) é denominado operador elíptico degenerado. Como exemplos de operadores satisfazendo estas condições podemos citar

$$Lu = -\operatorname{div}(|x|^\beta D_1 u, |x|^{-\beta} D_2 u)$$

com $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $0 < \beta < 2$.

No caso clássico, quando $\omega = v = 1$, o problema foi estudado por vários autores, dos quais podemos citar os trabalhos de [GT] e [KS], que foram uma importante fonte para a realização deste trabalho.

Para o caso clássico, por exemplo, em [GT], o operador L (dado em (2)) satisfaz a condição

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

(neste caso, L é um operador elíptico não-degenerado) e um dos principais resultados demonstrado (teorema 8.8) afirma que

“ Se $u \in W^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^1(\Omega) : D_j u \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n\}$ é solução fraca da equação $Lu = f$ e as funções coeficientes $a_{ij} \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$ então $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ ”.

Para a demonstração deste teorema são fundamentais os seguintes resultados

“ Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $\Delta_i^h u \in L^p(\Omega')$, para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ e todo h satisfazendo $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, e vale a estimativa

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{lema 7.23 de [GT]})$$

onde $\Delta_i^h u(x) = [u(x + he_i) - u(x)]/h$, $h \neq 0$. O outro lema afirma

“ Se $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e supondo que existe uma constante K tal que $\|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$ para todo $\Omega' \subset \subset \Omega$ e todo h , $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Então existe a derivada no sentido fraco $D_i u$ satisfazendo $\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ ” (lema 7.24 de [GT]).

O principal objetivo deste trabalho será o de generalizar o resultado do teorema 8.8 de [GT] em espaços $H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ que são generalizações dos espaços de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$, ou seja, encontrar condições sobre os coeficientes a_{ij} e sobre os pesos ω e v para que a solução $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ da equação $Lu = f$ pertença a $H^{2,2}(\bar{\Omega}, \omega, v)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ (regularidade interior). Para isso precisaremos estudar em que classe de pesos os resultados dos lemas 7.23 e 7.24 de [GT] podem ser generalizados.

Com esse propósito introduzimos a noção de peso A_p . Um peso $\omega \in A_p$ se existir uma constante C (chamada constante A_p para ω) satisfazendo:

(a)

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C$$

com a constante C independente de Q , se $1 < p < \infty$;

e satisfazendo

(b)

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \text{ ess inf}_Q \omega$$

para qualquer cubo Q , onde $|Q|$ é a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, se $p = 1$.

A razão para introduzir a noção de peso A_p neste trabalho é que, embora as desigualdades de Sobolev e Poincaré, entre outros resultados, serem válidas para pesos que não são da classe A_p (por exemplo em [FKS]), no teorema de Muckenhoupt

(que enunciaremos a seguir), que é um resultado essencial para as generalizações dos lemas 7.23 e 7.24 de [GT], a condição necessária e suficiente é que o peso envolvido pertença à classe A_p .

Teorema de Muckenhoupt Se ω é um peso em $\mathbb{R}^n$ e

$$[M(f)](x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

é a função maximal de Hardy-Littlewood então, para $p > 1$ temos que $M : L^p(\mathbb{R}^n, \omega) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$ é contínuo se, e somente se, $\omega \in A_p$ (corolário 4.3 de [GCR]).

O problema foi estudado considerando dois casos possíveis:

(1) Se $\omega = v$ (capítulos 1, 2, 3 e 4).

(2) Se $\omega \neq v$ (capítulo 5).

Apresentamos a seguir um breve relato sobre cada capítulo.

No capítulo 1 apresentamos as definições e resultados básicos que serão utilizados nos demais capítulos, como a definição dos espaços $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ que é o fecho do espaço $C^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega, \omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \omega dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \omega dx \right)^{1/p}$$

que generalizam as definições dos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Também enunciamos as desigualdades de Sobolev e Poincaré com peso.

Neste capítulo será feito o estudo sobre o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} Lu &= g - \sum_{j=1}^n D_j f_j, \quad \text{em } \Omega \\ u - \psi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Provaremos inicialmente a existência e unicidade da solução $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, e em seguida uma estimativa *a priori* que limita a norma $H^{1,2}(\Omega, \omega)$ da solução em termos das normas de g , f_j e ψ .

Um outro resultado importante deste capítulo, é que se $\omega \in A_2$ então a inclusão $H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \omega)$ é compacta (este resultado é uma adaptação do teorema 4.6

de [FS]). Este fato será fundamental na demonstração de existência e unicidade de solução do problema de Dirichlet para o operador estudado no capítulo 3.

No capítulo 2 temos por objetivo determinar uma classe de pesos para os quais é possível obter uma generalização do teorema 8.8 de [GT]. O principal resultado do capítulo é o seguinte teorema:

Teorema(regularidade interior) Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução da equação $Lu = g$, com as seguintes condições sendo verificadas

- (a) $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$;
- (b) O peso ω é uniformemente A_2 em cada coordenada (definição 2.3);
- (c) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h , onde $\Delta_k^h a_{ij}(x) = [a_{ij}(x + he_k) - a_{ij}(x)]/h$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$).

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$, temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C' \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

A condição (c) do Teorema substitui a condição $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ que é suficiente para obtenção do resultado no caso clássico (quando $\omega \equiv 1$).

Foi de grande importância para os resultados desse capítulo o teorema de Muckenhoupt, o qual possibilitou a demonstração de dois lemas técnicos (lemas 2.5 e 2.6) necessários para a demonstração do teorema acima enunciado, que generalizaram os resultados dos lemas 7.23 e 7.24 de [GT].

Quando consideramos $\omega = 1$, obtemos o teorema 8.8 de [GT].

No capítulo 3 trabalhamos com o operador na forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)) - \sum_{i=1}^n b_i(x)D_i u(x) \quad (5)$$

com os coeficientes a_{ij} satisfazendo as condições em (3) e (4) (com $\omega = v$).

Foi preciso estudar operadores da forma (5), pois quando tentamos estender o resultado do teorema de regularidade interior de $\Omega' \subset \subset \Omega$ para uma desigualdade válida em todo Ω (regularidade global para a solução da equação $Lu = g$, L na forma (2)), precisamos fazer uma mudança de coordenada $y = \varphi(x)$ e o novo operador $\tilde{L}v(y) = L(v(\varphi^{-1}(x)))$ é da forma (5).

Para provar a existência e unicidade da solução $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ para o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} Lu &= g - \operatorname{div} \vec{f}, \text{ em } \Omega \\ u - \psi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \end{aligned}$$

foi preciso demonstrar o Princípio do Máximo (que generaliza o teorema 8.1 de [GT]) para o operador L (na forma (5)):

“ Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ e $Lu \leq 0$, com $\omega \in A_2$. Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ ” \text{ (Teorema 3.8),}$$

além de usar o fato já enunciado que $H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \omega)$ é compacta se $\omega \in A_2$.

Já na demonstração da regularidade interior da solução da equação elíptica degenerada $Lu = g$ para o operador na forma (5) foi necessário utilizar o resultado de regularidade interior do operador estudado no capítulo 2.

Na demonstração da regularidade global precisamos utilizar um resultado sobre preservação da classe de peso A_p , ou seja, se $\omega \in A_p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ queremos que o peso $\omega \circ h \in A_p$. Utilizando e combinando os trabalhos de [J] e [R] obtemos que

“ Se $\omega \in A_p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação quase-conforme, então $\omega \circ h \in A_p$ ”. Vamos precisar que o peso $\omega \circ h$ seja uniformemente A_p em cada coordenada. Com isso conseguimos estender o resultado da regularidade interior para todo Ω , ou seja, a regularidade global da solução do problema

$$\begin{aligned} Lu &= g \\ u - \varphi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \end{aligned}$$

para uma certa classe de domínios Ω (definição 3.12).

Já no capítulo 4, demonstramos que a solução da equação elíptica degenerada $Lu = g - \sum D_j f_j$ com L verificando as condições (2), (3) e (4) (com $\omega = v$), pode ser aproximada por soluções da equação $L_m u_m = g_m - \sum D_j f_{m_j}$ onde L_m são operadores elípticos não-degenerados (veja Teorema 4.4). Para tanto, foi preciso a noção de cubos diádicos e do teorema de fatorização de Jones. Este resultado foi uma adaptação do trabalho de [FF] que trata do caso de equações parabólicas degeneradas.

No capítulo 5 introduzimos a definição dos espaços $H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ que é o fecho do espaço $C^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{H^{k,2}(\Omega,\omega,v)} = \left(\int_{\Omega} u^2 v dx + \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 \omega dx \right)^{1/2}$$

onde $A = (a_{ij})$ é a matriz dos coeficientes do operador L e também definimos o espaço

$$W^{k,2}(\Omega, \omega, v) = \left\{ u \in L^2(\Omega, v) : \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx < \infty \right. \\ \left. \text{e } D^{\alpha} u \in L^2(\Omega, \omega), \ 2 \leq |\alpha| \leq k \right\}.$$

Usando o teorema de Muckenhoupt generalizado, que garante

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n, v)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \omega)} \text{ se, e somente se } (v, \omega) \in S_p$$

onde Mf é a função máxima de Hardy-Littlewood,

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

conseguimos demonstrar que $H^{k,2}(\Omega, \omega, v) = W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$, se $(v, \omega) \in S_2$ e $\omega \leq v$.

Dados v e ω pesos, dizemos que $(v, \omega) \in S_p$ ($1 < p < \infty$) se existir uma constante C tal que

$$\int_Q |M(\mu \chi_Q)(x)|^p v(x) dx \leq C \mu(Q)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, onde $\mu = \omega^{-1/(p-1)}$, $\mu(Q) = \int_Q \mu(x) dx$ e M é a função máxima de Hardy-Littlewood.

Para a demonstração de existência e unicidade do problema de Dirichlet

$$Lu = g - \sum D_j f_j, \text{ em } B \\ u = \psi, \text{ em } \partial B$$

utilizamos as desigualdades de Sobolev e Poincaré com dois pesos diferentes (veja [CW1]).

Demonstramos também que as soluções das equações $Lu = g$ e $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$ são limitadas, e para isso foi necessário um resultado devido a G. Stampacchia.

Uma outra definição importante é $(v, \omega) \in A_p$. Dados v e ω pesos, dizemos que $(v, \omega) \in A_p$ se existir uma constante C satisfazendo a condição

(a) para $1 < p < \infty$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C;$$

(b) para $p = 1$, $(v, \omega) \in A_1$ se

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega$$

para qualquer cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, e com a constante C independente de Q .

Com a definição de $(v, \omega) \in A_p$ e utilizando o teorema de Muckenhoupt generalizado conseguimos demonstrar a regularidade interior para a solução da equação $Lu = g$, onde L é o operador na forma (2) (Teorema 5.24).

Para finalizar, demonstramos que a solução $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ da equação elíptica degenerada $Lu = g - \sum D_j f_j$ é limite de soluções de equações elípticas não-degeneradas $L_m u_m = g_m - \sum D_j f_{jm}$.

Notações Básicas

- $\mathbb{R}^n$: espaço Euclidiano n-dimensional real.
- $e_1, e_2, \dots, e_n$: base canônica do $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.
- $B_R(x_0) = B(x_0; R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$.
- $|E|$: medida de Lebesgue do conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$.
- $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, f função definida em Ω (ou seja, o fecho do conjunto dos pontos onde a função f não se anula).
- $C^k(\Omega)$: conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que juntamente com suas derivadas parciais $D^\alpha f$ de ordem $|\alpha| \leq k$ são contínuas em Ω , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- $C_0^k(\Omega)$: conjunto das funções $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .
- $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\bar{\Omega})$, onde $C^k(\bar{\Omega})$ é o conjunto das funções $C^k(\Omega)$ cujas derivadas de ordem $\leq k$ possuem extensão contínua em $\bar{\Omega}$.
- $C_0^\infty(\Omega)$: conjunto das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .
- $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$: subespaço de $C^k(\bar{\Omega})$ consistindo de todas as funções f para os quais $D^\alpha f$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, satisfaz em Ω a condição de Hölder de expoente λ ($0 < \lambda \leq 1$). isto é, existe uma constante M tal que $|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq M|x - y|^\lambda$, com $x, y \in \Omega$.
- $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro ≥ 0 , $|\alpha| = \sum \alpha_i$.
- $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.
- $Du = \nabla u = (D_1 u, \dots, D_n u)$ = gradiente de u (no sentido clássico ou no sentido de distribuição).
- $\text{div} \vec{F}$: divergente de $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$. $\text{div} \vec{F} = \sum_{j=1}^n D_j F_j$.

- $L^p(\Omega)$: espaço das (classes de equivalência das) funções reais mensuráveis f , tais que a p -ésima potência do valor absoluto $|f|$ é Lebesgue integrável sobre Ω ($1 \leq p < \infty$) munido da norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = [\int_{\Omega} |f(x)|^p dx]^{1/p}$.

- $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$: espaço das funções L^p -localmente integráveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável pertence a $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se para cada K subconjunto compacto de Ω a restrição de f a K pertence a $L^p(K)$.

- $W^k(\Omega)$: conjuntos das funções em L^1_{loc} que possuem derivadas fracas de ordem $\leq k$ em L^1_{loc} .

Uma função v é a derivada de ordem α da função u no sentido fraco se

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

- $W^{k,p}(\Omega) = \{f \in W^k(\Omega) : D^{\alpha} f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$.

- B.M.O. : funções de oscilação média limitada, ou seja,

$$B.M.O. = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f^{\#}\|_{\infty} < \infty\}$$

$$\text{onde } f^{\#}(x) = \sup_{x \ni Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \text{ e } f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy.$$

- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$.

- $u_m \rightarrow u$: a seqüência $\{u_m\}$ é fracamente convergente para u (com u_m e u em V espaço linear normado), ou seja, $f(u_m) \rightarrow f(u)$, $\forall f \in V^*$ (espaço dual de V).

- $\text{Lip}(\bar{\Omega})$: espaço das funções f satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para alguma constante $M > 0$.

- $\text{Lip}_0(\Omega) = \{f \in \text{Lip}(\Omega), \text{com } \text{supp}(f) \subset \Omega\}$.

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

1.1 - Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de soluções de uma classe de equações elípticas degeneradas $Lu = g - \operatorname{div} \vec{f}$, com o operador L sendo definido por

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)) \quad (1.1)$$

e as funções coeficientes a_{ij} satisfazendo a condição

$$\lambda \omega(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda v(x)|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

onde ω e v são funções pesos, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado.

Na primeira etapa (capítulos 1, 2 e 3) estudamos o caso em que $\omega = v$.

Neste capítulo apresentamos as principais definições que serão utilizadas em todo o trabalho, como a dos espaços $L^p(\Omega, \omega)$ e $H^{k,p}(\Omega, \omega)$, que serão fundamentais para a definição de solução fraca para a equação $Lu = g - \operatorname{div} \vec{f}$. Serão apresentadas também algumas propriedades básicas necessárias para o desenvolvimento dos demais capítulos, como as desigualdades de Sobolev e Poincaré com peso. Alguns resultados são conhecidos e omitiremos as demonstrações, dando apenas uma referência.

Também será feito o estudo da existência e unicidade para o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} Lu &= g - \operatorname{div} \vec{f}, \text{ em } \Omega \\ u - \psi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \end{aligned}$$

e demonstraremos que a solução $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ do problema satisfaz a estimativa *a priori*

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

Os resultados básicos sobre a teoria de pesos podem ser encontrados principalmente no trabalho de [GCR].

Algumas vezes escreveremos “no caso clássico” para significar que estamos considerando o caso em que $r = \omega \equiv 1$, para o qual usaremos como referência básica o trabalho de [GT].

1.2 - Definições e Resultados Básicos

Definição 1.1 Um peso ω é uma função localmente integrável não-negativa ($\omega(x) > 0$ q.s.).

Definição 1.2 Dado um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $L^p(\Omega, \omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de todas as funções mensuráveis, f , definidas em Ω tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega, \omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} < \infty$$

onde ω é uma função peso.

Os espaços $L^p(\Omega, \omega)$ são espaços de Banach.

Definição 1.3

(a) Um peso ω satisfaz a condição A_p (escreveremos $\omega \in A_p$), $1 < p < \infty$, se existir uma constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C$$

para $\forall Q$ cubo (ou bola) em $\mathbb{R}^n$, onde C é independente de Q .

(b) Se $p=1$, dizemos que $\omega \in A_1$ se

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega$$

para $\forall Q$ cubo (ou bola) em $\mathbb{R}^n$, C independente de Q , onde $|Q|$ é a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$.

A constante C é chamada “constante A_p ” e denotada por $C = C(\omega, p)$.

(c) Um peso ω é dobrante se $\omega(2Q) \leq C\omega(Q)$, $\forall Q$ cubo (ou bola) no $\mathbb{R}^n$, com C independente de Q . Neste caso escrevemos que $\omega \in D_\infty$.

Uma propriedade básica de peso dobrante é que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\omega(B(x, \theta r)) \geq \theta^\alpha \omega(B(x, r))$$

para qualquer $r > 0$ e $0 < \theta < 1$ ([FS], pag. 532).

Outro resultado clássico é que se $\omega \in A_p$ então $\omega \in D_\infty$ ([GCR], lema 2.2, pag. 396).

Exemplo 1.4 Um exemplo de peso A_p .

A função $\omega(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, é um peso $A_p \iff -n < \alpha < n(p-1)$ ([GCR], pag. 407).

O próximo resultado que apresentamos é fundamental para a compreensão da definição dos espaços $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ e $H_0^{k,p}(\Omega, \omega)$ que daremos a seguir. Esses espaços são generalizações dos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e serão importantes na definição dos espaços soluções dos problemas que consideraremos neste trabalho.

Proposição 1.5 Suponha que $1 < p < \infty$.

(a) Se $f \in L^p(\Omega, \omega)$ e $\omega^{-p'/p} \in L_1(\Omega)$, então $f \in L_1(\Omega)$.

(b) Se $f_m \rightarrow f$ em $L^p(\Omega, \omega)$ e $\omega^{-p'/p} \in L_1(\Omega)$, então $f_m \rightarrow f$ em $L_1(\Omega)$.

Demonstração

$$\begin{aligned} (a) \quad \int_{\Omega} |f| dx &= \int_{\Omega} |f| \omega^{1/p} \omega^{-1/p} dx \quad (\text{usando a desigualdade de Hölder}) \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \omega dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} \omega^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_{L^p(\Omega, \omega)} \left(\int_{\Omega} \omega^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} < \infty. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \int_{\Omega} |f_m - f| dx = \int_{\Omega} |f_m - f| \omega^{1/p} \omega^{-1/p} dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Omega} |f_m - f|^p \omega dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} \omega^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \\
&= \underbrace{\|f_m - f\|_{L^p(\Omega, \omega)}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left(\int_{\Omega} \omega^{-p'/p} dx \right)^{1/p'}}_{< \infty} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Definição 1.6 Para $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e ω uma função peso, o espaço $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ é o fecho do espaço $C^\infty(\Omega)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ definida por

$$\|u\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \omega dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma norma equivalente seria $\|u\|'_{k,p} = \|u\|_{L^p(\Omega, \omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega, \omega)}$.

O espaço $H_0^{k,p}(\Omega, \omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{0,k,p}$ definida por

$$\|u\|_{0,k,p} = \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $u \in H^{k,p}(\Omega, \omega)$ então podemos representar $u = \{u_m\}$, com $u_m \in C^\infty(\Omega)$ e $\{u_m\}$ uma sequência de Cauchy com relação à norma $\|\cdot\|_{k,p}$. Logo,

$$\|u_n - u_m\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} |u_n - u_m|^p \omega dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u_n - D^\alpha u_m|^p \omega dx \right)^{1/p} \rightarrow 0$$

quando $m, n \rightarrow \infty$.

Isto implica que $\{u_n\}$ e $\{D^\alpha u_n\}$ ($\forall \alpha, 1 \leq |\alpha| \leq k$) são seqüências de Cauchy em $L^p(\Omega, \omega)$ (que é um espaço de Banach). Portanto existem $\tilde{u} \in L^p(\Omega, \omega)$ (que ainda denotaremos por u) e $v_\alpha \in L^p(\Omega, \omega)$ tais que

$$u_m \longrightarrow u \text{ e } D^\alpha u_m \longrightarrow v_\alpha, \text{ em } L^p(\Omega, \omega).$$

Proposição 1.7 Nas mesmas condições anteriores, temos que para cada α a função v_α é a derivada no sentido fraco (de ordem α) da função u .

Demonstração

Como $\omega \in A_p$ (para $1 < p < \infty$), temos que $\omega^{-p'/p} \in L^1_{\text{loc}}$. Então para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ segue da proposição 1.5 (b) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \psi dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m D^\alpha \psi dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \psi D^\alpha u_m dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \psi v_\alpha dx. \end{aligned}$$

Portanto $v_\alpha = D^\alpha u$ no sentido fraco. ♣

Considerando

$$N = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} 1 \quad \text{e} \quad L_N^p(\Omega, \omega) = \prod_{i=1}^N L^p(\Omega, \omega),$$

onde a norma de $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in L_N^p(\Omega, \omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_N^p(\Omega, \omega)} &= \left(\sum_{j=1}^N \|v_j\|_{L^p(\Omega, \omega)}^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} |v_j|^p \omega dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Para cada $u \in H^{k,p}(\Omega, \omega)$ podemos associar o vetor

$$Pu = (u, D^\alpha u)_{1 \leq |\alpha| \leq k} \in L_N^p(\Omega, \omega).$$

Como $\|Pu\|_{L_N^p(\Omega, \omega)} = \|u\|_{H^{k,p}(\Omega, \omega)}$, temos que $u \mapsto Pu$ é uma isometria de $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ sobre um subespaço $\mathcal{W} \subset L_N^p(\Omega, \omega)$. Como $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ é completo, temos que $\mathcal{W}$ é um subespaço fechado de $L_N^p(\Omega, \omega)$ que é reflexivo para $1 < p < \infty$. Logo $\mathcal{W}$ é reflexivo.

Portanto $H^{k,p}(\Omega, \omega) = P^{-1}(\mathcal{W})$ é um espaço de Banach reflexivo.

No caso particular em que $p=2$ podemos definir:

$$(i) \quad a : H^{k,2}(\Omega, \omega) \times H^{k,2}(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \omega(x) dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) \omega(x) dx$$

que é um produto interno e

$$\|u\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega)} = a(u, u)^{1/2}.$$

$$(ii) \quad a_0 : H_0^{k,2}(\Omega, \omega) \times H_0^{k,2}(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a_0(u, \varphi) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) \omega(x) dx$$

que é produto interno e

$$\|u\|_{H_0^{k,2}(\Omega, \omega)} = a_0(u, u)^{1/2}.$$

Portanto os espaços $H^{k,2}(\Omega, \omega)$ e $H_0^{k,2}(\Omega, \omega)$, com as normas da definição 1.6, são espaços de Hilbert.

O espaço dual de $H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ é o espaço

$$\left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \right)^* = H^{-1,2}(\Omega, \omega)$$

$$= \left\{ g - \operatorname{div} \vec{f} : \vec{f} = (f_1, \dots, f_n), \text{ com } \frac{g}{\omega} \text{ e } \frac{f_i}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

(veja por exemplo em [FJK]).

Se $T = g - \operatorname{div} \vec{f} \in H^{-1,2}(\Omega, \omega)$, então

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j(x) D_j \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Definição 1.8 Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e ω uma função peso, definimos $W^{k,p}(\Omega, \omega)$ como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega, \omega)$ tal que as derivadas no sentido fraco existem e $D^\alpha u \in L^p(\Omega, \omega)$, $|\alpha| \leq k$, ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega, \omega) = \{u \in L^p(\Omega, \omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega, \omega), |\alpha| \leq k\}$$

e com norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \omega dx \right)^{1/p}.$$

Os espaços $W^{k,p}(\Omega, \omega)$ são espaços de Banach.

Definimos $W_0^{k,p}(\Omega, \omega)$ como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega, \omega)$.

Para o próximo resultado e principalmente para o capítulo 2, iremos utilizar o teorema de Muckenhoupt.

Teorema 1.9(Teorema de Muckenhoupt) Seja ω um peso em $\mathbb{R}^n$ e

$$[M(f)](x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

a função máxima de Hardy-Littlewood. Então, para $p > 1$,

$$M : L^p(\mathbb{R}^n, \omega) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$$

é contínuo (ou seja $\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \omega)} \leq C_M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \omega)}$) se, e somente se, $\omega \in A_p$.

A constante C_M é chamada constante de Muckenhoupt e $C_M = C_M(n, p)$.

Demonstração Veja corolário 4.3, pg. 426 de [GCR]. ♣

Teorema 1.10 Se $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, então $H^{k,p}(\Omega, \omega) = W^{k,p}(\Omega, \omega)$.

Demonstração

(i) $H^{k,p}(\Omega, \omega) \subset W^{k,p}(\Omega, \omega)$. De fato:

Considerando o conjunto $S = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \|\varphi\|_{H^{k,p}(\Omega, \omega)} = \|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} < \infty\}$. Temos que $S \subset H^{k,p}(\Omega, \omega)$ e $S \subset W^{k,p}(\Omega, \omega)$. Como $W^{k,p}(\Omega, \omega)$ é completo, o operador identidade $u \in S \longrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega, \omega)$ pode ser estendido para uma isometria entre $H^{k,p}(\Omega, \omega) = \bar{S}$ e o fecho de S em $W^{k,p}(\Omega, \omega)$.

Portanto $H^{k,p}(\Omega, \omega) \subset W^{k,p}(\Omega, \omega)$.

(ii) Para provar que $W^{k,p}(\Omega, \omega) \subset H^{k,p}(\Omega, \omega)$ precisaremos demonstrar alguns resultados.

Se $\varphi \in W^{k,p}(\Omega, \omega)$, como $\omega \in A_p$, pela proposição 1.5(a) temos que $\varphi, D^\alpha \varphi \in L_1(\Omega)$. Seja ρ uma função não-negativa em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificando as condições

- (a) $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.
- (b) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$.

Para $\varepsilon > 0$ definimos $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ e para $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$

$$u_\varepsilon(x) = (u * \rho_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.$$

Se $\varphi \in W_0^{k,p}(\Omega, \omega)$ então $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ e $D^\alpha \varphi_\varepsilon \rightarrow D^\alpha \varphi$ em $L^p(\Omega, \omega)$. De fato: sabemos que φ e $D^\alpha \varphi$ pertencem a $L_1(\Omega)$. Temos que

$$|\varphi_\varepsilon(x)| \leq C M(\chi_\Omega |\varphi|)(x) \quad (1.3)$$

$$|D^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| \leq C M(\chi_\Omega |D^\alpha \varphi|)(x)$$

onde M é a função Maximal de Hardy-Littlewood.

Usando o teorema de Muckenhoupt, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi_\varepsilon(x)|^p \omega(x) dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M(\chi_\Omega |\varphi|)(x)]^p \omega(x) dx \\ &\leq C_M \int_{\Omega} |\varphi(x)|^p \omega(x) dx \end{aligned}$$

ou seja

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^p(\Omega, \omega)}.$$

Analogamente $\|D^\alpha \varphi_\varepsilon\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq C \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega, \omega)}$.

Como $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ q.s. e $D^\alpha \varphi_\varepsilon \rightarrow D^\alpha \varphi$ q.s. em Ω , e usando as estimativas (1.3), pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \text{ e } D^\alpha \varphi_\varepsilon \rightarrow D^\alpha \varphi \text{ em } L^p(\Omega, \omega)$$

com $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sejam agora Ω_j , $j = 1, 2, \dots$ subconjuntos de Ω satisfazendo $\Omega_j \subset \subset \Omega_{j+1}$ (definindo $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset$) e $\bigcup \Omega_j = \Omega$. Seja $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, a partição da unidade subordinada a cobertura $\{\Omega_{j+1} - \Omega_{j-1}\}$.

Então para $u \in W^{k,p}(\Omega, \omega)$ temos que $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega, \omega)$. Para $\varepsilon > 0$, podemos encontrar ε_j , $j = 1, 2, \dots$, satisfazendo

$$\varepsilon_j \leq \text{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1})$$

$$\text{e } \|(\psi_j u)_{\varepsilon_j} - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Considerando $v_j = (\psi_j u)_{\varepsilon_j}$, temos que $v = \sum v_j \in C^\infty(\Omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u - \sum_{j=1}^{\infty} v_j \right\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j u - v_j\|_{W^{k,p}(\Omega, \omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $W^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega, \omega)$.

Portanto, de (i) e (ii), temos que $H^{k,p}(\Omega, \omega) = W^{k,p}(\Omega, \omega)$.

1.3 - Um Resultado Técnico

Iremos demonstrar que se ω é um peso A_2 então a inclusão

$$H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \omega)$$

é compacta. Esse resultado é essencial para a demonstração da existência e unicidade da solução do problema de Dirichlet para o operador no qual iremos trabalhar no capítulo 3 (Teorema 3.9). Para a sua demonstração precisaremos das desigualdades de Sobolev e Poincaré com peso, que serão amplamente utilizadas neste trabalho. As demonstrações destas desigualdades podem ser encontradas em [FKS] (teoremas 1.3 e 1.5 respectivamente).

Teorema 1.11 (Desigualdade de Sobolev com peso) Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ e $\omega \in A_p$. Então existem constantes C'_Ω e δ positivas tais que para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e k satisfazendo $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$, temos

$$\|\varphi\|_{L^{kp}(\Omega, \omega)} \leq C'_\Omega \|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega, \omega)}$$

onde C_Ω só depende de n , da constante A_p de ω , de p e do diâmetro de Ω .

Teorema 1.12 (Desigualdade de Poincaré com peso) Seja $1 < p < \infty$ e $\omega \in A_p$. Então existem constantes positivas C e δ tais que para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\bar{B}_R)$, e para todo $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$,

$$\left(\frac{1}{\omega(B_R)} \int_{B_R} |\varphi(x) - A_{B_R}|^{kp} \omega(x) dx \right)^{1/kp} \leq C R \left(\frac{1}{\omega(B_R)} \int_{B_R} |\nabla \varphi(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}$$

onde

$$A_{B_R} = \frac{1}{\omega(B_R)} \int_{B_R} \varphi(x) \omega(x) dx \quad \text{ou} \quad A_{B_R} = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \varphi(x) dx$$

com $\omega(B_R) = \int_{B_R} \omega(x) dx$.

Como aplicação das desigualdades acima podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.13 Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\omega \in A_2$, então $H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \omega)$ é compacta.

Demonstração

Esta demonstração é uma versão adaptada do teorema 4.6 de [FS].

Usando o Teorema 1.11, com $k = 1$ e $p = 2$, temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, \omega)} = C_\Omega \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.$$

Portanto a aplicação

$$\begin{aligned} H_0^{1,2}(\Omega, \omega) &\longrightarrow L^2(\Omega, \omega) \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

é contínua.

Seja $\{u_n\}$ uma seqüência na bola unitária de $H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ (ou seja, $\|u_n\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \leq 1$). Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp}(u_n) \subset \Omega \subset B(0, 1)$. Como $L^2(\Omega, \omega)$ é reflexivo, temos que $\{u_n\}$ converge fracamente ($u_n \rightharpoonup u \in L^2(\Omega, \omega)$). Pelo teorema 1.2, pag. 69 de [CW], para cada $r \in]0, 1]$ existem $x_1, \dots, x_{m(r)} \in B(0, 1)$ tais que

$$(i) \quad B(x_k, \frac{r}{5}) \cap B(x_i, \frac{r}{5}) = \emptyset, \text{ se } k \neq i;$$

$$(ii) \quad B(0, 1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m(r)} B(x_k, r);$$

Além disso, temos

$$(iii) \quad m(r) \leq c_0 r^{-\alpha} \text{ (onde } \alpha > 0 \text{ vem do fato que o peso } \omega \text{ ser dobrante, definição 1.3(c)).}$$

$$(iv) \quad B(x_k, r) \cap B(x_i, r) \neq \emptyset, \text{ para no máximo } M \text{ índices } i \neq k.$$

Prova de (iii)

Temos $B(x_k, \frac{r}{5}) \subseteq B(0, \frac{6}{5})$, $\forall k, 1 \leq k \leq n, \forall r \in]0, 1]$.

