Categorias Modeláveis

Hugo Luiz Mariano

**Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de mestre
em
Matemática**

**Área de concentração : Lógica e fundamentos
Orientador : Prof. Dr. Odilon Otávio Luciano**

**Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio
financeiro do CNPq**

São Paulo, agosto de 1997 -

Categorias Modeláveis

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida por Hugo Luiz Mariano em 27 de agosto de 1997 e aprovada pela comissão julgadora composta por:

- Prof. Dr. Odilon Otávio Luciano
(IME-USP)

- Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler
(DI-PUC)

- Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa
(FFLCH-USP)

Dedicatória - Agradecimentos

À Beth, Zé, Dé e Toto pelo carinho, retaguarda e paciência simplesmente infinitos.

Ao Odilon, já um amigo da família, pela orientação e confiança neste trabalho.

Aos amigos, funcionários, professores e CPG do IME-USP por suas gentilezas.

Ao Mr. Paul “ da Viola” Krause, a quem freqüentemente recorria para a obtenção de obras não disponíveis.

Às pessoas que participaram diretamente deste trabalho e que não hesitei em abusar de sua cortesia: o Tônico, que organizou as referências bibliográficas; o Fernando, que me socorreu diariamente contra “O Computador”; o Zé, que sempre dispunha de bons conselhos, que realizou a “debugagem” do texto e que, conjuntamente com o Saltini, o Eliezer e o Fernando, criaram os diagramas. Obrigado!

E àquelas que, de modo menos direto mas igualmente importante, me auxiliaram neste período.

Estarei sempre em dívida com vocês.

Hugo Luiz Mariano

Conteúdo

Introdução	3
1 Preliminares	4
1.1 Fundamentos	4
1.1.1 Axiomas de NBG	4
1.1.2 Ordinais	5
1.1.3 Aritmética cardinal	6
1.1.4 Grandes cardinais	6
1.1.5 Universos	7
1.2 Fatos básicos sobre categorias	11
1.2.1 Grafos e categorias	11
1.2.2 Categorias livres, quocientes e diagramas comutativos	18
1.2.3 Cones	20
1.2.4 O funtor “componentes conexas” e funtores finais/iniciais	25
1.3 Mais categorias!	27
1.3.1 Adjunção	27
1.3.2 Comutação de limites	34
1.3.3 Completamentos indutivos	40
2 Categorias acessíveis	52
3 Esboços	61
4 Lógicas infinitárias	75
5 Categorias axiomatizáveis , esboçáveis e acessíveis	89
5.1 Categorias esboçáveis são axiomatizáveis	89
5.2 Categorias axiomatizáveis são esboçáveis	91
5.3 Categorias esboçáveis são acessíveis	92
5.4 Categorias acessíveis são esboçáveis	94

5.5	Considerações adicionais	96
6	Miscelânea	101
	Bibliografia	108

Introdução

Esta dissertação segue na mesma direção dos trabalhos de *Birkhoff* ([035]) , que correlacionam teorias equacionais e propriedades categoriais (H, S, P) e, mais modernamente, com as idéias de *Lawvere* ([152]), para quem teorias são categorias com propriedades e modelos são funtores que preservam essas propriedades.

No capítulo 1 , após introduzirmos uma fundamentação conjuntista suficientemente maleável para as suportar as construções da teoria das categorias, colocamos os fatos básicos sobre categorias que futuramente serão utilizados e outros resultados menos clássicos que culminam com a noção de completamentos indutivos de categorias.

Os objetos enfocados no capítulo 2 são instâncias dos considerados no capítulo inicial que se destacam pela possibilidade da “variação de estágio”.

No capítulo 3 apresentamos a noção de esboço , introduzida por *Ehresmann* ([078]) , que são “especificações ” de limites projetivos e indutivos em categorias.

Colocamos no capítulo 4 as noções tradicionais das lógicas infinitárias procurando realçar o aspecto categorial embutido nas construções .

Interconectamos, no capítulo 5 , as idéias introduzidas anteriormente e adicionamos alguns resultados.

O capítulo 6 é uma coletânea de exemplos, contra-exemplos, comparações com noções alternativas de algebricidade, e resultados sobre as categorias em questão .

Na bibliografia enumeramos obras contendo assuntos correlatos e que estão disponíveis na biblioteca do *IME – USP* , com a importante exceção da coleção *Diagrammes* .

Apesar de não utilizarmos no texto, em momento algum, o termo “categoria modelável” o título se justifica : categorias axiomatizáveis são categorias de modelos de sentenças , categorias esboçáveis são categorias de modelos de esboços e “catégories modelables” é o termo originalmente introduzido por *Lair* em [145] para designar nossas acessíveis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fundamentos

As referências para esta seção, e para toda terminologia e resultados de teoria dos conjuntos utilizados neste trabalho, são: [075] e [117]; para o último item (universos) devemos acrescentar [098] e, particularmente, seu apêndice.

Dentre as várias possíveis fundamentações para a teoria das categorias, nos parecem mais cômodas aquelas nas quais podemos falar de “totalidades” sem constrangimentos. Para isso uma teoria de classes e conjuntos é suficiente. Contudo, há construções categoriais bastante corriqueiras (e.g. categorias de funtores) que ficam limitadas com apenas a distinção entre classes próprias e impróprias. Uma solução natural para isso é “estratificar” o universo dos conjuntos de modo que as categorias em um dado estágio da hierarquia possuam propriedades análogas às da categoria total e que construções entre categorias em um dado estágio possam ser efetuadas (efetivadas) em um estágio eventualmente superior. Formalizaremos, um pouco, isso.

1.1.1 Axiomas de NBG

Nossa teoria básica será NBG : uma teoria de primeira ordem com igualdade cuja linguagem contém apenas o símbolo relacional binário $\in$ e onde denotamos as variáveis, indistintamente, por letras minúsculas e maiúsculas: $x, y, X, Y', \dots$

Definição 1 :

- (i) $S(x) \iff \exists y (x \in y)$ (“ x é um conjunto”).
- (ii) $x \subseteq y \iff \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \iff \forall z (S(z) \wedge z \in x \rightarrow z \in y)$.

Axiomas de NBG

- (i) Axioma da extensionalidade : $(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = y$.

(ii) Esquema da compreensão : $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow S(x) \wedge \varphi(x))$, onde y não ocorre livre em $\varphi(x)$ e as quantificações em $\varphi(x)$ são limitadas. (Notemos que, pelo axioma da extensionalidade, y está univocamente determinado : notação $y = \{x : S(x) \wedge \varphi(x)\}$.)

Definição 2 :

- (i) $V = \{x : S(x) \wedge x = x\}$.
- (ii) $\emptyset = \{x : x \in V \wedge x \neq x\}$.
- (iii) $x, y \in V \Rightarrow \{x, y\} = \{z \in V : z = x \vee z = y\}$.
- (iv) $\cup x = \{z \in V : \exists y (z \in y \in x)\}$.
- (v) $\mathcal{P}(x) = \{y \in V : y \subseteq x\}$.
- (vi) $\text{Inf}(x) \iff (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.
- (vii) $f : x \rightarrow y \iff f$ é uma função de domínio x e codomínio y .
- (viii) $\text{ch}(f, x) \iff (f : (\mathcal{P}(x) - \emptyset) \rightarrow x) \wedge \forall y (y \in \text{dom}(f) \rightarrow f(y) \in y)$.

Axiomas de NBG (continuação)

- (iii) Axioma da regularidade : $x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)$.
- (iv) Axioma do vazio : $\emptyset \in V$.
- (v) Axioma do par : $x, y \in V \rightarrow \{x, y\} \in V$.
- (vi) Axioma da reunião : $x \in V \rightarrow \cup x \in V$.
- (vii) Axioma das partes : $x \in V \rightarrow \mathcal{P}(x) \in V$.
- (viii) Axioma do infinito : $\{x \in V : \text{Inf}(x)\} \neq \emptyset$.
- (ix) Axioma da substituição : $(f : x \rightarrow V \wedge x \in V) \rightarrow f_*(x) \in V$, onde f é uma função de domínio x , codomínio V e imagem $f_*(x)$.
- (x) Axioma da escolha (global) : $\exists f (\text{ch}(f, V))$.

Observação 1 :

- (i) Assumiremos o axioma da escolha em todas as teorias de conjuntos (classes) que considerarmos; assim denotaremos por ZF a usual ZFC e NBG a NBG + C (global).
- (ii) Utilizaremos resultados (aritmética cardinal, hierarquia de Lévy,...) provados, nas referências, em ZF pois NBG e ZF “dizem as mesmas coisas sobre os conjuntos”.

1.1.2 Ordinais

Ordinais $(\alpha, \beta, \alpha', \alpha_i, \dots)$ são os ordinais de Von Neumann; cardinais $(\lambda, \kappa, \kappa', \dots)$ são ordinais iniciais; ORD é a classe bem ordenada dos ordinais; $CARD \subseteq ORD$ a classe dos cardinais.

O axioma da escolha (princípio da boa ordenação) nos garante que todo conjunto é isomorfo (equipotente) a um (único) cardinal. Notação : $x \in V \Rightarrow \#x \in CARD$.

Seja $ORD^+ = ORD \cup \{\infty\}$ a classe bem ordenada, extensão de ORD , tal que $\infty \notin ORD$ ($\infty = \{\emptyset\}$, por exemplo) e $\forall \alpha \in ORD (\alpha < \infty)$. Analogamente definimos $CARD^+ =$

$CARD \cup \{\infty\}$ e convencionamos que $\#x = \infty \iff x$ é classe própria; deste modo o axioma da substituição nos diz que ∞ é um “cardinal regular”.

Definimos, por indução em $\alpha \in ORD^+$, a seqüência (hierarquia de Von Neumann):

- . $\alpha = 0 \Rightarrow V_\alpha = \emptyset$;
- . $\exists \beta (\alpha = \beta + 1) \Rightarrow V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$;
- . $\alpha = \bigvee [0, \alpha[\neq 0 \Rightarrow V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ (em particular, $V_\infty = \bigcup_{\beta \in ORD} V_\beta$) .

O axioma da regularidade implica (e equivale se assumimos os outros axiomas) a $V = V_\infty$; definimos então $\forall x \subseteq V (\rho(x) = \min\{\alpha \in ORD^+ : x \subseteq V_\alpha\})$.

Proposição 1 : Temos que:

- (i) $\forall \alpha \in ORD^+ (V_\alpha \text{ é transitivo})$.
- (ii) $\forall \alpha \in ORD (\rho(\alpha) = \alpha)$.
- (iii) $\forall \alpha \in ORD^+ (V_\alpha = \{x \in V : \rho(x) < \alpha\})$.
- (iv) $\forall x (x \in V \iff \rho(x) < \infty)$.
- (v) $\forall x, y (x \in y \subseteq V \Rightarrow \rho(x) < \rho(y) \leq \infty)$.
- (vi) $\forall x (x \in V \Rightarrow \rho(x) = \bigvee \{\rho(y) + 1 : y \in x\})$.

■

1.1.3 Aritmética cardinal

Definição 1

- (i) Sejam $X \in V$ e $\lambda \in CARD$, denotaremos por $[X]^{=\lambda}$, $[X]^{<\lambda}$ e $[X]^{\leq \lambda}$ os subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ de cardinalidades, respectivamente, $= \lambda$, $< \lambda$ e $\leq \lambda$.
- (ii) Sejam $\mu, \lambda \in CARD$: $\mu^{<\lambda} = \bigvee \{\mu^\nu : \nu \in CARD \wedge \nu < \lambda\}$.

Proposição 1 : Temos os seguintes resultados:

- (i) Seja $\{\mu_i : i \in I\} \subseteq (CARD - \{0\})$ tal que $\exists i \in I (\mu_i \geq \omega)$; então $\sum_{i \in I} \mu_i = \#I \cdot \bigvee_{i \in I} \mu_i$.
- (ii) Sejam $X \in V$ e $\lambda \in (CARD - \{0\})$ tais que $\omega + \lambda \leq \#X$; então:
 - . $\#[X]^{=\lambda} = (\#X)^\lambda$.
 - . $\#[X]^{<\lambda} = \sum \{(\#X)^\nu : \nu \in CARD \wedge \nu < \lambda\} = (\#X)^{<\lambda}$.
- (iii) Dados $\omega \leq \lambda \leq \mu < \infty$, temos:
 - . $\nu < \lambda \Rightarrow (\mu^{<\lambda})^\nu = \mu^{<\lambda}$.
 - . $(\mu^{<\lambda})^{<\lambda} = \mu^{<\lambda}$.

■

1.1.4 Grandes cardinais

Cardinais “grandes” são aqueles a partir dos quais podemos obter conjuntos transitivos que são modelos de $ZF (NBG)$. Segue do teorema (3.5.10) em [Drake] que a existência destes

cardinais não pode ser demonstrada a partir dos axiomas da teoria se esta for consistente. Necessitaremos de alguns deles no trabalho.

Definição 1 : Seja $\lambda \in CARD^+$ regular, $f : [0, \lambda[\rightarrow [0, \lambda[$ é uma λ -função normal $\iff$:
. $\forall 0 \leq \alpha < \beta < \lambda$ ($f(\alpha) < f(\beta)$) (f é crescente) .
. $\forall 0 \leq \alpha < \lambda$ ($\alpha = \bigvee [0, \alpha[\Rightarrow f(\alpha) = \bigvee_{\beta < \alpha} f(\beta)$) (f é contínua) .

Observação 1 :

- (i) $f : [0, \lambda[\rightarrow [0, \lambda[$ função normal $\Rightarrow \forall \alpha \in [0, \lambda[$ ($\alpha \leq f(\alpha)$) (f é inflacionária) .
- (ii) As funções normais mais importantes são $\aleph$, $\beth$: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ onde:
. $\aleph$: $\aleph$ contínua ; $\aleph_0 = \omega$; $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$.
. $\beth$: $\beth$ contínua ; $\beth_0 = \omega$; $\beth_{\alpha+1} = \#Func(\beth_\alpha, 2)$.

Proposição 1 : Se f é função normal de domínio $ORD = [0, \infty[$ e imagem contida nos cardinais infinitos e κ é um cardinal regular então $f(\kappa) = \kappa \iff \exists \alpha = \bigcup \alpha \neq 0$ ($f(\alpha) = \kappa$) .

■

Definição 2 :

- (i) Denominamos cardinais limites (limites fortes) as imagens por $\aleph$ ($\beth$) de ordinais limites , 0 incluso.
- (ii) Cardinais (fortemente) inacessíveis s ao cardinais $\kappa > \omega$ que são regulares e limites fortes.
- (iii) Cardinais mensuráveis são cardinais $\kappa > \omega$ tais que $(\mathcal{P}(\kappa), \subseteq)$ admite algum ultrafiltro, não principal e $< \kappa$ -completo.
- (iv) Cardinais (fortemente) compactos são cardinais regulares $\kappa > \omega$ tais que para todo conjunto X , todo filtro próprio $< \kappa$ -completo em $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ está contido em algum ultrafiltro $< \kappa$ -completo.

Proposição 2 : κ compacto $\Rightarrow \kappa$ mensurável $\Rightarrow \kappa$ inacessível.

■

1.1.5 Universos

Definição 1: $U \in V$ é um universo se e somente se U satisfaz:

- (i) Transitividade : $\forall x, y$ ($y \in x \in U \rightarrow y \in U$) .
- (ii) Vazio : $\emptyset \in U$.
- (iii) Par : $\forall x, y$ ($x, y \in U \rightarrow \{x, y\} \in U$) .
- (iv) Reunião : $\forall x$ ($x \in U \rightarrow \bigcup x \in U$) .
- (v) Partes : $\forall x$ ($x \in U \rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$) .
- (vi) Infinito : $\{x \in U : Inf(x)\} \neq \emptyset$.
- (vii) Substituição : $\forall x \forall f$ (($f : x \rightarrow U \wedge x \in U$) $\rightarrow f_*(x) \in U$) .

Proposição 1 : Se $U \in V$ é universo então:

- (i) $x \in U \Rightarrow \{x\} \in U$. (par)
- (ii) $x, y \in U \Rightarrow (x, y) \in U$. ((i)+par)
- (iii) $I \in U \wedge \{x_i : i \in I\} \subseteq U \Rightarrow \cup_{i \in I} x_i \in U$. (subst. + reunião)
- (iv) $X, Y \in U \Rightarrow X \times Y \in U$. ((ii)+(iii))
- (v) $(x \in U \wedge y \subseteq x) \Rightarrow y \in U$. (partes+trans.)
- (vi) $(X \in U \wedge R \text{ relação de equivalência em } X) \Rightarrow (R \in U \wedge X/R \in U)$. ((iv)+(v) ; partes+(v))
- (vii) $(I \in U \wedge \{x_i : i \in I\} \subseteq U) \Rightarrow \prod_{i \in I} x_i \in U$. ($\prod_{i \in I} x_i \subseteq I \times \cup_{i \in I} x_i$)
- (viii) $X, Y \in U \Rightarrow X^Y = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ é função}\} \in U$. ($X^Y \subseteq \{X\} \times \mathcal{P}(X \times Y) \times \{Y\}$)
- (ix) $(I \in U \wedge \{x_i : i \in I\} \subseteq U) \Rightarrow \prod_{i \in I} x_i \in U$. ($\prod_{i \in I} x_i \subseteq (\cup_{i \in I} x_i)^I$)
- (x) $x \in U \Rightarrow \#x < \#U$. (por trans. $\#x \leq \#U$ e por partes $\#x < \#\mathcal{P}(x) \leq \#U$)

■

Proposição 2 : Sejam $U \in V$ universo e $c(U) = \bigvee_{x \in U} \#x$. Então:

- (i) $c(U) \leq \#U$. (trans.)
- (ii) $x \in U \Rightarrow \#x < c(U)$. (partes)
- (iii) $\lambda < c(U) \Rightarrow \exists x (x \in U \wedge \#x = \lambda)$.
- ((1.v))
- (iv) $c(U) > \omega$. (inf. + (ii))
- (v) $\lambda < c(U) \Rightarrow 2^\lambda < c(U)$. ((iii)+partes+(ii))
- (vi) $\forall \{\mu_\alpha : \alpha \in \lambda\} (\lambda < c(U) \wedge \forall \alpha \in \lambda (\mu_\alpha < c(U)) \Rightarrow \sum_{\alpha \in \lambda} \mu_\alpha < c(U))$. ((iii)+(1.vii)+(ii))
- (vii) $c(U)$ é inacessível. ((iv)+(v)+(vi))

■

Proposição 3: Existe isomorfismo entre as classes ordenadas dos universos $(UNIV, \subseteq)$ e dos cardinais inacessíveis $(INAC, \leq)$.

□

Vamos verificar que a aplicação (crescente) $U \mapsto c(U)$ é inversível.

Segue do parágrafo 1 do capítulo 4 em [075] que $\kappa \in INAC \Rightarrow V_\kappa \in UNIV$.

Do corolário 1 do teorema 2 do apêndice de [098] e do axioma da regularidade segue que:

. $U = \mathcal{H}(c(U)) = \{x \in V : \#TC(x) < c(U)\}$. (veja [075] , cap.3 , par.7)

. $c(U) = \#U$.

Logo basta mostrar que $\kappa \in INAC \Rightarrow (\kappa = \#V_\kappa \wedge \mathcal{H}(\kappa) = V_\kappa)$.

. $\kappa = \#V_\kappa$.

Por indução em $\alpha \in ORD$ temos $\#\alpha \leq \#V_\alpha \leq \#V_{\omega+\alpha} = \beth_\alpha$ logo, para $\kappa \in INAC$,
 $\kappa \leq \#V_\kappa = \beth_\kappa = \kappa$.

. $\mathcal{H}(\kappa) = V_\kappa$.

De [075] , cap.3 , par.7 temos que para todo cardinal $\mu \geq \omega$ ($\mathcal{H}(\mu) \subseteq V_\mu$) . $\mathcal{H}(\kappa) \supseteq V_\kappa$ pois $x \in V_\kappa \Rightarrow \rho(x) < \kappa \Rightarrow x \subseteq V_{\rho(x)} \subseteq V_{\omega+\rho(x)} \Rightarrow \#x \leq \beth_{\rho(x)} < \beth_\kappa = \kappa$ e porque $\forall x$ ($x \in V_\kappa \iff TC(x) \in V_\kappa$) pois $V_\kappa \in UNIV$.

■

Observação 1 : Da definição 1 e de [Drake] , cap.4 , par.1 segue que se U é universo então $(U, \in|_U)$ é modelo transitivo de ZF e que $(U, \mathcal{P}(U), \in|_{\mathcal{P}(U)})$ é modelo de NBG (com “escolhas globais” !) portanto, pela proposição 3 e o comentário no início da seção anterior temos que os cardinais inacessíveis, mensuráveis e compactos “são” grandes cardinais e que não podemos mostrar em ZF (NBG) que as classes $COMP, MENS, INAC, UNIV$ são não vazias.

Observação 2 : Da definição 1 e da proposição 1 temos que se $\mathcal{G} = (G, ., (-)^{-1}, \epsilon)$ é um grupo e U é um universo então $\mathcal{G} \in U \iff G \in U$, além disso se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são grupos e $f : G \rightarrow H$ é homomorfismo de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{H}$, i.e. $gf_{\mathcal{H}} = (\mathcal{G}, f, \mathcal{H}) \in GR(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, então $gf_{\mathcal{H}} \in U \iff G, H \in U$. Fenômenos semelhantes ocorrem quanto consideramos espaços topológicos e funções contínuas, anéis e homomorfismos de anéis, módulos sobre um anel $\mathcal{R} \in U$ e transformações $\mathcal{R}$ -lineares e, em geral, para estruturas com morfismos no sentido de Bourbaki, com “échelon” baseado em n conjuntos principais e m conjuntos auxiliares com $n, m < \omega, n > 0$ ([043] cap.4). Assim temos que $U - SET \hookrightarrow SET, U - GR \hookrightarrow GR, U - TOP \hookrightarrow TOP, U -_{\mathcal{R}} MOD \hookrightarrow_{\mathcal{R}} MOD$ ($\mathcal{R} \in U - AN$),... são inclusões plenas de subcategorias pequenas ($\subseteq U$, portanto conjuntos) em categorias “grandes” (classes próprias). Notemos que $U - CAT \hookrightarrow CAT$ (onde CAT é a categoria das categorias pequenas ($\in V$) e $U - CAT$ é a categoria das categorias $\in U$) mas, assim como $SET, GR, TOP, \dots \notin obj(CAT)$ temos $U - SET, U - GR, U - TOP, \dots \notin obj(U - CAT)$.

Isto pode ser reparado:

Fundamentaremos a teoria das categorias em $NBGUN = NGB + \forall x \in V \exists U (x \in U \wedge U \in UNIV)$.

Observação 3 :

- (i) $NBGUN$ é equivalente a $NBGIN = NBG + (INAC \text{ é classe própria})$.
- (ii) $NBGUN, NBGIN$ são extensões próprias de NBG se esta for consistente.
- (iii) A classe (própria) dos universos está bem ordenada pela inclusão e se $x \in V$ então existe o menor universo $Un[x]$ tal que $x \in Un[x]$.
- (iv) Se $W \in UNIV$ e $s(W) = Un[W]$ temos que $W - SET, W - GR, W - TOP, W - CAT, (W - TOP)^{W-GR}, \dots \in obj(s(W) - CAT)$.

Portanto podemos mudar de “estágio” sempre que for preciso. Notemos que os “estágios” são “representativos”:

Proposição 4 : Sejam $U \subseteq W, U \in UNIV$ e $W \in UNIV$ ou $W = V$ então $U - SET$ é fechado em $W - SET$, por limites projetivos/indutivos canônicos e U -pequenos (i.e., limites

proj./ind. de funtores $F : I \rightarrow U - SET$ onde $I \in obj(U - CAT)$).

□

Segue da construção canônica de limites proj. (ind.) em SET como subconjuntos de produtos cartesianos (quocientes de reuniões disjuntas) e dos itens (1.v) e (1.ix) ((1.vi) e (1.vii)) da proposição 1 .

■

Observação 4 : Fato semelhante ocorre com os limites proj. (ind.) nas categorias “familiares à Matemática”. Notemos também que os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, com suas construções usuais, pertencem a todo $U \in UNIV$; somas diretas e produtos tensoriais de famílias U -pequenas de $\mathcal{R}$ -modulos U -pequenos são U -pequenos, onde $\mathcal{R}$ é um anel comutativo com unidade U -pequeno; completamentos de espaços métricos U -pequenos, via classes de equivalência de seqüências de Cauchy, são U -pequenos; compactificações de Stone-Čech de espaços $T_{3+1/2}$ U -pequenos são U -pequenos; compactificações de Alexandroff de espaços T_2 localmente compactos U -pequenos são U -pequenos (para o espaço $\mathcal{X} = (X, \tau)$ podemos tomar, pela proposição (1i) e o axioma da regularidade, $\infty = \{X\}$) ; anéis de polinômios em $X \in U$ variáveis sobre anéis U -pequenos são U -pequenos; fechos algébricos de corpos U -pequenos são U -pequenos... . Assim, na matemática cotidiana, tudo se passa como se “vivêssemos” em um universo U fixo e arbitrário. Contudo, fazendo fundamentos, algumas questões são respondidas apenas quando consideramos condições adicionais sobre o universo de base. Algumas dessas surgirão adiante.

Agora, é natural considerarmos a:

Definição 2 : Sejam $U \in UNIV$ e C categoria, eventualmente classe própria:

(i) Denotamos por $C|_{U=}$ ($C|_{U\cong}$) a subcategoria plena de C de todos os objetos pertencentes a U (isomorfos a algum objeto pertencente a U) .

Exemplos: $U - SET = SET|_{U=}$; $U - CAT = CAT|_{U=}$; $obj(SET|_{U\cong}) = \{x \in V : \#x < \#U\}$.

(ii) C é uma categoria em $U \iff C \in obj(CAT|_{U=})$.

Exemplos: Se $W \in UNIV$ e $W \in U$ então $W - SET, W - GR, W - CAT, \dots$ são categorias em U ; se A e B são categorias em U então $B^A (= [A, B])$ é uma categoria em U .

(iii) C é uma categoria praticamente em $U \iff C \in obj(CAT|_{U\cong})$.

Exemplos: Se A e B são categorias praticamente em U então B^A é categoria praticamente em U .

(iv) C é uma categoria essencialmente em $U \iff esq(C)$ é uma categoria praticamente em U , onde $esq(C)$ é o (único a menos de isomorfismo) esqueleto de C .

Exemplos: Para cada cardinal $\lambda < \#U$ sejam $SET_{<\lambda}$, a subcategoria plena de SET dos conjuntos de cardinalidade $< \lambda$, $GR_{<\lambda}$, a subcategoria plena de GR dos grupos $< \lambda$ -gerados ; ...

(v) C é uma categoria localmente em $U \iff \forall a, b \in \text{obj}(C) (C(a, b) \in U)$.

Exemplos: $U-SET, U-GR, U-TOP, U-CAT, \dots$ são categorias localmente em U .

(vi) C é uma categoria praticamente localmente em $U \iff \forall a, b \in \text{obj}(C) (\#C(a, b) \in U)$.

Exemplos: Se A é categoria (praticamente) em U e B é categoria (praticamente) localmente em U então B^A é categoria praticamente localmente em U .

Observação 5 : Relativizamos acima as noções de categorias pequena e localmente pequena. Temos, para categorias praticamente localmente em $U \in UNIV$, lemas e mergulhos de Yoneda relativizados a $U-SET$ e que são compatíveis:

(i) Dada C categoria praticamente localmente em U o funtor de Yoneda $Y_C : C \rightarrow [C^*, SET]$ se fatora, a menos de isomorfismo natural, através de $i_U : [C^*, U-SET] \hookrightarrow [C^*, SET]$; i.e. $Y_C \cong i_U \circ Y_C^U$ e o funtor $Y_C^U : C \rightarrow [C^*, U-SET]$ tem a “propriedade de Yoneda relativizada”.

(ii) Se C está praticamente localmente em U e em U' e $U \subseteq U'$ então $i_{UU'} : [C^*, U-SET] \hookrightarrow [C^*, U'-SET]$, $Y_C^U : C \rightarrow [C^*, U-SET]$, $Y_C^{U'} : C \rightarrow [C^*, U'-SET]$ e $Y_C^{U'} \cong i_{UU'} \circ Y_C^U$.

(iii) De modo geral todas as definições, construções e teoremas da teoria das categorias podem ser relativizados e, freqüentemente, bastam três níveis $U_0 \in U_1 \in U_2 \in V$ (“conjuntos”, “classes” e “metaclasses”), arbitrários em princípio, que são “representativos” e onde podemos formular as definições, construções e teoremas. Assim, eventualmente não especificaremos os estágios em que estamos ou se estamos efetivamente tratando de classes próprias, no máximo nos limitando a observar que uma dada definição, construção ou teorema pode, de fato, ser relativizado.

1.2 Fatos básicos sobre categorias

Colocamos definições e alguns resultados necessários ao desenvolvimento do trabalho. As referências centrais são [159], [186]; para o item (1.2.4) sugerimos também [175].

1.2.1 Grafos e categorias

A existência deste item a esta altura, quando assumimos familiaridade “metateórica” de grafos e categorias, se justifica porque assim antecipamos exemplos importantes do nosso objeto de estudo: estruturas apresentadas “diagramaticamente”, como será precisado no cap.3 e item 6.2

Um grafo G é uma quadra ordenada $G = (G_0, G_1, d, c)$ tal que $G_0 (= \text{obj}(G))$ e $G_1 (= \text{mor}(G))$ são classes e $d (= \text{dom}_G)$ e $c (= \text{codom}_G)$ são funções tais que :

[diagrama: grafo]

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\quad d \quad} & G_0 \\ & \xrightarrow{\quad c \quad} & \\ & & G_0 \end{array} \quad (1.1)$$

Sejam G, G' grafos. Um homomorfismo F , de domínio G e codomínio G' é um par ordenado $F = (F_0, F_1)$ de funções tal que os diagramas (de classes e funções) comutam:

[diagrama: homomorfismo de grafos]

$$(1) \forall f \in G_1 (d' \circ F_1(f) = F_0 \circ d(f))$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\quad d \quad} & G_0 \\ F_1 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow F_0 \\ G'_1 & \xrightarrow{\quad d' \quad} & G'_0 \end{array} \quad (1.2)$$

$$(2) \forall f \in G_1 (c' \circ F_1(f) = F_0 \circ c(f))$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\quad c \quad} & G_0 \\ F_1 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow F_0 \\ G'_1 & \xrightarrow{\quad c' \quad} & G'_0 \end{array} \quad (1.3)$$

Seja G grafo, denotamos $\#G = \#G_0 + \#G_1$ (cardinalidade de G). G é um grafo pequeno $\iff G \in V$ ($\iff \#G < \infty$) e é U -pequeno $\iff G \in U \in UNIV$. $GRA(U - GRA)$ é a categoria dos grafos pequenos (U -pequenos) e homomorfismos.

C é uma categoria $\iff C = (C_0, C_1, d, c, i, k)$ onde $(C_0, C_1, d, c) (= \mathcal{E}_0(C))$ é um grafo e $i (= id_C)$ e $k (= comp_C)$ são funções : $i : C_0 \rightarrow C_1$ $a \mapsto 1_a$ e $k : C_2 \rightarrow C_1$ $(f, g) \mapsto g \circ f$; onde definimos as seguintes classes e funções :

- . $C_2 = \{(f, g) \in C_1 \times C_1 : d(g) = c(f)\}$.
- . $C_3 = \{(f, g, h) \in C_1 \times C_1 \times C_1 : (f, g) \in C_2 \wedge (g, h) \in C_2\}$.
- . $p_1, p_2 : C_2 \rightarrow C_1$.
- . $q_1, q_2, q_3 : C_3 \rightarrow C_1$.
- . $(q_1, q_2), (q_2, q_3), (q_1, k), (k, q_3) : C_3 \rightarrow C_2$.
- . $(i \circ d, 1_{C_1}), (1_{C_1}, i \circ c) : C_1 \rightarrow C_2$.

Tais que:

. C_2 e C_3 são dados como “limites projetivos canônicos” com (algumas) projeções dadas por p_1, p_2 e q_1, q_2, q_3 .

. As flechas restantes são definidas utilizando-se as propriedades universais de C_2 e C_3 .
[diagrama: categoria]

(1)def. C_2

(2)def. C_3

(3)def. (q_1, q_2)

(4)def. (q_2, q_3)

(1.7)

(5)def. (q_1, k)

(1.8)

(6)def. (k, q_3)

(1.9)

(7)def. $(i \circ d, 1_{C_1})$

(1.10)

(8)def. $(1_{C_1}, i \circ c)$

(1.11)

satisfazendo:

(9) $\forall a \in C_0(d(1_a) = a)$

(1.12)

(10) $\forall a \in C_0(c(1_a) = a)$

(1.13)

(11) $\forall (f, g) \in C_2(d(g \circ f) = d(f))$

(1.14)

$$(12) \forall (f, g) \in C_2 (c(g \circ f) = c(g))$$

(1.15)

$$(13) \forall f \in C_1 (f \circ 1_{d(f)} = f)$$

(1.16)

$$(14) \forall g \in C_1 (1_{c(g)} \circ g = g)$$

(1.17)

$$(15) \forall (f, g, h) \in C_3 (h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_3 & \xrightarrow{(q_1, k)} & C_2 \\
 \downarrow (k, q_3) & \curvearrowright & \downarrow k \\
 C_2 & \xrightarrow{k} & C_1
 \end{array}
 \quad (1.18)$$

Sejam C, C' categorias. Um funtor F de domínio C e codomínio C' é um par ordenado $F = (F_0, F_1)$ tal que $F(= \mathcal{E}_1(F))$ é um homomorfismo de domínio $\mathcal{E}_0(C)$ codomínio $\mathcal{E}_0(C')$ e tal que os diagramas comutam:

[diagrama: funtor]

$$(3) \forall a \in C_0(F_1(1_a) = 1'_{F_0(a)})$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{i} & C_1 \\
 \downarrow F_0 & \curvearrowright & \downarrow F_1 \\
 C'_0 & \xrightarrow{i'} & C'_1
 \end{array}
 \quad (1.19)$$

$$(4) \forall (f, g) \in C_2(F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ' F_1(f))$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xleftarrow{k} & C_2 \\
 \downarrow F_1 & \curvearrowright & \downarrow F_2 \\
 C'_1 & \xleftarrow{k'} & C'_2
 \end{array}
 \quad (1.20)$$

onde $F_2 = (F_1 \times F_1)|: C_2 \rightarrow C'_2$; isto é:

$$(5) \text{def. } F_2$$

$$\begin{array}{ccc}
C_2 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \times C_1 \\
F_2 \downarrow & & \downarrow F_1 \times F_1 \\
C'_2 & \xrightarrow{\quad} & C'_1 \times C'_1
\end{array} \tag{1.21}$$

Seja C categoria, denotamos $\#C = \#C_0 + \#C_1 (= \#\mathcal{E}_0(C))$. Notemos que $\#C_0 \leq \#C_1$ e C é categoria pequena (U -pequena) $\iff \mathcal{E}_0(C)$ é grafo pequeno (U -pequeno).

1.2.2 Categorias livres, quocientes e diagramas comutativos

Dado $n \in \omega$ denotamos por $\vec{n}$ o grafo pequeno (e que pertence a todo universo U !) tal que $\text{obj}(\vec{n}) = n \in \omega$ e $\forall i, j \in n \ \vec{n}(i, j) = \{(i, j)\}$ se $j = i + 1$ e $\vec{n}(i, j) = \emptyset$ se $j \neq i + 1$. Para cada grafo $G \in V (\in U)$ e para cada $n \in \omega$ definimos $L_n(G) = \overrightarrow{GRA}(n + 1, G) \in V (\in U)$, temos $L_n(G) \cap L_m(G) \neq \emptyset \Rightarrow n = m$. Portanto, se para cada $a, b \in \text{obj}(G)$, denotamos $L_n(G)(a, b) = \{\Gamma \in L_n(G) : \Gamma(0) = a \wedge \Gamma(n) = b\}$ temos $L_n(a, b) \cap L_m(c, d) \neq \emptyset \Rightarrow (n = m \wedge (a, b) = (c, d))$ e $\{L_n(a, b) : n \in \omega \wedge a, b \in G_0\} \in V (\in U)$. Definindo $\forall a, b \in G_0 \ (L(G)(a, b) = \cup_{n \in \omega} L_n(G)(a, b))$, $\forall n \in \omega \ (L_n(G) = \cup_{a, b \in G_0} L_n(G)(a, b))$ e $L(G) = \cup \{L_n(a, b) : n \in \omega \wedge a, b \in G_0\}$, notamos que:

(i) $G_0 \cong L_0(G)$ e $G_1 \cong L_1(G)$.

(ii) Temos funções evidentes :

. $i : G_0 \rightarrow L(G)$.

. $\forall n, m \in \omega \forall a, b, c \in G_0 \ (k_{(n, m)}(a, b, c) : L_n(G)(a, b) \times L_m(G)(b, c) \rightarrow L_{n+m}(G)(a, c))$.

(iii) Todas as reuniões acima são disjuntas.

(iv) As aplicações acima determinam uma categoria $\mathcal{L}(G)$ tal que $\text{obj}(\mathcal{L}(G)) = \text{obj}(G)$ e $\text{mor}(\mathcal{L}(G)) = L(G)$ e um homomorfismo universal $\eta(G) : G \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{L}(G))$, isto é: $\forall C$ categoria $\forall F : G \rightarrow \mathcal{E}(C) \ \exists ! F' : \mathcal{L}(G) \rightarrow C \ (F = \mathcal{E}(F') \circ \eta(G))$.

(v) $G \in V (\in U) \Rightarrow \mathcal{L}(G) \in V (\in U)$ e $\#\mathcal{L}(G) + \omega = \#G + \omega$.

(vi) Para toda categoria C e todo grafo $G \in V$, as categorias “exponenciais” C^G e $C^{\mathcal{L}(G)}$ são isomorfas.

(vii) Sejam $C \in (CAT)_0$ e $X = (X_0, X_1)$ onde $X_0 \subseteq C_0, X_1 \subseteq C_1$. Temos que $\mathcal{G}(X)$, o subgrafo de $\mathcal{E}(C)$ gerado por X , é tal que $\#X \leq \#\mathcal{G}(X) \leq \#X + 2 \cdot \#X_1$; $\mathcal{C}(X)$, a subcategoria de C gerada por X , é tal que $\#X \leq \#\mathcal{G}(X) \leq \#\mathcal{C}(X) \leq \#\mathcal{L}(\mathcal{G}(X))$ e $\omega + \#X = \omega + \#\mathcal{G}(X) = \omega + \#\mathcal{C}(X)$.

Uma relação R numa categoria C é uma aplicação $R : (a, b) \in C_0 \times C_0 \mapsto R_{ab} \subseteq C(a, b) \times C(a, b) \in \mathcal{P}(C_1 \times C_1)$. A relação R é uma congruência $\iff \forall a, b \in C_0 \ (R_{ab}$

é uma relação de equivalência em $C(a, b) \cap \bigwedge \forall a, b, c, d \in C_0 \forall g, g' \in C(b, c) \forall f \in C(a, b) \forall h \in C(c, d) ((g, g') \in R_{bc} \Rightarrow (h \circ g \circ f, h \circ g' \circ f) \in R_{ad})$. Temos que:

(i) A "intersecção" de congruências é congruência e, portanto, a classe das congruências numa categoria, ordenada por "inclusão", é um reticulado (grande) completo.

(ii) Se R é uma congruência em C podemos definir a categoria quociente C/R e o funtor projeção canônica $\Pi_R : C \rightarrow C/R$.

(iii) $C \in V (\in U) \Rightarrow C/R \in V (\in U)$.

Dado $F : C \rightarrow D$ funtor, seja $\ker(F)$ a relação em C tal que $\forall a, b \in C_0 (\ker(F)_{ab} = \{(f, g) \in C(a, b) \times C(a, b) : F(f) = F(g)\})$, então:

(i) $\ker(F)$ é uma congruência em C .

(ii) $F : C \rightarrow D$ se fatora como a composição de um funtor localmente sobrejetor (pleno) e um funtor localmente injetor (fiel).

(iii) Se R é congruência em C então $R = \ker(\Pi_R)$.

(iv) Temos o "teorema do homomorfismo": dada R , relação em C , então todo funtor $F : C \rightarrow D$ tal que $R \leq \ker(F)$ se fatora univocamente por $\Pi_{\langle R \rangle} : C \rightarrow C/\langle R \rangle$ onde $\langle R \rangle$ é a congruência em C gerada por R .

(v) Toda categoria C é determinada por geradores e relações: o funtor "composição em C " $\varepsilon(C) : \mathcal{L}(\mathcal{E}(C)) \rightarrow C$ é a identidade nos objetos, localmente sobrejetor e $C \cong \mathcal{L}(\mathcal{E}(C))/\ker(\varepsilon(C))$.

(vi) Para toda categoria $C \in V$, toda relação R em C e toda categoria A , as categorias $A^{(C, R)}$ e $A^{C/\langle R \rangle}$ são isomorfas, onde $A^{(C, R)}$ é a subcategoria plena de A^C tal que $\text{obj}(A^{(C, R)}) = \{F : C \rightarrow A : R \leq \ker(F)\}$.

Dados I grafo pequeno e C categoria (G grafo), os homomorfismos F de domínio I e codomínio $\mathcal{E}(C)$ (G) são denominados diagramas de tipo I em C (G)¹. $F : I \rightarrow \mathcal{E}(C)$ é um diagrama comutativo $\iff \forall i, j \in \text{obj}(I) \forall \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{L}(I)(i, j) (F(\Gamma) = F(\Gamma')) \iff \ker(F') = \top_{\text{cong}(\mathcal{L}(I))}$ (= máximo do reticulado das congruências em $\mathcal{L}(I)$).

Dados G grafo ($G \in V; G \in U$) e D classe de diagramas de tipo pequeno ($D \in V; D \in U$) seja $R(D)$ a relação em $\mathcal{L}(G)$ tal que $\forall g, h \in \text{obj}(G) (R(D)_{gh} = \{(\Gamma, \Gamma') \in (\mathcal{L}(G)(g, h))^2 : \exists d : I \rightarrow G \in D \exists i, j \in \text{obj}(I) \exists (\Psi, \Psi') \in (\mathcal{L}(I)(i, j))^2 ((g, h) = (d(i), d(j)) \wedge (\Gamma, \Gamma') = (\mathcal{L}(d)(\Psi), \mathcal{L}(d)(\Psi')))\})$, então a categoria $(\in V; \in U) (G : D) = \mathcal{L}(G)/\langle R(D) \rangle$ e o diagrama $\nu(G, D) = \mathcal{E}(\Pi_{\langle R(D) \rangle}) \circ \eta(G) : G \rightarrow \mathcal{E}((G : D))$ são tais que:

(i) $\forall d \in D (\nu(G, D) \circ d$ é diagrama comutativo) (notar que $(\eta(G) \circ d)' = \mathcal{L}(d) : \mathcal{L}(I) \rightarrow \mathcal{L}(G)$).

(ii) $\forall C$ categoria $(\in V; \in U) \forall M : G \rightarrow \mathcal{E}(C) (\forall d \in D (M \circ d$ é diagrama comutativo) $\Rightarrow \exists! \bar{M} : (G : D) \rightarrow C (M = \mathcal{E}(\bar{M}) \circ \nu(G, D))$ (notar que $(M \circ d)' = M' \circ \mathcal{L}(d) : \mathcal{L}(I) \rightarrow C$).

¹Convém definir diagramas em categorias como um par homomorfismo-categoria pois categorias distintas podem ter mesmo grafo subjacente.

(iii) $\#(G : D) \leq \omega + \#G$.

Destacamos que para todo G grafo pequeno ($G \in V; G \in U$), toda classe D de diagramas de tipo pequeno em G ($D \in V; D \in U$) e toda categoria C ($C \in V; C \in U$) temos $C^{(G,D)} \cong C^{(G:D)}$ onde $C^{(G:D)}$ é a subcategoria plena de C^G ($\in V; \in U$) tal que $\text{obj}(C^{(G:D)}) = \{M : G \rightarrow \mathcal{E}(C) : \forall d \in D(M \circ d \text{ é diagrama comutativo})\}$.

1.2.3 Cones

Seja C categoria; um objeto inicial $a \in \text{obj}(C)$ é estrito $\iff \forall c \in \text{obj}(C)(c \neq a \Rightarrow C(c, a) = \emptyset)$. Temos que:

(i) Exemplo: $\emptyset \in \text{obj}(SET)$ ($\emptyset \in \text{obj}(U - SET)$).

(ii) Se uma categoria possui objeto inicial estrito então este é único, e não apenas único a menos de isomorfismo (notação: $-\infty$).

(iii) Toda categoria pequena C pode ser imersa numa categoria pequena com objeto inicial estrito C^- de modo que se C está praticamente em U então $C^- \in \text{obj}(U - CAT)$:

Para cada C seja (axioma da escolha global!) $F : C \rightarrow C'$ isomorfismo, com $C' \in \text{obj}(U - CAT)$ e onde supomos $\text{mor}(C') \cap \{(\text{obj}(C'), c') : c' \in \text{obj}(C')\} = \emptyset$ e $(\text{obj}(C'), \text{obj}(C')) \notin \text{mor}(C')$. Definimos:

(i) $\text{obj}(C^-) = \text{obj}(C') \cup \{-\infty\}$ onde $-\infty = \text{obj}(C')$.

(ii) $C^-(-\infty, -\infty) = \{(-\infty, -\infty)\}$.

(iii) $\forall c \in \text{obj}(C) (C^-(-\infty, F(c)) = \{(-\infty, F(c))\} \wedge C^-(F(c), -\infty) = \emptyset)$.

(iv) Definimos de modo natural as funções d, c, i, k e o funtor $J : C \rightarrow C^-$.

Temos que:

(i) $\#C_0^- = \#C_0 + 1$ e $\#C_1^- = \#C_1 + \#C_0 + 1$.

(ii) $J : C \rightarrow C^-$ tem a seguinte propriedade: $\forall A$ categoria com objeto inicial $\forall F : C \rightarrow A$ funtor $\exists F' : C^- \rightarrow A$ funtor que preserva objetos iniciais tal que $F' \circ J \cong F$.

Temos ainda:

(i) No item (1.3.3) observaremos que $J : C \rightarrow C^-$ é $\mathcal{I}$ -ind completamente forte e fraco de C com $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$.

(ii) Se A possui um único objeto inicial então para todo $F : C \rightarrow A$ F' é único e $F' \circ J = F$.

(iii) O funtor de inclusão $I : CAT_{\text{obj.ini.estr.}} \hookrightarrow CAT$ tem adjunto à esquerda $(-)^-$, onde $CAT_{\text{obj.in.estr.}}$ é a categoria das categorias pequenas com objeto inicial estrito e funtores que preservam objetos iniciais (notemos que estes funtores se restringem aos universos).

