Álgebras Quase Hereditárias

Marcelo Américo Lanzilotta Mernies

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CNPq*

Álgebras Quase Hereditárias

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Marcelo Lanzilotta
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 2 de abril de 1997.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Alfredo Jones Rodriguez - IME-USP
- Prof. Dra. Sonia Elizabeth Trepode - Universidad de Mar del Plata

*Evidentemente, a mis padres Marta y Victor.
A mi tío Aldo y su inmadurable alegría.
A mi tío Juan, como despedida.*

Agradecimientos

¿ Son necesarios los agradecimientos ? - preguntó alguien.

No se -le contestaron- pero seguramente será lo más leído de la tesis.....

Comienzo recordando el incanzable apoyo de toda mi familia. Mis viejos, mi hermana, y doña Manuela. Gracias a ellos y para ellos este trabajo.

Ana, y su increíble terquedad de amor. Gracias.

A Jorge por haberme recibido con su casa abierta, por su compañía en el primer año y todo lo que implica convivir.

Por los delirantes meses del segundo semestre del '95 sólo compartible cuando se tiene tal grado de afinidad, y por la reafirmada amistad: salú Fernando !

A todos los uruguayos que sin cerrarnos formamos un grupo más que unido: Cecilia, Daniela y Marquitos, Irene, Irene, Nelson y Pablo.

Por el apoyo en esos momentos que uno más lo necesita, a toda la familia Merklen, gracias. A quienes día a día compartían goces y sinsabores, buscándonos sin importar donde estuviésemos. Cecilia, Sair, Gonzalo, ya saben de mi agradecimiento.

Si algo se gana con una experiencia de este tipo, son compañeros, amigos de andares de diferente origen y una sola nacionalidad: latinoamericanos. No puedo dejar de nombrar a Iván, Christian y Ariel.

Capítulo aparte para los “locales” quienes me demostraron tener muy bien ganada su “fama” de hospitalarios desprejuiciados. Ayumi y Lucia, por su infinita dulzura y paciencia; a Marcos y en él a toda la “comunidad” paraense; a “la Pata” por los momentos compartidos; a Liane, Claus y Fátima, Fábio, Marcelo, Marco Aurelio, y Pancho.

Finalmente, agradezco especialmente a ese trío casual responsable y espejo de mi formación. Héctor Merklen, por sus consejos; a Alfredo Jones quien me impulsó a venir y me apoyo desde Montevideo; a Flavio Coelho, excelente orientador, no sólo en el sentido académico. A los tres por su humildad.

Resumo

Este trabalho se situa na área de representações de álgebras, sendo o termo específico do mesmo o estudo de álgebras quase hereditárias. A maior parte dos resultados desta dissertação foram provados inicialmente nos artigos [HRS1], [HR] e [CS]. Também, é apresentado um pequeno resultado que classifica as álgebras de Auslander quase hereditárias. Ao longo do desenvolvimento do trabalho são utilizados fundamentalmente técnicas homológicas. Especificando, podemos dizer que se apresentam os seguintes conceitos e se prova sua equivalência: (I) **álgebra quase hereditária**, isto é uma álgebra de Artin Λ tal que (I₁) a dimensão global de Λ é menor o igual a dois; (II₂) todo módulo $M \in \text{ind}(\Lambda)$ tem dimensão projetiva ou dimensão injetiva menor o igual que um; e (II) **álgebra quase inclinada**, isto é uma álgebra de Artin Λ tal que existe uma parêlha de torção que cinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ em $\text{ind}(\Lambda)$ que verifica: (II₁) $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$, (II₂) $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. Além disto, são analisadas condições necessárias e suficientes para que uma álgebra quase hereditária seja inclinada, e também a relação entre esta teoria e a teoria de torção. No fim são colocados alguns resultados sobre as componentes da aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra quase hereditária.

Abstract

This work is within the theory of representation of algebras. It deals mainly with the class of almost hereditary algebras. Most of the results presented here were first proven in the papers [HRS1], [HR] and [CS]. Also, it is presented a result where the almost hereditary Auslander algebras were classified. The main technique used along the discussion is homological. Specifically, the following concepts were presented and proven to be equivalent: (I) **almost hereditary algebra**, that is an Artin algebra Λ with (I₁) $dgl(\Lambda) \leq 2$; (II₂) if M is in $\text{ind}(\Lambda)$, then $dp(X) \leq 1$ or $di(X) \leq 1$; and (II) **quasitilted algebra**, that is an Artin algebra Λ with a split torsion pair $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ such that: (II₁) $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$, (II₂) $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. Moreover, we studied necessary and sufficient conditions for an almost hereditary algebra to be tilted and also the relationship between this theory with the torsion theories. Finally, we present some results on the components of the Auslander-Reiten quiver of an almost hereditary algebras.

Sumário

INTRODUÇÃO	2
1 CONCEITOS BÁSICOS DAS ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.	7
1.1 Definições, Exemplos, e Lemas gerais.	7
1.2 Propriedades básicas e Exemplos.	14
2 CONCEITOS EQUIVALENTES AO DE ÁLGEBRA QUASE HEREDITÁRIA.	24
2.1 Condições equivalentes.	24
2.2 Equivalência com os conceitos de álgebra quase inclinada, e de álgebra quase co-inclinada.	31
3 RELAÇÃO COM AS ÁLGEBRAS INCLINADAS.	35
3.1 Preliminares.	35
3.2 Relação com as álgebras inclinadas.	37
4 PARELHAS DE TORÇÃO E SUBCATEGORIAS SEPARANTES.	47
4.1 Sobre pares de torção nas álgebras quase inclinadas.	47
4.2 Sobre subcategorias separantes em álgebras quase hereditárias.	53
5 CONSTRUÇÃO DE ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.	57
5.1 Construção de álgebras quase hereditárias.	57
6 COMPONENTES DE AUSLANDER-REITEN DAS ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.	61
6.1 Preliminares.	61

6.2	Componentes com ciclos orientados.	64
6.3	Componentes regulares.	66
6.4	Componentes não regulares.	69
7	ÁLGEBRAS DE AUSLANDER QUASE HEREDITÁRIAS.	72
7.1	Preliminares.	72
7.2	Classificação das álgebras de Auslander quase hereditárias.	74
	APÊNDICE	87
	Refêrencias Bibliográficas	97

Notações

Λ	Álgebra de Artin, salvo menção encontrada.
$\Lambda(A)$	Álgebra de Auslander associada à álgebra de Artin de tipo de representação finito A .
Λ^{op}	Álgebra oposta.
$\text{mod } \Lambda$	Categoria dos Λ -módulos finitamente gerados à direita.
$\text{ind}(\Lambda)$	Categoria dos Λ -módulos indecomponíveis finitamente gerados à direita.
$K_0(\Lambda)$	Grupo de Grothendieck da álgebra Λ .
$\text{add}(M)$	Família dos módulos soma direta dos somandos do módulo M .
Δ	Aljava ordinária.
Γ_Λ	Aljava de Auslander-Reiten da álgebra Λ .
DTr	Translação de Auslander-Reiten na aljava Γ_Λ .
TrD	Translação inversa de Auslander-Reiten na aljava Γ_Λ .
$\mathcal{O}(M)$	DTr -órbita do módulo M na aljava Γ_Λ .
${}_r\Gamma$	Parte DTr -estável à direita da aljava Γ_Λ .
${}_l\Gamma$	Parte DTr -estável à esquerda da aljava Γ_Λ .
${}_s\Gamma$	Parte DTr -estável da aljava Γ_Λ .
$\text{comp}(\mathcal{M})$	Componente conexa da aljava de Auslander-Reiten que contém os módulos da família $\mathcal{M}$.
$dgl(\Lambda)$	Dimensão global da álgebra Λ .
$dp(M)$	Dimensão projetiva do módulo M .
$di(M)$	Dimensão injetiva do módulo M .
$\dim.\text{dom}(M)$	Dimensão dominante do módulo M .
$\ell(M)$	Comprimento do módulo M .
$r(M)$	Radical do módulo M .
$\text{soc}(M)$	"Socle" do módulo M .
$\text{Ann}(M)$	Anulador do módulo M .
$\text{Gen}(M) = \text{Fac}(M)$	Categoria dos módulos gerados pelo módulo M .
$\text{Cogen}(M) = \text{Sub}(M)$	Categoria dos módulos co-gerados pelo módulo M .
$S(P)$	Simples associado ao projetivo indecomponível P .
S_i	Módulo simples associado ao vértice i da aljava ordinária.

- $M \mid N$ O módulo M é somando direto do módulo N .
- $\mathcal{L}$ Definido na Introdução e na segunda seção do primeiro capítulo.
- $\mathcal{R}$ Definido na Introdução e na segunda seção do primeiro capítulo.
- $\hat{\mathcal{L}}$ $\text{add}(\mathcal{L})$.
- $\hat{\mathcal{R}}$ $\text{add}(\mathcal{R})$.
- $\mathcal{S}$ Fatia completa.
- $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ Espaço de Λ -morfismos desde o Λ -módulo M para o Λ -módulo N .
- $\underline{\text{Hom}}_\Lambda(M, N)$ Quociente do espaço $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ pelo espaço dos morfismos que se fatoram através de um projetivo.
- $\overline{\text{Hom}}_\Lambda(M, N)$ Quociente do espaço $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ pelo espaço dos morfismos que se fatoram através de um injetivo.
- $\text{rad}(\text{mod } \Lambda)$ Radical de Jacobson de $\text{mod } \Lambda$.
- $\text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$ Intersecção das potências $\text{rad}^i(\text{mod } \Lambda)$, $i \geq 1$.
- $M \rightarrow N$ Morfismo desde o módulo M para o módulo N .
- $M \xrightarrow{\text{irr}} N$ Morfismo irreduzível desde o módulo M para o módulo N .
- $M \dashrightarrow N$ Morfismo irreduzível de M para N ou de N para M .
- $M \rightsquigarrow N$ Caminho de morfismos do módulo M para o módulo N .
- $M \overset{\mathcal{D}}{\rightsquigarrow} N$ Caminho de morfismos do módulo M até o módulo N , dentro da subcategoria $\mathcal{D}$.
- $M \not\overset{\mathcal{D}}{\rightsquigarrow} N$ Não existe um caminho de morfismos do módulo M até o módulo N , dentro da subcategoria $\mathcal{D}$.
- $M \rightsquigarrow N$ Passeio entre o módulo M e o módulo N de morfismos irreduzíveis.
- $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ Parelha de torção.
- $\curvearrowright$ Diagrama comutativo.

INTRODUÇÃO

Vamos nos ocupar neste trabalho das chamadas álgebras quase hereditárias e das álgebras quase inclinadas. Forma parte deste trabalho provar a equivalência dessas duas definições, que portanto determinam um mesmo conceito. Porém começamos a introdução fazendo um resumo da teoria das álgebras hereditárias, e das álgebras inclinadas. Ambas ficarão incluídas dentro da classe das álgebras quase hereditárias.

Álgebras Hereditárias.

Dentro da teoria de representações de álgebras, as álgebras hereditárias (aquelas em que todo submódulo de um projetivo é projetivo) ocupam um papel preponderante. Já sabemos que uma álgebra indecomponível hereditária de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, é isomorfa a uma álgebra de caminhos $k\Gamma$, onde Γ é uma aljava sem ciclos orientados, e conexo.

P. Gabriel no teorema que leva seu nome caracteriza as álgebras hereditárias de tipo de representação finito:

Teorema de Gabriel:

$k\Gamma$ é de tipo de representação finito $\Leftrightarrow |\Gamma|$ é um diagrama de Dynkin: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

Esta classificação foi o tema da nossa Monografia final da graduação universitária.

Temos também, segundo um teorema de Y. Drozd, que as álgebras de tipo de representação infinito podem ser classificadas em: $*_1$ mansas; $*_2$ selvagens ou intratáveis; e nenhuma álgebra pode ser de ambos tipos ao mesmo tempo.

O seguinte conhecido resultado determina quando uma álgebra hereditária de tipo infinito

é mansa a partir de sua aljava associado:

$k\Gamma$ é de tipo manso $\Leftrightarrow |\Gamma|$ é um diagrama de Dynkin estendido: $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$.

Portanto $k\Gamma$ é de tipo intratável $\Leftrightarrow |\Gamma|$ não é Dynkin nem Dynkin estendido.

Desde o ponto de vista das componentes no aljava de Auslander-Reiten, de uma álgebra hereditária, temos o seguinte panorama:

- ★₁ Se $k\Gamma$ é de tipo finito, então existe uma única componente na aljava de Auslander-Reiten, que é pós-projetiva e pré-injetiva.
- ★₂ Se $k\Gamma$ é de tipo infinito, então existe uma única componente pós-projetiva que contém todos os módulos projetivos indecomponíveis, e existe uma única componente pré-injetiva que contém todos os módulos injetivos indecomponíveis. No caso em que $k\Gamma$ é de tipo infinito manso, as componentes restantes, que são infinitas e recebem o nome de regulares, são tubos. Ou seja, têm a forma $\frac{\mathbb{Z}A_\infty}{(DT, r^n)}$ com $n \geq 1$. Quando temos que $n = 1$ diremos que o tubo é homogêneo, e verifica-se que $n > 1$ só para um número finito de casos. Se nossa álgebra $k\Gamma$ é selvagem, as componentes regulares têm a forma $\mathbb{Z}A_\infty$. Assim para $k\Gamma$ de tipo infinito, temos o seguinte esquema:

Logo, como as álgebras hereditárias são bem conhecidas, é uma boa idéia investigar álgebras construídas a partir das hereditárias. Por exemplo, considerar extensões por um ponto das hereditárias através de um módulo M , com condições especiais sobre o módulo. Esse é um dos possíveis pontos de vista para se trabalhar também com as álgebras quase hereditárias.

No sentido homológico, as álgebras hereditárias são as mais simples depois das álgebras semisimples, dado que $dgl(H) \leq 1$ se H é uma álgebra hereditária, e $dgl(S) = 0$.

se S é uma álgebra semisimples. Desde este ponto de vista, o próximo nível de estudo são aquelas álgebras com dimensão global menor ou igual a dois. Ainda que essa condição não caracteriza as álgebras quase hereditárias, ela é propriedade da teoria.

Álgebras Inclinadas.

A teoria dos módulos inclinantes proporciona um campo fértil de trabalho e oferece uma ampla gama de resultados para aproveitar. Se T é um módulo inclinante sobre uma álgebra hereditária H então a álgebra de endomorfismos do módulo T leva o nome de álgebra inclinada.

A teoria dos módulos inclinantes está intimamente relacionada com a teoria de torção. Acontece que Λ vai ser uma álgebra inclinada se e só se existe em $\text{mod } \Lambda$ uma parêlha de torção que cinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que verifica: $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$; $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$; e $\mathcal{Y} = \text{Cogen}(V)$, com $V \in \text{mod } \Lambda$ (Apêndice). Pode ser uma boa idéia tirar alguma das condições anteriores e tentar trabalhar com as álgebras que verifiquem as restantes. Por exemplo, tirar a condição de “finitude” da subcategoria $\mathcal{Y}$. Esse vai ser o caminho escolhido para definir o conceito de álgebra quase inclinada.

Por outro lado, no sentido homológico as álgebras inclinadas verificam ter dimensão global menor ou igual a dois, e que todos seus módulos indecomponíveis têm dimensão injetiva ou dimensão projetiva menor ou igual a um. Portanto podemos apreciar a cercania homológica com as álgebras hereditárias. Essa condição vai definir no nosso trabalho o conceito de álgebra quase hereditária, que como já foi mencionado é equivalente ao de álgebra quase inclinada.

Os trabalhos sobre o tema publicados até hoje são [HRS1], [HRS2], [CS], [HR], e [CH]. Os primeiros cinco capítulos estão baseados essencialmente nos artigos [HRS1] e [HR] enquanto que o sexto capítulo se ocupa do artigo [CS].

No capítulo primeiro, na primeira seção, definimos as álgebras quase hereditárias.

Assim uma álgebra de Artin Λ é quase hereditária se: (1). $dgl(\Lambda) \leq 2$; (2). para todo módulo $M \in \text{ind}(\Lambda)$ verifica-se que $dp(M) \leq 1$ ou $di(M) \leq 2$. Mostramos com dois exemplos a independência das condições da definição. Provamos também alguns lemas gerais, dos quais faremos uso em resultados posteriores. Na segunda seção definem-se as subcategorias:

$$\mathcal{L} = \{ X \in \text{ind}(\Lambda) / \forall Y \text{ predecessor de } X, \text{ temos que } dp(Y) \leq 1 \},$$

$$\text{e } \mathcal{R} = \{ X \in \text{ind}(\Lambda) / \forall Y \text{ sucessor de } X, \text{ temos que } di(Y) \leq 1 \}.$$

Estas subcategorias ocupam um papel principal na teoria. Na continuação, na seção, desenvolvemos algumas das propriedades básicas da teoria de álgebras quase hereditárias, a partir das quais conseguimos mostrar que $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$, determinam uma trisecção de $\text{ind}(\Lambda)$. Já no final do capítulo colocamos variados exemplos.

No capítulo segundo, na primeira seção, estudam-se condições equivalentes àquelas que definem o conceito de álgebra quase hereditária. Veremos que são equivalentes:

1. A álgebra de Artin Λ é quase hereditária;
2. A subcategoria $\mathcal{L}_\Lambda$ contém todos os módulos projetivos;
3. A subcategoria $\mathcal{R}_\Lambda$ contém todos os módulos injetivos;
4. Todo caminho em $\text{ind}(\Lambda)$ começando num módulo injetivo e finalizando num módulo projetivo, tem um refinamento de morfismos irredutíveis, e qualquer que seja o refinamento, ele é seccional.

Na segunda seção aproveitamos para definir a seguinte noção: uma álgebra de Artin é quase inclinada, se existe uma parêlha de torção que cinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ em $\text{ind}(\Lambda)$ que verifica: (1). $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$, (2). $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. Prova-se a equivalência entre a noção de álgebra quase inclinada e a noção de álgebra quase hereditária.

No terceiro capítulo, logo depois de uma seção de preliminares sobre álgebras inclinadas, analisamos condições a serem verificadas pela categoria dos módulos de uma álgebra quase hereditária (ou quase inclinada), para que ela seja inclinada. Mostram-se as seguintes equivalências:

1. A álgebra quase hereditária Λ é inclinada;
2. $\mathcal{R}_\Lambda$ contém um módulo projetivo;
3. $\mathcal{L}_\Lambda$ contém um módulo injetivo.

Já no quarto capítulo, vamos nos ocupar dos conceitos de pares de torção na primeira seção, e de subcategoria separante na segunda seção, para álgebras quase inclinadas. Provamos alguns resultados que relacionam as classes de uma par de torção com as subcategorias $\mathcal{L}_\Lambda$ e $\mathcal{R}_\Lambda$ de uma álgebra quase inclinada.

O capítulo quinto contém dois teoremas que trabalham sobre a construção de álgebras quase hereditárias. O primeiro mostra como construir uma álgebra quase hereditária sobre um corpo algebricamente fechado, como uma extensão de uma álgebra hereditária. No segundo mostra-se que a álgebra de endomorfismos de um módulo projetivo sobre uma álgebra quase hereditária é uma álgebra quase hereditária.

No sexto capítulo ocupamos-nos do artigo [CS]. Mostram-se resultados acerca das componentes da aljava de Auslander-Reiten, de uma álgebra quase inclinada, variando as hipóteses iniciais sobre as componentes.

Reservamos o sétimo capítulo para demonstrar um pequeno resultado que caracteriza as aljavas associadas a uma álgebra de Auslander quase hereditária. Começamos fazendo um resumo de alguns dos resultados na teoria de álgebras de Auslander, para depois imbuirnos dentro do problema mesmo.

Finalmente, no apêndice, mostramos aqueles resultados da teoria de representações dos quais fazemos uso, que por diferentes razões achamos mais perto das idéias envolvidas no trabalho.

Capítulo 1

CONCEITOS BÁSICOS DAS ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.

1.1 Definições, Exemplos, e Lemas gerais.

Definição 1.1.1

Uma álgebra de Artin Λ é chamada de **quase hereditária** se satisfaz:

1. $dgl(\Lambda) \leq 2$.
2. Para todo módulo $X \in ind(\Lambda)$, então $dp(X) \leq 1$ ou $di(X) \leq 1$.

Como foi mencionado na introdução, dentro da classe das álgebras quase hereditárias encontramos as álgebras hereditárias e também as álgebras inclinadas.

Mostraremos com dois exemplos que as condições (1) e (2) da definição são independentes.

Exemplo 1.1.1

Consideramos $\Lambda = \frac{k\Delta}{I}$, com $\Delta : \overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\beta} \overset{3}{\bullet} \xrightarrow{\gamma} \overset{4}{\bullet}$ onde $I = \langle \beta.\alpha, \gamma.\beta \rangle$.

Os projetivos e seus radicais, e os injetivos são:

$$\begin{cases} P_1 = 1100; & r(P_1) = S_2; & I_1 = S_1 \\ P_2 = 0110; & r(P_2) = S_3; & I_2 = P_1 \\ P_3 = 0011; & r(P_3) = S_4; & I_3 = P_2 \\ P_4 = 0001; & r(P_4) = 0; & I_4 = P_3 \end{cases}$$

Assim obtemos Γ_Λ :

Portanto $dp(S_3) = 1$; $dp(S_2) = 2$ mas $di(S_2) = 1$; e $dp(S_1) = 3$, mas $di(S_1) = 0$.

Então, todo módulo $X \in \text{ind}(\Lambda)$ tem $dp(X) \leq 1$ ou $di(X) \leq 1$; e também verifica-se que $dgl(\Lambda) = 3$.