Logo,

$$\begin{aligned} \omega\left(B(0, \frac{6}{5})\right) &\geq \sum_{k=1}^{m(r)} \omega\left(B(x_k, \frac{r}{5})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m(r)} \omega\left(B(x_k, \frac{11}{5} \frac{r}{11})\right) \\ &\geq \left(\frac{r}{11}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{m(r)} \omega\left(B(x_k, \frac{11}{5})\right) \\ &\geq \left(\frac{r}{11}\right)^\alpha m(r) \omega\left(B(0, \frac{6}{5})\right). \end{aligned}$$

Portanto $\left(\frac{r}{11}\right)^\alpha m(r) \leq 1$, ou seja, $m(r) \leq cr^{-\alpha}$.

Prova de (iv)

Definindo $I(k) = \{i \leq m(r) : B(x_k, r) \cap B(x_i, r) \neq \emptyset\}$.

Se $i \in I(k)$, então $d(x_k, x_i) \leq 2r$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\omega\left(B(x_k, \frac{11r}{5})\right) &\geq \sum_{i \in I(k)} \omega\left(B(x_i, \frac{r}{5})\right) \\
&= \sum_{i \in I(k)} \omega\left(B(x_i, \frac{1}{21} \frac{21r}{5})\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{21}\right)^\alpha \sum_{i \in I(k)} \omega\left(B(x_i, \frac{21r}{5})\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{21}\right)^\alpha \text{card}(I(k)) \omega\left(B(x_k, \frac{11r}{5})\right).
\end{aligned}$$

O que implica em $\text{card}(I(k)) \leq (21)^\alpha = M$, para qualquer k .

Para provar que a inclusão é compacta, vamos provar que a sequência $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \omega)$. Seja $\varepsilon > 0$ fixado.

Temos que $\Omega \subset B(0, 1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m(r)} B(x_j, r)$ e considerando

$$A_j = \frac{1}{\omega(B(x_j, r))} \int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx$$

obtemos, usando o Teorema 1.12 com $k = 1$ e $p = 2$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_m - u_n|^2 \omega dx &\leq \sum_{j=1}^{m(r)} \int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m|^2 \omega dx \\
&= \sum_{j=1}^{m(r)} \int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m + A_j - A_j|^2 \omega dx \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{m(r)} \left(\int_{B(x_j, r)} |(u_n - u_m) - A_j|^2 \omega dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{B(x_j, r)} A_j^2 \omega dx \right) \text{ (usando o teo. 1.12)} \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{m(r)} \left[cr^2 \int_{B(x_j, r)} |\nabla(u_n - u_m)|^2 \omega dx + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\omega(B(x_j, r))} \left(\int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2 \Big] \\
& = (II) + (I)
\end{aligned}$$

já que

$$\int_{B(x_j, r)} A_j^2 \omega dx = A_j^2 \omega(B(x_j, r)) = \frac{1}{\omega(B(x_j, r))} \left(\int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2.$$

Vamos estimar (I) e (II).

(I) Usando que $B(0, 1) \subseteq B(x_k, 2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\omega(B(x_k, r)) &= \omega\left(B(x_k, \frac{1}{2}2r)\right) \\
&\geq c \left(\frac{r}{2}\right)^\alpha \omega(B(x_k, 2)) \\
&\geq c \left(\frac{r}{2}\right)^\alpha \omega(B(0, 1)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\omega(B(x_k, r))} \leq c \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha} \frac{1}{\omega(B(0, 1))}.$$

O que implica em

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^{m(r)} \frac{1}{\omega(B(x_j, r))} \left(\int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{m(r)} \frac{cr^{-\alpha}}{2^{-\alpha} \omega(B(0, 1))} \left(\int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\{u_n\}$ é fracamente convergente em $L^2(\Omega, \omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta(\varepsilon)$ tal que se $n, m \geq \eta(\varepsilon)$ então

$$\left(\int_{B(x_j, r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2 \leq \varepsilon^2 \frac{\omega(B(0, 1)) r^{2\alpha}}{2^\alpha c}, \quad j = 1, \dots, m(r).$$

Voltando na desigualdade anterior e usando (iii), temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m(r)} \frac{cr^{-\alpha}}{2^{-\alpha} \omega(B(0,1))} \left(\int_{B(x_j,r)} |u_n - u_m| \omega dx \right)^2 &\leq \sum_{j=1}^{m(r)} \frac{cr^{-\alpha}}{2^{-\alpha} \omega(B(0,1))} \varepsilon^2 \omega(B(0,1)) \frac{r^{2\alpha}}{2^\alpha c} \\ &= m(r) r^\alpha \varepsilon^2 \\ &\leq cr^{-\alpha} r^\alpha \varepsilon^2 \\ &= c\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $(I) \leq c\varepsilon^2$.

$$\begin{aligned} (II) \quad II &= 2 \sum_{j=1}^{m(r)} cr^2 \underbrace{\int_{B(x_j,r)} |\nabla(u_n - u_m)|^2 \omega dx}_{\text{limitado}} \leq 2Cr^2 m(r) \\ &\leq 2Cr^2 (M+1) \end{aligned}$$

(onde M é o mesmo do item (iv)).

Escolhendo $r = \varepsilon(2C(M+1))^{-1/2}$, obtemos

$$(II) \leq \varepsilon^2.$$

Logo, temos que

$$\|u_m - u_n\|_{L^2(\Omega, \omega)}^2 \leq (I) + (II) \leq C\varepsilon^2.$$

Portanto $\{u_n\}$ é sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \omega)$. O que prova que a inclusão é compacta.

1.4 - O Problema de Dirichlet

Faremos agora o estudo sobre a existência e unicidade de soluções para o problema de Dirichlet (homogêneo e não-homogêneo) no caso em que o operador L definido em (1.1) satisfaz a condição (1.2) com $\omega = v$ e os coeficientes a_{ij} satisfazendo a condição

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C\omega(x). \quad (1.4)$$

Para estudar o problema de Dirichlet, será muito utilizado o teorema de Lax-Milgram, que em seguida enunciamos.

Teorema 1.14 (Lax-Milgram) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo

(i) limitada, ou seja, existe uma constante k tal que $|B(x, y)| \leq k \|x\| \|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$;

(ii) coerciva, ou seja, existe $\nu > 0$ tal que $B(x, x) \geq \nu \|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Então para todo funcional linear limitado $F \in \mathcal{H}^*$, existe um único elemento $f \in \mathcal{H}$ tal que $B(x, f) = F(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Demonstração Veja teorema 5.8, pag.78 de [GT].

Definição 1.15 Dizemos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação $Lu = 0$ se

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Para simplificar a notação, iremos omitir o símbolo de somatório $\sum_{i,j=1}^n$ que aparece na definição.

Teorema 1.16 (Problema de Dirichlet Homogêneo) Dada $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, existe uma única $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução do problema

$$(D1) \quad \begin{aligned} Lu &= 0, \text{ em } \Omega \\ u - \psi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Demonstração

Esta demonstração é uma versão adaptada do teorema 2.2 de [FKS].

Definimos

$$\begin{aligned} B : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \times H_0^{1,2}(\Omega, \omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ B(v, \varphi) &= \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i v(x) D_j \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Temos que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. De fato.

$$\begin{aligned}
(a) \quad B(v, v) &= \int_{\Omega} a_{ij} D_i v D_j v dx \\
&\geq \lambda \int_{\Omega} |Dv|^2 \omega dx \quad (\text{usando (1.2)}) \\
&= \lambda \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}^2
\end{aligned}$$

ou seja, B é coerciva.

$$\begin{aligned}
(b) \quad |B(v, \varphi)| &\leq \int_{\Omega} |a_{ij}| |D_i v| |D_j \varphi| dx \quad (\text{usando (1.4)}) \\
&\leq \int_{\Omega} C \omega(x) |D_i v| |D_j \varphi| dx \\
&= \int_{\Omega} C |D_i v| \omega^{1/2} |D_j \varphi| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |D_i v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j \varphi|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto B é limitada.

Seja $G : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo definido por

$$G(\varphi) = -B(\psi, \varphi)$$

onde a função ψ é dada no problema (D1).

Pelo teorema de Lax-Milgram existe uma única $h \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que

$$B(h, \varphi) = G(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Definindo $u = h + \psi$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx &= B(u, \varphi) \\
&= B(h + \psi, \varphi) \\
&= B(h, \varphi) + B(\psi, \varphi) \\
&= G(\varphi) + B(\psi, \varphi) \\
&= -B(\psi, \varphi) + B(\psi, \varphi) = 0. \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)
\end{aligned}$$

ou seja, $Lu = 0$ e além disso $u - \psi = h \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Portanto $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução (única) do problema (D1). ♣

Definição 1.17 Dizemos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação

$$Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j f_j = T \in \left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \right)^*$$

se verificar

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j(x) D_j \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Observação 1.18 Se ω é um peso A_2 , $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ e $f_j/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$, $j = 1, 2, \dots, n$, então usando o Teorema 1.11 com $k = 1$ e $p = 2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g\varphi| dx + \int_{\Omega} |f_j D_j \varphi| dx &= \int_{\Omega} \left| \frac{g}{\omega} \right| \omega^{1/2} |\varphi| \omega^{1/2} dx + \int_{\Omega} \left| \frac{f_j}{\omega} \right| \omega^{1/2} |D_j \varphi| \omega^{1/2} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \varphi^2 \omega dx \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} \left(\frac{f_j}{\omega} \right)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j \varphi|^2 \omega dx \right)^{1/2} \quad (\text{teo. 1.11}) \\ &\leq C_{\Omega} \left(\|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}, \end{aligned}$$

o que garante a existência das integrais do lado direito da definição 1.17, para qualquer $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$. ♣

Teorema 1.19 (Problema de Dirichlet não-homogêneo) Dada $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ e $\omega \in A_2$, existe uma única $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução do problema

$$\begin{aligned} (D2) \quad & Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j f_j, \text{ em } \Omega \\ & u - \psi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \end{aligned}$$

com as funções g e f_j satisfazendo as condições da observação 1.18.

Demonstração

Sabemos que

$$B(v, \varphi) = \int_{\Omega} a_{ij} D_i v D_j \varphi dx$$

é uma forma bilinear limitada e coerciva em $H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \times H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Se definimos

$$G(\varphi) = \int_{\Omega} g \varphi dx + \int_{\Omega} f_j D_j \varphi dx$$

$\forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, temos que G é um funcional linear contínuo, pois usando a observação 1.18 temos

$$|G(\varphi)| \leq C_{\Omega} \left(\|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.$$

Portanto $|G(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}$.

Pelo teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.14) existe uma única $h \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que

$$B(h, \varphi) = G(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i h D_j \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx + \int_{\Omega} f_j D_j \varphi dx.$$

A função h é solução do problema

$$\begin{aligned} (D_2^*) \quad & Lh = g - \sum_{j=1}^n D_j f_j, \quad \text{em } \Omega \\ & h \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Seja $v = u - \psi$. Temos que u será solução do problema (D_2) se, e somente se, v for solução de um problema do tipo (D_2^*) . De fato,

$$\begin{aligned} Lv &= L(u - \psi) \\ &= Lu + \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i \psi) \\ &= g - \sum_{j=1}^n D_j f_j + \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g - \sum_{j=1}^n D_j \left(f_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} D_i \psi \right) \\
&= g - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{f}_j = f_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} D_i \psi.$$

Para que a equação

$$Lv = g - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j$$

tenha solução $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, as funções $\tilde{f}_j$ devem satisfazer a condição $\frac{\tilde{f}_j}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$. Mas isso é verdadeiro, pois $\frac{f_j}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$ e além disso, usando a condição (1.2), também temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{a_{ij} D_i \psi}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{a_{ij}}{\omega} \right)^2}_{\leq C} |D_i \psi|^2 \omega dx \\
&\leq C^2 \int_{\Omega} |D_i \psi|^2 \omega dx < \infty
\end{aligned}$$

usando o fato que $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Portanto existe uma única $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução da equação

$$Lv = g - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j.$$

Logo $u = v + \psi$ é a única solução do problema (D2). ♣

No próximo teorema, demonstramos que a norma $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)}$ da solução $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ do problema (D2) pode ser limitada utilizando apenas as condições dadas no problema.

Teorema 1.20 Seja L o operador definido em (1.1). $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ e $\omega \in A_2$. Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução do problema

$$Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j f_j = T \in (H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*$$

$$u - \psi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

então existe uma constante $C > 0$ ($C = C(\Lambda, C_\Omega, n)$) tal que

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|T\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \right).$$

Demonstração

Definindo

$$g_0(x) = 0 \text{ e } g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) D_j \psi(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Temos que $g_i/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$. De fato, usando a condição (1.2),

$$\left| \frac{g_i}{\omega} \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{\omega} D_j \psi \right| \leq C \sum_{j=1}^n |D_j \psi|$$

e usando o fato de $\psi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{g_i}{\omega} \right)^2 \omega dx \leq C \int_{\Omega} |D\psi|^2 \omega dx < \infty.$$

Seja $G \in \left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \right)^*$ definido por

$$G(v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} g_i(x) D_i v(x) dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_j \psi(x) D_i v(x) dx.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
|G(v)| &\leq \int_{\Omega} |a_{ij}| |D_j \psi| |D_i v| dx \\
&\leq C \int_{\Omega} \omega |D_j \psi| |D_i v| dx \\
&= C \int_{\Omega} |D_j \psi| \omega^{1/2} |D_i v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |D_j \psi|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_i v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Seja $F = T - G \in \left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \right)^*$. Pelo teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.14) existe uma única $h \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que $Lh = F$, com

$$B(h, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

Em particular podemos tomar $v = h$ e então

$$B(h, h) = F(h).$$

Usando que B é uma forma bilinear coerciva (Teorema 1.16, item (a) e (b) da demonstração) temos

$$\begin{aligned}
\lambda \|h\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}^2 &\leq B(h, h) \\
&\leq |F(h)| \\
&\leq \|F\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \|h\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|h\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} &\leq \frac{1}{\lambda} \|F\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \\
&= c \|F\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*}.
\end{aligned}$$

Seja $u = \psi + h$, temos

$$\begin{aligned}
B(u, v) &= B(\psi + h, v) \\
&= B(\psi, v) + B(h, v) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j \psi D_i v dx + \langle F, v \rangle \\
&= \langle G, v \rangle + \langle T - G, v \rangle \\
&= \langle T, v \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto $B(u, v) = \langle T, v \rangle$, $\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, ou seja, u é solução de $Lu = T$.

Vamos agora estimar $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)}$.

Como $F = T - G$, temos

$$\|F\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \leq \|T\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} + \|G\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} &= \|\psi + h\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|h\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + c\|F\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \\
&\leq \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + c\|T\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} + c\|G\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \\
&\leq \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + c\|T\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} + C\|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq C \left(\|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|T\|_{(H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^*} \right).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

REGULARIDADE NO INTERIOR

2.1 - Introdução

Neste capítulo consideraremos o operador na forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x))$$

com as funções coeficientes a_{ij} satisfazendo a condição (1.2) com $\omega = v$ e

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C\omega(x) \quad (2.1)$$

$\forall x \in \Omega$ (aberto limitado), ω função peso.

O objetivo é estudar condições nos coeficientes a_{ij} e no peso ω para as quais é possível garantir a existência de derivadas fracas de ordem superior para a solução fraca da equação $Lu = g$, $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

O primeiro resultado sobre regularidade é o Teorema 2.8, que sobre certas condições nos coeficientes a_{ij} e no peso ω demonstra que a solução fraca da equação $Lu = g$ pertence ao espaço $H_{loc}^{2,2}(\Omega, \omega)$, ou seja, u é duas vezes fracamente diferenciável em qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$.

No caso clássico (com $v = \omega \equiv 1$ nas condições (1.2) e (2.1)), foi provado que se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca da equação $Lu = g$ em Ω , então $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ (teorema 8.8 [GT]). Neste caso, a condição necessária é que os coeficientes $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, isto é,

$$\frac{|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|}{|x - y|} \leq C$$

para todo $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, ou equivalentemente

$$\left| \frac{a_{ij}(x + he_k) - a_{ij}(x)}{h} \right| \leq C \quad (\text{com } h \neq 0).$$

Observando a demonstração do teorema 8.8 [GT], notamos que foi fundamental a utilização do fato que se $u \in L^p(\Omega)$ e satisfaz a condição

$$\left\| \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} \right\|_{L^p(\Omega')} \leq C, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, então existe $D_k u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $k = 1, \dots, n$ (ou seja, $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$) (lema 7.24 de [GT]).

O nosso objetivo, neste capítulo, é generalizar estes resultados para os espaços $L^p(\Omega, \omega)$ e $H^{k,p}(\Omega, \omega)$ com peso $\omega \in \mathcal{A}_p$.

2.2 - Definições e Lemas Técnicos

Definição 2.1 Seja u uma função definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, definimos

$$\Delta_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}, \quad (0 < |h| < \text{dist}(x, \partial\Omega)). \quad (2.2)$$

Neste capítulo encontraremos condições para ω de tal forma que se $u \in L^p(\Omega, \omega)$ e $\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq K$, para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$, então existe a derivada $D_k u$ no sentido fraco e $D_k u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$. Utilizando este resultado, conseguiremos generalizar o teorema 8.8 de [GT], ou seja, demonstraremos que se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução da equação $Lu = g$, então as derivadas de segunda ordem $D_{ij}u$ existem (no sentido fraco) e $D_{ij}u \in L^2(\Omega', \omega)$ (ou seja, $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$). A condição necessária nos coeficientes a_{ij} é $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C\omega(x)$ (Teorema 2.8) e também precisaremos impor alguma condição no peso ω (ver definição 2.3). A fim de demonstrarmos esses resultados necessitamos dos próximos três lemas.

No primeiro lema são verificadas apenas duas propriedades básicas do operador Δ_k^h que serão importantes nas demonstrações dos demais resultados.

Lema 2.2 Suponhamos que $\Omega' \subset \subset \Omega$ e $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Então para qualquer $u, v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$, $\text{supp}(v) \subset \Omega'$ e g uma função mensurável com $|g(x)| \leq C\omega(x)$, temos:

$$(a) \quad \Delta_k^h(uv)(x) = u(x + he_k)\Delta_k^h v(x) + v(x)\Delta_k^h u(x), \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

$$(b) \quad \int_{\Omega} g(x)u(x)\Delta_k^{-h}v(x)dx = - \int_{\Omega} v(x)\Delta_k^h(gu)(x)dx.$$

Demonstração

(a) Para h satisfazendo $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta_k^h(uv)(x) &= \frac{(uv)(x + he_k) - (uv)(x)}{h} \\
 &= \frac{u(x + he_k)v(x + he_k) - u(x)v(x)}{h} \\
 &= \frac{u(x + he_k)v(x + he_k) - u(x + he_k)v(x) + u(x + he_k)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
 &= u(x + he_k)\Delta_k^h v(x) + v(x)\Delta_k^h u(x).
 \end{aligned}$$

(b) Observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} g(x)u(x)\Delta_k^{-h}v(x)dx \right| &\leq \int_{\Omega} |g(x)||u(x)||\Delta_k^{-h}v(x)|dx \\
 &\leq C \int_{\Omega} \omega(x)|u(x)||\Delta_k^{-h}v(x)|dx \\
 &= C \int_{\Omega} |u(x)|\omega^{1/2}(x)|\Delta_k^{-h}v(x)|\omega^{1/2}(x)dx \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \omega(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\Delta_k^{-h}v(x)|^2 \omega(x)dx \right)^{1/2} < \infty.
 \end{aligned}$$

Podemos então verificar o item (b), com $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Temos,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} g(x)u(x)\Delta_k^{-h}v(x)dx &= \int_{\Omega} g(x)u(x) \left(\frac{v(x - he_k) - v(x)}{-h} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{-u(x)g(x)v(x - he_k)}{h} dx + \int_{\Omega} \frac{u(x)g(x)v(x)}{h} dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{-u(x + he_k)g(x + he_k)v(x)}{h} dx + \int_{\Omega} \frac{u(x)g(x)v(x)}{h} dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left(\frac{(ug)(x + he_k) - (ug)(x)}{h} \right) v(x) dx \\
 &= - \int_{\Omega} v(x)\Delta_k^h(ug)(x) dx.
 \end{aligned}$$

Observe que a seguinte propriedade também é válida

$$\Delta_k^h(D_j v)(x) = D_j(\Delta_k^h v)(x).$$

A definição que daremos a seguir nos dá uma condição sobre o peso ω que é suficiente para a validade dos resultados anteriormente citados.

Definição 2.3 Seja $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ um peso. Dizemos que ω é uniformemente A_p em cada coordenada se

- (a) $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$;
- (b) $\omega_i(t) = \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ é $A_p(\mathbb{R})$, para quase todo $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, $1 \leq i \leq n$, com constante A_p independente das coordenadas $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Observamos que esta condição se faz necessária já que na demonstração do lema 2.5 iremos aplicar o teorema de Muckenhoupt (Teorema 1.9) em cada coordenada e integrar o resultado nas demais coordenadas.

Apresentaremos a seguir um exemplo de um peso satisfazendo as condições da definição 2.3.

Exemplo 2.4 Seja $\omega(x, y) = \omega_1(x)\omega_2(y)$, com ω_1 e ω_2 pesos A_p em $\mathbb{R}$. Para $Q = [a, b] \times [c, d]$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x, y) dx dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x, y) dx dy \right)^{p-1} = \\ & = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_1(x)\omega_2(y) dx dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_1^{-1/(p-1)}(x)\omega_2^{-1/(p-1)}(y) dx dy \right)^{p-1} \\ & = \left(\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \omega_1(x)\omega_2(y) dx dy \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \omega_1^{-1/(p-1)}(x)\omega_2^{-1/(p-1)}(y) dx dy \right)^{p-1} \\ & = \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1(x) dx \right) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \times \\ & \times \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega_2(y) dy \right) \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega_2^{-1/(p-1)}(y) dy \right)^{p-1} \\ & \leq C_1 C_2 = C \end{aligned}$$

ou seja, $\omega \in A_p$ e é uniformemente A_p em cada coordenada já que se $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x, y) dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{-1/(p-1)}(x, y) dx \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1(x) \omega_2(y) dx \right) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1^{-1/(p-1)}(x) \omega_2^{-1/(p-1)}(y) dx \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{(b-a)} \omega_2(y) \int_a^b \omega_1(x) dx \right) \left(\frac{1}{(b-a)} \omega_2^{-1/(p-1)}(y) \int_a^b \omega_1^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1(x) dx \right) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \omega_1^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C_1
\end{aligned}$$

pois $\omega_1 \in A_p$.

Analogamente, se $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega(x, y) dy \right) \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega^{-1/(p-1)}(x, y) dy \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega_2(y) dy \right) \left(\frac{1}{(d-c)} \int_c^d \omega_2^{-1/(p-1)}(y) dy \right)^{p-1} \leq C_2
\end{aligned}$$

pois $\omega_2 \in A_p$.

Por exemplo, se $\omega(x, y) = |x|^{1/2} |y|^{1/2}$, temos que $\omega_1(x) = |x|^{1/2}$ e $\omega_2(y) = |y|^{1/2}$ pertencem a classe $A_2(\mathbb{R})$ (veja exemplo 1.4), e portanto ω é uniformemente A_2 em cada coordenada.

Usando o teorema de Muckenhoupt, o próximo lema mostra que $\Delta_k^h u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, \omega)$, sempre que $u \in H^{1,p}(\Omega, \omega)$, com ω um peso uniformemente A_p em cada coordenada.

Lema 2.5 Seja $u \in H^{1,p}(\Omega, \omega)$, $p > 1$, ω um peso uniformemente A_p em cada coordenada. Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ e $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, temos

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)} \quad (2.3)$$

onde C_M é a constante de Muckenhoupt, independente de Ω' e de u .

Demonstração

Vamos considerar inicialmente o caso $u \in C^\infty(\Omega)$.

Caso 1 : $\Omega \subset \mathbb{R}$, $n=1$.

Podemos escrever

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h Du(x+\zeta) d\zeta.$$

Defina

$$G(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Logo, para todo $x \in \Omega' \subset \subset \Omega$ e $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |\Delta^h u(x)| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_0^h |Du(x+\zeta)| d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |Du(y)| dy \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |G(y)| dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x-h}^{x+h} |G(y)| dy \right| \\ &\leq \sup_{h \neq 0} \frac{1}{|h|} \left| \int_{x-h}^{x+h} |G(y)| dx \right| \\ &\leq 2[M(G)](x) \end{aligned}$$

onde $[M(G)](x)$ é a função maximal de Hardy-Littlewood, e portanto, aplicando o teorema de Muckenhoupt, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\Delta^h u(x)|^p \omega(x) dx &\leq 2^p \int_{\Omega'} [M(G)]^p(x) \omega(x) dx \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}} [M(G)]^p(x) \omega(x) dx \quad (\text{usando teo. Muckenhoupt}) \\ &\leq 2^p C_M \int_{\mathbb{R}} |G(x)|^p \omega(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^p C_M \int_{\Omega} |Du(x)|^p \omega(x) dx \\
&= C \|Du\|_{L^p(\Omega, \omega)}^p
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq C_M \|Du\|_{L^p(\Omega, \omega)}, \text{ com } C = 2^p C_M.$$

Caso 2 : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (com $n > 1$).

Como no caso anterior, também podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta_k^h u(x) &= \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h D_k u(x + \zeta e_k) d\zeta \\
&= \frac{1}{h} \int_0^h D_k u(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \zeta, x_{k+1}, \dots, x_n) d\zeta.
\end{aligned}$$

Definindo, para $1 \leq k \leq n$, a função

$$G_k(x) = \begin{cases} D_k u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

temos, de maneira análoga ao caso 1, que para todo $x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, e com h satisfazendo $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|\Delta_k^h u(x)| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_0^h |D_k u(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \zeta, x_{k+1}, \dots, x_n)| d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_k}^{x_k+h} |D_k u(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)| dt \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_k}^{x_k+h} |G_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)| dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_k-h}^{x_k+h} |G_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)| dt \right| \\
&\leq \sup_{h \neq 0} \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_k-h}^{x_k+h} |G_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)| dt \right| \\
&\leq 2M(G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n})(\mathbf{x}_k).
\end{aligned}$$

onde $G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n}(\mathbf{x}_k) = G_k(x_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, x_n)$.

Logo, utilizando a notação $\widehat{dx_k} = dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$ e usando o teorema de Muckenhoupt, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega'} |\Delta_k^h u(x)|^p \omega(x) dx \\
& \leq 2^p \int_{\Omega'} [M(G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n})]^p(\mathbf{x}_k) \omega(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx \\
& \leq 2^p \int_{R^n} [M(G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n})]^p(\mathbf{x}_k) \omega(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_k \dots dx_n \\
& = 2^p \int_{R^{n-1}} \left(\int_R [M(G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n})]^p(\mathbf{x}_k) \omega(x_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, x_n) dx_k \right) \widehat{dx_k} \\
& \leq 2^p \int_{R^{n-1}} \left(C_M \int_R |G_k^{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n}(\mathbf{x}_k)|^p \omega(x_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, x_n) dx_k \right) \widehat{dx_k} \\
& = 2^p C_M \int_{R^n} |G_k(x)|^p \omega(x) dx \\
& = 2^p C_M \int_{\Omega} |D_k u(x)|^p \omega(x) dx
\end{aligned}$$

onde C_M independe de $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ já que o peso ω é uniformemente A_p em cada coordenada. Portanto,

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq C \|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)}, \text{ com } C = 2^p C_M.$$

Caso Geral

Se $u \in H^{1,p}(\Omega, \omega)$, então existe uma seqüência $\{u_m\}$. $u_m \in C^\infty(\Omega)$, seqüência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega, \omega)}$, tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ e } D_k u_m \longrightarrow D_k u \text{ em } L^p(\Omega, \omega).$$

Logo, existe uma subsequência $\{u_{m_j}\}$ tal que $u_{m_j} \longrightarrow u$ q.s. Assim para cada h , $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, temos

$$\Delta_k^h u_{m_j} \longrightarrow \Delta_k^h u \text{ q.s..}$$

Temos também que $\{\Delta_k^h u_{m_j}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega', \omega)$, para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. De fato, usando o caso anterior temos

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h u_{m_r} - \Delta_k^h u_{m_s}\|_{L^p(\Omega', \omega)} &= \|\Delta_k^h(u_{m_r} - u_{m_s})\|_{L^p(\Omega', \omega)} \\ &\leq C \|D_k(u_{m_r} - u_{m_s})\|_{L^p(\Omega, \omega)} \\ &= C \|D_k u_{m_r} - D_k u_{m_s}\|_{L^p(\Omega, \omega)} \\ &\longrightarrow 0, \text{ quando } m_r, m_s \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto existe $g \in L^p(\Omega', \omega)$ tal que $\Delta_k^h u_{m_j} \longrightarrow g$ em $L^p(\Omega', \omega)$. O que implica que existe uma subseqüência $\Delta_k^h u_{m_{j_r}} \longrightarrow g$ q.s.. Podemos concluir então que $\Delta_k^h u = g$ q.s.. Logo,

$$\Delta_k^h u_{m_j} \longrightarrow \Delta_k^h u \text{ em } L^p(\Omega', \omega).$$

Isto implica em

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} &= \lim_{m_j \rightarrow \infty} \|\Delta_k^h u_{m_j}\|_{L^p(\Omega', \omega)} \\ &\leq C \lim_{m_j \rightarrow \infty} \|D_k u_{m_j}\|_{L^p(\Omega, \omega)} \\ &= C \|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)}. \end{aligned}$$

isto é, $\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq C \|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)}$. ♣

O próximo resultado é fundamental para a demonstração do Teorema 2.8 e basicamente nos fornece uma condição suficiente para a existência da derivada no sentido fraco de uma função $u \in L^p(\Omega, \omega)$.

Lema 2.6 Suponha que $u \in L^p(\Omega, \omega)$, $1 < p < \infty$, ω é um peso A_p e que para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ e $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ seja verificada a condição

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq K \quad (2.4)$$

(com K independente de h). Então existe $v \in L^p(\Omega, \omega)$ tal que $D_k u = v$ no sentido fraco e $\|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq K$.

Demonstração

Como $\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq K$ e usando que $L^p(\Omega, \omega)$ é reflexivo ($1 < p < \infty$), existe uma seqüência $\{h_m\}$, $h_m \rightarrow 0$ e uma função $v \in L^p(\Omega, \omega)$, com $\|v\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq K$, tal que

$$\int_{\Omega} \Delta_k^{h_m} u(x) \varphi(x) \omega(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) \omega(x) dx \quad (2.5)$$

para qualquer $\varphi \in L^{p'}(\Omega, \omega)$.