Seja G grafo; $a \in \text{obj}(G)$ é um (único!) objeto inicial estrito $\iff G(a, a) = \emptyset \wedge \forall g \in \text{obj}(G)(g \neq a \Rightarrow (\#G(a, g) = 1 \wedge G(g, a) = \emptyset))$. Assim para cada grafo pequeno G construímos, analogamente às categorias, um homorfismo de imersão $J : G \rightarrow G^-$, onde G^- é um grafo pequeno com (único) objeto inicial estrito, tal que:

(i) $\#obj(G^-) = \#obj(G) + 1$ e $\#mor(G^-) = \#mor(G) + \#obj(G)$.

(ii) O funtor de inclusão $I : GRA_{obj.ini.estr.} \hookrightarrow GRA$ tem adjunto à esquerda $(-)^-$, onde $GRA_{obj.ini.estr.}$ é a categoria dos grafos pequenos com objeto inicial estrito e homomorfismos que preservam objetos iniciais estritos (esta adjunção se restringe a cada universo U).

Dualmente definimos, para categorias (grafos), a noção de objeto final estrito $(+\infty)$ e construímos para categorias (grafos) pequenos C (G) funtores (homomorfismos) de imersão $J : C \rightarrow C^+$ ($J : G \rightarrow G^+$) em categorias (grafos) pequenos com objeto final estrito C^+ (G^+) com propriedades universais duais e que se restringem aos universos.

Fixamos, pelo axioma da escolha global, imersões J determinando adjuntos à esquerda dos funtores de inclusão $I : CAT_{obj.ini.estr.} \hookrightarrow CAT$, $I : GRA_{obj.ini.estr.} \hookrightarrow GRA$, $I : CAT_{obj.fin.estr.} \hookrightarrow CAT$ e $I : GRA_{obj.fin.estr.} \hookrightarrow GRA$, que se restringem aos universos. Denotamos, para $C \in obj(CAT)$ ($G \in obj(GRA)$), $C^-(-\infty, J(c)) = \{\pi(c)\}$ e $C^+(J(c), +\infty) = \{\iota(c)\}$ ($G^-(-\infty, J(g)) = \{\pi(g)\}$ e $G^+(J(g), +\infty) = \{\iota(g)\}$).

Notamos que:

(i) C categoria $\Rightarrow (C^\pm)^* \cong (C^*)^\mp$.

(ii) G grafo $\Rightarrow (G^\pm)^* \cong (G^*)^\mp$.

(iii) G grafo não discreto (i.e. $mor(G) \neq \emptyset$) $\iff (\mathcal{L}(G))^\pm \not\cong \mathcal{L}(G^\pm)$.

Dados I grafo pequeno e C categoria (G grafo), os homomorfismos de domínio I^- e codomínio $\mathcal{E}(C)$ (G) são denominados cones projetivos de tipo I em C (G)². Dados G grafo e $p : I^- \rightarrow G$ cone projetivo então $base(p) = p \circ J : I \rightarrow G$ e $vértice(p) = p(-\infty)$. $p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C)$ é um cone projetivo comutativo $\iff \forall i, j \in obj(I) \forall u \in I(i, j) (p(u) \circ p(\pi(i)) = p(\pi(j)))$.

Claramente temos bijeções :

(i) $I \in obj(GRA) \Rightarrow \{p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo}\} \cong \{q : \mathcal{L}(I)^- \rightarrow C\}$.

(ii) $I \in obj(CAT) \Rightarrow \{q : I^- \rightarrow C\} \cong \{p : \mathcal{E}(I)^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo}\}$.

(iii) $I \in obj(GRA) \wedge H : I \rightarrow \mathcal{E}(C) \wedge c \in obj(C) \Rightarrow \{p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo} \wedge base(p) = H \wedge vértice(p) = c\} \cong NAT(\Delta_I(c), H)$ onde $\Delta_I : C \rightarrow C^I$ é o funtor “diagonal”.

(iv) $I \in obj(CAT) \wedge F : I \rightarrow C \wedge c \in obj(C) \Rightarrow \{q : I^- \rightarrow C : base(q) = F \wedge vértice(q) = c\} \cong NAT(\Delta_I(c), F)$.

(v) $I \in obj(GRA) \wedge H : I \rightarrow \mathcal{E}(C) \wedge c \in obj(C) \Rightarrow \{p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo} \wedge base(p) = H \wedge vértice(p) = c\} \cong NAT(\Delta_{\mathcal{L}(I)}(c), F)$ onde $F = H' : \mathcal{L}(I) \rightarrow C$.

(vi) $I \in obj(CAT) \wedge F : I \rightarrow C \wedge c \in obj(C) \Rightarrow \{q : I^- \rightarrow C : base(q) = q \circ J = F \wedge vértice(q) = q(-\infty) = c\} \cong NAT(\Delta_{\mathcal{E}(I)}(c), H)$ onde $H = \mathcal{E}(F) : \mathcal{E}(I) \rightarrow \mathcal{E}(C)$.

Dados I grafo pequeno, C categoria definimos $coneproj(I, C) = C^{(I^-)}$ e $coneprojcom(I, C)$ a subcategoria plena (e fechada por isomorfismos) de $coneproj(I, C)$ tal que $obj(coneprojcom(I,$

²Para categorias convém considerarmos cones como um par homomorfismo-categoria, pois categorias distintas podem ter mesmo grafo subjacente.

$C)) = \{p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo}\} \text{ (} \text{coneprojcom}(I, C) \cong C^{(\mathcal{L}(I)^-)} \text{)}. \text{ Dado } H : I \rightarrow \mathcal{E}(C) \text{ denotamos } H - \text{coneprojcom} \text{ a subcategoria de } \text{coneprojcom}(I, C) \text{ com } \text{obj}(H - \text{coneprojcom}) = \{p : I^- \rightarrow \mathcal{E}(C) : p \text{ é comutativo} \wedge \text{base}(p) = H\} \text{ e tal que } \forall p, p' \in \text{obj}(H - \text{coneprojcom}) \text{ (} H - \text{coneprojcom}(p, p') = \{\eta \in \text{NAT}(p, p') : \eta J = 1_H : H \rightarrow H\} \text{)}. \text{ A subcategoria plena, eventualmente vazia, de } H - \text{coneprojcom} \text{ dos seus objetos finais (limites projetivos) é denotada } H - \text{coneprojlím} ; \text{coneprojlím}(I, C) \text{ é a subcategoria plena (e fechada por isomorfismos) de } \text{coneprojcom}(I, C) \text{ dos cones projetivos que são limites para alguma base } H : I \rightarrow \mathcal{E}(C) \text{. Quando } C \in \text{obj}(CAT) \text{ temos uma bijeção entre os cones projetivos limites de base } H \text{ e as representações do funtor } \text{NAT}(\Delta_{\mathcal{L}(I)}(-), H') : C^* \rightarrow SET \text{. Para } I \text{ categoria pequena e } C \text{ categoria definimos } \text{coneprojcom}(I, C) = C^{(I^-)} \text{, ...}$

Analogamente definimos, através do funtor $(-)^+ : GRA \rightarrow GRA_{\text{obj, fin, estr.}}$ ($(-)^+ : CAT \rightarrow CAT_{\text{obj, fin, estr.}}$), cones indutivos, cones indutivos comutativos e cones indutivos limites (cones indutivos comutativos e cones indutivos limites).

Temos assim várias definições alternativas de cones projetivos/indutivos comutativos e cones projetivos/indutivos limites. A noção, mais geral, de cone proj./ind. sobre grafos, obtida através dos funtores $(-)^\mp$, é necessária no capítulo 3.

A esta seção acrescentamos os seguintes fatos:

(i) Dados I grafo pequeno e C categoria temos isomorfismo : $\text{coneproj}(I, C) \cong \text{coneind}(I^*, C^*)$ que se restringe às subcategorias plenas dos cones comutativos e limites e às subcategorias dos cones, cones comutativos, cones limites com bases $H : I \rightarrow \mathcal{E}(C)$ e $H^* : I^* \rightarrow \mathcal{E}(C^*)$.

(ii) Dado $F : I \rightarrow C$ funtor:

$$\cdot \text{NAT}(\Delta_I(c), F) \cong \varprojlim_{I} C(c, F(i)) \text{ natural em } c \in (C^*)_0 \cdot$$

$$\cdot \text{NAT}(F, \Delta_I(c)) \cong \varprojlim_{I^*} C(F(i), c) \text{ natural em } c \in C_0 \cdot$$

(iii) Em geral, dados $F, F' : I \rightarrow C$ funtores:

$$\text{NAT}(F, F') \cong \int_I C(F(-), F'(-)) \cong \varprojlim_{I^\S} C(F(-), F'(-))^\S \cong \text{“ } \varprojlim_{u \in \text{mor}(C)} C(F(c(u)), F'(d(u))) \text{”}$$

($I^\S$ é a categoria (associada a uma pré-ordem) de subdivisão de I).

(iv) Dado $J \in CAT(C, A)$ temos funtores $J^\rightarrow : A \rightarrow (CAT \rightarrow C)$ e $J^\leftarrow : A \rightarrow (CAT \rightarrow C)^*$:

$$\begin{array}{ccc} J^\rightarrow : A & \xrightarrow{\quad} & (CAT \rightarrow C) \\ \begin{array}{c} a \\ \downarrow f \\ b \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} (J^\rightarrow a) \\ \downarrow (J^\rightarrow f) \\ (J^\rightarrow b) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow P(a) \\ \searrow P(b) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ C \end{array}$$

(1.22)

$$\begin{array}{ccc}
J^{\leftarrow} : A & \longrightarrow & (CAT \rightarrow C)^* \\
\downarrow f & \lrcorner & \uparrow (a \rightarrow J) \\
a & \longrightarrow & (f \Rightarrow J) \\
\downarrow & & \uparrow (b \rightarrow J) \\
b & &
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& & P(a) \\
& \searrow & \nearrow \\
& C & \\
& \nearrow & \searrow \\
& P(b) &
\end{array}
\end{array}
\quad (1.23)$$

Temos que:

- . $\forall F \in CAT(I, C) \ (NAT(J \circ F, \Delta_I(a)) \cong (CAT \rightarrow C)(F, J^{\rightarrow}(a)))$ natural em $a \in A_0$.
- . $\forall F \in CAT(I, C) \ (NAT(\Delta_I(a), J \circ F) \cong (CAT \rightarrow C)^*(J^{\leftarrow}(a), F))$ natural em $a \in (A^*)_0$

. Se $J \in U - CAT(C, A)$ podemos substituir $CAT \rightsquigarrow U - CAT$.

. Se C está praticamente localmente em $U \in UNIV$ podemos substituir $CAT \rightsquigarrow CAT_{prat.loc.U}$.

(v) Dados $I, C \in obj(CAT)$ temos funtores evidentes:

. $Proj_I : C^I \rightarrow CAT \ (F \xrightarrow{\eta} F') \mapsto (F - cone_{projcom} \xrightarrow{Proj_I(\eta)} F' - cone_{projcom})$.

. $Ind_I : (C^I)^* \rightarrow CAT \ (F \xrightarrow{\eta} F') \mapsto (F' - cone_{indcom} \xrightarrow{Ind_I(\eta)} F - cone_{indcom})$.

Se $\eta : F \xrightarrow{\cong} F'$ então:

. $(Proj_I(\eta))| : F - cone_{projlim} \xrightarrow{\cong} F' - cone_{projlim}$.

. $(Ind_I(\eta))| : F - cone_{indlim} \xleftarrow{\cong} F' - cone_{indlim}$.

Se $F \cong F' : I \rightarrow C$, F admite limite projetivo (indutivo) $\iff F'$ admite limite projetivo (indutivo) e estes são isomorfos quando existem.

(vi) Dada C categoria temos funtores evidentes: $transporte^-, transporte^+ : (CAT \rightarrow C)^* \rightarrow CAT$ que associam a cada “triângulo comutativo”:

$$\begin{array}{ccc}
I & & C \\
\downarrow T & \lrcorner & \uparrow F' \\
I' & &
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& & F \\
& \searrow & \nearrow \\
& C & \\
& \nearrow & \searrow \\
& F' &
\end{array}
\end{array}$$

(1.24)

as flechas :

. $_ \circ T^- : F' - cone_{projcom} \rightarrow F - cone_{projcom}$.

. $_ \circ T^+ : F' - cone_{indcom} \rightarrow F - cone_{indcom}$.

(vii) Dada C categoria definimos as categorias $DIAG(C)$, $DIAG(C) : . obj(DIAG(C)) = obj(DIAG(C)) = I \in (CAT)_0 FUNT(I, C)$.

. $\forall F : I \rightarrow C \ \forall F' : I' \rightarrow C \ (\xrightarrow{DIAG(C)}(F, F') = \{(T, \eta) : T \in FUNT(I, I') \wedge \eta \in NAT(F, F' \circ T)\} \wedge \xleftarrow{DIAG(C)}(F, F') = \{(T, \eta) : T \in FUNT(I, I') \wedge \eta \in NAT(F' \circ T, F)\})$.

$\xrightarrow{DIAG(C)} :$

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \downarrow T & \searrow F & \\ & \Downarrow \eta & \\ I' & \nearrow F' & C \end{array}$$

(1.25)

identidade : $(1_I, 1_F) : F \rightarrow F$

composição : $F \xrightarrow{(T, \eta)} F' \xrightarrow{(T', \eta')} F'' = F \xrightarrow{(T' \circ T, \eta' \circ \eta)} F''$

$\xleftarrow{DIAG(C)} :$

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \downarrow T & \nearrow F & \\ & \Uparrow \eta & \\ I' & \nwarrow F' & C \end{array}$$

(1.26)

identidade : $(1_I, 1_F) : F \rightarrow F$

composição : $F \xrightarrow{(T, \eta)} F' \xrightarrow{(T', \eta')} F'' = F \xrightarrow{(T' \circ T, \eta' \circ \eta)} F''$

(viii) Através da bijeção $C_0 \cong FUNT(1, C)$ obtemos funtores $\xrightarrow{\Delta(C)} : C \rightarrow \xrightarrow{DIAG(C)}(C) ; \xleftarrow{\Delta(C)} : C^* \rightarrow \xleftarrow{DIAG(C)}(C)$ tais que $\forall F : I \rightarrow C \ (F - coneindlim \cong plena((F \rightarrow \xrightarrow{\Delta(C)}(C))_{obj.ini.}) \wedge F - coneprojlim \cong plena((F \rightarrow \xleftarrow{\Delta(C)}(C))_{obj.ini.}))$.

(ix) Sejam I, A, C categorias e $H : I \rightarrow C ; J : C \rightarrow A$ funtores:

. Dado $p \in (H - coneprojlim)_0 \ (J \text{ preserva } p \iff J \circ p \in (J \circ H - coneprojlim)_0)$.

J preserva limites projetivos para $H \iff \forall p \in (H - coneprojlim)_0 \ (J \text{ preserva } p)$.

Obs.: $(H - coneprojlim)_0 \neq \emptyset \Rightarrow (J \text{ preserva limites projetivos para } H \iff \exists p \in (H - coneprojlim)_0 \ (J \text{ preserva } p))$.

Ex.: C categoria localmente pequena (localmente em U) $\wedge c \in C_0 \Rightarrow C(c, -) : C \rightarrow SET \ (C(c, -) : C \rightarrow U - SET)$ preserva todos os limites projetivos.

(x) Sejam I, A, C categorias e $H : I \rightarrow C ; J : C \rightarrow A$ funtores:

. Dado $q \in (J \circ H - coneprojlim)_0 \ (J \text{ cria } q \iff \exists ! p \in (H - coneprojcom)_0 \ (q = J \circ p \wedge p \in (H - coneprojlim)_0)$. J cria limites projetivos para $H \iff \forall q \in (J \circ H - coneprojlim)_0$

(J cria q) .

Ex.:

. $\forall U \in UNIV$ ($i : U - SET \hookrightarrow SET$ cria limites proj./ind. canônicos U -pequenos)
(mas não todos os limites proj./ind. U -pequenos !).

. Se $J : C \rightarrow A$ preserva todos os limites projetivos (indutivos) I -indexados então para cada $a \in A_0$ $P(a) : (a \rightarrow J) \rightarrow C$ ($P(a) : (J \rightarrow a) \rightarrow C$) cria todos os limites projetivos (indutivos) I -indexados.

. Limites projetivos (indutivos) em categorias exponenciais são “pontuais”:

Seja B categoria pequena e $j : D(B_0) \rightarrow B$ a imersão da, única a menos de isomorfismo, categoria discreta com objetos B_0 em B , então para cada categoria C o funtor $C^j : C^B \rightarrow C^{D(B_0)}$ cria limites projetivos (indutivos) para todo tipo I . Notemos que $B_0 \neq \emptyset \Rightarrow (C^B I - proj (I - ind) completa \iff C I - proj (I - ind) completa)$; neste caso os $I - proj (I - ind)$ limites em C^B são pontuais, em particular, para cada funtor $F : A \rightarrow B$ o funtor $C^F : C^B \rightarrow C^A$ preserva I -limites projetivos (indutivos).

(xi) Definições e resultados semelhantes aos em (ix),(x) ocorrem quando consideramos $I \in obj(GRA)$ e $H : I \rightarrow \mathcal{E}(C)$ homomorfismo:

. J cria limites proj. (ind.) para $H \Rightarrow J$ preserva limites proj. (ind.) para H .

. Se C, A são I -proj completas (I -ind completas) então existem morfismos canônicos $can : J(\varprojlim_I H) \rightarrow \varprojlim_I (J \circ H)$ ($can : \varprojlim_I (J \circ H) \rightarrow J(\varprojlim_I H)$); neste caso J preserva limites projetivos (indutivos) para $H \iff$ os (essencialmente únicos) morfismos canônicos são isomorfismos.

1.2.4 O funtor “componentes conexas” e funtores finais/iniciais

Para cada grafo G definimos $R(G) = \{(g, h) \in G_0 \times G_0 : G(g, h) \neq \emptyset\}$, então:

(i) Dada C categoria $R(\mathcal{E}(C))$ é pré-ordem (reflexiva + transitiva) em C_0 .

(ii) Dado $F : G \rightarrow G'$ homomorfismo $(F_0 \times F_0)_*(R(G)) \subseteq R(G')$.

Para cada grafo G denotamos $\bar{R}(G)$ a relação de equivalência em G_0 gerada por $R(G)$, então:

(i) Dado $F : G \rightarrow G'$ homomorfismo $(F_0 \times F_0)_*(\bar{R}(G)) \subseteq \bar{R}(G')$.

(ii) Existe um funtor, que se restringe aos universos, $\Gamma : GRA \rightarrow SET$ tal que $\Gamma(G \xrightarrow{F} G') = G_0/\bar{R}(G) \xrightarrow{\bar{F}} G'_0/\bar{R}(G')$.

Definimos o funtor “componentes conexas” $\pi_0 : CAT \rightarrow SET$ como a composição do funtor “esquecimento” $\mathcal{E} : CAT \rightarrow GRA$ com o funtor Γ , naturalmente isomorfo a $\Gamma : GRA \rightarrow SET$, tal que $\forall G \in obj(GRA)$ $\Gamma'(G) = \{H \in obj(GRA) : H \text{ é subgrafo pleno, não vazio, de } G \text{ determinado por alguma classe de objetos } H_0 \in G_0/\bar{R}(G)\}$. Temos que:

(i) π_0 se restringe aos universos : $\pi_0 : U - CAT \rightarrow U - SET$.

(ii) $\pi_0(\emptyset) = \emptyset$.

(iii) $\forall C \in \text{obj}(CAT) ((\pi_0(C^*) \cong \pi_0(C)))$.

(iv) Sejam $\mathcal{D} : SET \rightarrow CAT$ o funtor “categoria discreta” e $\mathbf{2}$ o grafo $0 \xrightarrow{(0,1)} 1$, então $can : C \rightarrow \mathcal{D}(\pi_0(C))$ determina em CAT um coigualador de $\epsilon v_0, \epsilon v_1 : C^2 \rightarrow C$ e π_0 é adjunto à esquerda de $\mathcal{D}$.

(v) $\forall C \in \text{obj}(CAT) (C = \coprod_{C' \in \pi_0(C)} C')$.

(vi) Dado $F : I \rightarrow C$ funtor, $\pi_0((c \rightarrow F)) \cong \varinjlim_I C(c, F(-))$ natural em $c \in (C^*)_0$ e, como $(F \rightarrow c)^* \cong (c \rightarrow F^*)$, temos $\pi_0((F \rightarrow c)) \cong \varinjlim_{I^*} C(F(-), c)$ natural em $c \in C_0$.

Sejam $T : I \rightarrow I'$ funtor. T é funtor final $\iff \forall i' \in \text{obj}(I') ((i' \rightarrow T) \text{ é não vazia e conexa}) \xLeftrightarrow{I, I' \in (CAT)_0} \pi_0((- \rightarrow T)) \cong \Delta_{I^*}(1) : I'^* \rightarrow SET$. Temos então:

(i) $\Delta_1(c) : \mathbf{1} \rightarrow C$ é funtor final $\iff c \in C_0$ é objeto final.

(ii) $can : C \rightarrow \mathcal{D}(\pi_0(C))$ é funtor final.

(iii) $1_{I'} : I' \rightarrow I'$ é final.

(iv) $T : I \rightarrow I', T' : I' \rightarrow I''$ finais $\Rightarrow T' \circ T : I \rightarrow I''$ final.

(v) Sejam $T : I \rightarrow I'$ e $T' : I' \rightarrow I''$ funtores, então:

. T final $\wedge T' \circ T$ final $\Rightarrow T'$ final.

. T' hom-bijetor $\wedge T' \circ T$ final $\Rightarrow T$ final.

. T' hom-bijetor $\Rightarrow (T' \circ T \text{ final} \iff (T \text{ final} \wedge T' \text{ final}))$.

(vi) $T : I \rightarrow I'$ final $\Rightarrow \forall C$ categoria $\forall F' : I' \rightarrow C ((-) \circ T^+ : F' - \text{coneindcom} \xrightarrow{\cong} F' \circ T - \text{coneindcom})$; em particular, $((-) \circ T^+) : F' - \text{coneindlim} \xrightarrow{\cong} F' \circ T - \text{coneindlim}$, logo F' admite limite indutivo $\iff F' \circ T$ admite limite indutivo e, quando existem, são canonicamente isomorfos $can : \varinjlim_I F' \circ T \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{I'} F'$.

Sejam $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subseteq \text{obj}(CAT) : \mathcal{I} \preceq^+ \mathcal{I}' \iff \forall I' \in \mathcal{I}' \exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow I' (T \text{ é final})$.

Assim:

(i) Dado U universo, $\preceq^+$ é pré-ordem em $\mathcal{P}(\text{obj}(U - CAT))$.

(ii) Dado $M : C \rightarrow C'$ funtor, se M preserva limites indutivos de tipo $\mathcal{I}$ então M preserva limites indutivos de tipo $\mathcal{I}'$.

Dualmente definimos: $T : I \rightarrow I'$ é funtor inicial $\iff \forall i' \in \text{obj}(I') ((T \rightarrow i') \text{ é não vazia e conexa})$. Analogamente temos $T : I \rightarrow I'$ inicial $\Rightarrow \forall C$ categoria $\forall F' : I' \rightarrow C ((-) \circ T^- : F' - \text{coneprojcom} \xrightarrow{\cong} F' \circ T - \text{coneprojcom})$.

Notemos que:

(i) $I \neq \emptyset \wedge T : I \rightarrow I'$ localmente bijetor $\Rightarrow \forall i \in I_0 ((T(i) \rightarrow T) \text{ possui objeto inicial} \wedge (T \rightarrow T(i)) \text{ possui objeto final})$.

(ii) $T : I \xrightarrow{\cong} I'$ equivalência $\Rightarrow T$ final $\wedge T$ inicial.

1.3 Mais categorias!

Colocamos mais alguns desenvolvimentos da teoria das categorias necessários ao trabalho. As referências básicas são [159] , [186] . Constam ainda referências adicionais em cada item.

1.3.1 Adjunção

Neste item tratamos de algumas noções correlatas a de adjunção .

Abaixo definimos adjunção relativa a um funtor dado.

Referência adicional : [198] .

Definição 1 : Sejam A', A, B categorias, A, B localmente pequenas e os funtores $J : A' \rightarrow A$, $G : B \rightarrow A$, $F : A' \rightarrow B$.

(i) F é J -adjunto à esquerda de $G \iff B(F_-, -) \cong A(J_-, G_-) : A'^* \times B \rightarrow SET$.

(ii) F é J -adjunto à direita de $G \iff B(-, F_-) \cong A(G_-, J_-) : B^* \times A' \rightarrow SET$.

Observação 1 :

(i) Diferentemente do caso clássico ($J = 1_A : A \rightarrow A$) tem-se :

. Perda da simetria: F J -adjunto à esquerda (direita) de $G \nRightarrow G$ J -adjunto à direita (esquerda) de F .

. Em geral, F não determina G : existem funtores J, F, G, H tais que F é J -adjunto à esquerda (direita) de $G, H : B \rightarrow A$ mas $G \not\cong H$.

(ii) Preservam-se algumas propriedades:

. F é J -adjunto à esquerda (direita) de $G \iff \exists \eta \in [A', A](J, G \circ F) \text{ (} \exists \epsilon \in [A', A](G \circ F, J) \text{) "universal"; logo } G \text{ determina } F \text{ a menos de isomorfismo.}$

. G possui J -adjunto à esquerda (direita) $\iff \forall a' \in (A')_0 \exists (F_0(a'), \eta_{a'}) \in \text{obj}(J(a') \rightarrow G)$ objeto inicial ($\exists (F_0(a'), \epsilon_{a'}) \in \text{obj}(G \rightarrow J(a'))$ objeto final).

. Dados F J -adjunto à esquerda de G e $i : X^+ \rightarrow A'$ cone indutivo limite então $J \circ i$ limite $\Rightarrow F \circ i$ limite.

. Dados F J -adjunto à direita de G e $p : X^- \rightarrow A'$ cone projetivo limite então $J \circ p$ limite $\Rightarrow F \circ p$ limite.

(iii) Seja o diagrama de categorias e funtores:

$$\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{G} & A \\
& \nearrow F' & \uparrow J \\
& & A' \quad \curvearrowright \\
& & \uparrow J' \\
& & A''
\end{array}
\quad J \circ J'$$

(1.27)

Assumimos que:

- . B, A são localmente pequenas.
- . Para todo $a' \in (A')_0$ existe (e pelo axioma da escolha forte fixemos algum !) $\Gamma_{a'} : X_{a'} \rightarrow A''$ tal que $a' \cong \lim_{\overrightarrow{X_{a'}}} J' \circ \Gamma_{a'}$.

- . J preserva os limites dados acima.
- . F' é $J \circ J'$ -adjunto à esquerda de G .

Então são equivalentes:

- . $\exists F$ J -adjunto à esquerda de G (neste caso $F \circ J' \cong F'$).
- . $\forall a' \in (A')_0 \exists \lim_{\overrightarrow{X_{a'}}} F' \circ \Gamma_{a'}$.

(iv) Dado $G : B \rightarrow A$ sejam $[G]_l = \{a \in A_0 : (a \rightarrow G) \text{ possui objeto inicial}\}$, A' a subcategoria plena de A com $(A')_0 = [G]_l$, $J : A' \hookrightarrow A$ e $F : A' \rightarrow B$ adjunto parcial máximo de G (J -adjunto a esquerda de G) então:

- . A' é fechada por isomorfismos.
- . $\forall \Gamma : X \rightarrow A' \left(\exists \lim_{\overrightarrow{X}} F \circ \Gamma \Rightarrow (J \text{ cria limites indutivos para } \Gamma \wedge F \text{ preserva } \Gamma\text{-limites indutivos}) \right)$.

Proposição 1 : Sejam $C, A, X \subseteq (CAT)_0$, $J : C \rightarrow A$, $\Gamma : X \rightarrow CAT$, $W = \lim_{\overrightarrow{X}} \Gamma$, $\forall x \in X_0 (j_x : \Gamma(x) \rightarrow W)$, $F : W \rightarrow C$.

(i) Se $\forall x \in X_0 \exists \lim_{\overrightarrow{\Gamma(x)}} J \circ F \circ j_x$ então $\lim_{\overrightarrow{W}} J \circ F \stackrel{\exists}{\cong} \lim_{\overrightarrow{X}} (\lim_{\overrightarrow{\Gamma(x)}} J \circ F \circ j_x)$, isto é, um lado existe exatamente quando o outro existe e quando existem são isomorfos.

(ii) Se $\forall x \in X_0 \exists \lim_{\overleftarrow{\Gamma(x)}} J \circ F \circ j_x$ então $\lim_{\overleftarrow{W}} J \circ F \stackrel{\exists}{\cong} \lim_{\overleftarrow{X^*}} (\lim_{\overleftarrow{\Gamma(x)}} J \circ F \circ j_x)$, isto é, um lado existe exatamente quando o outro existe e quando existem são isomorfos.

□

(i) Sejam $J^\rightarrow : A \rightarrow (CAT \rightarrow C)$ como no item (1.2.3) e L seu adjunto à esquerda, parcial, máximo, então $\forall H : Z \rightarrow C \in (CAT \rightarrow C)_0 \left([Z, A](J \circ H, \Delta_Z(-)) \cong (CAT \rightarrow C)(H, J^\rightarrow(-)) \right)$

) , portanto $H \in [J^\rightarrow]_l \iff \exists \lim_{\overrightarrow{Z}} J \circ H$ e $L(H) \cong \lim_{\overrightarrow{Z}} J \circ H$. Como CAT é V -ind completa e $P_C : (CAT \rightarrow C) \rightarrow CAT$ cria todos limites indutivos $F \cong \lim_{\overrightarrow{X}} (F \circ j_x)$. Utilizando a observação 1.(iv) acima temos: $\lim_{\overrightarrow{W}} J \circ F \cong L(F) \cong \lim_{\overrightarrow{X}} L(F \circ j_x) \cong \lim_{\overrightarrow{X}} \lim_{\overrightarrow{\Gamma(x)}} (J \circ F \circ j_x)$.

(ii) Dualmente a (i), utilizando o adjunto à direita parcial máximo de $J^\leftarrow : A \rightarrow (CAT \rightarrow C)^*$.

■

Consideramos abaixo outra aplicação importante das adjunções relativas : as extensões de Kan pontuais. As hipóteses de tamanho necessárias serão geralmente omitidas³ SET, CAT podem designar $V - SET, V - CAT$ ou $U - SET, U - CAT$ para algum universo U .

Referências adicionais : [127] , [092] .

Definição 2 : Dado o funtor $J : C \rightarrow A$ consideramos, para cada categoria B , o funtor:

$$\begin{array}{ccc}
 [J, B] : & [A, B] & \xrightarrow{\quad} & [C, B] \\
 & \downarrow \mu & & \downarrow \mu J \\
 & T & \xrightarrow{\quad} & ToJ \\
 & \downarrow \mu & & \downarrow \mu J \\
 & T' & & T' \circ J
 \end{array} \quad (1.28)$$

Dizemos que $F : C \rightarrow B$ admite extensão de Kan à esquerda (direita) através de J quando $F \in [[J, B]]_l$ ($F \in [[J, B]]_r$) ; neste caso denotamos $L_J(F) : A \rightarrow B$ ($R_J(F) : A \rightarrow B$) o, único a menos de isomorfismo, valor do adjunto à esquerda (direita) parcial de $[J, B]$ em F e $\eta_F : F \rightarrow L_J(F) \circ J$ sua unidade em F ($\epsilon_F : R_J(F) \circ J \rightarrow F$ sua co-unidade em F) .

Observação 2 :

(i) $\forall c \in C_0(L_J(C(c, -)) \cong A(J(c), -))$.

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 L_J(Y_C) \cong \tilde{J} : & A & \xrightarrow{\quad} & [C^*, SET] \\
 & \downarrow f & & \downarrow A(J(_, f)) \\
 & a & & A(J(_, a)) \\
 & \downarrow f & & \downarrow A(J(_, f)) \\
 & b & & A(J(_, b))
 \end{array} \quad (1.29)$$

³Assumir que as categorias são localmente pequenas é conveniente.

(iii) Dado $J : C \xrightarrow{!} 1$ então $\exists L_J(F) \iff \exists \varinjlim F$.

(iv) Dados $J : C \rightarrow A, F : C \rightarrow B$ temos bijeções : $[C^*, SET](\tilde{J}(a), \tilde{F}(b)) \cong [J \rightarrow a, B]((J \rightarrow a) \xrightarrow{P(a)} C \xrightarrow{F} B, \Delta_{(J \rightarrow a)}(b))$ naturais em $a \in A_0^*$ e $b \in B_0$.

(v) Dados $J : C \rightarrow A, F : C \rightarrow B, T : A \rightarrow B$ temos bijeção : $[C, B](F, T \circ J) \cong [A^* \times B, SET](B(T(-), -), [C^*, SET](\tilde{J}(-), \tilde{F}(-)))$. Se $\eta : F \rightarrow T \circ J$ corresponde a um isomorfismo então T é extensão de Kan à esquerda de F através de J (com unidade $\eta : F \rightarrow [J, B](T)$)

Proposição 2 : Dados $J : C \rightarrow A, F : C \rightarrow B, T : A \rightarrow B$ são equivalentes:

- (i) T é $\tilde{J}$ -adjunto à esquerda de $\tilde{F}$.
- (ii) $[C^*, SET](\tilde{J}(a), \tilde{F}(-)) \cong B(T(a), -)$ natural em $a \in A_0^*$.
- (iii) $\forall a \in A_0 (\exists \varinjlim ((J \rightarrow a) \xrightarrow{P_2} C \xrightarrow{F} B) \cong T(a))$.

■

Quando as condições acima estão satisfeitas dizemos que T é extensão de Kan à esquerda, pontual, de F através de J .

Observação 3 :

(i) Se C é pequena e A localmente pequena então para toda categoria B $(CAT)_0$ -ind completa $[J, B]$ tem adjunto à esquerda.

(ii) Se J é hom-bijetor e $L_J(F)$ existe e é pontual então a flecha universal $\eta_F : F \xrightarrow{\cong} L_J(F)$ o J é um isomorfismo natural.

(iii) Se $L_J(F)$ existe e é pontual então $L_J(F) : A \rightarrow B$ preserva todos os limites indutivos preservados por $\tilde{J} : A \rightarrow [C^*, SET]$ logo, como $[C^*, SET]$ tem limites indutivos pequenos e esses são pontuais, $L_J(F)$ preserva todos os limites indutivos pequenos que são preservados por $A(J(c), -) : A \rightarrow SET$ para todos $c \in C_0^*$.

Proposição 3 : Dado $J : C \rightarrow A$ são equivalentes:

- (i) $\forall a \in A_0 (\exists \varinjlim_{(J \rightarrow a)} (J \circ P(a)) \cong a)$.
- (ii) 1_A é extensão de Kan à esquerda, pontual, de J através de J com unidade $1_J : J \rightarrow 1_A \circ J$.
- (iii) $\tilde{J} : A \rightarrow [C^*, SET]$ é hom-bijetor.

■

Quando as condições acima estão satisfeitas dizemos que $J : C \rightarrow A$ é denso.

Observação 4 :

(i) $Y_C : C \rightarrow [C^*, SET]$ é denso.

(ii) Dado $J : C \rightarrow A$ (J hom-bijetor $\Rightarrow \tilde{J} \circ J \cong Y_C : C \rightarrow [C^*, SET]$).

(iii) Sejam $H : C \rightarrow B, F : B \rightarrow A$ com F hom-bijetor então $F \circ H$ denso $\Rightarrow F, H$ densos.

Proposição 4 : Dada $(L, R, \eta, \epsilon) : A \rightarrow B$ adjunção são equivalentes:

- (i) $L : A \rightarrow B$ é denso.

(ii) $R : B \rightarrow A$ é hom-bijetor.

(iii) $\epsilon : L \circ R \xrightarrow{\cong} 1_B$.

■

Quando as condições acima estão satisfeitas dizemos que $(L, R) : A \rightarrow B$ é uma reflexão (de A em B).

Proposição 5 : Sejam $(L, R) : A \rightarrow B$ reflexão e $\Gamma : X \rightarrow B$, então:

(i) $\exists \varinjlim (R \circ \Gamma) \Rightarrow \exists \varinjlim (\Gamma)$.

(ii) $\exists \varprojlim (R \circ \Gamma) \Rightarrow \exists \varprojlim (\Gamma)$.

(iii) A ind-completa (proj-completa) $\Rightarrow B$ ind-completa (proj-completa).

A seguir expomos generalizações da noção de adjunção em outra direção.

Referências adicionais : [063] , [174] .

Proposição 6 : Sejam C categoria localmente pequena, I categoria pequena e $F : I \rightarrow C$ funtor.

(i) São equivalentes (e caso ocorram dizemos que F é um diagrama pequeno fracamente inicial de C) :

. $\forall c \in C_0 \exists i \in I_0 \exists f_i \in C(F(i), c)$.

. $\forall c \in C_0 (\pi_0(F \rightarrow c) \neq \emptyset)$.

. $\exists \eta : \Delta_C(1) \rightarrow \varinjlim_{I^*} C(F(i), -)$.

. $\exists \eta : \Delta_C(1) \rightarrow \coprod_{\mathcal{D}(I_0)} C(F(i), -)$.

. $\forall c \in C_0 ((F \rightarrow c) \neq \emptyset)$.

(ii) São equivalentes (e caso ocorram dizemos que F é um diagrama pequeno localmente inicial de C) :

. $\forall c \in C_0 \exists i \in I_0 \exists f_i \in C(F(i), c) \wedge (\forall (i, f_i) \forall (j, g_j) ((i, j \subseteq I_0 \wedge f_i \in C(F(i), c) \wedge g_j \in C(F(j), c)) \Rightarrow \exists n \in \omega - 0 \exists H : ZZ_n \rightarrow \mathcal{E}(I) \text{ (onde } ZZ_n \text{ é o grafo } 0 \rightarrow 1 \leftarrow 2 \rightarrow \dots \leftarrow 2n-2 \rightarrow 2n-1 \leftarrow 2n) \exists \gamma \text{ cone indutivo comutativo (base}(\gamma) = \mathcal{E}(F) \circ H \wedge \text{vértice}(\gamma) = c \wedge H(0) = i \wedge H(2n) = j \wedge \gamma(\iota_0) = f_i \wedge \gamma(\iota_{2n}) = g_j))})$.

. $\forall c \in C_0 (\pi_0(F \rightarrow c) \cong 1)$.

. $\exists \eta : \Delta_C(1) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{I^*} C(F(i), -)$.

(iii) Se I é discreta são equivalentes (e caso ocorram dizemos que F é o (essencialmente único) diagrama pequeno multiplamente inicial de C) :

. $\forall c \in C_0 \exists ! i \in I_0 \exists ! f_i \in C(F(i), c)$.

. $\forall c \in C_0 (\pi_0(F \rightarrow c) \cong 1)$.

. $\exists \eta : \Delta_C(1) \xrightarrow{\cong} \coprod_{I^*} C(F(i), -)$.

. $\exists \Psi : I_0 \xrightarrow{\cong} \pi_0(C) \wedge \forall i \in I_0 (F(i) \text{ é objeto inicial de } \Psi(i))$.

. $\forall c \in C_0((F \rightarrow c) \cong 1)$.

(iv) se $I \cong 1$ são equivalentes (e caso ocorram dizemos que F é o (essencialmente único) diagrama (pequeno) inicial de C) :

. $\forall c \in C_0 \exists ! f \in C(F(i), c)$.

. $\forall c \in C_0(\pi_0(F \rightarrow c) \cong 1)$.

. $\exists \eta : \Delta_C(1) \xrightarrow[I^*]{\lim} C(F(i), -)$.

. $F(i)$ é objeto inicial de C .

. $\forall c \in C_0((F \rightarrow c) \cong 1)$.

■

Exemplo : Seja Kc a categoria dos corpos comutativos então $CAR : \mathcal{D}(\{p \in \mathbb{N} : p = 0 \vee p \text{ é primo}\}) \rightarrow Kc$, $CAR(0) = \mathbb{Q}$, $p \text{ primo} \Rightarrow CAR(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é “o” diagrama (pequeno) multiplamente inicial de Kc .

Proposição 7 : Seja A categoria localmente pequena.

(i) $(\forall P \in (CAT)_0 (P \cong \mathcal{D}(P_0)) \Rightarrow A \text{ é } P\text{-proj completa}) \Rightarrow (A \text{ possui objeto inicial} \iff A \text{ possui diagrama pequeno multiplamente inicial})$.

(ii) $(\forall P \in (CAT)_0 (\pi_0(P) \cong 1 \Rightarrow A \text{ é } P\text{-proj completa}) \Rightarrow (A \text{ possui diagrama pequeno multiplamente inicial} \iff A \text{ possui diagrama pequeno fracamente inicial})$ (notar que $\forall a \in A_0$ a subcategoria plena de A dos objetos “abaixo de a ” tem objeto inicial !).

■

Definição 3 : Sejam C categoria localmente pequena e $T : C \rightarrow SET$ funtor.

(i) Um diagrama pequeno fracamente representante de T é um diagrama pequeno fracamente inicial de $(1 \rightarrow T)$, ou equivalentemente, um par (L, η) tal que $L : X \rightarrow C$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \lim_{X^*} C(L(x), -) \rightarrow T$.

(ii) Um diagrama pequeno localmente representante de T é um diagrama pequeno localmente inicial de $(1 \rightarrow T)$, ou equivalentemente, um par (L, η) tal que $L : X \rightarrow C$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \lim_{X^*} C(L(x), -) \xrightarrow{\cong} T$. Dizemos multiplamente representante (representante) quando $X \cong \mathcal{D}(X_0)$ ($X \cong 1$) .

Proposição 8 : Sejam C categoria localmente pequena e $T : C \rightarrow SET$ funtor.

(i) C possui limites projetivos pequenos $\Rightarrow (T \text{ representável} \iff (T \text{ admite diagrama pequeno fracamente representante e } T \text{ preserva limites projetivos pequenos}))$.

(ii) C possui limites projetivos pequenos conexos e não vazios $\Rightarrow (T \text{ admite diagrama pequeno multiplamente representante} \iff (T \text{ admite diagrama pequeno fracamente representante e } T \text{ preserva limites projetivos pequenos conexos e não vazios}))$ (que T necessariamente preserva limites projetivos pequenos conexos e não vazios segue da proposição 8 do ítem (1.3.2)) .

■

Definição 4 : Sejam A, B categorias localmente pequenas e $R : B \rightarrow A$ funtor.

(i) Um diagrama pequeno fracamente livre para R em $a \in A_0$ é um diagrama pequeno fracamente representante de $A(a, R(-)) : B \rightarrow SET$, ou seja, um par (L, η) tal que $L : X \rightarrow B$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \varinjlim_{X^*} B(L(x), -) \rightarrow A(a, R(-))$.

(ii) Um diagrama pequeno localmente livre para R em $a \in A_0$ é um diagrama pequeno localmente representante de $A(a, R(-)) : B \rightarrow SET$, ou seja, um par (L, η) tal que $L : X \rightarrow B$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \varinjlim_{X^*} B(L(x), -) \xrightarrow{\cong} A(a, R(-))$. Dizemos multiplamente livre (livre) quando $X \cong \mathcal{D}(X_0)$ ($X \cong \mathbf{1}$).

Exemplo : Seja $J : Kc \hookrightarrow Auc$ o funtor de inclusão da categoria dos corpos comutativos na categoria dos anéis com unidade e comutativos. J tem “multi-adjunto à esquerda pequeno” (diagrama pequeno multiplamente livre para todo $a \in (Auc)_0$ dado, em $a \in (Auc)_0$, por:

$$F_a : \mathcal{D}(Spec(a)) \rightarrow (a \rightarrow J), p \mapsto (a \xrightarrow{proj(p)} a/p \xrightarrow{inj(p)} Frac(a/p))$$

Proposição 9 : Sejam A, B categorias localmente pequenas e $R : B \rightarrow A$ funtor.

(i) B possui limites projetivos pequenos $\Rightarrow (\forall a \in A_0 (R \text{ admite adjunto à esquerda em } a)) \iff (\forall a \in A_0 (R \text{ admite diagrama pequeno fracamente livre em } a \text{ e } R \text{ preserva limites projetivos pequenos}))$.

(ii) B possui limites projetivos pequenos conexos e não vazios $\Rightarrow (\forall a \in A_0 (R \text{ admite diagrama pequeno multiplamente livre em } a)) \iff (\forall a \in A_0 (R \text{ admite diagrama pequeno fracamente livre em } a \text{ e } R \text{ preserva limites projetivos pequenos conexos e não vazios}))$.

■

Definição 5 : Sejam I categoria pequena, C categoria localmente pequena e $F : I \rightarrow C$ funtor.

(i) Um diagrama pequeno fracamente limite indutivo de F é um diagrama pequeno fracamente livre para $\Delta_I : C \rightarrow C^I$ em F , ou seja, um par (Γ, η) tal que $\Gamma : X \rightarrow C$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \varinjlim_{X^*} C(\Gamma(x), -) \rightarrow [I, C](F, \Delta_I(-))$.

(ii) Um diagrama pequeno localmente limite indutivo de F é um diagrama pequeno localmente livre para $\Delta_I : C \rightarrow C^I$ em F , ou seja, um par (Γ, η) tal que $\Gamma : X \rightarrow C$ é funtor, X é categoria pequena e $\eta : \varinjlim_{X^*} C(\Gamma(x), -) \xrightarrow{\cong} [I, C](F, \Delta_I(-))$. Dizemos multiplamente limite indutivo (limite indutivo) quando $X \cong \mathcal{D}(X_0)$ ($X \cong \mathbf{1}$).

Exemplo : Kc tem “multi-coproduto pequeno” de pares de objetos F, F' dado pelo conjunto indexado por $p \in Spec(F \otimes_{\mathbb{Z}} F')$:

$$\begin{array}{ccccc}
F & & & & \\
\swarrow & & \curvearrowright & & \searrow \\
& F \otimes_Z F' & \xrightarrow{\quad} & (F \otimes_Z F') / p & \xrightarrow{\quad} & \text{Frac}((F \otimes_Z F') / p) \\
& \nwarrow & \curvearrowright & & \nearrow \\
F' & & & &
\end{array}
\quad (1.30)$$

1.3.2 Comutação de limites

Referências adicionais: [084] , [092] , [208] .

Observação 1 : Seja C categoria. Como $\forall X \in \text{obj}(CAT)$ ($\text{coneprojcom}(X, C) = C^{(X^-)} \wedge \text{coneindcom}(X, C) = C^{(X^+)}$ e se C é X -projetivamente completa (X -indutivamente completa) então as categorias exponenciais de "base C " são pontualmente X -proj completas (X -ind completas) temos que:

(i) Se C é X, Y -projetivamente completa então são equivalentes:

$$. \forall F : X \times Y \rightarrow C \left(\text{can}(F) : \lim_{\substack{\leftarrow \\ X}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ Y}} F(x, y) \xrightarrow{\cong} \lim_{\substack{\leftarrow \\ Y}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ X}} F(x, y) \right) .$$

. $\text{coneprojcom}(X, C)$ é Y -proj completa e $\text{coneprojlim}(X, C) \hookrightarrow \text{coneprojcom}(X, C)$ é fechada por limites projetivos de tipo Y .

. $\text{coneprojcom}(Y, C)$ é X -proj completa e $\text{coneprojlim}(Y, C) \hookrightarrow \text{coneprojcom}(Y, C)$ é fechada por limites projetivos de tipo X .