Assim a condição (2) da definição não implica a condição (1). ■

Exemplo 1.1.2

Consideramos $\Lambda = \frac{k\Delta}{I}$ com

$$\Delta: \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ \bullet & \xleftarrow{\beta} & \bullet \end{array} \quad \text{sendo } I = \langle \beta.\alpha \rangle$$

Os projetivos e os injetivos são:

$$P_1: \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ \bullet & \xleftarrow{0} & \bullet \end{array} \quad I_1: \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{0} & k \\ \bullet & \xleftarrow{1} & \bullet \end{array}$$

$$P_2: \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{(1,0)^t} & k^2 \\ \bullet & \xleftarrow{(0,1)} & \bullet \end{array} \quad I_2 = P_2$$

Portanto os radicais são: $r(P_1) = S_2$, e $r(P_2) = P_1$.

Assim obtemos Γ_Λ :

Calculamos as dimensões projetivas:

Evidentemente $dp(P_1) = dp(P_2) = 0$.

$dp(S_2) = 1$ pois temos $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow S_2 \rightarrow 0$.

$dp(S_1) = 2$ pois temos $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow S_1 \rightarrow 0$.

$dp(I_1) = 2$ pois temos $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_2 \rightarrow I_1 \rightarrow 0$.

Logo concluímos que $dgl(\Lambda) = 2$.

Por outro lado verifica-se que $di(S_1) = 2$ pois temos $0 \rightarrow S_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow 0$.

Concluimos que $dp(S_1) = di(S_1) = 2$, e portanto a condição (1) da definição não implica a condição (2). ■

Ainda que as condições (1) e (2) da definição sejam independentes, temos a seguinte proposição homológica.

Proposição 1.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin tal que para cada $X \in \text{mod } \Lambda$, temos: $dp(X) \leq 1$ ou $di(X) \leq 1$. Então $dgl(\Lambda) \leq 3$.

Demonstração:

Seja $M \in \text{mod } \Lambda$, e considero a sequência $0 \rightarrow N \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$, que é o começo de uma resolução projetiva minimal de M .

Afirmção: Para todo módulo X somando direto de N , temos que $\text{Ext}_\Lambda^2(M, X) \neq 0$, e portanto $di(X) \geq 2$.

Consideramos a s.e.c. $0 \rightarrow \ker(\pi) \rightarrow P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$, e “aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, X)$ ”.

Obtemos assim:

$$0 = \text{Ext}_\Lambda^1(P_0, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(\ker(\pi), X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(M, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(P_0, X) = 0,$$

e portanto $\text{Ext}_\Lambda^1(\ker(\pi), X) \cong \text{Ext}_\Lambda^2(M, X)$.

Mas $0 \rightarrow N \rightarrow P_1 \rightarrow \ker(\pi) \rightarrow 0$ é uma sequência exata onde $P_1 \rightarrow \ker(\pi)$ é a cobertura projetiva minimal. Então, para todo módulo X somando direto de N temos que $\text{Ext}_\Lambda^1(\ker(\pi), X) \neq 0$.

Logo, se $di(X) \geq 2$, temos que $dp(X) \leq 1$. Então $dp(M) \leq 3$, para todo $M \in \text{mod } \Lambda$. Isto implica que $dgl(\Lambda) \leq 3$. ■

Os próximos dois lemas técnicos são de caráter geral e serão necessários nas demonstrações dos resultados posteriores.

Lema 1.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin com $dgl(\Lambda) = n$.

1. Se consideramos a subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ dos módulos com dimensão projetiva menor ou igual a $n - 1$, ela é fechada para extensões e submódulos.
2. Se consideramos a subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ dos módulos com dimensão injetiva menor ou igual a $n - 1$, ela é fechada para extensões e quocientes.

Demonstração:

1. Seja $M \in \text{mod } \Lambda$ tal que $dp(M) \leq n - 1$, e seja $N \subset M$. Logo consideramos a sequência $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow \frac{M}{N} \rightarrow 0$.

“Aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, X)$ ” à sequência anterior, e obtemos:

$$\text{Ext}_\Lambda^n(\frac{M}{N}, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^n(M, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^n(N, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n+1}(\frac{M}{N}, X).$$

Mas $\text{Ext}_\Lambda^{n+1}(\frac{M}{N}, X) = 0$, pois a $dgl(\Lambda) = n$, e $\text{Ext}_\Lambda^n(M, X) = 0$, pois $dp(M) \leq n - 1$.

Então $\text{Ext}_\Lambda^n(N, X) = 0$, $\forall X \in \text{mod } \Lambda$. Isto implica que $dp(N) \leq n - 1$.

Suponhamos agora que temos uma sequência $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 0$, com $dp(L_1) \leq m$ e $dp(L_3) \leq m$ onde $m \leq n - 1$. “Aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, X)$ ” e obtemos:

$$0 = \text{Ext}_\Lambda^{m+1}(L_3, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{m+1}(L_2, X) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{m+1}(L_1, X) = 0,$$

pois $dp(L_1) \leq m$ e $dp(L_3) \leq m$.

Então $\text{Ext}_\Lambda^{m+1}(L_2, X) = 0$, $\forall X \in \text{mod } \Lambda$, e portanto $dp(L_2) \leq m$.

Em particular, obtemos o resultado para $m = n - 1$.

2. Demonstração análoga. ■

Lema 1.1.2

Seja Λ um anel e $\tilde{f} \in \text{Hom}_\Lambda(M, N)$, não epimorfismo nem monomorfismo.

Escrevemos $\tilde{f} = g \circ f$, onde $f : M \rightarrow \text{Im}(\tilde{f})$ é dado por $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in M$; e $g : \text{Im}(\tilde{f}) \rightarrow N$ é a inclusão natural.

Então são equivalentes:

1. Existe $X \in \text{mod } \Lambda$ e $f' : M \rightarrow X$; $g' : X \rightarrow N$, tais que:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{(f,f')^t} \text{Im}(\tilde{f}) \oplus X \xrightarrow{(g,g')} N \rightarrow 0 \text{ é exata.}$$

2. A sequência exata $0 \rightarrow \ker(\tilde{f}) \rightarrow M \xrightarrow{\tilde{f}} N \rightarrow \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0$ é nula em $\text{Ext}_{\Lambda}^2(\text{coker}(\tilde{f}), \ker(\tilde{f}))$.

Demonstração:

Consideramos $\delta : 0 \rightarrow \ker(\tilde{f}) \rightarrow M \xrightarrow{f} \text{Im}(\tilde{f}) \rightarrow 0$ e “aplicamos o funtor $\text{Hom}_{\Lambda}(\text{coker}(\tilde{f}), -)$ ” para obter:

$$\text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{coker}(\tilde{f}), M) \xrightarrow{1(\text{coker}(\tilde{f}), f)} \text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{coker}(\tilde{f}), \text{Im}(\tilde{f})) \xrightarrow{\delta_*} \text{Ext}_{\Lambda}^2(\text{coker}(\tilde{f}), \ker(\tilde{f})),$$

onde δ_* é o morfismo de conexão.

Consideramos $\varepsilon : 0 \rightarrow \text{Im}(\tilde{f}) \xrightarrow{g} N \rightarrow \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0$ em $\text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{coker}(\tilde{f}), \text{Im}(\tilde{f}))$.

Então $\delta_*(\varepsilon) = \delta \circ \varepsilon \in \text{Ext}_{\Lambda}^2(\text{coker}(\tilde{f}), \ker(\tilde{f}))$ é representado por:

$$0 \rightarrow \ker(\tilde{f}) \rightarrow M \xrightarrow{g \circ f} N \rightarrow \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0.$$

Então verifica-se $(2) \Leftrightarrow \delta_*(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \in \text{Im}(1(\text{coker}(\tilde{f}), f)) \Leftrightarrow \varepsilon = f \circ \zeta$ com $\zeta \in \text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{coker}(\tilde{f}), M)$.

Afirmção:

$\varepsilon = f \circ \zeta$ com $\zeta \in \text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{coker}(\tilde{f}), M) \iff (\clubsuit)$ existem $X \in \text{mod } \Lambda$, $f' : M \rightarrow X$, e $g'' : X \rightarrow N$, tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & \ker(\tilde{f}) & \xrightarrow{1} & \ker(\tilde{f}) & & & \\ & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f'_{/\ker(\tilde{f})} & & & \\ 0 \rightarrow & M & \xrightarrow{f'} & X & \rightarrow & \text{coker}(\tilde{f}) & \rightarrow 0 \\ & f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g'' & \curvearrowright & \parallel 1 & \\ 0 \rightarrow & \text{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & \text{coker}(\tilde{f}) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

($\Rightarrow$)

No começo temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \ker(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \ker(\tilde{f}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \zeta: 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{f'} & X & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
 & & f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g'' & \curvearrowright & \parallel 1 \\
 \varepsilon: 0 & \rightarrow & \operatorname{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Isto é válido pois $\varepsilon = f \circ \zeta$ (ou seja ε é o pushout de ζ com respeito a f). Mas, pelas propriedades do push-out, comprova-se a exatidão da sequência da segunda coluna.

($\Leftarrow$)

Da existência do diagrama, concluímos que a sequência ε é equivalente ao push-out de ζ com respeito a f .

Afirmção: A situação ($\clubsuit$) é equivalente a:

Existe um módulo X e morfismos $M \xrightarrow{f'} X \xrightarrow{g''} N$, tais que $0 \rightarrow M \xrightarrow{(f, f')^t} \operatorname{Im}(\tilde{f}) \oplus X \xrightarrow{(g, -g'')} N \rightarrow 0$ é exata.

($\Rightarrow$)

Pela comutatividade do diagrama temos que $g \circ f - g'' \circ f' = 0$ e portanto

$\ker(g, g'') \supset \operatorname{Im}(f, f')^t$. Agora $(y, x) \in \ker(g, -g'') \Rightarrow g(y) = g''(x)$.

Seja $m \in M / f(m) = y$. Então $(g, -g'') \circ (f, f')^t(m) = 0$ e portanto $g''(f'(m)) = g(f(m)) = g(y) = g''(x)$. Assim $\xi = f'(m) - x \in \ker(g'')$.

Portanto $(y, x) \in \ker(g, -g'')$, $(0, \xi) \in \ker(g, -g'')$ e $(y, x + \xi) = (f, f')(m)$. Mas $g''(\xi) = 0$ implica $\xi = f'(p)$, com $p \in \ker(\tilde{f})$ e por isso $f(p) = 0$. Assim $(0, \xi) = (f, f')(p)$.

Então $(y, x) = (f, f')(m - p)$ e portanto $(y, x) \in \operatorname{Im}((f, f')^t)$. Logo a exatidão da sequência fica provada.

($\Leftarrow$)

Pela hipótese, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{f'} & X & & \text{coker}(\tilde{f}) \\
 f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g'' & & \parallel 1 \\
 0 \rightarrow \text{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Se $f'(m) = 0$ e $(f, f')^t(m) \neq 0$, então $f(m) \neq 0$. Logo $g(f(m)) = f(m) \neq 0$, e por outro lado $g''(f'(m)) = 0$, o que é uma contradição pela comutatividade do diagrama. Concluimos que $f'(m) = 0$ implica $(f, f')^t(m) = 0$ e portanto $m = 0$. Então f' é injetora.

Assim nosso diagrama ficaria:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow M & \xrightarrow{f'} & X & & \text{coker}(\tilde{f}) \\
 f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g'' & & \parallel 1 \\
 0 \rightarrow \text{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{pr} & \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Considero $h : X \rightarrow \text{coker}(\tilde{f})$ dado por $h(x) = pr(g''(x))$. Assim $h \circ f'(m) = pr \circ g'' \circ f'(m) = pr \circ g \circ f(m) = 0$.

Por outro lado se $pr \circ g''(x) = h(x) = 0$ então $g''(x) \in \text{Im}(g)$. Logo $g''(x) = g(f(m))$ e portanto $(g, -g'')(f(m), x) = 0$ o que implica que existe $t \in M$ / $(f(m), x) = (f, f')(t)$. Então $f'(t) = x$. Resumindo, se $x \in X$ / $h(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Im}(f')$. Logo, já temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow M & \xrightarrow{f'} & X & \xrightarrow{h} & \text{coker}(\tilde{f}) \\
 f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g'' & \curvearrowright & \parallel 1 \\
 0 \rightarrow \text{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{pr} & \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Agora, dado $n \in N$, existem $m \in M$, e $x \in X$ / $(g, -g'')(f(m), x) = n$ ou seja $n = g(f(m)) - g''(x) = g''(f'(m)) - g''(x) = g''(f'(m) - x)$. Concluimos que $n \in \text{Im}(g'')$ e portanto g'' é sobrejetora. O diagrama acima fica então:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \ker(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \ker(\tilde{f}) & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{f'} & X & \rightarrow & \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
& & f \downarrow & \wr & \downarrow g'' & \wr & \parallel 1 \\
0 & \rightarrow & \text{Im}(\tilde{f}) & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & \text{coker}(\tilde{f}) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Mas se consideramos $f'_{/\ker \tilde{f}} : \ker(\tilde{f}) \rightarrow X$, ela faz que $0 \rightarrow \ker(\tilde{f}) \xrightarrow{f'_{/\ker \tilde{f}}} X \xrightarrow{g''} N \rightarrow 0$ seja exata e o resultado está provado. ■

1.2 Propriedades básicas e Exemplos.

Lema 1.2.1

Seja Λ uma álgebra quase hereditária, $X, Y \in \text{ind}(\Lambda)$ tais que $dp(X) = 2$ e $di(Y) = 2$.

Então $\text{Hom}_{\Lambda}(X, Y) = 0$.

Demonstração:

Suponhamos que $dp(X) = 2$, $di(Y) = 2$ e $\text{Hom}_{\Lambda}(X, Y) \neq 0$. Escolhamos aquela parêlha de módulos (X, Y) indecomponíveis, que verifiquem as condições anteriores e tais que $\ell(X) + \ell(Y)$ seja mínimo. Seja $0 \neq f \in \text{Hom}_{\Lambda}(X, Y)$. Como $di(Y) = 2$ então $dp(Y) \leq 1$. Também $dgl(\Lambda) = 2$ e portanto $dp(Y') \leq 1$, $\forall Y' \hookrightarrow Y$. Então $dp(\text{Im}(f)) \leq 1$ e tínhamos que $dp(X) = 2$, o que implica que f não pode ser um monomorfismo.

Analogamente pode-se provar que f não é um epimorfismo. Consideramos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{coker}(f) \rightarrow 0$$

Afirmção: $\ker(f)$ é indecomponível com $dp(\ker(f)) = 2$, e portanto $di(\ker(f)) \leq 1$.

Consideramos: $0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow X \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow 0$. Se fosse $dp(\ker(f)) \leq 1$, como $dp(\text{Im}(f)) \leq 1$, teríamos que $dp(X) \leq 1$ o que é uma contradição. Então, por ser Λ

quase hereditária, temos que $dp(\ker(f)) = 2$.

Seja N um somando indecomponível de $\ker(f)$ com dimensão projetiva 2, e considero o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker(f) & \xrightarrow{\iota} & X & \rightarrow & \operatorname{Im}(f) \rightarrow 0 \\ & & pr \downarrow & \wr & \downarrow \lambda & \wr & \parallel 1 \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & X' & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Im}(f) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Observe que a função pr não fatora através de X pois se fatorasse, obteríamos:

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) & \xrightarrow{\iota} & X \\ i \uparrow & \wr & \downarrow \lambda \\ N & \xrightarrow{\xi} & X' \end{array}$$

Logo teríamos que $1 = pr \circ i = \xi \circ \iota \circ i : N \rightarrow N$, e portanto $N \mid X$. Mas como X é indecomponível segue que $N \cong X$ e logo $f = 0$. Mas isso é uma contradição. Assim pr não fatora através de X , e portanto a sequência $(\bowtie) 0 \rightarrow N \rightarrow X' \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}(f) \rightarrow 0$ não cinde.

Afirmção: $(\star) \forall X'' \mid X' \operatorname{Hom}_{\Lambda}(X'', \operatorname{Im}(f)) \neq 0$.

Se $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(X'', \operatorname{Im}(f)) = 0$ teríamos que $X'' \subset \ker(\alpha) \cong N$. Mas $\ker(\alpha) \hookrightarrow X'$ e $X'' \mid X'$ então $X'' \mid N$. Como N é indecomponível seguiria $X'' \cong N$, e portanto $(\bowtie)$ cindiria, o que é uma contradição.

A $dp(X') = 2$, pois se fosse $dp(X') \leq 1 \Rightarrow dp(N) \leq 1$, contrariamente ao escolhido. Assim existe $X'' \mid X'$ com X'' indecomponível, tal que $dp(X'') = 2$. Em consequência obtemos $0 \neq f'' : X'' \rightarrow \operatorname{Im}(f) \hookrightarrow Y$, com $\ell(X'') + \ell(Y) \leq \ell(X') + \ell(Y)$, e se lembramos de: $X \xrightarrow{\lambda} X' \rightarrow 0$, temos que $\ell(X') + \ell(Y) \leq \ell(X) + \ell(Y)$. Logo pela hipótese da minimalidade, temos $\ell(X) = \ell(X'') = \ell(X')$ e portanto $X \xrightarrow{\lambda} X' \rightarrow 0$ seria um isomorfismo. Em consequência concluiríamos que $pr : \ker(f) \rightarrow N$ é isomorfismo. Então $dp(\ker(f)) = 2$ e $\ker(f)$ é indecomponível, e portanto $di(\ker(f)) \leq 1$.

Logo, se $di(\ker(f)) \leq 1$, temos que $\operatorname{Ext}_{\Lambda}^2(-, \ker(f)) = 0$ e portanto seria nula a sequência

$$0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \operatorname{coker}(f) \rightarrow 0.$$

Em consequência pelo Lema 1.1.2. existem $Z \in \text{mod } \Lambda$, $f' : X \rightarrow Z$ e $g' : Z \rightarrow Y$ tais que

$$\xi : 0 \rightarrow X \xrightarrow{(f, f')^t} \text{Im}(f) \oplus Z \xrightarrow{(i, -g')} Y \rightarrow 0$$

é exata. Mas $dp(X) = 2$, $dp(\text{Im}(f)) \leq 1$ e temos o monomorfismo $0 \rightarrow X \xrightarrow{(f, f')^t} \text{Im}(f) \oplus Z$, então, segundo o Lema 1.1.1, $dp(Z) = 2$.

Pelo mesmo Lema 1.1.1, considerando o epimorfismo $X \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow 0$ concluímos que $di(\text{Im}(f)) \leq 1$ pois $di(X) \leq 1$. Analogamente como $di(Y) = 2$ e considerando o epimorfismo $\text{Im}(f) \oplus Z \xrightarrow{(i, -g')} Y \rightarrow 0$, podemos concluir que $di(Z) = 2$. Então $Z = Z' \oplus Z'' \oplus Z'''$ com $dp(Z') = 2$, $di(Z'') = 2$, $Z', Z'' \in \text{ind}(\Lambda)$. Mas da sequência:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{(f, f')^t} \text{Im}(f) \oplus Z \xrightarrow{(i, -g')} Y \rightarrow 0$$

pode se concluir que $\ell(Z') + \ell(Z'') < \ell(X) + \ell(Y)$, pois $\text{Im}(f) \neq 0$. Então $\ell(Z') < \ell(X)$ ou $\ell(Z'') < \ell(Y)$, e logo $\ell(Z') + \ell(Y) < \ell(X) + \ell(Y)$ ou $\ell(X) + \ell(Z'') < \ell(X) + \ell(Y)$. Suponhamos que $\ell(Z') + \ell(Y) < \ell(X) + \ell(Y)$.

Afirmção: $\text{Hom}_\Lambda(Z', Y) \neq 0$.

($\odot$) Se $\text{Hom}_\Lambda(Z', Y) = 0$ teríamos que $Z' \subset \ker((i, -g')) \cong X$. Mas $\ker((i, -g')) \hookrightarrow \text{Im}(f) \oplus Z$ e $Z' \mid \text{Im}(f) \oplus Z$ então $Z' \mid X$. Como X é indecomponível concluiríamos que $Z' \cong X$ e portanto, olhando na sequência ξ , teríamos que $\text{Im}(f) \cong Y$, o que é uma contradição pois f não é epimorfismo.

Logo $\text{Hom}_\Lambda(Z', Y) \neq 0$, $di(Y) = 2$, $dp(Z') = 2$ e $\ell(Z') + \ell(Y) < \ell(X) + \ell(Y)$ o que é contrário à escolha de (X, Y) .

Analogamente conseguimos uma contradição no caso que $\ell(X) + \ell(Z'') < \ell(X) + \ell(Y)$.

Logo a suposição inicial é falsa e portanto segue a tese. ■

Observação 1.2.1

1. Todo elemento $0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow D \rightarrow 0$ em $\text{Ext}_\Lambda^2(D, A)$, pode ser visto da seguinte forma: $0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow \text{coker}(f) \rightarrow 0$.
2. Segundo o argumento analisado em ($\odot$), se $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 0$ é uma sequência exata que não cinde com L_1 indecomponível, podemos concluir que $\text{Hom}_\Lambda(L'_2, L_3) \neq 0$, $\forall L'_2 \mid L_2$.

3. Analogamente se $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 0$ é uma sequência exata que não cinde com L_3 indecomponível, podemos concluir que $\text{Hom}_\Lambda(L_1, L'_2) \neq 0, \forall L'_2 \mid L_2$. ■

Definição 1.2.1

1. Em $\text{ind}(\Lambda)$ definimos a seguinte relação:

$X \rightsquigarrow_0 Y \iff \text{Hom}_\Lambda(X, Y) \neq 0$, e seja $\rightsquigarrow$ o fecho transitivo da relação anterior, ou seja:

$X \rightsquigarrow Y \iff$ existem $n \in \mathbb{N}$ e um caminho $X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} = Y$ com $X_i \in \text{ind}(\Lambda)$ e $f_i \neq 0, \forall 0 \leq i \leq n$.

Nesse caso diremos que X é **predecessor** de Y ou que Y é **sucessor** de X .