Usando que $\omega \in A_p$, temos que $\varphi = \psi/\omega \in L^{p'}(\Omega, \omega)$ para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi|^{p'} \omega dx &= \int_{\Omega} |\psi|^{p'} \omega^{-p'} \omega dx \\ &\leq C_\psi \int_{\Omega} \omega^{1-p'} dx \\ &= C_\psi \int_{\Omega} \omega^{-1/(p-1)} dx < \infty \text{ (pois } \omega \in A_p). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, podemos considerar $\varphi = \psi/\omega$ na igualdade (2.5), obtendo que

$$\int_{\Omega} \Delta_k^{h_m} u(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.7)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_k^{h_m} u(x) \psi(x) dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{u(x + h_m e_k) - u(x)}{h_m} \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{u(x + h_m e_k) \psi(x)}{h_m} dx - \int_{\Omega} \frac{u(x) \psi(x)}{h_m} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{u(y) \psi(y - h_m e_k)}{h_m} dy - \int_{\Omega} \frac{u(y) \psi(y)}{h_m} dy \\ &= \int_{\Omega} u(y) \left(\frac{\psi(y - h_m e_k) - \psi(y)}{h_m} \right) dy. \end{aligned}$$

Usando que $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h_m \rightarrow 0} \frac{\psi(y - h_m e_k) - \psi(y)}{h_m} &= \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{\psi(y + t_m e_k) - \psi(y)}{-t_m} \\ &= \lim_{t_m \rightarrow 0} - \left(\frac{\psi(y + t_m e_k) - \psi(y)}{t_m} \right) \\ &= -D_k \psi(y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Além disso, também temos que para cada m existe θ_m tal que

$$\begin{aligned} \left| u(y) \frac{\psi(y - h_m e_k) - \psi(y)}{h_m} \right| &\leq |u(y)| \frac{|D_k \psi(\theta_m)|}{|h_m|} |h_m| \\ &= |u(y)| |D_k \psi(\theta_m)| \\ &\leq C |u(y)|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

e $|u(y)| \in L^1(\Omega)$ pela proposição 1.5(a). De (2.8) e (2.9), usando o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega} \Delta_k^{h_m} u(x) \psi(x) dx \longrightarrow - \int_{\Omega} u(x) D_k \psi(x) dx. \quad (2.10)$$

De (2.7) e (2.10) segue que

$$\int_{\Omega} v(x) \psi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) D_k \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

ou seja, $D_k u = v$ no sentido fraco.

Portanto, usando o Teorema 1.10 temos que $u \in H^{1,p}(\Omega, \omega)$. ♣

Observação 2.7 Utilizaremos a seguinte notação

$$D^k(\Omega, \omega) = \left\{ g \in W^k(\Omega) : \frac{D^\alpha g}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega), 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots$$

Para $k = 0$, temos que $g \in D^0(\Omega, \omega)$ se $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$. ♣

Podemos agora demonstrar o principal resultado deste capítulo.

2.3 - Regularidade Interior

Teorema 2.8 (regularidade interior) Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução fraca da equação $Lu = g$ com as seguintes condições sendo verificadas:

(a) $g \in D^0(\Omega, \omega)$;

(b) ω é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada;

(c) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h .

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq \mathbf{C} \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \quad (2.11).$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{C}(n, C_M, \lambda, \Lambda, C_1, d')$, com $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração

Como $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca de $Lu = g$, então por definição temos

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v(x) dx \quad (2.12)$$

para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ (em particular para $v \in C_0^\infty(\Omega)$).

Para facilitar a notação, omitiremos o símbolo de somatório que aparece na integral.

Aplicando a igualdade (2.12) para $\Delta_k^{-h} v$ ($1 \leq k \leq n$) (com $v \in C_0^\infty(\Omega)$), que juntamente com $\Delta_k^{-h} D_j v$ estão em $L^2(\Omega', \omega)$ (lema 2.5), obtemos

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega} g(x) \Delta_k^{-h} v(x) dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j (\Delta_k^{-h} v(x)) dx \\ &= - \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) \Delta_k^{-h} D_j v(x) dx \quad (\text{lema 2.2(b)}) \\ &= \int_{\Omega} \Delta_k^h (a_{ij} D_i u)(x) D_j v(x) dx \quad (\text{lema 2.2(a)}) \\ &= \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x + h e_k) \Delta_k^h D_i u(x) + D_i u(x) \Delta_k^h a_{ij}(x) \right) D_j v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left([h \Delta_k^h a_{ij}(x) + a_{ij}(x)] \Delta_k^h D_i u(x) + D_i u(x) \Delta_k^h a_{ij}(x) \right) D_j v(x) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_j v(x) \Delta_k^h D_i u(x) dx &= - \left(\int_{\Omega} g(x) \Delta_k^{-h} v(x) dx \right. \\
&\quad + \int_{\Omega} \Delta_k^h a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} h \Delta_k^h a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v(x) dx \right) \\
&\leq \int_{\Omega} |g(x)| |\Delta_k^{-h} v(x)| dx + \int_{\Omega} |\Delta_k^h a_{ij}(x)| |D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\
&\quad + |h| \int_{\Omega} |\Delta_k^h a_{ij}(x)| |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\
&= (I) + (II) \\
&\quad + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Estimando as integrais I e II:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega} |g| |\Delta_k^{-h} v| dx = \int_{\Omega} \left(\frac{|g|}{\omega} \right) \omega^{1/2} |\Delta_k^{-h} v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp}(v)} |\Delta_k^{-h} v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_M \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \left(\int_{\Omega} |D_k v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \quad (\text{usando o lema 2.5}) \\
&= C_M \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_k v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\Omega} |\Delta_k^h a_{ij}| |D_i u| |D_j v| dx \leq \int_{\Omega} C_1 \omega |D_i u| |D_j v| dx \\
&= C_1 \int_{\Omega} |D_i u| \omega^{1/2} |D_j v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C_1 \left(\int_{\Omega} |D_i u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas de (I) e (II) em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v(x) dx \\
& \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Na verdade a desigualdade (2.14) vale para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$. De fato, se $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ então existe uma seqüência $\{v_m\}$, com $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$, que é seqüência de Cauchy com relação à norma $\|\cdot\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}$ e também temos que $D_j v_m \rightarrow D_j v$ em $L^2(\Omega, \omega)$ (definição 1.6). Logo,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v_m(x) dx - \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v(x) dx \right| \\
& \leq \int_{\Omega} |a_{ij}(x)| |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v_m(x) - D_j v(x)| dx \\
& \leq C \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v_m(x) - D_j v(x)| dx \\
& \leq C \left(\int_{\Omega} |\Delta_k^h D_i u(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j v_m(x) - D_j v(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Portanto

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v_m(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v(x) dx$$

e como também $\|Dv_m\|_{L^2(\Omega, \omega)} \rightarrow \|Dv\|_{L^2(\Omega, \omega)}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j v(x) dx & \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx
\end{aligned}$$

para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Vamos denotar por $a = \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)}$.

Escolhendo $v = \psi^2 \Delta_k^h u$, com $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $\Omega' \subset \subset \Omega$ e com $\|D\psi\|_\infty \leq \frac{2}{d'}$, onde $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, temos

$$D_j v = (2\psi D_j \psi) \Delta_k^h u + \psi^2 D_j (\Delta_k^h u).$$

Aplicando em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \psi^2(x) D_j (\Delta_k^h u(x)) D_i (\Delta_k^h u(x)) + 2a_{ij}(x) \psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) \Delta_k^h D_i u(x) \right) dx \\ & \leq C a \|2\psi D_j \psi \Delta_k^h u + \psi^2 D_j (\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\ & + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |2\psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) + \psi^2(x) D_j (\Delta_k^h u(x))| dx \\ & \leq C a \left(\|\psi D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\psi^2 D_j (\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \\ & + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |2\psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) + \psi^2(x) D_j (\Delta_k^h u(x))| dx. \end{aligned}$$

E então temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ij}(x) [\psi(x) D_i (\Delta_k^h u(x))] [\psi(x) D_j (\Delta_k^h u(x))] dx \\ & \leq C a \left(\|\psi D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\psi^2 D_j (\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \\ & + 2 \int_{\Omega} |a_{ij}(x)| |\psi(x) D_i \Delta_k^h u(x)| |D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x)| dx \\ & + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |2\psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) + \psi^2(x) D_j (\Delta_k^h u(x))| dx. \end{aligned}$$

Usando as hipóteses (2.1) sobre os coeficientes a_{ij} , podemos majorar a primeira integral que aparece à direita por

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |a_{ij}(x)| |\psi(x) D_i (\Delta_k^h u(x))| |D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x)| dx \\ & \leq C \int_{\Omega} |\psi D_i (\Delta_k^h u)| |D_j \psi \Delta_k^h u| \omega dx \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} |\psi D_i (\Delta_k^h u)|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j \psi \Delta_k^h u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\ & = C \|\psi D_i (\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} a_{ij}(x) [\psi(x) D_j(\Delta_k^h u(x))] [\psi(x) D_i(\Delta_k^h u(x))] dx \\
& \leq C a \|\psi D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + C a \|\psi^2 D_j(\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + 2C \|\psi D_i(\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |2\psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) + \psi^2(x) D_j(\Delta_k^h u(x))| dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Finalmente, estimando a última integral

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |2\psi(x) D_j \psi(x) \Delta_k^h u(x) + \psi^2(x) D_j(\Delta_k^h u(x))| dx \\
& \leq \int_{\Omega} 2\omega |\Delta_k^h D_i u| |\psi D_j \psi \Delta_k^h u| dx + \int_{\Omega} \omega |\Delta_k^h D_i u| |\psi^2 D_j(\Delta_k^h u)| dx \\
& = 2 \int_{\Omega} \omega |\psi \Delta_k^h D_i u| |D_j \psi \Delta_k^h u| dx + \int_{\Omega} \omega |\psi \Delta_k^h D_i u| |\psi D_j(\Delta_k^h u)| dx \\
& \leq 2 \|\psi \Delta_k^h D_i u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + \|\psi \Delta_k^h D_i u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|\psi \Delta_k^h D_j u\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Voltando em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} a_{ij}(x) [\psi(x) D_j \Delta_k^h u(x)] [\psi(x) D_i \Delta_k^h u(x)] dx \\
& \leq C a \|\psi D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} \\
& \quad + C a \|\psi^2 D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
& \quad + 2C \|\psi D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} \\
& \quad + 2C_1 |h| \|\psi \Delta_k^h D_i u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} \\
& \quad + C_1 |h| \|\psi \Delta_k^h D_i u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|\psi \Delta_k^h D_j u\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Pela condição (1.2) com $v = \omega$, temos

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) [\psi(x) D_j(\Delta_k^h u(x))] [\psi(x) D_i(\Delta_k^h u(x))] dx \geq \lambda \int_{\Omega} |\psi(x) D(\Delta_k^h u(x))|^2 \omega(x) dx.$$

Considerando $b = \|\psi D(\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda b^2 &\leq C a \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + C a b + 2C b \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} \\ &\quad + 2C_1 b |h| \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + C_1 |h| b^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young,

$$AB = (\varepsilon^{-1} A)(\varepsilon B) \leq \frac{1}{2} [(\varepsilon^{-1} A)^2 + (\varepsilon B)^2], \quad \forall \varepsilon > 0$$

para estimar ab e $b\|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda b^2 &\leq C a \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} a^2 + \frac{C}{2} \varepsilon^2 b^2 \\ &\quad + 2C \varepsilon^2 b^2 + C \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)}^2 \\ &\quad + 2C_1 b |h| \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + C_1 |h| b^2 \\ &\leq C a \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + \frac{C \varepsilon^{-2}}{2} a^2 + \frac{C \varepsilon^2}{2} b^2 \\ &\quad + 2C \varepsilon^2 b^2 + C \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)}^2 \\ &\quad + C_1 \varepsilon^2 |h|^2 b^2 + C_1 \varepsilon^{-2} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)}^2 + C_1 |h| b^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ e h tal que

$$\frac{C}{2} \varepsilon^2 + 2C \varepsilon^2 \leq \lambda/4 \quad \text{e} \quad C_1 \varepsilon^2 |h|^2 + C_1 |h| < \lambda/4 \quad (2.16)$$

temos

$$\left(\frac{C}{2} \varepsilon^2 + 2C \varepsilon^2 + C_1 \varepsilon^2 |h|^2 + C_1 |h| \right) \leq \frac{\lambda}{2}$$

e usando o lema 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda b^2 &\leq C a \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} a^2 + \frac{\lambda}{2} b^2 + C \varepsilon^{-2} \|D_j \psi \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)}^2 \\ &\leq C a \|D_j \psi\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)} + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} a^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} b^2 + C \varepsilon^{-2} \|D_j \psi\|_{\infty}^2 \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \psi, \omega)}^2 \\ &\leq C a \|D_j \psi\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} a^2 + \frac{\lambda}{2} b^2 + C \varepsilon^{-2} \|D_j \psi\|_{\infty}^2 \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}^2. \end{aligned}$$

Como $\|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq a$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} b^2 &\leq C \|D_j \psi\|_{\infty} a^2 + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} a^2 + C \varepsilon^{-2} \|D_j \psi\|_{\infty}^2 a^2 \\ &\leq \left(C \|D_j \psi\|_{\infty} + \frac{C}{2} \varepsilon^{-2} + C \varepsilon^{-2} \|D_j \psi\|_{\infty}^2 \right) a^2 \\ &= C a^2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$b \leq \left(\frac{2C}{\lambda} \right)^{1/2} a.$$

Usando que $\psi \equiv 1$ em Ω' temos que

$$\|\Delta_k^h(Du)\|_{L^2(\Omega', \omega)} \leq C a, \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \forall \Omega' \subset \subset \Omega$$

com $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, h satisfazendo a condição (2.16). Aplicando o lema 2.6, temos que Du possui derivadas parciais em Ω na direção k , $1 \leq k \leq n$. Pelo teorema 1.10, temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C a = C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right). \quad \clubsuit$$

Corolário 2.9 Se $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação $Lu = g$ com as seguintes condições sendo verificadas:

- (a) $g/\omega \in L_{\text{loc}}^2(\Omega, \omega)$;
- (b) ω uniformemente A_2 em cada coordenada;
- (c) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$, $1 \leq k \leq n$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h .

Então $u \in H_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega, \omega)$ e para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$ temos

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega'', \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega'', \omega)} \right).$$

Demonstração

Basta tomar $\Omega = \Omega''$ na demonstração do Teorema 2.8. ♣

No caso clássico, quando existem mais condições de regularidade sobre os coeficientes, é possível obter melhor regularidade das soluções para a equação $Lu = g$. Por exemplo, no teorema 8.10 de [GT], se $a_{ij} \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ e $g \in W^{1,2}(\Omega)$, então a solução da equação $Lu = g$ está em $W_{loc}^{3,2}(\Omega)$. A condição $a_{ij} \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ implica que

$$\left| \frac{D_k a_{ij}(x + h e_k) - D_k a_{ij}(x)}{h} \right| \leq C, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

No nosso caso, esta condição é substituída por $|\Delta_p^h D_k a_{ij}(x)| \leq C_2 \omega(x)$, e a condição sobre a função g é que $g \in D^1(\Omega, \omega)$.

Teorema 2.10 Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução fraca da equação $Lu = g$ satisfazendo as seguintes condições

- (a) ω é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada;
- (b) $g \in D^1(\Omega, \omega)$;
- (c) $|\Delta_p^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, com $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $1 \leq p \leq n$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h ;
- (d) Existem as derivadas $D_k a_{ij}$ q.s. e $|\Delta_p^h D_k a_{ij}(x)| \leq C_2 \omega(x)$, $x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, com constante C_2 independente de Ω' e h , $1 \leq p \leq n$.

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ temos que $u \in H^{3,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{3,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|(D_k g)/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \quad (2.17)$$

onde $C = C(C_M, \Lambda, \lambda, C_1, C_2, d')$.

Demonstração

Notemos inicialmente que se $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$ e $D_k a_{ij}$ existe, então também temos que $|D_k a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$.

Como u é solução fraca da equação $Lu = g$, então

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v(x) dx \quad (2.18)$$

para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ (em particular para $v \in C_0^\infty(\Omega)$).

Pelo Teorema 2.8 sabemos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$.

Substituindo v na equação (2.18) por $D_k v$ (com $v \in C_0^\infty$), $1 \leq k \leq n$, obtemos

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j (D_k v(x)) dx = \int_{\Omega} g(x) D_k v(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) D_k g(x) dx \quad (2.19)$$

Mas, no lado esquerdo, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_k (D_j v(x)) dx \\ &= - \int_{\Omega} D_k (a_{ij}(x) D_i u(x)) D_j v(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(D_k a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) + a_{ij}(x) D_{ki} u(x) D_j v(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Voltando em (2.19), obtemos

$$- \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_{ki} u(x) D_j v(x) dx = \int_{\Omega} D_k a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx - \int_{\Omega} v(x) D_k g(x) dx \quad (2.20)$$

Substituindo v por $\Delta_p^{-h} v$ em (2.20),

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_{ki} u(x) \Delta_p^{-h} (D_j v(x)) &= \int_{\Omega} D_k a_{ij}(x) D_i u(x) D_j (\Delta_p^{-h} v(x)) dx - \\ &- \int_{\Omega} \Delta_p^{-h} v(x) D_k g(x) dx \end{aligned}$$

e usando o lema 2.2(b), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_p^h (a_{ij}(x) D_{ki} u(x)) D_j v(x) dx &= - \int_{\Omega} \Delta_p^h (D_k a_{ij}(x) D_i u(x)) D_j v(x) dx - \\ &- \int_{\Omega} \Delta_p^{-h} v(x) D_k g(x) dx. \end{aligned}$$

Agora, usando o lema 2.2(a),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x + h e_p) \Delta_p^h D_{ki} u(x) + D_{ki} u(x) \Delta_p^h a_{ij}(x) \right) D_j v(x) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \left(D_k a_{ij}(x + h e_p) \Delta_p^h D_i u(x) + D_i u(x) \Delta_p^h D_k a_{ij}(x) \right) D_j v(x) dx - \\ &- \int_{\Omega} \Delta_p^{-h} v(x) D_k g(x) dx. \end{aligned}$$

Fazendo como na demonstração do Teorema 2.8 e usando que

$$a_{ij}(x + he_p) = h\Delta_p^h a_{ij}(x) + a_{ij}(x)$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_p^h D_{ki} u(x) D_j v(x) \\ &= - \int_{\Omega} D_k a_{ij}(x + he_p) \Delta_p^h D_i u(x) D_j v(x) dx - \\ & - \int_{\Omega} D_i u(x) \Delta_p^h D_k a_{ij}(x) D_j v(x) dx \\ & - \int_{\Omega} \Delta_p^{-h} v(x) D_k g(x) dx - \int_{\Omega} D_{ki} u(x) \Delta_p^h a_{ij}(x) D_j v(x) dx \\ & - \int_{\Omega} h \Delta_p^h a_{ij}(x) \Delta_p^h D_{ki} u(x) D_j v(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega} |h \Delta_p^h D_k a_{ij}(x) + D_k a_{ij}(x)| |\Delta_p^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\ & + \int_{\Omega} |D_i u(x)| |\Delta_p^h D_k a_{ij}(x)| |D_j v(x)| dx \\ & + \int_{\Omega} |\Delta_p^{-h} v(x)| |D_k g(x)| dx \\ & + \int_{\Omega} |D_{ki} u(x)| |\Delta_p^h a_{ij}(x)| |D_j v(x)| dx \\ & + |h| \int_{\Omega} |\Delta_p^h a_{ij}(x)| |\Delta_p^h D_{ki} u(x)| |D_j v(x)| dx \\ &= (I) + (II) + (III) + (IV) + C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_p^h D_{ki} u(x)| |D_j v(x)| dx. \end{aligned}$$

Usando as hipóteses (c) e (d) sobre os coeficientes a_{ij} e a condição (b) sobre a função g , o Lema 2.5 e o Teorema 2.8, podemos estimar (I), (II), (III) e (IV):

$$\begin{aligned} (I) &= \int_{\Omega} |h \Delta_p^h D_k a_{ij}(x) + D_k a_{ij}(x)| |\Delta_p^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(|h| |\Delta_p^h D_k a_{ij}(x)| + |D_k a_{ij}(x)| \right) |\Delta_p^h D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\ &\leq (C_2 |h| + C_1) \int_{\Omega} |\Delta_p^h D_i u(x)| |D_j v(x)| \omega(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\text{supp } v} \omega |\Delta_p^h D_i u| |D_j v| dx \\
&= C \int_{\text{supp } v} |\Delta_p^h D_i u| \omega^{1/2} |D_j v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C \left(\int_{\text{supp } v} |\Delta_p^h D_i u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp } v} |D_j v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|D_j v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II) &= \int_{\Omega} |D_i u(x)| |\Delta_p^h D_k a_{ij}(x)| |D_j v(x)| dx \\
&\leq C_2 \int_{\Omega} \omega(x) |D_i u(x)| |D_j v(x)| dx \\
&= C_2 \int_{\Omega} |D_i u| \omega^{1/2} |D_j v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C_2 \left(\int_{\Omega} |D_i u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(III) &= \int_{\Omega} |\Delta_p^{-h} v(x)| |D_k g(x)| dx \\
&= \int_{\Omega} |\Delta_p^{-h} v(x)| \omega^{1/2} \left(\frac{|D_k g(x)|}{\omega} \right) \omega^{1/2} dx \\
&\leq \| (D_k g)/\omega \|_{L^2(\Omega, \omega)} \| \Delta_p^{-h} v \|_{L^2(\text{supp}(v), \omega)} \\
&\leq C_M \| D_k g/\omega \|_{L^2(\Omega, \omega)} \| D_p v \|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

E finalmente

$$\begin{aligned}
(IV) &= \int_{\text{supp } v} |D_{ki} u(x)| |\Delta_p^h a_{ij}(x)| |D_j v(x)| dx \\
&\leq C_1 \int_{\text{supp } v} \omega(x) |D_{ki} u(x)| |D_j v(x)| dx \\
&= C_1 \int_{\text{supp } v} |D_{ki} u| \omega^{1/2} |D_j v| \omega^{1/2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left(\int_{\text{supp } v} |D_{ki}u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp } v} |D_j v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|D_j v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} a_{ij}(x) \Delta_p^h D_{ki}u(x) D_j v(x) dx \leq \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|D_k g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|D_j v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
&+ C_1 |h| \int_{\Omega} \omega(x) |\Delta_p^h D_{ki}u(x)| |D_j v(x)| dx. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

De modo análogo ao que foi feito com a desigualdade (2.14), temos que (2.21) vale para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Considerando $v = \psi^2 \Delta_p^h D_k u$, $1 \leq k \leq n$, onde $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em Ω' , e $\|D\psi\|_\infty \leq 2/d'$ (onde $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$). Temos,

$$D_j v = (2\psi D_j \psi) \Delta_p^h D_k u + \psi^2 \Delta_p^h (D_{kj} u).$$

Substituindo em (2.21) e fazendo como na demonstração do Teorema 2.8, obtemos,

$$\|\Delta_p^h D_k (D_i u)\|_{L^2(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|D_k g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

Portanto pelo lema 2.6, $D_k (D_i u)$ possui derivadas em $L^2(\Omega, \omega)$, ou seja, $u \in H^{3,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{3,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|D_k g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

Por indução, podemos concluir a seguinte extensão do Teorema 2.10,

Teorema 2.11 Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é uma solução de $Lu = g$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) ω é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada;

(b) $g \in D^k(\Omega, \omega)$;

(c) Existe $D^\alpha a_{ij}$ e $|\Delta_p^h D^\alpha a_{ij}(x)| \leq C \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, $\forall \alpha$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $1 \leq p \leq n$, e com $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, sendo a constante C independente de Ω' e de h .

Então $u \in H^{k+2,2}(\Omega', \omega)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ e

$$\|u\|_{H^{k+2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right)$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, C_M, C, d')$.

Demonstração

Segue de maneira análoga das demonstrações dos Teoremas 2.8 e 2.10.

Corolário 2.12 Se $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação $Lu = g$ com as seguintes condições sendo verificadas:

(a) ω um peso uniformemente A_2 em cada coordenada;

(b) $g \in D_{\text{loc}}^k(\Omega, \omega) = \{g \in W^k(\Omega) : D^\alpha g/\omega \in L_{\text{loc}}^2(\Omega, \omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}$;

(c) Existem $D^\alpha a_{ij}$ e $|\Delta_p^h D^\alpha a_{ij}(x)| \leq C_1 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $1 \leq p \leq n$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h .

Então $u \in H_{\text{loc}}^{k+2,2}(\Omega, \omega)$ e para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$ temos

$$\|u\|_{H^{k+2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega'', \omega)} + \|D^\alpha g/\omega\|_{L^2(\Omega'', \omega)} \right)$$

com $C = C(n, \lambda, \Lambda, C_M, C_1, d')$, $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$.

Demonstração

Basta usar o Teorema 2.11 usando $\Omega = \Omega''$. ♣

Para concluir o capítulo precisamos da seguinte proposição:

Proposição 2.13 Se $\omega^{-p'/p} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então $H^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega, \omega) \subset W^{k,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Demonstração

Se $u \in H^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$ temos que $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$ e $D^\alpha u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$, $1 \leq |\alpha| \leq k$. Usando que $\omega^{-p'/p} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então pela proposição 1.5(a) temos que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e também $D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ou seja, $u \in W^{k,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. ♣

Com a proposição 2.13 e usando o Teorema de Imersão de Sobolev (corolário 7.11 de [GT]), obtemos o seguinte resultado,

Corolário 2.14 Nas mesmas condições do Corolário 2.12, válidas para qualquer k . Se $u \in H^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega, \omega)$ é solução da equação $Lu = g$ e $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$ então $u \in C^\infty(\overline{\Omega''})$.

Demonstração

Pelo Corolário 2.12 temos que $u \in H^{k+2,2}(\Omega', \omega)$, $\forall k$. Pela Proposição 2.13 (com $p=2$) sabemos que $H^{k+2,2}(\Omega', \omega) \subset W^{k+2,1}(\Omega')$, ou seja, temos que $u \in W^{k+2,1}(\Omega')$, $\forall k$. Como $\Omega' \subset \subset \Omega''$ temos que $W^{k+2,1}(\Omega') \subset W^{k+2,1}_0(\Omega'')$.

Pelo teorema de Imersão de Sobolev $W^{k,q}_0(\Omega'') \subset C^m(\overline{\Omega''})$ para $0 \leq m < k - \frac{n}{q}$. No nosso caso $q = 1$ e k qualquer.

Portanto $u \in H^{k+2,2}(\Omega', \omega) \subset W^{k+2,1}(\Omega') \subset W^{k+2,1}_0(\Omega'') \subset C^m(\overline{\Omega''})$, com $0 \leq m < k + 2 - n$, $\forall k$.

Logo $u \in C^\infty(\overline{\Omega''})$ ♣

CAPÍTULO 3

REGULARIDADE GLOBAL

3.1 - Introdução

Neste capítulo consideraremos o operador na forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)) - \sum_{i=1}^n b_i(x)D_i u(x) \quad (3.1)$$

onde a_{ij} e b_i são funções mensuráveis a valores reais e satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} \lambda |\xi|^2 \omega(x) &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \omega(x) \\ \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| &\leq C \omega(x) \\ |b_i(x)| &\leq C_1 \omega(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, C, C_1, λ, Λ constantes positivas e ω uma função peso.

O motivo pelo qual vamos estudar operadores desta forma é que quando tentamos estender o resultado de regularidade interior para todo Ω , ou seja, a regularidade global, da solução para o operador estudado no capítulo 2, precisamos fazer uma mudança de coordenada e o novo operador é da forma (3.1) (esse fato pode ser observado na demonstração do Teorema 3.13).

Os objetivos principais deste capítulo são demonstrar a existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet, a regularidade interior e a regularidade global da solução da equação $Lu = g$.

Na demonstração da existência e unicidade para o problema de Dirichlet utilizaremos o Teorema 1.13 e também precisaremos de um princípio do máximo (Teorema 3.8) para subsoluções do operador L (ou seja, $Lu \leq 0$ com $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$).

No estudo da regularidade interior (Teorema 3.10) usaremos a mesma técnica do Teorema 2.8, com os coeficientes a_{ij} e o peso ω satisfazendo as mesmas condições deste teorema.

Para estender o resultado da regularidade interior para todo Ω , ou seja, a regularidade global da solução, será necessário alguma condição sobre a fronteira $\partial\Omega$ (ver

definição 3.12) e, além disso, também precisaremos de um resultado que de condições que garantam para um dado peso $\omega \in A_p$ e uma aplicação $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que o peso $\omega \circ h \in A_p$. Mais do que isso, precisaremos que se ω é um peso uniformemente A_p em cada coordenada então $\omega \circ h$ é uniformemente A_p em cada coordenada. No caso clássico ($\omega \equiv 1$ em (3.2)) a condição para a regularidade global é que a fronteira $\partial\Omega$ seja de classe C^k (teorema 8.12 de [GT]).

No nosso estudo a hipótese adicional sobre $\partial\Omega$ é que a função que verifica (localmente) as condições da definição de fronteira de classe C^k , também precisa ser quase-conforme (definição 3.11). Lembrando que uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é quase-conforme, se for injetora, as componentes, φ_i , de φ possuem derivadas fracas em $L^n_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{1/2} \leq K \left| \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \right|^{1/n}.$$

Por exemplo, $\varphi(x) = |x|^\alpha x$ é quase-conforme para $\alpha > -1$.

3.2 - Definições e Resultados Básicos

Daremos a seguir as definições de solução, subsolução e supersolução e os resultados básicos necessários para a demonstração da existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet.

Definição 3.1 Seja $E \subset \Omega$. Dizemos que $u \geq c$ ($c \in \mathbb{R}$) em E no sentido de $H^{1,2}(\Omega, \omega)$ se existir uma seqüência $\{u_n\}$, $u_n \in C^\infty(\Omega)$, verificando as condições

- (i) $u_n(x) \geq c, \quad \forall x \in E$;
- (ii) $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Definição 3.2 Dizemos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação $Lu = 0$ se

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u(x) \varphi(x) \right] dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Em outras palavras, definindo $\mathcal{B}(u, v)$ por

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x) v(x) D_i u(x) \right] dx$$

dizemos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é

(i) solução fraca da equação $Lu = 0$ se $\mathcal{B}(u, v) = 0$, $\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

(ii) supersolução ($Lu \geq 0$) se $\mathcal{B}(u, v) \geq 0$, $\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, $v \geq 0$.

(iii) subsolução ($Lu \leq 0$) se $\mathcal{B}(u, v) \leq 0$, $\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, $v \geq 0$.

Definição 3.3 Dizemos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução fraca da equação

$$Lu = g - \sum_{i=1}^n D_i f_i, \quad \text{com } \frac{g}{\omega}, \frac{f_i}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$$

se verificar a condição

$$\mathcal{B}(u, \varphi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i D_i \varphi + \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Para a demonstração da existência e unicidade de solução do problema de Dirichlet serão fundamentais as seguintes definições e resultados, e principalmente o Teorema 1.13 que garante que $H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \omega)$ é compacta se $\omega \in A_2$.

Definição 3.4 Seja $E \subset \bar{\Omega}$ e $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$. Então,

$$\sup_E u = \inf \{ M \in \mathbb{R} : u \leq M \text{ em } E \text{ no sentido de } H^{1,2}(\Omega, \omega) \}.$$

Lema 3.5 Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, $E \subset \bar{\Omega}$.

(i) Se $u \geq 0$ em E no sentido $H^{1,2}(\Omega, \omega)$, então $u \geq 0$ q.s. em E .

(ii) Se $u \geq 0$ q.s. em Ω , então $u \geq 0$ em Ω no sentido de $H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

(iii) Se $u \geq 0$ q.s. em Ω , $u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, então existe uma sequência $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp}(\varphi_k) \subset\subset \Omega$, tal que $\varphi_k \geq 0$ em Ω e $\varphi_k \rightarrow u$ em $H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$.

(iv) Se E é aberto em Ω e $u \geq 0$ q.s. em E , então $u \geq 0$ em K (no sentido $H^{1,2}(\Omega, \omega)$), para todo compacto $K \subset E$.