Estes sempre ocorrem ("limites projetivos comutam com limites projetivos").

(ii) Se C é X, Y -indutivamente completa então são equivalentes:

$$. \forall F : X \times Y \rightarrow C \left(\text{can}(F) : \lim_{\substack{\rightarrow \\ X}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ Y}} F(x, y) \xrightarrow{\cong} \lim_{\substack{\rightarrow \\ Y}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ X}} F(x, y) \right) .$$

. $\text{coneindcom}(X, C)$ é Y -ind completa e $\text{coneindlim}(X, C) \hookrightarrow \text{coneindcom}(X, C)$ é fechada por limites indutivos de tipo Y .

. $\text{coneindcom}(Y, C)$ é X -ind completa e $\text{coneindlim}(Y, C) \hookrightarrow \text{coneindcom}(Y, C)$ é fechada por limites indutivos de tipo X .

Estes sempre ocorrem ("limites indutivos comutam com limites indutivos").

(iii) Se C é P -proj completa e I -ind completa então são equivalentes:

$$. \forall F : P \times I \rightarrow C \left(\text{can}(F) : \lim_{\substack{\leftarrow \\ I}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} F(p, i) \xrightarrow{\cong} \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ I}} F(p, i) \right) .$$

. $\text{coneprojcom}(P, C)$ é I -ind completa e $\text{coneprojlilim}(P, C) \hookrightarrow \text{coneprojcom}(P, C)$ é fechada por limites indutivos de tipo I .

. $\text{coneindcom}(I, C)$ é P -proj completa e $\text{coneindlim}(I, C) \hookrightarrow \text{coneindcom}(I, C)$ é fechada por limites projetivos de tipo P .

Quando estes ocorrem dizemos que, em C , I -limites indutivos comutam com P -limites projetivos.

Observação 2 : Situações semelhantes ocorrem quando consideramos limites em C indexados por grafos $G \in \text{obj}(GRA)$ pois as categorias de cones comutativos e cones são (isomorfas a) categorias exponenciais: $\text{coneprojcom}(G, C) \cong C^{(\mathcal{L}(G)^-)}$, $\text{coneindcom}(G, C) \cong C^{(\mathcal{L}(G)^+)}$, $\text{coneproj}(G, C) = C^{(G^-)} \cong C^{\mathcal{L}(G^-)}$, $\text{coneind}(G, C) = C^{(G^+)} \cong C^{\mathcal{L}(G^+)}$.

Definição 1 : Dados $\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq \text{obj}(CAT)$ e C categoria $\mathcal{P}$ -proj completa $\mathcal{I}$ -ind completa denotamos $\underline{\text{ISO}}(C, \mathcal{P}) = \{X \in \text{obj}(CAT) : C \text{ é } X\text{-ind completa e } \forall P \in \mathcal{P} \forall F : P \times X \rightarrow C (\text{can}(F) : \lim_{\substack{\rightarrow \\ X}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} F(p, x) \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ X}} F(p, x) \text{ é isomorfismo }) \}$ e $\underline{\text{ISO}}(C, \mathcal{I}) = \{Y \in \text{obj}(CAT) : C \text{ é } Y\text{-proj completa e } \forall I \in \mathcal{I} \forall F : Y \times I \rightarrow C (\text{can}(F) : \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ Y}} F(y, i) \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ Y}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} F(y, i) \text{ é isomorfismo }) \}$. Analogamente definimos $\underline{\Sigma}(C, \mathcal{P})$, $\underline{\Sigma}(C, \mathcal{I})$ onde $\Sigma \subseteq C_1$ contém os isomorfismos de C e é fechada por composição à esquerda e à direita pelos isomorfismos de C (exemplos : as classes de todas as flechas de C que são isomorfismos, epimorfismos, monomorfismos, epi regulares, mono regulares, inversíveis à direita, inversíveis à esquerda).

Proposição 1 : Nas condições acima temos:

(i) $\underline{\Sigma}(C, -)$ e $\underline{\Sigma}(C, -)$ definem uma conexão de Galois entre as subclasses de $\text{obj}(CAT)$, ordenadas por inclusão.

(ii)

$$1 \in \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P}).$$

$$1 \in \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I}).$$

(iii)

$$\forall \mathcal{W} \subseteq \text{obj}(CAT) (\underline{\Sigma}(C, \mathcal{P}) \preceq^+ \mathcal{W} \Rightarrow C \text{ é } \mathcal{W}\text{-ind completa} \wedge \mathcal{W} \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P})).$$

$$\forall \mathcal{W} \subseteq \text{obj}(CAT) (\underline{\Sigma}(C, \mathcal{I}) \preceq^- \mathcal{W} \Rightarrow C \text{ é } \mathcal{W}\text{-proj completa} \wedge \mathcal{W} \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I})).$$

(iv)

$$\forall \mathcal{P}' \in \text{obj}(CAT) (\mathcal{P} \preceq^- \mathcal{P}' \Rightarrow C \text{ é } \mathcal{P}'\text{-proj completa} \wedge \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P}) \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P}')).$$

$$\forall \mathcal{I}' \in \text{obj}(CAT) (\mathcal{I} \preceq^+ \mathcal{I}' \Rightarrow C \text{ é } \mathcal{I}'\text{-ind completa} \wedge \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I}) \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I}')).$$

(v)

$$C \text{ localmente pequena} \wedge C \text{ ind-completa (proj-completa)} \Rightarrow \forall \mathcal{W} \subseteq \text{obj}(CAT) (\forall W \in \mathcal{W} \exists I \in \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P}) \exists T : W \rightarrow I (T \text{ final} \wedge T \text{ hom-bijetor}) \Rightarrow \mathcal{W} \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{P})) (\text{ pois } \forall F : P \times W \rightarrow C \ F \xrightarrow{\cong} L_{(1_P \times T)}(F) \circ (1_P \times T) \ (\ F \xrightarrow{\cong} R_{(1_P \times T)}(F) \circ (1_P \times T) \)).$$

$$C \text{ localmente pequena} \wedge C \text{ ind-completa (proj-completa)} \Rightarrow \forall \mathcal{W} \subseteq \text{obj}(CAT) (\forall W \in \mathcal{W} \exists P \in \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I}) \exists T : W \rightarrow P (T \text{ inicial} \wedge T \text{ hom-bijetor}) \Rightarrow \mathcal{W} \subseteq \underline{\Sigma}(C, \mathcal{I})) (\text{ pois } \dots)$$

$$\forall F : W \times I \rightarrow C \quad F \xrightarrow{\cong} L_{(T \times 1_I)}(F) \circ (T \times 1_I) \quad (F \xleftarrow{\cong} R_{(T \times 1_I)}(F) \circ (T \times 1_I)) .$$

(vi)

Se C é ind-completa e composições à direita de flechas em Σ por limites indutivos de flechas em Σ estão em Σ (exemplos : os isomorfismos, as inversíveis à direita, os epimorfismos) então , pela proposição (1.i) do item (1.3.1), a subcategoria plena de CAT associada a $\underline{\Sigma} (C, \mathcal{P})$ é fechada por limites indutivos indexados por $I \in \underline{\Sigma} (C, \mathcal{P})$.

Se C é proj-completa e composições à esquerda de flechas em Σ por limites projetivos de flechas em Σ estão em Σ (exemplos : os isomorfismos, as inversíveis à esquerda, os monomorfismos) então , pela proposição (1.ii) do item (1.3.1), a subcategoria plena de CAT associada a $\underline{\Sigma} (C, \mathcal{I})$ é fechada por limites indutivos indexados por P^* onde $P \in \underline{\Sigma} (C, \mathcal{I})$.

(vii)

Dado $\Gamma : X \rightarrow CAT$ se C é proj-completa e $I \in \underline{ISO} (C, \{X^*\} \cup \{\Gamma(x) : x \in X_0\})$ então $I \in \underline{ISO} (C, \{\varinjlim \Gamma\})$.

Dado $\Gamma : X \rightarrow CAT$ se C é ind-completa e $P \in \underline{ISO} (C, \{X\} \cup \{\Gamma(x) : x \in X_0\})$ então $P \in \underline{ISO} (C, \{\varinjlim \Gamma\})$.

(viii)

C proj-completa $\Rightarrow \underline{ISO} (C, \{P\}) \subseteq \underline{ISO} (C, \{\mathcal{D}(\pi_0(P))\})$.

C ind-completa $\Rightarrow \underline{ISO} (C, \{I\}) \subseteq \underline{ISO} (C, \{\mathcal{D}(\pi_0(I))\})$.

(ix)

$\underline{ISO} (SET, \{P\}) = \underline{ISO} (SET, \{\mathcal{D}(\pi_0(P))\} \cup \pi_0(P))$.

$\underline{ISO} (SET, \{I\}) = \underline{ISO} (SET, \{\mathcal{D}(\pi_0(I))\} \cup \pi_0(I))$.

■

Observação 3 : Podemos relativizar as definições e resultados acima, isto é, se $\mathcal{P} \subseteq (U - CAT)_0$ ($\mathcal{I} \subseteq (U - CAT)_0$) e C é $\mathcal{P}$ -proj completa ($\mathcal{I}$ -ind completa) então a restrição $\underline{\Sigma} (C, \mathcal{P}) \cap (U - CAT)_0$ ($\underline{\Sigma} (C, \mathcal{I}) \cap (U - CAT)_0$) tem propriedades análogas às de $\underline{\Sigma} (C, \mathcal{P})$ ($\underline{\Sigma} (C, \mathcal{I})$) , relativizadas a $U \in UNIV$.

Proposição 2 : $\forall P \in \text{obj}(CAT) \quad (\underline{EPI} (SET, \{P\}) \subseteq \{I \in \text{obj}(CAT) : \forall F : P^* \rightarrow I \exists i \in I_0 (NAT(F, \Delta_{P^*}(i)) \neq \emptyset) \})$.

□

Dado $F : P^* \rightarrow I$ seja $F' = I(F(-), -) : P \times I \rightarrow SET$.

$\# \limlim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F'(p, i) = 1$.

$P = \emptyset$ ok.

$P \neq \emptyset \Rightarrow \forall p \in P_0 (\lim_{\rightarrow I} I(F(p), i) \cong 1) \Rightarrow \# \limlim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F'(p, i) = 1$.

$\cdot \# \limlim_{\substack{\rightarrow I \\ \leftarrow P}} F'(p, i) \neq 0$.

Pelo item anterior e porque $\text{can}(F')$ é sobrejetora.

$\cdot \exists i \in I_0 (NAT(F, \Delta_{P^*}(i)) \neq \emptyset)$.

Pelo ítem anterior temos $I \neq \emptyset$ e $\exists i \in I_0$ ($\emptyset \neq \varprojlim_P I(F(p), i) \cong NAT(F, \Delta_{P^*}(i))$) .

■

Definição 2 :

- (i) Sejam G grafo pequeno e A categoria. A é categoria G -filtrada $\iff \forall H : G \rightarrow \mathcal{E}(A)$ ($H - coneindcom \neq \emptyset$) .
- (ii) Sejam C categoria pequena e A categoria. A é categoria C -filtrada $\iff \forall F : C \rightarrow A$ ($F - coneindcom \neq \emptyset$) .

Observação 4 :

- (i) A é G -filtrada $\iff A$ é $\mathcal{L}(G)$ -filtrada.
- (ii) A é $\mathcal{E}(C)$ -filtrada $\Rightarrow A$ é C -filtrada.

Definição 3 : Sejam κ cardinal infinito e A categoria. A é categoria κ -filtrada $\iff \forall G \in obj(GRA)$ ($\#G < \kappa \Rightarrow A$ é G -filtrada) .

Proposição 3 :

- (i) A é κ -filtrada $\iff \forall C \in obj(CAT)$ ($\#C < \kappa \Rightarrow A$ é C -filtrada) . (Ter cautela na demonstração de $(\Leftarrow)$ para $\kappa = \omega$!)
- (ii) A é κ -filtrada $\iff (\forall 0 \leq \lambda < \kappa$ (A é D_λ -filtrada) $\wedge \forall 0 < \sigma < \kappa$ (A é P_σ -filtrada)) onde D_λ é o (único a menos de isomorfismo) grafo discreto com λ objetos ($\#mor(D_\lambda) = 0, \#obj(D_\lambda) = \lambda$) e P_σ é o (único a menos de isomorfismo) grafo com σ flechas paralelas ($\#obj(P_\sigma) = 2, \#P_\sigma(0, 1) = \sigma$) .
- (iii) A é D_0 -filtrada ($\iff A \neq \emptyset$) $\wedge A$ é D_2 -filtrada $\Rightarrow \#\pi_0(A) = 1$.
- (iv) A é ω -filtrada $\iff (A$ é D_0 -filtrada $\wedge A$ é D_2 -filtrada $\wedge A$ é P_2 -filtrada) .
- (v) $\forall \omega \leq \kappa_0 \leq \kappa_1$ (A κ_1 -filtrada $\Rightarrow A$ κ_0 -filtrada) .
- (vi) A é κ -filtrada $\iff A$ é $reg(\kappa)$ -filtrada onde $reg(\kappa) = \min\{\lambda : \kappa \leq \lambda \wedge \lambda \text{ é regular}\}$ ($reg(\kappa) \in \{\kappa, \kappa^+\}$) .
- (vii) $\forall U$ ($U \in UNIV \vee U = V$) $\forall \kappa$ ($\omega \leq \kappa = reg(\kappa) \in U$) sejam $\mathcal{X}_\kappa = \{X \in (U - CAT)_0 : X \text{ é categoria associada a ordem } \kappa\text{-dirigida}\}$, $\mathcal{Y}_\kappa = \{Y \in (U - CAT)_0 : Y \text{ é categoria associada a pré-ordem } \kappa\text{-dirigida}\}$, $\mathcal{Z}_\kappa = \{Z \in (U - CAT)_0 : Z \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada}\}$ então $\mathcal{Y}_\kappa \preceq^\rightarrow \mathcal{X}_\kappa \preceq^\rightarrow \mathcal{Z}_\kappa \preceq^\rightarrow \mathcal{Y}_\kappa$. (O ítem não trivial $(\mathcal{X}_\kappa \preceq^\rightarrow \mathcal{Z}_\kappa)$ segue adaptando-se a demonstração da proposição 8.1.6 em [098] ($\omega \rightsquigarrow \kappa$) .)
- (viii) Uma categoria B é U -ind completa $\iff \exists \omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \#U$ (B é $(<\kappa)$ -ind completa $\wedge B$ é $\mathcal{Z}_\kappa$ -ind completa) .

■

Proposição 4 : Seja κ cardinal regular infinito. Em SET , limites indutivos pequenos κ -filtrados comutam com limites projetivos (pequenos) $<\kappa$ -indexados.

□

Como $\{X \in (CAT)_0 : X \text{ é categoria associada a ordem } \kappa\text{-dirigida}\} \preceq^\rightarrow \{Z \in (CAT)_0 : Z \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada}\}$ basta mostrar que $\{I \in (CAT)_0 : I \text{ é categoria associada a ordem}$

κ -dirigida} $\subseteq \underline{ISO} (SET, \{P \in (CAT)_0 : \#P < \kappa\})$. Seja $F : P \times I \rightarrow SET$ então $x \in \limlim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(p, i) \iff (x = (x_p)_{p \in P_0} \wedge \forall p \in P_0 \exists i_p \in I_0 \exists y_p \in F(p, i_p) (x_p = [(i_p, y_p)]) \wedge \forall f : p \rightarrow p' (\lim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(f, i))(x_p) = x_{p'}))$. Logo como $\#P_0 \leq \#P < \kappa$ e I é ordem κ -dirigida $\exists i \in I_0 \exists (z_p)_{p \in P_0} (= (F(1_p, i_p \rightarrow i)(y_p))_{p \in P_0}) \in \prod_{p \in P_0} F(p, i) ((x_p)_{p \in P_0} = ([(i, z_p)])_{p \in P_0} \wedge \forall f : p \rightarrow p' ([(i, F(f, 1_i)(z_p))] = [(i, z_{p'})])) \Rightarrow \forall f : p \rightarrow p' \exists i_f \in I_0 (F(1_{p'}, i \rightarrow i_f)(z_p) = F(1_{p'}, i \rightarrow i_f)(z_{p'})) \Rightarrow \forall f : p \rightarrow p' \exists i_f \in I_0 (w_{(p, f)} = F(1_p, i \rightarrow i_f)(z_p) \in F(p, i_f) \wedge w_{(f, p')} = F(1_{p'}, i \rightarrow i_f)(z_{p'}) \in F(p', i_f) \Rightarrow (x_p = [(i_f, w_{(p, f)})]) \wedge x_{p'} = [(i_f, w_{(f, p')})] \wedge F(f, 1_{i_f})(w_{(p, f)}) = w_{(f, p')}))$. Logo como $\#P_1 \leq \#P < \kappa$ e I é categoria associada a ordem κ -dirigida $\exists i_x \in I_0 \exists (u_p)_{p \in P_0} (= (F(1_p, i \rightarrow i_f \rightarrow i_x)(z_p))_{p \in P_0}) \in \prod_{p \in P_0} F(p, i_x) ((x_p)_{p \in P_0} = ([(i_x, u_p)])_{p \in P_0} \wedge \forall f : p \rightarrow p' (F(f, 1_{i_x})(u_p) = u_{p'}))$.⁴ Seja $(j, (v_p)_{p \in P_0})$ tal que $j \in I_0 \wedge \forall p \in P_0 (v_p \in F(p, j) \wedge x_p = [(j, v_p)]) \wedge \forall f : p \rightarrow p' (F(f, 1_j)(v_p) = v_{p'})$ então, como I é κ -dirigida (e $2 < \kappa$), $\forall p \in P_0 \exists k_p \in I_0 (F(1_p, i_x \rightarrow k_p)(u_p) = F(1_p, j \rightarrow k_p)(v_p))$. Como $\#P_0 \leq \#P < \kappa$ e I é κ -dirigida $\exists k \in I_0 \exists (t_p)_{p \in P_0} (= (F(1_p, i_x \rightarrow k_p \rightarrow k)(u_p))_{p \in P_0} = (F(1_p, j \rightarrow k_p \rightarrow k)(v_p))_{p \in P_0}) \in \prod_{p \in P_0} F(p, k) ((x_p)_{p \in P_0} = ([(k, t_p)])_{p \in P_0} \wedge \forall f : p \rightarrow p' (F(f, 1_k)(t_p) = t_{p'}) \wedge (\lim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(p, i_x \rightarrow k))((u_p)_{p \in P_0}) = (t_p)_{p \in P_0} = (\lim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(p, j \rightarrow k))((v_p)_{p \in P_0}))$.⁵

Obtemos assim uma função $\sigma(F) : \limlim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(p, i) \rightarrow \limlim_{\substack{\leftarrow I \\ \rightarrow P}} F(p, i)$, $\sigma(F)([(i_x, u_p)]_{p \in P_0}) = [i_x, (u_p)_{p \in P_0}]$. $\sigma(F)$ é a inversa de $can(F) : \limlim_{\substack{\leftarrow I \\ \rightarrow P}} F(p, i) \rightarrow \limlim_{\substack{\leftarrow P \\ \rightarrow I}} F(p, i)$, $can(F)([(i, (r_p)_{p \in P_0})]) = ([i, r_p])_{p \in P_0}$.

■

Observação 4 : Se $\kappa \in U \in UNIV$ podemos substituir $SET \rightsquigarrow U-SET$ e reinterpretar “pequeno”: $\in (CAT)_0 \rightsquigarrow \in (U-CAT)_0$.

Proposição 5 : Dado κ cardinal regular infinito temos $\underline{ISO} (SET, \{P \in (CAT)_0 : \#P < \kappa\}) = \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é } \kappa\text{-filtrada}\}$.

□

$\cdot \subseteq : \underline{ISO} (SET, \{P \in (CAT)_0 : \#P < \kappa\}) \stackrel{prop.(1.i)}{=} \cap \{ \underline{ISO} (SET, \{P\}) : P \in (CAT)_0 \wedge \#P < \kappa \} \subseteq \cap \{ \underline{EPI} (SET, \{P\}) : P \in (CAT)_0 \wedge \#P < \kappa \} \stackrel{prop.2}{\subseteq} \cap \{ \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é } P^*\text{-filtrada}\} : P \in (CAT)_0 \wedge \#P < \kappa \} = \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é } \kappa\text{-filtrada}\}$.

$\cdot \supseteq$: proposição 4.

■

Observação 5 : $\kappa \in U \in UNIV \Rightarrow \underline{ISO} (U-SET, \{P \in (U-CAT)_0 : \#P < \kappa\}) \cap obj(U-CAT) = \{I \in (U-CAT)_0 : I \text{ é } \kappa\text{-filtrada}\}$.

⁴Aqui utilizamos a hipótese que há no máximo uma flecha entre dois objetos.

⁵Idem.

Definição 4 :

- (i) Seja C categoria. C é (ind)-degenerada $\iff 1_C - \text{coneindcom} \neq \emptyset$.
- (ii) Denotamos $\mathbf{E}$ a (única a menos de isomorfismo) categoria com $\#obj(\mathbf{E}) = 1$ e $\#mor(\mathbf{E}) = 2$ ($\mathbf{E}$ é a “menor categoria com idempotente não trivial”).
- (iii) Sejam C categoria e $\epsilon \in C_1$ um idempotente de C (i.e. $\exists c \in obj(C)$ ($\epsilon \in C(c, c) \wedge \epsilon \circ \epsilon = \epsilon$)). Denotamos $CIS(\epsilon) = \{(p, i) : \exists a \in C_0$ ($p \in C(a, c) \wedge i \in C(c, a) \wedge p \circ i = \epsilon \wedge i \circ p = 1_a$) $\}$ o conjunto das cisões de ϵ . Dizemos que uma categoria é Karoubiana quando todos seus idempotentes se cindem.

Proposição 6 :

- (i) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^*$.
- (ii) $\forall U \in UNIV$ ($\mathbf{E}$ é categoria praticamente em U).
- (iii) $\forall X \in (CAT)_0$ (X é $\mathbf{E}$ -filtrada $\wedge \mathbf{E}$ é X -filtrada).
- (iv) $\forall X \in (CAT)_0$ (X degenerada $\Rightarrow \pi_0(X) \cong 1$).
- (v) $\forall X \in (CAT)_0$ (X degenerada $\iff \exists F : \mathbf{E} \rightarrow X$ final).
- (vi) Sejam C categoria, $F : \mathbf{E} \rightarrow C$ funtor e $\epsilon \in C(c, c)$ o idempotente de C determinado por F então:
 - . $\forall a \in C_0 \forall p \in C(a, c)$ (p determina um cone projetivo limite de base $F \iff \exists i \in C(c, a)$ ($(p, i) \in CIS(\epsilon)$)).
 - . $\forall a \in C_0 \forall i \in C(c, a)$ (i determina um cone indutivo limite de base $F \iff \exists p \in C(a, c)$ ($(p, i) \in CIS(\epsilon)$)).
 - . Como todo funtor preserva cisões de idempotentes, todo funtor preserva limites projetivos/indutivos de tipo $\mathbf{E}$.

■

Proposição 7 : $\underline{ISO}(SET, (CAT)_0) = \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é degenerada}\} = \{\mathbf{E}\}^{\preceq^*}$ ($= \{I \in (CAT)_0 : \exists F : \mathbf{E} \rightarrow I \text{ final}\}$).

□

- . $\supseteq$: Como limites projetivos comutam com limites projetivos e $\mathbf{E}$ -limites projetivos correspondem a $\mathbf{E}$ -limites indutivos temos $\mathbf{E} \in \underline{ISO}(SET, (CAT)_0)$. Mas $\{\mathbf{E}\} \subseteq \underline{ISO}(SET, (CAT)_0) \Rightarrow \{\mathbf{E}\}^{\preceq^*} \subseteq \underline{ISO}(SET, (CAT)_0)$.
- . $\subseteq$: $\underline{ISO}(SET, (CAT)_0) \subseteq \underline{EPI}(SET, (CAT)_0) \subseteq \{I \in (CAT)_0 : \forall P \in (CAT)_0$ (I é P^* -filtrada) $\} \subseteq \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é degenerada}\} = \{\mathbf{E}\}^{\preceq^*}$.

■

Proposição 8 : Em SET , limites indutivos indexados por coprodutos pequenos de categorias degeneradas e pequenas comutam com limites projetivos conexos, não vazios e pequenos.

□

Pelas proposições (1.vii) e 7, basta demonstrar o seguinte caso:

■

Corolário : Em SET , coprodutos pequenos comutam com limites projetivos conexos, não vazios e pequenos.

□

Sejam $P, I \in (CAT)_0$ tais que $\pi_0(P) \cong 1$ e $I \cong \mathcal{D}(I_0)$. Seja $F : P \times I \rightarrow SET$.

. $I = \emptyset$

$$\emptyset = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \emptyset}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ P}} F \xrightarrow{can(F)} \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ \emptyset}} F = \emptyset \text{ logo } can(F) = 1_{\emptyset} : \emptyset \rightarrow \emptyset .$$

. $I \neq \emptyset$

$$x \in \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} F(p, i) \iff x = (x_p)_{p \in P_0} \wedge \forall p \in P_0 \exists i_p \in I_0 \exists y_p \in F(p, i_p) (x_p = (i_p, y_p)) \wedge \forall f : p \rightarrow p' ((i', F(f, 1_{i'})(y_p)) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} F(f, i)(x_p) = x_{p'} = (i_{p'}, y_{p'})) .$$

Logo como P é conexa e não vazia temos bijeções : $\{x = (x_p)_{p \in P_0} : x \in \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} F(p, i)\} \cong \{y = (i, y_p)_{p \in P_0} : i \in I_0 \wedge \forall p \in P_0 (y_p \in F(p, i)) \wedge \forall f : p \rightarrow p' (F(f, 1_{i'})(y_p) = y_{p'})\} \cong \{z = (i, (z_p)_{p \in P_0}) : i \in I_0 \wedge (z_p)_{p \in P_0} \in \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} F(p, i)\} = \{w = (i, (w_p)_{p \in P_0}) : w \in \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ P}} F(p, i)\} .$

■

Proposição 9 : $\overrightarrow{ISO}(SET, \{P \in (CAT)_0 : \# \pi_0(P) = 1\}) = \{I \in (CAT)_0 : \exists X \in (SET)_0 \exists \{I_x \in (CAT)_0 : I_x \text{ é degenerada}\}_{x \in X} (I = \coprod_{x \in X} I_x)\} .$

□

$\supseteq$: Proposição 8

$\subseteq$: $\overrightarrow{ISO}(SET, \{P \in (CAT)_0 : \# \pi_0(P) = 1\}) \subseteq \overrightarrow{EPI}(SET, \{P \in (CAT)_0 : \# \pi_0(P) = 1\}) \subseteq \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é } P^*\text{-filtrada} \wedge \# \pi_0(P) = 1\} \subseteq \{I \in (CAT)_0 : \forall I' \in \pi_0(I) (I' \text{ é degenerada})\} = \{I \in (CAT)_0 : \exists X \in (SET)_0 \exists \{I_x \in (CAT)_0 : I_x \text{ é degenerada}\}_{x \in X} (I = \coprod_{x \in X} I_x)\} .$ (Notemos que toda categoria pequena se decompõe “univocamente” como coproduto pequeno de categorias pequenas conexas e não vazias.)

■

Observação 6 :

(i) Seja $\mathcal{I} \subseteq \{I \in (CAT)_0 : I \text{ é coproduto de categorias degeneradas}\}$ e tal que $\mathcal{D}(2) \in \mathcal{I}$ então $\overrightarrow{ISO}(SET, \mathcal{I}) = \{P \in (CAT)_0 : \# \pi_0(P) = 1\} .$

(ii) Como em SET (com o axioma da escolha!) as noções de flecha inversível à direita, epimorfismo regular e epimorfismo coincidem com a de função sobrejetora, temos que, em SET , produtos pequenos comutam com coigualadores de duas flechas paralelas .

1.3.3 Completamentos indutivos

Referências adicionais : [092] , [207] , [195] .

Nesta seção fixamos três universos distintos e arbitrários : $U_0 \in U_1 \in U_2 \in V$.

Definição 1 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $A \in \text{obj}(U_1 - CAT)$. Denominamos objetos $\mathcal{I}$ -presentáveis os elementos de $A_{\mathcal{I}} = \{a \in A_0 : A(a, -) : A \rightarrow SET \text{ preserva } \mathcal{I}\text{-limites indutivos}\}$.

Observação 1 :

(i) Não utilizaremos distinção notacional entre o conjunto $A_{\mathcal{I}}$ e a subcategoria plena de A de seus objetos $\mathcal{I}$ -presentáveis.

(ii) Considerar as “restrições” dos funtores $A(a, -)$ a $U_1 - SET$ (ou $U_0 - SET$ caso A esteja praticamente localmente em U_0) não altera $A_{\mathcal{I}}$ e suas propriedades.

(iii) (A subcategoria plena de A com objetos) $A_{\mathcal{I}}$ é fechada em A por isomorfismos, por retrações, por limites indutivos de tipo $\overrightarrow{ISO}(SET, \mathcal{I})$ e de modo geral, por U_0 - diagramas multiplamente limites indutivos de tipo $\overrightarrow{ISO}(SET, \mathcal{I})$.

Definição 2 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $C \in \text{obj}(U_1 - CAT)$. Um $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de C é um funtor $J \in U_1 - CAT(C, A)$ tal que:

- . A é $\mathcal{I}$ -ind completa ;
- . J é hom-bijetor ;
- . $\forall a \in A_0 (\exists c \in C_0 (a \cong J(c)) \vee (\exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (a \cong \varinjlim_I J \circ H)))$;
- . $(J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}}$.

Observação 2 :

(i) A é o fecho pleno e repleto de $(J_0)_*(C_0)$ por $\mathcal{I}$ -limites indutivos, isto é, se $i : \bar{A} \hookrightarrow A$ é hom-bijetor, cria isomorfismos e $\mathcal{I}$ -limites indutivos e $(J_0)_*(C_0) \subseteq \bar{A}_0$ então $\bar{A} = A$ (notação : $A = [(J_0)_*(C_0)]^{\mathcal{I}\text{-lim}}$) .

(ii) Seja $J' \in U_1 - CAT(C', A)$ tal que $\exists T : C' \xrightarrow{\sim} C (J' \cong J \circ T)$ então J' é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de C' .

(iii) Seja $J' \in U_1 - CAT(C, A')$ tal que $\exists T : A \xrightarrow{\sim} A' (J' \cong T \circ J)$ então J' é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de C .

(iv) Seja B subcategoria plena de A com $(J_0)_*(C_0) \subseteq B_0 \subseteq A_{\mathcal{I}}$ então $i : B \hookrightarrow A$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de B .

(v) $\tilde{J} : A \rightarrow [C^*, SET]$ preserva $(CAT)_0$ -limites projetivos e $\mathcal{I}$ -limites indutivos ; sua restrição a $[C^*, U_1 - SET]$ preserva $(U_1 - CAT)_0$ -limites projetivos e $\mathcal{I}$ -limites indutivos . Quando A está praticamente localmente em U_0 a restrição (a menos de isomorfismo) de $\tilde{J}$ a $[C^*, U_0 - SET]$ preserva $(U_0 - CAT)_0$ -limites projetivos e $\mathcal{I}$ -limites indutivos.

(vi) $\forall a, a' \in A_0$ temos:

- . $a \cong J(c) \wedge a' \cong J(c') \Rightarrow A(a, a') \cong C(c, c')$.
- . $a \cong \varinjlim_I J \circ H \wedge a' \cong J(c') \Rightarrow A(a, a') \cong \varinjlim_{I^*} C(H(i), c)$.
- . $a \cong J(c) \wedge a' \cong \varinjlim_{I'} J \circ H' \Rightarrow A(a, a') \cong \varinjlim_{I'} C(c, H'(i'))$.

$$. a \cong \varinjlim_I J \circ H \wedge a' \cong \varinjlim_{I'} J \circ H' \Rightarrow A(a, a') \cong \varprojlim_{I^*} \varinjlim_{I'} C(H(i), H'(i')) .$$

(vii) C está praticamente localmente em $U_0 \Rightarrow (A$ está praticamente localmente em $U_0 \wedge \forall a \in A_0 ((J \rightarrow a)$ está praticamente em $U_0))$.

(viii) $A_{\mathcal{I}} = [(J_0)_*(C_0)]^{\{\mathbf{E}\}-\lim} = \{ a \in A_0 : \exists c \in C_0 \exists \epsilon : J(c) \rightarrow J(c) \exists p : a \rightarrow J(c) \exists i : J(c) \rightarrow a (\epsilon \circ \epsilon = \epsilon \wedge p \circ i = \epsilon \wedge 1_a = i \circ p) \}$ (logo: C U_1 - categoria essencialmente em $U_0 \Rightarrow A_{\mathcal{I}}$ U_1 -categoria essencialmente em U_0) .

(ix) $\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in A_0 \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (a \cong \varinjlim_I J \circ H)$.

(x) $\mathcal{I} = \emptyset \Rightarrow 1_C : C \rightarrow C$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de $C \in \text{obj}(U_1 - CAT)$.

(xi) $\mathcal{I} = \{\emptyset\} \Rightarrow J : C \rightarrow C^-$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de $C \in \text{obj}(U_1 - CAT)$.

Definição 3 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $C \in \text{obj}(U_1 - CAT)$. Um $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de C é um funtor $J \in U_1 - CAT(C, A)$ tal que:

. A é $\mathcal{I}$ -ind completa;

. $\forall B$ U_1 -categoria $\mathcal{I}$ -ind completa $\forall F : C \rightarrow B \exists L_J(F) \wedge L_J(F)$ é pontual;

. $\forall B$ U_1 -categoria $\mathcal{I}$ -ind completa a adjunção $(L_J, [J, B], \eta, \epsilon) : [C, B] \rightarrow [A, B]$ se restringe a uma equivalência de adjunção : $[C, B] \xrightarrow{\sim} [A, B]_{\mathcal{I}\text{-ind.pres.}}$ onde $[A, B]_{\mathcal{I}\text{-ind.pres.}}$ é a subcategoria plena de $[A, B]$ dos funtores que preservam $\mathcal{I}$ -limites indutivos.

Observação 3 :

(i) Seja $J' \in U_1 - CAT(C', A)$ tal que $\exists T : C' \xrightarrow{\sim} C (J' \cong J \circ T)$ então J' é $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de C' .

(ii) Seja $J' \in U_1 - CAT(C, A')$ tal que $\exists T : A \xrightarrow{\sim} A' (J' \cong T \circ J)$ então J' é $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de C .

(iii) Seja $J' \in U_1 - CAT(C, A')$ tal que J' é $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de C então $\exists T : A \xrightarrow{\sim} A' (J' \cong T \circ J)$.

(iv) $\mathcal{I} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \Rightarrow \forall J \in U_1 - CAT(C, A) (J$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de $C \Rightarrow J$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de $C)$.

Sejam $J \in U_1 - CAT(C, A)$ e $J^\rightarrow : A \rightarrow ((U_1 - CAT) \rightarrow C)$ como no ítem (1.2.3) . Dado $H \in U_1 - CAT(I, C)$ temos isomorfismo natural $[I, A](J \circ H, \Delta_I(-)) \cong ((U_1 - CAT) \rightarrow C)(H, J^\rightarrow(-))$, logo $\forall a \in A_0 \forall I \in \text{obj}(U_1 - CAT)$ temos bijeções inversas $\phi(a, I) : X(a, I) \rightleftharpoons Z(a, I) : \psi(a, I)$ onde $X(a, I) = \{ (H, \mu) : H \in U_1 - CAT(I, C) \wedge \mu \in [I, A](J \circ H, \Delta_I(a)) \}$, $Z(a, I) = U_1 - CAT(I, (J \rightarrow a))$.

Dados $a \in A_0$, $I \in \text{obj}(U_1 - CAT)$, $(H, \mu) \in X(a, I)$ consideremos para cada $c \in C_0$ a função $\pi_0(c \rightarrow H) \xrightarrow{\Gamma} A(J(c), a) =$

$$\pi_0(c \rightarrow H) \xrightarrow{\cong_{can}} \varinjlim_I C(c, H(i)) \xrightarrow{\lim_{J(c, H(i))}} \varinjlim_I A(J(c), J(H(i))) \xrightarrow{\lim_{A(J(c), \mu(i))}} A(J(c), a) .$$

Proposição 1 : Seja $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_1 - CAT)$. Nas condições acima temos:

- (i) J hom-bijetor $\Rightarrow \forall (c, g) \in (J \rightarrow a)_0 \ (\pi_0((c, g) \rightarrow \phi(a, I)(H, \mu)) \cong \{ M \in \pi_0(c \rightarrow H) : \Gamma_c(M) = g \})$.
- (ii) J hom-bijetor $\wedge (J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}} \Rightarrow (\mu \in [I, A](J \circ H, \Delta_I(a))$ limite $\Rightarrow \Gamma_c$ bijeção) .
- (iii) J hom-bijetor $\wedge (J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}} \Rightarrow (\mu \in [I, A](J \circ H, \Delta_I(a))$ limite $\Rightarrow \phi(a, I)(H, \mu)$ final) .
- (iv) J denso $\Rightarrow (T \in U_1 - CAT(I, (J \rightarrow a))$ final $\Rightarrow \psi(a, I)(T) = (H, \mu)$ (μ limite)) .
- (v) J denso $\wedge J$ hom-bijetor $\wedge (J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}} \Rightarrow \phi(a, I) \vdash \{ (H, \mu) \in X(a, I) : \mu$ limite $\} \rightleftharpoons \{ T \in Z(a, I) : T$ final $\} : \psi(a, I) \upharpoonright$ bijeções inversas.
- (vi) $(J$ denso $\wedge J$ hom-bijetor $\wedge (J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}} \wedge A$ $\mathcal{I}$ -ind completa) $\Rightarrow \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C \ (a \cong \varinjlim_I J \circ H) \} = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow (J \rightarrow a) \ (T$ final) $\}$.

□

Para (i) , contemplar o diagrama:

$$(1.31)$$

$$\begin{array}{ccc}
D : \mathbb{Z}\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{\quad} & I \\
\downarrow 0 & & i_0 = i \\
1 & & \downarrow f_0 \\
\uparrow & & i_1 \\
\vdots & & \uparrow f_1 \\
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow f_{2n-2} \\
2n-1 & & i_{2n-1} \\
\uparrow & & \uparrow f_{2n-1} \\
2n & & i_{2n} = i'
\end{array} \tag{1.32}$$

■

Proposição 2 : Sejam $J \in U_1 - CAT(C, A)$ $\mathcal{I}$ -ind completamente forte de C e B U_1 -categoria $\mathcal{I}$ -ind completa onde $\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

(i) $A_0 = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (a \cong \varinjlim_I J \circ H) \} = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow (J \rightarrow a) (T \text{ final}) \}$.

(ii) J é denso.

(iii) $\forall F : C \rightarrow B \exists L_J(F) : A \rightarrow B$ (e são pontuais).

(iv) $\forall F : C \rightarrow B (\eta_F : F \xrightarrow{\cong} L_J(F) \circ J)$.

(v) $\forall F : C \rightarrow B (L_J(F) \text{ preserva } \mathcal{I}\text{-limites indutivos})$.

(vi) $\forall T : A \rightarrow B (T \text{ preserva } \mathcal{I}\text{-limites indutivos} \Rightarrow \epsilon_T : L_J(T \circ J) \xrightarrow{\cong} T)$.

(vii) J é $\mathcal{I}$ -ind completamente fraco de C .

□

(i) Segue da proposição acima e da definição de completamento (e $\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset$).

(ii) Decorre de (i).

(iii) Decorre de (i) utilizando a hipótese B $\mathcal{I}$ -ind completa.

(iv) Por (iii) e porque J é hom-bijetor.

(v) Pois $L_J(F)$ é $\tilde{J}$ -adjunto à esquerda de $\tilde{F}$ e $(J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}}$.

(vi) Como $(L_J, [B, J], \eta, \epsilon) : [C, B] \rightarrow [A, B]$ é adjunção temos $\epsilon_T J \circ \eta_{T \circ J} = 1_{T \circ J}$, então por (iv) $\epsilon_T J = (\eta_{T \circ J})^{-1}$. Como $\forall a \in A_0 \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C \exists \gamma (\gamma \text{ é cone indutivo limite } \wedge \text{ base}(\gamma) = J \circ H \wedge \text{vértice}(\gamma) = a)$ e ϵ é transformação natural, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
A & & B \\
\downarrow \gamma_{\mathcal{I}_i} & \xrightarrow{\quad} & L_J(\text{To}J)(\gamma_{\mathcal{I}_i}) \\
J(H(i)) & & L_J(\text{To}J)(J(H(i))) \\
& & \downarrow \epsilon_{T(a)} \\
& & T(a) \\
& & \downarrow T(\gamma_{\mathcal{I}_i}) \\
& & T(J(H(i))) \\
& & \downarrow \epsilon_{T(J(H(i)))} \\
& & T(J(H(i)))
\end{array}
\quad (1.33)$$

Como por hipótese e por (v) T e $L_J(T \circ J)$ preservam $\mathcal{I}$ -limites indutivos e $\forall i \in I_0$ ($\epsilon_T(J \circ H(i)) = (\eta_{T \circ J \circ H(i)})^{-1}$) temos que $\epsilon_T(a)$ é isomorfismo natural.

(vii) Por (iii),(iv),(v),(vi).

■

Observação 4 :

(i) Se C admite $\mathcal{I}$ -ind completamento forte então todo $\mathcal{I}$ -ind completamento fraco de C é forte; em particular, completamentos fortes são essencialmente únicos.

(ii) $J : C \rightarrow A$ $\mathcal{I}$ -ind completamento forte $\Rightarrow \tilde{J} : A \rightarrow [C^*, SET]$ hom-bijetor (e portanto reflete limites projetivos/indutivos) $\wedge \tilde{J}$ preserva $(CAT)_0$ -limites projetivos e $\mathcal{I}$ -limites indutivos $\Rightarrow \underline{ISO}(SET, \mathcal{I}) \cap \{ P \in (CAT)_0 : A \text{ é } P\text{-proj completa} \} \subseteq \underline{ISO}(A, \mathcal{I})$.

Observação 5 : Utilizando os resultados acima encontramos candidatos naturais a $\mathcal{I}$ -ind completamentos fortes ($\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset$) :

Seja C' U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 que admite $\mathcal{I}$ -ind completamento forte $J : C \rightarrow A$. Em particular, temos que A é U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 , J é hom-bijetor e denso; logo $\tilde{J} \circ J \cong Y_C : C \rightarrow [C^*, SET]$ e o mesmo ocorre quando consideramos suas “restrições” a $[C^*, U_0 - SET]$. Sejam $K_C(\mathcal{I})$ a subcategoria plena (e fechada por isomorfismos) de $[C^*, U_0 - SET]$ com $obj(K_C(\mathcal{I})) = \{ F \in obj([C^*, U_0 - SET]) : \exists a \in A_0 (F \cong \tilde{J}(a)) \}$ e $i_C(\mathcal{I}) : K_C(\mathcal{I}) \hookrightarrow [C^*, U_0 - SET]$ então, lembrando que $\tilde{J}$ preserva $\mathcal{I}$ -limites indutivos, temos:

- (i) $\tilde{J} \upharpoonright : A \xrightarrow{\sim} K_C(\mathcal{I})$.
- (ii) $K_C(\mathcal{I})$ é U_1 -categoria $\mathcal{I}$ -ind completa e $i_C(\mathcal{I})$ preserva $\mathcal{I}$ -limites indutivos.
- (iii) $K_C(\mathcal{I}) = \{ F \in obj([C^*, U_0 - SET]) : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (F \cong \varinjlim_I Y_C \circ H) \}$.
- (iv) $Y_C(\mathcal{I}) = Y_C \upharpoonright \cong \tilde{J} \upharpoonright \circ J : C \rightarrow K_C(\mathcal{I})$ é $\mathcal{I}$ -ind completamento forte de C .

Temos esses candidatos em mente, mas podemos facilitar nosso trabalho pois:

Proposição 3 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq obj(U_0 - CAT)$ e $J \in U_1 - CAT(C, A)$ tais que $\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset$, A $\mathcal{I}$ -ind completa, J denso, J hom-bijetor e $(J_0)_*(C_0) \subseteq A_{\mathcal{I}}$. Seja $i : \bar{A} \hookrightarrow A$ a inclusão

da subcategoria plena de A tal que $\bar{A}_0 = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (a \cong \varinjlim_I J \circ H) \}$

.Temos :

(i) $\bar{A}_0 = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow (J \rightarrow a) (T \text{ é final}) \}$.

(ii) $(J_0)_*(C_0) \subseteq \bar{A}_0$ (seja $(C \xrightarrow{J} A) = (C \xrightarrow{\bar{J}} \bar{A} \xrightarrow{i} A)$) .

(iii) $\bar{J}$ e i são hom-bijetores e densos.

Suponhamos que $i : \bar{A} \hookrightarrow A$ crie $\mathcal{I}$ -limites indutivos. Então:

(iv) $\bar{A}$ é $\mathcal{I}$ -ind completa.

(v) $\bar{A}_0 = \{ \bar{a} \in \bar{A}_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (\bar{a} \cong \varinjlim_I \bar{J} \circ H) \}$.

(vi) $\bar{J}_0(C_0) \subseteq \bar{A}_\mathcal{I}$.

(vii) $\bar{J} : C \rightarrow \bar{A}$ é $\mathcal{I}$ -ind completamente forte de C .

■

Observação 6 : Para C U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 existe $J : C \rightarrow A$ como na proposição acima :

Tomando $J : C \rightarrow A$ como a “restrição ” do funtor de Yoneda a $[C^*, U_0 - SET]$ temos:

. A é U_1 -categoria U_0 -ind completa;

. J é hom-bijetor;

. J é denso e $(J_0)_*(C_0) \subseteq A_\mathcal{I}$ (pois $\bar{J} \cong 1_{[C^*, U_0 - SET]}$) ;

. $obj(\bar{A}) = obj(K_C(\mathcal{I})) = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (a \cong \varinjlim_I J \circ H) \} = \{ a \in A_0 :$

$\exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow (J \rightarrow a) (T \text{ final}) \}$.

Definição 4 : $\mathcal{I} \subseteq obj(U_0 - CAT)$ é diagonalmente indutiva $\iff$ a subcategoria plena de $U_0 - CAT$ com objetos $\mathcal{I}^{\rightarrow} \upharpoonright_{U_0} = \{ X \in U_0 - CAT : \exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow X (T \text{ final}) \}$ é fechada em $U_0 - CAT$ por $\mathcal{I}$ -limites indutivos.

Exemplos :

(i) $\mathcal{I} = \emptyset = \mathcal{I}^{\rightarrow} \upharpoonright_{U_0}$.

(ii) $\mathcal{I} = \{\emptyset\} = \mathcal{I}^{\rightarrow} \upharpoonright_{U_0}$.