2. Definimos também as seguintes subcategorias:

$\mathcal{L} = \{ X \in \text{ind}(\Lambda) / \forall Y \text{ predecessor de } X, \text{ temos que } dp(Y) \leq 1 \}$

$\mathcal{R} = \{ X \in \text{ind}(\Lambda) / \forall Y \text{ sucessor de } X, \text{ temos que } di(Y) \leq 1 \}$

As subcategorias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ ocupam um papel importante na teoria das álgebras quase hereditárias. A idéia será provar que se Λ é quase hereditária, obtemos uma triseção de $\text{ind}(\Lambda)$: $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$, onde verifica-se que:

$$\begin{cases} \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = 0 \\ \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}, \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) = 0 \\ \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) = 0 \end{cases}$$

Observação 1.2.2

Não é difícil comprovar que:

1. $\mathcal{L}$ é fechada para predecessores e $\mathcal{R}$ é fechada para sucessores.
2. $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$ também é fechada para predecessores e $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$ é fechada para sucessores.
3. Se Λ é hereditária, verifica-se que: $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \text{ind}(\Lambda)$. ■

Lema 1.2.2

Seja Λ uma álgebra quase hereditária. Então:

1. Se $Y \in \text{ind}(\Lambda)$ e existe X com $dp(X) = 2$ e $X \rightsquigarrow Y$ então existe $Z \in \text{ind}(\Lambda)$ com $dp(Z) = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, Y) \neq 0$.
2. Se $X \in \text{ind}(\Lambda)$ com $dp(X) = 2$ então $X \in \mathcal{R}$.

Demonstração:

1. Para demonstrar este ponto só é necessário provar que, se temos um caminho $X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ em $\text{ind}(\Lambda)$ com $dp(X) = 2$ então existe $Z \in \text{ind}(\Lambda)$ com $dp(Z) = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, Y) \neq 0$. (O resultado vai sair fazendo um argumento de indução no comprimento do caminho). Assumamos que existe um caminho $X' \xrightarrow{h_0} X'_1 \xrightarrow{h_1} Y$, tal que $dp(X') = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, Y) = 0$, $\forall Z \in \text{ind}(\Lambda)$ com $dp(Z) = 2$. Escolhemos um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$, $X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ com $\ell(X_1)$ mínimo e $dp(X) = 2$. Como $0 \neq f_1 : X_1 \rightarrow Y$, pela hipótese feita, temos que $dp(X_1) \leq 1$. Logo, segundo o Lema 1.1.1, $dp(\text{Im}(f_0)) \leq 1$ pois $\text{Im}(f_0) \subset X_1$. Então f_0 não é um monomorfismo.

Também sabemos que $\text{Hom}_\Lambda(X, Y) = 0$ e isto implica que $f_1 \circ f_0 = 0$. Em particular f_0 não é um epimorfismo. Consideramos $\xi : 0 \rightarrow \text{Im}(f_0) \rightarrow X_1 \xrightarrow{\pi} \text{coker}(f_0) \rightarrow 0$. Como $f_1 \circ f_0 = 0$ deduzimos que $\text{Im}(f_0) \subset \ker(f_1)$ e portanto existe $h : \frac{X_1}{\text{Im}(f_0)} \cong \text{coker}(f_0) \rightarrow Y$ / $h \circ \pi = f_1$. Assim $\text{Hom}_\Lambda(\text{coker}(f_0), Y) \neq 0$. Consideramos $N \in \text{ind}(\Lambda)$, somando de $\text{coker}(f_0)$, tal que $\text{Hom}_\Lambda(N, Y) \neq 0$.

Consideramos o pull-back de ξ com respeito a $N \xrightarrow{\iota} \text{coker}(f_0)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \vartheta : 0 & \rightarrow & \text{Im}(f_0) & \xrightarrow{\alpha} & X'_1 & \xrightarrow{\beta} & N \rightarrow 0 \\ & & \parallel 1 & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \iota \\ \xi : 0 & \rightarrow & \text{Im}(f_0) & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & \text{coker}(f_0) \rightarrow 0 \end{array}$$

A sequência ξ não pode cindir pois X_1 é indecomponível e $0 \neq f_0$ não é epimorfismo. Logo se $\xi \neq 0$ em $\text{Ext}_\Lambda^1(\text{coker}(f_0), \text{Im}(f_0))$, como $\vartheta = \xi \circ \iota$ então $\vartheta \neq 0$. Ou seja ϑ não cinde (pois se ϑ cindisse, como ι é um monomorfismo que cinde, teríamos que ξ cindiria). Logo para todo caminho $\text{Im}(f_0) \xrightarrow{\alpha} X'_1 \xrightarrow{pr} X''_1$ com $X''_1 \mid X'_1$ e pr a projeção associada, verifica-se que $pr \circ \alpha \neq 0$, segundo a Observação 1.2.1,(3), pois N é indecomponível. Pela escolha de N , temos que $\text{Hom}_\Lambda(N, Y) \neq 0$ e portanto $\text{Hom}_\Lambda(X''_1, Y) \neq 0$. Logo existe $X''_1 \mid X'_1$ com $\text{Hom}_\Lambda(X''_1, Y) \neq 0$, e pelo argumento

anterior $\text{Hom}_\Lambda(\text{Im}(f_0), X_1'') \neq 0$ o que implica que $\text{Hom}_\Lambda(X, X_1'') \neq 0$. Então temos $X \rightarrow \text{Im}(f_0) \xrightarrow{\alpha} X_1' \xrightarrow{\beta} X_1'' \rightarrow Y$. Mas, pela minimalidade na escolha de X_1 , temos que $\ell(X_1) \leq \ell(X_1'') \leq \ell(X_1')$. Como ϑ é o pullback de ξ respeito do monomorfismo ι , então $X_1' \rightarrow X_1$ é injetora, e portanto $\ell(X_1') \leq \ell(X_1)$. Então $\ell(X_1') = \ell(X_1)$ e assim $X_1' \rightarrow X_1$ é um isomorfismo o que implica que ι é também isomorfismo. Assim $N \cong \text{coker}(f_0)$ é indecomponível e como $\text{Hom}_\Lambda(N, Y) \neq 0$, deduzimos que $dp(\text{coker}(f_0)) \leq 1$. Logo $\text{Ext}_\Lambda^2(\text{coker}(f_0), -) = 0$.

Consideramos:

$$\delta : 0 \rightarrow \ker(f_0) \rightarrow X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{\pi} \text{coker}(f_0) \rightarrow 0.$$

Como $\delta \in \text{Ext}_\Lambda^2(\text{coker}(f_0), \ker(f_0)) = 0$, então $\delta = 0$. Logo, aplicando o Lema 1.1.2, deduzimos que existem $N \in \text{mod } \Lambda$, $f_0' \in \text{Hom}_\Lambda(X, N)$ e $g_0' \in \text{Hom}_\Lambda(N, X_1)$ tais que $\nu : 0 \rightarrow X \xrightarrow{(f_0, f_0')^t} \text{Im}(f_0) \oplus N \xrightarrow{(i, -g_0')} X_1 \rightarrow 0$ é exata.

Afirmção: Para todo módulo N' somando direto de N , temos que

$$\text{Hom}_\Lambda(N', \text{coker}(f_0)) \neq 0.$$

Segundo a Observação 1.2.1, (2), basta mostrar que $\mu : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0'} N \xrightarrow{w} \text{coker}(f_0) \rightarrow 0$ é uma sequência exata que não cinde (onde $w = \pi \circ g_0'$), pois X é indecomponível.

Provemos então que a sequência referida é exata. Da sequência ν concluímos que $i \circ f_0 = g_0' \circ f_0'$. Então $w \circ f_0' = \pi \circ g_0' \circ f_0' = \pi \circ i \circ f_0 = 0$. Assim $w \circ f_0' = 0$.

Por outro lado $w(n) = 0$ implica que $\pi \circ g_0'(n) = 0$. Logo temos as seguintes equivalências $\pi \circ g_0'(n) = 0 \Leftrightarrow g_0'(n) \in \text{Im}(f_0) \Leftrightarrow g_0'(n) = f_0(z) = g_0' \circ f_0'(z) \Leftrightarrow n - f_0'(z) \in \ker(g_0')$. Então $(i, g_0')(0, n - f_0'(z)) = 0$, e portanto $(0, n - f_0'(z)) \in \ker(i, -g_0') = \text{Im}(f_0, f_0')$. Assim, concluímos que existe $x \in X / (f_0, f_0')(x) = (0, n - f_0'(z))$ e portanto $n = f_0'(x) + f_0'(z)$. Segue daí que $n \in \text{Im}(f_0')$.

Temos demonstrado que $X \xrightarrow{f_0'} N \xrightarrow{w} \text{coker}(f_0)$ é exata, e portanto resta provar a sobrejetividade de w e a injetividade de f_0' . Suponhamos que $f_0'(x) = 0$. Isto implica que $0 = g_0'(f_0'(x)) = i \circ f_0(x)$. Então $(f_0, f_0')(x) = 0$, mas (f_0, f_0') é injetiva e portanto $x = 0$. Provemos a sobrejetividade de w : $w = \pi \circ g_0' = \pi \circ g_0' + \pi \circ i$, pois o último termo é zero. Logo $w = \pi \circ (i, -g_0')$ é uma composição de epimorfismos. Então w é

um epimorfismo. Concluimos a prova de que $\mu : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f'_0} N \xrightarrow{u} \text{coker}(f_0) \rightarrow 0$ é exata.

Provemos agora que a referida sequência μ não cinde. Do Lema 1.1.2 temos que μ é tal que

$$f_0 \circ \mu : 0 \rightarrow \text{Im}(f_0) \rightarrow X_1 \xrightarrow{\pi} \text{coker}(f_0) \rightarrow 0.$$

Logo se $\mu = 0$ deduzimos que $f \circ \mu = 0$ e portanto $X_1 = \text{Im}(f_0) \oplus \text{coker}(f_0)$. Mas X_1 é indecomponível, e f_0 não é nem nula nem sobrejetora, o que é uma contradição. Assim $\mu \neq 0$, ou seja μ não cinde.

Fica provada assim a afirmação: $\text{Hom}_\Lambda(N', \text{coker}(f_0)) \neq 0, \forall N' \mid N$.

Temos que $dp(X_1) \leq 1$ e $dp(\text{Im}(f_0)) \leq 1$, portanto $\text{Ext}_\Lambda^2(X_1, -) = 0$ e também $\text{Ext}_\Lambda^2(\text{Im}(f_0), -) = 0$. Se “aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, M)$ ”, com $M \in \text{mod } \Lambda$ a ν , obtemos:

$$0 = \text{Ext}_\Lambda^2(X_1, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(\text{Im}(f_0), M) \oplus \text{Ext}_\Lambda^2(N, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(X, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^3(X_1, M) = 0.$$

Então temos um isomorfismo entre $\text{Ext}_\Lambda^2(N, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(X, M), \forall M \in \text{mod } \Lambda$, e como $dp(X) = 2$, deduzimos que existe $N' \in \text{ind}(\Lambda)$, somando de N , tal que $dp(N') = 2$.

Conseguimos então um caminho entre indecomponíveis $N' \rightarrow \text{coker}(f_0) \rightarrow Y$ com $dp(N') = 2$. Mas $\ell(\text{coker}(f_0)) < \ell(X_1)$ o que é uma contradição com a escolha do módulo X_1 .

Logo existe $Z \in \text{ind}(\Lambda) / dp(Z) = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, Y) \neq 0$.

2. Seja Y um módulo indecomponível sucessor de X . Segundo o provado em (1), existe $Z \in \text{ind}(\Lambda)$ tal que $dp(Z) = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, Y) \neq 0$. Logo se fosse $di(Y) = 2$, obteríamos uma contradição segundo o Lema 1.2.1. Assim para todo módulo indecomponível Y sucessor de X temos que $di(Y) \leq 1$, e como consequência $X \in \mathcal{R}$.

■

Lema 1.2.3

Seja Λ uma álgebra quase hereditária. Então:

1. Se $X \in \text{ind}(\Lambda)$ e existe Y com $\text{di}(Y) = 2$ e $X \rightsquigarrow Y$ então existe $Z \in \text{ind}(\Lambda)$ com $\text{di}(Z) = 2$ e $\text{Hom}_\Lambda(X, Z) \neq 0$.
2. Se $Y \in \text{ind}(\Lambda)$ com $\text{di}(Y) = 2$ então $Y \in \mathcal{L}$.

Demonstração:

Demonstração análoga á feita no Lema anterior. ■

Proposição 1.2.1

Se Λ é uma álgebra quase hereditária. Então $\mathcal{R} \cup \mathcal{L} = \text{ind}(\Lambda)$.

Demonstração:

Seja $Y \in \text{ind}(\Lambda)$, se $\text{dp}(Y) = 2 \Rightarrow Y \in \mathcal{R}$ segundo o Lema 1.2.2,(2). Agora, se $Y \notin \mathcal{R} \Rightarrow \text{dp}(Y) \leq 1$. Consideramos um módulo Z indecomponível tal que $Z \rightsquigarrow Y$. Se $\text{dp}(Z) = 2 \Rightarrow Z \in \mathcal{R}$, mas $\mathcal{R}$ é fechado para sucessores, portanto $Y \in \mathcal{R}$, o que é uma contradição. Logo $\text{dp}(Z) \leq 1, \forall Z$ predecessor de Y , o que implica que $Y \in \mathcal{L}$.

Logo segue a tese. ■

Proposição 1.2.2

Seja Λ uma álgebra quase hereditária. Então:

1. $\text{Hom}_\Lambda(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{L}$.
2. $\text{Hom}_\Lambda(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{R}$ e $Y \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.

Demonstração:

A demonstração segue em forma imediata da Observação 1.2.2. ■

Exemplo 1.2.1

Consideramos $\Lambda = \frac{k\Delta}{I}$, onde

sendo $I = \langle \alpha_1, \beta_1 - \alpha_2, \beta_2 \rangle$.

Os projetivos e os injetivos são:

Assim obtemos Γ_Λ :

Assim, é fácil ver que a dimensão projetiva dos módulos indecomponíveis é menor ou igual a um, exceto no caso S_4 , onde temos que $dp(S_4) = 2$. Mas S_4 é injetivo e portanto Λ é quase hereditária (Na realidade é inclinada). Os módulos indecomponíveis das subcategorias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$, são:

■

Exemplo 1.2.2

Um exemplo que generaliza o anterior, como já tínhamos observado no começo do capítulo, é considerar uma álgebra inclinada Λ . Assim $\Lambda = \text{End}_H(T)^{op}$ com H hereditária e T inclinante. Então segundo os artigos [Ass] e [HR] verifica-se que $dgl(\Lambda) \leq 2$ e $dp(M) \leq 1$ ou $di(M) \leq 1, \forall M \in \text{ind}(\Lambda)$. Portanto toda álgebra inclinada é quase hereditária. ■

Exemplo 1.2.3

Obviamente toda álgebra H hereditária é uma álgebra quase hereditária. ■

Exemplo 1.2.4

ÁLGEBRAS CANÔNICAS.

Consideramos $\Lambda = \begin{pmatrix} k & 0 \\ {}_S M_k & S \end{pmatrix}$, onde $S = k\Delta$ é uma álgebra hereditária, tal que:

e ${}_S M_k$ é um bimódulo indecomponível, tal que:

Logo $\Lambda = S[M]$ a extensão por um ponto de S por M , é uma álgebra quase hereditária. ■

Observação 1.2.3

Existe uma descrição completa no trabalho [HRS1] das condições sobre o módulo M , para que $S[M]$ seja uma álgebra quase hereditária, quando S é hereditária. ■

SAMPA

...é que quando eu cheguei por aqui,
eu nada entendi
da dura poesia concreta de tuas esquinas
da deselegância discreta de tuas meninas...
...quando eu te encarei frente a frente
eu não vi o meu rosto
chamei de mau gosto o que vi,
de mau gosto o mau gosto...
...e foste um difícil começo
e quem vem de outro sonho
feliz de cidade
aprende depressa a chamar-te de
realidade
porque és o avesso do avesso
do avesso do avesso
do povo oprimido nas filas, nas
vilas, favelas
da força da grana que ergue
e destrói coisas belas
da feia fumaça que sobe apagando
as estrelas
eu vejo surgir teus poetas de
campos espaços
tuas oficinas de florestas, teus
deuses da chuva...

Caetano Veloso.

Capítulo 2

CONCEITOS EQUIVALENTES AO DE ÁLGEBRA QUASE HEREDITÁRIA.

2.1 Condições equivalentes.

Esta seção está destinada a provar condições equivalentes àquelas da definição de álgebra quase hereditária.

Definição 2.1.1

1. Seja

$$(*) : X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} Y,$$

um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$. Então todo caminho da forma

$$X \rightarrow X_{0,1} \rightarrow X_{0,2} \rightarrow \dots \rightarrow X_{0,n_0} \rightarrow X_1 \rightarrow X_{1,1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{1,n_1} \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y,$$

é chamado **refinamento** de $(*)$. O refinamento é chamado **refinamento de morfismos irredutíveis**, se todos os morfismos no refinamento são irredutíveis.

2. Diremos que um caminho

$$Z_0 \xrightarrow{g_0} Z_1 \xrightarrow{g_1} Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_m \xrightarrow{g_m} Z_{m+1}$$

de morfismos irredutíveis é seccional se $DTr(Z_i) \not\cong Z_{i-2}, \forall i = 2, \dots, m+1$.

Lema 2.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin, e seja

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}^{-1}} X_m,$$

um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$. Se $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$, para algum $0 \leq i \leq m-1$, então $\forall s, t \in \mathbb{N}$, existem cadeias de morfismos irredutíveis

$$X_0 \rightarrow X_{0,1} \rightarrow X_{0,2} \rightarrow \dots \rightarrow X_{0,s}, \text{ e } X_{m,t} \rightarrow X_{m,t-1} \rightarrow X_{m,t-2} \rightarrow \dots \rightarrow X_m,$$

e um caminho $X_{0,s} \rightsquigarrow X_{m,t}$ em $\text{ind}(\Lambda)$.

Demonstração:

Suponhamos $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$, para algum $0 \leq i \leq m-1$. Seja j o menor possível com $0 \leq j \leq m-1$ tal que $f_j \in \text{rad}^\infty(X_j, X_{j+1})$.

Dado $0 \leq i \leq j-1$ temos que f_i não é um isomorfismo e portanto $f_i \in \text{rad}^{n_i}(X_i, X_{i+1})$, com $1 \leq n_i < \infty$. Então existe um caminho entre X_i e X_{i+1} de morfismos irredutíveis, $\forall 0 \leq i \leq j-1$. Logo existe um caminho entre X_0 e X_j de morfismos irredutíveis $X_0 \rightarrow \dots \rightarrow X_j$.

Como $f_j \in \text{rad}^\infty(X_j, X_{j+1})$, temos que $\forall s \in \mathbb{N}$, $f_j \in \text{rad}^{s+1}(X_j, X_{j+1})$, e portanto existe um caminho

$$X_j \xrightarrow{f_{j,0}} X_{j,1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{j,s} \xrightarrow{f_{j,s}} X_{j+1},$$

com $f_{j,i}$ irredutível para $0 \leq i \leq s-1$ e $f_{j,s} \in \text{rad}^\infty(X_{j,s}, X_{j+1})$. Logo consideramos o caminho:

$$X_0 \rightarrow \dots \rightarrow X_j \rightarrow X_{j,0} \xrightarrow{f_{j,0}} X_{j,1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{j,s} \xrightarrow{f_{j,s}} X_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}^{-1}} X_{j+2} \rightarrow \dots \rightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}^{-1}} X_m,$$

onde os s primeiros (ou mais) morfismos são irredutíveis. Logo, aplicando um argumento análogo para $X_{j,s} \xrightarrow{f_{j,s}} X_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}^{-1}} X_m$, obtemos o resultado. ■

Lema 2.1.2

Seja Λ uma álgebra quase hereditária e seja:

$$I \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_m \xrightarrow{f_m} P$$

um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$ com I injetivo e P projetivo.

Então não existe i tal que $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$.

Demonstração:

Suponhamos que existe $0 \leq i \leq m$ tal que $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$. Seja $n = \text{rk}(K_0(\text{mod } \Lambda))$ o posto do grupo de Grothendieck de Λ . Pelo Lema 2.1.1, existem caminhos

$$(*) : I = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_{n-1} \rightarrow N_n, \text{ e } (*): M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 = P,$$

de morfismos irredutíveis, e existe um caminho $N_n \rightsquigarrow M_n$ em $\text{ind}(\Lambda)$.

Afirmção: Existem $0 \leq i, j \leq n$ / $\text{Tr}D(N_i) \cong N_j$.

Se não fosse assim, $(*)$ seria seccional o que implica em particular que $N_i \not\cong N_j$ se $i \neq j$, pois segundo [BS], não existem ciclos seccionais em $\text{ind}(\Lambda)$. Assim $\bigoplus_{i=0}^{i=n} N_i$ tem $n+1$ somandos indecomponíveis não isomorfos, e portanto, segundo [Sko],

$$\text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(\bigoplus_{i=0}^{i=n} N_i), \bigoplus_{i=0}^{i=n} N_i) \neq 0.$$

Mas se $(*)$ fosse seccional, teríamos que $\text{Hom}_\Lambda(I, N_i) \neq 0$, $\forall i = 0, \dots, n$, e portanto $dp(\text{Tr}D(N_i)) = 2$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Por outro lado, como $\text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(\bigoplus_{i=0}^{i=n} N_i), \bigoplus_{i=0}^{i=n} N_i) \neq 0$, concluímos que existem caminhos $\text{Tr}D(N_{i_0}) \rightsquigarrow M_j$, para um i_0 fixo e $\forall j = 0, 1, \dots, n$. Como $dp(\text{Tr}D(N_{i_0})) = 2$ e existem caminhos $\text{Tr}D(N_{i_0}) \rightsquigarrow M_j$, segue pelos Lemas 1.2.2 e 1.2.1 que $di(M_j) \leq 1$, $\forall j = 0, \dots, n$. Suponhamos que existem j, i tais que $D\text{Tr}(M_j) \cong M_i$. Seja i_1 o menor possível tal que existe $j < i_1$ com $D\text{Tr}(M_j) \cong M_{i_1}$. Assim $M_{i_1-1} \rightarrow M_{i_1-2} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 = P$ é seccional, e portanto $\text{Hom}_\Lambda(M_s, \Lambda) \neq 0$, $\forall s = 0, \dots, i_1 - 1$. Logo $di(D\text{Tr}(M_s)) = 2$, $\forall s = 0, \dots, i_1 - 1$. Em particular $di(D\text{Tr}(M_j)) = 2$, o que é uma contradição pois $D\text{Tr}(M_j) \cong M_{i_1}$ e $di(M_t) \leq 1$, $\forall t = 0, \dots, n$. Então não existem j, i tais que $D\text{Tr}(M_j) \cong M_i$. Utilizando novamente o fato que não existem ciclos seccionais [BS], concluímos que $M_j \not\cong M_i$, $\forall j \neq i$. Assim $(*)$ é seccional e também $\bigoplus_{i=0}^{i=n} M_i$ tem $n+1$ somandos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. Por isto, de acordo a [Sko], temos que $\text{Hom}_\Lambda(\bigoplus_{i=0}^{i=n} M_i, \bigoplus_{i=0}^{i=n} D\text{Tr}(M_i)) \neq 0$.