Demonstração A prova deste lema pode ser encontrada em [FKS] (lema 2.13) ou em [KS] (proposição 5.2, pag. 35). ♣

Teorema 3.6(Alternativa de Fredholm) Seja $\mathcal{V}$ um espaço linear normado e $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ uma aplicação linear compacta. Então,

ou (a) a equação homogênea $x - Tx = 0$ possui uma solução não-trivial $x \in \mathcal{V}$,
ou (b) para cada $y \in \mathcal{V}$ a equação $x - Tx = y$ possui uma única solução $x \in \mathcal{V}$.

Além disso, no caso (b), o operador $(I - T)^{-1}$ é limitado.

Demonstração Veja teorema 5.3, pag.71 de [GT].

Lema 3.7 Para $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \omega(\Omega) < \infty$. Temos que

$$\phi_p(f) = \left(\frac{1}{\omega(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^p \omega dx \right)^{1/p}$$

é crescente em p , ou seja, se $p < q$ então $\phi_p(f) \leq \phi_q(f)$.

Demonstração

Dados $1 \leq p < q$, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

ou seja,

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{r} = 1.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^p \omega dx &= \int_{\Omega} |f|^p \omega^{1/(q/p)} \omega^{1/(r/p)} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^q \omega dx \right)^{p/q} \left(\int_{\Omega} \omega(x) dx \right)^{p/r} \\ &= [\omega(\Omega)]^{p/r} \left(\int_{\Omega} |f|^q \omega dx \right)^{p/q}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_p(f) &= \left(\frac{1}{\omega(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^p \omega dx \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{[\omega(\Omega)]^{1/p}} [\omega(\Omega)]^{1/r} \left(\int_{\Omega} |f|^q \omega dx \right)^{1/q} \\
&= [\omega(\Omega)]^{1/r-1/p} \left(\int_{\Omega} |f|^q \omega dx \right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{1}{\omega(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^q \omega dx \right)^{1/q} \\
&= \phi_q(f).
\end{aligned}$$

3.3 - O Problema de Dirichlet

Para provar a existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet, vamos inicialmente provar o Princípio do Máximo para o operador L . Este teorema generaliza o Princípio do Máximo apresentado em [GT] (teorema 8.1).

Teorema 3.8 (Princípio do Máximo) Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ satisfazendo $Lu \leq 0$ (≥ 0) e com $\omega \in A_2$. Então,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right).$$

Demonstração

Como $Lu \leq 0$, pela definição 3.1(iii), temos

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx - \int_{\Omega} b_i(x) v(x) D_i u(x) dx \leq 0$$

$\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, $v \geq 0$. Portanto,

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j v dx \leq \int_{\Omega} |b_i| |D_i u| v dx \quad (\text{usando (3.2)})$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \int_{\Omega} \omega |D_i u| |v| dx \\
&= C_1 \int_{\Omega} |D_i u| \omega^{1/2} |v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C_1 \|D_i u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|v\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Seja $\mathbf{m} = \sup_{\partial\Omega} u^+$. Supondo que exista $\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{m} \leq \mathbf{k} < \sup_{\Omega} u$.

Definindo

$$v = (u - \mathbf{k})^+ = \begin{cases} u - \mathbf{k}, & \text{se } u > \mathbf{k} \\ 0, & \text{se } u \leq \mathbf{k} \end{cases}$$

temos que $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, $v \geq 0$ e

$$D_j v = \begin{cases} D_j u, & \text{se } u > \mathbf{k} \quad (1 \leq j \leq n) \\ 0, & \text{se } u \leq \mathbf{k} \end{cases}$$

(veja corolário 2.1 de [FKS]).

Denotando $\Gamma = \text{supp}(v)$, temos

$$\int_{\Gamma} a_{ij} D_i v D_j v dx \leq \int_{\Gamma} b_i v D_i v dx$$

e usando a condição (3.2), obtemos

$$\lambda \int_{\Gamma} |Dv|^2 \omega dx \leq \int_{\Gamma} a_{ij} D_i v D_j v dx \leq \int_{\Gamma} b_i v D_i v dx.$$

Portanto, usando a condição sobre os coeficientes b_i , temos

$$\begin{aligned}
\lambda \|Dv\|_{L^2(\Gamma, \omega)}^2 &\leq \int_{\Gamma} |b_i| |v| |D_i v| dx \\
&\leq C_1 \int_{\Gamma} \omega |v| |D_i v| dx \\
&= C_1 \int_{\Gamma} |v| \omega^{1/2} |D_i v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C_1 \left(\int_{\Gamma} |D_i v|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} v^2 \omega dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \|Dv\|_{L^2(\Gamma, \omega)} \|v\|_{L^2(\Gamma, \omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda \|Dv\|_{L^2(\Gamma, \omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Gamma, \omega)}.$$

Usando o Teorema 1.11. com $p = 2$ e $k = n/(n - 1)$, obtemos

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\Gamma, \omega)} \leq C_{\Omega} \|Dv\|_{L^2(\Gamma, \omega)}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{2n/(n-1)}(\Gamma, \omega)} &\leq C(C_{\Omega}, \lambda) \|v\|_{L^2(\Gamma, \omega)} \\ &= C \left(\int_{\Gamma} v^2 \omega dx \right)^{1/2} \\ &= C \omega(\Gamma)^{1/2} \left(\frac{1}{\omega(\Gamma)} \int_{\Gamma} v^2 \omega dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pelo lema 3.7, sendo $2 < 2n/(n - 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\Gamma, \omega)} &\leq C \omega(\Gamma)^{1/2} \left(\frac{1}{\omega(\Gamma)} \int_{\Gamma} v^2 \omega dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \omega(\Gamma)^{1/2} \left(\frac{1}{\omega(\Gamma)} \int_{\Gamma} v^{2n/(n-1)} \omega dx \right)^{(n-1)/2n} \\ &= C \omega(\Gamma)^{1/2n} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\Gamma, \omega)}. \end{aligned}$$

Portanto $\omega(\Gamma) \geq C^{2n}$, independente de $\mathbf{k}$.

Logo, se $\mathbf{m} \leq \mathbf{k} < \sup_{\Omega} u$ e $v_{\mathbf{k}} = (u - \mathbf{k})^+$, temos que

$$\text{se } \mathbf{k} \longrightarrow \sup_{\Omega} u \text{ então } v_{\mathbf{k}} \longrightarrow 0.$$

Mas $\omega(\Gamma_{\mathbf{k}}) = \omega(\text{supp } v_{\mathbf{k}}) \geq C^{2n}$ independente de $\mathbf{k}$, $\forall \mathbf{k}$, o que é uma contradição. Portanto

$$\sup_{\Omega} u \leq \mathbf{m} = \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Teorema 3.9 (Problema de Dirichlet) Dadas as funções g, f_i, ψ , satisfazendo $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$, $f_i/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ e $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, e as funções coeficientes a_{ij} e b_i satisfazendo as condições (3.2) e com $\omega \in A_2$. Então existe uma única $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução fraca do problema

$$(D3) \quad \begin{aligned} Lu &= g - \sum_{i=1}^n D_i f_i \\ u - \psi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Demonstração

Definindo $v = u - \psi$, temos que u é solução de (D3) se, e somente se, v é solução de um problema do tipo

$$(D4) \quad \begin{aligned} Lv &= \tilde{g} - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j \\ v &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} Lv &= L(u - \psi) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n D_j [a_{ij}(D_i u - D_i \psi)] - \sum_{i=1}^n b_i (D_i u - D_i \psi) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i u) - \sum_{i=1}^n b_i D_i u + \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i \psi) + \sum_{i=1}^n b_i D_i \psi \\ &= Lu + \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i \psi) + \sum_{i=1}^n b_i D_i \psi \\ &= g - \sum_{j=1}^n D_j f_j + \sum_{i,j=1}^n D_j (a_{ij} D_i \psi) + \sum_{i=1}^n b_i D_i \psi \\ &= \left(g + \sum_{i=1}^n b_i D_i \psi \right) - \sum_{j=1}^n D_j \left(f_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} D_i \psi \right) \\ &= \tilde{g} - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{g} = g + \sum_{i=1}^n b_i D_i \psi \quad \text{e} \quad \tilde{f}_j = f_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} D_i \psi.$$

Temos,

(i) $\tilde{g}/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$, pois $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{b_i D_i \psi}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{b_i}{\omega} \right)^2}_{\leq C_1} |D_i \psi|^2 \omega dx \\ &\leq C_1^2 \int_{\Omega} |D_i \psi|^2 \omega dx < \infty. \end{aligned}$$

(ii) $\tilde{f}_j/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$, pois $f_j/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ e além disso

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{a_{ij} D_i \psi}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{|a_{ij}|}{\omega} \right)^2 |D_i \psi|^2 \omega dx \\ &\leq C^2 \int_{\Omega} |D_i \psi|^2 \omega dx < \infty. \end{aligned}$$

Podemos então considerar o problema

$$\begin{aligned} (D4) \quad Lv &= \tilde{g} - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j \\ v &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Se existir solução v para o problema (D4), então $u = v + \psi$ será solução de (D3). Definimos a forma bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \times H_0^{1,2}(\Omega, \omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_1(v, \varphi) &= \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i v(x) D_j \varphi(x) dx - \int_{\Omega} b_i(x) \varphi(x) D_i v(x) dx \end{aligned}$$

e o funcional linear

$$\begin{aligned} F : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F(v) &= \int_{\Omega} (\tilde{f}_i(x) D_i v(x) + \tilde{g}(x) v(x)) dx. \end{aligned}$$

onde $\tilde{g}/\omega, \tilde{f}_j/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$. Temos que F é um funcional linear contínuo. De fato, usando as condições sobre as funções $\tilde{g}$ e $\tilde{f}_i$, ($i = 1, \dots, n$), e o Teorema 1.11 com

$k = 1$ e $p = 2$, temos

$$\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \int_{\Omega} |\tilde{f}_i| |D_i v| dx + \int_{\Omega} |\tilde{g}| |v| dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{|\tilde{f}_i|}{\omega} \right) \omega^{1/2} |D_i v| \omega^{1/2} + \int_{\Omega} \left(\frac{|\tilde{g}|}{\omega} \right) \omega^{1/2} |v| \omega^{1/2} dx \\
&\leq \left\| \frac{\tilde{f}_i}{\omega} \right\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_i v\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \left\| \frac{\tilde{g}}{\omega} \right\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
&\leq C_{\Omega} \left(\|\tilde{f}_i/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\tilde{g}/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \quad (\text{usando teo. 1.11}).
\end{aligned}$$

Portanto $|F(v)| \leq C \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}$.

Precisamos verificar que a forma bilinear $\mathcal{B}_1(v, \varphi)$ satisfaz as condições do teorema de Lax-Milgram. Temos,

$$\begin{aligned}
(1) |\mathcal{B}_1(v, \varphi)| &\leq \int_{\Omega} |a_{ij}| |D_i v| |D_j \varphi| dx + \int_{\Omega} |b_i| |D_i v| |\varphi| dx \quad (\text{usando (3.2)}) \\
&\leq \int_{\Omega} C \omega |D_i v| |D_j \varphi| dx + \int_{\Omega} C_1 \omega |D_i v| |\varphi| dx \\
&= C \int_{\Omega} |D_i v| \omega^{1/2} |D_j \varphi| \omega^{1/2} dx + C_1 \int_{\Omega} |D_i v| \omega^{1/2} |\varphi| \omega^{1/2} dx \\
&\leq C \left(\|D_i v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_j \varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|D_i v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \\
&\leq C \left(\|D_j \varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|D_i v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \quad (\text{usando o teo. 1.11}) \\
&\leq C \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{B}_1$ é limitada.

(2) Temos que $\mathcal{B}_1(v, \varphi)$ não é coerciva. Para provar que existe solução do problema (D4) consideremos para $\sigma \in \mathbb{R}$, o operador L_{σ} definido por

$$L_{\sigma} u = Lu + \sigma u \omega$$

e consideremos o problema

$$(D_{\sigma}) \begin{cases} L_{\sigma} u = \tilde{g} - \sum_{j=1}^n D_j \tilde{f}_j \\ u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega). \end{cases}$$

Dizemos que $u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução de (D_σ) se

$$\mathcal{B}_\sigma(u, \varphi) = \int_{\Omega} (\tilde{f}_i D_i \varphi + \tilde{g} \varphi) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

onde

$$\mathcal{B}_\sigma(u, \varphi) = \mathcal{B}_1(u, \varphi) + \sigma \int_{\Omega} u \varphi \omega dx.$$

Temos,

(a) $\mathcal{B}_\sigma$ é limitada. De fato, usando o Teorema 1.11 com $k = 1$ e $p = 2$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\sigma(u, \varphi)| &\leq |\mathcal{B}_1(u, \varphi)| + |\sigma| \int_{\Omega} |u| |\varphi| \omega dx \\ &\leq C \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} + |\sigma| \int_{\Omega} |u| \omega^{1/2} |\varphi| \omega^{1/2} dx \\ &\leq C \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} + |\sigma| \|u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\ &\leq (C + |\sigma|) \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}. \end{aligned}$$

(b) $\mathcal{B}_\sigma$ é coerciva para $\sigma > C_1^2/2\lambda$. De fato, usando as condições (3.2), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(u, u) &= \int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j u dx - \int_{\Omega} b_i u D_i u dx \\ &\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx - \int_{\Omega} \left(\frac{b_i}{\omega} \right) (D_i u) \omega^{1/2} u \omega^{1/2} dx \\ &\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx - C_1 \left(\int_{\Omega} |D_i u|^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u^2 \omega dx \right)^{1/2} \quad (\text{Des. de Young}) \\ &\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx - C_1 \left[\frac{1}{2} \left(\varepsilon^{-2} \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} u^2 \omega dx \right) \right] \\ &= \left(\lambda - \frac{C_1 \varepsilon^{-2}}{2} \right) \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx - \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} u^2 \omega dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\sigma(u, u) &= \mathcal{B}_1(u, u) + \sigma \int_{\Omega} u^2 \omega dx \\ &\geq \left(\lambda - \frac{C_1 \varepsilon^{-2}}{2} \right) \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx + \left(\sigma - \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 \omega dx. \end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{C_1}{2\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{2}$ e σ tal que $\sigma - \frac{C_1\varepsilon^2}{2} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\sigma(u, u) &\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx + \underbrace{\left(\sigma - \frac{C_1\varepsilon^2}{2} \right)}_{>0} \int_{\Omega} u^2 \omega dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 \omega dx \\ &= \frac{\lambda}{2} \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega)}^2.\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{B}_\sigma$ é limitada e coerciva (com $\sigma > C_1\varepsilon^2/2$). Logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe uma única $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que

$$\mathcal{B}_\sigma(v, \varphi) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Para resolver (D4) queremos garantir a existência de $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que

$$\mathcal{B}_1(v, \varphi) = F(\varphi).$$

Temos,

$$\mathcal{B}_\sigma(v, \varphi) = \mathcal{B}_1(v, \varphi) + \sigma \int_{\Omega} v \varphi \omega dx = F(\varphi).$$

Definindo

$$\begin{array}{ccc} J : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) & \longrightarrow & \left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \right)^* \\ u & \longmapsto & Ju \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}Ju &: H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (Ju)v &= \int_{\Omega} uv \omega dx.\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{array}{ccccc} H_0^{1,2}(\Omega, \omega) & \xrightarrow{J_2} & L^2(\Omega, \omega) & \xrightarrow{J_1} & (H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^* \\ u & \longmapsto & u & \longmapsto & J_1 u \end{array}$$

com $J = J_1 \circ J_2$ compacta, pois J_1 é contínua e J_2 é compacta (Teorema 1.13).
Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(v, \varphi) &= \mathcal{B}_\sigma(v, \varphi) - \sigma \int_{\Omega} v \varphi \omega dx \\ &= \mathcal{B}_\sigma(v, \varphi) - \sigma (Jv) \varphi.\end{aligned}$$

Definindo agora

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : H_0^{1,2}(\Omega, \omega) &\longrightarrow (H_0^{1,2}(\Omega, \omega))^* \\ (\mathcal{M}v)(\varphi) &= \mathcal{B}_\sigma(v, \varphi).\end{aligned}$$

Temos que $\mathcal{M}$ é linear, bijetora (pelo teorema de Lax-Milgram) e contínua. Podemos escrever

$$\mathcal{B}_1(v, \varphi) = (\mathcal{M}v)\varphi - \sigma(Jv)\varphi.$$

Queremos provar que existe $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ tal que

$$\mathcal{B}_1(v, \varphi) = (\mathcal{M}v)\varphi - \sigma(Jv)\varphi = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

ou seja, que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}v - \sigma Jv &= F \\ v - \sigma \mathcal{M}^{-1}Jv &= \mathcal{M}^{-1}F \\ (I - K)v &= \mathcal{M}^{-1}F\end{aligned}$$

onde $K = \sigma \mathcal{M}^{-1}J$ é um operador compacto.

Pelo Princípio do Máximo, $(I - K)v = 0$ só tem solução trivial em $H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$ ($v = 0$), pois

$$(I - K)v = 0 \text{ se, e somente se, } \mathcal{B}_1(v, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

ou seja, $Lv = 0$, com $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$. Portanto

$$0 = \inf_{\partial\Omega} v^- \leq \inf_{\Omega} v \leq \sup_{\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} v^+ = 0.$$

Usando a alternativa de Fredholm (Teorema 3.6), temos que

$$(I - K)v = \mathcal{M}^{-1}F$$

possui uma única solução $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, que é a solução do problema (D4).

Logo $u = v + \psi$ é a única solução do problema (D3).

3.4 - Regularidade Interior

No próximo teorema, estudamos a regularidade interior da solução da equação $Lu = g$ e para isso vamos utilizar o Teorema 2.8.

Teorema 3.10 (regularidade interior) Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução fraca da equação $Lu = g$ com as seguintes condições sendo verificadas

- (i) $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$;
- (ii) ω é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada;
- (iii) Os coeficientes a_{ij} e b_i satisfazem as condições (3.2);
- (iv) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_2 \omega(x)$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$, $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, sendo a constante C_2 independente de Ω' e h .

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right)$$

onde $C = C(\lambda, \Lambda, n, C_1, C_2, d')$, $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração

Como u é solução da equação $Lu = g$, então pela definição 3.3

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j v dx - \int_{\Omega} b_i v D_i u dx = \int_{\Omega} g v dx, \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Logo,

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j v dx = \int_{\Omega} (b_i D_i u + g) v dx.$$

Considerando $h(x) = b_i(x) D_i u(x) + g(x)$. Temos que $h/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$, pois $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{b_i D_i u}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{b_i}{\omega} \right)^2 |D_i u|^2 \omega dx \\ &\leq C_1^2 \int_{\Omega} |D_i u|^2 \omega dx \\ &\leq C_1^2 \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|h/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

Estamos portanto na situação

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) dx = \int_{\Omega} h(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$$

com $h/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$.

Pelo Teorema 2.8, temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega)} &\leq \tilde{C} \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|h/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right). \end{aligned}$$

3.5 - Regularidade Global

Para estender o resultado de regularidade interior para todo Ω , ou seja, para demonstrar a regularidade global, precisamos de algumas condições sobre a fronteira $\partial\Omega$. Para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 3.11 Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio C^k , $k \geq 1$, com fronteira localmente quase-conforme, se para cada $x_o \in \partial\Omega$ existe uma aplicação $\varphi \in C^k$ definida em $B(x_o; R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_o| < R\}$, que é quase-conforme e satisfaz as seguintes condições

- (a) $\varphi(B(x_o; R)) = D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$;
- (b) $\varphi(B(x_o; R) \cap \Omega) = D^+ = \{x \in D : x_n > 0\}$;
- (c) $\varphi(B(x_o; R) \cap \partial\Omega) = \{x \in D : x_n = 0\}$;
- (d) φ^{-1} é de classe C^k .

Dado um peso $\omega \in A_p$, precisamos saber sob que condições na aplicação $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ temos que $\omega \circ h \in A_p$. Esse fato é crucial na demonstração da regularidade global da solução da equação $Lu = g$. Como uma resposta a este problema podemos citar os trabalhos de R. Johnson ([J]) e H.M. Riemann ([R]), que demonstraram os seguintes resultados:

“ $T_h\omega = \omega \circ h \in A_p$ se, e somente se, $\log(|Jh|) \in B.M.O.$ ” ([J])

“ $\log(|Jh|) \in B.M.O.$, se h é quase – conforme” ([R])

onde Jh é o jacobiano da aplicação h .

Portanto, se $\omega \in A_p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação quase-conforme, temos que $\omega \circ h \in A_p$.

Na verdade precisaremos de algo mais restritivo. Dado um peso ω uniformemente A_p em cada coordenada e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação quase-conforme, queremos que o novo peso $\tilde{\omega}(x) = \omega(h(x))$ seja uniformemente A_p em cada coordenada.

Para ilustrar esta situação podemos dar o seguinte exemplo. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ h(x, y) &= (h_1(x), h_2(y)) \end{aligned}$$

que é quase-conforme se existir uma constante $K > 0$ tal que

$$[h'_1(x)]^2 + [h'_2(y)]^2 \leq K h'_1(x) h'_2(y).$$

Pelo exemplo 2.4, um peso da forma $\omega(x, y) = \omega_1(x)\omega_2(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uniformemente A_p em cada coordenada se $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R})$. Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(x, y) &= \omega(h(x, y)) \\ &= \omega(h_1(x), h_2(y)) \\ &= \omega_1(h_1(x))\omega_2(h_2(y)). \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{\omega}$ é uniformemente A_p em cada coordenada se os pesos $\omega_1(h_1(x))$ e $\omega_2(h_2(y))$ forem pesos $A_p(\mathbb{R})$.

Usando o trabalho de Johnson e Neugebauer que demonstraram o seguinte resultado “se $\omega \in A_p(\mathbb{R})$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo então $\omega(h(x)) \in A_p(\mathbb{R})$ se, e somente se, $h' \in \bigcap A_p$, ($p > 1$)” (teorema 2.7, [JN]), temos que $\omega_1(h_1(x))$ e $\omega_2(h_2(y))$ são $A_p(\mathbb{R})$ se $h'_1, h'_2 \in \bigcap A_p$, ($p > 1$).

Um exemplo simples de uma aplicação quase-conforme satisfazendo estas propriedades pode ser dado por $h(x, y) = (h_1(x), h_2(y)) = (2x, 3y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos que $h'_1(x) = 2$ e $h'_2(y) = 3$ pertencem a $\bigcap A_p$ ($p > 1$).

Mas não é sempre verdadeiro que dado um peso ω uniformemente A_p em cada coordenada e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação quase-conforme, tenhamos necessariamente que o peso $\omega(h(x))$ seja uniformemente A_p em cada coordenada. Por

exemplo, seja $\omega(x, y) = |x|^{1/2}|y|^{1/2}$ que é um peso uniformemente A_2 em cada coordenada (veja exemplo 2.4) e a aplicação quase-conforme

$$h(x, y) = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2)).$$

O peso $\tilde{\omega}(x, y) = \omega(h(x, y)) = |x|^{1/2}|y|^{1/2}/(x^2 + y^2)$ não é uniformemente A_2 em cada coordenada. Mas considerando o peso $v(x, y) = |x|^{1/2}|y|^{-1/2}$, temos que $v(h(x, y)) = |x|^{1/2}|y|^{-1/2}$ é uniformemente A_2 em cada coordenada.

Como ainda não temos uma caracterização geral para o problema, consideraremos domínios Ω satisfazendo a seguinte definição.

Definição 3.12 Um subconjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio C^k , $k \geq 1$, com ω -fronteira localmente quase-conforme se para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existir uma aplicação $\varphi \in C^k(B(x_0; R))$ quase-conforme satisfazendo

- (i) As condições da definição 3.11;
- (ii) $\omega \circ \varphi$ é uniformemente A_p em cada coordenada se o peso ω é uniformemente A_p em cada coordenada.

Com a definição 3.12 e os resultados acima citados, podemos provar o seguinte teorema, que é o objetivo principal deste capítulo.

Teorema 3.13 Com as mesmas condições do Teorema 3.10 e com as seguintes hipóteses adicionais:

- (a) existem $D_k a_{ij}$ q.s., $1 \leq k \leq n$ (e então necessariamente $|D_k a_{ij}(x)| \leq C_2 \omega(x)$ em qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$);
- (b) Ω é um conjunto de classe C^2 com ω -fronteira quase-conforme.

Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ é solução do problema

$$\begin{aligned} Lu &= g \\ u - \varphi &\in H_0^{1,2}(\Omega, \omega) \end{aligned}$$

com $\varphi \in H^{2,2}(\Omega, \omega)$ e $g/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$. Então $u \in H^{2,2}(\Omega, \omega)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\varphi\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \right).$$

Demonstração

Podemos assumir que $\varphi = 0$ e portanto que $u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$. Como Ω é de classe C^2 com ω -fronteira quase-conforme, então para qualquer $x_o \in \partial\Omega$, existe uma bola $B = B(x_o)$ e uma aplicação $\psi \in C^2$ quase-conforme satisfazendo as condições da definição 3.12, isto é, $B(x_o; R) \subset \subset B$, $B^+ = B(x_o; R) \cap \Omega$, $D = \psi(B(x_o; R))$ e $D^+ = \psi(B^+)$.

Seja $y = \psi(x) = (y_1, \dots, y_n) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$ e defina o operador $\tilde{L}v(y) = Lv(\psi^{-1}(x))$. Observe que dado $u \in H^{1,2}(B^+, \omega)$, temos que $v = u \circ \psi^{-1} \in H^{1,2}(D^+, \omega)$. Também é fácil ver que o operador $\tilde{L}$ é do mesmo tipo que L . De fato, usando a regra da cadeia, obtemos

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (v \circ \psi)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v \circ \psi)(x) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

Pela definição de $\tilde{L}$ e usando (a) e (b), temos

$$\begin{aligned} \tilde{L}v(y) &= L(v \circ \psi)(x) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) D_{ij}(v(y)) + D_i a_{ij}(x) D_j(v(y)) \right) - \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j(v(y)) \\ &= - \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) D_{kl}v(y) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i} + D_i a_{ij}(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) D_k v(y) \\ &= - \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) D_{kl}v(y) - \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k(y) D_k v(y) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kl}(y) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \\ \tilde{b}_k(y) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i} + D_i a_{ij}(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \end{aligned}$$

e definindo $\tilde{\omega}(y) = \omega(\psi^{-1}(y))$ temos que $\tilde{\omega} \in A_2$ (por [J] e [R], pois ψ^{-1} também é quase-conforme. [FKS] pag.108 ou [R]), e por hipótese o peso $\tilde{\omega}(y)$ é uniformemente A_2 em cada coordenada.

Usando que $\psi \in C^2$ e as hipóteses sobre os coeficientes a_{ij} e b_i , obtemos

(1) $|\Delta_p^h \tilde{a}_{kl}(y)| \leq \tilde{C}_2 \tilde{\omega}(y)$, para todo $1 \leq p \leq n$. De fato, usando o teorema do valor médio temos que

$$\left| \Delta_p^h \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) \right| \leq C_\psi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\Delta_p^h \tilde{a}_{kl}(y)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left| \Delta_p^h \left(a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) (x) \right| \quad (\text{usando o lema 2.2(a)}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left| \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) (x + h e_p) \Delta_p^h a_{ij}(\psi^{-1}(y)) + a_{ij}(\psi^{-1}(y)) \Delta_p^h \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) (x) \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(C_\psi |\Delta_p^h a_{ij}(\psi^{-1}(y))| + C_\psi |a_{ij}(\psi^{-1}(y))| \right) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n C_\psi \left(C_2 \omega(\psi^{-1}(y)) + C \omega(\psi^{-1}(y)) \right) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n C_\psi (C_2 + C) \right) \omega(\psi^{-1}(y)) \\ &= \tilde{C}_2 \omega(\psi^{-1}(y)) \\ &= \tilde{C}_2 \tilde{\omega}(y). \end{aligned}$$

(2) $|\tilde{b}_k(y)| \leq C_1 \tilde{\omega}(y)$. De fato,

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_k(y)| &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(\psi^{-1}(y))| C_\psi + |D_i a_{ij}(\psi^{-1}(y))| C_\psi + \sum_{j=1}^n |b_j(\psi^{-1}(y))| C_\psi \\ &\leq C_\psi \left(C \omega(\psi^{-1}(y)) + C_2 \omega(\psi^{-1}(y)) + C_1 \omega(\psi^{-1}(y)) \right) \\ &= C_\psi (C + C_2 + C_1) \omega(\psi^{-1}(y)) \\ &= \tilde{C}_1 \tilde{\omega}(y). \end{aligned}$$

(3) Seja $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{kl}(y)) = T A(x) T^t$, onde $T = \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$. A matriz $\tilde{A}(y)$ verifica as seguintes condições

(i) Como $\overline{B(x_0; R)}$ é compacto e T é inversível, existe uma constante c independente de x tal que $\|T^t(x)\xi\| \geq c\|\xi\|$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}\xi, \xi \rangle &= \langle T A T^t \xi, \xi \rangle \\ &= \langle A T^t \xi, T^t \xi \rangle \\ &\geq \lambda \|T^t \xi\|^2 \omega(x) \\ &\geq \lambda c^2 \|\xi\|^2 \omega(\psi^{-1}(y)) \\ &= \tilde{\lambda} \|\xi\|^2 \tilde{\omega}(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \langle \tilde{A}\xi, \xi \rangle &= \langle A T^t \xi, T^t \xi \rangle \\ &\leq \Lambda \|T^t \xi\|^2 \omega(x) \\ &\leq \Lambda \|T^t\|^2 \|\xi\|^2 \omega(\psi^{-1}(y)) \\ &= \tilde{\Lambda} \|\xi\|^2 \tilde{\omega}(y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\lambda} |\xi|^2 \tilde{\omega}(y) \leq \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) \xi_k \xi_l \leq \tilde{\Lambda} |\xi|^2 \tilde{\omega}(y).$$

Além disso, se $u \in H_0^{1,2}(B^+, \omega)$ é solução de $Lu = g$, então $v = u \circ \psi^{-1} \in H_0^{1,2}(D^+, \omega)$ satisfaz

$$\eta v \in H_0^{1,2}(D^+, \omega), \quad \forall \eta \in C_0^\infty(D).$$

Podemos supor que $u \in H_0^{1,2}(D^+, \omega)$ satisfaz a equação $Lu = g$ em D^+ . De modo análogo a demonstração do Teorema 2.8, tomamos $\eta \in C_0^\infty(D)$ satisfazendo $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $\Omega' \subset \subset D$, $\Omega' = \psi(B_\rho(x_0) \cap \Omega)$ onde $\rho < R$ e $\|\eta\|_\infty \leq 2/d'$, $d' = \text{dist}(\Omega', \partial D)$. Então para $0 < |h| < \text{dist}(\text{supp } \eta, \partial D)$ e $1 \leq k \leq (n-1)$, temos

$$\eta^2 \Delta_k^h u \in H_0^{1,2}(D^+, \omega).$$

Seguindo os passos da demonstração do Teorema 2.8 podemos concluir que

$$D_{ij} u \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega), \quad \rho < R$$

com $(i, j) \neq (n, n)$, e também

$$\|D_{ij}u\|_{L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega))} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(D^+, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(D^+, \omega)} \right). \quad (3.3)$$

Vamos estimar a segunda derivada $D_{nn}u$. Temos,

$$\begin{aligned} g = Lu &= - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}D_iu) - \sum_{i=1}^n b_i D_iu \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left(D_j a_{ij} D_iu + a_{ij} D_{ij}u \right) - \sum_{i=1}^n b_i D_iu \end{aligned}$$

e portanto,

$$a_{nn}D_{nn}u = -g - \sum_{i,j=1}^n D_j a_{ij} D_iu - \sum_{i=1}^n b_i D_iu - \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ (i,j) \neq (n,n)}} a_{ij} D_{ij}u.$$

Logo,

$$\frac{a_{nn}}{\omega}(D_{nn}u) = \frac{-g}{\omega} - \sum_{i,j=1}^n \frac{D_j a_{ij}}{\omega} D_iu - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\omega} D_iu - \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ (i,j) \neq (n,n)}} \frac{a_{ij}}{\omega} D_{ij}u.$$

Usando agora as hipóteses sobre os coeficientes e sobre a função g , temos

- (1) $g/\omega \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$;
- (2) $(a_{ij}D_{ij}u)/\omega \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$ (com $(i, j) \neq (n, n)$). De fato, para $(i, j) \neq (n, n)$

$$\begin{aligned} \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{|a_{ij}D_{ij}u|}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{|a_{ij}|}{\omega} \right)^2 |D_{ij}u|^2 \omega dx \\ &\leq C \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} |D_{ij}u|^2 \omega dx < \infty \quad (\text{usando (3.3)}). \end{aligned}$$

- (3) $(D_j a_{ij} D_iu)/\omega \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{|D_j a_{ij} D_i u|}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{|D_j a_{ij}|}{\omega} \right)^2 |D_i u|^2 \omega dx \\ &\leq C_2 \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} |D_i u|^2 \omega dx < \infty.\end{aligned}$$

(4) $(b_i D_i u)/\omega \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{|b_i D_i u|}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} \left(\frac{b_i}{\omega} \right)^2 |D_i u|^2 \omega dx \\ &\leq C_1 \int_{\psi(B_\rho \cap \Omega)} |D_i u|^2 \omega dx < \infty.\end{aligned}$$

Portanto $(a_{nn}/\omega) D_{nn} u \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$ e como $|a_{nn}/\omega| \geq \lambda$, temos que $D_{nn} u \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)$ e

$$\begin{aligned}\lambda \|D_{nn} u\|_{L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)} &\leq \|g/\omega\|_{L_\omega^2} + C_2 \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L_\omega^2} + \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ (i, j) \neq (n, n)}} C_1 \|D_{ij} u\|_{L_\omega^2} + \sum_{i=1}^n C \|D_i u\|_{L_\omega^2} \quad (\text{usando (3.3)}) \\ &\leq \|g/\omega\|_{L_\omega^2} + C_2 \|D_j u\|_{L_\omega^2} + \\ &\quad + C_1 \left(\|g/\omega\|_{L_\omega^2} + \|u\|_{H_0^{1,2}(D^+, \omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|g/\omega\|_{L^2(D^+, \omega)} + \|u\|_{H_0^{1,2}(D^+, \omega)} \right).\end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\|D_{nn} u\|_{L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega), \omega)} \leq \frac{C}{\lambda} \left(\|u\|_{H_0^{1,2}(D^+, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(D^+, \omega)} \right).$$

Voltando para o domínio original Ω com a aplicação $\psi^{-1} \in C^2$, obtemos $u \in H_0^{2,2}(B_\rho(x_0) \cap \Omega, \omega)$ ($\forall \rho, 0 < \rho < R$).