(iii) $\mathcal{I} = \varinjlim (S, \mathcal{X}) \cap obj(U_0 - CAT) = \mathcal{I}^{\rightarrow} \upharpoonright_{U_0}$ onde $\mathcal{X} \subseteq obj(CAT)$, S é categoria U_0 -ind completa e $\mathcal{X}$ -proj completa e $\Sigma \subseteq S_1$ é tal que Σ contém os S -isomorfismos , Σ é fechada por composição à esquerda e à direita por S -isomorfismos e composições à direita de flechas em Σ por U_0 -limites indutivos de flechas em Σ estão em Σ (exemplos : os isomorfismos, as inversíveis à direita, os epimorfismos) .

(iv) $\mathcal{I} = \{ I \in obj(U_0 - CAT) : I^* \in \varprojlim (S, \mathcal{X}) \cap obj(U_0 - CAT) \} = \mathcal{I}^{\rightarrow} \upharpoonright_{U_0}$ onde $\mathcal{X} \subseteq obj(CAT)$, S é categoria U_0 -proj completa e $\mathcal{X}$ -ind completa e $\Sigma \subseteq S_1$ é tal que Σ contém os S -isomorfismos , Σ é fechada por composição à esquerda e à direita por S -isomorfismos e composições à esquerda de flechas em Σ por U_0 -limites projetivos de flechas em Σ estão em Σ (exemplos : os isomorfismos, as inversíveis à esquerda, os monomorfismos)

(v) $\mathcal{I} = \{ I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : I \text{ é categoria associada a ordem } \kappa\text{-dirigida} \} ; \mathcal{I}^{\leq \kappa} \upharpoonright_{U_0} = \{ X \in \text{obj}(U_0 - CAT) : X \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada} \}$ onde $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \#U_0$.

(vi) $\mathcal{I} = \{ I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : I \text{ é categoria associada a pré-ordem } \kappa\text{-dirigida} \} ; \mathcal{I}^{\leq \kappa} \upharpoonright_{U_0} = \{ X \in \text{obj}(U_0 - CAT) : X \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada} \}$ onde $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \#U_0$.

(vii) $\mathcal{I} = \{ I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : \#I < \kappa \} ; \mathcal{I}^{\leq \kappa} \upharpoonright_{U_0} = \text{ISO}(U_0 - SET, \{ X \in \text{obj}(U_0 - CAT) : X \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada} \}) \cap \text{obj}(U_0 - CAT)$ onde $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \#U_0$ (parágrafo 15.8 em [092]).

(viii) $\mathcal{I} = \{ I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : I \text{ é discreta} \} ; \mathcal{I}^{\leq \kappa} \upharpoonright_{U_0} = \{ X \in U_0 - CAT : X \text{ admite diagrama } U_0\text{-pequeno multiplamente terminal} \}$.

(ix) $\mathcal{I} = \{ \mathbf{E} \} ; \mathcal{I}^{\leq \kappa} \upharpoonright_{U_0} = \{ X \in U_0 - CAT : X \text{ é ind-degenerada} \}$.

Proposição 4 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0 - CAT)$ diagonalmente indutiva com $\mathcal{I} - \{\emptyset\} \neq \emptyset$, C U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 e $J : C \rightarrow A$ como na proposição 3 então $i : \bar{A} \hookrightarrow A$ cria $\mathcal{I}$ -limites indutivos, logo $\bar{J} : C \rightarrow \bar{A}$ é $\mathcal{I}$ -ind completamente forte de C .

□

Sejam $Z \in \mathcal{I}$, $\Gamma : Z \rightarrow \bar{A}$ e

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma} : Z & \xrightarrow{\quad} & CAT \\ \downarrow f & \lrcorner & \downarrow J \\ w & & J \end{array} \quad \begin{array}{l} J \Rightarrow (i \circ \Gamma(z)) \\ J \Rightarrow (i \circ \Gamma(f)) \\ J \Rightarrow (i \circ \Gamma(w)) \end{array} \quad (1.34)$$

. C praticamente localmente em $U_0 \Rightarrow \forall z \in Z_0 \hat{\Gamma}(z)$ é U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 .

. $\forall z \in Z_0 \exists I_z \in \mathcal{I} \exists T_z : I_z \rightarrow \hat{\Gamma}(z)$ (T_z final) (fixemos uma escolha!).

. $\forall w \in Z_0$ seja $\Psi(w)$ a subcategoria plena de $\hat{\Gamma}(w)$ com $\text{obj}(\Psi(w)) = \{ (c, h) : c \in C_0 \wedge h \in A(J(c), i(\Gamma(w))) \wedge \exists z \in Z_0 \exists i_z \in (I_z)_0 \exists f \in Z(z, w) ((c, h) = \Gamma'(f)(T_z(i_z))) \}$.

. $\forall w \in Z_0 (\#(\Psi(w)_0) < \#U_0)$.

. $\forall w \in Z_0 (\Psi(w)$ é U_1 -categoria praticamente em U_0).

. $\forall z \in Z_0$ o funtor final T_z se fatora como a composição de funtores finais $I_z \xrightarrow{T_z!} \Psi(z) \hookrightarrow \hat{\Gamma}(z)$.

. $\forall f : z \rightarrow w ((\hat{\Gamma}(f)_0)_*(\Psi(z)_0) \subseteq \Psi(w)_0)$ (Ψ é subfuntor de $\hat{\Gamma}$).

. $\exists \Xi : Z \rightarrow U_0 - CAT (\Psi \cong Z \xrightarrow{\Xi} U_0 - CAT \hookrightarrow CAT \wedge \forall z \in Z_0 (\text{o funtor final } T_z \text{ se fatora como a composição de funtores finais } I_z \rightarrow \Xi(z) \xrightarrow{j_z} \hat{\Gamma}(z)))$, em particular, $\forall z \in Z_0 (\Xi(z) \in \mathcal{I}^{\leq \kappa} \cap (\text{obj}(U_0 - CAT)))$.

Temos $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ Z}} i(\Gamma(z)) \in \text{obj}(\bar{A})$ pois:

$\cdot \forall z \in Z_0 (i(\Gamma(z)) \xleftarrow{\cong} \lim_{\overrightarrow{\hat{\Gamma}(z)}} J \circ P(i(\Gamma(z))) \xleftarrow{\cong} \lim_{\overrightarrow{\Xi(z)}} J \circ P(i(\Gamma(z))) \circ j_z$ pois J é denso e $j_z : \Xi(z) \rightarrow \hat{\Gamma}(z)$ é final.
 $\cdot \lim_{\overrightarrow{Z}} i(\Gamma(z)) \xleftarrow{\cong} \lim_{\overrightarrow{Z}} \lim_{\overrightarrow{\Xi(z)}} (J \circ P(i(\Gamma(z))) \circ j_z)$ pois A é $\mathcal{I}$ -ind completa e $j_z : \Xi(z) \rightarrow \hat{\Gamma}(z)$ e $P(i(\Gamma(z))) : (J \rightarrow i(\Gamma(z))) \rightarrow C$ são naturais em $z \in Z_0$.
 $\cdot \lim_{\overrightarrow{Z}} \lim_{\overrightarrow{\Xi(z)}} (J \circ P(i(\Gamma(z))) \circ j_z) \xrightarrow{\cong} \lim_{\overrightarrow{X}} J \circ L$ onde $X = \lim_{\overrightarrow{Z}} \Xi(z)$ e $L : X \rightarrow C$ pela proposição 1 do item (1.3.1) .
 $\cdot \lim_{\overrightarrow{X}} J \circ L \xleftarrow{\cong} \lim_{\overrightarrow{I}} J \circ L \circ T$ para algum $I \in \mathcal{I}$ e algum $T : I \rightarrow X$ final , pois $\mathcal{I}$ é diagonalmente indutiva.
 $\cdot \lim_{\overrightarrow{I}} J \circ L \circ T \in \text{obj}(\bar{A})$ pela definição de $\bar{A}$.
 ■

Definição 5 : Sejam S U_1 -categoria praticamente localmente em U_0 e $M : S \rightarrow U_0\text{-SET}$ funtor :

(i) $K(M)$ é a categoria com $\text{obj}(K(M)) = |M| = \coprod_{s \in S_0} M(s)$, $K(M)((x, s), (x', s')) = \{(x, s)\} \times \{f \in S(s, s') : M(f)(x) = x'\} \times \{(x', s')\}$ com funções composição e identidade “derivadas das de S ” .

(ii) $\#M = \#|M| = (\sum_{s \in S_0} \#M(s))$.

Observação 7 :

(i)

$\cdot S$ U_1 -categoria em $U_0 \Rightarrow \forall M : S \rightarrow U_0\text{-SET} (K(M) \text{ } U_1\text{-categoria em } U_0)$.

$\cdot S$ U_1 -categoria praticamente em $U_0 \Rightarrow \forall M : S \rightarrow U_0\text{-SET} (K(M) \text{ } U_1\text{-categoria praticamente em } U_0)$.

$\cdot S$ U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \Rightarrow \forall M : S \rightarrow U_0\text{-SET} (K(M) \text{ } U_1\text{-categoria essencialmente em } U_0)$.

(ii) $(\Delta_1(1) \rightarrow M) \cong K(M) \cong (Y_{S^*} \rightarrow M)^*$.

Proposição 5 : Sejam $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0\text{-CAT})$, $\mathcal{P} \subseteq \text{ISO}(U_0\text{-SET}, \mathcal{I}) \cap \text{obj}(U_0\text{-CAT})$, C U_1 - categoria praticamente localmente em U_0 e $F : C^* \rightarrow U_0\text{-SET}$ funtor. Consideramos:

(i)

$\cdot \exists I \in \mathcal{I} (K(F)^* = I)$.

$\cdot \exists I \in \mathcal{I} (K(F)^* \cong I)$.

$\cdot \exists I \in \mathcal{I} (K(F)^* \simeq I)$.

(ii) $\exists I \in \mathcal{I} \exists T : I \rightarrow (Y_C \rightarrow F) (T \text{ é final })$.

(iii) $\exists I \in \mathcal{I} \exists H : I \rightarrow C (F \cong \lim_{\overrightarrow{I}} Y_C \circ H)$.

(iv) $F \in [\{C(-, c) : c \in C_0\}]^{\mathcal{I}\text{-}\lim_{\overrightarrow{I}}}$.

(v) $\exists L_{Y_{C^*}}(F) : [C, U_0 - SET] \rightarrow U_0 - SET$, é pontual e preserva $\mathcal{P}$ -limites projetivos.

(vi'') F preserva $\mathcal{P}$ -limites projetivos.

(vi') F funde diagramas pequenos multiplamente limites projetivos de funtores $\mathcal{P}$ -indexados , i.e. $\forall P \in \mathcal{P} \forall P \xrightarrow{D} C^* (\exists I \cong \mathcal{D}(I_0) \in \text{obj}(U_0 - CAT) \exists L : I \rightarrow C^* \exists \eta : \coprod_{i \in I_0} C^*(-, c_i) \xrightarrow[\leftarrow]{\cong} \lim_P C^*(-, D(p)) \Rightarrow \coprod_{i \in I_0} F \circ L(i) \xrightarrow[\leftarrow]{\cong} \lim_P F \circ D(p) \text{ é isomorfismo })$.

(vi) $\exists L_{Y_{C^*}}(F) : [C, U_0 - SET] \rightarrow U_0 - SET$, é pontual e preserva limites projetivos de diagramas Γ tais que $(P \xrightarrow{\Gamma} [C, U_0 - SET]) = (P \xrightarrow{D} C^* \xrightarrow{Y_{C^*}} [C, U_0 - SET])$ onde $P \in \mathcal{P}$.

(vii) $\forall P \in \mathcal{P} \forall D : P \rightarrow C^* (\coprod_{\sigma \in (D^* - \text{coneindcom})_0} F(\text{vértice}(\sigma)) \xrightarrow[\leftarrow]{\cong} \lim_P F \circ D)$.

(viii) $K(F)^*$ é $\mathcal{P}^*$ -filtrada onde $\mathcal{P}^* = \{P^* : P \in \mathcal{P}\}$.

Temos:

(1) (ii) $\iff$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii) .

(2) C essencialmente em $U_0 \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$.

(3) $\mathcal{I}$ diagonalmente indutiva $\Rightarrow (iii) \Leftarrow (iv)$.

(4) $\exists \omega < \kappa = \text{reg}(\kappa) < \#U_0 (\mathcal{I} = \{ I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : I \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada} \} \wedge \mathcal{P} = \{ P \in \text{obj}(U_0 - CAT) : \#P < \kappa \}) \wedge (\text{respectivamente: } C \text{ em } U_0 ; C \text{ praticamente em } U_0 ; C \text{ essencialmente em } U_0) \Rightarrow (\text{respectivamente: (viii)} \Rightarrow (i))$.

(5) (vi'') $\Leftarrow$ (vi) e se C está essencialmente em U_0 e C é $\mathcal{P}^*$ -ind completa então (vi'') $\Rightarrow$ (vi) .

(6) (vi') $\Leftarrow$ (vi) e se C está essencialmente em U_0 e C admite diagramas pequenos multiplamente limites indutivos de funtores $\mathcal{P}^*$ -indexados então (vi') $\Rightarrow$ (vi) .

□

(1) Vamos demonstrar apenas (iv) $\Rightarrow$ (v) , (vi) $\Rightarrow$ (vii) , (vii) $\Rightarrow$ (viii) pois os outros ítems ou são triviais ou já foram considerados acima.

(iv) $\Rightarrow$ (v)

Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in ORD^+}$ a seqüência crescente de classes de objetos de subcategorias plenas e repletas de $[C^*, U_0 - SET]$ tal que:

. $\alpha = 0 \Rightarrow X_\alpha = \{ F \in \text{obj}([C^*, U_0 - SET]) : \exists c \in C_0 (F \cong C(-, c)) \}$.

. $0 \neq \alpha = \vee[0, \alpha[\Rightarrow X_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} X_\beta$.

. $\exists \beta (\alpha = \beta + 1) \Rightarrow X_\alpha = X_\beta \cup X_\beta(\mathcal{I})$ onde $X_\beta(\mathcal{I}) = \{ F \in \text{obj}([C^*, U_0 - SET]) : \exists I \in \mathcal{I} \exists (I \xrightarrow{\Psi} [C^*, U_0 - SET]) = (I \xrightarrow{\Psi} \text{plena}(X_\beta) \hookrightarrow \text{obj}([C^*, U_0 - SET])) (F \cong \lim_I \Psi(i)) \}$.

. $[\{C(-, c) : c \in C_0\}]^{\mathcal{I}-\lim} = X_{\#U_0}$.

Pois $\mathcal{I} \subseteq \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $\#U_0$ é cardinal infinito (ordinal limite!) e regular.

. $\alpha = 0 \Rightarrow \exists c \in C_0 (L_{Y_{C^*}}(F) \cong L_{Y_{C^*}}(C^*(c, -)) \cong [C^*, U_0 - SET](Y_{C^*}(c), -))$, é pontual e preserva U_0 -limites projetivos.

. $0 \neq \alpha = \vee[0, \alpha[$ ok .

. $\exists \beta (\alpha = \beta + 1)$ se $F \in X_\beta(\mathcal{I})$ ($F \cong \varinjlim_I \Psi(i)$), como $[C^*, U_0 - SET]$ é $\mathcal{I}$ -ind completa ; $L_{Y_{C^*}}$ é adjunto à esquerda parcial máximo de $[Y_{C^*}, U_0 - SET]$ e pela hipótese de indução , temos que $\exists L_{Y_{C^*}}(F) \cong \varinjlim_I L_{Y_{C^*}}(\Psi(i))$ e é pontual ; pela relação entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ e pela hipótese de indução temos que $L_{Y_{C^*}}(F)$ preserva $\mathcal{P}$ -limites projetivos.

(vi) $\Rightarrow$ (vii)

$$. \varprojlim_P (L_{Y_{C^*}}(F) \circ Y_{C^*} \circ D(p)) \cong \varprojlim_P F \circ D(p) .$$

Pois Y_{C^*} é hom-bijetor e $L_{Y_{C^*}}(F)$ é pontual.

$$. L_{Y_{C^*}}(F)(\varprojlim_P Y_{C^*} \circ D(p)) \xrightarrow{can \cong} (\coprod_{\sigma \in (D^* - coneindcom)_0} F(vértice(\sigma))) / \equiv .$$

$$\text{Pois } \varprojlim_P Y_{C^*} \circ D(p) \cong [P^*, C](D^*, \Delta_{P^*}(-)) ; (D^* - coneindcom)^* \cong (1 \rightarrow [P^*, C](D^*, \Delta_{P^*}(-)))^*$$

$$\cong (Y_{C^*} \rightarrow [P^*, C](D^*, \Delta_{P^*}(-))) ; \forall M : C \rightarrow U_0 - SET \ (L_{Y_{C^*}}(F)(M) \cong \varinjlim (Y_{C^*} \rightarrow M) \xrightarrow{P(M)} C^* \xrightarrow{F} U_0 - SET) \cong (\coprod_{c \in C_0, x \in M(c)} F(c)) / \equiv .$$

(vii) $\Rightarrow$ (viii)

$$. \forall P \in \mathcal{P} \ \forall D : P \rightarrow C^* \ \forall \Xi : P^* \rightarrow (Y_C \rightarrow F) \ (P(F) \circ \Xi = D^* \Rightarrow U_1 - CAT(P^*, K(F)^*))$$

$$\cong U_1 - CAT(P^*, (Y_C \rightarrow F)) \cong [P^*, [C^*, U_0 - SET]]((Y_C \circ D^*, \Delta_{P^*}(F))) \cong$$

$$\varprojlim_P [C^*, U_0 - SET](Y_C \circ D^*(p), F) \cong \varprojlim_P F \circ D(p) .$$

Logo afirmar que todas as flechas canônicas são sobrejetoras é afirmar que $K(F)^*$ é $\mathcal{P}^*$ -filtrada.

(2) Observação 7 .

(3) Pois assim $Y_C(\mathcal{I}) : C \rightarrow K_C(\mathcal{I})$ é $\mathcal{I}$ -ind completamente forte de C por $\mathcal{I}$ -limites indutivos.

(4) Pela observação 7 e porque $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

(5)

(vi'') $\Leftarrow$ (vi)

Pois $F \xrightarrow{\eta_F \cong} L_{Y_{C^*}}(F) \circ Y_{C^*}$ e $Y_{C^*} : C^* \rightarrow [C, U_0 - SET]$ preserva todos os U_0 -limites projetivos em C^* .

(vi'') $\Rightarrow$ (vi)

Pois $(Y_{C^*} \rightarrow F)$ está essencialmente em U_0 logo $\exists L_{Y_{C^*}}(F)$ e é pontual , assim podemos argumentar como acima.

(6)

(vi') $\Leftarrow$ (vi)

Pois $F \xrightarrow{\eta_F \cong} L_{Y_{C^*}}(F) \circ Y_{C^*}$ e $L_{Y_{C^*}}$ preserva todos os U_0 -limites indutivos preservados por $Y_{C^*} \cong 1_{[C, U_0 - SET]} : [C, U_0 - SET] \rightarrow [C, U_0 - SET]$.

(vi') $\Rightarrow$ (vi)

Pois $(Y_{C^*} \rightarrow F)$ está essencialmente em U_0 logo $\exists L_{Y_{C^*}}(F)$ e é pontual , assim podemos argumentar como acima.

■

Corolário : C U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \Rightarrow \epsilon v_C]: C \rightarrow [[C, U_0 - SET], U_0 - SET]_{\mathcal{P}_{\#U_0 - ind, pres.}}^{\mathcal{P}_k - proj, pres.}$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamento forte de C onde $\omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \#U_0 ; \forall \omega \leq \lambda = reg(\lambda) \leq \#U_0$ ($\mathcal{P}_\lambda = \{P \in obj(U_0 - CAT) : \#P < \lambda\} \wedge \mathcal{I}_\lambda = \{I \in obj(U_0 - CAT) : \forall P \in \mathcal{P}_\lambda (I \text{ é } P\text{-filtrada }) \}$) .

■

Capítulo 2

Categorias acessíveis

A noção central deste trabalho é a de categoria acessível, ou melhor, de $\mathcal{ACE}$, a 2-categoria com esses objetos. Esta é uma definição estratificada; temos dois aspectos no que refere a ela: em cada estágio as propriedades dos completamentos indutivos e num segundo momento a possibilidade de “passeios curtos” pelos estágios serem efetivados no futuro (uniformização).

O germe da noção de acessibilidade aparece em [098], mas nossa acepção do termo “categoria acessível” se origina de [166]. Deste permaneceremos próximos neste capítulo.

Fixamos três universos $U_0 \in U_1 \in U_2 \in V$ com cardinais (fortemente inacessíveis) respectivamente $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

Definição 1 : Sejam $\omega \leq \kappa < \theta_0$ e $\mathcal{I}_\kappa = \{I \in \text{obj}(U_0 - CAT) : I \text{ é categoria } \kappa\text{-filtrada}\}$

(i) A é U_1 -categoria κ -acessível $\iff \exists C$ U_1 -categoria essencialmente em U_0 $\exists J : C \rightarrow A$ $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de C .

(ii) $\kappa - \mathcal{ACE}$ é a 2-categoria com 0-flechas as categorias (em U_1) κ -acessíveis, 1-flechas os funtores entre duas 0-flechas que preservam limites indutivos (em U_0) κ -filtrados, 2-flechas as transformações naturais entre duas 1-flechas e que é sub-2-categoria localmente plena da 2-categoria $U_1 - CAT$ das U_1 -categorias, funtores e transformações naturais.

(iii) $\kappa - ACE$ é a categoria ordinária associada a $\kappa - \mathcal{ACE}$.

Observação 1 :

(i) A metaclassa ($\in U_2$!) das categorias κ -acessíveis não se altera quando em (i) acima consideramos $C \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ ou C categoria praticamente em U_0 e $J : C \hookrightarrow A$.

(ii) Como $\mathcal{I}_\kappa = \mathcal{I}_{\text{reg}(\kappa)}$ sempre tomaremos κ regular.

(iii) $\kappa - \mathcal{ACE} = \text{reg}(\kappa) - \mathcal{ACE} \neq \emptyset$.

(iv) A κ -acessível $\Rightarrow A$ Karoubiana ($\iff$ todo idempotente de A cinde).

(v) Utilizaremos as simplificações : $A_{\mathcal{I}_\kappa} \rightsquigarrow A_\kappa$ (objeto $\mathcal{I}_\kappa$ - presentável $\rightsquigarrow$ objeto κ - presentável) , $Y_C(\mathcal{I}_\kappa) : C \rightarrow K_C(\mathcal{I}_\kappa) \rightsquigarrow Y_C(\kappa) : C \rightarrow K_C(\kappa)$, ...

Proposição 1 : Seja C U_1 -categoria praticamente em U_0 $\mathbf{E}$ -proj completa e $\mu = \omega + \#C$ então $Y_C(\mu^{++}) : C \xrightarrow{\sim} K_C(\mu^{++})$ e portanto C é μ^{++} -acessível.

□

Como C é $\mathbf{E}$ -proj completa, $Y_C : C \rightarrow [C^*, U_0 - SET]$ preserva U_0 -limites projetivos e $\mathbf{E}$ -limites projetivos correspondem a $\mathbf{E}$ -limites indutivos temos $Y_C(\{\mathbf{E}\}) : C \xrightarrow{\sim} K_C(\{\mathbf{E}\})$ logo basta mostrarmos que $K_C(\mathcal{I}_{\mu^{++}}) \subseteq K_C(\{\mathbf{E}\})$ (a inclusão reversa sempre ocorre).

. $\forall F \in \text{obj}(K_C(\mathcal{I}_{\mu^{++}})) \forall c \in C_0 (\#F(c) \leq \mu)$.

Dados $c \in C_0$ e $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq F(c)$ com $\#I \leq \mu^+$ consideremos G o grafo discreto com $G_0 = I$ e o homomorfismo de grafos $\Gamma : G \rightarrow \mathcal{E}(K(F)^*)$ tal que $\forall i \in I (\Gamma(i) = (c, x_i))$. Como $K(F)^* \cong (Y_C \rightarrow F)$ é μ^{++} -filtrada, existem $c' \in C_0$, $z \in F(c')$, $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq C(c, c')$ tais que $\forall i \in I (x_i = F(f_i)(z))$. Como $\#C_1 \leq \mu$, temos $\#\{x_i\}_{i \in I} \leq \mu$, logo $\#F(c) \leq \mu$.

. $\forall F \in \text{obj}(K_C(\mathcal{I}_{\mu^{++}})) (\#(Y_C \rightarrow F) \leq \mu)$.

$\#(Y_C \rightarrow F) \leq \#C_0 \cdot \sup\{\#F(c) : c \in C_0\} + \#C_1 \cdot (\#C_0 \cdot \sup\{\#F(c) : c \in C_0\})^2 \leq \mu \cdot \mu + \mu \cdot (\mu \cdot \mu)^2 = \mu$.

. $K_C(\mathcal{I}_{\mu^{++}}) \subseteq K_C(\{\mathbf{E}\})$.

Dado $F \in \text{obj}(K_C(\mathcal{I}_{\mu^{++}}))$ temos que $(Y_C \rightarrow F)$ é ind-degenerada logo $\exists \mathbf{E} \xrightarrow{T} (Y_C \rightarrow F)$ final e então $F \in K_C(\{\mathbf{E}\})$.

■

Sabemos, por (1.3.3), que as categorias κ -acessíveis existem. Abaixo reconheceremos alguns exemplos simples.

Exemplo 1 : A categoria **1** é κ -acessível para todo $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \theta_0$: o funtor $id_1 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de **1** .

Exemplo 2 : $U_0 - SET$ é κ -acessível para todo $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \theta_0$.

. $\{x \in U_0 : \#x = 1\} \subseteq (U_0 - SET)_\kappa$.

Pois $U_0 - SET(1, x) \cong x$ naturalmente em $x \in U_0$.

. $x \in U_0 : \#x < \kappa \subseteq (U_0 - SET)_\kappa$.

Pois $\forall x \in U_0 (x = \coprod_{y \in x} \{y\})$.

. $\forall x \in U_0 (x \text{ é } \mathcal{I}_\kappa\text{-limite indutivo de conjuntos de cardinais } < \kappa \text{ ("}\kappa\text{-pequenos")})$.

κ sendo regular e infinito implica que $([x]^{<\kappa}, \subseteq)$ é conjunto ordenado ($\in U_0$) κ -dirigido, portanto sua categoria associada $I(x, \kappa) \in \mathcal{I}_\kappa$; como $\cup [x]^\kappa = x$ o funtor "inclusão" $F : I(x, \kappa) \rightarrow U_0 - SET$ é tal que $\lim_{\substack{\rightarrow \\ I(x, \kappa)}} F(i) = x$.

. A subcategoria plena de $U_0 - SET$ dos conjuntos κ -pequenos está essencialmente em U_0 .

Pois seu esqueleto é (isomorfo a) subcategoria plena de $U_0 - SET$ com objetos os cardinais κ -pequenos e esta é uma U_0 -categoria (tem cardinal $\leq (\kappa + \kappa^2 \cdot \kappa^\kappa) = \kappa^\kappa < \theta_0$) .

. $plena(\{x \in U_0 : \#x < \kappa\}) \hookrightarrow U_0 - SET$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de categoria essencialmente em U_0 .

Temos ainda que:

$$(U_0 - SET)_\kappa = \{x \in U_0 : \#x < \kappa\} (= [U_0]^{<\kappa}) .$$

$$\text{Pois } (U_0 - SET)_\kappa = [\{x \in U_0 : \#x < \kappa\}]^{\{\mathbb{E}\}^{-lim}} = \{x \in U_0 : \#x < \kappa\} .$$

Exemplo 3 : Dada S categoria (em U_1) praticamente em U_0 $[S, U_0 - SET]$ é κ -acessível para todo $\omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \theta_0$ tal que $\#S < \kappa$.

. Os exemplos anteriores tratam dos casos $\#S \in \{0, 1\}$. Para $S \neq \emptyset$ e κ como acima temos :

$$. \forall s \in S_0 (S(s, _) \in [S, U_0 - SET]_\kappa) .$$

Pois $\forall s \in S_0 ([S, U_0 - SET](S(s, _), M) \cong M(s))$ naturalmente em $M \in obj([S, U_0 - SET])$ e U_0 -limites indutivos em $[S, U_0 - SET]$ são pontuais.

$$. \forall M : S \rightarrow U_0 - SET (\#M < \kappa \Rightarrow \#(Y_S \rightarrow M) < \kappa) .$$

$$\text{Pois } \#(Y_S \rightarrow M) \leq \#M + \#S_1 \cdot (\#M)^2 < \kappa + \kappa \cdot (\kappa)^2 = \kappa .$$

$$. \{M : S \rightarrow U_0 - SET : \#M < \kappa\} \subseteq [S, U_0 - SET]_\kappa .$$

Pois $Y_S : S^* \rightarrow [S, U_0 - SET]$ é denso

$$. \forall M : S \rightarrow U_0 - SET ((Sub(M)^{<\kappa}, \leq) \text{ é conjunto ordenado } \kappa\text{-dirigido} .$$

Escolhendo os representantes canônicos das classes de equivalência de monomorfismos de codomínio M e, para cada $X \subseteq |M|$, denotando $<X>$ o subfuntor gerado por X temos $\forall t \in S_0 (<X>(t) = \{ z \in M(t) : \exists s \in S_0 \exists f : s \rightarrow t \exists y \in X(s) (z = M(f)(y)) \}$ logo $\# <X> \leq \#S_0 \cdot \#S_0 \cdot \#S_1 \cdot \#X < \kappa \cdot \#X$. Como κ é regular dada $\{M_p\}_{p \in P} \subseteq Sub(M)^{<\kappa}$ com $\#P < \kappa$ temos $\#(\cup_{p \in P} |M_p|) < \kappa$, logo $\#(<\cup_{p \in P} |M_p|>) < \kappa$, portanto segue a afirmação .

$$. \forall M : S \rightarrow U_0 - SET \forall s \in S_0 (M(s) = \cup \{N(s) : N \in Sub(M)^{<\kappa}\}) .$$

$$\text{Pois } \forall x \in M(s) (<(x, s)> \in Sub(M)^{<\kappa}) .$$

$$. \forall M : S \rightarrow U_0 - SET (M \text{ é } \mathcal{I}_\kappa\text{-limite indutivo de funtores de cardinais } < \kappa \text{ (" } \kappa\text{-pequenos")}) .$$

Como $I(M, \kappa)$, a categoria associada a $(Sub(M)^{<\kappa}, \leq)$, é κ -filtrada e está praticamente em U_0 e limites indutivos em $[S, U_0 - SET]$ indexados por categorias (praticamente) em U_0 são pontuais o funtor "inclusão" $F : I(M, \kappa) \hookrightarrow [S, U_0 - SET]$ é tal que $\varinjlim_{I(M, \kappa)} F(i) = M$.

. A subcategoria plena de $[S, U_0 - SET]$ dos funtores κ -pequenos está essencialmente em U_0 .

Pois seu esqueleto é (isomorfo a) subcategoria plena de $[S, U_0 - SET]$ com objetos os funtores (automaticamente κ -pequenos) tais que $\forall s \in S_0 (M(s) \text{ é um cardinal } \kappa\text{-pequeno})$ e esta é uma categoria praticamente em U_0 (tem cardinal $\leq ((\kappa^\kappa \cdot \kappa^\kappa) + (\kappa^\kappa \cdot \kappa^\kappa)^2 \cdot (\kappa \cdot \kappa^\kappa)) = \kappa^{\kappa^\kappa} < \theta_0$) .

. $plena(\{ M : S \rightarrow U_0 - SET : \#M < \kappa \}) \hookrightarrow [S, U_0 - SET]$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de categoria essencialmente em U_0 .

Temos ainda que:

. $[S, U_0 - SET]_\kappa = \{ M : S \rightarrow U_0 - SET : \#M < \kappa \}$.

Pois $[S, U_0 - SET]_\kappa = [\{ M : S \rightarrow U_0 - SET : \#M < \kappa \}]^{\{\mathbf{E}\}^{-lim}} = \{ M : S \rightarrow U_0 - SET : \#M < \kappa \}$.

Nos exemplos acima temos categorias que são κ -acessíveis a partir de algum nível κ_0

(respectivamente : ω , ω , $\min\{ \kappa' : \omega \leq \kappa' = reg(\kappa') < \theta_0 \wedge \#S < \kappa' \}$). Estes são casos atípicos; em geral temos algo mais fraco mas suficientemente “bom”.

Definição 2 : Seja $\trianglelefteq$ ($\triangleleft$) a relação binária em $\{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) \}$ tal que $\kappa \trianglelefteq \kappa' \text{ (} \kappa \triangleleft \kappa' \text{)} \iff$

. $\kappa \leq \kappa' \text{ (} \kappa < \kappa' \text{)} ;$

. $\forall x \text{ (} \#x < \kappa' \Rightarrow \exists \mathcal{A} \in [[x]^{<\kappa}]^{<\kappa'} \text{ (} (\mathcal{A}, \subseteq) \hookrightarrow ([x]^{<\kappa}, \subseteq) \text{) é “funtor” final)} .$

Observação 2 :

(i) Na definição acima podemos assumir que $x \in \{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \kappa' \}$, logo para decidir se $\kappa \trianglelefteq \kappa'$ basta considerarmos $x \in U$ onde U é um universo tal que $\kappa' \in U$.

(ii) $\forall \omega \leq \kappa = reg(\kappa) \text{ (} \omega \trianglelefteq \kappa \text{)} .$

(iii) $\forall \omega \leq \kappa = reg(\kappa) \text{ (} \kappa \triangleleft \kappa^+ \text{)} \text{ (notemos que } \forall U \in UNIV \text{ (} \kappa \in U \iff \kappa^+ \in U \text{)} \text{)} .$

(iv) $\forall \omega \leq cf(\mu) \leq \lambda < \mu \text{ (} \lambda^+ \not\triangleleft \mu^+ \text{)} \text{ (por exemplo : } \forall U \in UNIV \text{ (} \aleph_1 \not\triangleleft \aleph_{\omega+1} < \#U \text{)} \text{)} .$

Proposição 2 : $\forall U \text{ (} U \in UNIV \vee U = V \text{)} \text{ (} (\{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \#U \}, \trianglelefteq) \text{ é } U\text{-classe (própria) pré-ordenada } \#U\text{-dirigida} \text{)} .$

□

(i) $\trianglelefteq$ é reflexiva.

Pois $\kappa \leq \kappa$ e $\forall x \text{ (} \#x < \kappa \Rightarrow ([x]^{<\kappa}, \subseteq) = (\mathcal{P}(x), \subseteq) \text{ tem máximo (} = x \text{)} \text{)} .$

(ii) $\trianglelefteq$ é transitiva.

Sejam $\kappa \trianglelefteq \kappa' \trianglelefteq \kappa''$. Para cada x com $\#x < \kappa''$ seja $\mathcal{A} \in [[x]^{<\kappa'}]^{<\kappa''}$ tal que $\mathcal{A}$ é cofinal em $[x]^{<\kappa'}$ então $\forall y \in \mathcal{A} \exists \mathcal{B}_y \in [[y]^{<\kappa}]^{<\kappa'}$ tal que $\mathcal{B}_y$ é cofinal em $[y]^{<\kappa}$, então $\mathcal{B} = \cup_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_y$ é tal que:

. $\mathcal{B} \in [[x]^{<\kappa}]^{<\kappa''}$

Pois κ'' é regular.

. $\mathcal{B}$ é cofinal em $[x]^{<\kappa}$.

Pois $\forall w \in [x]^{<\kappa} \exists y \in \mathcal{A} \text{ (} w \subseteq y \subseteq x \text{)} \text{ logo } \exists z \in \mathcal{B}_y \subseteq \mathcal{B} \text{ (} w \subseteq z \subseteq y \subseteq x \text{)} .$

(iii)

. $\forall \kappa, \kappa' \subseteq \{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \#U \} \text{ (} \kappa < \kappa' \wedge \forall \omega \leq \mu < \kappa \forall \omega \leq \mu' < \kappa' \text{ (} (\mu')^\mu < \kappa' \text{)} \Rightarrow \kappa \triangleleft \kappa' \text{)} .$

Pois $\forall \omega \leq \mu' < \kappa' \ (\# [\mu']^{<\kappa} = \sum_{\omega \leq \mu < \kappa} (\mu')^\mu < \kappa')$ logo $[\mu']^{<\kappa} \in [[\mu']^{<\kappa}]^{<\kappa'}$ e $[\mu']^{<\kappa} \hookrightarrow [\mu']^{<\kappa}$ é cofinal.

. $\forall \kappa, \kappa'' \subseteq \{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \#U \} \ (\kappa < \kappa'' \Rightarrow (\kappa \triangleleft (2^{<\kappa''})^+ < \#U))$.

Pois $\#U$ é inacessível $\vee \#U = \infty$ e se tomamos $\kappa' = (2^{<\kappa''})^+$ temos:

(a) $\kappa < 2^\kappa \leq 2^{<\kappa''} < \kappa'$.

(b) $\forall \omega \leq \mu < \kappa \ \forall \omega \leq \mu' < \kappa' \ ((\mu')^\mu \leq (2^{<\kappa''})^\mu = 2^{<\kappa''} < \kappa')$.

. $\forall \Xi \subseteq \{ \lambda \in CARD : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \#U \} \ (\# \Xi < \#U \Rightarrow \exists \kappa_0 < \#U \ \forall \kappa \in \Xi \ (\kappa \triangleleft \kappa_0))$.

Pois $\forall \kappa \in \Xi \ (\kappa < \kappa'' = (\vee \Xi)^+ < \#U)$.

■

A seguir sempre tomaremos as restrições de $\triangleleft, \trianglelefteq$ ao universo U_0 .

Proposição 3 : Sejam κ, κ' cardinais regulares infinitos U_0 -pequenos, $I \in obj(U_0 - CAT)$, $\Xi(I, < \kappa') = \{ X \in obj(U_0 - CAT) : X \text{ é subcategoria plena de } I \wedge \#X < \kappa' \}$, $\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa) = \Xi(I, < \kappa') \cap \mathcal{I}_\kappa$. Se $I \in \mathcal{I}_\kappa$ e $\kappa \triangleleft \kappa'$ então $\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)$ é cofinal em $\Xi(I, < \kappa')$ (ordenados por inclusão).

□

Dado $X \in \Xi(I, < \kappa')$ definiremos por indução em $\alpha \in \kappa + 1 = [0, \kappa]$ uma cadeia de subcategorias plenas de I que contém X e tais que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \kappa+1} \subseteq \Xi(I, < \kappa')$.

. $\alpha = 0 \Rightarrow X_0 = X$

Satisfaz as condições acima.

. $\alpha = \cup \alpha \neq 0 \Rightarrow obj(X_\alpha) = \cup_{\beta < \alpha} obj(X_\beta) \wedge mor(X_\alpha) = \cup_{\beta < \alpha} mor(X_\beta)$.

X_α satisfaz as condições pela hipótese de indução, porque $\alpha \leq \kappa < \kappa'$ e κ' é regular e porque a “reunião ω -dirigida” de subcategorias plenas de uma categoria determina subcategoria plena (é o limite indutivo do diagrama associado !).

. $\exists \beta \ (\alpha = \beta + 1) \Rightarrow$ como $\kappa \triangleleft \kappa'$, pela hipótese de indução temos que $\exists \Sigma_\beta \in [[mor(X_\beta)]^{<\kappa}]^{<\kappa'}$ cofinal, logo tomando as subcategorias plenas geradas pelos morfismos de cada elemento de Σ_β obtemos $\Psi_\beta \in [\Xi(X_\beta, < \kappa)]^{<\kappa'}$ cofinal. Para cada $W \in \Psi_\beta$ escolhemos η_W , um cone indutivo comutativo em $I \in \mathcal{I}_\kappa$, com base $j_W : W \hookrightarrow X_\beta \hookrightarrow I$. Definimos então X_α como a subcategoria plena de I gerada pelo conjunto de morfismos $mor(X_\beta) \cup X(\beta, \Sigma, \eta)$ onde $X(\beta, \Sigma, \eta) = \{ \eta_W(\iota_w) : W \in \Psi_\beta \wedge w \in W_0 \}$.

A hipótese de indução se mantém pois $\#mor(X_\beta) < \kappa'$, $\#\Psi_\beta < \kappa'$, $\forall W \in \Psi_\beta \ (\#obj(W) < \kappa < \kappa')$ e porque κ' é regular.

. $X \hookrightarrow X_\kappa \in \Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)$.

Sejam $P \in obj(U_0 - CAT)$ tal que $\#P < \kappa$ e $\Gamma : P \rightarrow X_\kappa$. Como κ é regular, $\exists \beta < \kappa \ ((P \xrightarrow{\Gamma} X_\kappa) = (P \xrightarrow{\Gamma_\beta} X_\beta \hookrightarrow X_\kappa))$, como $\#P < \kappa$ temos que $\exists W \in \Psi_\beta \ ((P \xrightarrow{\Gamma_\beta} X_\beta) = (P \xrightarrow{\Gamma_W} W \hookrightarrow X_\beta))$ logo η_W determina um cone indutivo comutativo com base $(P \xrightarrow{\Gamma_W} W \hookrightarrow X_\beta \hookrightarrow X_{\beta+1})$ e como κ é ordinal limite, obtemos cone indutivo comutativo (

em X_κ) de base Γ .

■

Corolário : Nas condições da proposição anterior temos :

(i) $(\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa), \hookrightarrow)$ é U_0 -conjunto ordenado κ' -dirigido.

(ii) $\text{obj}(I) = \cup \{ \text{obj}(X) : X \in \Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa) \} \wedge \text{mor}(I) = \cup \{ \text{mor}(X) : X \in \Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa) \}$.

□

(i) Como $I \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ temos $(\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa), \hookrightarrow)$ é U_0 -conjunto ordenado , e é κ' -dirigido pois κ' é regular e $\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)$ é cofinal em $\Xi(I, < \kappa')$.

(ii) Porque $\text{obj}(I) = \cup \{ \text{obj}(X) : X \in \Xi(I, < \kappa') \} \wedge \text{mor}(I) = \cup \{ \text{mor}(X) : X \in \Xi(I, < \kappa') \}$ e $\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)$ é cofinal em $\Xi(I, < \kappa')$.

■

Proposição 4 : $\forall \kappa \triangleleft \kappa' \forall A (A \text{ } \kappa\text{-acessível} \Rightarrow A \text{ } \kappa'\text{-acessível})$.

□

. A é U_1 -categoria $\mathcal{I}_{\kappa'}$ -ind completa.

Pois $\kappa \leq \kappa' \Rightarrow \mathcal{I}_{\kappa'} \subseteq \mathcal{I}_\kappa$ e $J_\kappa : A_\kappa \hookrightarrow A$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de A_κ (com A_κ essencialmente em U_0) .

Seja C a subcategoria plena de A tal que $C_0 = \{ a \in A_0 : \exists I \in \mathcal{I}_\kappa \exists H : I \rightarrow A_\kappa (\#I < \kappa' \wedge a \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} J_\kappa \circ H) \}$, temos então:

. $C \subseteq A_{\kappa'}$.

Pois $\kappa \leq \kappa' \Rightarrow (\mathcal{I}_{\kappa'} \subseteq \mathcal{I}_\kappa \wedge A_\kappa \subseteq A_{\kappa'})$.

. C está essencialmente em U_0 .

Pois A_κ está essencialmente em U_0 e existem $< \theta_0$ categorias duas a duas não isomorfas com cardinal $< \kappa' < \theta_0$.

. $\forall a \in A_0 \exists I' \in \mathcal{I}_{\kappa'} \exists H' : I' \rightarrow C (a \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I'}} J' \circ H')$ onde $J' : C \hookrightarrow A$.

. $\forall a \in A_0$ sejam $I \in \mathcal{I}_\kappa$ e $H : I \rightarrow A_\kappa$ tais que $a \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} J_\kappa \circ H$. Consideremos $(\Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa), \hookrightarrow)$ como na proposição anterior. Pela proposição 1 em (1.3.1) e o corolário anterior temos $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ X}} J_\kappa \circ H|_X \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} J_\kappa \circ H \cong a$; basta notar que $\forall X \in \Xi(I, < \kappa', \mathcal{I}_\kappa)$ $(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ X}} J_\kappa \circ H|_X \in \text{obj}(C))$.

. $J' : C \hookrightarrow A$ é $\mathcal{I}_{\kappa'}$ -ind completamente forte de C e C é categoria essencialmente em U_0 .

■

Corolário : Seja A categoria κ_0 -acessível para algum cardinal regular infinito $\kappa_0 < \theta_0$. Temos que :

(i) $\forall X$ subcategoria plena de A essencialmente em $U_0 \exists \kappa (A \text{ } \kappa\text{-acessível} \wedge X \hookrightarrow A_\kappa)$.

(ii) $\forall \kappa (A_\kappa \text{ é } U_1\text{-categoria essencialmente em } U_0)$.

$$(iii) A = \varinjlim_{k < \theta_0} A_k .$$

□

(i) Escolhemos para cada $a \in X_0$ um diagrama $H_a : I_a \rightarrow A_{\kappa_0}$ tal que $I_a \in \mathcal{I}_{\kappa_0}$ e $a \cong \varinjlim_{I_a} J_{\kappa_0} \circ H_a$. Consideramos para cada $a \in X_0$ $\kappa_a = (\kappa_0 + \#I_a)^+$, então $\forall a \in X_0$ ($a \in A_{\kappa_a}$). Como X está essencialmente em U_0 temos $\kappa' = (\sup\{\kappa_a : a \in X_0\})^+ < \theta_0$ e assim $X \hookrightarrow A_{\kappa'}$. Escolhemos, pela proposição 2, κ tal que $\kappa' \triangleleft \kappa$ e $\kappa_0 \triangleleft \kappa$, logo $X \hookrightarrow A_\kappa$ e, pela proposição anterior, A é κ -acessível.

(ii) Para cada $\kappa < \theta_0$ cardinal regular infinito existe κ' tal que $\kappa \triangleleft \kappa'$ e $\kappa_0 \triangleleft \kappa'$. Assim $A_\kappa \hookrightarrow A_{\kappa'}$ e $A_{\kappa'}$ está essencialmente em U_0 . O resultado segue pois A_κ é fechada por isomorfismos.

(iii) Pois por (i) e (ii) temos $obj(A) = \cup_{\kappa < \theta_0} A_\kappa$ e está é uma “reunião dirigida” de subcategorias plenas de A .

■

Observação 3 :

(i) A relação $\trianglelefteq$ é a mais geral possível, isto é :

$\forall \kappa, \kappa' < \theta_0$ cardinais regulares infinitos ($\forall A \in obj(U_1 - CAT)$ (A κ -acessível $\Rightarrow A$ κ' -acessível) $\Rightarrow \kappa \trianglelefteq \kappa'$) .

(ii) Nas condições da proposição 4 segue que $A_{\kappa'} = [C]^{\{E\}-lim}$, mas $A_{\kappa'} = C$ ocorre.

(iii) Dados $\kappa, \kappa'' < \theta_0$ cardinais regulares infinitos, A, A', A'' U_1 -categorias e F, F'' funtores tais que $F \in \kappa - ACE(A, A')$ e $F'' \in \kappa'' - ACE(A', A'')$. Como existe κ_0 tal que $\kappa \triangleleft \kappa_0$ e $\kappa'' \triangleleft \kappa_0$ temos $F'' \circ F \in \kappa_0 - ACE(A, A'')$ e assim faz sentido a:

Definição 3 :

(i) ACE é a subcategoria de $U_1 - CAT$ tal que $obj(ACE) = \cup\{ obj(\kappa - ACE) : \kappa < \theta_0 \text{ é cardinal regular infinito} \}$, $mor(ACE) = \cup\{ mor(\kappa - ACE) : \kappa < \theta_0 \text{ é cardinal regular infinito} \}$.