Pelo fato de ser $(\star)$ seccional, concluímos que $\text{Hom}_\Lambda(M_i, P) \neq 0$, $\forall i = n, \dots, 0$. Logo $di(DTr(M_i)) = 2$, $\forall i = 0, \dots, n$, se M_i não é projetivo.

Então existe j_0 tal que $\text{Hom}_\Lambda(\bigoplus_{i=0}^n M_i, DTr(M_{j_0})) \neq 0$, e como $TrD(N_{i_0}) \rightsquigarrow M_j$, $\forall j = 0, \dots, n$, concluímos que existem i_0, j_0 tais que $TrD(N_{i_0}) \rightsquigarrow DTr(M_{j_0})$ com $dp(TrD(N_{i_0})) = 2$ e $di(DTr(M_{j_0})) = 2$ o que é uma contradição, segundo os Lemas 1.2.1 e 1.2.2. Fica assim provado que existem $0 \leq j, i \leq n$ / $TrD(N_i) = N_j$. Analogamente pode se provar que existem $0 \leq j', i' \leq n$ / $DTr(M_{i'}) = M_{j'}$.

Sejam i_2 e j_2 os menores inteiros tais que $TrD(N_{i_2}) \cong N_j$ para algum j , e $DTr(M_{j_2}) \cong M_i$ para algum i . Então temos que $\text{Hom}_\Lambda(I, N_{i_2}) \neq 0$, e $\text{Hom}_\Lambda(M_{j_2}, P) \neq 0$. Logo $dp(N_j) = 2$, e $di(M_i) = 2$. Mas temos um caminho $N_j \rightsquigarrow M_i$ o que é uma contradição, segundo os Lemas 1.2.1 e 1.2.2.

Concluimos que não existe $0 \leq i \leq m$ / $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$. ■

Proposição 2.1.1

Seja Λ uma álgebra quase hereditária e

$$(*) I \xrightarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_m} X_m \xrightarrow{f_{m+1}} P$$

um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$ com I injetivo e P projetivo. Então $(*)$ tem um refinamento de morfismos irredutíveis.

Demonstração:

O Lema 2.1.2 nos garante que $\forall 0 \leq i \leq m+1$, $f_i \notin \text{rad}^\infty(X_{i-1}, X_i)$. Logo, podemos concluir que existe um caminho de morfismos irredutíveis entre X_{i-1} e X_i , $\forall i = 1, \dots, m$ e também entre I e X_0 , e X_m e P . ■

Lema 2.1.3

Seja Λ uma álgebra quase hereditária e seja $I \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow P$, um caminho de morfismos irredutíveis em $\text{ind}(\Lambda)$. Então o caminho é seccional.

Demonstração:

Suponhamos que o caminho não seja seccional. Assim temos

$$I \xrightarrow{\alpha} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow X_{n+2} = TrD(X_n) \rightarrow \dots \rightarrow P,$$

onde podemos supor que $X_1, X_2, \dots, X_n$, não são injetivos e o caminho $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n+1}$ é seccional. Obtemos assim um caminho

$$I \xrightarrow{\alpha} X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \text{Tr}D(X_1) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Tr}D(X_n) \rightarrow X_{n+3} \rightarrow \dots \rightarrow P.$$

O primeiro morfismo irreduzível $I \xrightarrow{\alpha} X_1$ não pode ser monomorfismo pois seria isomorfismo, então $I \xrightarrow{\alpha} X_1$ é um epimorfismo e portanto $X_1 \cong \frac{I}{\ker(\alpha)}$. Logo, segundo o Lema 1.1.1, $di(X_1) \leq 1$ o que implica $\text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(X_1), P) = 0$. Deduzimos que o caminho

$$(*) : \text{Tr}D(X_1) \rightarrow \text{Tr}D(X_2) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Tr}D(X_n) \rightarrow X_{n+3} \rightarrow \dots \rightarrow P,$$

não é seccional.

Afirmção: Existe um módulo Y no caminho $(*)$ com $di(Y) = 2$.

Como o caminho não é seccional, existe um último módulo Y (respeito ao ordem de precedência), tal que $\text{Tr}D(Y)$ aparece duas posições depois. Então o caminho $\text{Tr}D(Y) \rightarrow \dots \rightarrow P$ é seccional, e portanto $\text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(Y), P) \neq 0$ o que implica $di(Y) = 2$.

Por outro lado $\text{Hom}_\Lambda(I, X_1) \neq 0$ de onde conclui-se que $dp(\text{Tr}D(X_1)) = 2$. Assim, temos $dp(\text{Tr}D(X_1)) = 2$, $di(Y) = 2$ e $\text{Tr}D(X_1) \rightsquigarrow Y$, o que é uma contradição com os Lemas 1.2.1 e 1.2.2.

Fica provado assim que todo caminho de morfismos irreduzíveis entre um injetivo e um projetivo é seccional. ■

Proposição 2.1.2

Seja Λ uma álgebra quase hereditária. Então:

1. $\mathcal{R}$ contém todos os injetivos indecomponíveis.
2. $\mathcal{L}$ contém todos os projetivos indecomponíveis.

Demonstração:

1. Seja I um injetivo indecomponível e suponha existe um caminho $I \rightsquigarrow X$ com $di(X) = 2$. Obtemos um caminho

$$I \xrightarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} \text{Tr}D(X) \rightarrow P,$$

com h, g irredutíveis. Mas pela demonstração da Proposição 2.1.1 e o Lema 2.1.2, o caminho pode se refinar para um caminho de morfismos irredutíveis mantendo os morfismos h e g que são irredutíveis. Logo pelo Lema 2.1.3 o caminho tem que ser seccional, o que é uma contradição com o setor de caminho

$$\dots \rightarrow X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} TrD(X) \rightarrow \dots$$

Então $di(X) \leq 1$, $\forall X$ sucessor de I . Portanto $I \in \mathcal{R}$, $\forall I$ injetivo.

2. Demonstração análoga. ■

O seguinte teorema resume e prova as equivalências prometidas.

Teorema 2.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin. São equivalentes:

1. Λ é quase hereditária.
2. $\mathcal{R}$ contém todos os módulos injetivos em $ind(\Lambda)$.
3. $\mathcal{L}$ contém todos os módulos projetivos em $ind(\Lambda)$.
4. Todo caminho em $ind(\Lambda)$ começando num módulo injetivo e finalizando num módulo projetivo, tem um refinamento de morfismos irredutíveis, e qualquer que seja o refinamento, ele é seccional.

Demonstração:

Já foram provadas: (1) $\Rightarrow$ (2); (1) $\Rightarrow$ (3); e (1) $\Rightarrow$ (4).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Consideramos I um módulo injetivo indecomponível qualquer. Então por hipótese, $I \in \mathcal{R}$. Logo do epimorfismo $I \rightarrow \frac{I}{soc(I)}$, obtemos, segundo a Observação 1.2.2, que $\frac{I}{soc(I)} \in \mathcal{R}$ e também, segundo o Lema 1.1.1, que $di(\frac{I}{soc(I)}) \leq 1$. Assim da sequência exata $0 \rightarrow soc(I) \rightarrow I \rightarrow \frac{I}{soc(I)} \rightarrow 0$, obtemos que $di(soc(I)) \leq di(\frac{I}{soc(I)}) + 1 \leq 2$. Então $di(S) \leq 2$, $\forall S$ simples de $mod \Lambda$, e logo $dgl(\Lambda) \leq 2$.

Por outro lado, consideramos $X \in ind(\Lambda)$. Se $X \notin \mathcal{R} \Rightarrow \nexists I$ módulo injetivo com $I \rightsquigarrow X$, pois $\mathcal{R}$ é fechado para sucessores e todos os injetivos pertencem a $\mathcal{R}$. Então

$\text{Hom}_\Lambda(I, DTr(X)) = 0$, $\forall I$ injetivo (no caso contrário conseguiríamos os seguintes caminhos $I \rightsquigarrow DTr(X) \rightsquigarrow X$). Logo $\text{Hom}_\Lambda(D\Lambda, DTr(X)) = 0$, o que implica que $dp(X) \leq 1$.

No caso que $X \in \mathcal{R}$ deduz-se diretamente que $di(X) \leq 1$. Portanto para todo $X \in \text{ind}(\Lambda)$ temos que $dp(X) \leq 1$ ou $di(X) \leq 1$. Fica provado que Λ é quase hereditária.

(3) $\Rightarrow$ (1)

A demonstração é dual à anterior.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Suponhamos que $dgl(\Lambda) \geq 3$.

Afirmção: $dgl(\Lambda) \geq 3 \Rightarrow dp(r\Lambda) \geq 2$.

Se fosse $dp(r\Lambda) \leq 1$ teríamos que $dp(rP) \leq 1, \forall P$ projetivo. Assim considerando as sequências $0 \rightarrow rP \rightarrow P \rightarrow S(P) \rightarrow 0$, concluímos que $dp(S(P)) \leq 2, \forall S(P)$. Logo teríamos que $dgl(\Lambda) \leq 2$, o que é uma contradição à nossa hipótese.

Logo existe P projetivo indecomponível tal que $dp(rP) \geq 2$, e portanto existe um módulo injetivo indecomponível I tal que $\text{Hom}_\Lambda(I, DTr(rP)) \neq 0$. Assim obtemos um caminho $(*) : I \rightarrow DTr(P) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} rP$, onde f, g são irredutíveis. Pela hipótese existe um refinamento do caminho $(*)$ para outro caminho de morfismos irredutíveis

$$I \xrightarrow{.c_1.} DTr(rP) \xrightarrow{.c_2.} E \xrightarrow{.c_3.} rP \xrightarrow{.c_4.} P.$$

Logo também o caminho

$$I \xrightarrow{.c_1.} DTr(rP) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} rP \xrightarrow{.c_4.} P,$$

é um refinamento de morfismos irredutíveis do caminho $(*)$. Mas, pela hipótese um tal refinamento teria que ser seccional, o que é uma contradição com o setor do caminho: $\dots DTr(rP) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} rP \dots$. Assim fica provado que $dgl(\Lambda) \leq 2$.

Suponhamos agora que existe $X \in \text{ind}(\Lambda) / dp(X) = 2 = di(X)$. Do fato que $dp(X) = 2$ temos que $\text{Hom}_\Lambda(I, DTr(X)) \neq 0$, para algum módulo injetivo I . Do fato que $di(X) = 2$ temos que $\text{Hom}_\Lambda(TrD(X), P) \neq 0$, para algum P projetivo. Logo obtemos um caminho

$$I \rightarrow DTr(X) \xrightarrow{f_1} E \xrightarrow{f_2} X \xrightarrow{f_3} F \xrightarrow{f_4} TrD(X) \rightarrow P,$$

onde os morfismos f_1, f_2, f_3, f_4 são irredutíveis. Assim podemos obter um refinamento do caminho anterior, só com morfismos irredutíveis, no qual estejam incluídos f_1, f_2, f_3, f_4 .

Logo o refinamento não é seccional, o que é uma contradição com a hipótese.

Assim fica provado que $\forall X \in \text{ind}(\Lambda)$, $dp(X) \leq 1$ ou $di(X) \leq 1$. ■

2.2 Equivalência com os conceitos de álgebra quase inclinada, e de álgebra quase co-inclinada.

Nesta seção iremos descrever condições equivalentes às que definem uma álgebra quase hereditária.

Assim surge o conceito de álgebra quase inclinada como uma generalização do conceito de álgebra inclinada. Consideremos a seguinte proposição da teoria de álgebras inclinadas:

Teorema

Uma álgebra de Artin Λ é uma álgebra inclinada $\iff$ existe uma parêlha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que cinde para $\text{mod } \Lambda$ tal que:

1. $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$.
2. $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$.
3. $\mathcal{Y} = \text{Cogen}(V)$ com $V \in \text{mod } \Lambda$.

A prova do resultado acima encontra-se no Apêndice. Logo, levando em conta o teorema anterior definimos:

Definição 2.2.1

Uma álgebra de Artin Λ é quase inclinada se existe uma parêlha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ em $\text{mod } \Lambda$, que cinde, e tal que:

1. $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$.
2. $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$.

O fim dos seguintes resultados é provar a equivalência entre o conceito de álgebra quase hereditária e o conceito de álgebra quase inclinada.

Proposição 2.2.1

Se Λ é uma álgebra quase inclinada, e $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ é a parêlha de torção da definição, então prova-se que $di(\mathcal{X}) \leq 1$.

Demonstração:

Seja $N \in \mathcal{X}$, indecomponível. Se N for injetivo, não temos nada que provar. Vamos supor então que N não é injetivo. Logo existe a sequência de Auslander-Reiten para N :

$$\xi : 0 \rightarrow N \xrightarrow{(f_1, f_2, \dots, f_n)^t} \bigoplus_{i=1}^{i=n} E_i \xrightarrow{(g_1, g_2, \dots, g_n)} \text{Tr}D(N) \rightarrow 0.$$

Suponhamos que $\text{Tr}D(N) \in \mathcal{Y}$. Como $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde, temos que:

se $f_i \neq 0$ então $E_i \in \mathcal{X}$, e portanto $g_i = 0$;

se $g_j \neq 0$ então $E_j \in \mathcal{Y}$, e portanto $f_j = 0$.

Logo, teríamos que $\bigoplus_{i=1}^{i=n} E_i = N \oplus \text{Tr}D(N)$, o que é absurdo pois ξ é uma sequência de A-R. Então $\text{Tr}D(N) \in \mathcal{X}$ e portanto fazendo uso que a parrelha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde, como $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$, concluímos que $\text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(N), \Lambda) = 0$. Logo $di(N) \leq 1$, já que $di(N) \leq 1 \Leftrightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Tr}D(N), \Lambda) = 0$.

Assim temos provado que $di(\mathcal{X}) \leq 1$. ■

Observação 2.2.1

Foi provado em particular na proposição anterior, segundo a classificação feita por Auslander-Smalø, dos módulos Ext-injetivos para uma classe livre de torção (olhar o Capítulo 4, primeira seção), que um módulo indecomponível N é Ext-injetivo em $\mathcal{X} \Leftrightarrow N$ é injetivo. ■

Proposição 2.2.2

Toda álgebra quase inclinada é quase hereditária.

Demonstração:

Considero $M \in \text{mod } \Lambda$ e a seguinte sequência dada pela cobertura projetiva de M $0 \rightarrow \ker(\pi) \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. Pela hipótese $P \in \mathcal{Y}$, que é fechada para submódulos. Então $\ker(\pi) \in \mathcal{Y}$, e como $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$, concluímos que $dp(\ker(\pi)) \leq 1$. Logo para todo módulo M verifica-se que $dp(M) \leq 2$, e portanto $dgl(\Lambda) \leq 2$.

Por outro lado, como a parrelha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde, temos que $\text{ind}(\mathcal{Y}) \cup \text{ind}(\mathcal{X}) = \text{ind}(\Lambda)$. Então, se $M \in \text{ind}(\mathcal{X})$, segundo a proposição 2.2.1, temos que $di(M) \leq 1$. No caso que $M \in \text{ind}(\mathcal{Y})$, temos que $dp(M) \leq 1$.

Assim, fica provado que Λ é quase hereditária. ■

É válido também o seguinte resultado, que é o recíproco da proposição anterior:

Proposição 2.2.3

Toda álgebra quase hereditária é quase inclinada.

(A prova da proposição anterior será feita somente na primeira seção do terceiro capítulo.)

Obtemos assim a equivalência entre ambas definições:

Corolário 2.2.1

Λ é uma álgebra quase inclinada $\iff \Lambda$ é uma álgebra quase hereditária.

Podemos dualizar o conceito de álgebra quase inclinada:

Definição 2.2.2

*Dizemos que uma álgebra de Artin Λ é **quase co-inclinada** se existe uma parêlha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ para $\text{mod } \Lambda$, que cinde e tal que:*

1. $di(\mathcal{X}) \leq 1$.
2. $D\Lambda \in \mathcal{X}$.

Surge a questão de saber se o novo conceito é equivalente aos conceitos de álgebra quase inclinada e de álgebra quase hereditária. A resposta é afirmativa.

Proposição 2.2.4

Seja Λ uma álgebra quase co-inclinada, com $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ a parêlha de torção associada. Então:

1. $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$.
2. $dgl(\Lambda) \leq 2$.
3. Λ é quase hereditária.

Demonstração:

1. A demonstração é dual da feita na Proposição 2.2.1.
2. A demonstração é dual da feita na Proposição 2.2.2.

3. Pela definição de álgebra quase co-inclinada, e pelo ponto (1), da demonstração, temos que $di(\mathcal{X}) \leq 1$ e $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. Como a parêlha de torção cinde, concluimos que para todo módulo $M \in \text{ind}(\Lambda)$, se verifica que $dp(M) \leq 1$ ou $di(M) \leq 1$. Logo, como já foi provado em (2) que $dgl(\Lambda) \leq 2$, temos que Λ é quase hereditária. ■

Apresentemos o resultado recíproco do anterior, ainda que a prova será feita somente na primeira seção do terceiro capítulo.

Proposição 2.2.5

Toda álgebra quase hereditária é quase co-inclinada.

Obtemos assim a equivalência entre ambas definições:

Corolário 2.2.2

Λ é uma álgebra quase co-inclinada $\iff \Lambda$ é uma álgebra quase hereditária.

Imposibles

*...Ta loco aquel que quiera volar
buscando un sitio al lado del sol
ta loco aquel que quiera
tu corazón.*

*Quién colocó tu color
en cada rayo del sol
se quema aquel que quiera
tu corazón...*

Fernando Cabrera

Capítulo 3

RELAÇÃO COM AS ÁLGEBRAS INCLINADAS.

3.1 Preliminares.

Se Λ é uma álgebra de Artin, segundo o trabalho de [HR], dizemos que um módulo $T \in \text{mod } \Lambda$ é um módulo **inclinante** se:

1. $dp(T) \leq 1$.
2. $\text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0$.
3. Existe uma sequência: $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$, com $T', T'' \in \text{add}(T)$.

Sob (1) e (2), temos, segundo o Corolário (2.6) de [Ass], que (3) é equivalente a:

3'. O número de somandos indecomponíveis (não isomorfos) de T é igual ao número de Λ -módulos simples (não isomorfos).

Dizemos também que $U \in \text{mod } \Lambda$ é um módulo **coinclinante** se $D(U) \in \text{mod } \Lambda^{op}$ é inclinante. Existe uma proveitosa relação entre a teoria dos módulos inclinantes-coinclinentes e a teoria de torção.

Uma subcategoria $\mathcal{T} \subset \text{mod } \Lambda$ é uma **classe de torção**, se $\mathcal{T}$ é fechada para extensões e para quocientes. Uma subcategoria $\mathcal{F} \subset \text{mod } \Lambda$ é uma **classe livre de torção**,

se $\mathcal{F}$ é fechada para extensões e para submódulos.

Não é difícil de mostrar que uma classe de torção $\mathcal{T}$ determina uma classe livre de torção $\mathcal{F}$ do seguinte jeito:

$$\mathcal{F} = \{ C \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{T}, C) = 0 \}.$$

Analogamente, frente a uma classe livre de torção $\mathcal{F}$ podemos determinar a classe de torção associada:

$$\mathcal{T} = \{ C \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Hom}_\Lambda(C, \mathcal{F}) = 0 \}.$$

Felizmente é válido que $\mathcal{T}(\mathcal{F}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

Assim, diremos que $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ é uma **parelha de torção**, se $\mathcal{T}$ é uma classe de torção e $\mathcal{F}$ é a classe livre de torção associada. Diremos que a parrelha de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cinde quando para todo módulo $M \in \text{ind}(\Lambda)$ temos que $M \in \mathcal{F}$ ou $M \in \mathcal{T}$.

Qual é a relação entre as teorias de torção e os módulos inclinantes-coinclinantes ?

Se T é um módulo inclinante, então $\text{Fac}(T) = \text{Gen}(T) = \mathcal{T}(T)$ é uma classe de torção. Logo podemos conseguir a subcategoria livre de torção $\mathcal{F}$ associada a $\mathcal{T}$, e fica definida uma parrelha de torção $(\mathcal{F}(T), \mathcal{T}(T))$, determinada pelo módulo inclinante T .

Se U é um módulo coinclinante, então $\text{Sub}(U) = \text{Cogen}(U) = \mathcal{Y}(U)$ é uma classe livre de torção. Podemos também recuperar a subcategoria de torção $\mathcal{X}$ associada a $\mathcal{Y}$, e fica assim definida uma parrelha de torção $(\mathcal{Y}(U), \mathcal{X}(U))$, determinada pelo módulo coinclinante U .

Em fim, para ressumir, temos o seguinte resultado:

Teorema de Brenner e Butler:

Seja T um módulo inclinante sobre uma álgebra de Artin Γ . Se $\Lambda = \text{End}_\Gamma(T)^{op}$, então:

1. O módulo ${}_\Lambda U = {}_\Lambda D(T)$, é um módulo coinclinante em $\text{mod } \Lambda$, e $\Gamma \cong \text{End}_\Lambda(D(T))^{op}$.
2. O funtor $\text{Hom}_\Gamma(T, -) : \text{mod } \Gamma \rightarrow \text{mod } \Lambda$, induz uma equivalência entre as subcategorias $\mathcal{T}(T_\Gamma) = \{ M \in \text{ind}(\Gamma) \mid \text{Ext}_\Gamma^1(T, M) = 0 \}$ e $\mathcal{Y}({}_\Lambda T) = \{ N \in \text{ind}(\Lambda) \mid \text{Tor}_1^\Lambda(N, T) = 0 \}$. O funtor inverso é $- \otimes_\Lambda T$.