Como a fronteira é quase-conforme, podemos escolher um número finito de pontos $x_{(i)} \in \partial\Omega$ tal que $\mathcal{O}_i = B(x_{(i)}, \rho)$ formem uma cobertura por abertos para $\partial\Omega$. Por hipótese existem φ_i tais que

$$\varphi_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow D, \quad \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap D) = D^+$$

onde cada φ_i satisfaz as condições da definição 3.12. Podemos supor que $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ seja uma cobertura para Ω .

Seja ρ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, tal que

$$\text{supp}(\rho_i) \subset \mathcal{O}_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k \rho_i(x) = 1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Como $u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega)$, temos que

$$\text{supp}(\rho_i u) \subset \mathcal{O}_i \subset \subset \Omega.$$

Se $g_i = L(\rho_i u)$, temos (por exemplo, considerando $i = 1$),

$$\begin{aligned} g_1 &= L(\rho_1 u) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}(\rho_1 u) + D_i a_{ij} D_j(\rho u) + \sum_{j=1}^n b_j D_j(\rho_1 u) \\ &= \rho_1 Lu + uL\rho_1 + a_{ij} D_i \rho_1 D_j u + a_{ij} D_i u D_j \rho_1 \\ &= \rho_1 g + uL\rho_1 + a_{ij} D_i \rho_1 D_j u + a_{ij} D_i u D_j \rho_1 \end{aligned}$$

Usando que ρ_1 é de classe C^2 (em $\mathcal{O}_1$) e também as hipóteses sobre os coeficientes a_{ij} e b_j , temos que

$$(a) \quad \frac{\rho_1 g}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$$

$$(b) \quad \frac{uL\rho_1}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$$

$$(c) \quad \frac{a_{ij} D_i \rho_1 D_j u}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$$

Portanto estamos na situação $L(\rho_1 u) = g_1$, com $g_1/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|\rho_1 u\|_{H^{2,2}(\mathcal{O}_1, \omega)} &= \|\rho_1 u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq C \left(\|\rho_1 u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g_1/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \\
&\leq C \left[\|\rho_1\|_{\infty} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \tilde{C} \left(\|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} \right) \right] \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $g_i/\omega \in L^2(\Omega, \omega)$ ($1 \leq i \leq k$) e

$$\|g_i/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right)$$

e também

$$\|\rho_i u\|_{H^{2,2}(\mathcal{O}_i, \omega)} = \|\rho_i u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} &= \left\| \sum_{i=1}^k \rho_i u \right\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^k \|\rho_i u\|_{H^{2,2}(\Omega, \omega)} \\
&\leq kC \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega)} + \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right). \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÃO

4.1 - Introdução

O objetivo deste capítulo é provar que a solução da equação elíptica degenerada

$$Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j f_j$$

onde $Lu = -\sum D_j(a_{ij}(x)D_i u(x))$ e os coeficientes a_{ij} satisfazem a condição (1.2) com $\omega = v$, pode ser aproximada por uma sequência de soluções de equações elípticas não-degeneradas. Para isso, demonstraremos inicialmente um lema de aproximação de pesos A_p ($p \geq 1$) por pesos que são limitados superiormente e inferiormente e cujas “constantes A_p ” dependem somente da “constante A_p ” do peso ω .

A demonstração que faremos do lema de aproximação é uma adaptação do trabalho de J.C. Fernandes e B. Franchi ([FF]), aonde foi apresentado uma aproximação para Equações Parabólicas Degeneradas. Mesmo assim, achamos conveniente apresentarmos uma prova completa do lema de aproximação no nosso contexto, pois este resultado será estendido para uma classe de Operadores Elípticos Degenerados com pesos diferentes ($\omega \neq v$) (lema 5.20) e a sua demonstração será baseada na prova feita neste capítulo.

Vamos precisar para esta demonstração da definição de cubo diádico e do teorema de fatorização de Jones, que enunciamos a seguir.

Definição 4.1 Para $k \in \mathbb{Z}$, consideremos o conjunto

$$\Gamma_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = p2^{-k}, \text{ com } p \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n\}.$$

Seja D_k a coleção de todos os cubos determinados por Γ_k , isto é, todos os cubos de lado 2^{-k} e com vértices em Γ_k .

Os cubos pertencentes a $D = \bigcup_{-\infty}^{\infty} D_k$ são chamados *cubos diádicos*.

Observe que, se $Q_1, Q_2 \in D$ e $|Q_1| \leq |Q_2|$, então ou $Q_1 \subset Q_2$ ou $\text{int} Q_1 \cap \text{int} Q_2 = \emptyset$.

Teorema 4.2 (Teorema de Fatorização de Jones) Para $1 < p < \infty$. Um peso $\omega \in A_p$ se, e somente se, existem pesos $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ tal que $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$.

Demonstração Veja corolário 5.3, pg.436 de [GCR].

4.2 - O Lema de Aproximação

Lema 4.3 Sejam $\alpha, \beta > 1$ dados e $\omega \in A_p$, $p \geq 1$, com constante A_p “ $C(\omega, p)$ ” e a_{ij} funções mensuráveis satisfazendo as condições

$$\lambda \omega(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \omega(x) |\xi|^2 \quad (4.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C \omega(x) \quad (4.2)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e quase todo $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (aberto limitado). Então existem pesos $\omega_{\alpha\beta} > 0$ q.s. e funções mensuráveis $a_{ij}^{\alpha\beta}$ satisfazendo as seguintes condições

- (i) $c_1 \frac{1}{\beta} \leq \omega_{\alpha\beta} \leq c_2 \alpha$ em Ω , onde c_1 e c_2 dependem somente de ω e Ω .
- (ii) Existem pesos $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ satisfazendo $\tilde{\omega}_1 \leq \omega_{\alpha\beta} \leq \tilde{\omega}_2$, onde $\tilde{\omega}_i \in A_p$ e $C(\tilde{\omega}_i, p)$ depende somente de $C(\omega, p)$ ($i = 1, 2$).
- (iii) $\omega_{\alpha\beta} \in A_p$, com constante $C(\omega_{\alpha\beta}, p)$ dependendo somente de $C(\omega, p)$ uniformemente em α e β .
- (iv) Existe um conjunto fechado $F_{\alpha\beta}$ tal que $\omega_{\alpha\beta} \equiv \omega$ em $F_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta} \sim \tilde{\omega}_1 \sim \tilde{\omega}_2$ em $F_{\alpha\beta}$ (com constante de equivalência dependendo de α e β).

Além disso, $F_{\alpha\beta} \subset F_{\alpha'\beta'}$, se $\alpha \leq \alpha'$, $\beta \leq \beta'$, e o complementar de $\bigcup_{\alpha, \beta \geq 1} F_{\alpha\beta}$ tem medida nula.

(v) $\omega_{\alpha\beta} \rightarrow \omega$ q.s. em $\mathbb{R}^n$ com $\alpha, \beta \rightarrow \infty$.

(vi) As funções $a_{ij}^{\alpha\beta}$ satisfazem as condições

$$\lambda \omega_{\alpha\beta}(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \omega_{\alpha\beta}(x) |\xi|^2$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| \leq C \omega_{\alpha\beta}(x)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e quase todo $x \in \Omega$, e com a constante C independente de α, β .

Demonstração

CASO 1 : Para $\omega \in A_1$. Podemos supor que $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (pois só estamos interessados em aproximar em Ω).

Para cada $\alpha > 1$, definimos

$$U_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : M(\omega)(x) > \alpha\}$$

onde $M(\omega)$ é a função maximal de Hardy-Littlewood para ω .

Pela decomposição de Calderon-Zygmund (teorema 1.2. pag 135. [GCR]), existe uma família de cubos $\{Q_j^\alpha\}$ consistindo de cubos diádicos maximais, com interiores disjuntos, satisfazendo as condições

$$(a) \quad U_\alpha^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^\alpha$$

$$(b) \quad \alpha < \frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega(x) dx \leq 2^n \alpha$$

$$(c) \quad \omega(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in F_\alpha^+ = (U_\alpha^+)^c$$

$$(d) \quad |U_\alpha^+| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx.$$

Além disso, temos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M(\omega)(x) > 4^n \alpha\} \subset \bigcup_j 3Q_j^\alpha \quad (4.3)$$

([GCR], teorema 1.12, pag.140).

Note que, se $\alpha < \beta$, então $U_\beta^+ \subset U_\alpha^+$.

Definindo os pesos ω_α por

$$\omega_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_k^\alpha|} \int_{Q_k^\alpha} \omega(y) dy \right) \chi_{Q_k^\alpha}(x) + \omega(x) \chi_{F_\alpha^+}(x).$$

Vamos mostrar que

(I) $\omega_\alpha \in A_1$ e $C(\omega_\alpha, 1)$ depende somente de $C(\omega, 1)$.

(II) $\omega_\alpha \rightarrow \omega$ q.s. em $\mathbb{R}^n$ quando $\alpha \rightarrow \infty$.

(III) $\min\{1, \omega\} \in A_1$ e $C(\min\{1, \omega\}, 1)$ depende somente de $C(\omega, 1)$. Além disso, temos também que $\min\{1, \omega\}(x) \leq \omega_\alpha(x) \leq C\omega(x)$, onde a constante “ C ” depende somente de $C(\omega, 1)$.

(IV) $2^n \alpha \geq \omega_\alpha(x) \geq C = \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \min\{1, \omega\}(y) dy$, $x \in \Omega$ e Q_0 é um cubo fixado contendo Ω ($\Omega \subset Q_0$).

Notemos primeiro que, se $v \in L^1_{\text{loc}}$ é uma função peso tal que para todo cubo diádico Q temos $v(3Q) \leq c_o v(Q)$, então podemos restringir nosso teste da condição A_1 somente para cubos diádicos. De fato,

Denotando por $C^*(v, 1)$ a “ constante A_1 para cubos diádicos ”, se $f \in L^1_v$ e $\{C_j^t\}$ é a decomposição de Calderon-Zygmund para f , usando (4.2) temos

$$\begin{aligned} v(\{x : M(f)(x) > 4^n t\}) &\leq \sum_j v(3C_j^t) \\ &\leq c_o \sum_j v(C_j^t) \\ &\leq c_o C^*(v, 1) \sum_j |C_j^t| \text{ess inf}_{C_j^t} v \\ &\leq c_o C^*(v, 1) \frac{1}{t} \sum_j \int_{C_j^t} |f(x)| v(x) dx \end{aligned}$$

e portanto $v \in A_1$ por [GCR], teorema 2.1 (pag. 395) e $C(v, 1) = c_o C^*(v, 1)$.

Vamos provar, preliminarmente, que

$$\omega_\alpha(3Q) \leq c_o \omega_\alpha(Q)$$

para todo cubo diádico Q e todo $\alpha > 1$, onde c_o depende somente de n e $C(\omega, 1)$.

Seja Q um cubo diádico. Podemos ter ou $|Q \cap U_\alpha^+| < \frac{1}{2}|Q|$ ou $|Q \cap U_\alpha^+| \geq \frac{1}{2}|Q|$.

Primeiro, vamos supor que $|Q \cap U_\alpha^+| < \frac{1}{2}|Q|$. Vamos mostrar posteriormente, em (III), que $\omega_\alpha \leq \max\{1, C(\omega, 1)\}\omega = c_1\omega$. Usando este fato, temos

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(3Q) &\leq c_1 \omega(3Q) \\
&= c_1 \frac{|3Q|}{|3Q|} \int_{3Q} \omega(x) dx \\
&= 3^n c_1 |Q| \frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} \omega(x) dx \quad (\text{usando que } \omega \in A_1) \\
&\leq c_1 C(\omega, 1) 3^n |Q| \operatorname{ess\,inf}_{3Q} \omega \\
&\leq c_1 C(\omega, 1) 3^n |Q| \operatorname{ess\,inf}_{Q \cap F_\alpha^+} \omega \\
&= c_1 C(\omega, 1) 3^n \frac{|Q|}{|Q \cap F_\alpha^+|} |Q \cap F_\alpha^+| \operatorname{ess\,inf}_{Q \cap F_\alpha^+} \omega \\
&\leq 2c_1 C(\omega, 1) 3^n |Q \cap F_\alpha^+| \operatorname{ess\,inf}_{Q \cap F_\alpha^+} \omega \\
&\leq 2c_1 C(\omega, 1) 3^n \int_{Q \cap F_\alpha^+} \omega(x) dx \\
&= 2c_1 C(\omega, 1) 3^n \int_{Q \cap F_\alpha^+} \omega_\alpha(x) dx, \quad (\text{pois } \omega_\alpha \equiv \omega \text{ em } F_\alpha^+).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(3Q) &\leq 2c_1 C(\omega, 1) 3^n \int_{Q \cap F_\alpha^+} \omega_\alpha(x) dx \\
&\leq 2c_1 C(\omega, 1) 3^n \omega(Q) \\
&= c_o \omega(Q).
\end{aligned}$$

Vamos supor agora $|Q \cap U_\alpha^+| \geq \frac{1}{2}|Q|$. Então ou $Q \subset Q_{j_o}^\alpha$ para algum j_o (que neste caso é único) ou $Q_j^\alpha \subset Q$ para $j \in \mathcal{J}$ (um conjunto de índices). Pela definição de ω_α , segue de (b) e (c) que $\omega_\alpha(x) \leq 2^n \alpha$ q.s..

Portanto, se $Q \subset Q_{j_o}^\alpha$ temos

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(3Q) &= \int_{3Q} \omega_\alpha(x) dx \leq |3Q| 2^n \alpha \\
&= 3^n 2^n \alpha |Q| \\
&\leq 3^n 2^n |Q| \frac{1}{|Q_{j_o}^\alpha|} \int_{Q_{j_o}^\alpha} \omega(x) dx \quad (\text{por (b)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6^n \int_Q \omega_\alpha(x) dx \\
&= 6^n \omega_\alpha(Q)
\end{aligned}$$

pois em $Q \subset Q_{j_o}^\alpha$, pela definição, $\omega_\alpha = \frac{1}{|Q_{j_o}^\alpha|} \int_{Q_{j_o}^\alpha} \omega(x) dx$.

Por outro lado, se $Q_j^\alpha \subset Q$, obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(3Q) &= \int_{3Q} \omega_\alpha(x) dx \\
&\leq 2^n \alpha |3Q| \\
&= 2^n 3^n \alpha |Q| \\
&\leq 6^n 2 |Q \cap U_\alpha^+| \alpha \\
&= 2 \cdot 6^n \int_{Q \cap U_\alpha^+} \alpha dx \\
&= 2 \cdot 6^n \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{Q_j^\alpha} \alpha dx \\
&\leq 2 \cdot 6^n \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{Q_j^\alpha} \omega_\alpha(x) dx \\
&\leq 2 \cdot 6^n \int_{\cup Q_j^\alpha} \omega_\alpha(x) dx \\
&\leq 2 \cdot 6^n \int_Q \omega_\alpha(x) dx \\
&= 2 \cdot 6^n \omega_\alpha(Q).
\end{aligned}$$

Portanto $\omega_\alpha(3Q) \leq c_o \omega_\alpha(Q)$, $\forall Q$ cubo diádico.

Podemos então restringir o teste da condição A_1 somente sobre cubos diádicos.

PROVA de (I)

Seja Q um cubo diádico fixado, então um dos 3 casos pode ocorrer:

$$(I1) \quad Q \cap Q_j^\alpha = \emptyset, \quad \forall j;$$

$$(I2) \quad Q \subset Q_j^\alpha \text{ para um único } j;$$

$$(I3) \quad Q_j^\alpha \subset Q \text{ para algum } j \in \mathcal{J}.$$

No caso (I1), $Q \subset F_\alpha^+$ e portanto $\omega_\alpha \equiv \omega$ em Q .

No caso (I2), temos

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(Q) &= \int_Q \omega_\alpha(x) dx \\ &= |Q| \left(\frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega dx \right) \\ &= |Q| \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} \omega_\alpha(x)\end{aligned}$$

pois, pela definição, $\omega_\alpha = \frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega(x) dx$ em Q_j^α .

Finalmente, no caso (I3), temos

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(Q) &= \int_Q \omega_\alpha(x) dx \\ &= \int_{Q \cap U_\alpha^+} \omega_\alpha(x) dx + \int_{Q \cap F_\alpha^+} \omega_\alpha(x) dx \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{Q_j^\alpha} \omega_\alpha(x) dx + \omega_\alpha(Q \cap F_\alpha^+) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \left(\frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega(x) dx \right) |Q_j^\alpha| + \omega(Q \cap F_\alpha^+) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{Q \cap Q_j^\alpha} \omega(x) dx + \omega(Q \cap F_\alpha^+) \\ &\leq \omega(Q) \\ &\leq C(\omega, 1) |Q| \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q} \omega(y).\end{aligned}$$

Por outro lado, note que se $y \in U_\alpha^+$, por definição temos $\omega_\alpha(y) > \alpha$. Assim se $y \in Q \cap U_\alpha^+$ e Q_k^α é um cubo contido em Q , temos

$$\operatorname{ess\,inf}_Q \omega \leq \operatorname{ess\,inf}_{Q_k^\alpha} \omega \leq \frac{1}{|Q_k^\alpha|} \int_{Q_k^\alpha} \omega(z) dz \leq 2^n \alpha < 2^n \omega_\alpha(y).$$

Além disso, se $y \in Q \cap F_\alpha^+$, então $\omega_\alpha(y) = \omega(y) \geq \operatorname{ess\,inf}_Q \omega$.

Logo, $\text{ess inf}_Q \omega \leq 2^n \text{ess inf}_Q \omega_\alpha(y)$.

Portanto, em ambos os casos,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(Q) &\leq C(\omega, 1)|Q| \text{ess inf}_{y \in Q} \omega(y) \\ &\leq 2^n C(\omega, 1)|Q| \text{ess inf}_{y \in Q} \omega_\alpha(y) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_\alpha(x) dx \leq 2^n C(\omega, 1) \text{ess inf}_{y \in Q} \omega_\alpha(y).$$

Por conseguinte, em (I1), (I2) e (I3) temos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_\alpha(x) dx \sim \text{ess inf}_Q \omega_\alpha$$

ou seja, $\omega_\alpha \in A_1$ e (I) está demonstrado.

PROVA de (II)

Pela definição,

$$\omega_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega(x) dx \right) \chi_{Q_j^\alpha}(x) + \omega(x) \chi_{F_\alpha^+}(x).$$

Temos que $\omega_\alpha \equiv \omega$ em F_α^+ e que F_α^+ é crescente com α tendendo para infinito. Além disso, também temos que $|\cap (F_\alpha^+)^c| = 0$.

Logo $\omega_\alpha \rightarrow \omega$ q.s., quando $\alpha \rightarrow \infty$.

PROVA de (III)

Para todo cubo Q , podem ocorrer as seguintes situações

$$\text{ess inf}_Q \omega \geq 1 \quad \text{ou} \quad \text{ess inf}_Q \omega < 1.$$

No primeiro caso, temos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \min\{\omega, 1\}(x) dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q 1 dx = 1 \leq \min\{\omega(y), 1\}$$

para todo $y \in Q$.

Se $\text{ess inf}_Q \omega < 1$, então

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \min\{\omega, 1\}(x) dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C(\omega, 1) \text{ess inf}_Q \omega, \text{ pois } \omega \in A_1.$$

Seja $\lambda = \text{ess inf}_Q \omega$ e supondo que $\inf_Q(\min\{\omega, 1\}) < \lambda$. Então existe $E \subset Q$, $|E| > 0$, tal que $\min\{\omega, 1\} < \lambda' < \lambda$ em E e portanto, como $\lambda < 1$, temos que $\omega < \lambda'$ em E , que é uma contradição. Assim provamos a primeira parte de (III), ou seja, $\min\{\omega, 1\} \in A_1$.

Para provar a segunda parte, note que se $x \in F_\alpha^+$ então

$$\omega_\alpha(x) = \omega(x) \geq \min\{\omega, 1\}(x).$$

Se $x \in Q_j^\alpha$, para algum j , então pela definição e pela condição (b) da decomposição de Calderon-Zygmund, temos

$$\omega_\alpha(x) = \frac{1}{|Q_j^\alpha|} \int_{Q_j^\alpha} \omega(y) dy > \alpha \geq \min\{\omega, 1\}(x).$$

Analogamente, se $x \in Q_j^\alpha$, para algum j , então

$$\omega_\alpha(x) \leq C(\omega, 1) \text{ess inf}_{Q_j^\alpha} \omega \leq C(\omega, 1) \omega(x).$$

Portanto $\min\{\omega, 1\} \leq \omega_\alpha(x) \leq C(\omega, 1) \omega(x)$.

PROVA de (IV)

Segue de (III), usando (a) e (c).

Agora, definimos os coeficientes a_{ij}^α ,

$$a_{ij}^\alpha(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} a_{ij}(y) dy \right) \chi_{Q_l^\alpha}(x) + a_{ij}(x) \chi_{F_\alpha^+}(x).$$

Temos.

(a) Se $x \in F_\alpha^+$, então $a_{ij}^\alpha(x) = a_{ij}(x)$ e $\omega_\alpha(x) = \omega(x)$.

(b) Se $x \notin F_\alpha^+$, então $x \in Q_l^\alpha$ (para algum l). Logo, usando a condição (4.1) sobre os coeficientes a_{ij} , obtemos

$$\begin{aligned} a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j &= \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j dy \\ &\leq \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} \Lambda |\xi|^2 \omega(y) dy \\ &= \Lambda |\xi|^2 \omega_\alpha(x). \end{aligned}$$

Analogamente, também temos

$$a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \omega_\alpha(x).$$

Portanto, verificamos a condição

$$\lambda \omega_\alpha(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \omega_\alpha(x).$$

Vamos verificar agora a condição $\sum |a_{ij}^\alpha(x)| \leq C \omega_\alpha(x)$.

(a) Se $x \in F_\alpha^+$, então $a_{ij}^\alpha(x) = a_{ij}(x)$ e $\omega_\alpha(x) = \omega(x)$. A condição é verificada.

(b) Se $x \notin F_\alpha^+$, então $x \in Q_l^\alpha$ (para um único cubo). Neste caso temos

$$a_{ij}^\alpha(x) = \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} a_{ij}(y) dy.$$

Portanto, usando a condição sobre os coeficientes a_{ij} e a definição de ω_α , temos

$$\begin{aligned} |a_{ij}^\alpha(x)| &\leq \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} |a_{ij}(y)| dy \\ &\leq C \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} \omega(y) dy \\ &= C \omega_\alpha(x). \end{aligned}$$

Em ambos os casos, a constante C independe de α .

CASO 2: $\omega \in A_p$, com $p > 1$.

Pelo teorema de fatorização de Jones (Teorema 4.2) existem $\omega_o, \omega_1 \in A_1$ tal que

$$\omega = \omega_o \omega_1^{1-p}$$

e com $C(\omega_i, 1)$ dependendo somente de $C(\omega, p)$ ($i = 0, 1$).

Dados $\alpha, \beta > 1$, definimos os pesos $\omega_{\alpha\beta}$

$$\omega_{\alpha\beta} = (\omega_o)_\alpha \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}.$$

Vamos mostrar que $\omega_{\alpha\beta}$ satisfaz as propriedades (i) - (v).

(i) segue de (IV).

(ii) segue de (III) e do teorema de fatorização de Jones, com

$$\tilde{\omega}_1 = \min\{\omega_o, 1\} \omega_1^{1-p}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_o (\min\{\omega_1, 1\})^{1-p}.$$

(iii) segue de (I) e teorema de fatorização de Jones (Teorema 4.2).

(v) segue de (II).

(iv) Definindo o conjunto

$$F_{\alpha\beta} = F_\alpha^o \cap F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}^1$$

onde $F_\alpha^o = F_\alpha^+$ para o peso ω_o e $F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}^1 = \left(F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right)^+$ para o peso ω_1 .

Pela definição temos

$$(\omega_o)_\alpha \equiv \omega_o \text{ e } (\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \equiv \omega_1 \text{ em } F_{\alpha\beta}.$$

Portanto para provar que $\omega_{\alpha\beta} \sim \tilde{\omega}_1$, podemos substituir $\omega_{\alpha\beta}$ por ω (em $F_{\alpha\beta}$).

Temos que $\min\{\omega_o, 1\} \sim \omega_o$ em F_α^o , pois

$$\min\{\omega_o, 1\} \leq \omega_o \quad (\text{por (III)})$$

e além disso, se $x \in F_\alpha^o$, temos $\min\{\omega_0(x), 1\} = 1$. Logo, pela propriedade (c) da decomposição de Calderon-Zygmund, temos

$$\omega_0(x) \leq \alpha = \alpha \min\{\omega_0(x), 1\}.$$

Portanto $\min\{\omega_0, 1\} \leq \omega_0 \leq \alpha \min\{\omega_0, 1\}$ em F_α^o .

Com um argumento análogo temos que $\omega_1 \sim \min\{\omega_1, 1\}$ em $F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}^1$. Logo,

$$\omega_{\alpha\beta} \sim \min\left\{\omega_o, 1\right\} \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}\right]^{1-p} = \tilde{\omega}_1 \quad em \quad F_{\alpha\beta},$$

e de maneira análoga, também temos $\omega_{\alpha\beta} \sim \tilde{\omega}_2$.

Finalmente para provar (vi) definimos os coeficientes $a_{ij}^{\alpha\beta}$ por

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}\right]^{1-p}(x) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_k^\alpha|} \int_{Q_k^\alpha} a_{ij}(y) \omega_1^{p-1}(y) dy \right) \chi_{Q_k^\alpha}(x) + a_{ij}(x) \omega_1^{p-1}(x) \chi_{F_\alpha^+}(x) \right\}$$

onde $\{Q_k^\alpha\}$ é a decomposição de Calderon-Zygmund para ω_o .

Verificando a primeira condição de (vi).

(1) Se $x \in F_{\alpha\beta}$, então $x \in F_\alpha^o = F_\alpha^+$. Logo,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\alpha\beta}(x) &= \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}\right]^{1-p}(x) a_{ij}(x) \omega_1^{p-1}(x) \\ &= \omega_1^{1-p}(x) a_{ij}(x) \omega_1^{p-1}(x) \\ &= a_{ij}(x). \end{aligned}$$

Usando que $\omega_{\alpha\beta}(x) = \omega(x)$ em $F_{\alpha\beta}$, obtemos

$$\lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x).$$

(2) Se $x \notin F_{\alpha\beta}$, então $x \notin F_{\alpha}^o$ ou $x \notin F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}^1$.

No primeiro caso, se $x \notin F_{\alpha}^+ = F_{\alpha}^o$, temos que $x \in Q_k^{\alpha}$ (para um único cubo). Logo,

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}(x) \left(\frac{1}{|Q_k^{\alpha}|} \int_{Q_k^{\alpha}} a_{ij}(y) \omega_1^{p-1}(y) dy \right)$$

e então, usando a condição (4.1) e que $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$, obtemos

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j &= \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}(x) \frac{1}{|Q_k^{\alpha}|} \int_{Q_k^{\alpha}} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j \omega_1^{p-1}(y) dy \\ &\leq \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}(x) \frac{1}{|Q_k^{\alpha}|} \int_{Q_k^{\alpha}} \Lambda |\xi|^2 \omega(y) \omega_1^{p-1}(y) dy \\ &= \Lambda |\xi|^2 \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}(x) \frac{1}{|Q_k^{\alpha}|^{\alpha}} \int_{Q_k^{\alpha}} \omega_0(y) dy \\ &= \Lambda |\xi|^2 \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p}(x) (\omega_0)_{\alpha}(x) \\ &= \Lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x). \end{aligned}$$

Analogamente, também temos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x).$$

No segundo caso, $x \notin F_{\beta^{\frac{1}{p-1}}}^1$, então podemos ter $x \in F_{\alpha}^o$ ou $x \in (F_{\alpha}^o)^c$, que já foram analisados.

Portanto, em ambos os casos, temos que a condição (vi)

$$\lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x)$$

é verificada.

Vamos verificar a segunda condição de (vi), ou seja, que $\sum |a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| \leq C \omega_{\alpha\beta}(x)$.

(a) Se $x \in F_{\alpha\beta}$, então $a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = a_{ij}(x)$ e $\omega_{\alpha\beta}(x) = \omega(x)$. A condição é verificada.

(b) Se $x \notin F_{\alpha\beta}$, então $x \in Q_l^\alpha$ (para um único cubo). Neste caso, usando a condição sobre os coeficientes a_{ij} e que $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$, temos

$$\begin{aligned}
|a_{ij}^{\alpha,\beta}(x)| &\leq \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p} (x) \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} |a_{ij}(y)| \omega_1^{p-1}(y) dy \\
&\leq \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p} (x) \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} C \omega(y) \omega_1^{p-1}(y) dy \\
&= C \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p} (x) \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} \omega_0(y) dy \\
&= C \left[(\omega_1)_{\beta^{\frac{1}{p-1}}} \right]^{1-p} (x) (\omega_0)_\alpha(x) \\
&= C \omega_{\alpha\beta}(x).
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, a constante C é independente de α e β .