(ii) $\mathcal{ACE}$ é a sub-2-categoria localmente plena de $U_1 - CAT$ com categoria ordinária subjacente ACE .

Proposição 5 : Princípio da uniformização : Dados X U_1 - categoria essencialmente em U_0 e $\Gamma \in U_2 - CAT(X, ACE)$ existe $\kappa < \theta_0$ cardinal regular infinito tal que:

(i) $(X \xrightarrow{\Gamma} ACE) = (X \xrightarrow{\Gamma} \kappa - ACE \hookrightarrow ACE)$.

(ii) $\forall x \xrightarrow{f} x' (((\Gamma(f))_0)_*(\Gamma(x)_\kappa) \subseteq \Gamma(x')_\kappa)$.

□

Escolhemos, para cada $x \in X_0$, κ_x tal que $\Gamma(x) \in obj(\kappa_x - ACE)$ e para cada $f \in X_1$, κ_f tal que $\Gamma(f) \in mor(\kappa_f - ACE)$. Como X está essencialmente em U_0 podemos supor que $\#\{\kappa_x : x \in X_0\} + \#\{\kappa_f : f \in X_1\} < \theta_0$ logo, pelas proposições 2 e 4, existe κ_0 tal que $(X \xrightarrow{\Gamma} ACE) = (X \xrightarrow{\Gamma} \kappa_0 - ACE \hookrightarrow ACE)$. Em particular, $\forall x \in X_0$ ($\Gamma(x)_{\kappa_0}$

é U_1 -categoria essencialmente em U_0), portanto, raciocinando como acima, existe κ com $\kappa_0 \triangleleft \kappa$ e tal que $\forall x \xrightarrow{f} x' \in X$ ($((\Gamma(f))_0)_*(\Gamma(x)_{\kappa_0}) \subseteq \Gamma(x')_{\kappa}$) . Pela proposição 2 temos $(X \xrightarrow{\Gamma} ACE) = (X \xrightarrow{\Gamma} \kappa - ACE \hookrightarrow ACE)$ e pela observação 3.(ii) $\forall x \xrightarrow{f} x' \in X$ ($((\Gamma(f))_0)_*(\Gamma(x)_{\kappa}) = ((\Gamma(f))_0)_*(\{ a \in \text{obj}(\Gamma(x)) : \exists I \in \mathcal{I}_{\kappa_0} \exists H : I \rightarrow \Gamma(x)_{\kappa_0} (\#I < \kappa)$ $\exists p : a \rightarrow \lim_I J_{(x, \kappa_0)} \circ H \exists i : \lim_I J_{(x, \kappa_0)} \circ H \rightarrow a (p \circ i = 1_a) \}$) $\subseteq \{ a' \in \text{obj}(\Gamma(x')) : \exists I \in \mathcal{I}_{\kappa_0}$ $\exists H' : I \rightarrow \Gamma(x')_{\kappa} (\#I < \kappa) \exists p' : a' \rightarrow \lim_I J_{(x, \kappa)} \circ H' \exists i' : \lim_I J_{(x, \kappa)} \circ H' \rightarrow a' (p' \circ i' = 1_{a'})$ $\}$ $= \{ a' \in \text{obj}(\Gamma(x')) : \exists I \in \mathcal{I}_{\kappa_0} \exists H' : I \rightarrow \Gamma(x')_{\kappa} (\#I < \kappa \wedge a' \cong \lim_I J_{(x, \kappa)} \circ H') \} \subseteq \Gamma(x')_{\kappa}$.

■

Observação 4 : Existe uma U -classe própria de cardinais κ satisfazendo (i) e (ii) acima.

Proposição 6 :

(i) $\forall A \in \text{obj}(ACE) \forall F \in U_1 - CAT(A, U_0 - SET)$ ($F \in ACE(A, U_0 - SET) \iff \exists X \in \text{obj}(U_0 - CAT) \exists \Gamma : X \rightarrow A^* (F \cong \lim_X Y_{A^*} \circ \Gamma(x))$) .

(ii) $\forall A, A' \subseteq \text{obj}(ACE) \forall F \in U_1 - CAT(A, A') (F \in ACE(A, A') \iff \forall a' \in A'_0 (A'(a', -) \circ F \in ACE(A, U_0 - SET))$.

□

(i)

($\Rightarrow$)

Escolhemos, por uniformidade, κ tal que $F \in \kappa - ACE(A, U_0 - SET)$. Consideramos $C \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $J : C \rightarrow A$ $\mathcal{I}_{\kappa}$ -ind completamente forte de A . J é, em particular, $\mathcal{I}_{\kappa}$ -ind completamente fraco de C , portanto, $(L_J \downarrow, [J, U_0 - SET] \downarrow, \eta, \epsilon) : U_1 - CAT(C, U_0 - SET) \xrightarrow{\sim} \kappa - ACE(A, U_0 - SET)$ é equivalência de adjunção . Assim para $(X \xrightarrow{\Gamma} A^*) = ((K(F \circ J))^* \xrightarrow{\cong} (Y_{C^*} \rightarrow (F \circ J)) \xrightarrow{P(F \circ J)} C^* \xrightarrow{J^*} A^*)$ temos $(K(F \circ J))^* \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ e $(\lim_X Y_{A^*} \circ \Gamma \cong \lim_{(Y_{C^*} \rightarrow (F \circ J))} A(J(c), -) \cong \lim_{(Y_{C^*} \rightarrow (F \circ J))} L_J(C(c, -)) \cong \lim_{(Y_{C^*} \rightarrow (F \circ J))} L_J(Y_{C^*} \circ P(F \circ J)) \cong L_J(\lim_{(Y_{C^*} \rightarrow (F \circ J))} Y_{C^*} \circ P(F \circ J)) \cong L_J(F \circ J) \xrightarrow{\epsilon_F \cong} F)$.

($\Leftarrow$)

Como A é κ_0 -acessível para algum κ_0 , podemos escolher, para cada $x \in X_0$, κ_x tal que $\Gamma(x) \in A_{\kappa_x}$. Porque $X \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ temos $\#\{\kappa_x : x \in X_0\} < \theta_0$ logo podemos escolher κ tal que $\forall x \in X_0 (\kappa_x < \kappa)$ e $\kappa_0 \triangleleft \kappa$. Assim A é κ -acessível e F é limite indutivo de funtores que preservam $\mathcal{I}_{\kappa}$ -limites indutivos e, como limites indutivos comutam com limites indutivos, $F \in \kappa - ACE(A, U_0 - SET)$.

(ii)

($\Rightarrow$)

Como $\text{obj}(A') = \cup_{\kappa < \theta_0} A'_{\kappa}$ temos $\forall a' \in A' (A'(a', -) \circ F \in ACE(A, U_0 - SET))$.

($\Leftarrow$)

Seja κ' tal que A' seja κ' -acessível. Como $A'_{\kappa'}$ está essencialmente em U_0 existe $\kappa_0 > \kappa'$ tal que $\forall a' \in A'_{\kappa'} (A'(a', -) \circ F \in \kappa_0 - ACE(A, U_0 - SET) \wedge A'(a', -) \in \kappa_0 - ACE(A', U_0 - SET))$. como $i_{\kappa'} : A'_{\kappa'} \hookrightarrow A'$ é denso, o funtor $\tilde{i}_{\kappa'} : A' \rightarrow [(A'_{\kappa'})^*, U_0 - SET]$ é hom-bijetor, logo reflete isomorfismos. Assim $\tilde{i}_{\kappa'} \circ F$ preserva $\mathcal{I}_{\kappa_0}$ -limites indutivos, $\tilde{i}_{\kappa'}$ preserva $\mathcal{I}_{\kappa_0}$ -limites indutivos e reflete isomorfismos, portanto F preserva $\mathcal{I}_{\kappa_0}$ -limites indutivos.

■

Capítulo 3

Esboços

Tradicionalmente em Matemática, muitas estruturas (conjuntistas) são especificadas através de teorias de primeira ordem. Esboços, por sua vez, são “syntaxes” cuja “semântica pretendida” são as categorias de estruturas descritas por limites projetivos/indutivos, estruturadas sobre alguma categoria de base.

Referências principais : [029] , [096] .

Definição 1 :

(i) $\mathcal{S}$ é um esboço gráfico (g-esboço) $\iff \mathcal{S} = (S, D, cP, cI)$ onde $S \in (GRA)_0$, $D \in \mathcal{P}(\cup_{G \in (GRA)_0} GRA(G, S))$, $cP \in \mathcal{P}(\cup_{G \in (GRA)_0} GRA(G^-, S))$, $cI \in \mathcal{P}(\cup_{G \in (GRA)_0} GRA(G^+, S))$

- . $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{G \in (GRA)_0 : \exists d : G \rightarrow S \in D\}$.
- . $\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \{G \in (GRA)_0 : \exists p : G^- \rightarrow S \in cP\}$.
- . $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \{G \in (GRA)_0 : \exists i : G^+ \rightarrow S \in cI\}$.
- . $\delta(\mathcal{S}) = \min\{\delta : \omega \leq \delta \wedge \forall G \in \mathcal{D}(\mathcal{S}) (\#G \leq \delta)\}$.
- . $\pi(\mathcal{S}) = \min\{\pi : \omega \leq \pi = \text{reg}(\pi) \wedge \forall G \in \mathcal{P}(\mathcal{S}) (\#G < \pi)\}$
- . $\iota(\mathcal{S}) = \min\{\iota : \omega \leq \iota \wedge \forall G \in \mathcal{I}(\mathcal{S}) (\#G \leq \iota)\}$.
- . $\tau(\mathcal{S}) = \max\{\#S, \#D, \#P, \#I, \delta(\mathcal{S}), \pi(\mathcal{S}), \iota(\mathcal{S})\}$.
- . $\kappa(\mathcal{S}) = (\tau(\mathcal{S})^{<\pi(\mathcal{S})})^+$.

Os cardinais acima são denominados cardinais característicos de $\mathcal{S}$.

(ii) $\mathcal{S}$ é um esboço categorial (c-esboço) $\iff \mathcal{S} = (S, cP, cI)$ onde $S \in (CAT)_0$, $cP \in \mathcal{P}(\cup_{G \in (GRA)_0} GRA(G^-, \mathcal{E}(S)))$, $cI \in \mathcal{P}(\cup_{G \in (GRA)_0} GRA(G^+, \mathcal{E}(S)))$.

- . $\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \{G \in (GRA)_0 : \exists p : G^- \rightarrow \mathcal{E}(S) \in cP\}$.
- . $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \{G \in (GRA)_0 : \exists i : G^+ \rightarrow \mathcal{E}(S) \in cI\}$.
- . $\pi(\mathcal{S}) = \min\{\pi : \omega \leq \pi = \text{reg}(\pi) \wedge \forall G \in \mathcal{P}(\mathcal{S}) (\#G < \pi)\}$.
- . $\iota(\mathcal{S}) = \min\{\iota : \omega \leq \iota \wedge \forall G \in \mathcal{I}(\mathcal{S}) (\#G \leq \iota)\}$.
- . $\tau(\mathcal{S}) = \max\{\#S, \#P, \#I, \pi(\mathcal{S}), \iota(\mathcal{S})\}$.

$$\kappa(\mathcal{S}) = (\tau(\mathcal{S})^{<\pi(\mathcal{S})})^+.$$

Os cardinais acima são denominados cardinais característicos de $\mathcal{S}$.

(iii) Sejam $\mathcal{S} = (S, D, cP, cI)$, $\mathcal{S}' = (D', cP', cI')$ g-esboços. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é morfismo de g-esboços $\iff \mathcal{F} = (S, F, S')$ onde $F \in G\text{RA}(S, S')$ é tal que $\{F \circ d : d \in D\} \subseteq D'$, $\{F \circ p : p \in cP\} \subseteq cP'$, $\{F \circ i : i \in cI\} \subseteq cI'$.

Definimos $g - \text{ESQ}$, a categoria dos g-esboços, de modo a termos naturalmente um funtor de esquecimento $\mathcal{E} : g - \text{ESQ} \rightarrow G\text{RA}$.

(iv) Analogamente definimos $c - \text{ESQ}$ e $\mathcal{E} : c - \text{ESQ} \rightarrow \text{CAT}$. Denotamos $c - \mathcal{ESQ}$ a 2-categoria com categoria ordinária subjacente $c - \text{ESQ}$ e 2-flechas as “transformações naturais”, isto é, $\mathcal{E}$ é a parte ordinária de um 2-funtor localmente pleno $\bar{\mathcal{E}} : c - \mathcal{ESQ} \rightarrow \text{CAT}$.

Observação 1 : “ $c - \text{ESQ}$ ($g - \text{ESQ}$) é topológica sobre CAT ($G\text{RA}$)”:

(i) Para cada $S \in (\text{CAT})_0$ consideremos $c - \text{ESQ}_S$, a fibra em $c - \text{ESQ}$ de S , isto é, $c - \text{ESQ}_S$ é a subcategoria de $c - \text{ESQ}$ tal que $\mathcal{E}| : c - \text{ESQ}_S \rightarrow (S \xrightarrow{1_S} S)$. Para cada $F \in \text{CAT}(S, S')$ temos funtores $F_* : c - \text{ESQ}_S \rightarrow c - \text{ESQ}_{S'}$ e $F^* : c - \text{ESQ}_{S'} \rightarrow c - \text{ESQ}_S$ tais que: $F_*(S) = (S', \{F \circ p : p \in cP\}, \{F \circ i : i \in cI\})$ e $F^*(S') = (S, \{p : F \circ p \in cP'\}, \{i : F \circ i \in cI'\})$.

(ii) $S \neq \emptyset \Rightarrow c - \text{ESQ}_S$ é uma categoria não pequena associada a um reticulado (grande) tal que toda subclasse limitada superiormente admite supremo (admite todos os ínfimos de subclasses não vazias).

(iii) Temos bijeções naturais em $S \in (c - \text{ESQ}_S)^*$ e $S' \in c - \text{ESQ}_{S'} : c - \text{ESQ}_{S'}(F_*(S), S') \cong \{\mathcal{F} \in c - \text{ESQ}(S, S') : \mathcal{E}(\mathcal{F}) = F\} \cong c - \text{ESQ}_S(S, F^*(S'))$.

(iv) $\mathcal{E} : c - \text{ESQ} \rightarrow \text{CAT}$ cria todos os limites indutivos e todos os limites projetivos pequenos; como CAT é ind/proj pequeno completa e os funtores de esquecimento $\text{OBJ}, \text{MOR} : \text{CAT} \rightarrow \text{SET}$ criam limites projetivos pequenos e limites indutivos pequenos ω -filtrados, $c - \text{ESQ}$ tem propriedades análogas.

Definição 2 :

(i) Sejam $\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (G\text{RA})_0$. $g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - \text{ESQ}$ é a subcategoria plena de $g - \text{ESQ}$ dos g-esboços $\mathcal{S}$ tais que $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}, \mathcal{P}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{P}, \mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{I}$. Analogamente definimos $c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - \text{ESQ}$.

(ii) Dado $U \in \text{UNIV}$ $g - U - \text{ESQ}$ ($c - U - \text{ESQ}$) é a subcategoria plena de $g - \text{ESQ}$ ($c - \text{ESQ}$) dos g-esboços $\mathcal{S} = (S, D, cP, cI) \in U$ (c-esboços $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in U$).

(iii) Dados $U \in \text{UNIV}$ e $\mathcal{S} \in \text{obj}(g - \text{ESQ})$ ($\mathcal{S} \in \text{obj}(c - \text{ESQ})$). Dizemos que $\mathcal{S}$ está praticamente em U no caso de ser isomorfo a algum g-esboço (c-esboço) em U .

(iv) Dados $U \in \text{UNIV}$ e $\mathcal{S} \in \text{obj}(c - \text{ESQ})$. Dizemos que $\mathcal{S}$ está essencialmente em U no caso de ser equivalente (na 2-categoria $c - \mathcal{ESQ}$!) a algum c-esboço em U .

Observação 2 :

(i) Dispomos de análises semelhantes às realizadas acima quando consideramos $c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ ($g-(\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$, $c-U-ESQ$ ($g-U-ESQ$)). Notemos que se $S \in (CAT)_0 - \emptyset$ ($S \in (GRA)_0 - \emptyset$) então a fibra $c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ_S$ ($g-(\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ_S$) constitui reticulado pequeno (e completo!) $\iff \mathcal{P}, \mathcal{I}(\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ são conjuntos.

(ii) Dadas classes $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}', \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}'$ temos funtores evidentes $c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ \xrightarrow{incl} c-(\mathcal{P}', \mathcal{I}')-ESQ \xrightarrow{rest} c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ = c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ \xrightarrow{id} c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$.

(iii) $\mathcal{S}$ praticamente em $g-U-ESQ$ ($c-U-ESQ$) $\Rightarrow \lambda(\mathcal{S}) < \#U \wedge \mu(\mathcal{S}) < \#U$.

Definição 3 : Sejam $\mathcal{S}$ um esboço (gráfico ou categorial) σ , λ cardinais com $\sigma < \infty$ e $\omega \leq \lambda = reg(\lambda) \leq \infty$. $Disc_\lambda$ denota a classe de todos os grafos discretos com $< \lambda$ objetos ; Par_σ é a classe de todos os grafos com dois objetos e σ flechas paralelas, com mesma orientação, entre esses.

- . $\mathcal{S}$ é trivial $\iff \mathcal{P}(\mathcal{S}) = \mathcal{I}(\mathcal{S}) = \emptyset$.
- . $\mathcal{S}$ é projetivo $\iff \mathcal{I}(\mathcal{S}) = \emptyset$.
- . $\mathcal{S}$ é indutivo $\iff \mathcal{P}(\mathcal{S}) = \emptyset$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -esboço $\iff \pi(\mathcal{S}) \leq \lambda$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -geométrico $\iff \mathcal{S}$ é λ -esboço e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq Disc_\infty \cup Par_2$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -local $\iff \mathcal{S}$ é λ -esboço e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq Disc_\infty$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -regular $\iff \mathcal{S}$ é λ -esboço e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq Par_2$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -coerente $\iff \mathcal{S}$ é λ -esboço e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq Disc_\lambda \cup Par_2$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -projetivo $\iff \mathcal{S}$ é λ -esboço e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \emptyset$.
- . $\mathcal{S}$ é λ -produto $\iff \mathcal{P}(\mathcal{S}) \subseteq Disc_\lambda$ e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Definição 4 : Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (GRA)_0$

(i) $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in obj(c-ESQ)$ é c -esboço comutativo $\iff cP$ (cI) consiste de cones projetivos (indutivos) comutativos. $cc-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ é a subcategoria plena de $c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ dos c -esboços comutativos.

(ii) $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in obj(c-ESQ)$ é c -esboço limite $\iff cP$ (cI) consiste de cones projetivos (indutivos) limites. $cl-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ é a subcategoria plena de $c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ dos c -esboços limites.

(iii) Suponhamos $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((GRA)_0)$. $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in obj(c-ESQ)$ é $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ -teoria $\iff \mathcal{S}$ é c -esboço limite $\wedge \forall P \in \mathcal{P} \forall F : P \rightarrow S \exists p \in cP(base(p) = F) \wedge \forall I \in \mathcal{I} \forall F : I \rightarrow S \exists i \in cI(base(i) = F)$. $(\mathcal{P}, \mathcal{I})-TEO$ é a subcategoria plena de $c-ESQ$ das $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ -teorias.

(iv) Suponhamos $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((GRA)_0)$. $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in obj(c-ESQ)$ é $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ -tipo $\iff \mathcal{S}$ é $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ -teoria $\wedge \forall \{p, p'\} \subseteq c(base(p) = base(p') \Rightarrow p = p') \wedge \forall \{i, i'\} \subseteq cI(base(i) = base(i') \Rightarrow i = i')$. $(\mathcal{P}, \mathcal{I})-TYP$ é a subcategoria plena de $c-ESQ$ dos $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ -tipos.

Para as duas proposições seguintes, consultar o ítem (1.2.2).

Proposição 1 : Sejam $\mathcal{D} \in \mathcal{P}((GRA)_0)$ e $\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (GRA)_0$. O funtor $\mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}} : c-(\mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ \rightarrow g-(\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I})-ESQ$ $((S, cP, cI), F; (S', cP', cI')) \mapsto ((\mathcal{E}(S), \{d : \exists G \in$

$\mathcal{D}(d : G \rightarrow \mathcal{E}(S) \wedge (d, S) \text{ é diagrama comutativo em } S)\}, \{p : (p, S) \in cP\}, \{i : (i, S) \in cI\}, F, (\mathcal{E}(S'), \{d' : \exists G \in \mathcal{D}(d' : \rightarrow \mathcal{E}(S') \wedge (d', S') \text{ é diagrama comutativo em } S')\}, \{p'(p', S') \in cP'\}, \{i' : (i', S') \in cI'\})$ (que está bem definido nos objetos e flechas !) tem adjunto à esquerda $\mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}$ com unidade μ tais que :

(i) $\forall \mathcal{S} = (S, D, cP, cI) \in \text{obj}(g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ) \text{ (} \mathcal{E}(\mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S})) = (S : D) \wedge \mathcal{E}(\mu_S) = \nu(S, D) : S \rightarrow \mathcal{E}((S : D)) \wedge \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) = (\nu(S, D))_*(S) \text{)} .$

(ii) $\forall U \in UNIV \text{ (} \mathcal{S} = (S, D, cP, cI) \in U \iff \mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) \in U \text{)} .$

(iii) $\forall U \in UNIV \text{ (} \mathcal{D} \in \mathcal{P}((U - GRA)_0) \wedge \mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (U - GRA)_0 \Rightarrow ((\mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}|, \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}|) : g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \rightarrow c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \text{ é adjunção)} .$

(iv) Se o “grafo quadrado” $\cong G_2^2$ (ver observação 3 abaixo) é elemento de $\mathcal{D}$ então temos estrutura natural de categoria sobre classe (de objetos) $g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ e obtemos isomorfismo de categorias $c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{G}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}), \bar{\mathcal{S}}) \cong g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ natural em $\mathcal{S} \in \text{obj}((g - (\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)^*)$ e $\bar{\mathcal{S}} \in \text{obj}(c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)$.

■

Proposição 2 : Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (GRA)_0$. O funtor de inclusão $I_{\mathcal{P}\mathcal{I}} : cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ \hookrightarrow c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ$ tem adjunto à esquerda $L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}$ com unidade μ tais que :

(i) $\forall \mathcal{S} \in \text{obj}(c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ) \text{ (} \mathcal{E}(L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S})) = S / \langle R(cP, cI) \rangle \wedge \mathcal{E}(\mu_S) = \Pi_{\langle R(cP, cI) \rangle} : S \rightarrow \mathcal{E}(S / \langle R(cP, cI) \rangle) \wedge I_{\mathcal{P}\mathcal{I}} \circ L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) = (\Pi_{\langle R(cP, cI) \rangle})_*(\mathcal{S}) \text{) onde } \forall s, t \subseteq S_0 \text{ } R(cP, cI)(s, t) = \{(f, f') \in S(s, t) \times S(s, t) : \exists p : G_- \rightarrow \mathcal{E}(S) \in cP \exists g \xleftarrow{h} g' \in G(s = p(-\infty) \wedge f = p(\pi_g) \wedge f' = p(h) \circ p(\pi_{g'}))\} \cup \{(f, f') \in S(s, t) \times S(s, t) : \exists i : G_+ \rightarrow \mathcal{E}(S) \in cI \exists g \xrightarrow{h} g' \in G(t = i(+\infty) \wedge f = i(\iota_g) \wedge f' = i(\iota_{g'}) \circ i(h))\} .$

(ii) $\forall U \in UNIV \text{ (} \mathcal{S} \in U \iff L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) \in U \text{)} .$

(iii) $\forall U \in UNIV \text{ (} \mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (U - GRA)_0 \Rightarrow ((L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}|, I_{\mathcal{P}\mathcal{I}}|) : c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \rightarrow cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \text{ é adjunção)} .$

(iv) Temos isomorfismo de categorias $cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}), \bar{\mathcal{S}}) \cong c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, I_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ natural em $\mathcal{S} \in \text{obj}((c - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)^*)$ e $\bar{\mathcal{S}} \in \text{obj}(cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)$.

■

Observação 3 :

(i) Se $\mathcal{S}$ é um g-esboço tal que $\mathcal{D}_{S1}[\{G \in (GRA)_0 : \#G < \omega\}]^{\leq \omega}$ então $\tau(\mathcal{S}) = \max\{\#S, \#P, \#I, \pi(\mathcal{S}), \iota(\mathcal{S})\}$.

(ii) Para cada $0 \leq m \leq n < \omega$ consideramos os grafos, únicos a menos de isomorfismos, $\vec{n}, \vec{m}$:

$$\vec{n} : 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n \quad (3.1)$$

$$\vec{m} : 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow m-1 \longrightarrow m \quad (3.2)$$

Consideramos G_m^n o grafo único a menos de isomorfismos, obtido através da “identificação dos extremidades” de $\vec{n}$ e $\vec{m}$:

$$G_m^n : \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & f_1 & & f_{n-2} & & \\ & \nearrow f_0 & 1 \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n-1 & \searrow f_{n-1} \\ -\infty & & & & & & +\infty \\ & \searrow f'_0 & 1' \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & m-1 & \nearrow f'_{m-1} \\ & & f'_1 & & f'_{m-2} & & \end{array} \end{array} \quad (3.3)$$

Fixemos construções tais que para todo universo U , $\mathcal{D} = \{G_m^n : 0 \leq m \leq n < \omega\} \subseteq \text{obj}(U - \text{GRA})$. Denominamos esboços (gráficos) naturais os g-esboços $\mathcal{S}$ tais que $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{D}$. A proposição 1 nos permite intercambiar “localmente” gn-esboços e c-esboços , assim utilizaremos ESQ para designar ambas $gn - ESQ$ e $c - ESQ$.

As três proposições abaixo estão demonstradas, com pequenas alterações em [029] .

Proposição 3 : Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (GRA)_0$. O funtor de inclusão $I_{\mathcal{P}\mathcal{I}} : cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ \hookrightarrow cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ$ tem adjunto à esquerda $L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}$ com unidade μ tais que :

- (i) $\forall S \in \text{obj}(cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)$ denotando $\mathcal{E}(L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S})) = S_l$ e $\mathcal{E}(\mu_S) = \sigma_S : S \rightarrow \mathcal{E}(S / < R(c\mathcal{P}, c\mathcal{I}) >)$ então $L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S})$ é tal que $I_{\mathcal{P}\mathcal{I}} \circ L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) = (\sigma_S)_*(\mathcal{S})$.
- (ii) $\forall U \in UNIV (\mathcal{S} \in U \iff L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}) \in U)$.
- (iii) $\forall U \in UNIV (\mathcal{P}, \mathcal{I} \subseteq (U - \text{GRA})_0 \Rightarrow ((L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}|, I_{\mathcal{P}\mathcal{I}}|) : cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \rightarrow cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \text{ é adjunção}))$.
- (iv) Temos isomorfismo de categorias $cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}), \bar{\mathcal{S}}) \cong cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, I_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ natural em $\mathcal{S} \in \text{obj}((cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)^*)$ e $\bar{\mathcal{S}} \in \text{obj}(cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)$.

■

Proposição 4 : Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((GRA)_0)$. O funtor $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO \xrightarrow{R} cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ = (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO \xrightarrow{(incl)} cl - ESQ \xrightarrow{rest} cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ$ é tal que $\forall \mathcal{S} \in \text{obj}(cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ) \exists \mathcal{S}' \in \text{obj}((\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO) \exists J_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow R_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}')$ satisfazendo:

- (i) $\forall \bar{\mathcal{S}} \in \text{obj}((\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO) [J_{\bar{\mathcal{S}}} : (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO(\mathcal{S}', \bar{\mathcal{S}}) \rightarrow cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, R_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ é hom-bijetor e sobrejetor nos objetos (logo é um funtor de equivalência).
- (ii) $\forall U \in UNIV (\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((U - \text{GRA})_0) \Rightarrow (\mathcal{S} \in U \iff \mathcal{S}' \in U)$ (logo a propriedade acima se “restringe aos universos”).

■

Proposição 5 : Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((GRA)_0)$. O funtor $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TYP \xrightarrow{R} cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ = (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TYP \xrightarrow{(incl)} cl - ESQ \xrightarrow{rest} cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ$ tem adjunto à esquerda $L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}$ com unidade μ tais que :

(i) $\forall U \in UNIV (\mathcal{P}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}((U - GRA)_0) \Rightarrow ((L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}, R_{\mathcal{P}\mathcal{I}}) : cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - ESQ \rightarrow (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U - TYP \text{ é adjunção }))$.

(ii) Temos isomorfismo de categorias $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TYP(L_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\mathcal{S}), \bar{\mathcal{S}}) \cong cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, R_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ natural em $\mathcal{S} \in obj((cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ)^*)$ e $\bar{\mathcal{S}} \in obj((\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TYP)$.

■

Fixamos três universos $U_0 \in U_1 \in U_2 \in V$ com cardinais $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$

Observação 4 :

(i) Nos deparamos com as propriedades “2-universais” das teorias no item (1.3.3) através da noção de $\mathcal{I}$ -completamento indutivo fraco. Por [127] e as proposições 2 e 1 temos que para $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in [obj(U_0 - GRA)]^{<\theta_0}$ e todo $\mathcal{S}$, U_1 -esboço $\mathcal{I}$ -indutivo ($\mathcal{P}$ -projetivo) essencialmente em U_0 admite uma $U_1 - (\emptyset, \mathcal{I})$ -teoria $\mathcal{S}'$ ($U_1 - (\mathcal{P}, \emptyset)$ -teoria $\mathcal{S}'$) essencialmente em U_0 e um morfismo $J_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tal que $\forall \bar{\mathcal{S}} \in obj((\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO) [J_{\bar{\mathcal{S}}}] : (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO(\mathcal{S}', \bar{\mathcal{S}}) \rightarrow cl - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - ESQ(\mathcal{S}, R_{\mathcal{P}\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{S}}))$ é um funtor de equivalência com quasi-inversa o funtor extensão de Kan *pontual* à esquerda (à direita).

(ii) Sejam $\bar{\mathcal{S}} \in obj(CAT)$ e $\mathcal{T}_{U_0}(\bar{\mathcal{S}}) = \bar{\mathcal{S}}$ a “ U_0 -teoria máxima em $\bar{\mathcal{S}}$ ”, i.e. $\bar{\mathcal{S}}$ munida de todos os seus cones projetivos/indutivos limites U_0 -indexados. Sejam $\mathcal{P} \in [\mathcal{P}(\bar{\mathcal{S}})]^{<\theta_0}$ e $\mathcal{I} \in [\mathcal{I}(\bar{\mathcal{S}})]^{<\theta_0}$ então para todo esboço natural $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{P}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{P}$ e $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{I}$ temos pelas proposições 1,2,3,5,4 temos $gn - ESQ(\mathcal{S}, \mathcal{E}^{(1)}(\bar{\mathcal{S}})) \cong c - ESQ((\mathcal{S}')^{(1)}, \bar{\mathcal{S}}) \cong$

$$cc - ESQ((\mathcal{S}')^{(2,1)}, \bar{\mathcal{S}}) \cong cl - ESQ((\mathcal{S})^{(3,2,1)}, \bar{\mathcal{S}}) \cong (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TYP((\mathcal{S})^{(5,3,2,1)}, \bar{\mathcal{S}}) \simeq (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - TEO((\mathcal{S})^{(4,5,3,2,1)}, \bar{\mathcal{S}}).$$

Definição 5 :

(i) Para cada $B \in obj(U_1 - CAT)$ consideramos o 2-funtor (“ B -categoria de modelos”) : $MOD(., B) = c - ESQ(., \mathcal{T}_{U_0}(B)) : (c - U_1 - ESQ)^* \rightarrow U_1 - CAT$.

(ii) A é U_1 -categoria esboçável $\iff \exists \mathcal{S} \ U_1$ -esboço essencialmente em $U_0 \ \exists A \xrightarrow{\cong} MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET)$.

(iii) $F \in U_1 - CAT(A, A')$ é esboçável $\iff \exists \mathcal{S}' \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{S}$ diagrama de U_1 -esboços essencialmente em U_0 tal que existe diagrama como abaixo que comuta a menos de isomorfismo natural :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightleftharpoons{\sim} & MOD(\mathbf{S}) \\ F \downarrow & \cong \nearrow & \downarrow MOD(\mathbf{H}) \\ A' & \xrightleftharpoons{\sim} & MOD(\mathbf{S}') \end{array} \quad (3.4)$$

Observação 5 :

(i) Nas definições 5.(ii) e 5.(iii) podemos nos restringir que a U_0 -esboços.

(ii) A simplicidade da noção de morfismo de esboços torna esta categoria um pouco “estreita” : dois esboços com bases de cones isomorfas eventualmente não admitem morfismos entre eles ! A situação é bem diferente quando consideramos componentes conexas, de fato, $U_0 - ESQ$ é $obj(U_0 - CAT)$ -filtrada. Deste modo podemos mostrar que se B é U_0 -ind completa então todo U_0 -esboço possui categoria de B -modelos equivalente à categoria de C -modelos de um U_0 -esboço θ_0 -geométrico com mesmos cardinais característicos.

Proposição 6 : Sejam $A \in obj(CAT)$, $S \in obj(c - U_0 - ESQ)$ e $MOD(S, A) \xrightarrow{J_S} [S, A] = MOD(S, A) \xrightarrow{MOD(i, A)} MOD(S_T, A) \xrightarrow{\cong} [S, A]$ onde $(S, \emptyset, \emptyset) = S_T \xrightarrow{i} S = (S, cP, cI)$ e A é $\mathcal{P}_S$ -proj completa e $\mathcal{I}_S$ -ind completa. Temos:

- (i) J_S cria $\overrightarrow{ISO}(A, \mathcal{P}_S)$ -limites indutivos.
- (ii) J_S cria $\overleftarrow{ISO}(A, \mathcal{I}_S)$ -limites projetivos.

□

(i) Sejam $X \in \overrightarrow{ISO}(A, \mathcal{P}_S)$ e $(X \xrightarrow{M} A^S) = (X \xrightarrow{M} MOD(S, A) \xrightarrow{J_S} A^S)$. Mostraremos que $\forall G^+ \xrightarrow{i} S$ ($G^+ \xrightarrow{\overrightarrow{\lim M(x)}_{oi}} A \in (coneindlim(G, A))_0$) e $\forall G^- \xrightarrow{p} S$ ($G^- \xrightarrow{\overrightarrow{\lim M(x)}_{op}} A \in (coneprojlim(G, A))_0$) .

. $S = \emptyset \Rightarrow 1 \cong MOD(S, A) \xrightarrow{J_S} [S, A] \cong 1$ ok .

. $S \neq \emptyset$:

.. Como A é X -ind completa para todo $i : G^+ \rightarrow S \in cI$ temos que o funtor $(A^S \xrightarrow{i} A^{(G^+)}) = (A^S \xrightarrow{A^{\epsilon_S}} A^{\mathcal{L}(\mathcal{E}(S))} \xrightarrow{\cong} A^{\mathcal{E}(S)} \xrightarrow{A^i} A^{(G^+)})$

preserva X -limites indutivos, logo $\overrightarrow{\lim}_X \hat{i}(M(x)) \xrightarrow{\cong}$

$(\overrightarrow{\lim}_X M(x))_{oi}$; pela definição de M temos que $(X \xrightarrow{i \circ M} A^{(G^+)}) = (X \xrightarrow{\Gamma} coneindlim(G, A) \hookrightarrow A^{(G^+)})$ e o resultado segue pelas observações 1.(ii) e 2 do ítem (1.3.2) .

.. Como A é X -ind completa para todo $p : G^- \rightarrow S \in cP$ temos que o funtor $(A^S \xrightarrow{p} A^{(G^-)}) = (A^S \xrightarrow{A^{\epsilon_S}} A^{\mathcal{L}(\mathcal{E}(S))} \xrightarrow{\cong} A^{\mathcal{E}(S)} \xrightarrow{A^p} A^{(G^-)})$ preserva X -limites indutivos, logo $\overrightarrow{\lim}_X \bar{p}(M(x)) \xrightarrow{\cong}$

$(\overrightarrow{\lim}_X M(x))_{op}$; pela definição de M temos que $(X \xrightarrow{p \circ M} A^{(G^-)}) = (X \xrightarrow{\Gamma} coneprojlim(G, A) \hookrightarrow A^{(G^-)})$ e o resultado segue pela escolha de X e pelas observações 1.(iii) e 2 do ítem (1.3.2) .

(ii) Sejam $X \in \overleftarrow{ISO}(A, \mathcal{I}_S)$ e $(X \xrightarrow{M} A^S) = (X \xrightarrow{M} MOD(S, A) \xrightarrow{J_S} A^S)$. Mostraremos que $\forall G^- \xrightarrow{p} S$ ($G^- \xrightarrow{\overleftarrow{\lim M(x)}_{op}} A \in (coneprojlim(G, A))_0$) e $\forall G^+ \xrightarrow{i} S$ ($G^+ \xrightarrow{\overleftarrow{\lim M(x)}_{oi}} A \in (coneindlim(G, A))_0$) .

. $S = \emptyset \Rightarrow 1 \cong MOD(S, A) \xrightarrow{J_S} [S, A] \cong 1$ ok .

. $S \neq \emptyset$:

.. Como A é X -proj completa para todo $p : G^- \rightarrow S \in cP$ temos que o funtor

$(A^S \xrightarrow{\hat{p}} A^{(G^-)}) = (A^S \xrightarrow{A^{\mathcal{E}(S)}} A^{\mathcal{L}(\mathcal{E}(S))} \xrightarrow{\cong} A^{\mathcal{E}(S)} \xrightarrow{A^P} A^{(G^-)})$ preserva X -limites projetivos, logo $\varprojlim_X \hat{p}(M(x)) \xrightarrow{\cong} (\varprojlim_X M(x))_{op}$; pela definição de M temos que $(X \xrightarrow{\hat{p} \circ M} A^{(G^-)}) = (X \xrightarrow{\Gamma} \text{coneprojlim}(G, A) \hookrightarrow A^{(G^-)})$ e o resultado segue pelas observações 1.(i) e 2 do ítem (1.3.2) .

.. Como A é X -proj completa para todo $i : G^+ \rightarrow S \in cI$ temos que o funtor $(A^S \xrightarrow{\hat{i}} A^{(G^+)}) = (A^S \xrightarrow{A^{\mathcal{E}(S)}} A^{\mathcal{L}(\mathcal{E}(S))} \xrightarrow{\cong} A^{\mathcal{E}(S)} \xrightarrow{A^I} A^{(G^+)})$ preserva X -limites projetivos, logo $\varprojlim_X \hat{i}(M(x)) \xrightarrow{\cong} (\varprojlim_X M(x)) \circ i$; pela definição de M temos que $(X \xrightarrow{\hat{i} \circ M} A^{(G^+)}) = (X \xrightarrow{\Gamma} \text{coneindlim}(G, A) \hookrightarrow A^{(G^+)})$ e o resultado segue pela escolha de X e pelas observações 1.(iii) e 2 do ítem (1.3.2) .

■

Proposição 7 : Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ c-esboços . Para cada $s \in S_0$ e $s' \in S'_0$ consideramos os funtores de “inclusão ”: $j_s : S' \rightarrow S \times S'$ e $j_{s'} : S \rightarrow S \times S'$. Denotando $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}'$ o c-esboço com categoria subjacente $S \times S'$ e estrutura $(\bigvee_{s \in S_0} (j_s)_*(S')) \vee (\bigvee_{s' \in S'_0} (j_{s'})_*(S))$ temos, para todo c-esboço $\mathcal{S}''$, mergulho evidente $c - ESQ(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}', \mathcal{S}'') \hookrightarrow CAT(S, c - ESQ(\mathcal{S}', \mathcal{S}''))$. Se $\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} \subseteq \text{obj}(c - U_0 - ESQ)$ e A é uma categoria $\mathcal{P}(S) \cup \mathcal{P}(S')$ -proj completa e $\mathcal{I}(S) \cup \mathcal{I}(S')$ -ind completa tal que, em A , $\mathcal{I}(S)$ -limites indutivos comutam com $\mathcal{P}(S')$ - limites projetivos e $\mathcal{I}(S')$ -limites indutivos comutam com $\mathcal{P}(S)$ -limites projetivos então temos $MOD(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}', A) \xrightarrow{\cong} MOD(\mathcal{S}, MOD(\mathcal{S}', A))$.

■

Observação 6 : Se $\mathcal{S}_{inic} = (1, \emptyset, \{\emptyset^+ \xrightarrow{\cong} 1\})$ e $\mathcal{S}_{fin} = (1, \{\emptyset^- \xrightarrow{\cong} 1\}, \emptyset)$ temos $\mathcal{S}_{inic} \otimes \mathcal{S}_{fin} \cong \mathcal{S}_{zero} = (1, \{\emptyset^- \xrightarrow{\cong} 1\}, \{\emptyset^+ \xrightarrow{\cong} 1\})$ e $MOD(\mathcal{S}_{inic}, MOD(\mathcal{S}_{fin}, U_0 - SET)) \simeq 1 \cong MOD(\mathcal{S}_{fin}, MOD(\mathcal{S}_{inic}, U_0 - SET))$ mas $MOD(\mathcal{S}_{zero}, U_0 - SET) = \emptyset$.

A observação acima também revela que definir esboços , mesmo muito simples, é tarefa pouco agradável.

Introduziremos abaixo uma “descrição gráfica” de um esboço natural $\mathcal{S} = (S, D, cP, cI)$ onde:

. Os símbolos $\circlearrowleft$, $\downarrow$, $\uparrow$ são utilizados para designar que os homomorfismos de grafos pertencem, respectivamente, a D , cP , cI .

. As notações empregadas são tais que para todos $A \in (CAT)_0$ e $\mathcal{M} \in (MOD(\mathcal{S}, A))_0$, $\mathcal{M}$ “válida” os homomorfismos especificados.

(i) Identidade : “ $f = 1_a$ ”

Um diagrama indexado por G_0^1 com imagem:

(3.5)

(ii) Isomorfismos inversos : “ $g \circ f = 1_a \wedge f \circ g = 1_b$ ” Dois diagramas indexados por G_0^2 :

(iii) Isomorfismo : “ $f : a \xrightarrow{\cong} b$ ” Um cone projetivo com base indexada por grafo $\cong \mathbf{1}$ com imagem:

(iii)' Isomorfismo : “ $f : a \xrightarrow{\cong} b$ ” Um cone indutivo com base indexada por grafo $\cong \mathbf{1}$ com imagem:

(iv) Monomorfismo : “ $f : a \rightarrow b$ ” Uma especificação de identidade e um cone projetivo com base indexada por grafo $\cong \rightarrow \leftarrow$ com imagem:

(iv) Epimorfismo : “ $f : a \rightarrow b$ ”

Uma especificação de identidade e um cone indutivo com base indexada por grafo $\cong \leftarrow \rightarrow$ com imagem:

(3.10)

(v) Objeto final : “1”

Um cone projetivo com base indexada por $\emptyset$ com imagem:

(3.11)

(v) Objeto inicial : “0”

Um cone indutivo com base indexada por $\emptyset$ com imagem:

(3.12)

(vi) Produto : “ $\prod_{i \in I} F(i)$ ”

Um cone projetivo com base $F : I \rightarrow S$, indexado por grafo discreto I com imagem:

$$(3.13)$$

(vi) Coproduto : “ $\coprod_{i \in I} F(i)$ ”

Um cone indutivo com base $F : I \rightarrow S$, indexado por grafo discreto I com imagem:

$$(3.14)$$

(vii) Igualador : “ $ig(\{f_i\}_{i \in I})$ ”

Um cone projetivo com base indexada por grafo $\in Par_\alpha$ ($\alpha = \#I$) com imagem:

$$(3.15)$$

(vii) Coigualador : “ $coig(\{f_i\}_{i \in I})$ ”

Um cone indutivo com base indexada por grafo $\in Par_\alpha$ ($\alpha = \#I$) com imagem:

(3.16)

(viii)' Limite projetivo : " $\varprojlim_I F(i)$ "

Um cone projetivo com base $F : I \rightarrow S$:

(3.17)

(viii)' Limite indutivo : " $\varinjlim_I F(i)$ "

Um cone indutivo com base $F : I \rightarrow S$:

(3.18)

(ix) Flechas $\varprojlim : "(f_i)_{i \in I_0} : a \rightarrow \varprojlim_I F(i)"$

Um cone projetivo e $\#(I_0)$ diagramas indexados por G_1^2 com imagens:

$$\begin{array}{ccc}
 a & & \\
 \downarrow (f_i)_{i \in I} & & \\
 \lim F(i) & \xleftarrow{I} & \\
 \downarrow \pi_i & & \\
 F(i) & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \text{f}_i \end{array}
 \quad (3.19)$$

(ix): Flechas $\varinjlim : "[f_i]_{i \in I_0} : \varinjlim_I F(i) \rightarrow a"$ Um cone indutivo e $\#(I_0)$ diagramas indexados por G_1^2 com imagens:

$$\begin{array}{ccc}
 a & & \\
 \uparrow [f_i]_{i \in I} & & \\
 \lim F(i) & \xrightarrow{I} & \\
 \uparrow \iota_i & & \\
 F(i) & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \text{f}_i \end{array}
 \quad (3.20)$$

(x) $\varprojlim$ de flechas : " $F' \circ T \xrightarrow{\eta} F \Rightarrow \varprojlim_I F'(T(i)) \xrightarrow{\varprojlim_I \eta_i} \varprojlim_I F(i)$ "

Dois cones projetivos I -indexados e $\#(I_0)$ diagramas indexados por G_2^2 com imagens:

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) & \xleftarrow{\pi_i} & \lim F(i) \\
 \uparrow \eta_i & & \uparrow \varprojlim_I \eta_i \\
 F' \circ T(i) & \xleftarrow{\pi' T(i)} & \lim F' \circ T(i)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}
 \quad (3.21)$$

(x) $\varinjlim$ de flechas : “ $F \xrightarrow{\eta} F' \circ T \Rightarrow \varinjlim_I F(i) \xrightarrow{\varinjlim_I \eta_i} \varinjlim_I F' \circ T$ ”

Dois cones indutivos I -indexados e $\#(I_0)$ diagramas indexados por G_2^2 com imagens:

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) & \xrightarrow{\iota_i} & \varinjlim_I F(i) \\
 \downarrow \eta_i & & \downarrow \varinjlim_I \eta_i \\
 F' \circ T(i) & \xrightarrow{\iota' T(i)} & \varinjlim_I F' \circ T(i)
 \end{array}
 \quad (3.22)$$

Capítulo 4

Lógicas infinitárias

Referências principais : [058] , [168] , [166] .