3. O funtor $\text{Ext}_\Gamma^1(T, -) : \text{mod } \Gamma \rightarrow \text{mod } \Lambda$, induz uma equivalência entre as subcategorias $\mathcal{F}(T_\Gamma) = \{ M \in \text{ind}(\Gamma) / \text{Hom}_\Gamma(T, M) = 0 \}$ e $\mathcal{N}({}_\Lambda T) = \{ N \in \text{ind}(\Lambda) / N \odot_\Lambda T = 0 \}$. O funtor inverso é $\text{Tor}_1^\Lambda(-, T)$.

Diremos de agora a mais, que uma álgebra de Artin Λ , é uma **álgebra inclinada** se $\Lambda \cong \text{End}_H(T)^{op}$, onde H é uma álgebra hereditária e T um módulo inclinante em $\text{mod } H$.

Finalmente necessitamos de lembrar o conceito de fatia completa.

Seja Λ uma álgebra e $\mathcal{S}$ uma classe de Λ -módulos satisfazendo as seguintes propriedades:

- (α) $\mathcal{S}$ é sincera.
- (β) $\mathcal{S}$ é fechada para caminhos.
- (γ) Se $M \in \text{ind}(\Lambda)$, não é projetivo, então no máximo M ou $D\text{Tr}(M)$ pertence a $\mathcal{S}$.
- (δ) Se $M, S \in \text{ind}(\Lambda)$ e temos um morfismo irredutível $M \xrightarrow{\text{irr}} S$ com $S \in \mathcal{S}$, então $M \in \mathcal{S}$ ou M é não injetivo e $\text{Tr}D(M) \in \mathcal{S}$.

Uma tal classe $\mathcal{S}$ é chamada de **fatia completa**.

Apresentamos o seguinte resultado, para o qual referimos a [Ass], que será utilizado em demonstrações posteriores, e que é crucial na teoria:

Teorema:

- (1). Consideramos uma álgebra hereditária A , um módulo inclinante T , $\Lambda = \text{End}_A(T)$, e $\mathcal{S} = \{ \text{Hom}_A(T, Q) / Q \in \text{ind}(A) \text{ injetivo} \}$. Então $\mathcal{S}$ é uma fatia completa, e toda fatia completa aparece dessa maneira.
- (2). Uma álgebra de Artin Λ é inclinada se e só se existe uma fatia completa $\mathcal{S}$ para $\text{mod } \Lambda$. Finalmente, chamaremos de **componente de conexão**, àquela componente que contém uma fatia completa.

3.2 Relação com as álgebras inclinadas.

Teorema 3.2.1

Seja Λ uma álgebra quase hereditária indecomponível.

1. Assumamos que $\mathcal{R}_\Lambda$ contém um módulo Ext-projetivo R (ou seja $\text{Ext}_\Lambda^1(R, -)|_{\mathcal{R}_\Lambda} = 0$). Então $\mathcal{R}_\Lambda$ possui uma fatia completa que contém a R e portanto Λ é uma álgebra inclinada.
2. Analogamente, se $\mathcal{L}_\Lambda$ contém um módulo Ext-injetivo L (ou seja $\text{Ext}_\Lambda^1(-, L)|_{\mathcal{L}_\Lambda} = 0$). Então $\mathcal{L}_\Lambda$ possui uma fatia completa que contém a L e portanto Λ é uma álgebra inclinada.

Demonstração:

1. Seja X um Ext-projetivo para $\mathcal{R}_\Lambda$ e seja Z a soma direta de um representante de cada classe de isomorfismo dos Ext-projetivos de $\mathcal{R}_\Lambda$. A soma direta anterior tem sentido pois não é difícil provar que o número das classes de isomorfismos dos módulos Ext-projetivos de $\mathcal{R}_\Lambda$ tem que ser finita. Como $Z \in \text{add}(\mathcal{R}_\Lambda) \Rightarrow di(Z) \leq 1$ e também $\text{Ext}_\Lambda^1(Z, Z) = 0$, portanto Z é um módulo coinclinante parcial. Provaremos que os somandos indecomponíveis de Z formam uma fatia.

(γ) Se $M \in \text{ind}(\Lambda)$, e não é projetivo, então $M \notin \text{add}(Z)$ ou $DTr(M) \notin \text{add}(Z)$.
Suponhamos que $M \in \text{add}(Z)$ e também $DTr(M) \in \text{add}(Z)$. Então

$$0 = \text{Ext}_\Lambda^1(M, DTr(M)) \cong D\text{Hom}_\Lambda(M, M).$$

Isto implica que $\text{Hom}_\Lambda(M, M) = 0$, e portanto 1_M fatoriza através de um projetivo: $M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M$, com $g \circ f = 1_M$. Então $M \mid P$ e portanto M seria projetivo, o que é uma contradição com nossa hipótese.

(δ) Sejam $X, Y \in \text{ind}(\Lambda)$, $Y \in \text{add}(Z)$ e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irreduzível, então $X \in \text{add}(Z)$ ou X não é injetivo e $TrD(X) \in \text{add}(Z)$.

Suponhamos que Y seja projetivo.

Então f tem que ser monomorfismo. Temos portanto a seguinte sequência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \frac{Y}{X} \rightarrow 0$. “Aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, M)$ ” com $M \in \mathcal{R}_\Lambda$, e obtemos $0 = \text{Ext}_\Lambda^1(Y, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(X, M) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(\frac{Y}{X}, M) = 0$. pois $di(M) \leq 1, \forall M \in \mathcal{R}_\Lambda$. Então $\text{Ext}_\Lambda^1(X, M) = 0, \forall M \in \mathcal{R}_\Lambda$. Logo, se $X \in \mathcal{R}_\Lambda$, deduzimos que $X \in \text{add}(Z)$.

Se $X \notin \mathcal{R}_\Lambda \Rightarrow X \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, e portanto X não é injetivo. Assim existe $TrD(X)$ e tinhamos $X \xrightarrow{f} Y$, portanto existe um morfismo irreduzível $Y \xrightarrow{irr} TrD(X)$. Isto implica que $TrD(X) \in \mathcal{R}_\Lambda$, e como $X \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, segundo uma classificação de Auslander-Smalø (Capítulo 4, seção 1), concluímos que $TrD(X)$ é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda$. Logo $TrD(X) \in \text{add}(Z)$.

Suponhamos agora que Y não seja projetivo.

Então existe $DTr(Y)$, e como Y é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda$, novamente pela classificação de Auslander e Smalø, deduzimos que $DTr(Y) \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$.

Suponhamos que $X \in \mathcal{R}_\Lambda$. Se X é projetivo, então $X \in \text{add}(Z)$. Se X não é projetivo, existe $DTr(X)$. Mas tinhamos o morfismo irreduzível $X \xrightarrow{f} Y$, o que implica existe $DTr(X) \xrightarrow{irr} DTr(Y)$. Como $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ é fechado para predecessores, concluímos que $DTr(X) \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$. Finalmente se $X \in \mathcal{R}_\Lambda$ e $DTr(X) \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, deduzimos que $X \in \text{add}(Z)$.

No caso que $X \notin \mathcal{R}_\Lambda$, temos que X não é injetivo e portanto como já foi analisado, isto implicaria que $TrD(X) \in \mathcal{R}_\Lambda$. Se $X \notin \mathcal{R}_\Lambda \Rightarrow X \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$. Concluímos que $TrD(X)$ é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda$, e portanto $TrD(X) \in \text{add}(Z)$.

(α) Z é sincero:

Cada somando de Z é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda \Rightarrow$ cada somando de $DTr(Z) \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ (considerar a parêlha de torção $(\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda, \tilde{\mathcal{R}}_\Lambda)$ e utilizar a classificação de Auslander-Smalø). Logo $\text{Hom}_\Lambda(I, DTr(Z)) = 0$, $\forall I$ injetivo, e portanto $dp(Z) \leq 1$. Como também sabemos que Z é Ext-projetivo em $\tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$, e portanto $\text{Ext}^1(Z, Z) = 0$, podemos concluir que Z é também um módulo inclinante parcial. Portanto, pelo Lema de Bongartz, pode se completar para um módulo inclinante com $(\varepsilon) : 0 \rightarrow \Lambda \rightarrow Z' \rightarrow Z^s \rightarrow 0$ onde $Z' \oplus Z$ é inclinante. Assim, cada somando de Z' ou é projetivo ou tem um morfismo não nulo para $Z \in \text{add}(Z)$.

Mas Λ é indecomponível portanto $\text{End}_\Lambda(Z' \oplus Z)$ é indecomponível. Chamamos de $\mathcal{M} = \{ M \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda / M \mid Z' \}$. Seja $M_1 = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} M$, e M_2 tal que $M_1 \oplus M_2 = Z \oplus Z'$. Como $\text{End}_\Lambda(Z \oplus Z') = \text{End}_\Lambda(M_1 \oplus M_2)$ é indecomponível, se $\mathcal{M}$ não é vazio então existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\text{Hom}_\Lambda(M, M_2) \neq 0$.

Afirmção: Todo somando de Z' que esteja em $\mathcal{R}_\Lambda$ é Ext-proj em $\mathcal{R}_\Lambda$.

Para isto “aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(-, Y)$ ” com $Y \in \mathcal{R}_\Lambda$, à (ε) , e obtemos $\text{Ext}_\Lambda^1(Z^s, Y) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(Z', Y) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(\Lambda, Y)$. Mas $\text{Ext}_\Lambda^1(\Lambda, Y) = 0$ evidentemente, e $\text{Ext}_\Lambda^1(Z^s, Y) = 0$ pois Z é Ext-proj em $\tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$. Concluimos que $\text{Ext}_\Lambda^1(Z', Y) = 0$, $\forall Y \in \mathcal{R}_\Lambda$. Assim para todo módulo $M \mid Z'$ tal que $M \in \mathcal{R}_\Lambda$, temos que M é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda$, o que prova a afirmação.

Em particular $M_2 = Z$. Suponhamos que $\mathcal{M}$ não é vazio, então existe $M' \in \mathcal{M} / \text{Hom}_\Lambda(M', M_2) \neq 0$. Portanto existe $Z_1 \mid Z$ indecomponível, tal que $\text{Hom}_\Lambda(M', Z_1) \neq 0$.

Logo se Z' tem um somando indecomponível M' fora de $\mathcal{R}_\Lambda \Rightarrow M' \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, e também vale que: $\text{Hom}_\Lambda(M', Z_1) \neq 0$ para algum $Z_1 \mid Z$ indecomponível.

Afirmação: $\text{Hom}_\Lambda(M', DTr(Z)) \neq 0$.

Seja $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(M', Z_1)$, como $M' \notin \text{add}(Z)$, então f não é um epimorfismo que cinde, e concluimos também que Z_1 não é um projetivo simples. Logo existe um poço para Z_1 : $E \xrightarrow{\alpha_1} Z_1$. Pela propriedade do levantamento, existe $h \in \text{Hom}_\Lambda(M', E)$ tal que $\alpha_1 \circ h = f$. Logo se $E_1 \notin \text{add}(Z)$, como temos $E_1 \xrightarrow{irr} Z_1$, concluimos de (δ) que $TrD(E_1) \in \text{add}(Z)$, e portanto $\text{Hom}_\Lambda(M', DTr(Z)) \neq 0$. Mas se $E_1 \in \text{add}(Z)$, começamos novamente o processo. Ou seja consideramos um poço para E_1 , que existe pois se E_1 fosse um projetivo simples, concluiríamos que $M' \cong E_1 \in \text{add}(Z)$, o que seria absurdo. Logo, como o número de somandos indecomponíveis de Z não isomorfos é finito, deduzimos que o processo acaba ou conseguimos um ciclo dentro de $\text{add}(Z)$. Mas, segundo [BS], sabemos que não existem ciclos seccionais, e portanto teríamos dentro de $\text{add}(Z)$ um módulo indecomponível N e também a $DTr(N)$, o que é uma contradição com o ponto (γ) . Assim a única possibilidade é que o processo acaba e portanto $\text{Hom}_\Lambda(M', DTr(Z)) \neq 0$.

Temos que $\text{Hom}_\Lambda(M', DTr(Z)) \neq 0$ e $\text{Hom}_\Lambda(I, DTr(Z)) = 0$, para todo módulo injetivo I . Então $0 \neq \overline{\text{Hom}_\Lambda(M', DTr(Z))} = D\text{Ext}^1(Z, M)$ e teríamos que $\text{Ext}_\Lambda^1(Z, M') \neq 0$ o que é absurdo. Então $\mathcal{M}$ é vazio e portanto $M_2 = Z$ é inclinante. Logo Z é fiel e então Z é sincero.

(β) Se X e Y estão em $\text{ind}(\Lambda) \cap \text{add}(Z)$, e $X \rightsquigarrow M \rightsquigarrow Y$ com $M \in \text{ind}(\Lambda)$, então $M \in \text{add}(Z)$.

Temos um caminho:

$$X_0 = X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_i} X_{i+1} = M \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = Y.$$

Do caminho

$$X \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_i} X_{i+1} = M,$$

deduzimos que $M \in \mathcal{R}_\Lambda$, pois $X \in \mathcal{R}_\Lambda$. Consideramos $X_{i+1} = M \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = Y$, com $M \in \mathcal{R}_\Lambda$, e suponhamos que os morfismos $f_{i+1}, \dots, f_{n-1}$ são irreduzíveis. Pela demonstração de (δ) , deduzimos que se $N_1 \xrightarrow{g} N_2$ é um morfismo irreduzível com $N_2 \in \text{add}(Z)$ e $N_1 \in \mathcal{R}_\Lambda$, então $N_1 \in \text{add}(Z)$. Logo, em $n - i - 1$ passos chegamos a mostrar que $M \in \text{add}(Z)$. Evidentemente este argumento é válido para qualquer caminho de irreduzíveis de M para Y . Suponhamos então que não existe nenhum caminho de irreduzíveis de M para Y . Então existe um morfismo $X_j \xrightarrow{f_j} X_{j+1}$ tal que $f_j \in \text{rad}^\infty(X_j, X_{j+1})$ com $i + 1 \leq j \leq n - 1$. Consideramos j_0 o maior inteiro com essa propriedade. Podemos supor que f_t é irreduzível, sendo $j_0 + 1 \leq t \leq n - 1$. Logo dado $n \in \mathbb{N}$ existem $f^n : X_j \rightarrow M_1^n$ e morfismos irreduzíveis $\alpha_i^n : M_i^n \rightarrow M_{i+1}^n$, $i = 1, \dots, n$ com $M_{n+1}^n = X_{j+1}$ e todos os M_i^n indecomponíveis, tais que $\alpha_n^n \circ \alpha_{n-1}^n \circ \dots \circ \alpha_1^n \circ f^n \neq 0$. Como os α_i e os f_t com $j_0 + 1 \leq t$ são irreduzíveis, novamente pela demonstração do ponto (δ) , deduzimos que $M_i^n \in \text{add}(Z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Mas isto é uma contradição com o Lema de Harada-Sai.

Logo, foram verificados (α) , (β) , (γ) , e (δ) da definição de fatia. Concluimos que $\Lambda \cong \text{End}_H(Z)^{op}$ com H hereditária e $H \cong \text{End}_\Lambda(Z)^{op}$.

2. Demonstração análoga. ■

Corolário 3.2.1

Seja Λ uma álgebra quase hereditária indecomponível.

São equivalentes:

1. $\mathcal{R}_\Lambda$ contém um módulo Ext-projetivo.
2. $\mathcal{R}_\Lambda$ contém um módulo projetivo.

3. $\mathcal{L}_\Lambda$ contém um módulo Ext-injetivo.

4. $\mathcal{L}_\Lambda$ contém um módulo injetivo.

5. $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ não é sincero.

6. Existe Γ álgebra hereditária, e $Z \in \text{mod } \Gamma$, módulo inclinante com $I \mid Z$, I injetivo, e $\Lambda \cong \text{End}_\Gamma(Z)^{\text{op}}$.

Demonstração:

(1) $\implies$ (2)

Pelo Teorema 3.2.1, se $\mathcal{R}_\Lambda$ contém um Ext-projetivo, concluímos que o conjunto dos Ext-projetivos indecomponíveis forma uma fatia. Seja Z a soma dos Ext-projetivos como no referido teorema.

Afirmção: Existe P projetivo tal que $P \mid Z$.

Suponhamos que nenhum somando de Z seja projetivo. Logo $DTr(Z_i) \neq 0$, $\forall Z_i \mid Z$, e segundo a classificação de Auslander-Smalø, $DTr(Z) \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$. Portanto para todo módulo $M \mid DTr(Z)$, existe $Y \in \text{ind}(\Lambda)$ / $di(Y) = 2$ com $M \rightsquigarrow Y$. Logo $\text{Hom}_\Lambda(TrD(Y), P) \neq 0$, para algum P projetivo. Também $di(Y) = 2 \implies Y \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, e portanto todo o caminho $M \rightsquigarrow Y$ fica incluído em $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$. Logo nenhum módulo que esteja no caminho pode ser injetivo. Então conseguimos $TrD(M) \rightsquigarrow TrD(Y) \xrightarrow{0 \neq f} P$. Como $M \mid DTr(Z)$, temos que $TrD(M) \mid Z$, e isto implica que $P \in \mathcal{R}_\Lambda$, pois esta subcategoria é fechada para sucessores. Mas, se $P \in \mathcal{R}_\Lambda$, por ser projetivo deduzimos que P é Ext-projetivo em $\mathcal{R}_\Lambda$. Logo $P \mid Z$, o que contradiz nossa suposição. Logo existe um módulo projetivo Q somando direto de Z .

(2) $\implies$ (1)

Evidente.

(3) $\iff$ (4)

É o dual ao provado acima.

(2) $\implies$ (5)

Se existe $P \in \mathcal{R}_\Lambda \implies \text{Hom}_\Lambda(P, \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda) = 0$. Logo $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ não é sincero.

(5) $\implies$ (2)

Se $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ não é sincero, existe P projetivo tal que $\text{Hom}_\Lambda(P, \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda) = 0$, e portanto

$P \in \mathcal{R}_\Lambda$.

Assim fica provado que (1), (2) e (5) são equivalentes.

(1) $\implies$ (6)

Seja Z a soma direta de um representante de cada classe de isomorfismo dos Ext-projetivos de $\mathcal{R}_\Lambda$. O módulo Z é inclinante em $\text{mod } \Gamma$, onde $\Gamma = \text{End}_\Lambda(Z)^{op}$. Segundo o Teorema 3.2.1, só faltaria provar que existe um módulo injetivo somando do inclinante. Seja $P \in \mathcal{R}_\Lambda$, módulo projetivo. (Existe pois (1) é equivalente a (2)). Consideramos também $I = D(P^*)$. Logo pelo Lema de conexão $\text{Hom}_\Lambda(Z, I)$ é um Γ -módulo injetivo. Mas $\text{Hom}_\Lambda(Z, I) = \text{Hom}_\Lambda(Z, D(P^*)) \mid \text{Hom}_\Lambda(Z, D(\Lambda^*))$. Agora $\text{Hom}_\Lambda(Z, D(\Lambda^*)) \cong D\text{Hom}_\Lambda(\Lambda^*, D(Z)) \cong D(D(Z)) \cong Z$, como Γ -módulos. Logo segue o resultado.

(3) $\implies$ (6)

É a demonstração dual da anterior.

(6) $\implies$ (1)

Se Γ é hereditária, T inclinante com I injetivo tal que $I \mid T$, e $\Lambda \cong \text{End}_\Gamma(T)^{op}$, então $\text{Hom}_\Gamma(T, I)$ é projetivo e pertence a $\mathcal{R}_\Lambda$. A primeira afirmação é clara. Provemos então que $\text{Hom}_\Gamma(T, I) \in \mathcal{R}_\Lambda$. Suponhamos que $Y = \text{Hom}_\Gamma(T, I) \rightsquigarrow X$, ou seja que X é um sucessor de Y .

Se $X \in \mathcal{Y}(T) \implies X \cong \text{Hom}_\Gamma(T, M)$ com M injetivo, e portanto $di(\text{Hom}_\Gamma(T, M)) \leq 1 + di(M) = 1$.

Se $X \in \mathcal{X}(T) \implies X \cong \text{Ext}_\Gamma^1(T, Q')$ com $Q' \in \mathcal{F}(T)$, e portanto $di(\text{Ext}_\Gamma^1(T, Q')) \leq di(Q') \leq 1$, pois Γ é hereditária.

Em ambas situações $di(X) \leq 1$, o que implica $Y \in \mathcal{R}_\Lambda$.

(6) $\implies$ (3)

É a demonstração dual da anterior. ■

Para o próximo resultado vamos recordar a noção de categoria covariantemente finita, introduzida em [AS].

Seja A uma álgebra de Artin e $\mathcal{C} \subset \text{ind}(A)$ uma subcategoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ é **covariantemente finita** em $\text{mod } A$ se para todo módulo $X \in \text{mod } A$, existe um morfismo $f_X : X \rightarrow C$, com $C \in \text{add}(\mathcal{C})$, chamado de **$\mathcal{C}$ -aproximação à esquerda minimal**, tal que todo morfismo $X \xrightarrow{g} D$, com $D \in \text{add}(\mathcal{C})$, se fatora através de f_X , ou seja temos:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f_X} & C \\
g \downarrow & \searrow \hat{g} & \\
D & &
\end{array}$$

De outro modo a subcategoria $\mathcal{C}$ é covariantemente finita $\Leftrightarrow$ para todo módulo $X \in \text{mod } A$, existe o morfismo $X \xrightarrow{f_X} C$ tal que $\text{Hom}_A(C, D) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f_X, D)} \text{Hom}_A(X, D)$ é um epimorfismo, $\forall D \in \text{add}(\mathcal{C})$.