4.3 - Aproximação de Solução

Com o lema 4.3 podemos demonstrar o próximo teorema, que é o objetivo principal deste capítulo. Este teorema é uma adaptação para Operadores Elípticos Degenerados do teorema 3.14 de [FF], aonde é apresentado um resultado para Operadores Parabólicos Degenerados.

Teorema 4.4

(I) Sejam $\omega \in A_2$, $T = g - \sum D_j f_j \in H^{-1,2}(\Omega, \omega)$, $\frac{g}{\omega}, \frac{f_j}{\omega} \in L^2(\Omega, \omega)$ e $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$ solução da equação $Lu = g - \sum D_j f_j$. Então u é limite fraco em $H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)$ de uma seqüência de soluções $u_m \in H^{1,2}(\Omega, \omega_m)$ da equação

$$(P_m) \quad L_m u_m = g_m - \sum D_j f_{jm}$$

onde $\omega_m = \omega_{mm}$ e $\tilde{\omega}_1$ são como no lema 4.3, $L_m u_m = - \sum D_j (a_{ij}^{mm}(x) D_i u_m)$, $f_{jm} = f_j(\omega/\omega_m)^{-1/2}$ e $g_m = g(\omega/\omega_m)^{-1/2}$.

(II) Se $\omega \in A_{p/n}$, com $p > 2k/(k-1)$ (onde k é como no Teorema 1.11) e u é solução de $Lu = - \sum D_j f_j$, com $f_j/\omega \in L^p(\Omega, \omega)$. Então u é limite uniforme de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em todo subconjunto compacto de Ω .

Demonstração

Usaremos a notação $A^m(x) = (a_{ij}^{mm}(x))_{i,j=1,\dots,n}$.

(I) Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{g_m}{\omega_m} \right)^2 \omega_m dx &= \int_{\Omega} \frac{g^2}{\omega_m^2} \frac{\omega^{-1}}{\omega_m^{-1}} \omega_m dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{g^2}{\omega} dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 \omega dx
 \end{aligned}$$

ou seja, $\|g_m/\omega_m\|_{L^2(\Omega, \omega_m)} = \|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} < \infty$.

(2) Analogamente, $\|f_{jm}/\omega_m\|_{L^2(\Omega, \omega_m)} = \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)}$.

Portanto, temos que $T_m = g_m - \sum D_j f_{jm} \in H^{-1,2}(\Omega, \omega_m)$.

Como u_m é solução de (P_m) , usando o Teorema 1.20, temos

$$\begin{aligned}
 \|u_m\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega_m)} &\leq C \left(\|g_m/\omega_m\|_{L^2(\Omega, \omega_m)} + \sum_{j=1}^n \|f_{jm}/\omega_m\|_{L^2(\Omega, \omega_m)} \right) \\
 &= C \left(\|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \sum_{j=1}^n \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) = C_1. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

(a constante “C” não depende de m).

Usando o fato que $\tilde{\omega}_1 \leq \omega_m$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|u_m\|_{H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)} &\leq \|u_m\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega_m)} \\
 &\leq C \left(\|g/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \sum_{j=1}^n \|f_j/\omega\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) = C_1. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Portanto $\{u_m\}$ é uma sequência limitada em $H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)$. Logo existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{u_m\}$, que converge fracamente para um elemento $u \in H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)$.

Vamos provar que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Fixemos $F_k = F_{kk}$ (como no lema 4.3). Sabemos que

$$\int_{\Omega} u_m \varphi \tilde{\omega}_1 dx \longrightarrow \int_{\Omega} u \varphi \tilde{\omega}_1 dx$$

e $\int_{\Omega} (D_i u_m) \varphi \tilde{\omega}_1 dx \longrightarrow \int_{\Omega} (D_i u) \varphi \tilde{\omega}_1 dx$, $\forall \varphi \in H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)$.

Se $\psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, então $\varphi = \psi \chi_{F_k} \in H^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)$, pois em F_k temos que $\omega \sim \tilde{\omega}_1$ e

$$\int_{\Omega} \varphi^2 \tilde{\omega}_1 dx = \int_{\Omega} (\psi \chi_{F_k})^2 \tilde{\omega}_1 dx = \int_{F_k} \psi^2 \tilde{\omega}_1 dx \leq c \int_{F_k} \psi^2 \omega dx \leq c \int_{\Omega} \psi^2 \omega dx < \infty$$

$$\int_{\Omega} (D_i \varphi)^2 \tilde{\omega}_1 dx = \int_{F_k} (D_i \psi)^2 \tilde{\omega}_1 dx \leq c \int_{F_k} (D_i \psi)^2 \omega dx \leq c \int_{\Omega} (D_i \psi)^2 \omega dx < \infty.$$

Assim

$$\int_{\Omega} u_m \psi \chi_{F_k} \tilde{\omega}_1 dx \longrightarrow \int_{\Omega} u \psi \chi_{F_k} \tilde{\omega}_1 dx$$

$$\int_{\Omega} (D_i u_m) \psi \chi_{F_k} \tilde{\omega}_1 dx \longrightarrow \int_{\Omega} (D_i u) \psi \chi_{F_k} \tilde{\omega}_1 dx$$

$\forall \psi \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$, ou seja, a seqüência

$$\left(u_m \chi_{F_k} \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

converge fracamente em $H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

Portanto, temos que

$$\| |\nabla u| \|_{L^2(F_k, \omega)}^2 = \int_{F_k} |\nabla u|^2 \omega dx \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{F_k} |\nabla u_m|^2 \omega dx.$$

Para $m \geq k$ temos que $\omega = \omega_m$ em F_k . Logo, usando (4.4), temos

$$\| \nabla u \|_{L^2(F_k, \omega)}^2 \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{F_k} |\nabla u_m|^2 \omega_m dx \leq C_1$$

Pelo teorema da convergência monótona, obtemos

$$\| |\nabla u| \|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq C_1.$$

De modo análogo, temos também $\| u \|_{L^2(\Omega, \omega)} \leq C_1$.

Como $\| \nabla u \|_{L^2(\Omega, \omega)} < \infty$ e $\| u \|_{L^2(\Omega, \omega)} < \infty$, pelo Teorema 1.10 temos que $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega)$.

(3) Vamos provar que u é solução de $Lu = g - \sum D_j f_j$, ou seja, que

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} f_j(x) D_j \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega).$$

Como u_m é solução de (P_m) , temos que $L_m u_m = g_m - \sum D_j f_{jm}$, ou seja,

$$\int_{\Omega} a_{ij}^{m,m}(x) D_i u_m(x) D_j \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g_m(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} f_{jm}(x) D_j \varphi(x) dx$$

$\forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega_m)$, e além disso, sobre F_k (para $m \geq k$) se verificam

- (i) $\omega = \omega_m$;
- (ii) $g = g_m$ e $f_j = f_{jm}$;
- (iii) $a_{ij}^{m,m}(x) = a_{ij}(x)$.

Para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} G : H_0^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ G(u) &= \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) \chi_{F_k}(x) dx \end{aligned}$$

é um funcional linear contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} |G(u)| &\leq \int_{F_k} |a_{ij}| |D_i u| |D_j \varphi| dx \\ &\leq C \int_{F_k} \omega |D_i u| |D_j \varphi| dx \quad (\text{usando que } \omega \sim \tilde{\omega}_1 \text{ em } F_k) \\ &\leq C \int_{F_k} \tilde{\omega}_1 |D_i u| |D_j \varphi| dx \\ &\leq C \left(\int_{F_k} |D_i u|^2 \tilde{\omega}_1 dx \right)^{1/2} \left(\int_{F_k} |D_j \varphi|^2 \tilde{\omega}_1 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \tilde{\omega}_1)}. \end{aligned}$$

Como isso e usando as propriedades (i), (ii) e (iii) acima, temos

$$\begin{aligned}
\int_{F_k} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_k} a_{ij}^{mm}(x) D_i u_m(x) D_j \varphi(x) dx \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} a_{ij}^{mm}(x) D_i u_m(x) D_j \varphi(x) dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega \cap F_k^c} a_{ij}^{mm}(x) D_i u_m(x) D_j \varphi(x) dx \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} g_m(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} f_{jm}(x) D_j \varphi(x) dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega \cap F_k^c} a_{ij}^{mm}(x) D_i u_m(x) D_j \varphi(x) dx \right) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

(usando que u_m é solução).

Vamos analisar cada uma das integrais em (4.6).

(a) Temos $g_m \rightarrow g$ q.s. quando $m \rightarrow \infty$ e

$$\int_{\Omega} g_m \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{g \omega_m^{1/2}}{\omega^{1/2}} \varphi dx$$

onde $g \omega^{-1/2} \in L^2(\Omega)$ e

$$|\varphi \omega_m^{1/2}| \leq C_{\varphi} \tilde{\omega}_2^{1/2} \in L^2(\Omega).$$

Logo,

$$\int_{\Omega} g_m \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} g \varphi$$

pelo teorema da convergência dominada.

(b) Analogamente, como $f_{jm} \rightarrow f_j$ q.s. quando $m \rightarrow \infty$ e

$$\int_{\Omega} f_{jm} D_j \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{f_j \omega_m^{1/2}}{\omega^{1/2}} D_j \varphi dx$$

onde $f_j \omega^{-1/2} \in L^2(\Omega)$ e

$$|D_j \varphi \omega_m^{1/2}| \leq C_{\varphi} \tilde{\omega}_2^{1/2} \in L^2(\Omega).$$

Temos que,

$$\int_{\Omega} f_{jm} D_j \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} f_j D_j \varphi dx$$

pelo teorema da convergência dominada.

(c) Usando que $\sum |a_{ij}^{mm}(x)| \leq C \omega_m(x)$, com C independente de “m”, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega \cap F_k^c} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx \right| &\leq \int_{\Omega \cap F_k^c} |a_{ij}^{mm}| |D_i u_m| |D_j \varphi| dx \\ &\leq \int_{\Omega \cap F_k^c} C \omega_m |D_i u_m| |D_j \varphi| dx \quad (C \text{ independe de } m) \\ &= C \int_{\Omega \cap F_k^c} |D_i u_m| \omega_m^{1/2} |D_j \varphi| \omega_m^{1/2} dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega \cap F_k^c} |D_i u_m|^2 \omega_m dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega \cap F_k^c} |D_j \varphi|^2 \omega_m dx \right)^{1/2} \\ &\leq C C_1 C_{\varphi} \left(\int_{F_k^c \cap \Omega} \omega_m dx \right)^{1/2} \\ &= C C_1 C_{\varphi} [\omega_m(F_k^c \cap \Omega)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando o teorema 2.9, pag. 401 de [GCR], existem constantes $\delta > 0$, $C > 0$ tal que, se $\bar{\Omega} \subset Q_o$ (Q_o um cubo), então

$$\omega_m(F_k^c \cap \Omega) \leq \hat{\omega}_2(F_k^c \cap \Omega) \leq C \hat{\omega}_2(Q_o) \left(\frac{|F_k^c|}{|Q_o|} \right)^{\delta}.$$

Logo, $\omega_m(F_k^c \cap \Omega) \leq C \frac{\hat{\omega}_2(Q_o)}{|Q_o|^{\delta}} (|F_k^c|)^{\delta}$.

Por construção, sabemos que $|F_k^c| \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. Então,

$$\omega_m(F_k^c \cap \Omega) \longrightarrow 0 \text{ com } k \longrightarrow \infty$$

e com isso, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap F_k^c} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx = 0.$$

Portanto, por (a), (b) e (c) podemos concluir de (4.5) que

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} f_j(x) D_j \varphi(x) dx$$

ou seja, u é solução da equação $Lu = g - \sum D_j f$.

(II) Vamos provar a parte final do teorema.

Pelo teorema 2.3.15 de [FKS], se u é solução de $Lu = -\sum D_j f_j$ em Ω , com $|f_j|/\omega \in L^p(\Omega, \omega)$, com $p > 2k/(k-1)$ e $\omega \in A_{p/n}$, então existem constantes $M > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tal que para $x_o \in \Omega$, $0 < \rho < R < \frac{1}{16} \text{dist}(x_o, \partial\Omega)$, temos

$$\text{osc}_{B(x_o, \rho)} u \leq M \left[\left(\frac{1}{\omega(B_R)} \int_{B_R} u^2 \omega dx \right)^{1/2} + \|f_j/\omega\|_{L^p(B_R, \omega)} \right] \rho^\lambda$$

com M e λ independente de u .

Aplicando este resultado para a solução da equação

$$L_m u_m = -\sum_{j=1}^n D_j f_{jm}$$

com $f_{jm} = f_j(\omega/\omega_m)^{(1-p)/p}$, e usando (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} \text{osc}_{B(x_o, \rho)} u_m &\leq M \left[\left(\frac{1}{\omega_m(B_R)} \int_{B_R} u_m^2 \omega_m dx \right)^{1/2} + \|f_{jm}/\omega_m\|_{L^p(\Omega, \omega_m)} \right] \rho^\lambda \\ &\leq M \left[\frac{C_1}{\tilde{\omega}_1(B_R)} + \|f_j/\omega\|_{L^p(\Omega, \omega)} \right] \rho^\lambda. \end{aligned}$$

Portanto a seqüência $\{u_m\}$ é localmente eqüicontínua.

Além disso, pelo lema 2.3.14 de [FKS], temos que

$$\text{ess sup}_{B(x_o, \rho)} |u_m| \leq C \left\| \frac{f_{jm}}{\omega_m} \right\|_{L^p(\Omega, \omega_m)} \rho^\lambda.$$

Logo, usando que $\|f_{jm}/\omega_m\|_{L^p(\Omega, \omega_m)} = \|f_j/\omega\|_{L^p(\Omega, \omega)}$, obtemos

$$\text{ess sup}_{B(x_o, \rho)} |u_m| \leq C \left\| \frac{f_j}{\omega} \right\|_{L^p(\Omega, \omega)} \rho^\lambda$$

ou seja, $\{u_m\}$ é uma seqüência localmente limitada.

Utilizando o teorema de Arzelà-Ascoli, a seqüência $\{u_m\}$ converge para u uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .

CAPÍTULO 5

CASO GERAL

5.1 - Introdução

Neste capítulo estudaremos o comportamento de soluções da equação elíptica degenerada $Lu = g - \operatorname{div} \vec{F}$, onde o operador L é da forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_i u(x)) \quad (5.1)$$

com as funções coeficientes a_{ij} satisfazendo as condições

$$|\xi|^2 \omega(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v(x) \quad (5.2)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C v(x) \quad (5.3)$$

$\forall x \in \Omega$ (aberto limitado), $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, onde ω e v são funções pesos ($\omega \neq v$), e a matriz dos coeficientes $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ é simétrica.

O objetivo deste capítulo é generalizar alguns dos resultados obtidos nos capítulos anteriores (quando $\omega = v$), começando pela definição dos espaços $H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ e $H_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)$.

Para provar a existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} Lu &= f - \operatorname{div} \vec{F}, \text{ em } B \\ u &= \psi, \text{ em } \partial B \end{aligned}$$

utilizaremos a desigualdade de Sobolev com pesos $\omega \neq v$ ([CW3]). Com isto, conseguiremos uma estimativa *a priori* da solução deste problema, limitando a norma da solução $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ em termos das normas das funções f , F_j ($j = 1, \dots, n$) e ψ (Teorema 5.16).

Também demonstraremos que a solução das equações $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$ e $Lu = g$ são limitadas, utilizando para isso um resultado devido a Stampacchia (lema 5.17).

Para a demonstração da regularidade interior da solução da equação $Lu = g$ utilizaremos o teorema de Muckenhoupt generalizado (Teorema 5.7) e a condição

sobre os pesos ω e v é $(v, \omega) \in S_p$, que implica na condição A_p utilizada nos capítulos anteriores. Com esta condição, verificamos que os resultados dos lemas 2.5 e 2.6 continuam válidos e com isso podemos utilizar a mesma técnica usada na demonstração da regularidade interior do capítulo 2 (Teorema 2.8).

Finalmente, com algumas condições adicionais nos pesos ω e v , demonstramos uma lema de aproximação (lema 5.25) com as mesmas características do lema 4.3. Com isso, conseguimos demonstrar que a solução $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ da equação elíptica degenerada $Lu = g - \operatorname{div} \vec{F}$ é limite de soluções de equações elípticas não-degeneradas.

5.2 - Definições e Resultados Básicos

Definição 5.1 Dizemos que um par de pesos $(v, \omega) \in A_p$ se existir uma constante C satisfazendo a seguinte condição, para qualquer cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$

(i) no caso $p > 1$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C;$$

(ii) no caso $p = 1$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega.$$

Observe que, se $\omega = v$, esta definição coincide com a definição 1.3 (a) e (b).

Observação 5.2 Como os coeficientes do operador L satisfazem a condição (5.2), então $\omega \leq v$. Neste caso, se o par de pesos $(v, \omega) \in A_p$, temos que $v \in A_p$ e $\omega \in A_p$ (definição 1.3). De fato:

(a) No caso $p > 1$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \\ \frac{1}{|Q|} \int_Q v^{-1/(p-1)}(x) dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \end{aligned}$$

Logo.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C \end{aligned}$$

ou seja, $v \in A_p$. De modo análogo, temos que $\omega \in A_p$.

(b) No caso $p=1$, temos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q v$$

e também

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega.$$

Portanto $\omega \in A_1$ e $v \in A_1$.

Definição 5.3 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e ω, v funções pesos.

(a) O espaço $H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ é o fecho do espaço $C^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega, v)}$ definida por

$$\|u\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega, v)} = \left(\int_\Omega u^2 v dx + \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \omega dx \right)^{1/2}.$$

(b) O espaço $H_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)}$ definida por

$$\|u\|_{H_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)} = \left(\int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx + \sum_{|\alpha|=2}^k \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \omega dx \right)^{1/2}.$$

Observação 5.4 Quando $k=1$, podemos definir

$$(1) \quad \begin{aligned} a : H^{1,2}(\Omega, \omega, v) \times H^{1,2}(\Omega, \omega, v) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a(u, \varphi) &= \int_{\Omega} u \varphi v dx + \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \end{aligned}$$

que é um produto interno em $H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ e

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} = a(u, u)^{1/2}.$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_0 : H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v) \times H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a_0(u, \varphi) &= \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \end{aligned}$$

que é produto interno em $H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ e

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)} = a_0(u, u)^{1/2}.$$

Portanto $\left(H^{1,2}(\Omega, \omega, v), \|\cdot\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)}\right)$ e $\left(H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v), \|\cdot\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)}\right)$ são espaços de Hilbert.

Observação 5.5 Usando a condição (5.2), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \omega dx \leq \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 v dx. \quad (5.4)$$

Se $u \in H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$, então existe uma sequência $\{u_m\}$, com $u_m \in C^\infty(\Omega)$, que é sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega, v)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega, v)}^2 &= \int_{\Omega} |u_m - u_n|^2 v dx + \int_{\Omega} \langle A \nabla(u_m - u_n), \nabla(u_m - u_n) \rangle dx + \\ &+ \sum_{|\alpha|=2}^k \int_{\Omega} |D^\alpha u_m - D^\alpha u_n|^2 \omega dx \longrightarrow 0, \text{ quando } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto $\{u_m\}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega, v)$ e usando (5.4) temos que $\{D^\alpha u_m\}$, $1 \leq |\alpha| \leq k$, são seqüências de Cauchy em $L^2(\Omega, \omega)$. Logo, existem $\tilde{u} \in L^2(\Omega, v)$ e $\tilde{u}_\alpha \in L^2(\Omega, \omega)$ tais que

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow \tilde{u}, & \text{em } L^2(\Omega, v) \\ D^\alpha u_m &\longrightarrow \tilde{u}_\alpha, & \text{em } L^2(\Omega, \omega). \end{aligned}$$

Usando que $\omega \leq v$, temos que

$$\int_{\Omega} \tilde{u}^2 \omega dx \leq \int_{\Omega} \tilde{u}^2 v dx$$

ou seja, $\tilde{u} \in L^2(\Omega, \omega)$, e também temos que $\{u_m\}$ é seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega, \omega)$. De modo análogo ao que foi feito na proposição 1.7, temos que $\tilde{u}_\alpha = D^\alpha \tilde{u}$ no sentido fraco.

Para efeito de notação, vamos escrever simplesmente $u = \tilde{u}$ e $D^\alpha u = \tilde{u}_\alpha$. ♣

Definição 5.6 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e v, ω funções peso. Definimos

$$\begin{aligned} W^{k,2}(\Omega, \omega, v) = \left\{ u \in L^2(\Omega, v) : \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx < \infty \right. \\ \left. \text{e } D^\alpha u \in L^2(\Omega, \omega), \ 2 \leq |\alpha| \leq k \right\} \end{aligned}$$

com norma

$$\|u\|_{W^{k,2}(\Omega, \omega, v)} = \left(\int_{\Omega} u^2 v dx + \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \omega dx \right)^{1/2}$$

onde $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é a matriz dos coeficientes do operador L .

Para o próximo resultado e principalmente para a demonstração da regularidade interior iremos utilizar o seguinte teorema.

Teorema 5.7 (Teorema de Muckenhoupt generalizado) Sejam $1 < p < \infty$ e um par de pesos (v, ω) . Então as seguintes condições são equivalentes:

$$\begin{aligned} (a) \quad & M : L^p(\mathbb{R}^n, \omega) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, v) \\ & \|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n, v)} \leq C_M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \omega)} \end{aligned}$$

onde Mf é a função maximal de Hardy-Littlewood e $C_M = C_M(n, p)$.

(b) Existe uma constante C tal que, para qualquer cubo Q e com $\mu = \omega^{-1/(p-1)}$,

$$\int_Q |M(\mu \chi_Q)(x)|^p v(x) dx \leq C \mu(Q) < \infty.$$

Demonstração Veja teorema 4.9, pag. 432, de [GCR].

Observação 5.8 A condição (b) no Teorema 5.7 é chamada de condição S_p para o par de pesos (v, ω) . Esta condição implica na condição A_p para o par (v, ω) . De fato, supondo que o par de pesos (v, ω) satisfaça a condição S_p , temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu(Q)}{|Q|} \right)^p \frac{v(Q)}{|Q|} &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |M(\mu \chi_Q)(x)|^p v(x) dx \\ &\leq \frac{C \mu(Q)}{|Q|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{\mu(Q)}{|Q|} \right)^{p-1} \frac{v(Q)}{|Q|} \leq C$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x) dx \right)^{p-1} \leq C.$$

Portanto $(v, \omega) \in A_p$.

Quando $v = \omega$, a condição S_p é equivalente à condição A_p (definição 1.3). Neste caso, o Teorema 5.7 é o teorema de Muckenhoupt (Teorema 1.9).

Teorema 5.9 Se $(v, \omega) \in S_2$ e $\omega \leq v$ então $H^{k,2}(\Omega, \omega, v) = W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$.

Demonstração

(i) $H^{k,2}(\Omega, \omega, v) \subset W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$. De fato,

Seja $S = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \|\varphi\|_{H^{k,2}(\Omega, \omega, v)} = \|\varphi\|_{W^{k,2}(\Omega, \omega, v)} < \infty\}$. De modo análogo a demonstração do Teorema 1.10, o operador identidade

$$\varphi \in S \subset H^{k,2}(\Omega, \omega, v) \longmapsto \varphi \in S \subset W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$$

pode ser estendido para uma isometria entre $\bar{S} = H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ e o fecho de S em $W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$. Portanto $H^{k,2}(\Omega, \omega, v) \subset W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$.

(ii) Como $(v, \omega) \in S_2$, pela observação 5.8 temos que $(v, \omega) \in A_2$. Como $\omega \leq v$, pela observação 5.2 temos que $v \in A_2$ e $\omega \in A_2$.

Dada $\varphi \in W_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ então de maneira análoga a demonstração do Teorema 1.10 temos que

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi \text{ em } L^2(\Omega, v)$$

$$D^\alpha \varphi_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha \varphi \text{ em } L^2(\Omega, \omega), \quad 2 \leq |\alpha| \leq k$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Precisamos mostrar que

$$\int_{\Omega} \langle A \nabla \varphi_\varepsilon, \nabla \varphi_\varepsilon \rangle dx \longrightarrow \int_{\Omega} \langle A \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx, \text{ quando } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Temos que:

(a) Como $D_j \varphi_\varepsilon(x) \longrightarrow D_j \varphi(x)$ q.s. ($1 \leq j \leq n$) então

$$\langle A(x) \nabla \varphi_\varepsilon(x), \nabla \varphi_\varepsilon(x) \rangle \longrightarrow \langle A(x) \nabla \varphi(x), \nabla \varphi(x) \rangle \text{ q.s..}$$

(b) Usando que $|D_j \varphi_\varepsilon(x)| \leq CM(\chi_\Omega |D_j \varphi|)(x)$, onde M é a função maximal de Hardy-Littlewood, temos

$$\begin{aligned} \left| \langle A(x) \nabla \varphi_\varepsilon(x), \nabla \varphi_\varepsilon(x) \rangle \right| &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| |D_i \varphi_\varepsilon(x)| |D_j \varphi_\varepsilon(x)| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n C v(x) |D_i \varphi_\varepsilon(x)| |D_j \varphi_\varepsilon(x)| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n C v(x) [M(\chi_\Omega |D_i \varphi|)(x)] [M(\chi_\Omega |D_j \varphi|)(x)] \in L_1(\Omega) \end{aligned}$$

pois usando o Teorema de Muckenhoupt, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} v(x) [M(\chi_{\Omega} |D_i \varphi|)(x)] [M(\chi_{\Omega} |D_j \varphi|)(x)] dx \\
& \leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} [M(\chi_{\Omega} |D_i \varphi|)(x)]^2 v(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^n} [M(\chi_{\Omega} |D_j \varphi|)(x)]^2 v(x) dx \right)^{1/2} \\
& \leq C \left(\int_{\Omega} |D_i \varphi(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j \varphi(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, de (a) e (b), usando o teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_{\Omega} \langle A \nabla \varphi_{\varepsilon}, \nabla \varphi_{\varepsilon} \rangle dx \longrightarrow \int_{\Omega} \langle A \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Logo $\varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi$ em $W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$.

Seja agora Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, subconjunto de Ω satisfazendo $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ (definindo $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset$). Seja $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ a partição da unidade subordinada a cobertura $\{\Omega_{j+1} - \Omega_j\}$ ($\text{supp } \psi_j \subset (\Omega_{j+1} - \Omega_j)$).

Dada $u \in W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$ temos que $\psi_j u \in W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$. Para $\varepsilon > 0$ dado, podemos encontrar ε_j , $j = 1, 2, \dots$ satisfazendo

$$\varepsilon_j \leq \text{dist}(\Omega_j, \partial \Omega_{j+1})$$

$$\|(\psi_j u)_{\varepsilon_j} - \psi_j u\|_{W^{k,2}(\Omega, \omega, v)} \leq \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Considerando $h_j = (\psi_j u)_{\varepsilon_j}$ e $h = \sum h_j$, temos que $h \in C^{\infty}(\Omega)$ e

$$\|u - h\|_{W^{k,2}(\Omega, \omega, v)} < \varepsilon.$$

Portanto $W^{k,2}(\Omega, \omega, v) \subset H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$.

Por (i) e (ii) temos que $H^{k,2}(\Omega, \omega, v) = W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$. ♣

Em alguns dos resultados deste capítulo vamos precisar dos seguintes teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [CW3].

Teorema 5.10 (Desigualdade de Poincaré) Sejam $f \in \text{Lip}(\bar{B})$, $1 < 2 < q$, $q = 2\sigma$, $\sigma > 1$, e pesos $v \in A_2$, $\omega \in D_{\infty}$ satisfazendo a condição

$$\left(\frac{s}{r}\right) \left(\frac{\omega(B_s(y))}{\omega(B_r(y))}\right)^{1/q} \leq C \left(\frac{v(B_s(y))}{v(B_r(y))}\right)^{1/2}, \quad 0 < s \leq r$$

para $y \in 2B$ (onde $B_r(y)$ é a bola centrada em y e raio r). Então,

$$\left(\frac{1}{v(B)} \int_B |f(x) - av_B f|^q v(x) dx \right)^{1/q} \leq C R_B \left(\frac{1}{\omega(B)} \int_B |\nabla f|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

onde $av_B f = \frac{1}{v(B)} \int_B f(x) v(x) dx$, a constante “C” é independente de f e B , e R_B é o raio de B .

Teorema 5.11 (Desigualdade de Sobolev) Com as mesmas hipóteses do Teorema 5.10, para toda bola B e $f \in \text{Lip}_0(B)$, temos

$$\left(\frac{1}{v(B)} \int_B |f|^q v dx \right)^{1/q} \leq C R_B \left(\frac{1}{\omega(B)} \int_B |\nabla f|^2 \omega dx \right)^{1/2}$$

com “C” independente de f e B .

Definição 5.12 Dizemos que $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ é solução fraca da equação

$$Lu = f - \text{div} \vec{F}$$

se verificar a condição

$$\int_B \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_B f(x) \varphi(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_B F_j(x) D_j \varphi(x) dx$$

$\forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)$, onde $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$.

Para simplificar a notação, vamos omitir os símbolos de somatório que aparecem na definição.

Observação 5.13 Se ω e v são pesos como no Teorema 5.10 e as funções f e $F_1, \dots, F_n$ satisfazem

$$\frac{f}{v} \in L^{(2\sigma)'}(B, v) \text{ e } \frac{F_j}{\omega} \in L^2(B, \omega) \quad (5.5)$$

então temos:

$$\begin{aligned}
(i) \quad \int_B |f\varphi| dx &= \int_B \left| \frac{f}{v} \right| v^{1/(2\sigma)'} |\varphi| v^{1/2\sigma} dx \\
&\leq \left(\int_B |f/v|^{(2\sigma)'} v dx \right)^{1/(2\sigma)'} \left(\int_B |\varphi|^{2\sigma} v dx \right)^{1/(2\sigma)} \\
&= \|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(\Omega, v)} \|\varphi\|_{L^{2\sigma}(B, v)} \quad (\text{usando a des. Sobolev}) \\
&\leq C_{B, \omega, v} \|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(B, \omega)} \quad (\text{usando (5.4)}) \\
&\leq C_{B, \omega, v} \|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}.
\end{aligned}$$

onde

$$C_{B, \omega, v} = C \frac{[v(B)]^{1/q}}{[\omega(B)]^{1/2}} R_B$$

que denominaremos constante de Sobolev.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \int_B |F_j D_j \varphi| dx &\leq \int_B (|F_j|/\omega) \omega^{1/2} |D_j \varphi| \omega^{1/2} dx \\
&\leq \left(\int_B (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_B |D_j \varphi|^2 \omega dx \right)^{1/2} \quad (\text{usando (5.4)}) \\
&\leq \left(\int_B (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_B \langle A \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx \right)^{1/2} \\
&= \|F_j/\omega\|_{L^2(B, \omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (i) e (ii), temos

$$\begin{aligned}
&\int_B |f\varphi| dx + \sum_{j=1}^n \int_B |F_j D_j \varphi| dx \\
&\leq C_{B, \omega, v} \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B, \omega)} \right) \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}
\end{aligned}$$

o que garante a existência das integrais do lado direito da definição 5.12, para qualquer $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)$.

5.3 - O Problema de Dirichlet

Vamos agora estudar a existência e unicidade da solução para o problema de Dirichlet.

Teorema 5.14 Se as funções f e F_j ($j = 1, \dots, n$) satisfazem a condição (5.5) então o problema

$$(D_1) \begin{cases} Lu = f - \operatorname{div} \vec{F}, \text{ em } B \\ u = 0, \text{ em } \partial B \end{cases}$$

possui solução única $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$. Além disso,

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)} \leq C_{B, \omega, v} \left(\left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{F_j}{\omega} \right\|_{L^2(B, \omega)} \right)$$

onde $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ e $C_{B, \omega, v}$ é a constante de Sobolev.