Definição 1 :

(i)

- . $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ é um tipo (pequeno) $\iff s_F \in SET(F, S) ; \forall f \in F \exists I_f \in CARD (a_F(f) \in SET(I_f, S)) ; \forall r \in R \exists I_r \in CARD (a_R(r) \in SET(I_r, S))$.
- . $s \in S$ é uma sorte de μ ; $f \in F$ é uma símbolo funcional de μ com sorte de valor $s_F(f)$ e com aridade $a_F(f)$; $r \in R$ é uma símbolo relacional de μ com aridade $a_R(r)$.
- . $\pi(\mu) = \min\{\lambda : \omega \leq \lambda = reg(\lambda) < \infty \wedge \forall f \in F (I_f < \lambda) \wedge \forall r \in R (I_r < \lambda)\}$ é o cardinal característico de μ .
- . $\tau(\mu) = \pi(\mu) + \#S + \#F + \#R$ é o cardinal de μ .

(ii)

- . Sejam $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ e $\mu' = (S', F', R', s_{F'}, a_{F'}, a_{R'})$ tipos .
- . $H = (\mu, H_\sigma, H_\varphi, H_\rho, \mu') : \mu \rightarrow \mu'$ é morfismo de tipos $\iff H_\sigma \in SET(S, S') ; H_\varphi \in SET(F, F') ; H_\rho \in SET(R, R') ; s_{F'} \circ H_\varphi = H_\sigma \circ s_F ; \forall f \in F (I_{H_\varphi(f)} = I_f \wedge a_{F'}(H_\varphi(f)) = a_F(f)) ; \forall r \in R (I_{H_\rho(r)} = I_r \wedge a_{R'}(H_\rho(r)) = a_R(r))$.
- . Typ é a categoria dos tipos e morfismos de tipos .
- . Seja $U \in UNIV$:
- .. $U - Typ$ é a subcategoria plena de Typ com objetos os tipos pertencentes a U .
- . $\mu \in obj(Typ)$ é um tipo praticamente em $U \iff \exists \mu' \in obj(U - Typ) (\mu \cong \mu')$.
- . Seja $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ tipo (tipo em U ; tipo praticamente em U) :
- .. $(S, F, \emptyset, s_F, a_F, \emptyset) = \mu_A \xrightarrow{i_A} \mu$ é o tipo algébrico (em U ; praticamente em U) associado a μ .
- .. $(S, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset) = \mu_T \xrightarrow{i_T} \mu$ é o tipo trivial (em U ; praticamente em U) associado a μ .

(iii)

. $\Xi : GRA \rightarrow Typ$ é o funtor tal que $S = (S_0, S_1, d, c) \mapsto \Xi(S) = (S_0, S_1, \emptyset, s_S, a_S, \emptyset)$ onde $\forall f \in S_1$ ($s_S(f) = c(f) \wedge I_f = 1 \wedge a_S(f) = \hat{d}(f) : I_f \rightarrow S_0$) ; $H = (H_0, H_1) : S \rightarrow S' \mapsto \Xi(H) = (H_0, H_1, \emptyset) : \Xi(S) \rightarrow \Xi(S')$

. (Ξ se fatora por $Typ_{alg} \hookrightarrow Typ$ e se restringe aos universos.)

. $\Gamma : Typ \rightarrow GRA$ é o funtor tal que $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R) \mapsto \Gamma(\mu) = (S, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$; $H = (H_\sigma, H_\varphi, H_\rho) : \mu \rightarrow \mu' \mapsto \Gamma(H) : (H_\sigma, \emptyset, \emptyset, \emptyset) : \Gamma(\mu) \rightarrow \Gamma(\mu')$. (Γ se fatora por $GRA_{disc} \hookrightarrow GRA$ e se restringe aos universos.)

(iv)

Para cada tipo $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ denotamos $EST(\mu, SET)$ a categoria das SET -estruturas de tipo μ :

. $obj(EST(\mu, SET)) = \{ M = (M_S, M_F, M_R) \in Func(S, V) \times Func(F, V) \times Func(R, V) : \forall f \in F (M_F(f) \in SET (\prod_{i \in I_f} M_S(a_F(f)(i)) , M_S(s_F(f))) \wedge \forall r \in R (M_R(r) = [M(r) \xrightarrow{M(j_r)} \prod_{i \in I_r} M_S(a_R(r)(i))] \in Sub(\prod_{i \in I_r} M_S(a_R(r)(i)))) \} .$
. $\forall M, M' \in obj(EST(\mu, SET))$ $EST(\mu, SET)(M, M') = \{ \xi \in Func(S, V) : \forall s \in S (\xi_s \in SET(M_S(s), M'_S(s))) \wedge \forall f \in F ((\prod_{i \in I_f} M_S(a_F(f)(i)) \xrightarrow{M_F(f)} M_S(s_F(f)) \xrightarrow{\xi_{s_F(f)}} \prod_{i \in I_f} M'_S(a_F(f)(i))) = (\prod_{i \in I_f} M'_S(a_F(f)(i))) \wedge \forall r \in R (\exists \gamma_r \in SET(M(r), M'(r)) ((M(r) \xrightarrow{\gamma_r} M'(r) \xrightarrow{M'(j_r)} \prod_{i \in I_r} M'_S(a_R(r)(i))) = (M(r) \xrightarrow{M(j_r)} \prod_{i \in I_r} M_S(a_R(r)(i)) \xrightarrow{\prod_{i \in I_r} \xi_{a_R(r)(i)}} \prod_{i \in I_r} M'_S(a_R(r)(i)))) \} .$

Observação 1 :

(i) Se $U_0 \in U_1 \in U_2 \in V$ são universos com cardinais $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, obtemos $EST(., U_0 - SET) \in U_2 - CAT((U_0 - Typ)^*, U_1 - CAT)$.

(ii) $EST(\mu, U_0 - SET) \cong (U_0 - SET)^{\Gamma(\mu)}$ naturalmente em $\mu \in obj((U_0 - Typ_{triv})^*)$; $(U_0 - SET)^S \cong EST(\Xi(S), U_0 - SET)$ naturalmente em $S \in obj((U_0 - GRA)^*)$.

(iii) Seja $EST(\mu, SET)_{disj}$ a subcategoria plena de $EST(\mu, SET)$ com objetos a classe das μ -estruturas de “fibras disjuntas” : $\forall s, s' \in S (M_S(s) \cap M_S(s') = \emptyset)$ então $EST(\mu, SET)_{disj} \xrightarrow{\cong} EST(\mu, SET)$.

(iv) Denotaremos, para cada μ -estrutura M , $|M| = \coprod_{s \in S} M_S(s)$ e $\#M = \#|M|$ (a cardinalidade de M).

(v) Utilizaremos simplificações notacionais :

. Omitiremos os índices σ, ϕ, ρ em morfismos de tipos e os índices S, F, R em estruturas.

. Se $M \xrightarrow{\xi} M' \in EST(\mu, SET)_{disj}$ então não faremos distinção notacional com sua reunião (já disjunta!) : $\dot{\bigcup}_{s \in S} \xi(s) : \dot{\bigcup}_{s \in S} M(s) \rightarrow \dot{\bigcup}_{s \in S} M'(s)$. Adotaremos convenção semelhante

para a categoria $(SET^S)_{disj}$ onde S é um grafo discreto.

Proposição 1 : “Valorações de variáveis se estendem aos termos” : Para todo tipo pequeno μ o funtor de esquecimento $(EST(\mu, SET) \xrightarrow{\mathcal{E}_\mu} SET^{\Gamma(\mu)}) = (EST(\mu, SET) \xrightarrow{EST(i_T, SET)} EST(\mu_T, SET) \xrightarrow{\cong} SET^{\Gamma(\mu)})$ admite adjunto à esquerda $SET^{\Gamma(\mu)} \xrightarrow{T_\mu} EST(\mu, SET)$, o funtor “ μ_A -álgebra dos termos” .

□

Seja $X \in obj(SET^{\Gamma(\mu)})$.

(i) Basta mostrarmos a propriedade universal quando X “são variáveis” : X tem fibras disjuntas (assim definimos $s_X(x) = s \iff x \in X(s)$) e $\forall s \in S \forall x \in X(s) \forall f \in F (s_F(f) = s \Rightarrow \forall a \in V (x \neq (f, a)))$.

Pois $S, F \in V \Rightarrow \forall s \in S (\exists z^s \in V (z^s \notin \{f \in F : s_F(f) = s\} \wedge \forall s', s' \in S (z^s \neq z^{s'})) \wedge X(s) \cong \{(z^s, x) : x \in X(s)\})$.

(ii) Com a hipótese acima definimos, por indução em $\alpha \in ORD^+$, a seqüência crescente de objetos de SET constituídos por pares ordenados :

$$. X_0 = |X| = \bigcup_{s \in S} \{(x, s) : s_X(x) = s\} .$$

$$. X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \{((f, graf(T')), s_F(f)) : f \in F \wedge (I_f \xrightarrow{T'} X_\alpha \xrightarrow{p_2} S = I_f \xrightarrow{a_F(f)} S)\} .$$

$$. 0 \neq \alpha = \bigvee [0, \alpha[\Rightarrow X_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} X_\beta .$$

Então :

. $\forall \{(t, s), (t, s')\} \subseteq X_\infty ((t, s) = (t, s') \Rightarrow s = s')$. (Indução em $\alpha \in ORD^+$ utilizando (i).)

. Dado $(t, s) \in X_\infty$ dizemos que t é um μ -termo nas variáveis X , com sorte s ($s_{Term}(t) = s$) .

. Definimos $posto(t) = \min\{\alpha \in ORD^+ : (t, s) \in X_\alpha\}$ (é um ordinal sucessor ou 0) .

. Por indução em $posto(t)$ definimos o conjunto das X -variáveis que ocorrem (livres) em t :

.. $posto(t) = 0 \Rightarrow \exists (x, s) \in X_0 ((t, s_{Term}(t)) = (x, s))$ neste caso $Xl(t) = \{x\}$.

.. $posto(t) = \alpha + 1 \Rightarrow \exists f \in F \exists T' : I_f \rightarrow X_\alpha ((t, s_{Term}(t)) = ((f, graf(T')), s_F(f)))$ neste caso $Xl(t) = \bigcup_{i \in I_f} Xl(p_1(T(i)))$.

. Seja $\pi = \pi(\mu_A)$ então $\#Xl(t) < \pi$ (indução em $posto(t)$) e $X_\pi = X_\infty$ (π é cardinal regular $\Rightarrow X_{\pi+1} \subseteq X_\pi$) .

. Sejam $0 \leq \pi = reg(\pi) \leq \tau < \infty$ tais que $\pi(\mu) \leq \pi$, $\tau(\mu) \leq \tau$. Se $\#X \leq \tau^{<\pi}$ então por indução , utilizando o item (1.1.3), obtemos que $\#p_1(X_\infty) = \#X_\infty \leq \tau^{<\pi}$.

(iii)

. Definimos a $\mathcal{T}_\mu(X) = Term(\mu, X)$ como a μ_A -estrutura tal que:

.. $\forall s \in S (\mathcal{T}_\mu(X)(s) = \{t : t \text{ é termo} \wedge s_{Term}(t) = s\})$.

.. $\forall f \in F (\mathcal{T}_\mu(X)(f) : \prod_{i \in I_f} \mathcal{T}_\mu(X)(a_F(f)(i)) \rightarrow \mathcal{T}_\mu(X)(s_F(f)) , T \mapsto (f, graf(T'))$ onde

$T' : I_f \rightarrow X_\pi, i \mapsto (T(i), s_{Term}(T(i)))$.

. Consideramos $X \xrightarrow{\eta_X} \mathcal{E}_\mu(Term(\mu, X))$.

(iv) η_X é universal: $\forall M \in obj(EST(\mu, SET)) \forall v \in SET^{\Gamma(\mu)}(X, \mathcal{E}_\mu(M)) \exists ! v' \in EST(\mu, SET)(Term(\mu, X), M) (\mathcal{E}_\mu(v') \circ \eta_X = v)$:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\eta_X} & E(Term(\mu, X)) \\
 & \searrow v & \downarrow E(v') \\
 & & E(M)
 \end{array}$$

(4.1)

Definimos v' por indução no posto dos termos:

. $posto(t) = 0 \Rightarrow \exists x \in X (t = x)$. Definimos $v'(x) = v(x)$.

. $posto(t) = \alpha + 1 \Rightarrow \exists f \in F \exists T : I_f \rightarrow Term(\mu, X) (a_F(f) = s_{Term} \circ T \wedge \forall i \in I_f (posto(T(i)) \leq \alpha) \wedge "t = f(T)")$. Definimos $v'(f(T)) = M(f)((v'(T(i)))_{i \in I_f})$.

Deste modo v' satisfaz os requisitos acima.

■

Observação 2 :

(i) Para todo tipo $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ a propriedade universal acima nos diz que toda μ -estrutura M é naturalmente uma μ_X -estrutura onde:

. $\mu_X = (S, Term(\mu, X), R, s_{Term}, a_{Term}, a_R)$:

.. $a_{Term}(t) : \#Xl(t) \cong Xl(t) \rightarrow S, x \mapsto s_X(x)$.

. $M_X(t) : \prod_{x \in Xl(t)} M(a_{Term}(t)(x)) \rightarrow M(s_{Term}(t))$, $v|_{Xl(t)} \mapsto v'(t)$.

Ou seja:

. Se $t = x \in X$ então $M_X(t) = 1_{M(s_X(x))} : M(s_X(x)) \rightarrow M(s_X(x))$

. Se $t = f(T)$ então ¹:

¹Nos diagramas desta observação reservaremos a letra p , munida de índices, para indicar “projeções” .

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{x \in Xl(t)} M(a_{Term}^{(t)}(x)) & \xrightarrow{M_X(t)} & M(s_{Term}^{(t)}) \\
\downarrow p_t & \curvearrowright & \uparrow M(f) \\
\prod_{i \in I_f} \prod_{x \in Xl(T(i))} M(a_{Term}^{(T(i))}(x)) & \xrightarrow{\prod_{i \in I_f} M_X^{(T(i))}} & \prod_{i \in I_f} M(a_F^{(f)(i)})
\end{array}
\quad (4.2)$$

Onde p_T é tal que :

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{x \in Xl(t)} M(a_{Term}^{(t)}(x)) & \xrightarrow{p_x} & M(a_{Term}^{(t)}(x)) \\
\downarrow p_t & \curvearrowright & \uparrow p_x'' \\
\prod_{i \in I_f} \prod_{x \in Xl(T(i))} M(a_{Term}^{(T(i))}(x)) & \xrightarrow{p_i'} & \prod_{x \in Xl(T(i))} M(a_{Term}^{((T(i)))(x)})
\end{array}
\quad (4.3)$$

(ii) A proposição 1 e o resultado acima se “restringem aos universos” : $\mu \in V \rightsquigarrow \mu \in U_0$; $SET \rightsquigarrow U_0 - SET$. (Substituir $V \rightsquigarrow U_0$ e $\infty \rightsquigarrow \theta_0$.)

Definição 2 : Sejam μ tipo , λ, π cardinais regulares infinitos tais que $\infty > \lambda \geq \pi \geq \pi(\mu)$ e X uma escolha de variáveis tal que $\forall s \in S$ ($\#X(s) = \lambda$) . Consideremos os símbolos: ² $=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$.

A linguagem $L_{\lambda\pi}(\mu)$ consiste dos objetos abaixo:

(i) $E_{\lambda\pi}(\mu)$: as expressões de $L_{\lambda\pi}(\mu)$.

²Conjuntos dois a dois distintos, distintos dos símbolo relacionais de μ e que pertencem a todo $U \in UNIV$

Definimos indutivamente a seqüência crescente de conjuntos $\{E^\xi\}_{\xi \in ORD^+}$:

. $E^0 = \{ (=, T) : T : 2 \rightarrow Term(\mu, X) , s_{Term}(T(0)) = s_{Term}(T(1)) \} \cup \{ (r, T) : r \in R , T : I_r \rightarrow Term(\mu, X) , s_{Term} \circ T = a_R(r) \} .$

. $E^{\xi+1} = E^\xi \cup \{ (\neg, \Psi) : \Psi : 1 \rightarrow E^\xi \} \cup \{ (\rightarrow, \Psi) : \Psi : 2 \rightarrow E^\xi \} \cup \{ (\wedge, \Psi) : \Psi : \beta \rightarrow E^\xi , \beta < \lambda \} \cup \{ (\vee, \Psi) : \Psi : \beta \rightarrow E^\xi , \beta < \lambda \} \cup \{ (\forall, (Z, \Psi)) : \Psi : 1 \rightarrow E^\xi , Z : \beta \rightarrow X , \beta < \pi \} \cup \{ (\exists, (Z, \Psi)) : \Psi : 1 \rightarrow E^\xi , Z : \beta \rightarrow X , \beta < \pi \} .$

. $0 \neq \xi = \sup[0, \xi[\Rightarrow E^\xi = \bigcup_{\zeta < \xi} E^\zeta .$

Definimos $E_{\lambda\pi}(\mu) = E^\infty$. Para $\psi \in E_{\lambda\pi}(\mu)$ definimos $posto(\psi) = \min\{\xi \in ORD^+ : \psi \in E^\xi\}$.

(ii) Análogamente, definimos indutivamente as noções de subexpressão ($Sub(\psi)$) , de X -variáveis ocorrendo numa expressão ($X(\psi) \subseteq |X|$) , de X -variáveis ocorrendo livremente numa expressão ($Xl(\psi)$) ...

(iii) $F_{\lambda\pi}(\mu)$: a classe das fórmulas em $L_{\lambda\pi}(\mu)$.

Dizemos que uma expressão ψ é fórmula ($\psi \in F_{\lambda\pi}(\mu)$) $\iff \#Xl(\psi) < \pi$. Em particular, dizemos que ψ é sentença quando $Xl(\psi) = \emptyset$.

Observação 3 : Por indução no posto das expressões verificamos que:

- (i) Expressões de posto zero (atômicas) são fórmulas.
- (ii) Subexpressões de fórmulas são fórmulas.
- (iii) Toda fórmula é subfórmula de uma sentença .
- (iv) Se $\psi \in E_{\lambda\pi}(\mu)$ então $\#Sub(\psi), \#X(\psi) < \lambda$.
- (v) $E_\lambda = E_\infty$.
- (vi) Se $\lambda \geq \tau(\mu)$ então $\#E_{\lambda\pi}(\mu) \leq \lambda^{<\pi}$. (ítem (1.1.3))

Observação 4 :

(i) Utilizaremos as simplificações :

. Notacionais : $r(T), \psi_0 \rightarrow \psi_1 , \bigvee_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha , \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0 , \dots$

. “Semanticamente orientadas” :

.. Aplicamos os operadores $\wedge, \vee$ em conjuntos de fórmulas .

.. Aplicamos os operadores $\forall, \exists$ em conjuntos de variáveis e a uma fórmula .

. Se μ é um tipo praticamente em $U = V_\theta \in UNIV$, escolheremos variáveis X para $L_{\theta\theta}(\mu)$ tal que $\forall s \in S (X(s) \subseteq U)$.

(ii) $\psi_0 \leftrightarrow \psi_1 \rightsquigarrow (\psi_0 \rightarrow \psi_1) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_0)$.

(iii) $\top \rightsquigarrow \bigwedge_\emptyset ; \perp \rightsquigarrow \bigvee_\emptyset$.

(iv) $\exists! (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0 \rightsquigarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0 \wedge \forall (x'_\alpha)_{\alpha \in \beta} \forall (x''_\alpha)_{\alpha \in \beta} (\psi_0^{(')} \wedge \psi_0^{(''}) \rightarrow \bigwedge_{\alpha \in \beta} x'_\alpha = x''_\alpha)$.

(v) $\bigsqcup_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha = (\bigvee_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha) \wedge (\bigwedge_{\alpha \neq \alpha'} (\neg \psi_\alpha \wedge \neg \psi_{\alpha'}))$.

Definição 3 : “Verdade de Tarski” : Sejam $\mu \in obj(U_0 - Typ)$, $M \in obj(EST(\mu, U_0 - SET))$ e X um conjunto de variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$. Definiremos indutivamente,

para cada fórmula ψ , subobjetos $[M_X(\psi) \xrightarrow{M_X(j_\psi)} \prod_{x \in Xl(\psi)} M(s_X(x))]$ tais que se M tem fibras disjuntas então para cada valoração v ,definida num U_0 -subconjunto de X contendo $Xl(\psi)$, na estrutura M , temos $M \models_v \psi \iff v|_{Xl(\psi)} \in M_X(\psi) \leq \prod_{x \in Xl(\psi)} M(s_X(x))$.

Para cada termo t nas variáveis $X' \in obj((U_0 - SET)^{\Gamma(\mu)})$ com $|X'| \subseteq |X|$, consideramos como na observação (2.i) a operação derivada $M_X(t) : \prod_{x \in Xl(t)} M(a_{Term}(t)(x)) \rightarrow M(s_{Term}(t))$.

(i) $\psi \rightsquigarrow t_0 = t_1$

$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} : M_X(t_0)((m_{s_X(x)})_{x \in Xl(t_0)}) = M_X(t_1)((m_{s_X(x)})_{x \in Xl(t_1)})\}$.

Ou seja:

$$\begin{array}{ccc}
 M_X(\Psi) & \xrightarrow{M_X(j_\Psi)} & \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x)) \\
 & & \downarrow M_X(t_0) \circ p_0 \quad \downarrow M_X(t_1) \circ p_1 \\
 & & M(s)
 \end{array}
 \quad (4.4)$$

(igualador)

(ii) $\psi \rightsquigarrow r(T)$

$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} : (M_X(T(i))((m_{s_X(x)})_{x \in Xl(T(i))}))_{i \in I_r} \in M(r)\}$.

Ou seja:

$$\begin{array}{ccc}
M_X(\Psi) & \xrightarrow{M_X(j\Psi)} & \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x)) \\
\downarrow f_X(\Psi) & \text{(pullback)} & \downarrow \\
M(r) & \xrightarrow{M(j_r)} & \prod_{i \in I_r} M(a_R^{(r)(i)}) \\
& & \uparrow \prod_{i \in I_r} M_X(T(i)) \\
& & \prod_{i \in I_r} \prod_{x \in Xl(T(i))} (a_{Term}(T(i))(x)) \\
& & \uparrow p_T
\end{array}$$

(4.5)

Onde p_T é tal que :

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{x \in Xl(t)} M(a_{Term}(t)(x)) & \xrightarrow{p_x} & M(a_{Term}(t)(x)) \\
\downarrow p_t & \curvearrowright & \uparrow p_x'' \\
\prod_{i \in I_f} \prod_{x \in Xl(T(i))} M(a_{Term}(T(i))(x)) & \xrightarrow{p_i'} & \prod_{x \in Xl(T(i))} M(a_{Term}((T(i))(x))
\end{array}$$

(4.6)

(iii) $\psi \rightsquigarrow \bigwedge_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha$

Para cada $\alpha \in \beta$ consideremos o seguinte “pullback” : $M_X^\psi(\psi_\alpha) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} : (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi_\alpha)} \in \prod_{x \in Xl(\psi_\alpha)} M(s_X(x))\}$.

Então :

$$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} : \forall \alpha \in \beta \ ((m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in M_X^\psi(\psi_\alpha))\} = \bigcap_{\alpha \in \beta} M_X^\psi(\psi_\alpha) .$$

Ou seja:

$$\begin{array}{ccc}
M_X^{(\Psi)} & & \\
\downarrow p_\alpha & \searrow M_X^{(\mathbf{j}\Psi)} & \\
M_X^{(\Psi_\alpha)} & \xrightarrow{M_X^{(\mathbf{j}\Psi_\alpha)}} & \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x))
\end{array}
\quad \text{(pullback)}
\quad (4.7)$$

Obs.: Em particular, se $\beta = 0$ então $M_X(\top) = 1 = \{\emptyset\}$.

(iv) $\psi \rightsquigarrow \psi_0 \rightarrow \psi_1$

Para cada $\alpha \in 2$ consideremos o pullback : $M_X^\psi(\psi_\alpha) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in \prod_{x \in Xl(\psi)} M(s_X(x)) :$

$(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi_\alpha)} \in \prod_{x \in Xl(\psi_\alpha)} M(s_X(x))\}$.

Então :

$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} : (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in M_X^\psi(\psi_0) \Rightarrow (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in M_X^\psi(\psi_1)\}$

Equivalentemente, existe (automaticamente único e monomorfismo!) $f_X(\psi) : M_X^\psi(\psi_0) \rightarrow M_X^\psi(\psi_1)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
M_X^{(\Psi)}(\psi_0) & \xrightarrow{M_X^{(\mathbf{j}\Psi_0)}} & \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x)) \\
\downarrow f_X(\Psi) & \searrow M_X^{(\mathbf{j}\Psi_1)} & \\
M_X^{(\Psi)}(\psi_1) & &
\end{array}
\quad \text{(curved arrow from } M_X^{(\mathbf{j}\Psi_0)} \text{ to } M_X^{(\mathbf{j}\Psi_1)})
\quad (4.8)$$

(v) $\psi \rightsquigarrow \forall (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0$

$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in \prod_{x \in Xl(\psi)} M(s_X(x)) : \forall (m'_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi_0)} \in M_X(\psi_0) ((m'_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} = (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)})\}$.

Seja o pullback : $M_X^{\psi_0}(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi_0)} \in \prod_{x \in Xl(\psi_0)} M(s_X(x)) :$

$(m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} \in M_X(\psi)\}$. Então $M_X(\psi)$ é o maior subobjeto de $\prod_{x \in XI(\psi)} M(s_X(x))$ tal que existe (automaticamente único e monomorfismo!) $f_X(\psi) : M_X(\psi_0) \rightarrow M_X^\psi(\psi)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & M_X^{\Psi_0}(\Psi) & \\
 f_X(\Psi) \uparrow & \searrow M_X^{\Psi_0}(j\Psi) & \\
 M_X(\Psi_0) & \xrightarrow{M_X(j\Psi_0)} & \prod_{x \in XI(\Psi_0)} M(s_X(x))
 \end{array}
 \quad (4.9)$$

(vi) $\psi \rightsquigarrow \bigvee_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha$

Para cada $\alpha \in \beta$ consideremos o seguinte “pullback”: $M_X^\psi(\psi_\alpha) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi_\alpha)} \in \prod_{x \in XI(\psi_\alpha)} M(s_X(x)) : (m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi_\alpha)} \in \prod_{x \in XI(\psi_\alpha)} M(s_X(x))\}$.

Então :

$$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} : \exists \alpha \in \beta ((m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} \in M_X^\psi(\psi_\alpha))\} = \bigcup_{\alpha \in \beta} M_X^\psi(\psi_\alpha) .$$

Equivalentemente, existe epimorfismo regular (função sobrejetora) $f_X(\psi) : \prod_{\alpha \in \beta} M_X^\psi(\psi_\alpha)$

$\rightarrow M_X^\psi(\psi)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & M_X(\Psi) & \\
 f_X(\Psi) \uparrow & \searrow M_X(j\Psi) & \\
 \prod_{\alpha \in \beta} M_X^\Psi(\Psi_\alpha) & \xrightarrow{[M_X^\Psi(j\Psi_\alpha)]_{\alpha \in \beta}} & \prod_{x \in XI(\Psi)} M(s_X(x))
 \end{array}
 \quad (4.10)$$

Obs.: Em particular, se $\beta = 0$ então $M_X(\perp) = \emptyset$.

(vii) $\psi \rightsquigarrow \neg \psi_0$

Definimos $M_X(\psi) = M_X(\psi_0 \rightarrow \perp)$

(viii) $\psi \rightsquigarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0$

$$M_X(\psi) = \{ (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \in \prod_{x \in Xl(\psi)} M(s_X(x)) : \exists (m'_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi_0)} \in M_X(\psi_0) \mid (m'_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} = (m_{s_X(x)})_{x \in Xl(\psi)} \} .$$

Equivalentemente, existe epimorfismo regular (função sobrejetora) $f_X(\psi) : M_X(\psi_0) \rightarrow M_X(\psi)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 M_X(\Psi_0) & \xrightarrow{M_X(j_{\Psi_0})} & \prod_{x \in Xl(\Psi_0)} M(s_X(x)) \\
 \downarrow f_X(\Psi) & \curvearrowright & \downarrow p_0 \\
 M_X(\Psi) & \xrightarrow{M_X(j_{\Psi})} & \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x))
 \end{array} \quad (4.11)$$

Observação 5 :

(i) Em particular, quando ψ é sentença ($Xl(\psi) = \emptyset$), temos $M_X(\psi) \subseteq 1 = \{\emptyset\}$ e (M é modelo de $\psi \iff$) $M \models \psi \iff \emptyset = v \upharpoonright \emptyset \in M_X(\psi) \iff M_X(\psi) = 1$.

(ii) Temos $M_X(\psi) = M_X(\top \rightarrow \psi)$

(iii) Se ψ é sentença equacional, i.e. ψ é sentença da forma $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} (t_0 = t_1)$ então M é modelo de $\psi \iff$

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{x \in Xl(\Psi)} M(s_X(x)) & \xrightarrow{p_0} & \prod_{x \in Xl(t_0)} M(s_X(x)) \\
 \downarrow p_1 & \curvearrowright & \downarrow M_X(t_0) \\
 \prod_{x \in Xl(t_1)} M(s_X(x)) & \xrightarrow{M_X(t_1)} & M(s)
 \end{array} \quad (4.12)$$

(iv) Se ψ é da forma $\exists! (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0$ temos:

$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} : \exists! (m'_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi_0)} \in M_X(\psi_0) \mid (m'_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} = (m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)}\}$.

Ou seja, existe isomorfismo $f_X(\psi) : M_X(\psi_0) \xrightarrow{\cong} M_X(\psi)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 M_X(\Psi_0) & \xrightarrow{M_X(j_{\Psi_0})} & \prod_{x \in XI(\Psi_0)} M(s_X^{(x)}) \\
 \downarrow f_X(\Psi) \cong & \curvearrowright & \downarrow p_0 \\
 M_X(\Psi) & \xrightarrow{M_X(j_\Psi)} & \prod_{x \in XI(\Psi)} M(s_X^{(x)})
 \end{array} \quad (4.13)$$

(v) Se ψ é da forma $\bigsqcup_{\alpha \in \beta} \psi_\alpha$ temos:

$$M_X(\psi) = \{(m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} : \exists! \alpha \in \beta \mid (m_{s_X(x)})_{x \in XI(\psi)} \in M_X^\psi(\psi_\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in \beta} M_X^\psi(\psi_\alpha).$$

Ou seja, existe isomorfismo $f_X(\psi) : \bigsqcup_{\alpha \in \beta} M_X^\psi(\psi_\alpha) \xrightarrow{\cong} M_X^\psi(\psi)$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & M_X(\Psi) & \\
 & \uparrow & \searrow M_X(j_\Psi) \\
 f_X(\Psi) \cong & & \\
 \bigsqcup_{\alpha \in \beta} M_X^\Psi(\Psi_\alpha) & \xrightarrow{[M_X^\Psi(j_{\Psi_\alpha})]_{\alpha \in \beta}} & \prod_{x \in XI(\Psi)} M(s_X^{(x)})
 \end{array} \quad (4.14)$$

Obs.: Em particular, se $\beta = 0$ então $M_X(\perp) = \emptyset$.

Definição 4 : Sejam $\mu \xrightarrow{H} \mu' \in U_0 - Typ$, X e X' variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ e $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu')$ e $\Gamma : |X| \rightarrow |X'|$:

(i) Γ é H -morfismo lógico $\iff s'_X, \circ \Gamma = H \circ s_X$.

(ii) Se Γ é H -morfismo lógico e $Z \subseteq X$ então Γ é Z -mônico $\iff \Gamma|_Z : |Z| \rightarrow |X'|$.

(iii) Se Γ é H -morfismo lógico denotamos $\hat{\Gamma}$ sua “extensão às expressões” : $\hat{\Gamma} : E_{\theta_0\theta_0}(\mu) \rightarrow E_{\theta_0\theta_0}(\mu')$.

Observação 6 : $E_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ admite uma relação de equivalência natural : $\psi_0 \sim \psi_1 \iff$ existe Γ 1_μ -isomorfismo lógico ($\Gamma : |X| \xrightarrow{\cong} |X|$) tal que $\psi_1 = \hat{\Gamma}(\psi_0)$.

Proposição 2 : Sejam $\mu \xrightarrow{H} \mu' \in U_0 - Typ$, X e X' variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ e $L_{\theta_0\theta_0}(\mu')$, $\psi \in F_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ e Γ H -morfismo lógico $X(\psi)$ -mônico ($\#X(\psi) < \theta_0$!). Então para todo $M' \in obj(EST(\mu', U_0 - SET))$, toda μ -valoração v com $Xl(\psi) \subseteq dom(v)$ temos $EST(H, U_0 - SET)(M') \models_v \psi \iff M' \models_{\Gamma^*(v)} \hat{\Gamma}(\psi)$.

■

Definição 5 : Sejam $\mu \in obj(U_0 - Typ)$, X variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ e $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0\theta_0}(\mu)$:

(i) Sejam $M, N \in obj(EST(\mu, U_0 - SET))$ e $H \in (U_0 - SET)^{\Gamma(\mu)}(\mathcal{E}_\mu(M), \mathcal{E}_\mu(N))$. H é $\mathcal{F}$ -morfismo elementar $\iff$ para todo $\psi \in \mathcal{F}$ e toda v valoração de um U_0 -subconjunto de X contendo $Xl(\psi)$ em M temos $M \models_v \psi \Rightarrow N \models_{H \circ v} \psi$.

(ii) Denotamos $EST(\mathcal{F}, \mu, U_0 - SET)$ a categoria das μ -estrutura em $U_0 - SET$ e $\mathcal{F}$ -morfismos elementares.

(iii) Se ψ é sentença em $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ denotamos $Mod(\mathcal{F}, \psi, U_0 - SET)$ a subcategoria plena de $EST(\mathcal{F}, \mu, U_0 - SET)$ com objetos os modelos de ψ em $U_0 - SET$.

Observação 7 :

(i) Sejam $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \subseteq F_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ então se $imagem(\mathcal{F}_0 \hookrightarrow F_{\theta_0\theta_0}(\mu) \rightarrow (F_{\theta_0\theta_0}(\mu))/\sim) \subseteq (imagem(\mathcal{F}_1 \hookrightarrow F_{\theta_0\theta_0}(\mu) \rightarrow (F_{\theta_0\theta_0}(\mu))/\sim))$ então $EST(\mathcal{F}_1, \mu, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mathcal{F}_0, \mu, U_0 - SET)$.

(ii) $EST(\mathcal{F}^{(\vee)}, \mu, U_0 - SET) = EST(\mathcal{F}, \mu, U_0 - SET) = EST(\mathcal{F}^{(\wedge)}, \mu, U_0 - SET)$.

(iii) Sejam $M, N \in obj(EST(\mu, U_0 - SET))$ e $H \in (U_0 - SET)^{\Gamma(\mu)}(\mathcal{E}_\mu(M), \mathcal{E}_\mu(N))$ então $H \in EST(\mathcal{F}^{(\neg)}, \mu, U_0 - SET)(M, N) \iff$ para todo $\psi \in \mathcal{F}$ e toda v valoração de um U_0 -subconjunto de X contendo $Xl(\psi)$ em M temos $N \models_{H \circ v} \psi \Rightarrow M \models_v \psi$.

(iv) $EST(atom(\mu), \mu, U_0 - SET) = EST(\mu, U_0 - SET)$.

(v) Se $\mathcal{F} = atom(\mu) \cup (atom(\mu))^{(\neg)}$ então $EST(\mathcal{F}, \mu, U_0 - SET)$ é a categoria das μ -estruturas em $U_0 - SET$ e mergulhos.

Definição 6 : Sejam $\mu \in obj(U_0 - Typ)$, X variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ e $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0\theta_0}(\mu)$. $\mathcal{F}$ é essencialmente θ_0 -pequeno $\iff$ existe $\bar{\mathcal{F}} \in [\mathcal{F}]^{<\theta_0}$ tal que $\bar{\mathcal{F}} \sim$ -representa $\mathcal{F}$.

Definição 7 : Sejam $\mu \in obj(U_0 - Typ)$, X variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ e $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0\theta_0}(\mu)$. $\mathcal{F}$ é um fragmento de $L_{\theta_0\theta_0}(\mu)$ $\iff$

. $\mathcal{F} \sim$ -representa $atom(\mu)$.

. $\mathcal{F} \sim$ -representa as fórmulas obtidas a partir de $\mathcal{F}$ substituindo-se termos por variáveis.

. Para todo $\psi \in \mathcal{F}$ temos $Sub(\psi) \subseteq \mathcal{F}$.

. Se $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \psi_0 \in \mathcal{F}$ então $\neg \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \beta} \neg \psi_0 \in \mathcal{F}$.

. Se $\psi_0 \rightarrow \psi_1 \in \mathcal{F}$ então $\neg \psi_0 \vee \psi_1 \in \mathcal{F}$.

Observação 8 : Se $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ é essencialmente θ_0 -pequeno então existe $\bar{\mathcal{F}}$ fragmento essencialmente θ_0 -pequeno que “contém essencialmente” $\mathcal{F}$.

Exemplos : Nas condições acima $atom(\mu)$ e $F_{\lambda \pi}(\mu)$ com $\lambda < \theta_0$ são fragmentos de $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ de cardinalidades θ_0 mas essencialmente θ_0 -pequenos.

Definição 8 : Seja $A \in obj(U_1 - CAT)$. A é categoria axiomatizável $\iff$ existe μ tipo praticamente em U_0 , existe $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ fragmento essencialmente θ_0 -pequeno, existe ψ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\vee), (\wedge), \mathcal{F}] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), \mathcal{F}])$ tal que $A \simeq Mod(\mathcal{F}, \psi, U_0 - SET)$.

Observação 9 : Claramente, na definição acima, podemos tomar $\mu \in obj(U_0 - Typ)$. Podemos supor $\mathcal{F} = atom(\mu)$ devido a:

Proposição 3 : Sejam $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R) \in obj(U_0 - Typ)$, X variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ e $\mathcal{F} \subseteq F_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ fragmento essencialmente θ_0 -pequeno. Então existe $\mu' \in obj(U_0 - Typ)$, existe $\psi'_{\mathcal{F}}$ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu')$ da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu')] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu')])$ tais que :

. $\mu \hookrightarrow \mu' = (S, F, R', s_F, a_F, a'_{R'})$.

. Para toda ψ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\vee), (\wedge), \mathcal{F}] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), \mathcal{F}])$ existe ψ' sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu')$ da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu')] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu')])$ tal que, na U_2 -categoria $((U_1 - CAT) \rightarrow EST(\mu_A, U_0 - SET)) = ((U_1 - CAT) \rightarrow EST(\mu'_A, U_0 - SET))$, temos isomorfismo: $(Mod(\mathcal{F}, \psi, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu_A, U_0 - SET)) \cong (Mod(atom(\mu'), \psi' \wedge \psi'_{\mathcal{F}}, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu'_A, U_0 - SET))$.

■

Enunciamos abaixo uma versão do teorema de Löwenheim-Skolem tal que (sua relativização a $U_0 - SET$) nos será útil no capítulo seguinte:

Proposição 4 : $\mathcal{LS} \downarrow$: Sejam $\mu \in obj(U_0 - Typ)$, $L_{\tau+\pi}(\mu)$ uma lógica com $\# \tau(\mu) \leq \tau < \theta_0$ e $\kappa = (\tau^{<\pi})^+$. Então para toda sentença ψ de $L_{\tau+\pi}(\mu)$, todo $M \in obj(Mod(atom(\mu), \psi, U_0 - SET))$ e todo $Z \in [|M|]^{<\kappa}$ existe $N \in (Sub(M))^{<\kappa}$ tal que $Z \subseteq |N|$.

■

Capítulo 5

Categorias axiomatizáveis , esboçáveis e acessíveis

Reservamos este capítulo para demonstrar que os conceitos introduzidos anteriormente se correlacionam, ampliando, por assim dizer, o espectro de cada um desses. A referência [166] reúne esses resultados.

5.1 Categorias esboçáveis são axiomatizáveis

Proposição 1 : Tendo em vista o funtor $\Xi : U_0 - GRA \rightarrow U_0 - Typ$ e o isomorfismo natural $\tilde{\Xi} : U_0 - GRA(-, \mathcal{E}(U_0 - SET)) \xrightarrow{\cong} EST(\Xi(-), U_0 - SET)$ (definição (1.iii) e observação (1.ii) do capítulo 4) , temos que:

- (i) $\forall m, n \in \omega \exists \gamma_{G_m}^o$ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\Xi(G_m^n))$ da forma $(\forall_{(<\omega)}) (atom(\Xi(G_m^n)))$ tal que $\forall d' \in U_0 - GRA(G_m^n, \mathcal{E}(U_0 - SET))$ (d' é diagrama comutativo $\iff \tilde{\Xi}(d') \models \gamma_{G_m^n}^o$) .
- (ii) $\forall G \in obj(U_0 - GRA) \exists \gamma_G^\downarrow$ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\Xi(G^-))$ da forma $(\wedge_{<\omega}) (\forall_{\leq \#G+\omega}) ([(\exists_{<\omega}), (\wedge_{\leq \#G+\omega}), (atom(\Xi(G^-)))] \rightarrow [(\exists_{<\omega}), (\wedge_{\leq \#G+\omega}), (atom(\Xi(G^-))])$ tal que $\forall p' \in U_0 - GRA(G^-, \mathcal{E}(U_0 - SET))$ (p' é cone projetivo limite $\iff \tilde{\Xi}(p') \models \gamma_G^\downarrow$) .
- (iii) $\forall G \in obj(U_0 - GRA) \exists \gamma_G^\uparrow$ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\Xi(G^+))$ da forma $(\wedge_{\leq (\#G+\omega)}) (\forall_{<\omega}) ([(\exists_{<\omega}), (\forall_{\leq (\#G+\omega)}), (\wedge_{<\omega}), (atom(\Xi(G^+)))] \rightarrow [(\exists_{<\omega}), (\forall_{\leq (\#G+\omega)}), (\wedge_{<\omega}), (atom(\Xi(G^+))])$ tal que $\forall i' \in U_0 - GRA(G^+, \mathcal{E}(U_0 - SET))$ (i' é cone indutivo limite $\iff \tilde{\Xi}(i') \models \gamma_G^\uparrow$) .

□

(i) Fixemos $X_{G_m^n}$, variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0 \theta_0}(\Xi(G_m^n))$.

Seja $t_n(x_{-\infty})$ o termo:

. $t_n(x_{-\infty}) \rightsquigarrow x_{-\infty}$, caso $n = 0$.

. $t_n(x_{-\infty}) \rightsquigarrow f_{n-1}(f_{n-2}(\dots(f_1(f_0(x_{-\infty})))) \dots)$, caso $n > 0$.

Seja $t'_m(x_{-\infty})$ o termo:

. $t'_m(x_{-\infty}) \rightsquigarrow x_{-\infty}$; caso $m = 0$.

. $t'_m(x_{-\infty}) \rightsquigarrow f'_{m-1}(f'_{m-2}(\dots(f'_1(f'_0(x_{-\infty})))\dots))$; caso $m > 0$.

Então a sentença $\forall x_{-\infty} (t_n(x_{-\infty}) = t'_m(x_{-\infty}))$ claramente satisfaz os requisitos de (i) .

(ii) Fixemos X_{G^-} , variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\Xi(G^-))$.

Tendo em vista a construção canônica dos limites projetivos na categoria $U_0 - SET$ temos que a conjunção das sentenças abaixo satisfaz (ii):

. $\forall \{x_g\}_{g \in G_0} (\bigwedge_{f \in G(g,g')} (f(x_g) = x_{g'}) \rightarrow \exists x_{-\infty} \bigwedge_{g \in G_0} \pi_g(x_{-\infty}) = x_g)$.

. $\forall \{x_g\}_{g \in G_0} (\exists x_{-\infty} \bigwedge_{g \in G_0} \pi_g(x_{-\infty}) = x_g \rightarrow \bigwedge_{f \in G(g,g')} (f(x_g) = x_{g'}))$.

. $\forall \{x_{-\infty}, x'_{-\infty}\} (\bigwedge_{g \in G_0} ((\pi_g(x_{-\infty}) = \pi_g(x'_{-\infty}) \rightarrow x_{-\infty} = x'_{-\infty})))$.

(iii) Fixemos X_{G^+} , variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\Xi(G^+))$.

Tendo em vista a construção canônica dos limites indutivos na categoria $U_0 - SET$ temos que a conjunção das sentenças abaixo satisfaz (iii):

. $\forall x_{+\infty} \bigvee_{g \in G_0} \exists x_g (\iota_g(x_g) = x_{+\infty})$.

. $\bigwedge_{g,g' \in G_0} \forall \{x_g, x'_{g'}\} (\iota_g(x_g) = \iota_{g'}(x'_{g'}) \rightarrow \gamma_{gg'}^\omega(x_g, x'_{g'}))$.

. $\bigwedge_{g,g' \in G_0} \forall \{x_g, x'_{g'}\} (\gamma_{gg'}^\omega(x_g, x'_{g'}) \rightarrow \iota_g(x_g) = \iota_{g'}(x'_{g'}))$.

Onde:

. $\gamma_{gg'}^\omega(x_g, x'_{g'}) \rightsquigarrow \bigvee_{n \in \omega} \gamma_{gg'}^{n+1}(x_g, x'_{g'})$.

. $\gamma_{gg'}^{n+1}(x_g, x'_{g'}) \rightsquigarrow \bigvee \{ \exists \{y_{g_1}^1, \dots, y_{g_{n-1}}^{n-1}\} \wedge \{\gamma_{g_0g_1}^1(x_g, y_{g_1}^1), \dots, \gamma_{g_{n-1}g_n}^1(y_{g_{n-1}}^{n-1}, x'_{g'}) : \{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n\} \subseteq G_0, g = g_0, g_n = g' \} \}$.

. $\gamma_{gg'}^1(x_g, x'_{g'}) \rightsquigarrow :$

.. $\bigvee_{f \in G(g,g')} (f(x_g = x'_{g'})) ; \bigvee_{f \in G(g',g)} (f(x'_{g'} = x_g))$; para $g \neq g'$.

.. $\bigvee_{f \in G(g,g')} (f(x_g = x'_{g'})) ; x_g = x'_{g'} ; \bigvee_{f \in G(g',g)} (f(x'_{g'} = x_g))$; para $g = g'$.

■

Proposição 2 : $\forall S = (S, D, cP, cI) \in \text{obj}(gn - U_0 - ESQ) \exists \gamma_S$ sentença em $L_{\theta_0\theta_0}(\Xi(S))$ da forma $(\bigwedge_{\leq \tau(S)})(\bigvee_{< \pi(S)})([(\exists_{< \omega}), (\bigvee_{\leq \tau(S)}), (\bigwedge_{< \pi_S}), (atom(\Xi(S)))] \rightarrow [(\exists_{< \omega}), (\bigvee_{\leq \tau(S)}), (\bigwedge_{< \pi_S}), (atom(\Xi(S)))]$ tal que $\forall M \in U_0 - GRA(S, \mathcal{E}(U_0 - SET))$ (M determina modelo de esboço $\iff \tilde{\Xi}(M) \models \gamma_S$) .