Não é difícil de provar que uma subcategoria finita é covariantemente finita.

Proposição 3.2.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada de tipo de representação finita. Então Λ é uma álgebra inclinada.

Demonstração:

Já sabemos, segundo o provado na segunda seção do Capítulo 2, que uma álgebra de Artin Λ é quase inclinada $\Leftrightarrow$ é quase hereditária. Como Λ é de tipo de representação finita, temos que a subcategoria $\mathcal{R}$ é finita. Logo $\mathcal{R}$ é covariantemente finita, e portanto tem cobertura projetiva. Ou seja existe um módulo $P \in \text{mod } \Lambda$ tal que $\text{Gen}(P) = \text{add}(\mathcal{R}) = \hat{\mathcal{R}}$. Por outro lado $\hat{\mathcal{R}}$ é uma classe de torção para $(\hat{\mathcal{L}} \setminus \hat{\mathcal{R}}, \hat{\mathcal{R}})$. Então, segundo [Ass], $\hat{\mathcal{R}}$ contém Ext-projetivos. Concluimos, usando o Teorema 3.2.1, que Λ é inclinada. ■

No Capítulo 6, na última seção, apresentaremos uma generalização da proposição anterior.

Teorema 3.2.2

Seja Γ uma álgebra hereditária, T um módulo inclinante regular, e $\Lambda = \text{End}_\Gamma(T)^{op}$. Então $\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda$ é a componente de conexão de Γ_Λ .

Demonstração:

Observar que se existe um módulo T inclinante regular, Γ é necessariamente salvagem.

Seja Δ a componente de conexão de Γ_Λ . Provaremos no primeiro passo que $\Delta \subset \mathcal{L}_\Lambda$.

Seja $X \in \Delta$. Então $X \cong \text{Hom}_\Gamma(T, H)$ com H pré-injetivo, ou $X \cong \text{Ext}_\Gamma^1(T, Q)$ com Q

pós-projetivo. Seja $Y \in \text{ind}(\Lambda)$ com $Y \rightsquigarrow X$. Então $Y \cong \text{Ext}_\Gamma^1(T, Q')$ com Q' pós-projetivo (no caso que $Y \in \mathcal{X}$), ou $Y \cong \text{Hom}_\Gamma(T, M)$ com $M \in \mathcal{T}$ (no caso que $Y \in \mathcal{Y}$). No segundo caso já sabemos que $dp(\text{Hom}_\Gamma(T, M)) \leq 1, \forall M \in \mathcal{T}$. Só falta então provar que $dp(\text{Ext}_\Gamma^1(T, Q')) \leq 1$ se Q' é pós-projetivo.

Afirmção: Por ser T um módulo inclinante regular, existe $n \in \mathbb{N} / Q' \hookrightarrow T^n$.

Se Q' é projetivo temos $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$ pela condição (T_3) da definição de módulo inclinante, onde $T', T'' \in \text{add}(T)$. Portanto para um n adequado consegue se provar a afirmação.

Se Q' não é projetivo, existe $DTr(Q')$ e também é pós-projetivo. Mas por ser T regular a componente pós-projetiva de $\text{ind}(\Gamma) \subset \mathcal{F}(T) = \text{Cogen}(DTr(T))$, portanto existe $n \in \mathbb{N} / DTr(Q') \hookrightarrow (DTr(T))^n$. Logo existe $Q' \hookrightarrow T^n$ (é só aplicar TrD , já que nem $DTr(Q')$ nem $DTr(T)$ tem somandos injetivos). Assim fica provada a afirmação.

Mas toda subcategoria finita é covariantemente finita e portanto $\text{add}(T)$ é covariantemente finita, ou seja existe $f : Q' \rightarrow T' \in \text{add}(T)$ —aproximação à esquerda minimal. Logo, como tínhamos $Q' \hookrightarrow T^n$, tem que existir $h : T' \rightarrow T^n$ tal que $h \circ f = \iota$. Concluimos que f é um monomorfismo. Consideramos $C = \text{coker}(f)$, e portanto temos $(*) : 0 \rightarrow Q' \xrightarrow{f} T' \rightarrow C \rightarrow 0$. Logo “aplicamos $\text{Hom}_\Gamma(-, T)$ ” e obtemos:

$$\dots \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(T', T) \xrightarrow{\text{Hom}_\Gamma(f, T)} \text{Hom}_\Gamma(Q', T) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(C, T) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(T', T) = 0.$$

Mas $\text{Hom}_\Gamma(f, T)$ é um epimorfismo pois f é uma aproximação à esquerda minimal. Então $\text{Ext}_\Gamma^1(C, T) = 0$, e temos que $C \in \text{Gen}(T)$, o que nos permite concluir que $C \in \text{add}(T)$. Segue assim que a sequência $(*)$ é da forma: $0 \rightarrow Q' \xrightarrow{f} T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$ com $T', T'' \in \text{add}(T)$. “Apliquemos agora $\text{Hom}_\Gamma(T, -)$ ”. Obtemos:

$$0 = \text{Hom}_\Gamma(T, Q') \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(T, T') \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(T, T'') \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(T, Q') \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(T, T') = 0,$$

com $\text{Hom}_\Gamma(T, T'), \text{Hom}_\Gamma(T, T'')$ projetivos.

Portanto $dp(\text{Ext}_\Gamma^1(T, Q')) \leq 1$. Assim $\Delta \subset \mathcal{L}_\Lambda$. Analogamente pode se provar que $\Delta \subset \mathcal{R}_\Lambda$. Logo $\Delta \subset \mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda$.

Provemos agora a inclusão contrária:

Para isso vamos demonstrar que $\Delta^c \subset (\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda)^c$. Suponhamos que $N \cong \text{Ext}_\Gamma^1(T, X)$ com $X \in \mathcal{F}$ mas não pós-projetivo. Então X é regular. Logo, segundo [Baer], existe $m \geq 1 / \text{Hom}_\Gamma(T, DTr^m(X)) \neq 0$. (Observar que o trabalho de Baer pode ser aplicado

pois a álgebra hereditária considerada Γ é salvagem).

Seja n o menor natural possível com essa propriedade. Assim $DTr^{n-1}(X) \in \mathcal{F}$ e portanto $\text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)) \neq 0$. Mas temos um caminho em $\mathcal{F}$ desde $DTr^{n-1}(X)$ para X , então obtemos um caminho em $\text{ind}(\Lambda)$ desde $Y = \text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X))$, para $\text{Ext}_\Gamma^1(T, X) = N$. Ou seja $Y \rightsquigarrow N$. Provaremos que $dp_\Lambda(\text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X))) = 2$. Considero $m \in \mathbb{N} / \text{Hom}_\Gamma(T, T^m) \xrightarrow{f} \text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)) \rightarrow 0$ seja uma Λ -cobertura projetiva. Considero assim:

$$0 \rightarrow \ker(f) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}_\Gamma(T, T^m) \xrightarrow{f} \text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)) \rightarrow 0,$$

onde $\text{Hom}_\Gamma(T, T^m) \in \mathcal{Y}$, o que implica que $\ker(f) \in \mathcal{Y}$ pois $\mathcal{Y}$ é fechado para submódulos, e $\text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)) \in \mathcal{X}$. Então $\ker(f) = \text{Hom}_\Gamma(T, Z)$ para algum $Z \in \mathcal{J}$. Logo temos

$$(*) : 0 \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(T, Z) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}_\Gamma(T, T^m) \xrightarrow{f} \text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)) \rightarrow 0.$$

“Aplicamos $- \otimes_\Lambda T^m$ e obtemos

$$(\star) : 0 \rightarrow DTr^{n-1}(X) \cong \text{Tor}_1^\Gamma(\text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X)), T) \rightarrow Z \xrightarrow{\iota \otimes_\Lambda T^m} T^m \rightarrow 0.$$

Enxergando $(*)$ obtemos que $dp_\Lambda(\text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X))) = 2 \iff Z \notin \text{add}(T)$. Mas tínhamos que $\text{Hom}_\Gamma(T, DTr^n(X)) \neq 0$, e sabemos que

$$\text{Hom}_\Gamma(T, DTr^n(X)) \cong D\text{Ext}_\Gamma^1(DTr^{n-1}(X), T),$$

pelas fórmulas de A.R., e por ser Γ hereditária. Então $\text{Ext}_\Gamma^1(DTr^{n-1}(X), T) \neq 0$. Logo se “aplicamos $\text{Hom}_\Gamma(-, T)$ ” a $(\star)$, obtemos:

$$0 = \text{Ext}_\Gamma^1(T^m, T) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(Z, T) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(DTr^{n-1}(X), T) \rightarrow 0.$$

Logo $\text{Ext}_\Gamma^1(Z, T) \neq 0$ (pois $\text{Ext}_\Gamma^1(DTr^{n-1}(X), T) \neq 0$), e portanto $Z \notin \text{add}(T)$. Fica provado assim que $dp(Y \cong \text{Ext}_\Gamma^1(T, DTr^{n-1}(X))) = 2$, e como temos $Y \rightsquigarrow N$, concluímos que $N \notin \mathcal{L}_\Lambda$.

Analogamente podemos provar que $\text{Hom}_\Gamma(T, Y) \notin \mathcal{R}_\Lambda$ se Y é um módulo regular indecomponível pré-injetivo.

Então $\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda = \Delta$. ■

Murga no te apartes nunca
nunca de mi lado
Murga no te bajes nunca
nunca del tablado
Murga no te apartes nunca
nunca de la gente
Murga que el pasado
no te aleje del presente
Contrafarsa yo ya no sé
quién soy yo
soy la murga o qué
sólo existo por lo que sos
sólo tuya será mi voz
murga muza de inspiración
siempre hurtando mi corazón
viento en contra de la maldad
Contrafarsa te encontrará
boca abierta de la ilusión
esperanza a marcha camión
porque mi alma murgando está
tuya es toda mi claridad.

Mariana Ingold

Capítulo 4

PARELHAS DE TORÇÃO E SUBCATEGORIAS SEPARANTES.

4.1 Sobre pares de torção nas álgebras quase inclinadas.

Começamos este capítulo mostrando resultados gerais na teoria de torção, os quais serão aproveitados nas próximas demonstrações.

Proposição 4.1.1

As seguintes condições são equivalentes para uma par de torção $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$, associada a uma álgebra de Artin Λ :

1. *A par de torção $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ é cinde.*
2. *$\mathcal{F}$ é fechada para predecessores (indecomponíveis).*
3. *$\mathcal{T}$ é fechada para sucessores (indecomponíveis).*

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sejam $U \in \text{ind}(\Lambda)$, e $Y \in \mathcal{F}$ tais que $\text{Hom}_{\Lambda}(U, Y) \neq 0$. Então $U \notin \mathcal{T}$, e como a par de torção é cinde, concluímos que $U \in \mathcal{F}$. Logo $\mathcal{F}$ é fechada para predecessores.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Seja $U \in \text{ind}(\Lambda) \setminus \mathcal{F}$. Então $\text{Hom}_\Lambda(U, \mathcal{F}) = 0$, pois $\mathcal{F}$ é fechado para predecessores. Logo $U \in \mathcal{T}$.

Analogamente pode-se provar a equivalência $(1) \Leftrightarrow (3)$. ■

Outro resultado que devemos ressaltar é uma classificação feita por Auslander e Smalø em [AS]:

Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ uma parêlha de torção na categoria $\text{mod } \Lambda$.

1. Se $M \in \mathcal{T}$ é um módulo indecomponível, então:

$$M \text{ é Ext-projetivo em } \mathcal{T} \iff DTr(M) \in \mathcal{F}.$$

2. Se $N \in \mathcal{F}$ é um módulo indecomponível, então:

$$N \text{ é Ext-injetivo em } \mathcal{F} \iff TrD(M) \in \mathcal{T}.$$

Notaremos a partir de agora: $\tilde{\mathcal{L}} = \text{add}(\mathcal{L})$, e $\tilde{\mathcal{R}} = \text{add}(\mathcal{R})$.

Lema 4.1.1

1. $\tilde{\mathcal{L}}$ é fechada para submódulos e para extensões.
2. $\tilde{\mathcal{R}}$ é fechada para quocientes e para extensões.

Demonstração:

1. Consideremos o seguinte monomorfismo: $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$, onde $N \in \tilde{\mathcal{L}}$. Suponhamos que $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$, e $N = \bigoplus_{j=1}^n N_j$, e $f = (f_i^j)_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$. Como f é um monomorfismo, concluimos que dado $1 \leq i \leq m$, existe $1 \leq j \leq n$, tal que $f_i^j \neq 0$. Como $N_j \in \mathcal{L}$, que é fechada para predecessores, deduz-se que $M_i \in \mathcal{L}$. Logo $M \in \tilde{\mathcal{L}}$.
Consideremos agora a seguinte sequência exata curta: $0 \rightarrow M \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{h} N \rightarrow 0$, onde $M, N \in \tilde{\mathcal{L}}$. Seja Q' um somando direto indecomponível de Q . Temos duas

possibilidades:

- (i) Se $h_{|Q'} = 0$, então $Q' \cong M' \mid M$, e portanto $Q' \in \mathcal{L}$.
- (ii) Se $h_{|Q'} \neq 0$, então existe N' somando indecomponível de N , tal que Q' é predecessor de N' . Logo $N' \in \mathcal{L}$.

2. Demonstração análoga. ■

Segue do Lema anterior e da primeira seção do Capítulo 3, que $\tilde{\mathcal{L}}$ é uma classe livre de torção para alguma parêlha de torção, e $\tilde{\mathcal{R}}$ é uma classe de torção para outra parêlha de torção.

Proposição 4.1.2

Seja Λ uma álgebra de Artin quase hereditária.

- 1. $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$ é uma parêlha de torção.
- 2. $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}})$ é uma parêlha de torção.

Demonstração:

- 1. Segundo o Lema 4.1.1, $\tilde{\mathcal{L}}$ é uma classe livre de torção, e portanto tem associada uma classe de torção: $\{ M \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Hom}_\Lambda(M, \tilde{\mathcal{L}}) = 0 \}$. Mas $\text{Hom}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}) = 0$, mas sabemos, segundo a Proposição 1.2.1 que $\mathcal{L} \cup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}) = \text{ind}(\Lambda)$. Concluimos que $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$ é a classe de torção associada a $\tilde{\mathcal{L}}$.
- 2. Demonstração análoga. ■

Estamos em condições de provar os seguintes resultados anunciados na segunda seção do Capítulo 2:

Proposição 4.1.3

Toda álgebra quase hereditária é quase inclinada.

Demonstração:

Se Λ é quase hereditária, segundo a Proposição 2.1.2, temos que $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{L})$. Definimos

portanto $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{L}}$, e $\mathcal{X} = \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$. Como Λ é quase hereditária, segundo a Proposição 4.1.2, $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$ é uma parrelha de torção, que evidentemente cinde. Então temos uma parrelha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que cinde, onde $\Lambda \in \mathcal{Y}$. Só faltaria provar que $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. Mas $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{L}}$, e logo, pela definição de $\mathcal{L}$, concluímos que $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$. ■

Proposição 4.1.4

Toda álgebra quase hereditária é quase co-inclinada.

Demonstração:

Consideremos Λ um álgebra quase hereditária e a parrelha de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, onde $\mathcal{Y} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$, e $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{R}}$. Assim segundo a Proposição 4.1.2, $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ é uma parrelha de torção que cinde. Mas, como Λ é quase hereditária, temos que os módulos injetivos indecomponíveis pertencem a $\mathcal{R}$, e portanto $D\Lambda \in \mathcal{X}$. Por outro lado, sabemos que $di(\mathcal{R}) \leq 1$ e portanto $di(\mathcal{X}) \leq 1$, pois $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{R}}$. Concluímos que Λ é quase co-inclinada. ■

Proposição 4.1.5

Seja $\mathcal{Y}$ uma classe livre de torção de uma parrelha de torção $(\mathcal{Y},)$ que verifica as condições da definição de álgebra quase inclinada (isto é: $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$, $\Gamma \in \mathcal{Y}$, e $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde). Então: $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R} \subset \mathcal{Y} \subset \tilde{\mathcal{L}}$, e $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{R}}$.

Demonstração:

Seja $Y \in \mathcal{Y}$ indecomponível e considere outro módulo indecomponível X tal que existe um caminho $X \rightsquigarrow Y$. Como a parrelha de torção cinde, deduzimos que $\mathcal{Y}$ é fechada para predecessores, e portanto $X \in \mathcal{Y}$. Mas temos que $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$, então $dp(X) \leq 1$. Assim, para todo módulo indecomponível X predecessor de Y temos que $dp(X) \leq 1$. Então $Y \in \mathcal{L}$. Portanto $\mathcal{Y} \cap \text{ind}(\Lambda) \subset \mathcal{L}$. Como $\tilde{\mathcal{L}}$ é fechada para extensões concluímos que $\mathcal{Y} \subset \tilde{\mathcal{L}}$.

Analogamente prova-se que $\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{R}}$. Mas $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ é uma parrelha de torção que cinde, então surgem as inclusões: $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R} \subset \mathcal{Y} \subset \tilde{\mathcal{L}}$, e $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{R}}$. ■

Apesar de que o próximo resultado já foi provado no Capítulo 2, mostramos uma nova versão (mais simples) da demonstração, que surge das proposições anteriores:

Proposição 4.1.6

São equivalentes:

1. Uma álgebra de Artin é quase hereditária.

2. $\tilde{\mathcal{L}}$ contém os módulos projetivos.

3. $\tilde{\mathcal{R}}$ contém os módulos injetivos.

Demonstração:

(1) $\implies$ (2)

Como Λ é quase hereditária deduzimos, segundo a Proposição 4.1.3, que Λ é quase inclinada. Logo existe uma parêlha de torção que cinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ tal que $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$, e $\Lambda \in \mathcal{Y}$. Mas, como vimos na Proposição 4.1.5, verifica-se a inclusão $\mathcal{Y} \subset \tilde{\mathcal{L}}$. Logo $\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}$.

(2) $\implies$ (1)

Considero a parêlha de torção $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{R} \setminus \tilde{\mathcal{L}})$. Esta é uma parêlha de torção que cinde e tal que $dp(\tilde{\mathcal{L}}) \leq 1$. Mas por hipótese $\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}$, e portanto Λ é quase inclinada o que é equivalente a ser quase hereditária.

(1) $\iff$ (2)

Demonstrações análogas às anteriores. ■

O objetivo dos próximos resultados é simplesmente acrescentar mais informação à teoria.

Proposição 4.1.7

Seja Λ uma álgebra quase hereditária que não é inclinada.

1. $\tilde{\mathcal{L}}$ é a maior classe livre de torção que satisfaz as condições da definição de álgebra quase inclinada.

2. $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$ é a menor classe livre de torção que satisfaz as condições da definição de álgebra quase inclinada.

Demonstração:

1. Segue direto da Proposição 4.1.5 e da Proposição 4.1.6. Observe que não é necessária para este ponto a hipótese de que Λ não seja inclinada.

2. Da Proposição 4.1.5 concluímos que $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R} \subset \mathcal{Y}$ para toda classe livre de torção $\mathcal{Y}$ que satisfaz as condições da definição. Só faltaria provar que $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$ também satisfaz as condições da definição.

Como Λ não é inclinada segue da Proposição 2.1.2 que $\tilde{\mathcal{R}}$ não contém projetivos. Então $\Lambda \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$. Por outro lado sabíamos que $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}})$ é uma parêlha de torção que cinde, e $dp(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \leq 1$, pois $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \subset \tilde{\mathcal{L}}$. Logo o resultado está provado. ■

Dada uma álgebra de Artin Λ qualquer, consideramos

$$\Xi = \{ Y \in \text{ind}(\Lambda) / Y \rightsquigarrow P, \text{ para algum módulo projetivo } P \}.$$

É fácil mostrar que Ξ é fechado para predecessores indecomponíveis e daí, fazendo o mesmo tipo de raciocínio que no Lema 4.1.1, podemos concluir que Ξ é fechado para submódulos e para extensões. Assim Ξ é uma classe livre de torção para alguma teoria de torção.

Proposição 4.1.8

Seja Λ uma álgebra quase inclinada, e não inclinada. Então $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R} = \Xi$.

Demonstração:

Seja $Y \in \Xi$. Então existe um módulo P projetivo tal que $Y \rightsquigarrow P$. Como Λ é quase inclinada, temos que $P \in \mathcal{L}$, que é uma subcategoria fechada para predecessores. Então $Y \in \mathcal{L}$. Por outro lado, se tivéssemos que $Y \in \mathcal{R}$, como esta é uma subcategoria fechada para sucessores, obteríamos que $P \in \mathcal{R}$ o que é uma contradição pois Λ não é inclinada. Logo fica provado que $\Xi \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.

Seja agora um módulo $Y \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$. Então existe um módulo $X \in \text{ind}(\Lambda)$ tal que $di(X) = 2$ e $Y \rightsquigarrow X$. Como $di(X) = 2$, deduzimos que $\text{Hom}_{\Lambda}(Tr D(X), \Lambda) \neq 0$. Logo concluímos que existe $Y \rightsquigarrow X \rightsquigarrow P$, com P projetivo. Então $Y \in \Xi$, e assim fica provado que $\Xi = \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$. ■

4.2 Sobre subcategorias separantes em álgebras quase hereditárias.

Como foi observado na introdução, as álgebras hereditárias tem um papel importante na teoria de representações. Algumas das suas propriedades (as mais conhecidas), já foram desenvolvidas, mas gostaríamos de enfatizar a seguinte:

Temos no caso em que $k\Gamma$ é de tipo infinito, o seguinte esquema:

A terna $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ determina uma triseção e define a $\mathcal{R}$, como “subcategoria separante”. Ou seja, verificam-se as seguintes propriedades:

- (i) $\text{ind}(\Lambda) = \mathcal{P} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{Q}$.
- (ii) $\text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$; $\text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$; $\text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{Q}, \mathcal{R}) = 0$.
- (iii) Todo morfismo $f : P \rightarrow Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$, se fatora através de um objeto de $\mathcal{R}$.