Demonstração

Para provar a existência e unicidade da solução, utilizaremos o teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.14).

Temos que

$$a_0 : H_0^{1,2}(B, \omega, v) \times H_0^{1,2}(B, \omega, v) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a_0(u, \varphi) = \int_B \langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx.$$

é um forma bilinear, coerciva e limitada. De fato,

$$(i) \quad \begin{aligned} a_0(u, u) &= \int_B \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx \\ &= \|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} |a_0(u, \varphi)| &\leq \int_B |\langle A \nabla u, \nabla \varphi \rangle| dx \quad (\text{usando que a matriz } A \text{ é simétrica}) \\ &\leq \int_B \langle A \nabla u, \nabla u \rangle^{1/2} \langle A \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle^{1/2} dx \\ &\leq \left(\int_B \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx \right)^{1/2} \left(\int_B \langle A \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)} \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}. \end{aligned}$$

Definindo

$$G : H_0^{1,2}(B, \omega, v) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(\varphi) = \int_B f\varphi dx + \int_B \langle \vec{F}, \nabla \varphi \rangle dx$$

temos que G é um funcional linear contínuo. De fato, como as funções $f, F_1, \dots, F_n$ satisfazem a condição (5.5), pela observação 5.13 temos

$$|G(\varphi)| \leq \int_B |f||\varphi| dx + \int_B |\langle \vec{F}, \nabla \varphi \rangle| dx$$

$$\leq C_{B, \omega, v} \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B, \omega)} \right) \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}.$$

Portanto,

$$|G(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v).$$

Pelo teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.14) existe uma única $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ tal que

$$a_0(u, \varphi) = G(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v) \quad (5.6)$$

ou seja,

$$\int_B a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_B f(x) \varphi(x) dx + \int_B \langle \vec{F}, \nabla \varphi \rangle dx.$$

Portanto $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ é solução da equação $Lu = f - \operatorname{div} \vec{F}$.

Como $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$, então podemos tomar $\varphi = u$ em (5.6) e obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}^2 &= a_0(u, u) \\ &= G(u) \\ &\leq C_{B, \omega, v} \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B, \omega)} \right) \|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}. \end{aligned}$$

O que implica

$$\|u\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)} \leq C_{B, \omega, v} \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B, \omega)} \right). \quad \clubsuit$$

Teorema 5.15 Dada $\psi \in H^{1,2}(B, \omega, v)$, o problema de Dirichlet

$$(D_2) \begin{cases} Lu = 0 \\ u - \psi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v) \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$.

Demonstração

Sabemos que

$$a_0 : H_0^{1,2}(B, \omega, v) \times H_0^{1,2}(B, \omega, v) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a_0(\phi, \varphi) = \int_B a_{ij}(x) D_i \phi(x) D_j \varphi(x) dx$$

é uma forma bilinear limitada e coerciva. Definindo

$$F : H_0^{1,2}(B, \omega, v) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\varphi) = -a_0(\psi, \varphi),$$

temos que F é um funcional linear contínuo. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.14), existe uma única $h \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ tal que

$$a_0(h, \varphi) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v). \quad (5.7)$$

O que implica em

$$a_0(h + \psi, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v).$$

Portanto se $u = h + \psi \in H^{1,2}(B, \omega, v)$, temos que u é solução da equação $Lu = 0$ e $u - \psi = h \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$.

Em (5.7) podemos tomar $\varphi = h$. Com isso temos

$$\begin{aligned} \|h\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}^2 &= a_0(h, h) \\ &= F(h) \\ &\leq |a_0(\psi, h)| \\ &\leq \int_B | \langle A \nabla \psi, \nabla h \rangle | dx \\ &\leq \int_B \langle A \nabla \psi, \nabla \psi \rangle^{1/2} \langle A \nabla h, \nabla h \rangle^{1/2} dx \\ &\leq \left(\int_B \langle A \nabla \psi, \nabla \psi \rangle dx \right)^{1/2} \left(\int_B \langle A \nabla h, \nabla h \rangle dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|\psi\|_{H^{1,2}(B, \omega, v)} \|h\|_{H_0^{1,2}(B, \omega, v)}. \end{aligned}$$

Logo $\|h\|_{H_0^{1,2}(B,\omega,v)} \leq \|\zeta\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)}$.

Portanto

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} &\leq \|h\|_{H_0^{1,2}(B,\omega,v)} + \|\zeta\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} \\ &\leq 2\|\zeta\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)}.\end{aligned}$$

Como os Teorema 5.14 e 5.15, podemos enunciar o caso geral para o problema de Dirichlet

Teorema 5.16 Se as funções f, F_j ($j = 1, 2, \dots, n$) satisfazem a condição (5.5) e $\psi \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ então o problema de Dirichlet

$$(D_3) \begin{cases} Lu = f - \sum D_j F_j, \text{ em } B \\ u - \psi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v), \text{ em } \partial B. \end{cases}$$

possui solução única $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$. Além disso, temos que

$$\|u\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} \leq C \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B,v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B,\omega)} + \|\psi\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} \right).$$

Demonstração

Seja $u_1 \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ solução do problema (D_1) e u_2 solução do problema (D_2) . Então $u = u_1 + u_2 \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ é solução do problema (D_3) . De fato,

$$\begin{aligned}Lu &= L(u_1 + u_2) \\ &= Lu_1 + Lu_2 \\ &= f - \sum D_j F_j + 0 \\ &= f - \sum D_j F_j, \text{ em } B.\end{aligned}$$

Também temos

$$u - \psi = u_1 + (u_2 - \psi) \in H_0^{1,2}(B, \omega, v).$$

Além disso

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} &\leq \|u_1\|_{H_0^{1,2}(B,\omega,v)} + \|u_2\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} \\ &\leq C \left(\|f/v\|_{L^{(2\sigma)'}(B,v)} + \|F_j/\omega\|_{L^2(B,\omega)} + \|\psi\|_{H^{1,2}(B,\omega,v)} \right).\end{aligned}$$

♣

5.4 - Limitação de Solução

Nos próximos teoremas, vamos demonstrar que a solução das equações $Lu = g$ e $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$ são limitadas. Para isso, iremos utilizar o seguinte lema,

Lema 5.17 Seja $\varphi(t)$, $k_o \leq t < \infty$, não-negativa e não-crescente tal que

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\alpha} [\varphi(k)]^\beta, \quad h > k > k_o$$

onde C, α, β são constantes positivas e com $\beta > 1$. Então $\varphi(k_o + d) = 0$, onde

$$d^\alpha = C |\varphi(k_o)|^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}.$$

Demonstração Veja [KS] lema B.1, pag.63.

♣

Em [KS], teorema B.2 pag.63, foi demonstrado que se $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ é solução de $Lu = f_o - \sum D_j f_j$, onde $Lu = -\sum D_j(a_{ij}(x)D_i u(x))$, $\lambda|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, com as funções $f_o, f_1, \dots, f_n \in L^s(\Omega)$ para $s > n$ então

$$\max_{\Omega} |u| \leq \frac{K}{\lambda} \sum_{j=0}^n \|f_j\|_{L^s(\Omega)} |\Omega|^{(1/n)-(1/s)}$$

onde K é uma constante independente de λ .

Utilizando a mesma técnica, conseguimos demonstrar os teoremas 5.18 e 5.19.

Teorema 5.18 Seja $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ solução da equação $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$, com $|\vec{F}|/\omega \in L^p(B, \omega)$ e $p > 2\sigma/(\sigma-1)$ ($\sigma > 1$ como na desigualdade de Sobolev). Então, para $\beta = (1 - \frac{2}{p})\sigma$, temos

$$\operatorname{ess\,sup}_B |u(x)| \leq C_{B,\omega,v} \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_B |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right] v(B)^{(\beta-1)/2\sigma}$$

onde $C_{B,\omega,v}$ é a constante de Sobolev (observação 5.13).

Demonstração

Como $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ é solução de $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$, então

$$\int_B a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_B F_j D_j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v).$$

Para $k > 0$ definimos

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} u(x) - k, & \text{se } u(x) \geq k \\ 0, & \text{se } |u(x)| < k \\ u(x) + k, & \text{se } u(x) \leq -k. \end{cases}$$

Temos que $\varphi_k \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ e

$$D_j \varphi_k(x) = \begin{cases} D_j u(x), & \text{em } A(k) = \{x \in B : |u(x)| \geq k\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, como u é solução da equação $Lu = -\operatorname{div} \vec{F}$, vale a igualdade

$$\int_B a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi_k(x) dx = \int_B F_j(x) D_j \varphi_k(x) dx.$$

(i) Para o lado esquerdo da igualdade, temos

$$\begin{aligned} \int_B a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi_k(x) dx &= \int_{A(k)} a_{ij}(x) D_i \varphi_k(x) D_j \varphi_k(x) dx \\ &= \int_{A(k)} \langle A \nabla \varphi_k, \nabla \varphi_k \rangle dx \\ &= \|\varphi_k\|_{H_0^{1,2}(A(k), \omega, v)}^2. \end{aligned}$$

(ii) Por outro lado, também temos

$$\begin{aligned} \int_B F_j D_j \varphi_k dx &= \int_{A(k)} F_j D_j \varphi_k dx \\ &= \int_{A(k)} \left(\frac{F_j}{\omega} \right) \omega^{1/2} D_j \varphi_k \omega^{1/2} dx \\ &\leq \left(\int_{A(k)} (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{A(k)} |D_j \varphi_k|^2 \omega dx \right)^{1/2} \quad (\text{usando (5.4)}) \\ &\leq \left(\int_{A(k)} (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \left(\int_{A(k)} \langle A \nabla \varphi_k, \nabla \varphi_k \rangle dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{A(k)} (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \|\varphi_k\|_{H_0^{1,2}(A(k), \omega, v)}. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii), concluimos que

$$\|\varphi_k\|_{H_0^{1,2}(A(k),\omega,v)} \leq \left[\int_{A(k)} (F_j/\omega)^2 \omega dx \right]^{1/2}. \quad (5.8)$$

Mas, temos também

$$\begin{aligned} \int_{A(k)} \left(\frac{F_j}{\omega} \right)^2 \omega dx &= \int_{A(k)} \left(\frac{F_j}{\omega} \right)^2 \omega^{2/p} \omega^{(p-2)/p} dx \\ &\leq \left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{2/p} \left(\int_{A(k)} \omega(x) dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \\ &\leq \left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{2/p} v(A(k))^{1-\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

O que implica, voltando em (5.8),

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{H_0^{1,2}(A(k),\omega,v)} &\leq \left(\int_{A(k)} (F_j/\omega)^2 \omega dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{2/p} v(A(k))^{1-\frac{2}{p}} \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right]^{1/p} v(A(k))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Utilizando esta desigualdade e a desigualdade de Sobolev, verificamos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{A(k)} (|u| - k)^{2\sigma} v dx \right)^{2/2\sigma} &= \left(\int_{A(k)} |\varphi_k|^{2\sigma} v dx \right)^{2/2\sigma} \\ &= \left(\int_B |\varphi_k|^{2\sigma} v dx \right)^{2/2\sigma} \quad (\text{usando o teorema 5.11}) \\ &\leq C_{B,\omega,v} \left(\int_B |\nabla \varphi_k|^2 \omega dx \right) \quad (\text{usando (5.4)}) \\ &\leq C_{B,\omega,v} \|\varphi_k\|_{H_0^{1,2}(B,\omega,v)}^2 \\ &\leq C_{B,\omega,v} \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right]^2 v(A(k))^{1-\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Para $h > k > 0$, temos que $A(h) \subset A(k)$ e

$$v(A(h)) = \int_{A(h)} v(x) dx \leq \int_{A(k)} v(x) dx = v(A(k))$$

ou seja, a função $\psi(t) = v(A(t))$, para $t \geq 0$, é não - crescente. Além disso, também temos

$$\begin{aligned} (h-k)^2 v(A(h))^{2/2\sigma} &= \left(\int_{A(h)} (h-k)^{2\sigma} v dx \right)^{2/2\sigma} \\ &\leq \left(\int_{A(k)} (|u(x)| - k)^{2\sigma} v dx \right)^{2/2\sigma} \\ &\leq C_{B,\omega,v} \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right]^2 v(A(k))^{1-\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v(A(h))^{2/2\sigma} \leq C_{B,\omega,v} \frac{1}{(h-k)^2} \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right]^2 v(A(k))^{1-\frac{2}{p}}$$

e então, obtemos

$$v(A(h)) \leq (C_{B,\omega,v})^\sigma \frac{1}{(h-k)^{2\sigma}} \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right]^{2\sigma} v(A(k))^{\frac{p-2}{p} \frac{2\sigma}{2}}$$

onde $\frac{(p-2)}{p} \frac{2\sigma}{2} = (1 - \frac{2}{p})\sigma = \beta$.

Aplicando o lema 5.17, para $\psi(t) = v(A(t))$, $t \geq 0$, $\beta = (1 - \frac{2}{p})\sigma$, $\alpha = 2\sigma$, $k_0 = 0$ e

$$c = (C_{B,\omega,v})^\sigma \left[\left(\int_{A(k)} |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right]^{2\sigma}$$

temos que $\psi(d) = v(A(d)) = 0$, onde

$$d = c^{1/2\sigma} v(B)^{(\beta-1)/2\sigma} 2^{\beta/(\beta-1)}.$$

Logo temos que

$$\text{se } A(d) = \{x \in B : |u(x)| \geq d\} \quad \text{então } v(A(d)) = 0.$$

Portanto $|u(x)| \leq d$ q.s. em B . O que implica.

$$\text{ess sup}_B |u| \leq d = (C_{B,\omega,v})^{1/2} \left[\left(\int_B |F_j/\omega|^p \omega dx \right)^{1/p} \right] v(B)^{(\beta-1)/2\sigma}. \quad \clubsuit$$

Teorema 5.19 Seja $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ solução da equação $Lu = g$, com $g/v \in L^p(B, v)$, $p > 2\sigma/(2\sigma - 1)$ ($\sigma > 1$ como na desigualdade de Sobolev). Então, se $\beta = p(2\sigma - 1) - (2\sigma/p)$, temos

$$\text{ess sup}_B |u| \leq C_{B,\omega,v} \left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^p(B,v)} v(B)^{(\beta-1)/2\sigma}.$$

Demonstração Análoga a demonstração do teorema anterior.

5.5 - Regularidade Interior

Para a demonstração da regularidade interior da solução da equação $Lu = g$ precisaremos do teorema de Muckenhoupt generalizado (com pesos $\omega \neq v$), cuja demonstração pode ser encontrada nos trabalhos de [JB] e [GCR]. Com este teorema, conseguimos generalizar o resultado do lema 2.5, que é fundamental para a demonstração da regularidade interior.

Definição 5.20 Sejam v, ω pesos. Dizemos que o par (v, ω) é uniformemente A_p em cada coordenada se $(v, \omega) \in A_p$ e (v_i, ω_i) é $A_p(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, com constante A_p independente das coordenadas $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, onde

$$v_i(t) = v(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \omega_i(t) = \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (5.9)$$

Definição 5.21 Um par de pesos (v, ω) é uniformemente S_p em cada coordenada se $(v, \omega) \in S_p$ e (v_i, ω_i) , definido em (5.9), satisfaz a condição S_p em $\mathbb{R}$, para quase todo $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, com a constante independente de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ $1 \leq i \leq n$.

O resultado do lema 2.5 pode ser generalizado no caso em que (v, ω) é uniformemente S_p em cada coordenada.

Lema 5.22 Seja $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$, com o par de pesos (v, ω) uniformemente S_2 em cada coordenada. Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ e com h satisfazendo $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ temos

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega', v)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}.$$

Demonstração

A prova deste lema é análoga a demonstração do lema 2.5, apenas usando o Teorema 5.7, no lugar do teorema de Muckenhoupt (Teorema 1.9). ♣

Observação 5.23 (a) O resultado do lema 2.5 continua válido com a condição (v, ω) uniformemente S_2 em cada coordenada, e com os pesos v e ω satisfazendo a condição (5.2) (o que implica $\omega \leq v$). De fato,

Pelo lema 5.22 sabemos que $\|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega', v)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$. Como o par de pesos (v, ω) é uniformemente S_2 em cada coordenada e $\omega \leq v$, então

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega', \omega)} \leq \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega', v)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}.$$

(b) O resultado do lema 2.6 também é válido com $(v, \omega) \in A_p$ e $\omega \leq v$, ou seja,

se $\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\Omega', \omega)} \leq K$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ então existe $D_k u \in L^p(\Omega, \omega)$ e $\|D_k u\|_{L^p(\Omega, \omega)} \leq K$ pois a condição (2.6) continua válida. ♣

Podemos então utilizar a mesma técnica usada na demonstração da regularidade interior, Teorema 2.8, para demonstrar a regularidade interior da solução da equação $Lu = g$ no caso em que $\omega \neq v$.

Teorema 5.24 (regularidade interior) Com os pesos (v, ω) uniformemente S_2 em cada coordenada. Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ é solução fraca da equação $Lu = g$ com as seguintes condições sendo verificadas

(i) $g/v \in L^2(\Omega, v)$;

(ii) $|\Delta_k^h a_{ij}(x)| \leq C_1 v(x)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$, com $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, sendo a constante C_1 independente de Ω' e h .

Então para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega$ temos que $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega, v)$ e

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega', \omega, v)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right)$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{C}(n, C, C_1, C_M, d')$, $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração

Como $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ é solução da equação $Lu = g$, então

$$\int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v) \quad (5.10)$$

(em particular para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$).

Aplicando (5.10) com $\Delta_k^{-h} \varphi$ no lugar φ e fazendo como no Teorema 2.8, obtemos

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega} g(x) \Delta_k^{-h} \varphi(x) dx \right) = \\ & = - \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j (\Delta_k^{-h} \varphi(x)) dx \\ & = - \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u(x) \Delta_k^{-h} (D_j \varphi)(x) dx \\ & = \int_{\Omega} \Delta_k^h (a_{ij} D_i u)(x) D_j \varphi(x) dx \\ & = \int_{\Omega} \left(a(x + h e_k) \Delta_k^h D_i u(x) + D_i u(x) \Delta_k^h a_{ij}(x) \right) D_j \varphi(x) dx \\ & = \int_{\Omega} \left([h \Delta_k^h a_{ij}(x) + a_{ij}(x)] \Delta_k^h D_i u(x) + D_i u(x) \Delta_k^h a_{ij}(x) \right) D_j \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pelo lema 5.22, se $u \in H^{1,2}(\Omega, \omega, v)$ então

$$\|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega', v)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}, \quad \forall \Omega' \subset \subset \Omega. \quad (5.12)$$

Como $D_k u$ existe, então quando $h \rightarrow 0$ temos $\Delta_k^h u \rightarrow D_k u$ q.s. Pelo lema de Fatou, temos que

$$\|D_k u\|_{L^2(\Omega', v)} \leq C_M \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)}, \quad \forall \Omega' \subset \subset \Omega. \quad (5.13)$$

Logo, voltando em (5.11), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i (\Delta_k^h u(x)) D_j \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \Delta_k^{-h} \varphi(x) dx \\ & - \int_{\Omega} \Delta_k^h a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx - \int_{\Omega} h \Delta_k^h a_{ij}(x) \Delta_k^h D_i u(x) D_j \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} |g(x)| |\Delta_k^{-h} \varphi(x)| dx + \int_{\Omega} |\Delta_k^h a_{ij}(x)| |D_i u(x)| |D_j \varphi(x)| dx + \\
&\quad + |h| \int_{\Omega} |\Delta_k^h a_{ij}(x)| |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j \varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|}{v(x)} \right) v^{1/2}(x) |\Delta_k^{-h} \varphi(x)| v^{1/2}(x) dx + \\
&\quad + C_1 \int_{\text{supp} \varphi} v(x) |D_i u(x)| |D_j \varphi(x)| dx + C_1 |h|(I) \\
&\leq \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \|\Delta_k^{-h} \varphi\|_{L^2(\text{supp} \varphi, v)} + \\
&\quad + C_1 \int_{\text{supp} \varphi} |D_i u(x)| v^{1/2}(x) |D_j \varphi(x)| v^{1/2}(x) dx + C_1 |h|(I) \\
&\leq C_M \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \|D_k \varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\
&\quad + C_1 \left(\int_{\text{supp} \varphi} |D_i u(x)|^2 v(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp} \varphi} |D_j \varphi(x)|^2 v(x) dx \right)^{1/2} + C_1 |h|(I) \\
&\leq C_M \|g/v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|D_k \varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\
&\quad + C_1 C_M^2 \left(\int_{\Omega} |D_i u(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j \varphi(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} + C_1 |h|(I) \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|D \varphi\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\
&\quad + C_1 |h| \int_{\Omega} v(x) |\Delta_k^h D_i u(x)| |D_j \varphi(x)| dx. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

De modo análogo ao que foi feito com a desigualdade (2.14) e usando (5.13), temos que (5.14) vale para qualquer $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)$. Denote por $a = \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)}$ e escolha $\varphi = \eta^2 \Delta_k^h u \in H_0^{1,2}(\Omega, \omega, v)$, com $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em Ω' , $\|D \eta\|_\infty \leq 2/d'$. Então

$$D_j \varphi = 2\eta D_j \eta \Delta_k^h u + \eta^2 D_j (\Delta_k^h u).$$

Substituindo em (5.14) e procedendo como na demonstração do Teorema 2.8, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \langle A \eta D(\Delta_k^h u), \eta D(\Delta_k^h u) \rangle dx \\
&= \int_{\Omega} a_{ij}(x) [\eta(x) D_i (\Delta_k^h u(x))] [\eta(x) D_j (\Delta_k^h u(x))] dx \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right) \|2\eta D_j \eta \Delta_k^h u + \eta^2 \Delta_k^h (D_j u)\|_{L^2(\Omega, \omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{\Omega} |a_{ij}(x)| |\eta D_i \Delta_k^h u| |D_j \eta \Delta_k^h u| dx + C_1 |h| \int_{\Omega} v |\Delta_k^h D_i u| |2\eta D_j \eta \Delta_k^h u + \eta^2 D_j \Delta_k^h u| dx \\
& \leq C a \left(2 \|\eta D_j \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} + \|\eta D_j (\Delta_k^h u)\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} \right) + 2(II) + C_1 |h| (III) \\
& \leq C a \left(\|D_j \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} + \|\eta D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} \right) + 2(II) + C_1 |h| (III) \\
& \leq C a \|D_j \eta\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\
& \quad + C a \|\eta D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + 2(II) + C_1 |h| (III) \\
& \leq C a^2 \|D_j \eta\|_{\infty} + C a \|\eta D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + 2(II) + C_1 |h| (III). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Para estimar as integrais (II) e (III) vamos utilizar a condio (5.3) sobre os coeficientes a_{ij} , as propriedades (5.12) e (5.13) e tambm a observao 5.23(a). Temos

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\Omega} |a_{ij}| |\eta D_i \Delta_k^h u| |D_j \eta \Delta_k^h u| dx \\
&\leq C \int_{\text{supp } \eta} v |\eta D_i \Delta_k^h u| |D_j \eta \Delta_k^h u| dx \\
&\leq C \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} \|D_j \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} \\
&\leq C \|D_i (\eta \Delta_k^h u) - D_i \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} \|D_j \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} \\
&\leq C \left(\|D_i (\eta \Delta_k^h u)\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} + \|D_i \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, v)} \right) \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
&\leq C \left(C_M \|D_i (\eta \Delta_k^h u)\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} + C_M \|D_i \eta\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \left(C_M \|D_i \eta \Delta_k^h u + \eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} + C \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \right) \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \left(C_M \|D_i \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp } \eta, \omega)} + C_M \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \right. \\
&\quad \left. + C \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \right) \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \left(\|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \right) \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \right) \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)}^2 + C \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C a^2 + C a \|\eta D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III &= \int_{\Omega} v |\Delta_k^h D_i u| |2\eta D_j \eta \Delta_k^h u + \eta^2 D_j \Delta_k^h u| dx \\
&\leq 2 \int_{\text{supp} \eta} v |\Delta_k^h D_i u| |\eta D_j \eta \Delta_k^h u| dx + \int_{\text{supp} \eta} v |\Delta_k^h D_i u| |\eta^2 D_j \Delta_k^h u| dx \\
&= 2 \int_{\text{supp} \eta} v |\eta \Delta_k^h D_i u| |D_j \eta \Delta_k^h u| dx + \int_{\text{supp} \eta} v |\eta D_i \Delta_k^h u| |\eta D_j \Delta_k^h u| dx \\
&\leq 2 \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \|D_j \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} + \\
&\quad + \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \|\eta D_j \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)}.
\end{aligned}$$

Usando (5.12) e (5.13) temos

$$\begin{aligned}
\|D_j \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} &\leq \|D_j \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \\
&\leq C \|D_j \eta\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
&\leq C \|D_j \eta\|_{\infty} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C a \|D_j \eta\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}
\|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} &= \|D_i(\eta \Delta_k^h u) - \Delta_k^h u D_i \eta\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \\
&\leq \|D_i(\eta \Delta_k^h u)\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} + \|\Delta_k^h u D_i \eta\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \\
&\leq C_M \|D_i(\eta \Delta_k^h u)\|_{L^2(\text{supp} \eta, \omega)} + \|D_i \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, v)} \\
&\leq C_M \|D_i \eta \Delta_k^h u + \eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, \omega)} + C_M \|D_i \eta\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} \\
&\leq C \|D_i \eta\|_{\infty} \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, \omega)} + \\
&\quad + C \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + C_M \|D_i \eta\|_{\infty} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \|D_i \eta\|_{\infty} \|D_k u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + \\
&\quad + C \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega, \omega)} + C_M \|D_i \eta\|_{\infty} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} \\
&\leq C \|D_i \eta\|_{\infty} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + C \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, \omega)} \\
&\leq C a \|D_j \eta\|_{\infty} + C_M \|\eta D_i \Delta_k^h u\|_{L^2(\text{supp} \eta, \omega)}.
\end{aligned}$$

Além disso, pela condição (5.2), temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} a_{ij}(x) [\eta(x) D_j(\Delta_k^h u(x))] [\eta(x) D_i(\Delta_k^h u(x))] dx \\
& \geq \int_{\Omega} |\eta(x) D(\Delta_k^h u(x))|^2 \omega(x) dx \\
& = \int_{\Omega} |\eta(x) \Delta_k^h(Du(x))|^2 \omega(x) dx.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Denotando por $b = \|\eta D(\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega, \omega)}$, usando as estimativas para (II) e (III) e voltando em (5.15) e aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
b^2 & \leq Ca^2 + Cab + C|h|a^2 + Cab|h| + C|h|b^2 \\
& \leq Ca^2 + C\frac{\varepsilon^{-2}}{2}a^2 + C|h|a^2 + C\frac{\varepsilon^2}{2}b^2 + C\frac{\varepsilon^{-2}}{2}a^2 + C\frac{\varepsilon^2}{2}b^2|h|^2 + C|h|b^2 \\
& = \left(C + C\varepsilon^{-2} + C|h|\right)a^2 + \left(C\frac{\varepsilon^2}{2} + C\frac{\varepsilon^2}{2}|h|^2 + C|h|\right)b^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ e h tal que

$$\frac{C\varepsilon^2}{2} + \frac{C\varepsilon^2}{2}|h|^2 + C|h| \leq \frac{1}{2}$$

obtemos,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\eta \Delta_k^h(Du)|^2 \omega dx \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right)^2.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |\eta \Delta_k^h Du|^2 \omega dx \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right)^2.$$

Usando que $\eta \equiv 1$ em Ω' , temos

$$\int_{\Omega'} |\Delta_k^h Du|^2 \omega dx \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right)^2.$$

Com isso, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|D_j(\Delta_k^h u)\|_{L^2(\Omega', \omega)}^2 & = \|\Delta_k^h D_j u\|_{L^2(\Omega', \omega)}^2 \\
& \leq \|\Delta_k^h Du\|_{L^2(\Omega', \omega)}^2 \\
& \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Usando a observação 5.23(b), temos que

$$\exists D_{jk} u \text{ e } \|D_{jk} u\|_{L^2(\Omega', \omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^{1,2}(\Omega, \omega, v)} + \|g/v\|_{L^2(\Omega, v)} \right).$$

Portanto, pelo Teorema 5.9 temos $u \in H^{2,2}(\Omega', \omega, v)$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$.

5.6 - Aproximação de Solução

Vamos agora demonstrar que o resultado do lema 4.3 pode ser generalizado para pesos $(v, \omega) \in A_p$ em alguns casos. Com a condição (5.2) e se $(v, \omega) \in A_p$, sabemos pela observação 5.2, que $v \in A_p$ e $\omega \in A_p$. Demonstraremos um lema de aproximação nos seguintes casos:

- (1) $(v, \omega) \in A_1$;
- (2) $(v, \omega) \in A_p$, $p > 1$, mas com os pesos v e ω verificando as seguintes condições:

Como $v \in A_p$, $\omega \in A_p$, então pelo teorema de fatorização de Jones (Teorema 4.2) podemos escrever $v = v_0 v_1^{1-p}$ e $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$, com $v_0, v_1, \omega_0, \omega_1 \in A_1$. Consideraremos as seguintes hipóteses sobre esses pesos:

- (a) $\omega_0 \leq v_0$ e $(v_0, \omega_0) \in A_1$;
- (b) $v_1(x) \leq \omega_1(x) \leq C_1 v_1(x)$.

Lema 5.25 Sejam $\alpha, \beta > 1$ dados, $(v, \omega) \in A_p$ verificando as condições anteriormente citadas e $a_{ij} = a_{ji}$ funções mensuráveis satisfazendo as condições

$$\omega(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v(x)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| \leq C v(x).$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$. Então existem pesos $\omega_{\alpha\beta} \geq 0$ e $v_{\alpha\beta} \geq 0$ e funções mensuráveis $a_{ij}^{\alpha\beta}$ verificando as seguintes condições:

(i) $C_{11} \frac{1}{\beta} \leq \omega_{\alpha\beta} \leq C_{12} \alpha$, $C_{21} \frac{1}{\beta} \leq v_{\alpha\beta} \leq C_{22} \alpha$, com C_{11} e C_{12} dependendo de ω e Ω , C_{21} e C_{22} dependendo de v e Ω .

(ii) Existem pesos $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$, que são A_p , tais que $\tilde{\omega}_1 \leq \omega_{\alpha\beta} \leq \tilde{\omega}_2$ e $\tilde{v}_1 \leq v_{\alpha\beta} \leq \tilde{v}_2$.

(iii) $\omega_{\alpha\beta}$ e $v_{\alpha\beta}$ são pesos A_p .

(iv) Existe um conjunto fechado $G_{\alpha\beta}$ tal que $\omega_{\alpha\beta}(x) = \omega(x)$ e $v_{\alpha\beta}(x) = v(x)$, $\forall x \in G_{\alpha\beta}$. Além disso, $G_{\alpha\beta} \subset G_{\alpha'\beta'}$, se $\alpha \leq \alpha'$ e $\beta \leq \beta'$.

(v) $\omega_{\alpha\beta} \rightarrow \omega$ e $v_{\alpha\beta} \rightarrow v$ q.s. em $\mathbb{R}^n$, com $\alpha, \beta \rightarrow \infty$.

(vi) As funções $a_{ij}^{\alpha\beta}$ satisfazem as condições

$$\lambda \omega_{\alpha\beta}(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v_{\alpha\beta}(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| \leq C v_{\alpha\beta}(x)$$

com a constante C independente de α, β .