$\tilde{\Xi}(M) \models \gamma_S$) .

□

. Escolhemos, para cada $G_m^n \in \mathcal{D}(S)$, variáveis $X_{G_m^n}$ e uma sentença $\gamma_{G_m^n}^0$ como na proposição (1.i) .

. Escolhemos, para cada $G \in \mathcal{P}(S)$, variáveis X_{G^-} e uma sentença $\gamma_{G^-}^\downarrow$ como na proposição (1.ii) .

. Escolhemos, para cada $G \in \mathcal{I}(S)$, variáveis X_{G^+} , uma sentença $\gamma_{G^+}^\uparrow$ como na proposição (1.iii) .

. Escolhemos X_S , variáveis em $U_0 - SET$ para $L_{\theta_0\theta_0}(\Xi(S))$.

. Para cada $d \in D$, $p \in cP$, $i \in cI$ escolhemos $\Psi_d : |X_{dom(d)}| \rightarrow |X_S|$, $\Psi_p : |X_{dom(p)}| \rightarrow |X_S|$, $\Psi_i : |X_{dom(i)}| \rightarrow |X_S|$ morfismos lógicos mônicos para, respectivamente, as $X_{dom(d)}$ -variáveis que ocorrem em $\gamma_{dom(d)}^\circ$, as $X_{dom(p)}$ -variáveis que ocorrem em $\gamma_{dom(p)}^\downarrow$, as $X_{dom(i)}$ -variáveis que ocorrem em $\gamma_{dom(i)}^\uparrow$.

Logo :

- . $\hat{\Xi}(M) \models \hat{\Psi}_d(\gamma_{dom(d)}^\circ) \iff \hat{\Xi}(M \circ d) \models \gamma_{dom(d)}^\circ$.
- . $\hat{\Xi}(M) \models \hat{\Psi}_p(\gamma_{dom(p)}^\downarrow) \iff \hat{\Xi}(M \circ p) \models \gamma_{dom(p)}^\downarrow$.
- . $\hat{\Xi}(M) \models \hat{\Psi}_i(\gamma_{dom(i)}^\uparrow) \iff \hat{\Xi}(M \circ i) \models \gamma_{dom(i)}^\uparrow$.

Sejam:

- . $\gamma_D = \bigwedge_{d \in D} \hat{\Psi}_d(\gamma_{dom(d)}^\circ)$.
- . $\gamma_P = \bigwedge_{p \in P} \hat{\Psi}_p(\gamma_{dom(p)}^\downarrow)$.
- . $\gamma_I = \bigwedge_{i \in I} \hat{\Psi}_i(\gamma_{dom(i)}^\uparrow)$.

Assim, pela proposição 1, temos que $\gamma_S = \gamma_D \wedge \gamma_P \wedge \gamma_I$ satisfaz os requisitos.

■

Corolário : $\mathcal{LS} \downarrow$ categorial : Sejam $\mathcal{S}$ esboço natural e cardinais $\omega \leq \pi = \text{reg}(\pi) \leq \tau \leq \kappa = (\tau^{<\pi})^+ < \theta_0$ com $\pi_S \leq \pi$ e $\tau_S \leq \tau$ então $\forall \mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S})) \forall X \in [|M|]^{<\kappa} \exists \mathcal{N} \in (\text{Sub}(\mathcal{M}))^{<\kappa} (X \subseteq |N|)$.

■

Observação 1 : Se $\mathcal{S}$ é um esboço local e $\mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S}))$ então $\mathcal{M}$ admite submodelos “gerados” e submodelos $< \kappa$ -gerados têm cardinal $< \kappa$.

5.2 Categorias axiomatizáveis são esboçáveis

Proposição 1 : Sejam $\mu = (S, F, R, s_F, a_F, a_R)$ U_0 -tipo, $\mu_A = (S, F, \emptyset, s_F, a_F, \emptyset)$ seu tipo algébrico subjacente, $\mu_T = (S, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ seu tipo trivial subjacente e γ sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$.

(i) Se $\mu = \mu_T$ então $EST(\mu, U_0 - SET) (\cong (U_0 - SET)^{\mathcal{D}(S)})$ é trivialmente esboçável por $\mathcal{S}_\mu = \Gamma(\mu) = (S, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

(ii) Se $\mu = \mu_A$ então $EST(\mu, U_0 - SET) \hookrightarrow (U_0 - SET)^{\mathcal{D}(S)}$ é projetivamente esboçável por $\mathcal{S}_{\mu_T} \hookrightarrow \mathcal{S}_\mu$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é um esboço especificando produtos de $\leq \sup\{I_f : f \in F\}$ objetos.

(iii) $EST(\mu, U_0 - SET) \hookrightarrow (U_0 - SET)^{\mathcal{D}(S)}$ é projetivamente esboçável por $\mathcal{S}_{\mu_T} \hookrightarrow \mathcal{S}_\mu$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é um esboço especificando monomorfismos ou produtos de $\leq \max\{\sup\{I_f : f \in F\}, \sup\{I_r : r \in R\}\}$ objetos.

(iv) Se $\mu = \mu_A$ e γ é da forma $(\wedge)(\forall)[(\wedge, \text{atom}(\mu))]$ então $\text{Mod}(\text{atom}(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é projetivamente esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$ morfismo de esboços especificando produtos.

(v) Se γ é da forma $(\wedge)(\forall)([(\wedge), atom(\mu)] \rightarrow [(\wedge), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é projetivamente esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$.

(vi) Se γ é da forma $(\wedge)(\forall)([(\wedge), atom(\mu)] \rightarrow [(\exists!), (\wedge), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é projetivamente esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$.

(vii) Se γ é da forma $(\wedge)(\forall)([(\sqcup), (\wedge), atom(\mu)] \rightarrow [(\sqcup), (\wedge), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é esboço θ_0 -local.

(viii) Se γ é da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\wedge), atom(\mu)] \rightarrow [(\exists), (\wedge), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é esboço θ_0 -regular.

(ix) Se γ é da forma $(\wedge)(\forall)([(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu)] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é esboço θ_0 -geométrico.

(x) Sejam $\omega \leq \pi = reg(\pi) \leq \tau < \theta_0$ onde $\pi(\mu) \leq \pi$. Se γ é da forma $(\wedge_{<\tau+})(\forall_{<\pi})([(\exists_{<\pi}),$

$(\vee_{<\tau+}), (\wedge_{<\pi}), atom(\mu)] \rightarrow [(\exists_{<\pi}), (\vee_{<\tau+}), (\wedge_{<\pi}), atom(\mu)])$ então $Mod(atom(\mu), \gamma, U_0 - SET) \hookrightarrow EST(\mu, U_0 - SET)$ é esboçável por $\mathcal{S}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\gamma$ onde $\mathcal{S}_\mu$ é um esboço θ_0 -geométrico com $\pi(\mathcal{S}_\mu) \leq \pi$ e $\tau(\mathcal{S}_\mu) \leq \tau$.

(xi) Todos os morfismos de esboços acima são composições de “morfismos sobre” : todo cone proj/ind do codomínio tem base se fatorando pelo morfismo e todo objeto do codomínio ou está na imagem do morfismo ou é vértice de algum cone.

□

Por simples inspeção das noções de estrutura e de verdade de Tarski expressas diagramaticamente no capítulo 4.

■

5.3 Categorias esboçáveis são acessíveis

Proposição 1 : Sejam $\mathcal{S} = (S, cP, cI) \in obj(c - U_0 - ESQ)$ e cardinais $\omega \leq \pi = reg(\pi) \leq \tau \leq \kappa = ((\tau)^{<\pi})^+ < \theta_0$ com $\pi_{\mathcal{S}} \leq \pi$ e $\tau_{\mathcal{S}} \leq \tau$ então $J_{\mathcal{S}} \in \kappa - ACE(MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET), [S, U_0 - SET])$.

□ (Rever o exemplo 3 do capítulo 2 .)

(i) $[S, U_0 - SET] \in obj(\kappa - ACE)$.

Pois $\#S + \omega \leq \kappa$.

(ii) Pela proposição 6 do capítulo 3 temos que $J_{\mathcal{S}} : MOD(\mathcal{S}) \rightarrow [U_0 - SET, S]$ cria U_0 -limites indutivos κ -filtrados.

(iii) $\{\mathcal{M} \in obj(MOD(\mathcal{S})) : \#\mathcal{M} < \kappa\} \subseteq (MOD(\mathcal{S}))_{\kappa}$.

Porque $\{\mathcal{M} \in obj([S, U_0 - SET]) : \#\mathcal{M} < \kappa\} \subseteq ([S, U_0 - SET])_{\kappa}$ e pelo item (ii).

(iv) $\forall \mathcal{M} \in obj(MOD(\mathcal{S}))$ ($(Sub(\mathcal{M})^{<\kappa}, \leq)$) é conjunto ordenado κ -dirigido.

Como κ é regular dada $\{\mathcal{M}_p\}_{p \in P} \subseteq \text{Sub}(\mathcal{M})^{<\kappa}$ com $\#P < \kappa$ temos $\#(\cup_{p \in P} |\mathcal{M}_p|) < \kappa$, logo por $\mathcal{LS}\downarrow$ categorial (corolário da proposição 1 em (5.1)) $\exists \mathcal{N} \in (\text{Sub}(\mathcal{M})^{<\kappa} (\cup_{p \in P} |\mathcal{M}_p|) \subseteq |N| \Rightarrow \forall p \in P (\mathcal{M}_p \hookrightarrow \mathcal{N}))$.

(v) $\forall \mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S})) \forall s \in S_0 (M(s) = \cup \{N(s) : \mathcal{N} \in \text{Sub}(\mathcal{M})^{<\kappa}\})$.

Pois, por $\mathcal{LS}\downarrow$, $\forall x \in M(s) (\exists \mathcal{N} \in \text{Sub}(\mathcal{M})^{<\kappa} ((x, s) \subseteq |N|))$.

(vi) $\forall \mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S})) (\mathcal{M} \text{ é } \mathcal{I}_\kappa\text{-limite indutivo de modelos de cardinais } < \kappa) (\text{“}\kappa\text{-pequenos”})$.

Como $I(\mathcal{M}, \kappa)$, a categoria associada a $(\text{Sub}(\mathcal{M})^{<\kappa}, \leq)$, é κ -filtrada e está praticamente em U_0 e limites indutivos em $[S, U_0 - \text{SET}]$ indexados por categorias (praticamente) em U_0 são pontuais, pelos itens (ii) e (v) temos que o funtor “inclusão” $F : I(\mathcal{M}, \kappa) \hookrightarrow \text{MOD}(\mathcal{S})$ é tal que $\varinjlim_{I(\mathcal{M}, \kappa)} F(i) = \mathcal{M}$.

(vii) A subcategoria plena de $\text{MOD}(\mathcal{S})$ dos modelos κ -pequenos está essencialmente em U_0 .

Pois a subcategoria plena de $[S, U_0 - \text{SET}]$ dos funtores κ -pequenos está essencialmente em U_0 .

(viii) $\text{plena}(\{\mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S})) : \#M < \kappa\}) \hookrightarrow \text{MOD}(\mathcal{S})$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de categoria essencialmente em U_0 .

■

Observacao 1 :

(i) O 2-funtor $\text{MOD}(-, U_0 - \text{SET}) : c - U_0 - \mathcal{ESQ} \rightarrow U_1 - \mathcal{CAT}$ se fatora por $i : \mathcal{ACE} \hookrightarrow U_1 - \mathcal{CAT}$.

(ii) O mergulho $J_S : \text{MOD}(\mathcal{S}) \hookrightarrow [S, U_0 - \text{SET}]$ admite diagrama pequeno localmente livre para todo $N \in \text{obj}([S, U_0 - \text{SET}])$. Em particular, temos que $\forall s \in S_0 \exists X_s \xrightarrow{\mathbb{Z}} \text{MOD}(\mathcal{S}) (\varinjlim_{X_s^*} \text{MOD}(\mathcal{S})(Z_s(x_s), \mathcal{M}) \cong [S, U_0 - \text{SET}](Y_{S^*}(s), M) \cong M(s)$ natural em $\mathcal{M} \in \text{obj}(\text{MOD}(\mathcal{S}))$ e assim $\cup_{s \in S_0} \{\text{MOD}(\mathcal{S})(Z_s(x_s), -) : x_s \in (X_s)_0\}$ tem cardinal pequeno e coletivamente reflete isomorfismos.

(iii) Em geral temos que se $J \in \mathcal{ACE}(A, A')$ é funtor hom-bijetor e A' admite push-out (de duas flechas), então por uniformização (proposição 5 do cap.2) existe κ tal que $J \in \kappa - \mathcal{ACE}(A, A')$ e $(J_0)_*(A_\kappa) \subseteq A'_\kappa$; tomando $i_\kappa : A_\kappa \hookrightarrow A$ temos para todo $a' \in \text{obj}(A'_\kappa)$ que $(a' \rightarrow J \circ i_\kappa) \simeq X_{a'} \in \text{obj}(U_0 - \mathcal{CAT})$ e $X_{a'} \xrightarrow{\sim} (a' \rightarrow J \circ i_\kappa) \hookrightarrow (a' \rightarrow J)$ é diagrama pequeno localmente livre para J em a' .

(iv) Pela observação (ii) acima, utilizando as proposições (9.i) e (9.ii) do item (1.3.1) e os desenvolvimentos no capítulo 3 temos, nas condições da proposição 1, que:

(a) $\mathcal{S}$ esboço projetivo :

. $\text{MOD}(\mathcal{S})$ admite U_0 -limites indutivos π -filtrados e U_0 -limites projetivos.

. $J_S : \text{MOD}(\mathcal{S}) \hookrightarrow [S, U_0 - \text{SET}]$ admite adjunto à esquerda L (reflexão) :

. $MOD(S)$ é U_0 -ind completa.
. $(S^* \xrightarrow{Z_S^*} MOD(S)) = (S^* \xrightarrow{Y_S^*} [S, U_0 - SET] \xrightarrow{L} MOD(S))$ é denso e $\{Z_{S^*}(s) : s \in S_0\} \subseteq (MOD(S))_\pi$.

. Se $S = (S, cP, \emptyset)$ é esboço categorial comutativo e se S' é a $((U_0 - CAT)_0, (U_0 - CAT)_0)$ -teoria associada a $MOD(S)$ temos que $S^* = (S^*, \emptyset, (cP)^*) \xrightarrow{Z_S^*} S'$ é modelo, onde dado (t, C) $t : G^\mp \rightarrow \mathcal{E}(C)$ cone proj/ind em uma categoria C então $(t, C)^* = (t', C^*)$ é o cone ind/proj em C^* tal que $t' = (G^\pm \cong (G^\mp)^* \xrightarrow{t^*} \mathcal{E}(C^*))$. Assim, pelas proposições 2 e 1 do capítulo 3 dispomos de “co-modelos canônicos” para esboços categoriais e naturais.

(b) S esboço local $\Rightarrow$

. $MOD(S)$ admite U_0 -limites indutivos π -filtrados e U_0 -limites projetivos conexos e não vazios.

. $J_S : MOD(S) \rightarrow [S, U_0 - SET]$ admite diagramas pequenos multiplamente livres (multi-reflexão).

. $MOD(S)$ é U_0 -ind multicompleta.

. Com a notação da observação (ii) acima, tomando $\forall s \in S_0$ ($X_s \cong \mathcal{D}((X_s)_0)$) temos $\cup_{s \in S_0} \{Z_s(x_s) : x_s \in (X_s)_0\} \subseteq (MOD(S))_\pi$.

5.4 Categorias acessíveis são esboçáveis

Para as noções bidimensionais citadas recomendamos [031] , [166] , [191] .

Consideremos as 2-categorias e 2-funtores $\mathcal{G} : (U_1 - CAT)^* \rightleftarrows U_1 - CAT : \mathcal{F}$ onde $\mathcal{F} = U_1 - CAT(-, U_0 - SET) = \mathcal{G}^*$ (lembremos que $(-)^*$ “inverte” apenas as 1-flechas). Considerando para cada U_1 -categoria seu funtor de avaliação obtemos uma 2-adjunção , i.e., temos transformações (estritas) entre 2-funtores $\eta : 1_{U_1 - CAT} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ e $\epsilon : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \rightarrow 1_{(U_1 - CAT)^*}$ tais que $(\mathcal{G}\epsilon) \circ (\eta\mathcal{G}) = 1_{\mathcal{G}}$ e $(\epsilon\mathcal{F}) \circ (\mathcal{F}\eta) = 1_{\mathcal{F}}$.

Para cada $\omega \leq \kappa = \text{reg}(\kappa) < \theta_0$, consideremos $\mathcal{P}_\kappa = \{P \in (U_0 - CAT)_0 : \#P < \kappa\}$, $\mathcal{I}_\kappa = \{I \in (U_0 - CAT)_0 : I \text{ é } \mathcal{P}_\kappa\text{-filtrada}\}$ e as 2-categorias $\mathcal{B}'_\kappa$ e $\mathcal{A}'_\kappa$ que são sub-2-categorias localmente plenas de $U_1 - CAT$ tais que: $\text{obj}(\mathcal{B}'_\kappa) = \{B \in \text{obj}(U_1 - CAT) : B \text{ é } \mathcal{P}_\kappa\text{-proj completa} \wedge B \text{ é } (U_0 - CAT)_0\text{-ind completa}\}$ e com morfismos os funtores que preservam $\mathcal{P}_\kappa$ -limites projetivos e $(U_0 - CAT)_0$ -limites indutivos ; $\text{obj}(\mathcal{A}'_\kappa) = \{A \in \text{obj}(U_1 - CAT) : A \text{ é } \mathcal{I}_\kappa\text{-ind completa}\}$ e morfismos os funtores que preservam $\mathcal{I}_\kappa$ -limites indutivos. Utilizando a “esquizofrenia” de $U_0 - SET$ e a comutação de $\mathcal{I}_\kappa$ -limites indutivos com $(U_0 - CAT)_0$ -limites indutivos e $\mathcal{P}_\kappa$ -limites projetivos em $U_0 - SET$, restringimos a 2-adjunção acima: $(\mathcal{F}|, \mathcal{G}|, \eta|, \epsilon|) : \mathcal{B}'_\kappa \rightarrow \mathcal{A}'_\kappa$.

Consideramos agora as 2-categorias $\mathcal{B}_\kappa$ e $\mathcal{A}_\kappa$ sub-2-categorias plenas e localmente plenas de, respectivamente $\mathcal{B}'_\kappa$ e $\mathcal{A}'_\kappa$, tais que $\text{obj}(\mathcal{B}_\kappa) = \{B \in \text{obj}(U_1 - CAT) : B \text{ é } (U_0 - CAT)_0\text{-ind completamente forte de alguma } U_1\text{-categoria essencialmente em } U_0\}$ e $\text{obj}(\mathcal{A}_\kappa) = \{A \in$

$obj(U_1 - CAT) : A$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de alguma U_1 -categoria essencialmente em U_0 }. Temos então :

(i) $\mathcal{A}_\kappa = \kappa - \mathcal{ACE}$.

(ii) $obj(\mathcal{B}_\kappa) = \{B \in obj(U_1 - CAT) : \exists C \text{ } U_1\text{-categoria essencialmente em } U_0 \text{ (} B \simeq [C, U_0 - SET] \text{)} \} \subseteq obj(\mathcal{B}'_\kappa)$.

(iii) $\forall B \in obj(\mathcal{B}_\kappa) \text{ (} \mathcal{B}'_\kappa(B, U_0 - SET) \simeq \mathcal{B}'_\kappa([C, U_0 - SET], U_0 - SET) \in obj(\mathcal{A}_\kappa) \text{)}$

(pelo corolário da proposição 5 em (1.3.3)) .

(iv) $\forall A \in obj(\mathcal{A}_\kappa) \text{ (} \mathcal{A}'_\kappa(A, U_0 - SET) \simeq [A_\kappa, U_0 - SET] \in obj(\mathcal{B}_\kappa) \text{)}$.

(v) $(\mathcal{B}'_\kappa(-, U_0 - SET)|, \mathcal{A}'_\kappa(-, U_0 - SET)|, \eta|, \epsilon|) : \mathcal{B}_\kappa^* \rightarrow \mathcal{A}_\kappa$ é biequivalência de 2-categorias, isto é : $\eta| : 1_{\mathcal{A}_\kappa} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}| \circ \mathcal{F}|$ e $\epsilon| : \mathcal{F}| \circ \mathcal{G}| \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{B}_\kappa^*}$ equivalências, respectivamente, nas 2-categorias $\mathcal{HOM}(\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{A}_\kappa)$ e $\mathcal{HOM}(\mathcal{B}_\kappa^*, \mathcal{B}_\kappa^*)$.

Em particular, (iii) nos diz que toda categoria κ -acessível é “ κ -esboçável” por um esboço grande : consideramos $[C, U_0 - SET]$ como uma $(\mathcal{P}_\kappa, (U_0 - CAT)_0)$ - U_1 -teoria “máxima” (i.e. com todos os cones proj/ind com essas bases). Por (v) temos $(\mathcal{A}_\kappa \xrightarrow{1_{\mathcal{A}_\kappa}} \mathcal{A}_\kappa) \simeq$

$(\mathcal{A}_\kappa \xrightarrow{\hat{g}} c - U_1 - \mathcal{ESQ} \xrightarrow{MOD(-U_0 - SET)} \mathcal{A}_\kappa)$.

Proposição 1 : $\forall \omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \theta_0 \forall A \in (U_1 - CAT)_0 \text{ (} A \text{ } \kappa\text{-acessível} \Rightarrow A \text{ } \kappa\text{-esboçável) .}$

□

Sejam A categoria κ -acessível e $C \in obj(U_0 - CAT)$ tal que $A_\kappa \simeq C$. Assim, basta definirmos um esboço $\mathcal{S}$ em U_0 tal que $MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET) \simeq K_{\mathcal{I}_\kappa}(C)$.

Escolhemos $\mathcal{P}'_\kappa$ esqueleto em $U_0 - CAT$ da subcategoria plena de $U_0 - CAT$ com objetos $\mathcal{P}_\kappa$. Para cada $P \in \mathcal{P}'_\kappa$, e cada funtor $F : P \rightarrow C^*$ escolhemos p_F um cone projetivo limite com base $Y_{C^*} \circ F$ ($[C, U_0 - SET]$ é U_0 -proj completa) e para p_F escolhemos $i_F = I_F^+ \rightarrow [C, U_0 - SET]$ um cone indutivo limite com $I_F \in obj(U_0 - CAT)$ e $i_F(+\infty) = p_F(-\infty)$ (Y_{C^*} é denso) . $\mathcal{S} = (S, cP, cI)$ é o c-esboço com categoria subjacente S a subcategoria plena de $[C, U_0 - SET]$ com objetos os funtores F descritos acima, cP e cI são constituídos por restrições a S dos cones proj/ind descritos acima.

Temos que:

. $\mathcal{S}$ está praticamente em U_0 .

. Considerando $[C, U_0 - SET]$ como uma $(\mathcal{P}_\kappa, (U_0 - CAT)_0)$ - U_1 -teoria máxima (notação : $\mathcal{C}^k$) temos que $i : S \hookrightarrow [C, U_0 - SET]$ determina elemento de $c - U_1 - \mathcal{ESQ}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_\kappa)$.

. $C^* \xrightarrow{Y_{C^*}} [C, U_0 - SET] = C^* \xrightarrow{Z_\kappa} S \xrightarrow{i} [C, U_0 - SET]$.

Temos, a menos de identificações , que :

. $(MOD(\mathcal{C}^\kappa, U_0 - SET)$

$\xrightarrow{(-\circ Y_{C^*})|} K_{\mathcal{I}_\kappa}(C) \hookrightarrow [C^*, U_0 - SET]) = (MOD(\mathcal{C}^\kappa, U_0 - SET) \xrightarrow{(-\circ i)|} MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET)$

$\xrightarrow{(-\circ Z_\kappa)|} [C^*, U_0 - SET])$.

$\mathcal{S}$ satisfaz nossas expectativas:

(i) O funtor $[Z_\kappa, U_0 - SET] : [S, U_0 - SET] \rightarrow [C^*, U_0 - SET]$ se restringe a $(Z_\kappa)' : MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET) \rightarrow K_{\mathcal{I}_\kappa}(C)$.

Pela definição de cP temos, para todo funtor $M : S \rightarrow U_0 - SET$ que determina modelo, que $L_{Y_{C^*}}(M \circ Z_\kappa)$ preserva $\mathcal{P}_\kappa$ -limites projetivos. Assim a afirmação segue pela proposição 5 do item (1.3.3).

(ii) $(Z_\kappa)'$ é hom-bijetor.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ modelos de $\mathcal{S}$ e $\xi \in NAT(M \circ Z_\kappa, N \circ Z_\kappa)$. Sejam $s \in S_0, i_s : I_s^+ \rightarrow S \in cI$ o cone indutivo associado a s e $j_s : I_s \rightarrow C^*$ tal que $i_s|_{I_s} = Z_\kappa \circ j_s$. Como M, N determinam modelos definimos $M(s) \xrightarrow{\xi'_s} N(s) = \lim_{I_s} M \circ Z_\kappa \circ j_s \xrightarrow{\lim \xi_{j_s}} \lim_{I_s} N \circ Z_\kappa \circ j_s$.

Pela escolha de cI temos $(\xi'_s)_{s \in S_0}$ é transformação natural. Além disso ξ' é a única transformação natural tal que $\xi'_{Z_\kappa} = \xi$.

(iii) $K_{\mathcal{I}_\kappa}(C) = [((Z_\kappa)'_0)_*(MOD(\mathcal{S}, U_0 - SET))]^\cong$.

Pois para $F \in obj(K_{\mathcal{I}_\kappa}(C))$ temos $F \cong (L_{Y_{C^*}}(F)) \circ Y_{C^*} \cong ((L_{Y_{C^*}}(F)) \circ i) \circ Z_\kappa$

■

Observação 1 : Pelas considerações no início deste item, pelo princípio da uniformização (proposição 5 do cap.2) e tomando por base a construção na proposição 1 acima obtemos o “teorema que esboçabilidade uniforme” (teo. 4.4.1 em [166]) : $\forall \mathcal{X}$ 2-categoria em U_0 $\forall \Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{ACE}$ homomorfismo de 2-categorias $\exists \Gamma' : \mathcal{X} \rightarrow (c - U_0 - \mathcal{ESQ})^*$ homomorfismo de 2-categorias tal que temos equivalência (na 2-categoria $\mathcal{HOM}(\mathcal{X}, \mathcal{ACE})$) $(\mathcal{X} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{ACE}) \simeq (\mathcal{X} \xrightarrow{\Gamma'} (c - U_0 - \mathcal{ESQ})^* \xrightarrow{MOD(-U_0 - SET)} \mathcal{ACE})$.

5.5 Considerações adicionais

(1)

Pelas observação 8 e proposição 3 do capítulo 4 e pelos itens (5.2) e (5.3) temos que para todo U_0 -tipo μ , toda U_0 -classe dos $U_0 - SET$ - modelos de alguma sentença em $L_{\theta_0 \theta_0}(\mu)$ munida de uma noção de morfismo suficientemente restritiva, constitui uma categoria acessível.

(2)

Pela observação 1 em (5.4) todo funtor acessível é esboçável. Assim pela observação 1 do item (5.3) e a parte externa do diagrama abaixo, temos que todo funtor acessível admite diagrama pequeno localmente livre (de “tipo” associado apenas a seu domínio).

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & L_S \\
& & & \curvearrowright & \\
A & \xrightarrow{\quad} & MOD(S) & \xrightarrow{\quad} & [S, U_0\text{-SET}] \\
\downarrow F & \cong & \downarrow MOD(H) & \begin{array}{c} J_S \\ \curvearrowright \end{array} & \downarrow [H, U_0\text{-SET}] \\
& & & L_{S'} & \\
A' & \xleftarrow{\quad} & MOD(S') & \xleftarrow{\quad} & [S', U_0\text{-SET}] \\
& \cong & & & \uparrow L_H \\
& & & & [S, U_0\text{-SET}]
\end{array}$$

(5.1)

(3)

Em (5.4) vimos que categorias κ -acessíveis são κ -esboçáveis e em (5.3) que categorias π -esboçáveis são κ -acessíveis para algum $\kappa \geq \pi$. Abaixo apresentaremos subcategorias plenas de ACE e $c - U_0 - ESQ$ onde κ -acessibilidade equivale a κ -esboçabilidade.

Proposição 1 : Sejam $\omega \leq \pi = \text{reg}(\pi) < \theta_0$ e $A \in \text{obj}(U_1 - CAT)$. São equivalentes :

- (i) A é π -esboçável por π -esboço projetivo.
- (ii) A é π -acessível e U_0 -proj completa.
- (iii) A é π -acessível e U_0 -ind completa.
- (iv) A é π -acessível e A_π é $\mathcal{P}_\pi$ -ind completa, onde $\mathcal{P}_\pi = \{P \in \text{obj}(U_0 - CAT) : \#P < \pi\}$.
- (v) $\exists C$ (C é U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \wedge C$ é $\mathcal{P}_\pi$ -ind completa $\wedge A \simeq [C^*, U_0 - SET]_{\mathcal{P}_\pi - \text{proj. pres.}}$).
- (vi) A é π -localmente presentável. (consultar [092])

□

((i) $\Rightarrow$ (ii)) $\wedge$ ((i) $\Rightarrow$ (iii))

Pela observação (1.iv.a) em (5.3) basta verificar que A π -projetivamente esboçável $\Rightarrow A$ π -acessível.

Seja $\mathcal{S}$ π -esboço categorial projetivo tal que $\exists E : MOD(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} A$. Nas condições da observação (1.iv.a) em (5.3) denotamos C a subcategoria plena de $MOD(\mathcal{S})$ com $C_0 = [\{Z_{\mathcal{S}*}(s) : s \in S_0\}]^{\mathcal{P}_\pi - \text{lim}} \xrightarrow{J}$. Seja $(C \xrightarrow{J} A) = (C \hookrightarrow MOD(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim E} A)$. Utilizando as observações (1.ii) e (1.iv.a) em (5.3) temos:

- . $\{MOD(\mathcal{S})(c, -) : c \in C_0\}$ reflete isomorfismos.
- . Pela construção transfinita de C temos:
- .. $C \hookrightarrow (MOD(\mathcal{S}))_\pi$.

.. C é U_1 -categoria essencialmente em U_0 .

. $\forall a \in A_0$ ($(J \rightarrow a)$ é U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \wedge (J \rightarrow a)$ é $\mathcal{P}_\pi$ -ind completa) .

. J é denso pois $\forall a \in A_0$ ($\exists \lim_{J \rightarrow a} P(a) \circ J \xrightarrow{can_a} a \wedge \forall c \in C_0$ ($A(J(c), \lim_{J \rightarrow a} P(a) \circ J) \xrightarrow{\cong A(J(c), can_a)} A(J(c), a)$)) .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Pois $\forall I$ ($I \in \text{obj}(U_0 - CAT) \Rightarrow (\Delta_I \in ACE(A, [I, A])$ admite diagrama pequeno localmente livre e preserva U_0 -limites projetivos logo, pela proposição (9.i) em (1.3.1), Δ_I admite adjunto à esquerda)) .

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Pelas proposição 4 em (1.3.2) e observação (1.iii) em (1.3.3) .

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Seja $C \in \text{obj}(U_0 - CAT)$ ($(A_\pi) \simeq C$) então C é $\mathcal{P}_\pi$ -ind completa , $(\mathcal{P}_\pi)^* = \mathcal{P}_\pi$ e $\forall P \in \mathcal{P}_\pi$
 $\forall \Gamma : P \rightarrow C^*$ ($\lim_{\leftarrow P} Y_{C^*} \circ \Gamma(p) \cong [P^*, C](\Gamma^*, \Delta_{P^*}(-)) \cong Y_{C^*}(\lim_{\leftarrow P^*} \Gamma^*(p)) \cong \lim_{\leftarrow I^*} Y_{C^*}(\lim_{\leftarrow P^*} \Gamma^*(p))$)
 onde $I \cong 1$.

Assim, o resultado segue pela construção na proposição 1 em (5.4) e porque cones indutivos 1 -indexados simplesmente especificam isomorfismos.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v)

Pelos itens 1,2,4,5 da proposição 5 em (1.3.3) .

(v) $\Longleftrightarrow$ (vi)

Contido na referência [092] .

■

Corolário : $\forall \omega \leq \kappa \leq \kappa' < \theta_0$ (A κ -localmente presentável $\Rightarrow A$ κ' -localmente presentável) .

□

Pois (vi) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (vi) .

■

Proposição 2 : Sejam $\omega \leq \pi = \text{reg}(\pi) < \theta_0$ e $A \in \text{obj}(U_1 - CAT)$. São equivalentes :

(i) A é π -esboçável por π -esboço local.

(ii) A é π -acessível e admite U_0 -limites projetivos conexos e não vazios.

(iii) A é π -acessível e U_0 -ind multicompleta.

(iv) A é π -acessível e A_π é $\mathcal{P}_\pi$ -ind multicompleta, onde $\mathcal{P}_\pi = \{P \in \text{obj}(U_0 - CAT) : \#P < \pi\}$.

(v) $\exists C$ (C é U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \wedge C$ é $\mathcal{P}_\pi$ -ind multicompleta $\wedge A \simeq [C^*, U_0 - SET]_{\text{multi-}\mathcal{P}_\pi\text{-proj.funde}}$) .

(vi) A é π -localmente multipresentável. (consultar [067])

(vii) A é π -localizável. (consultar [063])

□

((i)⇒(ii))∧((i)⇒(iii)) Pela observação (1.iv.b) em (5.3) basta verificar que A esboçável por π -esboço local $\Rightarrow A$ π -acessível .

Seja $\mathcal{S}$ π -esboco categorial local tal que $\exists E : MOD(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} A$. Nas condições da observação (1.iv.b) em (5.3) denotamos C a subcategoria plena de $MOD(\mathcal{S})$ com $C_0 = [\{Z_s(x_s) : s \in S_0 \wedge x_s \in (X_s)_0\}]^{\mathcal{P}_\pi\text{-multilim}} \rightarrow$. Seja $(C \xrightarrow{J} A) = (C \hookrightarrow MOD(\mathcal{S}) \xrightarrow{\simeq^E} A)$. Utilizando as observações (1.ii) e (1.iv.b) em (5.3) temos:

- . $\{MOD(\mathcal{S})(c, -) : c \in C_0\}$ reflete isomorfismos.
- . Pela construção transfinita de C temos:
- .. $C \hookrightarrow (MOD(\mathcal{S}))_\pi$.
- .. C é U_1 -categoria essencialmente em U_0 .
- . $\forall a \in A_0$ ($(J \rightarrow a)$ é U_1 -categoria essencialmente em $U_0 \wedge (J \rightarrow a)$ é $\mathcal{P}_\pi$ -ind completa) .
- . J é denso pois $\forall a \in A_0$ ($\exists \lim_{J \rightarrow a} P(a) \circ J \xrightarrow{can_a} a \wedge \forall c \in C_0$ ($A(J(c), \lim_{J \rightarrow a} P(a) \circ J) \xrightarrow{\cong A(J(c), can_a)} A(J(c), a)$)) .

(ii)⇒(iii)

Pois $\forall I$ ($I \in obj(U_0 - CAT) \Rightarrow (\Delta_I \in ACE(A, [I, A])$ admite diagrama pequeno localmente livre e preserva U_0 -limites projetivos conexos e não vazios logo, pela proposição (9.ii) em (1.3.1), Δ_I admite multiadjunto à esquerda)) .

(iii)⇒(iv)

Pelas proposição 4 em (1.3.2) e observação (1.iii) em (1.3.3) .

(iv)⇒(i) Seja $C \in Obj(U_0 - CAT)$ ($(A_\pi) \simeq C$) então C é $\mathcal{P}_\pi$ -ind multicompleta , $(\mathcal{P}_\pi)^* = \mathcal{P}_\pi$ e $\forall P \in \mathcal{P}_\pi \forall \Gamma : P \rightarrow C^* (\lim_{\leftarrow P} Y_{C^*} \circ \Gamma(p) \cong [P^*, C](\Gamma^*, \Delta_{P^*}(-)) \cong \lim_{\xrightarrow{I^*}} Y_{C^*}((\Gamma')^*(i))$) onde $I \cong \mathcal{D}(I_0)$.

Assim, o resultado segue pela construção na proposição 1 em (5.6) .

(iv) $\iff$ (v)

Pelos itens 1,2,4,6 da proposição 5 em (1.3.3) .

(v) $\iff$ (vi)

Contido na referência [067] .

(vi) $\iff$ (vii)

Mesmo conceito, nomenclaturas distintas ([067] , [063]) .

■

Corolário : $\forall \omega \leq \kappa \leq \kappa' < \theta_0$ (A κ -localmente multipresentável $\Rightarrow A$ κ' -localmente multipresentável) .

□

Pois (vi)⇒(i)⇒(vi) .

■

Observação 1 : Caracterizações análogas às das proposições 1 e 2 acima são demonstrados em [013] e [007] .

Capítulo 6

Miscelânea

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos e contra-exemplos de categorias acessíveis utilizando as caracterizações no capítulo anterior, mencionando simultaneamente outros resultados interessantes ¹.

(1)

Variedades de álgebras são ω -localmente presentáveis.

(i) Pelo teorema de Birkhoff, variedades são categorias de modelos de teorias equacionais em $L_{\omega\omega}(\mu)$ para algum tipo μ unisortido, sem símbolos relacionais, e com símbolos funcionais com aridades finitas.

(ii) Se $A \xhookrightarrow{i} EST(\mu)$ é variedade, então i é projetivamente esboçável por morfismo de esboços que especificam produtos finitos.

(iii) Se $L : SET \rightarrow A$ denota o adjunto à esquerda de $E : A \xhookrightarrow{i} EST(\mu) \rightarrow [\mathcal{D}(S), SET] \cong [1, SET] \cong SET$, $a \in A_0$ e $\omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \infty$ então:

(iii.a) São equivalentes:

. $\exists X \in [E(a)]^{<\kappa} a = \bigvee \{b : b \hookrightarrow a \wedge X \subseteq E(b)\}$ (“ a é $<\kappa$ -gerado por X ”).

. $\exists X \in V \exists f : L(X) \rightarrow a$ ($\#X < \kappa \wedge f$ é epimorfismo extremal (i.e. f não se fatora por subobjeto próprio de a)) .

. $\forall I \xrightarrow{F} A = I \xrightarrow{F'} mono(A) \hookrightarrow A$ (I é categoria pequena κ -filtrada $\Rightarrow \varinjlim_I A(a, F(i))$

$\xrightarrow{can} A(a, \varinjlim_I F(i))$) (“ a é κ -gerável” [092]) .

(iii.b) São equivalentes:

. $\exists (X, R) \in V$ ($R \subseteq E(L(X)) \times E(L(X)) \wedge R' = \bigvee \{C : C \text{ é congruência em } L(X) \wedge R \subseteq C\} \wedge a \cong L(X)/R' \wedge \#X < \kappa \wedge \#R < \kappa$) (“ a é $<\kappa$ -presentado por (X, R) ”).

. $\exists (X, R) \in V \exists L(R) \rightrightarrows L(X) \xrightarrow{f} a$ coigualador ($\#X < \kappa \wedge \#R < \kappa$) .

¹Utilizaremos a “fundamentação dos universos” somente quando esta for indispensável.

. $\forall I \xrightarrow{F} A$ (I é categoria pequena κ -filtrada $\Rightarrow \lim_I A(a, F(i)) \xrightarrow{can \cong} A(a, \lim_I F(i))$) (“ a é κ -presentável” [092]) .

(iv) Notemos que, simultaneamente, $E : A \rightarrow SET$ é $\cong$ -monádico ([159]) .

(2)

Revedo a seção (1.2.1) percebemos que $\mathcal{E} : CAT \rightarrow GRA$ é esboçável por morfismo de esboços $\mathcal{S}_{CAT} \hookrightarrow \mathcal{S}_{GRA}$ onde $\mathcal{S}_{GRA}$ é um ω -esboço trivial e $\mathcal{S}_{CAT}$ é um ω -esboço projetivo.

(3) [094]

Sejam:

. $\omega \leq \kappa = reg(\kappa) < \theta_0$.

. $(L, i) : U_1 - préORD \rightarrow U_1 - ORD$ a reflexão da categoria dos conjuntos ordenados pertencentes a U_1 e funções crescentes na categoria dos conjuntos pré-ordenados pertencentes a U_1 e funções crescentes.

. $U_1 - Real_\kappa$ a categoria dos κ -reticulados algébricos pertencentes a U_1 , com a subclasse dos κ -compactos com cardinais $< \theta_0$ e funções κ -Scott-contínuas.

. $\kappa - LOCPRES$ a subcategoria plena de $\kappa - ACE$ das categorias κ -localmente presentáveis.

Então a “retração canônica” : $(U_1 - ORD \hookrightarrow U_1 - préORD \rightarrow U_1 - CAT \rightarrow U_1 - préORD \xrightarrow{L} U_1 - ORD) \cong (U_1 - ORD \xrightarrow{id} U_1 - ORD)$ se restringe à $(U_1 - Real_\kappa \hookrightarrow \kappa - LOCPRES \rightarrow U_1 - Real_\kappa) \cong (U_1 - Real_\kappa \xrightarrow{id} U_1 - Real_\kappa)$.

(4)

Considerando sua axiomatização usual notamos que ORD , (ORD_{tot}) , a categoria dos conjuntos ordenados (totalmente ordenados) e funções crescentes (estritamente crescentes) é ω -localmente presentável (ω -localmente multipresentável) .

Do mesmo modo notamos que BOO ($\sigma - BOO$) , a categoria das álgebras booleanas (σ -álgebras booleanas) e homomorfismos (σ - homomorfismos) é $\aleph_0$ -localmente presentável ($\aleph_1$ - localmente presentável) .

(5) [186]

Seja A topos de Grothendieck e $\mathcal{C} = (C, \mathcal{J})$ um sítio pequeno com $A \simeq SH(\mathcal{C})$. Como $SH(\mathcal{C}) \hookrightarrow PSH(\mathcal{C}) = [C^*, SET]$ é inclusão plena com $obj(SH(\mathcal{C})) = \{F : C^* \rightarrow SET : \forall c \in C_0 \forall R \xrightarrow{i_R} C(-, c) \in \mathcal{J}(c) (NAT(R, F) \xrightarrow{(- \circ i_R) \cong} NAT(C(-, c), F)) \} = \{F : C^* \rightarrow SET : \forall c \in C_0 \forall R \xrightarrow{i_R} C(-, c) \in \mathcal{J}(c) (\lim_{(Y_C \rightarrow R)^*} NAT(Y_C \circ P_R(-), F) \xrightarrow{can'_{R \cong}} NAT(C(-, c), F)) \}$
 $\} = \{F : C^* \rightarrow SET : \forall c \in C_0 \forall R \xrightarrow{i_R} C(-, c) \in \mathcal{J}(c) (\lim_{K(R)} NAT(Y_C \circ P_R(-), F) \xrightarrow{can'_{R \cong}} F(c)) \}$
 $\}$ temos que $SH(\mathcal{C}) \cong MOD(\mathcal{S}^*)$ onde $\mathcal{S}$ é o cc-esboço indutivo sobre C com cones indutivos

canônicos associados a $(Y_C \rightarrow R) \xrightarrow{P(R)} C$, $R \in \cup_{c \in C_0} \mathcal{J}(c)$. Portanto toposes de Grothendieck são categorias localmente presentáveis.

(6) [051] , [013]

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{I} \in [obj(U_0 - GRA)]^{<\theta_0}$. Então $cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U_0 - ESQ \xrightarrow{\varepsilon} U_0 - CAT$ e $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U_0 - TYP \rightarrow cc - (\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U_0 - ESQ$ são projetivamente esboçáveis e $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) - U_0 - TEO$ é esboçável por esboço regular.

(7) [063] , [066] , [067]

(i) Consideremos as subcategorias da categoria ω -localmente presentável Auc dos anéis com unidade e comutativos, cujos objetos estão entre os anéis não triviais ($0 \neq 1$) e os morfismos são mergulhos (refletem a relação $ig(x, y) : x = y$)

. $Auc^\# \hookrightarrow Auc$, a categoria dos anéis com unidade, comutativos e não triviais com mergulhos entre esses é subcategoria multireflexiva de Auc :

.. $0 \cong A \in obj(Auc) \mapsto \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}\} \cup \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$.

.. $0 \not\cong A \in obj(Auc) \mapsto \{A \xrightarrow{\pi_I} A/I : I \text{ é ideal próprio de } A\}$.

. $Duc^\# \hookrightarrow Auc^\# \hookrightarrow Auc$, a categoria dos domínios de integridade com unidade, comutativos e não triviais com mergulhos entre esses é subcategoria multireflexiva de Auc :

.. $0 \cong A \in obj(Auc) \mapsto \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}\} \cup \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{Z}, p \text{ é primo}\}$.

.. $0 \not\cong A \in obj(Auc) \mapsto \{A \xrightarrow{\pi_P} A/P : P \text{ é ideal primo próprio de } A\}$.

Essas categorias são categorias ω -localmente multipresentáveis (e ω -multialgéblicas) que não são localmente presentáveis pois, sendo desconexas (homomorfismos injetivos preservam característica), não admitem produtos e coprodutos.

(ii) Consideremos as subcategorias da categoria ω -localmente presentável Auc dos anéis com unidade e comutativos, cujos objetos estão entre os anéis não triviais ($0 \neq 1$) e os morfismos são locais (refletem a relação $inv(x) : \exists y (x \cdot y = 1)$) .

. $Auc^\triangleleft \hookrightarrow Auc$, a categoria dos anéis com unidade, comutativos e não triviais (com homomorfismos locais entre esses) é subcategoria multireflexiva de Auc :

.. $0 \cong A \in obj(Auc) \mapsto \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Q}\} \cup \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{Z}, p \text{ é primo}\}$.

.. $0 \not\cong A \in obj(Auc) \mapsto \{A \xrightarrow{\pi_S} A[S^{-1}] : S \text{ é submonóide multiplicativo, disjunto de } \{0\} \text{ de } A\}$.

. $Luc^\triangleleft \hookrightarrow Auc^\triangleleft \hookrightarrow Auc$ a categoria dos anéis locais com unidade, comutativos e não triviais (com homomorfismos locais entre esses) é subcategoria multireflexiva de Auc :

.. $0 \cong A \in obj(Auc) \mapsto \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Q}\} \cup \{0 \xrightarrow{!} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{Z}, p \text{ é primo}\}$.

.. $0 \not\cong A \in obj(Auc) \mapsto \{A \xrightarrow{\pi_P} A_P : P \in Spec(A)\}$.

Essas categorias são categorias ω -localmente multipresentáveis (e ω -multialgéblicas) que não são localmente presentáveis pois, sendo desconexas (homomorfismos locais preservam a

“característica de inversibilidade” : $car_{inv}(A) = \min\{n \in \mathbb{N} : A \not\models inv(n.1)\}$, não admitem produtos e coprodutos.

(iii) Seja Kc , a categoria dos corpos comutativos:

. Kc é axiomatizável pelos axiomas usuais para anéis com unidade e comutativos e o axioma $\forall x (x = 0 \sqcup \exists y (x.y = 1))$.