Por último também vale que:

- (iv) Todo módulo projetivo indecomponível pertence a $\mathcal{P}$, e todo módulo injetivo indecomponível pertence a $\mathcal{Q}$.

A noção de triseção também tem sua participação no nosso trabalho. Temos resultados sobre este conceito na teoria de álgebras inclinadas:

Teorema 4.2.1

Se H é uma álgebra hereditária, e T um módulo inclinante sobre H , e consideramos $\Lambda = \text{End}_{\Lambda}(T)^{op}$, então $\mathcal{R} = \text{add}(\text{Hom}_H(T, DH))$ é uma subcategoria separante em $\text{ind}(\Lambda)$.

Demonstração:

Definimos $\mathcal{P} = \mathcal{Y}(T) \setminus \text{add}(\text{Hom}_H(T, DH))$; $\mathcal{R} = \text{add}(\text{Hom}_H(T, DH))$, e $\mathcal{Q} = \mathcal{X}(T)$.

- (i) Por ser H hereditária, temos que $\mathcal{Y}(T) \cup \mathcal{X}(T) = \text{ind}(\Lambda)$, e portanto pode-se concluir

que $\mathcal{P} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{Q} = \text{ind}(\Lambda)$.

(ii) Evidentemente $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{Q}, \mathcal{R}) = 0$; e $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$.

Porque $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$? Se $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{P}) \neq 0$, basta aplicar o funtor $-\otimes_H T$, para obter que $\text{Hom}_H(DH, \mathcal{T}(T) \setminus DH) \neq 0$, o que é absurdo pois H é hereditária.

(iii) Só resta provar que todo morfismo $f : P \rightarrow Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$, se fatora através de $\mathcal{R}$. Se $P \in \mathcal{P}$, então $P = \text{Hom}_H(T, X)$ com $X \in \mathcal{T}(T)$, e X não injetivo. Considero a resolução injetiva de X : $0 \rightarrow X \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$. “Aplicamos $\text{Hom}_H(T, -)$ ”, e conseguimos

$$0 \rightarrow \text{Hom}_H(T, X) \rightarrow \text{Hom}_H(T, I_1) \rightarrow \text{Hom}_H(T, I_2) \rightarrow \text{Ext}_H^1(T, X) = 0.$$

Logo temos uma sequência

$$\zeta : 0 \rightarrow P \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow 0, \text{ com } R_1, R_2 \in \mathcal{R}.$$

Agora se $Q \in \mathcal{Q}$, então $\text{Tr}D(Q) \in \mathcal{Q}$, pois $\mathcal{Q} = \mathcal{X}(T)$ é fechado para sucessores. Logo $\text{Hom}_H(\text{Tr}D(Q), R_2) = 0$ e portanto $\text{Ext}_H^1(R_2, Q) = D\underline{\text{Hom}}_H(\text{Tr}D(Q), R_2) = 0$. Finalmente, se consideramos o “push-out” de ζ com respeito a f , obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} \zeta : & 0 & \rightarrow & P & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_2 & \rightarrow & 0 \\ & & & f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \parallel & & 1 \\ \xi : & 0 & \rightarrow & Q & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Como $\text{Ext}_H^1(R_2, Q) = 0$, temos que ξ cinde e portanto f se fatora através de R_1 . ■

Podemos observar que existem outras possíveis definições para $\mathcal{R}$, nas quais ela continua sendo uma categoria separante:

Observação 4.2.1

Se H é uma álgebra hereditária, T é um módulo inclinante sobre H , e consideramos $\Lambda = \text{End}_H(T)^{op}$, então $\mathcal{R} = \text{add}(\text{comp}(\text{Hom}_H(T, DH))) = \text{add}(\text{comp. de conexão})$, é uma subcategoria separante para $\text{ind}(\Lambda)$.

Demonstração:

A demonstração é análoga à feita na proposição anterior. ■

Em relação às nossas álgebras quase hereditárias, temos demonstrado já no primeiro capítulo que a terna $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$ define uma trisecção pois:

1. $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}) = \text{ind}(\Lambda).$

2. Evidentemente são categorias disjuntas.

Quais propriedades de subcategoria separante verifica $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$?

(i) $\text{ind}(\Lambda) = (\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$, pois tínhamos que $\text{ind}(\Lambda) = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$.

(ii) Também se verificam:

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) = 0; \text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = 0; \text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}) = 0.$$

No caso que Λ seja quase hereditária e não inclinada, verifica-se também:

(iv) Todo módulo projetivo indecomponível pertence a $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$, e todo módulo injetivo indecomponível pertence a $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.

Finalmente a condição (iii) da definição de subcategoria separante não é necessariamente verdadeira. (Inclusive não se sabe se $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$).

Uma pergunta interessante para álgebras quase hereditárias, poderia ser, saber quando existem outras trisecções que satisfazem as condições de separação (i), (ii) e (iii).

Em geral, se temos uma trisecção $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, que satisfaz (i) e (ii) das condições de separação, então $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C})$ e $(\mathcal{A}, \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ são pares de torção que cindem.

Proposição 4.2.1

Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ uma trisecção, para uma álgebra de Artin Λ , que satisfaz (i), (ii), e (iv), das condições de separação. Então Λ é quase hereditária.

Demonstração:

Seja $X \in \text{ind}(\Lambda)$. Sabemos que $di(X) \geq 2 \Leftrightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Tr}D(X), \Lambda) \neq 0$. Portanto se $di(X) = 2$, obtemos um caminho $X \rightsquigarrow \text{Tr}D(X) \rightsquigarrow P$, para algum projetivo indecomponível P . Pela condição (iv), $P \in \mathcal{A}$, que é uma subcategoria fechada para predecessores pois $(\mathcal{A}, \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ é uma par de torção que cinde. Logo $X \in \mathcal{A}$. Concluimos que $di(X) = 2$ implica que $X \in \mathcal{A}$. Portanto $di(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \leq 1$.

Analogamente poderíamos provar que $dp(X) \leq 1, \forall X \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Mas pela condição (i) temos $\text{ind}(\Lambda) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, e portanto para todo módulo $X \in \text{ind} \Lambda$,

verifica-se que $di(X) \leq 1$ ou $dp(X) \leq 1$.

Consideremos agora a apresentação projetiva minimal de um módulo simples S qualquer $0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow P \xrightarrow{f} S \rightarrow 0$. Como $P \in \mathcal{A}$, subcategoria fechada para predecessores, temos que $\ker(f) \in \mathcal{A}$. Portanto $dp(\ker(f)) \leq 1$, e então $dp(S) \leq 2$, $\forall S$ simples.

Concluimos que $dgl(\Lambda) \leq 2$, e portanto Λ é quase hereditária. ■

Vocês e nós

*...vocês quando se amam
ao analista vão
ele é que determina
se o fazem bem ou mal*

*nós quando nos amamos
sem carimbo oficial
o velho subconsciente
sente que isso é legal*

*vocês quando se amam
exigem bem-estar
uma cama de cedro
e um colchão especial*

*nós quando nos amamos
é fácil de ajeitar
com lençóis que bom
sem lençóis dá igual.*

Mario Benedetti

Capítulo 5

CONSTRUÇÃO DE ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.

5.1 Construção de álgebras quase hereditárias.

Proposição 5.1.1

Seja Λ uma álgebra quase hereditária sobre um corpo k algebricamente fechado. Então:

1. Existem álgebras hereditárias R e S e um $R - S$ bimódulo ${}_S M_R$ tais que:

$$\Lambda \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_S M_R & S \end{pmatrix}$$

2. A aljava ordinária de Λ não tem ciclos.

Demonstração:

1. Sejam $S_1, S_2, \dots, S_t$ os módulos simples em $\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, e $S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_n$ os módulos simples em $\mathcal{R}_\Lambda$. Considero $P_i = P(S_i)$ e $I_i = I(S_i)$ com $i = 1, \dots, n$. Seja $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_t$, $Q = P_{t+1} \oplus \dots \oplus P_n$, e $I = I_{t+1} \oplus \dots \oplus I_n$. Como $S_i \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, $\forall i = 1, \dots, t$, deduzimos que $dp(S_i) \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, t$. Logo, se consideramos as sequências $0 \rightarrow r(P_i) \rightarrow P_i \rightarrow \frac{P_i}{r(P_i)} \cong S_i \rightarrow 0$, concluímos que $r(P_i)$ é projetivo $\forall i = 1, \dots, t$. Consideremos agora os módulos semisimples $\frac{r(P_i)}{r^2(P_i)}$, $\forall i = 1, \dots, t$.

Afirmção: Para todo módulo simples S_j tal que $S_j \mid \frac{r(P_i)}{r^2(P_i)}$, verifica-se que S_j é

predecessor de S_i .

Considero:

$$S_j \hookrightarrow \frac{r(P_i)}{r^2(P_i)} \hookrightarrow \frac{P_i}{r^2(P_i)} \twoheadrightarrow \frac{\frac{P_i}{r^2(P_i)}}{\frac{r(P_i)}{r^2(P_i)}} \cong \frac{P_i}{r(P_i)} \cong S_i.$$

Esta sequência de morfismos prova que $S_j \rightsquigarrow S_i$. Logo $S_j \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$ e portanto $1 \leq j \leq t$. Então $r(P_i)$ é projetivo e $\forall j$ tal que $S_j \mid \frac{r(P_i)}{r^2(P_i)}$ temos que $1 \leq j \leq t$. Concluimos que $r(P_i) \in \text{add}(P)$, e isto implica que os fatores de composição dos módulos projetivos P_i com $i = 1, \dots, t$, são exatamente $S_1, \dots, S_t$.

Logo se “aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(P, -)$ ” à sequência $0 \rightarrow r(P_i) \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$, obtemos:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, r(P_i)) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, P_i) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, S_i) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(P, r(P_i)) = 0.$$

Então para todo módulo simples $S_i \in \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda$, obtemos uma cobertura projetiva na categoria dos $\text{End}_\Lambda(P)^{op}$ -módulos, do módulo $\text{Hom}_\Lambda(P, S_i)$. Portanto podemos concluir que $dp(\text{Hom}_\Lambda(P, S_i)) \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, t$.

Afirmção: $\text{End}_\Lambda(P)^{op}$ é hereditária.

De fato, o número de simples em $\text{End}_\Lambda(P)^{op}$ é t , e por outro lado $\text{Hom}_\Lambda(P, S_i)$ é simples, $\forall i = 1, \dots, t$, pois se existesse um módulo N incluído estritamente em $\text{Hom}_\Lambda(P, S_i)$, aplicamos $- \otimes P$ que é um funtor exato, e obtemos $N \otimes P$ incluído estritamente em S_i , o que é uma contradição. Então $\{ \text{Hom}_\Lambda(P, S_i) \mid i = 1, \dots, t \}$ é o conjunto de todos os simples de $\text{End}_\Lambda(P)^{op}$. Assim $dgl(\text{End}_\Lambda(P)^{op}) \leq 1$.

Analogamente conclui-se que $\text{End}_\Lambda(I)^{op}$ é hereditária. Mas $\text{add}(Q)$ e $\text{add}(I)$ são categorias equivalentes, e isto implica que $\text{End}_\Lambda(Q)^{op}$ é hereditária. Temos que $\forall j = t+1, \dots, n$, S_j não é fator de composição de P_i , $\forall i = 1, \dots, t$, e portanto $\text{Hom}_\Lambda(P_j, P_i) = 0$. Logo $\text{Hom}_\Lambda(Q, P_i) = 0$, $\forall i = 1, \dots, t$, o que implica $\text{Hom}_\Lambda(Q, P) = 0$.

Assim podemos escrever $\Lambda \cong \text{End}_\Lambda(\Lambda) \cong \text{End}_\Lambda(P' \oplus Q') \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_S M_R & S \end{pmatrix}$, com $P' \in \text{add}(P)$, $Q' \in \text{add}(Q)$. $R = \text{End}_\Lambda(P')$ hereditária, $S = \text{End}_\Lambda(Q')$ hereditária, e $M = \text{Hom}_\Lambda(P', Q')$. Observamos finalmente que se Λ for básica, teríamos $\Lambda \cong \text{End}_\Lambda(P \oplus Q) \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_S M_R & S \end{pmatrix}$ com $R = \text{End}_\Lambda(P)$ hereditária, $S = \text{End}_\Lambda(Q)$ hereditária, e $M = \text{Hom}_\Lambda(P, Q)$.

2. Pelo demonstrado anteriormente $\Lambda \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_S M_R & S \end{pmatrix}$, com R e S hereditárias. Portanto as aljavas ordinárias de R e S não tem ciclos orientados. Como a aljava de Λ é obtida a partir das aljavas de R e S , colando as mesmos com flechas (determinadas pela estrutura de M), desde a aljava de R para a aljava de S , concluímos que a nova aljava também não tem ciclos orientados. ■

Proposição 5.1.2

Seja Λ uma álgebra de Artin, P um Λ -módulo projetivo finitamente gerado e $\Gamma = \text{End}_\Lambda(P)^{op}$. Se Λ é quase hereditária, então Γ é quase hereditária.

Demonstração:

Λ é quase hereditária $\iff \mathcal{L}_\Lambda$ contém todos os módulos projetivos de $\text{ind}(\Lambda)$.

Γ é quase hereditária $\iff \mathcal{L}_\Gamma$ contém todos os módulos projetivos de $\text{ind}(\Gamma)$.

Consideramos $\text{mod} - P$ a subcategoria plena de $\text{mod} \Lambda$ que contém aqueles módulos X com apresentação projetiva: $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$, onde $P_0, P_1 \in \text{add}(P)$. Então, segundo a Proposição 2.5 do Capítulo II do [ARS], $\text{Hom}_\Lambda(P, -)|_{\text{mod} - P} : \text{mod} - P \rightarrow \text{mod} \Gamma$ é uma equivalência onde $\text{add}(P)$ se corresponde com os projetivos de $\text{mod} \Gamma$. Consideramos $X \in \text{ind}(\Gamma) / X \rightsquigarrow Q$ com Q projetivo em $\text{ind}(\Gamma)$. Então existe $Y \in \text{mod} - P / \text{Hom}_\Lambda(P, Y) \cong X$, existe $P' \in \text{add}(P) / \text{Hom}_\Lambda(P, P') \cong Q$ e existe $Y \rightsquigarrow P'$ em $\text{mod} - P$. Pela hipótese $P' \in \mathcal{L}$ e logo $dp(Y) \leq 1$. Como $Y \in \text{mod} - P$, se $dp(Y) \leq 1$, temos que $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_0} P_0 \rightarrow Y \rightarrow 0$ é sua resolução projetiva com $P_1, P_0 \in \text{add}(P)$. Assim temos

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, P_1) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, P_0) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, Y) \cong X \rightarrow 0$$

e portanto $dp(X) \leq 1$. Concluímos que todo módulo projetivo $Q \in \mathcal{L}_\Gamma$. Logo Γ é quase hereditária. ■

Observação 5.1.1

Existe uma condição suficiente para que uma álgebra $\Gamma = \text{End}_\Lambda(T)^{op}$ seja quase hereditária, quando Λ é uma álgebra quase hereditária e T é um Λ -módulo inclinante.

Esta é:

Proposição:

(Artigo [HRS1], Proposição 2.6)

Seja Λ uma álgebra de Artin quase hereditária, e $T \in \text{mod } \Lambda$. Então:

1. Se $T \in \text{mod } \Lambda$ é um módulo inclinante, e $T \in \tilde{\mathcal{L}}$ então $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(T)^{op}$ é quase hereditária.
2. Se $T \in \text{mod } \Lambda$ é um módulo co-inclinante, e $T \in \tilde{\mathcal{R}}$ então $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(T)^{op}$ é quase hereditária. ■

Por todo Chile.

No, no, no, no son campanas, no, no,
no son de muerte, que son de vida,
son todo un pueblo de compañeros,
todos hermanos,

cientos de miles por todo Chile.

Si, si, si, que son obreros, si, si,
son campesinos, son los mineros,
los estudiantes, los pobladores,

los que resisten,

cientos de miles por todo Chile.

No, no, no, nadie te olvida, no, no,
Manuel Rodríguez, de tu silencio
nacen violetas, se abren caminos,

y crecen niños,

cientos de miles, por todo Chile.

Si, si, si, el cobre es nuestro, si, si,
no ha de bastarnos, queremos todo,
lo siempre ajeno, lo nunca nuestro,

lo tomaremos,

cientos de miles por todo Chile.

No, no, no, manos vacías, no, no,
si nos preguntan, contestaremos,
con el arado, con el martillo,

y el guerrillero,

cientos de miles por todo Chile.

Si, si, si, con alegría, si, si, si,
haremos nuestra la cordillera,
la patria toda, su ancha ternura,
su fuerza larga,

cientos de miles por todo Chile.

Cientos de miles por todo Chile.

Todos armados por todo Chile.

Cientos de miles por todo Chile.

Daniel Viglietti

*Dedicado a esos chilenos, barra de sinceros buenos compañeros y malísimos
futbolistas.*

Capítulo 6

COMPONENTES DE AUSLANDER-REITEN DAS ÁLGEBRAS QUASE HEREDITÁRIAS.

O objetivo deste capítulo é mostrar resultados, sob variadas hipóteses, acerca da relação entre as componentes da aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra quase hereditária e as subcategorias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$. Porém, depois da primeira seção de preliminares, prova-se, na segunda seção, que toda componente com ciclos orientados, é um tubo semiregular.

6.1 Preliminares.

Lema 6.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin, onde

$$(*) : X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_t = X$$

é um ciclo orientado de módulos indecomponíveis. Se $(DTr)^i(X_j) \neq 0$, $\forall 1 \leq i \leq r \in \mathbb{N}$ e $\forall 0 \leq j \leq t$, então existe um caminho de morfismos irredutíveis desde X para $(DTr)^r(X)$.

Demonstração:

Segundo o resultado de [BS], não existem ciclos seccionais. Logo existe $2 \leq l \leq t$ com

$DTr(X_l) \cong X_{l-2}$. Mas pela hipótese existe $DTr(X_j)$, $\forall 0 \leq j \leq l$, e portanto obtemos

$$(*) : DTr(X) = DTr(X_0) \rightarrow DTr(X_1) \rightarrow \dots \rightarrow DTr(X_l) = DTr(X).$$

Lembramos que um ciclo orientado é um caminho de morfismos irredutíveis desde um módulo para se mesmo, e portanto $(*)$ e $(*)$ estão formados por morfismos irredutíveis. Como tínhamos que $DTr(X_l) \cong X_{l-2}$, obtemos de $(*)$ e $(*)$ o seguinte caminho de morfismos irredutíveis

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{l-2} \cong DTr(X_l) \rightarrow DTr(X_{l+1}) \rightarrow \dots \rightarrow DTr(X_l) = DTr(X)$$

Logo aplicando DTr , $(r-1)$ vezes e concatenando, obtemos o resultado. ■

Definição 6.1.1

Seja Γ uma componente de Γ_Λ , para uma álgebra de Artin Λ .

1. Denotaremos por ${}_l\Gamma$ o setor estável à esquerda de Γ obtido logo de eliminar as DTr -órbitas dos projetivos de Γ .
2. Denotaremos por ${}_r\Gamma$ o setor estável à direita de Γ obtido logo de eliminar as DTr -órbitas dos injetivos de Γ .
3. Denotaremos por ${}_s\Gamma$ o setor estável de Γ obtido logo de eliminar as DTr -órbitas dos projetivos e dos injetivos de Γ .
4. Sejam $M, N \in ind(\Lambda)$. Denotaremos por $M \text{---} N$, se existe $M \xrightarrow{irr.} N$, ou existe $N \xrightarrow{irr.} M$.
5. Diremos que existe um passeio entre M e N em Γ , se temos

$$M = X_0 \text{---} X_1 \text{---} \dots \text{---} X_n = N.$$

Nesse caso denotaremos $M \sim N$.

Lema 6.1.2

Seja Λ uma álgebra de Artin e $n = rk(K_0(\Lambda))$. Seja Γ uma componente conexa de Γ_Λ e Γ' uma componente conexa de ${}_s\Gamma$. Assumamos que Γ' contém infinitas DTr -órbitas, e que Γ não contém ciclos orientados. Seja M um módulo em Γ' tal que o comprimento de todos os passeios desde um módulo não estável para a órbita de M ($\mathcal{O}(M)$) é maior ou igual que $2n$. Então $\forall r \geq 1$ existe um caminho

$$M = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_l = (DTr)^r(M)$$

em $\text{mod } \Lambda$ com $X_i \in \Gamma$, $\forall i = 0, 1, \dots, l$.

Demonstração:

Pelo Lema 4 do [Sko] que apresentamos no apêndice, existe um caminho

$$(*) : M = X'_0 \rightarrow X'_1 \rightarrow \dots \rightarrow X'_l = M$$

em $\text{mod } \Lambda$ com $X'_i \in \Gamma$, $\forall i = 1, \dots, l$. Lembramos que se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo entre módulos tal que $f \notin \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$, então podemos conseguir um caminho $A \rightsquigarrow B$ de morfismos irredutíveis.

Mas Γ não contém ciclos orientados, o que implica que pelo menos um dos morfismos em $(*)$ tem que pertencer ao $\text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$. Então conseguimos um caminho

$$M = Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} \dots \rightarrow Y_r \xrightarrow{f_r} \dots \rightarrow Y_{r+n} \xrightarrow{f_{r+n}} Y_{r+n+1} \xrightarrow{f_{r+n+1}} M$$

onde os morfismos $f_r, \dots, f_{r+n+1}$ são irredutíveis.