Demonstração

CASO 1 : Se $(v, \omega) \in A_1$, ou seja,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_Q \omega.$$

Pela observação 5.2, temos que $v \in A_1$ e $\omega \in A_1$. Para cada $\alpha > 1$, definimos

$$U_\alpha^+ = \{x : M(\omega)(x) > \alpha\} \quad \text{e} \quad V_\alpha^+ = \{x : M(v)(x) > \alpha\}$$

onde M é o operador maximal de Hardy-Littlewood.

Como $\omega \leq v$, temos que $M(\omega)(x) \leq M(v)(x)$. Logo $U_\alpha^+ \subset V_\alpha^+$.

Pela decomposição de Calderon-Zygmund, existem famílias de cubos diádicos máximos $\{Q_l^\alpha\}$ e $\{I_k^\alpha\}$ (respectivamente para ω e v) verificando as condições:

$$(a) \quad U_{\alpha}^{+} = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l^{\alpha} \quad \text{e} \quad V_{\alpha}^{+} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{\alpha}.$$

$$(b) \quad \alpha < \frac{1}{|Q_l^{\alpha}|} \int_{Q_l^{\alpha}} \omega(x) dx \leq 2^n \alpha \quad \text{e} \quad \alpha < \frac{1}{|I_k^{\alpha}|} \int_{I_k^{\alpha}} v(x) dx \leq 2^n \alpha.$$

$$(c) \quad \omega(x) \leq \alpha \text{ em } F_{\alpha}^{+} = (U_{\alpha}^{+})^c \quad \text{e} \quad v(x) \leq \alpha \text{ em } G_{\alpha}^{+} = (V_{\alpha}^{+})^c.$$

$$(d) \quad |U_{\alpha}^{+}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx \quad \text{e} \quad |V_{\alpha}^{+}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) dx.$$

Como $U_{\alpha}^{+} \subset V_{\alpha}^{+}$, para cada Q_l^{α} existe um único I_k^{α} ($k = k(l)$) tal que $Q_l^{\alpha} \subset I_k^{\alpha}$ (os cubos são diádicos máximos).

Definimos os pesos ω_{α} e v_{α} ,

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_l^{\alpha}|} \int_{Q_l^{\alpha}} \omega(y) dy \right) \chi_{Q_l^{\alpha}}(x) + \omega(x) \chi_{F_{\alpha}^{+}}(x) \\ v_{\alpha}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_k^{\alpha}|} \int_{I_k^{\alpha}} v(y) dy \right) \chi_{I_k^{\alpha}}(x) + v(x) \chi_{G_{\alpha}^{+}}(x). \end{aligned}$$

Vamos inicialmente verificar que $\omega_{\alpha}(x) \leq 2^n v_{\alpha}(x)$.

(1) Se $x \in G_{\alpha}^{+} \subset F_{\alpha}^{+}$, então $v_{\alpha}(x) = v(x)$ e $\omega_{\alpha}(x) = \omega(x)$. Logo, $\omega_{\alpha}(x) \leq v_{\alpha}(x)$.

(2) Se $x \notin G_{\alpha}^{+}$, então $x \in I_k^{\alpha}$ (para um único cubo). Logo,

$$v_{\alpha}(x) = \frac{1}{|I_k^{\alpha}|} \int_{I_k^{\alpha}} v(y) dy.$$

Para o peso ω_{α} , podem ocorrer dois casos:

(a) Se $x \in Q_l^\alpha \subset I_k^\alpha$. Neste caso, usando a propriedade (b) da decomposição de Calderon-Zygmund,

$$\omega_\alpha(x) = \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} \omega(y) dy \leq 2^n \alpha \leq 2^n \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} v(y) dy = 2^n v_\alpha(x).$$

(b) Se $x \in I_k^\alpha - Q_k$, onde $Q_k = \cup Q_l^\alpha$ com $Q_l^\alpha \subset I_k^\alpha$, ou seja, $x \in F_\alpha^+$. Logo, usando a propriedade (c) da decomposição de Calderon-Zygmund,

$$\omega_\alpha(x) = \omega(x) \leq \alpha < \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} v(y) dy = v_\alpha(x).$$

Portanto $\omega_\alpha(x) \leq 2^n v_\alpha(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Como $\omega \in A_1$ e $v \in A_1$, temos de maneira análoga ao que foi demonstrado no lema 4.3 que

(I) $\omega_\alpha \in A_1$ e $v_\alpha \in A_1$.

(II) $\omega_\alpha \rightarrow \omega$ e $v_\alpha \rightarrow v$ q.s. em $\mathbb{R}^n$ quando $\alpha \rightarrow \infty$.

(III) $\min\{1, \omega\}(x) \leq \omega_\alpha(x) \leq C\omega(x)$ e $\min\{1, v\}(x) \leq v_\alpha(x) \leq Cv(x)$.

(IV) $C_1 \leq \omega_\alpha(x) \leq 2^n \alpha$, com $C_1 = \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \min\{1, \omega\}(y) dy$

$$C_2 \leq v_\alpha(x) \leq 2^n \alpha, \text{ com } C_2 = \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \min\{1, v\}(y) dy$$

onde Q_0 é um cubo fixado, $\Omega \subset Q_0$.

Definindo os coeficientes a_{ij}^α por

$$a_{ij}^\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y) dy \right) \chi_{I_k^\alpha}(x) + a_{ij}(x) \chi_{G_\alpha^+}(x).$$

Temos,

(1) Se $x \in G_\alpha^+ \subset F_\alpha^+$, então $a_{ij}^\alpha(x) = a_{ij}(x)$ e também $\omega_\alpha(x) = \omega(x)$ e $v_\alpha(x) = v(x)$. Logo a condição

$$|\xi|^2 \omega_\alpha(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v_\alpha(x)$$

é verificada.

(2) Se $x \notin G_\alpha^+$, então $x \in I_k^\alpha$ (para um único cubo). Neste caso,

$$a_{ij}^\alpha(x) = \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y) dy.$$

Logo, usando a condição sobre os coeficientes a_{ij} ,

$$a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j = \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j dy \leq |\xi|^2 \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} v(y) dy = |\xi|^2 v_\alpha(x).$$

Para verificar a condição $\sum a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \omega_\alpha(x) |\xi|^2$, podem ocorrer dois casos:

(a) Se $x \in Q_l^\alpha \subset I_k^\alpha$. Temos

$$a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j = \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j dy \geq |\xi|^2 \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} \omega(y) dy. \quad (5.17)$$

Usando que $(v, \omega) \in A_1$ e a propriedade (b) da decomposição de Calderon-Zygmund temos

$$\alpha < \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} v(y) dy \leq C \operatorname{ess\,inf}_{I_k^\alpha} \omega \leq C \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} \omega(y) dy \quad (5.18)$$

e portanto

$$\frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} \omega(y) dy \geq \frac{\alpha}{C} \geq \frac{1}{C} \frac{1}{2^n} \frac{1}{|Q_l^\alpha|} \int_{Q_l^\alpha} \omega(y) dy = \frac{1}{2^n C} \omega_\alpha(x). \quad (5.19)$$

Logo, voltando em (5.17), obtemos

$$a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 \frac{1}{2^n C} \omega_\alpha(x).$$

(b) Se $x \in I_k^\alpha - Q_k$, ou seja, $x \in F_\alpha^+$. Neste caso, temos que $\omega_\alpha(x) = \omega(x)$.

Logo, usando (5.18) e a condição (c) da decomposição de Calderon-Zygmund,

$$\begin{aligned}
a_{ij}^\alpha(x)\xi_i\xi_j &= \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j dy \\
&\geq |\xi|^2 \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} \omega(y) dy \\
&\geq |\xi|^2 \frac{\alpha}{C} \quad (\text{usando (5.18)}) \\
&\geq |\xi|^2 \frac{1}{C} \omega(x) \\
&= |\xi|^2 \frac{1}{C} \omega_\alpha(x).
\end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos temos

$$\lambda |\xi|^2 \omega_\alpha(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\alpha(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v_\alpha(x)$$

onde $\lambda = \frac{1}{2^n C}$.

Vamos verificar a segunda condição em (vi) sobre os coeficientes a_{ij}^α .

(a) Se $x \in G_\alpha^+ \subset F_\alpha^+$, então $a_{ij}^\alpha(x) = a_{ij}(x)$ e $v_\alpha(x) = v(x)$. A condição é verificada.

(b) Se $x \notin G_\alpha^+$, então $x \in I_k^\alpha$ (que é único). Neste caso

$$a_{ij}^\alpha(x) = \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} a_{ij}(y) dy.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|a_{ij}^\alpha(x)| &\leq \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} |a_{ij}(y)| dy \\
&\leq C \frac{1}{|I_k^\alpha|} \int_{I_k^\alpha} v(y) dy \\
&= C v_\alpha(x).
\end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos a condição

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^\alpha(x)| \leq C v_\alpha(x)$$

está verificada e com a constante C independente de α .

CASO 2

Seja $(v, \omega) \in A_p$, $p > 1$, com as condições anteriormente citadas, ou seja,

$$v = v_0 v_1^{1-p} \quad \text{e} \quad \omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$$

com os pesos $v_0, v_1, \omega_0, \omega_1$ satisfazendo as condições

(a) $\omega_0 \leq v_0$ e $(v_0, \omega_0) \in A_1$;

(b) $v_1(x) \leq \omega_1(x) \leq C_1 v_1(x)$.

Para cada $\alpha > 1$, sejam

$$U_{0,\alpha}^+ = \{x : M(\omega_0)(x) > \alpha\} \quad \text{e} \quad V_{0,\alpha}^+ = \{x : M(v_0)(x) > \alpha\}.$$

Pela decomposição de Calderon-Zygmund, existem famílias de cubos diádicos máximos $\{Q_{0,l}^\alpha\}$ e $\{I_{0,k}^\alpha\}$ para ω_0 e v_0 respectivamente, verificando as condições análogas do caso anterior.

Como por hipótese $\omega_0 \leq v_0$, temos que

(a) $Q_{0,l}^\alpha \subset I_{0,k}^\alpha$ (com $k = k(l)$);

(b) $G_{0,\alpha}^+ = (V_{0,\alpha}^+)^c \subset (U_{0,\alpha}^+)^c = F_{0,\alpha}^+$.

De maneira análoga a (5.19), usando que $(v_0, \omega_0) \in A_1$, temos

$$\frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega_0(y) dy \geq \frac{1}{2^n C_0} \frac{1}{|Q_{0,l}^\alpha|} \int_{Q_{0,l}^\alpha} \omega_0(y) dy$$

onde C_0 é a constante A_1 para o par (v_0, ω_0) .

Para cada $\beta > 1$, sejam

$$U_{1,\beta}^+ = \{x : M(\omega_1)(x) > \beta^{\frac{1}{p-1}}\} \quad \text{e} \quad V_{1,\beta}^+ = \{x : M(v_1)(x) > \beta^{\frac{1}{p-1}}\}.$$

Como $v_1 \leq \omega_1$, temos que $V_{1,\beta}^+ \subset U_{1,\beta}^+$. Sejam $\{Q_{1,l}^\beta\}$ e $\{I_{1,k}^\beta\}$ as decomposições de Calderon-Zygmund para ω_1 e v_1 respectivamente. Temos

(a₁) $I_{1,k}^\beta \subset Q_{1,l}^\beta$ (com $l = l(k)$):

(b₁) $F_{1,\beta}^+ = (U_{1,\beta}^+)^c \subset (V_{1,\beta}^+)^c = G_{1,\beta}^+$.

Definimos os pesos

$$(\omega_0)_\alpha(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_{0,l}^\alpha|} \int_{Q_{0,l}^\alpha} \omega_0(y) dy \right) \chi_{Q_{0,l}^\alpha}(x) + \omega_0(x) \chi_{F_{0,\alpha}^+}(x)$$

$$(v_0)_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} v_0(y) dy \right) \chi_{I_{0,k}^\alpha}(x) + v_0(x) \chi_{G_{0,\alpha}^+}(x)$$

$$(\omega_1)_\beta(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_{1,l}^\beta|} \int_{Q_{1,l}^\beta} \omega_1(y) dy \right) \chi_{Q_{1,l}^\beta}(x) + \omega_1(x) \chi_{F_{1,\beta}^+}(x)$$

$$(v_1)_\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_{1,k}^\beta|} \int_{I_{1,k}^\beta} v_1(y) dy \right) \chi_{I_{1,k}^\beta}(x) + v_1(x) \chi_{G_{1,\beta}^+}(x).$$

Temos, como no caso 1,

$$(\omega_0)_\alpha \leq 2^n (v_0)_\alpha \quad \text{e} \quad (v_1)_\beta \leq 2^n (\omega_1)_\beta.$$

Definindo os conjuntos

$$G_{\alpha\beta} = G_{0,\alpha}^+ \bigcap F_{1,\beta}^+$$

$$F_{\alpha\beta} = F_{0,\alpha}^+ \bigcap G_{1,\beta}^+.$$

Por (b₀) e (b₁) temos que $G_{\alpha\beta} \subset F_{\alpha\beta}$.

Definindo os pesos $\omega_{\alpha\beta}$ e $v_{\alpha\beta}$ por

$$\omega_{\alpha\beta}(x) = (\omega_0)_\alpha(x) [(\omega_1)_\beta]^{1-p}(x)$$

$$v_{\alpha\beta}(x) = (v_0)_\alpha(x) [(v_1)_\beta]^{1-p}(x).$$

Temos que $\omega_{\alpha\beta}$ e $v_{\alpha\beta} \in A_p$, e para todo $x \in G_{\alpha\beta}$

$$\omega_{\alpha\beta}(x) = \omega(x) \quad \text{e} \quad v_{\alpha\beta}(x) = v(x).$$

Finalmente, podemos definir os coeficientes $a_{ij}^{\alpha\beta}$.

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} a_{ij}(y) v_1^{p-1}(y) dy \right) \chi_{I_{0,k}^\alpha}(x) + \right. \\ \left. + a_{ij}(x) v_1^{p-1}(x) \chi_{G_{0,\alpha}^+}(x) \right\}$$

onde $\{I_{0,k}^\alpha\}$ é a decomposição de Calderon-Zygmund para v_0 .

(I) Para $x \in G_{\alpha\beta} = G_{0,\alpha}^+ \cap F_{1,\beta}^+ \subset F_{\alpha\beta}$. Neste caso, como $x \in G_{0,\alpha}^+$, temos

$$a_{i,j}^{\alpha\beta}(x) = [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) a_{ij}(x) v_1^{p-1}(x) \\ = v_1^{1-p}(x) a_{ij}(x) v_1^{p-1}(x) \\ = a_{ij}(x).$$

Também temos que $\omega_{\alpha\beta}(x) = \omega(x)$ e $v_{\alpha\beta}(x) = v(x)$. Portanto a condição

$$|\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 v_{\alpha\beta}(x)$$

está verificada.

(II) Se $x \notin G_{\alpha\beta}$.

Para $x \notin G_{0,\alpha}^+$, então $x \in I_{0,k}^\alpha$ (para um único k). Neste caso,

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} a_{ij}(y) v_1^{p-1}(y) dy$$

o que implica, usando a condição sobre os coeficientes a_{ij} e que $v = v_0 v_1^{1-p}$,

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j = [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j v_1^{p-1}(y) dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) |\xi|^2 \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} v(y) v_1^{p-1}(y) dy \\
&= |\xi|^2 [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} v_0(y) dy \\
&= |\xi|^2 [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) (v_0)_\alpha(x) \\
&= |\xi|^2 v_{\alpha\beta}(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$ e $(v_1)_\beta \leq 2^n (\omega_1)_\beta$, também temos

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j &\geq [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) |\xi|^2 \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega(y) v_1^{p-1}(y) dy \\
&\geq |\xi|^2 2^{n(1-p)} [(\omega_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega_0(y) \omega_1^{1-p}(y) v_1^{p-1}(y) dy \\
&\geq 2^{n(1-p)} |\xi|^2 [(\omega_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega_0(y) dy
\end{aligned}$$

Podem ocorrer dois casos,

(1) Se $x \in Q_{0,l}^\alpha \subset I_{0,k}^\alpha$. Neste caso, de maneira análoga a (5.19), temos

$$\frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega_0(y) dy \geq \frac{1}{2^n C_0} \frac{1}{|Q_{0,l}^\alpha|} \int_{Q_{0,l}^\alpha} \omega_0(y) dy = \frac{1}{2^n C_0} (\omega_0)_\alpha(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_i \xi_j &\geq \frac{2^{n(1-p)} C}{2^n C_0} |\xi|^2 [(\omega_1)_\beta]^{1-p}(x) (\omega_0)_\alpha(x) \\
&= \frac{C}{2^{np} C_0} |\xi|^2 \omega_{\alpha\beta}(x).
\end{aligned}$$

(2) Se $x \in I_{0,k}^\alpha - \mathbf{Q}_{0,k}$, onde $\mathbf{Q}_{0,k} = \cup Q_{0,l}^\alpha$ com $Q_{0,l}^\alpha \subset I_{0,k}^\alpha$, ou seja, $x \in F_{0,\alpha}^+$. Neste caso $(\omega_0)_\alpha = \omega_0$ e usando as propriedades da decomposição de Calderon-Zygmund,

$$\frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} \omega_0(y) dy \geq \frac{\alpha}{C_0} \geq \frac{1}{C_0} \omega_0(x) = \frac{1}{C_0} (\omega_0)_\alpha(x)$$

ou seja, a conclusão anterior também é válida neste caso.

Portanto, temos

$$\lambda|\xi|^2\omega_{\alpha\beta}(x)\leq\sum_{i,j=1}^na_{ij}^{\alpha\beta}(x)\xi_i\xi_j\leq|\xi|^2v_{\alpha\beta}(x)$$

onde $\lambda = C/(2^{np}C_0)$ (com C_0 a constante A_1 para (v_0, ω_0)).

Vamos verificar a segunda condição em (vi).

(1) Se $x \in G_{\alpha\beta}$, então $a_{ij}^{\alpha\beta}(x) = a_{ij}(x)$ e $v_{\alpha\beta}(x) = v(x)$. Portanto a condição é verificada.

(2) Se $x \notin G_{\alpha\beta}$, então $x \in I_{0,k}^\alpha$. Neste caso, usando que $v = v_0 v_1^{1-p}$, temos

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| &\leq [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} |a_{ij}(y)| v_1^{p-1}(y) dy \\ &\leq [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} C v(y) v_1^{p-1}(y) dy \\ &= C [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} v_0(y) v_1^{1-p}(y) v_1^{p-1}(y) dy \\ &= C [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) \frac{1}{|I_{0,k}^\alpha|} \int_{I_{0,k}^\alpha} v_0(y) dy \\ &= C [(v_1)_\beta]^{1-p}(x) (v_0)_\alpha(x) \\ &= C v_{\alpha\beta}(x). \end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos a condição

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| \leq C v_{\alpha\beta}(x)$$

é verificada e com a constante C independente de α e β .

As condições (i), (ii) e (iii) podem ser verificadas de maneira análoga ao que foi demonstrado no lema 4.3.

Exemplo 5.26 Um exemplo de pesos $(v, \omega) \in A_p$ satisfazendo as condições do lema 5.25.

Considerando o conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x < 1 \text{ e } |y| < m\}$, $p = 2$ e os pesos $\omega(x, y) = |x|^{3/2}$ e $v(x, y) = |x|^{1/2}$. Temos

(a) $(v, \omega) \in A_2$. De fato, se $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$, então

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x, y) dx dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/(2-1)}(x, y) dx dy \right)^{2-1} \\
 &= \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{1/2} dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b x^{-3/2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{(b-a)^2} \frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2}) \left(\frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{2}{\sqrt{b}} \right) \\
 &= \frac{4}{3(b-a)^2} (b^{3/2} - a^{3/2}) \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \right) \\
 &= \frac{4}{3(b-a)^2} \left(\frac{b^2 - a^{1/2}b^{1/2}(a+b) + a^2}{\sqrt{ab}} \right) \\
 &\leq \frac{4}{3(b-a)^2} \left(\frac{b^2 - 2ab + a^2}{\sqrt{ab}} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{ab}} \\
 &< \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

(b) Podemos escrever, utilizando a fatorização de Jones,

$$v(x, y) = |x|^{1/2} = |x|^{-1/2} (|x|^{-1})^{1-2}$$

$$\omega(x, y) = |x|^{3/2} = |x|^{1/2} (|x|^{-1})^{1-2}.$$

com $v_0(x, y) = |x|^{-1/2}$, $\omega_0(x, y) = |x|^{1/2}$ e $\omega_1(x, y) = v_1(x, y) = |x|^{-1}$, que são pesos A_1 (exemplo 1.4) satisfazendo as condições

$$(v_0, \omega_0) \in A_1 \text{ e } \omega_0 \leq v_0 \text{ (em } \Omega \text{)}.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q v_0(x, y) dx dy &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^{-1/2} dx \\
 &= \frac{1}{b-a} 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\
 &< \frac{2}{2\sqrt{a}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}}.
 \end{aligned}$$

Também temos

$$\operatorname{ess\,inf}_Q \omega_0 = \operatorname{ess\,inf}_Q |x|^{1/2} = \sqrt{a}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q v_0(x, y) dx dy &< \frac{1}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{1}{a} \left(\operatorname{ess\,inf}_Q \omega_0 \right) \\
 &\leq 4 \left(\operatorname{ess\,inf}_Q \omega_0 \right).
 \end{aligned}$$

ou seja, $(v_0, \omega_0) \in A_1$.

Além disso, $\omega_0(x, y) \leq v_0(x, y)$ em Ω .

Com o lema 5.25 vamos demonstrar que a solução $u \in H_0^{1,2}(B, \omega, v)$ da equação elíptica degenerada

$$Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j F_j$$

com as condições (5.2) e (5.3) verificadas, pode ser aproximadas por uma seqüência de soluções de equações elípticas não-degeneradas.

Teorema 5.27 Sejam $(v, \omega) \in A_p$, com $p > 1$. $g/v \in L^{(2\sigma)'}(B, v)$ e $F_j/\omega \in L^2(B, \omega)$. Se $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ é solução da equação $Lu = g - \sum D_j F_j$, então u é limite fraco em $H^{1,2}(B, \tilde{\omega}_1, \tilde{v}_1)$ de uma sequência de soluções $u_m \in H^{1,2}(B, \omega_m, v_m)$ do problema

$$(P_m) \quad L_m u_m = g_m - \sum_{j=1}^n D_j F_{jm}$$

onde $\omega_m = \omega_{mm}$ e $v_m = v_{mm}$ (como no lema 5.25), $L_m u_m = -\sum D_j (a_{ij}^{mm} D_i u_m)$, $F_{jm} = F_j (\omega/\omega_m)^{-1/2}$ e $g_m = g (v/v_m)^{-1/q}$ (onde $q = 2\sigma$ como na desigualdade de Sobolev).

Demonstração

Vamos denotar por $A^m = (a_{ij}^{mm})_{i,j=1,\dots,n}$ a matriz dos coeficientes do operador L_m .

Inicialmente, observamos que

$$\left\| \frac{g_m}{v_m} \right\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v_m)} = \left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{F_{jm}}{\omega_m} \right\|_{L^2(B, \omega_m)} = \left\| \frac{F_j}{\omega} \right\|_{L^2(B, \omega)}.$$

Como u_m é solução de (P_m) , usando a estimativa do teorema 5.16 temos

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{H^{1,2}(B, \omega_m, v_m)} &\leq C_m \left(\left\| \frac{g_m}{v_m} \right\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v_m)} + \left\| \frac{F_{jm}}{\omega_m} \right\|_{L^2(B, \omega_m)} \right) \\ &\leq C \left(\left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^{(2\sigma)'}(B, v)} + \left\| \frac{F_j}{\omega} \right\|_{L^2(B, \omega)} \right) \\ &= C_1 \end{aligned}$$

onde a constante C não depende de “m”, pois usando que $\tilde{\omega}_1 \leq \omega_m \leq \tilde{\omega}_2$ e $\tilde{v}_1 \leq v_m \leq \tilde{v}_2$, podemos limitar a constante de Sobolev

$$\begin{aligned} C_m = C_{B, \omega_m, v_m} &= C \frac{[v_m(B)]^{1/q}}{[\omega_m(B)]^{1/2}} R_B \\ &\leq C \frac{[\tilde{v}_2(B)]^{1/q}}{[\tilde{\omega}_1(B)]^{1/2}} R_B. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_m\|_{H^{1,2}(B, \tilde{\omega}_1, \tilde{v}_1)} \leq \|u_m\|_{H^{1,2}(B, \omega_m, v_m)} \leq C_1$$

ou seja, u_m é uma seqüência limitada em $H^{1,2}(B, \tilde{\omega}_1, \tilde{v}_1)$.

Logo existe uma subseqüência, que continuaremos denotando por $\{u_m\}$, que converge fracamente

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } H^{1,2}(B, \tilde{\omega}_1, \tilde{v}_1).$$

Vamos provar que $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ e que u é solução da equação $Lu = g - \sum D_j F_j$. A prova que $u \in H^{1,2}(B, \omega, v)$ é análoga a demonstração feita no Teorema 4.4.

Para provar que $Lu = g - \sum D_j F_j$, precisamos mostrar que

$$\int_B a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_B g \varphi dx + \int_B F_j D_j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \omega, v).$$

Seja $G_k = G_{kk}$ (como no lema 5.25). Usando que u_m é solução de (P_m) , e que sobre G_k vale $\omega_m = \omega$, $v_m = v$, $g_m = g$, $F_{jm} = F_j$ e $a_{ij}^{mm} = a_{ij}$ (com $m \geq k$), temos

$$\begin{aligned} \int_{G_k} a_{ij} D_i u D_j \varphi dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{G_k} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_B a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx - \int_{B \cap G_k^c} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_B g_m \varphi dx + \int_B F_{jm} D_j \varphi dx - \int_{B \cap G_k^c} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx \right). \end{aligned}$$

Como no Teorema 4.4, temos que

$$(a) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_B g_m \varphi = \int_B g \varphi dx.$$

$$(b) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_B F_{jm} D_j \varphi dx = \int_B F_j D_j \varphi dx.$$

(c) Usando que $\|u\|_{H^{1,2}(B, \omega_m, v_m)} \leq C_1$ (C_1 independente de "m"), que a matriz A^m é simétrica e que $v_m \leq \tilde{v}_2$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B \cap G_k^c} a_{ij}^{mm} D_i u_m D_j \varphi dx \right| &\leq \int_{B \cap G_k^c} | \langle A^m \nabla u_m, \nabla \varphi \rangle | dx \\
&\leq \int_{B \cap G_k^c} \langle A^m \nabla u_m, \nabla u_m \rangle^{1/2} \langle A^m \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle^{1/2} dx \\
&\leq \left(\int_{B \cap G_k^c} \langle A^m \nabla u_m, \nabla u_m \rangle dx \right)^{1/2} \times \\
&\times \left(\int_{B \cap G_k^c} \langle A^m \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx \right)^{1/2} \\
&\leq \|u_m\|_{H^{1,2}(B, \omega_m, v_m)} \left(\int_{B \cap G_k^c} |\nabla \varphi|^2 v_m dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \left(\int_{B \cap G_k^c} |\nabla \varphi|^2 v_m dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 C_\varphi [v_m(B \cap G_k^c)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando o teorema 2.9, pag.401 de [GCR], existem constantes $\delta > 0$ e $\mathbf{C} > 0$ tais que se $\bar{B} \subset Q_0$ (um cubo), então

$$v_m(B \cap G_k^c) \leq \tilde{v}_2(B \cap G_k^c) \leq \mathbf{C} \tilde{v}_2(Q_0) \left(\frac{|B \cap G_k^c|}{|Q_0|} \right)^\delta.$$

Logo, como $|B \cap G_k^c| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (pela construção de G_k), temos que

$$v_m(B \cap G_k^c) \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Portanto por (a), (b) e (c) concluimos que

$$\int_B a_{ij} D_i u D_j \varphi dx = \int_B g \varphi dx + \int_B F_j D_j \varphi dx$$

ou seja, u é solução da equação

$$Lu = g - \sum_{j=1}^n D_j F_j.$$

BIBLIOGRAFIA

[B] - Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, Collection Math. appliquées pour la maîtrise, Masson (1987).

[CW] - Coifman, R.R. and Weiss, G., *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes*. Lecture Notes in Mathematics, 242. Springer-Verlag, 1971.

[CW1] - Channilo, S. and Wheeden, R.L., *Harnack's Inequality and Mean-Value Inequalities for Solutions of Degenerate Elliptic Equations*. Comm. in P.D.E., 11(10), 1111-1134 (1986).

[CW2] - Channilo, S. and Wheeden, R.L., *Existence and Estimates for Green's Function for Degenerate Elliptic Equations*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienza Fisiche e Matematiche, serie IV, vol. XV, Fasc. II (1989), 309-340.

[CW3] - Chanillo, S. and Wheeden, R.L., *Weighted Poincaré and Sobolev Inequalities and Estimates for the Peano Maximal Functions*. Amer. J. Math. 107 (1985), 1191-1226.

[FF] - Fernandes, J.C.D. and Franchi, B., *Existence and Properties of the Green Function for a Class of Degenerate Parabolic Equations*.
IME/USP - Depto de Matemática (RT - MAT 93-14).

[FJK] - Fabes, E., Jerison, D., Kenig, C., *The Wiener Test for Degenerate Elliptic Equations*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 32, 3 (1982), 151-182

[FKS] - Fabes, E., Kenig, C. and Serapioni, R., *The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations*. Comm. in P.D.E., 7 (1), 77-116 (1982).

[FS] - Franchi, B. and Serapioni, R., *Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: a Geometrical Approach*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 14 (1987), 527-568.

[GCR] - Garcia-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. North-Holland Mathematics Studies, N^o. 116. Elsevier Science Pub. Co. (1985).

[GT] - Gilbarg, D. and Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag (1977).

[KS] - Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic Press (1980).

[J] - Johnson, R., *Changes of Variable and A_p Weights*. Contemporary Math., vol.107 (1990), 93-99.

[JB] - Jawerth, B., *Weighted Inequalities for Maximal Operators : Linearization, Localization and Factorization*. Amer. J. Math. (1986), 361-414.

[JN] - Johnson, R. and Neugebauer, C.J. , *Homeomorphisms Preserving A_p* . Revista Mat. Iberoamericana, Vol.3, número 2, 1987.

[R] - Reimann, H.M., *Functions of Bounded Mean-Oscillation and Quasiconformal Mappings*. Comment. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Alternativa de Fredholm, 51
Aplicação quase-conforme, 49
Condição $\omega \in A_p$, 2
Condição $(v, \omega) \in A_p$, 93
Condição A_p uniformemente em cada coordenada, 26, 110
Condição S_p , 97
Constante de Sobolev, 101
Cubo Diádico, 72
Decomposição de Calderon-Zygmund, 74
Desigualdade de Poincaré, 10, 99
Desigualdade de Sobolev, 9, 100
Desigualdade de Young, 39
 $D^k(\Omega, \omega)$, 33
Função peso, 2
Fronteira localmente quase-conforme, 62 $H^{k,p}(\Omega, \omega)$, 4
 $H_0^{k,p}(\Omega, \omega)$, 4
 $H^{k,2}(\Omega, \omega, v)$, 94
 $H_0^{k,2}(\Omega, \omega, v)$, 94
 $L^p(\Omega, \omega)$, 2
Operador Maximal de Hardy-Littlewood, 7
Princípio do Máximo, 21
Problema de Dirichlet, 15, 17, 55, 102
Regularidade Interior, 33, 40, 61, 110
Regularidade Global, 62
Solução fraca, 15, 50
Subsolução, 50
Supersolução, 50
Teorema de Lax-Milgram, 15
Teorema de Fatorização de Jones, 72
Teorema de Muckenhoupt, 7, 96
 $\Delta_k^h u$, 24
 $W^{k,p}(\Omega, \omega)$, 7
 $W^{k,2}(\Omega, \omega, v)$, 96