. Kc satisfaz as condições em (i) e (ii) acima e $Kc \hookrightarrow Auc$ se fatora como $Kc \hookrightarrow Duc^\# \hookrightarrow Auc^\# \hookrightarrow Auc$ e $Kc \hookrightarrow Auc^\triangleleft \hookrightarrow Auc$.

. $Kc \hookrightarrow Duc^\#$ admite adjunto à esquerda : o funtor “corpo das frações ” , assim $Kc \hookrightarrow Auc$ admite multiadjunto a esquerda:

.. $0 \cong A \in obj(Auc) \mapsto \{0 \xrightarrow{1} \mathbb{Q}\} \cup \{0 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{Z} , p \text{ é primo} \}$.

.. $0 \not\cong A \in obj(Auc) \mapsto \{A \xrightarrow{\pi_P} A/P \xrightarrow{i_P} Frac(A/P) : P \in Spec(A)\}$.

(8)

. As categorias Met , $Norm$ e Euc , respectivamente, dos espaços métricos e imersões isométricas , dos espaços normados e imersões isométricas e dos espaços euclidianos e transformações lineares ortogonais são $\aleph_0$ -multialgéblicas e portanto $\aleph_0$ -multipresentáveis. ([066], [067],[063])

. As categorias $Metc$, Ban e $Hilb$, respectivamente, dos espaços métricos completos e imersões isométricas, dos espaços de Banach e imersões isométricas e dos espaços de Hilbert e transformações lineares ortogonais são $\aleph_1$ -multialgéblicas, portanto $\aleph_1$ -multipresentáveis. ([066],[067],[063])

. A categoria $Ban_{\leq}$ dos espaços de Banach e contrações é axiomatizável por sentença em $L_{\aleph_1, \aleph_1}(\mu)$ da forma $(\wedge)(\forall)([(\vee), (\wedge), (atom(\mu))] \rightarrow [(\exists), (\vee), (\wedge), (atom(\mu))])$ onde μ é um tipo unisortido com ω símbolos funcionais e um símbolo relacional. ([166])

. A categoria $\mathbb{C}^* - ALGuc$ das $\mathbb{C}^*$ -álgebras unitárias e comutativas é $\aleph_1$ -localmente presentável. ([092])

Temos alguns contra-exemplos nos ítems (9),(10),(11) abaixo.

(9)

. $(SET)^*$ é categoria proj/ind completa não acessível . ([092],[090])

Pois $\cup_{\kappa < \infty} ((SET)^*)_{\kappa} = \{X \in V : \#X = 1\} \subsetneq obj((SET)^*)$.

Em geral, devido ao:

Teorema ([092]) : Se A e A^* são categorias localmente presentáveis então A (e A^*) são pré-reticulados completos.

Obtemos o seguinte:

“Princípio de não dualidade” : Seja A categoria acessível e proj completa e/ou ind completa. Se A não é categoria pré ordenada então A^* é categoria proj-ind completa não acessível .

Assim :

. $CHaus$, a categoria dos espaços compactos e T_2 é categoria proj/ind completa não acessível . ([092])

Pois $(CHaus)^* \simeq \mathbb{C}^* - ALGuc$ (dualidade de Gelfand) .

Apesar disso $E : CHaus \rightarrow SET$ é $\cong$ -monádico ([159]) e $CHaus(-, [0, 1]) : (CHaus)^* \rightarrow SET$ é $\simeq$ -monádico ([026]) .

. $CHaus0D$, a categoria dos espaços compactos, T_2 com base de clopens é categoria proj/ind completa não acessível .

Pois $(CHaus0D)^* \simeq BOO$ (dualidade de Stone) .

. Como $(Hilb)^* \cong Hilb$ vemos que $Hilb$ é categoria localmente multipresentável não localmente presentável.

(10)

. TOP é categoria proj/ind completa, tal que $E : TOP \rightarrow SET$ admite adjunto à esquerda e à direita mas:

.. TOP não é acessível. ([092],[090])

Pois $\cup_{\kappa < \infty} (TOP)_{\kappa} = \{(X, \tau) \in obj(TOP) : \tau = \mathcal{P}(x)\} \subsetneq obj(TOP)$.

.. $E : TOP \rightarrow SET$ não é $\simeq$ -monádico. ([026])

Pois E não reflete isomorfismos.

.. Apesar disso, em [181] demonstra-se que TOP é equivalente a categoria de modelos de uma sentença $(\wedge)(\forall)([(\wedge)(atom(\mu))] \rightarrow [atom(\mu)])$ onde μ é sobre um tipo “grande” .

. $(TOP)^*$ é categoria proj/ind completa mas:

.. $(TOP)^*$ não é acessível. ([092],[090])

Pois $\cup_{\kappa < \infty} ((TOP)^*)_{\kappa} = \{(X, \tau) \in obj(TOP) : \#X = 1\} \subsetneq obj((TOP)^*)$.

.. Contudo, em [025] demonstra-se que $(TOP)^*$ é equivalente a categoria de modelos, sobre uma categoria $\simeq$ -monádica sobre SET , de uma sentença $(\wedge)(\forall)([(\wedge), (atom(\mu))] \rightarrow [atom(\mu)])$.

(11)

. Seja $\mu = (s, F, \emptyset, s_F, a_F, \emptyset)$ um tipo “grande” unisortido tal que F é uma classe própria de constantes ($\forall f \in F (I_f = 0)$). $EST(\mu, SET)$ admite limites indutivos (pequenos) ω -filtrados mas não é acessível. ([166])

Pois $\cup_{\kappa < \infty} (EST(\mu, SET))_{\kappa} = \emptyset \subsetneq obj(EST(\mu, SET))$.

. Seja $X \subseteq V$ classe própria. $\mathcal{D}(X)$ admite limites projetivos/indutivos pequenos, não vazios e conexos mas não é acessível. ([166])

Pois $\forall \omega \leq \kappa < \infty (\mathcal{D}(X))_{\kappa} (= \mathcal{D}(X))$ não é essencialmente pequena.

Em (12) e (13) temos alguns “limites da teoria” apresentada :

(12) A relação $\leq$ na classe dos cardinais regulares infinitos é a “mais geral possível” :

$\forall \kappa, \kappa' < \infty$ cardinais regulares infinitos ($\forall A \in \text{obj}(CAT)$ (A κ -acessível $\Rightarrow A$ κ' -acessível) $\Rightarrow \kappa \leq \kappa'$) ([166])

. Seja $SET_{\text{merg}}^{\geq \kappa'}$ a subcategoria de SET dos conjuntos de cardinalidade $\geq \kappa'$ e mergulhos (funções injetoras). $SET_{\text{merg}}^{\geq \kappa'}$ é κ -acessível $\iff \kappa' < \kappa$.

. Seja $ORD_{\text{merg}}^{\kappa\text{-dir}}$ a subcategoria de ORD dos conjuntos ordenados κ -dirigidos e mergulhos (funções injetoras que preservam e refletem as relações de ordem). $ORD_{\text{merg}}^{\kappa\text{-dir}}$ é κ -acessível e para os cardinais regulares $\kappa' \geq \kappa$ tais que $ORD_{\text{merg}}^{\kappa\text{-dir}}$ é κ' -acessível tem-se que: $\forall x$ ($\#x < \kappa' \Rightarrow \exists A \in [[x]^{<\kappa}]^{<\kappa'} ((A, \subseteq) \hookrightarrow ([x]^{<\kappa}))$ é “functor” final) .

(13) O cardinal $\kappa(\mathcal{S})$ é o “melhor possível” :

$\exists \mathcal{S} \in \text{obj}(gn - ESQ)$ ($MOD(\mathcal{S}, SET) \in (\text{obj}(\kappa(\mathcal{S}) - ACE)) - \bigcup_{\kappa < \kappa(\mathcal{S})} (\text{obj}(\kappa - ACE))$) . ([166])

. $SET_{\text{merg}}^{\geq \omega}$ é esboçável por um esboço $\mathcal{S}'$ tal que $\pi(\mathcal{S}') = \tau(\mathcal{S}') = \omega$ logo, para todo $\omega \leq \tau < \infty$, a categoria produto $A = (SET_{\text{merg}}^{\geq \omega})^\tau$ é esboçável pelo esboço $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\tau) \otimes \mathcal{S}'$ ($\mathcal{S}(\tau)$ é o esboço trivial sobre o grafo discreto com τ objetos) portanto: $\pi(\mathcal{S}) = \omega$, $\tau(\mathcal{S}) = \tau$, $\kappa(\mathcal{S}) = \tau^+$. $A \in (\text{obj}(\kappa(\mathcal{S}) - ACE)) - \bigcup_{\kappa < \kappa(\mathcal{S})} (\text{obj}(\kappa - ACE))$ pois $\bigcup_{\kappa < \kappa(\mathcal{S})} A_\kappa = \emptyset$.

(14) [166] , [117] , [075]

Neste ítem utilizaremos $NBGIN + H$, a extensão (própria) de $NBGUN$ que assume a existência de um cardinal hiperinacessível, i.e. de um ponto fixo regular da função normal que enumera a classe dos cardinais inacessíveis.

Se $\theta_0 = \#U_0$ é um hiperinacessível que não é maior que nenhum cardinal mensurável então existe uma categoria acessível que possui objeto que não admite $< \theta_0$ quocientes (não “ θ_0 -co-well-powered”).

Seja A a categoria dos modelos transitivos de ZFC que pertencem a U_0 e mergulhos $F_{\aleph_1 \aleph_1}(\in)$ -elementares. Dentre esses modelos destacamos os universos. Temos que:

. Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{M}$ objetos de A com $\mathcal{U} = (U, \in|)$ e U universo, então se $\mathcal{H} \in A(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ é tal que $\forall \alpha$ ordinal ($\alpha \in U \Rightarrow H(\alpha) = \alpha$) então $\forall x$ ($x \in U \Rightarrow H(x) = x$) .

Por indução no $\in$ -posto dos elementos de U utilizando que “ $\in$ -posto” é termo Δ_1^{ZFC} e que mergulhos $F_{\aleph_0 \aleph_0}(\in)$ -elementares preservam termos Δ_1^{ZFC} .

. Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{M}$ objetos de A com $\mathcal{U} = (U, \in|)$ e U universo, se $\mathcal{H} \in A(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ é tal que $\exists x \in U (H(x) \neq x)$ então $\theta = \min\{\alpha: \alpha \in U ; \alpha \text{ é ordinal} ; H(\alpha) \neq \alpha\}$ é cardinal mensurável.

Por [117] .

. A é acessível.

Seja B a categoria dos modelos bem fundados de ZFC que pertencem a U_0 e mergulhos $F_{\aleph_1 \aleph_1}(\in)$ -elementares. B é acessível pois ZFC é axiomatizável em $L_{\aleph_0 \aleph_0}(\in)$ e “relação ($\in$)

bem fundada” é axiomatizável em $L_{\aleph_1 \aleph_1}(\in)$. Portanto A é acessível pois $A \xrightarrow{\sim} B$ (teorema do isomorfismo de Mostowski).

Consideremos $J : A \hookrightarrow A^-$, $\{\emptyset\}$ -ind completamente forte de A .

. A^- é acessível.

Pois se A é κ -acessível então $I : (A_\kappa)^- \hookrightarrow A^-$ é $\mathcal{I}_\kappa$ -ind completamente forte de categoria essencialmente em U_0 .

. A^- não é θ_0 -co-well-powered.

Pois pelo que vimos acima, e pelas hipóteses sobre θ_0 temos que $-\infty$ admite θ_0 quocientes.

(15)

Diferentemente de (14) , em [166] mostra-se que :

. Toda categoria acessível admitindo “pushouts” (limites indutivos indexados por $\leftarrow \rightarrow$) é θ_0 -co-well-powered.

. Se θ_0 é um cardinal hipercompacto então toda categoria acessível é θ_0 -co-well-powered.

Mais conexões entre categorias acessíveis e hipóteses de existência de grandes cardinais são estabelecidas em [010] , [004] , [166] , [184] , [006] , [113] , [189] .

Bibliografia

Segue abaixo a relação bibliográfica disponível em nossa biblioteca, em sua maioria.

[001]

S.ABRAMSKY

DOMAIN THEORY IN LOGICAL FORM

ANNALS OF PURE AND APPLIED LOGIC 51 (1991), 1-77

[002]

J.ADÁMEK - H.HERRLICH - J.ROSICKÝ

ESSENTIALLY EQUATIONAL CATEGORIES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXIX (1988), 175-192

[003]

J.ADÁMEK - J.REITERMAN

EXACTNESS OF THE SET-VALUED *COLIM*

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE 17 (1976),
97-103

[004]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

REFLECTIONS IN LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES

ARCHIVUM MATHEMATICUM VOL.25 (1989), 89-94

[005]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

WHAT ARE LOCALLY GENERATED CATEGORIES ?

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 1488, SPRINGER VERLAG (1991), 14-19

[006]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

ON INJECTIVITY IN LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL.336,
(1993), 785-804

[007]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

WEAKLY LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

VOL.XXXV (1994), 179-186

[008]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

ON GEOMETRIC AND FINITARY SKETCHES

APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 4 (1996), 227-240

[009]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ

FINITE MODELS OF SKETCHES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 116 (1997), 3-23

[010]

J.ADÁMEK - J.ROSICKÝ - V.TRNKOVÁ

ARE ALL LIMITED CLOSED SUBCATEGORIES OF LOCALLY PRESENTABLE
CATEGORIES REFLECTIVE ?

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 1348, SPRINGER VERLAG (1988), 1-18

[011]

P.AGERON

SÉMANTIQUE CATÉGORIQUE DES TYPES: COMPRENDE LE SYSTÈME F

DIAGRAMMES VOL.19 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1988)

[012]

P.AGERON

LES CATÉGORIES LOCALEMENT (MULTI)PRÉSENTABLES

COMME DOMAINES DE SCOTT

DIAGRAMMES VOL.21 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1989)

[013]

P.AGERON

STRUCTURE DES LOGIQUES ET LOGIQUE DES STRUCTURES

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1991)

[014]

P.AGERON

THE LOGIC OF STRUCTURES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 79 (1992), 15-34

[015]

P.AGERON

QUELQUES ASPECTS DE LA DUALITÉ ENTRE LOGIQUE ET TOPOLOGIE
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXIII (1992), 195-198

[016]

P.AGERON

LA TOUR HOLOMORPHE D'UNE ESQUISSE

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXVII (1996), 295-314

[017]

M.H.ALBERT - G.M.KELLY

THE CLOSURE OF A CLASS OF COLIMITS

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 51 (1988), 1-17

[018]

H.ANDRÉKA - Á.KURUCZ - I.NÉMETI

CONNECTIONS BETWEEN AXIOMS OF SET THEORY AND BASIC
THEOREMS OF UNIVERSAL ALGEBRA

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC VOL.59 (1994), 912-923

[019]

M.BARR

COEQUALIZERS AND FREE TRIPLES

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT 116 (1970), 307-322

[020]

M.BARR

EXACT CATEGORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 236, SPRINGER VERLAG (1971), 1-120

[021]

M.BARR

MODELS OF SKETCHES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXVII (1986), 93-107

[022]

M.BARR

MODELS OF HORN THEORIES

CONTEMPORARY MATHEMATICS 92,
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1989), 1-7

[023]

M.BARR

- ACCESSIBLE CATEGORIES AND MODELS OF LINEAR LOGIC
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 69 (1990), 219-232
[024]
M.BARR
FUNCTORIAL SEMANTICS AND *HSP* TYPE THEOREMS
ALGEBRA UNIVERSALIS 31 (1994), 223-251
[025]
M.BARR - M.PEDICCHIO
TOP^{op} IS A QUASI-VARIETY
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXVI (1995), 3-10
[026]
M.BARR - C.WELLS
TOPOSES, TRIPLES AND THEORIES
GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN 278
SPRINGER VERLAG (1985)
[027]
M.BARR - C.WELLS
CATEGORY THEORY FOR COMPUTING SCIENCE
PRENTICE HALL (1990)
[028]
A.BASTIANI
SKETCHED STRUCTURES AND COMPLETIONS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XIV (1973), 158-160
[029]
A.BASTIANI - C.EHRESMANN
CATEGORIES OF SKETCHED STRUCTURES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XIII (1972), 104-214
[030]
A.BASTIANI - C.EHRESMANN
MULTIPLE FUNCTORS : I. LIMITS RELATIVE TO DOUBLE CATEGORIES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XV (1974), 215-292
[031]
J.BÉNABOU

INTRODUCTION TO BICATEGORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 47, SPRINGER VERLAG (1967), 1-77

[032]

J.BÉNABOU

STRUCTURES ALGÈBRIQUES DANS LE CATÉGORIES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.X (1969), 1-126

[033]

R.BETTI - M.GRANDIS

COMPLETE THEORIES IN 2-CATEGORIES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

VOL.XXIX (1988), 9-57

[034]

G.J.BIRD - G.M.KELLY - A.J.POWER- R.H.STREET

FLEXIBLE LIMITS FOR 2-CATEGORIES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 61 (1989), 1-27

[035]

G.BIRKHOFF

ON THE STRUCTURE OF ABSTRACT ALGEBRAS

PROCEEDINGS OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY

VOL.31 (1935), 433-454

[036]

A.A.BLANCHARD

STRUCTURE SPECIES AND CONSTRUCTIVE FUNCTORS

CANADIAN JOURNAL OF MATHEMATICS VOL.XXVI (1974), 1217-1227

[037]

A.BLASS

THE INTERACTION BETWEEN CATEGORY THEORY AND SET THEORY

CONTEMPORARY MATHEMATICS 30,

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1984), 5-29

[038]

F.BORCEUX - G.V.BOSSCHE

ALGEBRA IN LOCALIC TOPOS WITH APPLICATIONS TO RING THEORY

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 1038, SPRINGER VERLAG (1983)

[039]

F.BORCEUX - B.J.DAY

ON CHARACTERISATION OF FINITARY ALGEBRAIC CATEGORIES

- BULLETIN OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL.18
(1978), 125-135
[040]
R.BÖRGER - W.THOLEN
ABSCHWÄCHUNGEN DES ADJUNKTIONSBEGRIFFS
MANUSCRIPTA MATHEMATICA 19 (1976), 19-45
[041]
R.BÖRGER - W.THOLEN
CANTORS DIAGONALPRINZIP FÜR KATEGORIEN
MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT 160 (1978), 135-138
[042]
R.BÖRGER - W.THOLEN
STRONG, REGULAR AND DENSE GENERATORS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXII (1991), 257-276
[043]
N.BOURBAKI
ELEMENTS OF MATHEMATICS: THEORY OF SETS
ADDISON WESLEY (HERMANN) (1968)
[044]
M.C.BUNGE
RELATIVE FUNCTOR CATEGORIES AND CATEGORIES OF ALGEBRAS
JOURNAL OF ALGEBRA 11 (1969), 64-101
[045]
A.BURRONI
ESQUISSES DE CATÉGORIES À LIMITES ET DES QUASI-TOPOLOGIES
ESQUISSES MATHÉMATIQUES 5 (1970)
[046]
E.BURRONI - A.BURRONI
STRUCTURES ALGÈBRIQUES: THÈME ET VARIATIONS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL. XXXIII (1992), 207-216
[047]
J.CARTMELL
GENERALISED ALGEBRAIC THEORIES AND CONTEXTUAL CATEGORIES
ANNALS OF PURE AND APPLIED LOGIC 32 (1986), 209-243
[048]

C.C.CHANG - H.J.KEISLER

MODEL THEORY

STUDIES IN LOGIC AND FOUNDATIONS OF MATHEMATICS VOL.73,
NORTH HOLLAND (1990)

[049]

F.CONDUCHE

SUR LES STRUCTURES DÉFINIES PAR LIMITES PROJECTIVES
ESQUISSES MATHÉMATIQUES 11 (1971)

[050]

L.COPPEY

ESQUISSES ET TYPES

DIAGRAMMES VOL.27 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1992)

[051]

L.COPPEY - C.LAIR

LEÇONS DE THÉORIE DES ESQUISSES (II)

DIAGRAMMES VOL.19 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1988)

[052]

T.COQUAND

CATEGORIES OF EMBEDDINGS

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 68 (1989), 221-237

[053]

N.C.A.COSTA - A.J.CAROLI

REMARQUES SUR LES UNIVERS D'EHRESMANN-DEDECKER

COMPTE RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PARIS)

T.265, SERIE A (1967), 761-763

[054]

M.COSTE

LOCALISATION, SPECTRA AND SHEAF REPRESENTATION

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 753, SPRINGER VERLAG (1979), 212-238

[055]

F.CURY

COMPLÉTION ET COMPLÉTUDE, SELON H.ANDRÉKA ET I.NÉMETI

DIAGRAMMES VOL.28 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1992)

[056]

B.J.DAY

DENSITY PRESENTATIONS OF FUNCTORS

BULLETIN OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL.16

(1977), 427-448

[057]

B.DAY - R.STREET

LOCALISATION OF LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 58 (1989), 227-233

[058]

M.A.DICKMANN

LARGE INFINITARY LANGUAGES

STUDIES IN LOGIC AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS VOL.83,

NORTH HOLLAND (1975)

[059]

K.H.DIENER

AN APPLICATION OF INFINITARY UNIVERSAL ALGEBRA TO SET THEORY

ALGEBRA UNIVERSALIS 32 (1994), 297-306

[060]

Y.DIERS

J-ADJONCTION, LIMITE J-ABSOLUTE ET J-THÉORIE ALGÈBRIQUE

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PARIS)

T.278, SERIE A (1974), 1009-1012

[061]

Y.DIERS

FONCTEUR PLEINEMENT FIDÈLE DENSE CLASSANT LES ALGÈBRES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XVII (1976), 171-186

[062]

Y.DIERS

VARIÉTÉS D'UNE CATÉGORIE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE

BRUXELLES T.90 (1976), 159-172

[063]

Y.DIERS

CATÉGORIES LOCALISABLES

THÈSE DE DOCTORAT - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1977)

[064]

Y.DIERS

SPECTRES ET LOCALISATIONS RELATIFS À UN FONCTEUR

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PARIS)

T.287, SERIE A (1978), 985-988

[065]

Y.DIERS

FAMILLES UNIVERSELLES DE MORPHISMES
ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE
BRUXELLES T.93 (1979), 175-195

[066]

Y.DIERS

CATÉGORIES MULTIALGÈBRIQUES
ARCHIV DER MATHEMATIK VOL.34 (1980), 193-209

[067]

Y.DIERS

CATÉGORIES LOCALEMENT MULTIPRÉSENTABLES
ARCHIV DER MATHEMATIK VOL.34 (1980), 344-356

[068]

Y.DIERS

MULTIMONADS AND MULTIMONADIC CATEGORIES
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 17 (1980), 153-170

[069]

Y.DIERS

SOME SPECTRA RELATIVE TO FUNCTORS
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 22 (1981), 57-74

[070]

Y.DIERS

UN CRITÈRE DE REPRÉSENTABILITÉ PAR SECTIONS
CONTINUES DE FAISCEAUX
LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 962, SPRINGER VERLAG (1982), 47-61

[071]

Y.DIERS

CATEGORIES OF BOOLEAN SHEAVES OF SIMPLE ALGEBRAS
LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 1187, SPRINGER VERLAG (1986)

[072]

Y.DIERS

CATÉGORIES ALGÈBRIQUES PREGALOISIENNES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXII (1991), 279-296

[073]

Y.DIERS

CATÉGORIES MULTIALGÈBRIQUES GALOISIENNES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXIII (1992), 55-69

[074]

Y.DIERS

CATEGORIES OF ALGEBRAIC SETS

APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 4 (1996), 329-341

[075]

F.R.DRAKE

SET THEORY - AN INTRODUCTION TO LARGE CARDINALS

STUDIES IN LOGIC AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS VOL.76,
NORTH HOLLAND (1974)

[076]

M.DROSTE

EVENT STRUCTURES AND DOMAINS

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 68 (1989), 37-47

[077]

C.EHRESMANN

SUR L'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES ET DE FONCTEURS ADJOINTS

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.IX (1967), 33-180

[078]

C.EHRESMANN

ESQUISSES ET TYPES DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IASI T.XIV (1968), 1-14

[079]

C.EHRESMANN

CONSTRUCTION DE STRUCTURES LIBRES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 92, SPRINGER VERLAG (1969), 74-104

[080]

P.C.EKLOF

ON CONSTRUCTING INDECOMPOSABLE GROUPS IN L

JOURNAL OF ALGEBRA 49 (1977), 96-103

[081]

S.FAKIR

OBJECTS ALGÈBRIQUEMENT CLOS ET INJECTIFS DANS

- LES CATÉGORIES LOCALEMENT PRÉSENTABLES
BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
MÉMOIRE N42 (1975)
[082]
S.FAKIR - L.HADDAD
OBJECTS COHÉRENTS ET ULTRAPRODUITS DANS LES CATÉGORIES
JOURNAL OF ALGEBRA 21 (1972), 410-421
[083]
E.R.FISHER
VOPĚNKA'S PRINCIPLE, CATEGORY THEORY AND UNIVERSAL ALGEBRA
NOTICES OF AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY 24 (1977), A-44
[084]
F.FOLTZ
SUR LA COMUTATION DES LIMITES
DIAGRAMMES 5 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1981)
[085]
F.FOLTZ - C.LAIR
FERMETURE STANDARD DES CATÉGORIES ALGÈBRIQUES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XIII (1972), 275-307
[086]
F.FOLTZ - C.LAIR - G.M.KELLY
ALGEBRAIC CATEGORIES WITH FEW MONOIDAL BICLOSED STRUCTURES
OR NONE
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 17 (1980), 171-177
[087]
T.F.FOX
PURITY IN LOCALLY-PRESENTABLE MONOIDAL CATEGORIES
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 8 (1976), 261-265
[088]
P.J.FREYD
PROPERTIES INVARIANT WITHIN EQUIVALENCE TYPES OF CATEGORIES
ALGEBRA, TOPOLOGY AND CATEGORY THEORY, ACADEMIC PRESS (1976),
55-61
[089]
P.J.FREYD - G.M.KELLY
CATEGORIES OF CONTINUOUS FUNCTORS, I

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 2 (1972), 169-191

[090]

P.J.FREYD - G.M.KELLY

CATEGORIES OF CONTINUOUS FUNCTORS, I - ERRATUM

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 4 (1974), 121

[091]

P.J.FREYD - A.SCEDROV

CATEGORIES, ALLEGORIES

NORTH HOLLAND MATHEMATICAL LIBRARY VOL.39, NORTH HOLLAND (1990)

[092]

P.GABRIEL - F.ULMER

LOKAL PRÄSENTIERBARE KATEGORIEN

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 221, SPRINGER VERLAG (1971)

[093]

M.GERNER - R.GUITART

THE LOCALLY FREE RELATIVELY FILTERED DIAGRAM AS

AN INDUCTIVE COMPLETION OF A SYSTEM OF CHOICE

APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 5 (1997), 59-73

[094]

G.GIERZ - K.H.HOFMANN - K.KEIMEL - J.D.LAWSON - M.MISLOVE - D.S.SCOTT

A COMPENDIUM OF CONTINUOUS LATTICES

SPRINGER VERLAG (1980)

[095]

J.W.GRAY

CATEGORICAL ASPECTS OF DATA TYPE CONSTRUCTORS

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 50 (1987), 103-135

[096]

J.W.GRAY

THE CATEGORY OF SKETCHES AS A MODEL FOR ALGEBRAIC SEMANTICS

CONTEMPORARY MATHEMATICS 92,

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1989), 109-135

[097]

J.W.GRAY

EXECUTABLE SPECIFICATIONS FOR DATA-TYPE CONSTRUCTORS

DIAGRAMMES VOL.24 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1990)

[098]

A.GROTHENDIECK - J.L.VERDIER

- PREFAISCEAU (APPENDICE: UNIVERS (N.BOURBAKI))
LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 269, SPRINGER VERLAG (1972), 1-217
[099]
- R.GUITART
QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE DANS UNE CATÉGORIE ?
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XXIII (1982), 115-148
[100]
- R.GUITART
ON THE GEOMETRY OF COMPUTATIONS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES
VOL.XXVII (1986), 107-136
[101]
- R.GUITART
ON THE GEOMETRY OF COMPUTATIONS, II
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXIX (1988), 297-326
[102]
- R.GUITART
L'UNITÉ DE LA THÉORIE DES MODÈLES ET DE L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXX (1989), 281-293
[103]
- R.GUITART - C.LAIR
CALCUL SYNTAXIQUE DES MODÈLES ET CALCUL DES FORMULES INTERNES
DIAGRAMMES VOL.4 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1980)
[104]
- R.GUITART - C.LAIR
EXISTENCE DE DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES
DIAGRAMMES VOL.6 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1981)
[105]
- R.GUITART - C.LAIR
EXISTENCE DE DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES, II
DIAGRAMMES VOL.7 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1982)
[106]
- R.GUITART - C.LAIR

LIMITES ET COLIMITES POUR REPRÉSENTER LES FORMULES
DIAGRAMMES VOL.7 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1982)

[107]

R.GUITART - J.RIGUET

ENVELOPPE KAROUBIENNE DE CATÉGORIES DE KLEISLI
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXIII (1992), 261-266

[108]

C.A.GUNTER - A.JUNG

COHERENCE AND CONSISTENCY IN DOMAINS
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 63 (1990), 49-66

[109]

M.HÉBERT

SYNTACTIC CHARACTERIZATION OF CLOSURE UNDER CONNECTED LIMITS
ARCHIVE FOR MATHEMATICAL LOGIC 31 (1991), 133-143

[110]

H.HERRLICH

ON THE FAILURE OF BIRKHOFF'S THEOREM FOR
LOCALLY SMALL BASED EQUATIONAL CATEGORIES OF ALGEBRAS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXIV (1993), 185-192

[111]

P.J.HILTON

ON FILTERED SYSTEMS OF GROUPS, COLIMITS AND KAN EXTENSIONS
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA VOL.1 (1971), 199-217

[112]

W.HODGES

THE MEANING OF SPECIFICATIONS I: DOMAINS AND INITIAL MODELS
THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 152 (1995), 67-89

[113]

H.HU - M.MAKKAI

ACCESSIBLE EMBEDDINGS AND THE SOLUTION-SET CONDITION
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXV (1994), 99-108

[114]

H.HU - W.THOLEN

QUASI-COPRODUCTS AND ACCESSIBLE CATEGORIES WITH

WIDE PULLBACKS

APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 4 (1996), 387-402

[115]

A.HUQ

A NOTE ON GENERATORS IN CATEGORIES

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XIII (1972), 393-395

[116]

J.R.ISBELL

GENERAL FUNCTORIAL SEMANTICS, I

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS 94 (1972), 535-596

[117]

T.JECH

SET THEORY

ACADEMIC PRESS (1978)

[118]

M.JOHNSON - R.F.C.WALTERS

ALGEBRA OBJECTS AND ALGEBRA FAMILIES FOR FINITE LIMIT THEORIES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 83 (1992), 283-293

[119]

P.T.JOHNSTONE

RINGS, FIELDS, AND SPECTRA

JOURNAL OF ALGEBRA 49 (1977), 238-260

[120]

P.T.JOHNSTONE

A SYNTATIC APPROACH TO DIERS' LOCALIZABLE CATEGORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 753, SPRINGER VERLAG (1980), 466-478

[121]

P.T.JOHNSTONE

STONE SPACES

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1982)

[122]

A.JUNG

CARTESIAN CLOSED CATEGORIES OF ALGEBRAIC *CPO*s

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 70 (1990), 233-250

[123]

J.J.KAPUT

LOCALLY ADJUNCTABLE FUNCTORS

ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS 16 (1972), 86-94

[124]

O.KEAN

ABSTRACT HORN THEORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 445, SPRINGER VERLAG (1975), 15-50

[125]

G.M.KELLY

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES DEMONSTRATIONS

PAR RECURRENCE TRANSFINIE EN ALGÈBRE CATÉGORIQUE

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XVI (1975), 259-263

[126]

G.M.KELLY

A UNIFIED TREATMENT OF TRANSFINITE CONSTRUCTIONS FOR FREE

ALGEBRAS, FREE MONOIDS, COLIMITS, ASSOCIATED SHEAVES, AND SO ON

BULLETIN OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL.22 (1980), 1-

83

[127]

G.M.KELLY

ON THE ESSENTIALLY-ALGEBRAIC THEORY GENERATED BY A SKETCH

BULLETIN OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL.26 (1982),

45-56

[128]

G.M.KELLY

STRUCTURES DEFINED BY FINITE LIMITS IN THE ENRICHED CONTEXT, I

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XXIII (1982), 3-42

[129]

G.M.KELLY

A NOTE ON THE GENERALIZED REFLEXION OF GUITART AND LAIR

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XXIV (1983), 155-159

[130]

G.M.KELLY - R.PARÉ

A NOTE ON THE ALBERT-KELLY PAPER

"THE CLOSURE OF A CLASS OF COLIMITS"

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 51 (1988), 19-25

[131]

G.M.KELLY - A.J.POWER

ADJUNCTIONS WHOSE COUNTS ARE COEQUALIZERS,
AND PRESENTATIONS OF FINITARY ENRICHED MONADS

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 89 (1993), 163-179

[132]

J.F.KENNISON

ON LIMIT-PRESERVING FUNCTORS

ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS 12 (1968), 616-619

[133]

Y.KINOSHITA - J.POWER

LAX NATURALITY THROUGH ENRICHMENT

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 112 (1996), 53-72

[134]

A.KOCK

MONADS FOR WHICH STRUCTURES ARE ADJOINT TO UNITS

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 104 (1995), 41-59

[135]

A.KOCK - G.E.REYES

DOCTRINES IN CATEGORICAL LOGIC

HANDBOOK OF MATHEMATICAL LOGIC, NORTH HOLLAND (1977), 283-313

[136]

V.KOUBEK - J.REITERMAN

CATEGORICAL CONSTRUCTIONS OF FREE ALGEBRAS,
COLIMITS, AND COMPLETIONS OF PARTIAL ALGEBRAS

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 14 (1979), 195-231

[137]

L.KUČERA - A.PULTR

NON-ALGEBRAIC CONCRETE CATEGORIES

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 3 (1973), 95-102

[138]

C.LAIR

CONSTRUCTIONS D'ESQUISSES. TRANSFORMATIONS NATURELLES
GÉNÉRALISÉES

ESQUISSES MATHÉMATIQUES 2 (1970)

[139]

C.LAIR

FONCTEURS D'OMISSION DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XII (1971), 147-186

[140]

C.LAIR

DUALITÉS POUR LES STRUCTURES ALGÈBRIQUES ESQUISSEES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XIV (1973), 192-193

[141]

C.LAIR

DUALITÉS POUR LES STRUCTURES ALGÈBRIQUES ESQUISSEES
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XV (1974), 353-376

[142]

C.LAIR

ESQUISSABILITÉ ET TRIPLABILITÉ
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XVI (1975), 274-279

[143]

C.LAIR

FERMETURE STANDARD DES CATÉGORIES ALGÈBRIQUES II
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
VOL.XVIII (1977), 3-60

[144]

C.LAIR

CONDITION SYNTAXIQUE DE TRIPLABILITÉ
D'UN FONCTEUR ALGÈBRIQUE ESQUISSE
DIAGRAMMES VOL.1 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1979)

[145]

C.LAIR

CATÉGORIES MODELABLES ET CATÉGORIES ESQUISSABLES
DIAGRAMMES VOL.6 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1981)

[146]

C.LAIR

A PROPOS DE "TOPOSES, TRIPLES AND THEORIES"
DE MESSIEURS M.BARR ET C.WELLS

DIAGRAMMES VOL.15 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1986)

[147]

C.LAIR

CATÉGORIES QUALIFIABLES ET CATÉGORIES ESQUISSABLES

DIAGRAMMES VOL.17 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1987)

[148]

C.LAIR

DIAGRAMMES STRUCTURÉS DE MODÈLES

DIAGRAMMES VOL.18 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1987)

[149]

C.LAIR

TRAMES ET SÉMANTIQUES CATÉGORIQUES DES SYSTÈMES DE TRAMES

DIAGRAMMES VOL.18 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1987)

[150]

C.LAIR

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES PATCHWORKS (I)

DIAGRAMMES VOL.29 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1993)

[151]

J.LAMBEK

COMPLETIONS OF CATEGORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 24, SPRINGER VERLAG (1966)

[152]

F.W.LAWVERE

FUNCTORIAL SEMANTICS OF ALGEBRAIC THEORIES

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES (USA) 50 (1963), 869-872

[153]

F.W.LAWVERE

SOME ALGEBRAIC PROBLEMS IN THE CONTEXT OF

FUNCTORIAL SEMANTICS OF ALGEBRAIC THEORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 61, SPRINGER VERLAG (1968), 41-61

[154]

F.W.LAWVERE

ORDINAL SUMS AND EQUATIONAL DOCTRINES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 80, SPRINGER VERLAG (1969), 141-155

[155]

S.K.LELLAHI

CATEGORICAL ABSTRACT DATA TYPE (*CADT*)

DIAGRAMMES VOL.21 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1989)

[156]

L.LIBKIN

A REMARK ABOUT ALGEBRAICITY IN COMPLETE PARTIAL ORDERS

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 86 (1993), 75-77

[157]

F.E.J.LINTON

SOME ASPECTS OF EQUATIONAL CATEGORIES

PROCEEDINGS OF THE LA JOLLA CONFERENCE ON CATEGORICAL ALGEBRA,

SPRINGER VERLAG (1966), 84-94

[158]

F.E.J.LINTON

AN OUTLINE OF FUNCTORIAL SEMANTICS

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 80, SPRINGER VERLAG (1968), 7-52

[159]

S.MACLANE

CATEGORIES FOR THE WORKING MATHEMATICIAN

GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 5, SPRINGER VERLAG (1971)

[160]

M.MAKKAI

ON FULL EMBEDDINGS I

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 16 (1980), 183-195

[161]

M.MAKKAI

STRONG CONCEPTUAL COMPLETENESS FOR FIRST-ORDER LOGIC

ANNALS OF PURE AND APPLIED LOGIC 40 (1988), 167-215

[162]

M.MAKKAI

A THEOREM ON BARR-EXACT CATEGORIES, WITH AN INFINITARY GENERALIZATION

ANNALS OF PURE AND APPLIED LOGIC 47 (1990), 225-268

[163]

M.MAKKAI

GENERALIZED SKETCHES AS A FRAMEWORK FOR COMPLETENESS THEOREMS. PART I

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 115 (1997), 49-79

[164]

M.MAKKAI

GENERALIZED SKETCHES AS A FRAMEWORK FOR
COMPLETENESS THEOREMS. PART II

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 115 (1997), 179-192

[165]

M.MAKKAI

GENERALIZED SKETCHES AS A FRAMEWORK FOR
COMPLETENESS THEOREMS. PART III

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 115 (1997), 241-274

[166]

M.MAKKAI - R.PARÉ

ACCESSIBLE CATEGORIES: THE FOUNDATIONS OF CATEGORICAL MODEL
THEORY

CONTEMPORARY MATHEMATICS 104,
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1989)

[167]

M.MAKKAI - A.M.PITTS

SOME RESULTS ON LOCALLY FINITELY PRESENTABLE CATEGORIES
TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
VOL.299 (1987), 473-496

[168]

M.MAKKAI - G.E.REYES

FIRST ORDER CATEGORICAL LOGIC
LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 611, SPRINGER VERLAG (1977)

[169]

J.A.MAKOWSKY

VOPĚNKA'S PRINCIPLE AND COMPACT LOGICS
THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC VOL.50 (1985), 42-48

[170]

E.G.MANES

ALGEBRAIC THEORIES
GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 26, SPRINGER VERLAG (1976)

[171]

J.MARTIN - E.HYLAND - A.M.PITTS

THE THEORY OF CONSTRUCTIONS: CATEGORICAL SEMANTICS
AND TOPOS-THEORETIC MODELS

CONTEMPORARY MATHEMATICS 92,
 AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1989), 137-199
 [172]
 C.McLARTY
 LEFT EXACT LOGIC
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 41 (1986), 63-66
 [173]
 G.MICHON
 COALGÈBRE ET EXTENSION DE KAN
 COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PARIS)
 T.276, SERIE A (1973), 1091-1093
 [174]
 F.MOUCEN
 SUR LA CARACTERISATION SÉMANTIQUE DES CATÉGORIES
 DE STRUCTURES
 DIAGRAMMES VOL.11 - UNIVERSITÉ PARIS 7 (1984)
 [175]
 R.PARÉ
 CONNECTED COMPONENTS AND COLIMITS
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 3 (1973), 21-42
 [176]
 R.PARÉ
 SOME APPLICATIONS OF CATEGORICAL MODEL THEORY
 CONTEMPORARY MATHEMATICS 92,
 AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1989), 325-339
 [177]
 R.PARÉ
 SIMPLY CONNECTED LIMITS
 CANADIAN JOURNAL OF MATHEMATICS VOL.XLII (1990), 731-746
 [178]
 M.C.PEDICCHIO - W.THOLEN
 LOCALIZATIONS OF LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES
 AND EXACT TOPOLOGIES
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 64 (1990), 293-301
 [179]
 F.PIESENS - E.STEEGMANS
 PROVING SEMANTICAL EQUIVALENCE OF DATA SPECIFICATIONS

- JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 116 (1997), 291-322
 [180]
 J.ROSICKÝ
 CATEGORIES OF MODELS OF INFINITARY HORN THEORIES
 ARCHIVUM MATHEMATICUM VOL.XIV (1978), 219-226
 [181]
 J.ROSICKÝ
 CONCRETE CATEGORIES AND INFINITARY LANGUAGES
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 22 (1981), 309-339
 [182]
 J.ROSICKÝ
 SEMI-INITIAL COMPLETIONS
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 40 (1986), 177-183
 [183]
 J.ROSICKÝ
 MODELS OF HORN THEORIES REVISITED
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 92 (1994), 185-190
 [184]
 J.ROSICKÝ - V.TRNKOVÁ - J.ADÁMEK
 UNEXPECTED PROPERTIES OF LOCALLY PRESENTABLE CATEGORIES
 ALGEBRA UNIVERSALIS 27 (1990), 153-170
 [185]
 A.SCHALK
 DOMAINS ARISING AS ALGEBRAS FOR POWERSPACE CONSTRUCTIONS
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 89 (1993), 305-328
 [186]
 H.SCHUBERT
 CATEGORIES
 SPRINGER VERLAG (1972)
 [187]
 D.S.SCOTT
 DOMAINS FOR DENOTATIONAL SEMANTICS
 LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE 140,
 SPRINGER VERLAG (1982), 577-613
 [188]
 A.SOLIAN - T.M.VISWANATHAN
 PLURI-ADJOINTS AND PRESERVATION OF FINITE LIMITS

- JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 65 (1990), 69-90
 [189]
 L.SOUSA
 SOLID HULLS OF CONCRETE CATEGORIES
 APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 3 (1995), 105-118
 [190]
 R.STREET
 LIMITS INDEXED BY CATEGORY-VALUED 2-FUNCTORS
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 8 (1976), 149-181
 [191]
 R.STREET
 FIBRATIONS IN BICATEGORIES
 CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
 VOL.XXI (1980), 111-160
 [192]
 P.TAYLOR
 QUANTITATIVE DOMAINS, GRUPOIDS AND LINEAR LOGIC
 LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE 389,
 SPRINGER VERLAG (1989), 155-181
 [193]
 P.TAYLOR
 AN ALGEBRAIC APPROACH TO STABLE DOMAINS
 JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 64 (1990), 171-203
 [194]
 W.THOLEN
 MACNEILLE COMPLETION OF CONCRETE CATEGORIES WITH LOCAL
 PROPERTIES
 COMMENTARII MATHEMATICI UNIVERSITATIS SANCTI PAULI 28 (1979), 179-
 202
 [195]
 W.THOLEN
 PRO-CATEGORIES AND MULTIADJOINT FUNCTORS
 CANADIAN JOURNAL OF MATHEMATICS VOL.XXXVI (1984), 144-155
 [196]
 W.THOLEN - A.TOZZI
 COMPLETIONS OF CATEGORIES AND INITIAL COMPLETIONS
 CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

CATÉGORIQUES

VOL.XXX (1989), 127-156

[197]

V.TRNKOVÁ

ALGEBRAIC THEORIES, CLONES AND THEIR SEGMENTS

APPLIED CATEGORICAL STRUCTURES 4 (1996), 241-249

[198]

F.ULMER

PROPERTIES OF DENSE AND RELATIVE ADJOINT FUNCTORS

JOURNAL OF ALGEBRA 8 (1968), 77-95

[199]

F.ULMER

REPRESENTABLE FUNCTORS WITH VALUES IN ARBITRARY CATEGORIES

JOURNAL OF ALGEBRA 8 (1968), 96-129

[200]

F.ULMER

LOCALLY α -PRESENTABLE AND LOCALLY α -GENERATED
CATEGORIES

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 195, SPRINGER VERLAG (1971), 230-247

[201]

F.ULMER

ON THE EXISTENCE AND EXACTNESS OF THE ASSOCIATED
SHEAF FUNCTOR

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 3 (1973), 295-306

[202]

F.ULMER

ON CATEGORIES OF COCONTINUOUS FUNCTORS. APPLICATIONS
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOL.XVI (1975), 325-330

[203]

M.P.VINCENT

CONSTRUCTION EXPLICITE D'UNE COMPLÉTION INDUCTIVE LIBRE
POUR UNE CATÉGORIE QUELCONQUE

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PARIS)

T.265, SERIE A (1967), 816-819

[204]

E.M.VITALE

ON THE CHARACTERIZATION OF MONADIC CATEGORIES OVER *SET*
CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES
VOL.XXXV (1994), 351-358

[205]

E.M.VITALE

LOCALIZATIONS OF ALGEBRAIC CATEGORIES
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA 108 (1996), 315-320

[206]

H.VOLGER

PRESERVATION THEOREMS FOR LIMITS OF STRUCTURES
AND GLOBAL SECTIONS OF SHEAVES OF STRUCTURES
MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT 166 (1979), 27-54

[207]

H.WEBERPALS

ÜBER EINEN SATZ VON GABRIEL ZUR
CHARAKTERISIERUNG REGULÄRER COLIMITES
MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT 161 (1978), 47-67

[208]

H.WEBERPALS

VERTAUSCHBARKEIT VON LIMITES UND COLIMITES
MANUSCRIPTA MATHEMATICA 49 (1984), 9-26

[209]

H.WEBERPALS

VOLLSTÄNDIGKEITSEIGENSCHAFTEN FREIER COLIMES-KOMPLETTIERUNGEN
ARCHIV DER MATHEMATIK 47 (1986), 151-158

[210]

C.WELLS - M.BARR

THE FORMAL DESCRIPTION OF DATA TYPES USING SKETCHES
LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE 298,
SPRINGER VERLAG (1988), 490-527

[211]

C.WELLS

A GENERALIZATION OF THE CONCEPT OF SKETCH
THEORETICAL COMPUTER SCIENCE 70 (1990), 159-178

[212]

M.B.WISCHNEWSKY

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS RELATIVE TO

FULL AND FAITHFUL DENSE FUNCTORS

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 540, SPRINGER VERLAG (1976), 688-698