Consideramos o caminho de morfismos irredutíveis

$$(\star) : Y_r \xrightarrow{f_r} Y_{r+1} \xrightarrow{f_{r+1}} \dots \rightarrow Y_{r+n} \xrightarrow{f_{r+n}} Y_{r+n+1} \xrightarrow{f_{r+n+1}} Y_{r+n+2} = M.$$

Logo, deduzimos que $Y_{r+2}, \dots, Y_{r+n+1} \in \Gamma'$, pois são $n \leq 2n$ morfismos irredutíveis. Mas em Γ não existem ciclos orientados, portanto $Y_j \not\cong Y_k$ se $r+2 \leq j, k \leq r+n+2$, $j \neq k$. Logo, pelo Lema 2 de [Sko], temos que existem h, l tal que $r+2 \leq h, l \leq r+n+2$, e $0 \neq g \in \text{Hom}_\Lambda(Y_h, DTr(Y_l))$. Assim

$$M = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_h \xrightarrow{g} DTr(Y_l) \rightarrow DTr(Y_{l+1}) \rightarrow \dots \rightarrow DTr(Y_{r+n+2}) = DTr(M),$$

e um caminho desde M para $DTr(M)$ através de módulos em Γ .

Mas, é evidente que $DTr(M)$ também pertence à $\mathcal{O}(M)$, e portanto $DTr(M)$ está nas mesmas condições de M . Logo podemos repetir os argumentos para $(DTr)^i(M)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

■

Corolário 6.1.1

Seja Λ uma álgebra de Artin e Γ uma componente regular de Γ_Λ com infinitas DTr -órbitas. Então, $\forall M \in \Gamma$ e $\forall r \geq 1$, existe um caminho em $\text{mod } \Lambda$ desde M para $(DTr)^r(M)$.

6.2 Componentes com ciclos orientados.

Teorema 6.2.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada, e seja Γ uma componente de Γ_Λ que contém um ciclo orientado. Então Γ é um tubo semiregular.

Demonstração:

Seja Γ uma componente como na hipótese.

Afirmção: Γ tem que ser infinita.

Se fosse finita, teríamos que Λ é de tipo de representação finita, e portanto seria inclinada com $\Gamma = \Gamma_\Lambda$ sendo a componente de conexão. Mas nesse caso não pode existir um ciclo orientado em Γ , já que o ciclo não pode ficar incluído em $\mathcal{Y}$, (pois implicaria que existe um ciclo orientado na componente pré-injetiva da aljava de Auslander-Reiten da álgebra hereditária), e analogamente o ciclo não pode ficar contido em $\mathcal{X}$. Logo o ciclo passaria por $\mathcal{Y}$ e por $\mathcal{X}$, mas isso implicaria que existe $M \in \mathcal{X}$ e $N \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Hom}_\Lambda(M, N) \neq 0$ o que é uma contradição pois $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde.

Se Γ é regular, pelos artigos [HPR] e [Zha], Γ seria um tubo estável. Se Γ é semiregular mas não regular, segue de [Liu], que Γ é um tubo semiregular. Suponhamos que Γ não é semiregular.

Afirmção: Γ não contém módulos DTr -periódicos.

Suponhamos que Γ contém um módulo X que é DTr -periódico. Isto é, existe s tal que $(DTr)^s(X) \cong X$. Se $X \xrightarrow{f} Y$, é um morfismo irreduzível, e Y é estável à esquerda, então temos o seguinte morfismo irreduzível $X \cong (DTr)^s(X) \xrightarrow{(DTr)^s(f)} (DTr)^s(Y)$. Mas o número de módulos sucessores não isomorfos de X por um morfismo irreduzível é finito. Logo existe m tal que $(DTr)^{ms}(Y) \cong Y$. Assim Y também é DTr -periódico, e portanto estável à esquerda e à direita. Analogamente os predecessores de X por um morfismo irreduzível são DTr -periódicos (e portanto estáveis à direita e à esquerda), ou não estáveis nem à direita nem à esquerda. Mas Γ não é regular, portanto existe um módulo $Y \in \Gamma$ não estável à esquerda ou não estável à direita. Como Γ é conexo, existe um passeio $X \rightsquigarrow Y$. Considero Y_0 nas condições anteriores e tal que o passeio $X \rightsquigarrow Y_0$ seja de comprimento mínimo. Se

$$X = X_0 \text{ --- } X_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } X_n \text{ --- } Y_0$$

é o passeio, pela minimalidade, temos que X_n é estável e portanto DTr -periódico. Logo existe $X_n \xrightarrow{irr} Y_0$, ou $Y_0 \xrightarrow{irr} X_n$, e como X_n é DTr -periódico, e Y_0 não é estável deduzimos que Y_0 não pode ser estável à esquerda, nem à direita. Logo existem $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que $(DTr)^{m_1}(Y_0) = P$ com P projetivo, e $(TrD)^{m_2}(Y_0) = I$, com I injetivo. Em consequência, por ser X_n DTr -periódico, obtemos um caminho não seccional desde I para P o que é uma contradição pois Λ é quase inclinada.

Consideramos agora as componentes ${}_l\Gamma$ (estável à esquerda), e ${}_r\Gamma$ (estável à direita). Como Γ é infinito, temos que ${}_r\Gamma \neq \emptyset$ ou ${}_l\Gamma \neq \emptyset$. Suponhamos que ${}_l\Gamma \neq \emptyset$. Seja Γ' uma componente conexa de ${}_l\Gamma$. Assim Γ' é necessariamente infinita porque no caso contrário existiria um módulo DTr -periódico.

Afirmção: Γ' não contém ciclos orientados.

Suponhamos que Γ' contém ciclos orientados. Se o ciclo orientado fica incluído em ${}_r\Gamma'$, obteríamos segundo [HPR] e [Zha], que ${}_r\Gamma'$ é um tubo estável e portanto existiriam módulos DTr -periódicos. Logo o ciclo contém um módulo não estável à direita, e em particular Γ' contém injetivos. Então segundo [Liu] existe um caminho seccional infinito de morfismos irredutíveis:

$$\dots (DTr)^{2t}(X_1) \rightarrow (DTr)^t(X_s) \rightarrow \dots \rightarrow (DTr)^t(X_2) \rightarrow (DTr)^t(X_1) \rightarrow X_s \rightarrow \dots \rightarrow X_1$$

com $s < t$, onde $\{X_1, \dots, X_s\}$ é um conjunto completo de representantes das DTr -órbitas em Γ' .

Como Γ' é uma componente de ${}_l\Gamma$ e Γ não é estável à esquerda, deduzimos que existe $X' \rightarrow X''$ com $X' \in \Gamma'$ e $X'' = (TrD)^m(P)$, com $m \in \mathbb{N}$ e P projetivo indecomponível. Logo aplicando DTr tantas vezes como necessitemos, obtemos $X \xrightarrow{irr} P$, com $X \in \Gamma'$, e assim existem $0 \leq m, m'$ e $1 \leq j \leq s$ tais que $(DTr)^{mt-m'}(X_j) \cong X$.

Por outro lado tínhamos um ciclo orientado contendo pelo menos um módulo não estável à direita. Logo conseguimos um ciclo $(\star)$ contendo pelo menos um módulo injetivo I . Então segundo o Lema 6.1.1, existem caminhos de morfismos irredutíveis desde I para $(DTr)^r(I)$, $\forall r \geq 1$. Também sabemos que I pertence à órbita de X_j para algum j . Suponhamos que pertence à órbita de X_i . Logo $(DTr)^{(m+1)t}(X_i) = (DTr)^{r_0}(I)$ e portanto existe um caminho $I \rightsquigarrow (DTr)^{(m+1)t}(X_i)$. Temos provado a existência do seguinte caminho:

$$I \xrightarrow{(\star)} I \rightsquigarrow (DTr)^{(m+1)t}(X_i) \rightsquigarrow (DTr)^{mt}(X_j) \rightsquigarrow (DTr)^{mt-m'}(X_j) \cong X \rightarrow P.$$

Este é um caminho de morfismos irredutíveis desde um módulo injetivo I para um módulo projetivo P que não é seccional por $(*)$, o que é uma contradição segundo o Lema 2.1.3. pois Λ é quase inclinada.

Logo nenhuma componente conexa de ${}_l\Gamma$ contém um ciclo orientado. Analogamente poderia se provar que nenhuma das componentes de ${}_r\Gamma$ contém ciclos orientados. Mas pela hipótese, existe um ciclo orientado em Γ

$$(*) : Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_l = Y_0.$$

Já temos provado que todo ciclo orientado tem que conter um módulo não estável à esquerda e um módulo não estável à direita. Logo aplicando TrD ao ciclo $(*)$ tantas vezes quanto seja necessário e não mais que essas, podemos assumir que Y_0 é um módulo injetivo. Seja k o menor inteiro tal que existe $0 \leq v \leq l$ com $(DTr)^k(Y_v)$ sendo projetivo. Logo $(DTr)^k(Y_j) \neq 0$, $\forall 0 \leq j \leq l$. Logo, pelo Lema 6.1.1, existe um caminho de morfismos irredutíveis $Y_0 \rightsquigarrow (DTr)^k(Y_0)$. Logo obtemos

$$Y_0 \xrightarrow{(*)} Y_0 \rightsquigarrow (DTr)^k(Y_0) \rightsquigarrow (DTr)^k(Y_v)$$

que é um caminho de morfismos irredutíveis, não seccional desde um injetivo para um projetivo, o que é uma contradição pois Λ é quase inclinada.

Então Γ é uma componente semiregular. ■

6.3 Componentes regulares.

Lema 6.3.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada e Γ uma componente de Γ_Λ .

1. Se $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, então cada DTr -órbita de Γ contém um módulo de $\mathcal{R}$.
2. Se $\Gamma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, então cada DTr -órbita de Γ contém um módulo de $\mathcal{L}$.

Demonstração:

1. Seja Γ uma componente de Γ_Λ que contém um módulo de $\mathcal{R}$, e consideramos ${}_r\Gamma$ a parte estável à direita de Γ . No caso em que ${}_r\Gamma = \emptyset$, cada DTr -órbita contém um injetivo, e portanto, como os injetivos pertencem a $\mathcal{R}$, concluímos que todas as

DTr -órbitas contém um módulo de $\mathcal{R}$. Suponhamos agora que ${}_r\Gamma \neq \emptyset$, e seja Γ' uma componente conexa de ${}_r\Gamma$.

Afirmção: $\Gamma' \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

Se Γ não contém módulos injetivos então $\Gamma' = {}_r\Gamma = \Gamma$, e portanto é válida a afirmação. Suponhamos agora que Γ contém um módulo injetivo I . Logo existe $M \in \mathcal{O}(I)$, (ou seja M pertence à órbita de I) e $M \xrightarrow{irr} N$ ou $N \xrightarrow{irr} M$ com $N \in \Gamma'$. Assim aplicando TrD tantas vezes quanto seja necessário conseguimos um morfismo irreduzível $I \xrightarrow{irr} X'$, com I injetivo e $X' \in \Gamma'$. Mas $I \in \mathcal{R}$ que é uma subcategoria fechada para sucessores, portanto $X' \in \mathcal{R}$. Logo a afirmação fica provada.

Seja $X \in \Gamma' \cap \mathcal{R}$ e consideramos $Y \in \Gamma'$. Provaremos que $\mathcal{O}(Y) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$. Temos que $X, Y \in \Gamma'$ e Γ' é conexa, portanto existe um passeio :

$$X = X_0 \text{ --- } X_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } X_s = Y.$$

O passeio fica incluído em Γ' , portanto podemos aplicar TrD tantas vezes quanto seja necessário até conseguir um caminho de X para $(TrD)^m(Y)$ para algum $m \geq 0$. Mas $X \in \mathcal{R}$, que é uma subcategoria fechada para sucessores, o que implica que $(TrD)^m(Y) \in \mathcal{R}$. Logo todas as órbitas de Γ' contém um módulo de $\mathcal{R}$, sendo Γ' uma componente qualquer de ${}_r\Gamma$. Assim todas as órbitas de ${}_r\Gamma$ contém um módulo de $\mathcal{R}$. As órbitas restantes de Γ contém um módulo injetivo que também pertence a $\mathcal{R}$.

2. Demonstração análoga. ■

Observação 6.3.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada mas não inclinada, e Γ uma componente de Γ_Λ .

1. Se $\Gamma \cap (\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}) \neq \emptyset$, então cada DTr -órbita de Γ contém um módulo de $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.
2. Se $\Gamma \cap (\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \neq \emptyset$, então cada DTr -órbita de Γ contém um módulo de $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.

Demonstração:

A demonstração segue as linhas do Lema 6.3.1. ■

Teorema 6.3.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada e Γ uma componente regular de Γ_Λ .

1. Se $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ então Γ está contido em $\mathcal{R}$.

2. Se $\Gamma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ então Γ está contido em $\mathcal{L}$.

Demonstração:

1. Suponhamos que $M \in \Gamma \cap \mathcal{R}$, onde Γ é uma componente regular. Se Γ contém ciclos orientados, segundo [HPR], Γ seria um tubo estável e portanto todos os módulos em Γ são sucessores de M . Logo o tubo fica incluído em $\mathcal{R}$ pois esta é uma subcategoria fechada para sucessores.

Suponhamos que Γ não contém ciclos orientados, e seja $N \in \Gamma$. Logo, segundo o Lema 6.3.1, existe $m \in \mathbb{N}$ / $(TrD)^m(N) \in \mathcal{R}$. Suponhamos que Γ contém infinitas DTr -órbitas. Logo pelo Corolário 6.1.1, existe um caminho $(TrD)^m(N) \rightsquigarrow N$, e assim $N \in \mathcal{R}$.

Suponhamos agora que Γ não contém infinitas DTr -órbitas, e suponhamos que $N \notin \mathcal{R}$. Então existe um caminho:

$$N = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} X_t = X$$

onde $di(X) > 1$. Segue que $\text{Hom}_\Lambda((TrD)(X), \Lambda) \neq 0$ e portanto existe um caminho:

$$N = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} X_t = X \xrightarrow{f_t} X_{t+1} \xrightarrow{f_{t+1}} TrD(X) \xrightarrow{f_{t+2}} P$$

onde P é um módulo projetivo indecomponível e os morfismos f_t e f_{t+1} são irreduzíveis. Mas Γ é regular, e portanto $P \notin \Gamma$, o que implica que $f_i \in \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$ para algum $0 \leq i \leq t-1$ ou $i = t+2$. Suponhamos que $0 \leq i \leq t-1$. Então pelo Lema 6.3.1, como não existem ciclos em Γ , e como podemos substituir f_i por uma cadeia de morfismos irreduzíveis tão comprida quanto queiramos, concatenada com outro morfismo, logramos mostrar que existe $Y \in \mathcal{R} \cap \Gamma$, com um caminho $Y \rightsquigarrow X$, e portanto seria $di(X) \leq 1$, o que é uma contradição. O outro caso possível é que $f_{t+2} \in \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$. Conseguiríamos neste caso um módulo $Z \in \Gamma$ tal que $DTr(Z) \in \mathcal{R}$ e $\text{Hom}_\Lambda(Z, P) \neq 0$. Isto é uma contradição, pois se $DTr(Z) \in \mathcal{R}$, concluiríamos que $di(DTr(Z)) \leq 1$, e se $\text{Hom}_\Lambda(Z, P) \neq 0$, concluiríamos que $di(DTr(Z)) > 1$. Logo $N \in \mathcal{R}$. $\forall N \in \Gamma$. Assim $\Gamma \subset \mathcal{R}$.

2. Demonstração análoga. ■

6.4 Componentes não regulares.

Teorema 6.4.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada e Γ uma componente de Γ_Λ com infinitas DTr -órbitas ou que contém um ciclo orientado. Então:

1. Se Γ contém um módulo projetivo, conclui-se que Γ está contida em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.
2. Se Γ contém um módulo injetivo, conclui-se que Γ está contida em $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.

Demonstração:

1. Seja Γ uma componente de Γ_Λ , que contém um módulo projetivo, e suponhamos que Γ contém ciclos orientados. Logo pelo Teorema 6.2.1, Γ é um tubo semiregular. Suponhamos que existe $M \in \Gamma \cap \mathcal{R}$. Como Γ é um tubo semiregular, todo módulo $X \in \Gamma$ que pertença a um ciclo orientado é sucessor de M , e logo como $\mathcal{R}$ é fechada para sucessores, o módulo X pertence a $\mathcal{R}$. Por outro lado, se Γ é um tubo semiregular, sabemos que existe Y não projetivo, somando do radical de um projetivo P , com Y pertencendo a um ciclo de Γ . Logo, teríamos que $\text{Hom}_\Lambda(Y, P) \neq 0$, e portanto $di(DTr(Y)) > 1$. Mas se Y pertence a um ciclo de Γ , concluímos que tanto Y quanto $DTr(Y)$, são sucessores de M . Isto é uma contradição pois $M \in \mathcal{R}$ e $di(DTr(Y)) > 1$. Assim a hipótese $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ é falsa, e portanto $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.
Suponhamos agora que estamos no caso em que Γ contém infinitas DTr -órbitas, mas não ciclos orientados. Suponhamos novamente que $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$. Como Γ contém infinitas DTr -órbitas concluímos que existe Γ' componente conexa de ${}_r\Gamma$, com infinitas DTr -órbitas. Logo, segundo o Lema 6.3.1, concluímos que existe $M \in \Gamma' \cap \mathcal{R}$ tal que o comprimento do caminho mínimo desde $\mathcal{O}(M)$ para um módulo não estável é maior o igual a $2n$, onde $n = rk(K_0(\Lambda))$. Seja

$$M' = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_t = P$$

um passeio em Γ de comprimento mínimo, desde algum módulo $M' \in \mathcal{O}(M)$, para um módulo projetivo $P \in \Gamma$. Pela minimalidade do comprimento do caminho escolhido, temos que os módulos $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}$, são estáveis à esquerda, e portanto

aplicando DTr tantas vezes quanto seja necessário, conseguimos $m \in \mathbb{N}$ e um caminho de morfismos irreduzíveis

$$(DTr)^m(M) = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_t = P.$$

Novamente, desde que os módulos $Y_0, \dots, Y_{t-1}$ são estáveis à esquerda, podemos obter um caminho de morfismos irreduzíveis

$$(DTr)^{m+1}(M) \rightarrow DTr(Y_1) \rightarrow \dots \rightarrow DTr(Y_{t-1}).$$

Por outro lado como Γ' contém infinitas órbitas, e Γ não contém ciclos orientados, aplicando o Lema 6.1.2, conseguimos um caminho $M \rightsquigarrow (DTr)^{m+1}(M)$, e portanto temos que $DTr(Y_{t-1})$ é um sucessor de M . Logo $DTr(Y_{t-1}) \in \mathcal{R}$, mas isso é uma contradição pois $di(DTr(Y_{t-1})) > 1$, já que $\text{Hom}_\Lambda(Y_{t-1}, P) \neq 0$.

Logo a suposição $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ é falsa e portanto $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.

2. Demonstração análoga à anterior. ■

Teorema 6.4.2

Seja Λ uma álgebra quase inclinada que não é inclinada. Cada componente da aljava de Auslander-Reiten, está contida inteiramente em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$, ou em $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ ou em $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.

Demonstração:

Consideramos um módulo indecomponível $X \in \mathcal{R}$. Segundo o Corolário 3.2.1, o módulo X não é Ext-projetivo na subcategoria $\mathcal{R}$, e portanto se consideramos a parêlha de torção $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}, \mathcal{R})$, podemos concluir segundo a classificação de Auslander-Smalø, que $DTr(X) \in \mathcal{R}$.

Por outro lado, como $\mathcal{R}$ é fechada para sucessores, obtemos que também $TrD(X) \in \mathcal{R}$. Logo toda a componente de X fica incluída em $\mathcal{R}$ ($\text{Comp}(X) \subset \mathcal{R}$). Analogamente, poderíamos provar que dado $Y \in \mathcal{L}$, então $\text{Comp}(Y) \subset \mathcal{L}$. Assim o resultado está provado. ■

Corolário 6.4.1

Seja Λ uma álgebra quase inclinada, e Γ uma componente conexa de Γ_Λ . Se Γ não é semiregular, então Λ é inclinada.

Demonstração:

Se Γ não é semiregular, então Γ contém um módulo projetivo e um módulo injetivo. Logo se Λ não fosse inclinada, pelo teorema anterior teríamos que (1) $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$, e (2) $\Gamma \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$, o que é uma contradição. Portanto Λ é inclinada. ■

Observação 6.4.1

O corolário anterior generaliza a Proposição 3.2.1, pois se Λ é uma álgebra quase inclinada de tipo de representação finito, então Γ_Λ é uma única componente e não é semiregular. Logo segundo o corolário anterior, segue que Λ é inclinada. ■

Corolário 6.4.2

Seja Λ uma álgebra quase inclinada que não é inclinada. Então todas as componentes de Γ_Λ , são semiregulares.

Demonstração:

A demonstração é direta do corolário anterior. ■

Corolário 6.4.3

Seja Λ uma álgebra quase inclinada que não é inclinada. Então toda componente Γ de Γ_Λ tal que $\Gamma \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \neq \emptyset$, tem que ser regular e $\Gamma \subset (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

Demonstração:

Se Γ não fosse regular, então existe ou um módulo projetivo ou um módulo injetivo em Γ . No primeiro caso Γ ficaria incluída em $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$, e no segundo caso ficaria incluída em $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$. Em ambos casos temos uma contradição pois $\Gamma \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \neq \emptyset$.

Agora pelo Teorema 6.4.2, temos que $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$ ou $\Gamma \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$ ou $\Gamma \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Como $\Gamma \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \neq \emptyset$, a única possibilidade é $\Gamma \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. ■

Al fondo de la red

*...por la forma de pararla
de apretarla contra el piso
levantando la cabeza
ganando el pique cortito
no se sabe con que pie
los desbordará otra vez
el zaguero lateral
a mis ojos que no creen*

*...cómo quiebra la cintura y la razón
y se acomoda en el aire pájaro
para pintarle ese gol
al olvido.*

Mauricio Ubal

Capítulo 7

ÁLGEBRAS DE AUSLANDER QUASE HEREDITÁRIAS.

7.1 Preliminares.

Definição 7.1.1

1. Seja Λ uma álgebra de Artin. A **dimensão dominante** de um módulo $N \in \text{mod } \Lambda$ (que notaremos por $\dim.\text{dom}_\Lambda(N)$), é o maior inteiro t ou ∞ , tal que se considerarmos a resolução injetiva minimal de N :

$$0 \rightarrow N \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow \dots$$

temos que todos os módulos I_j com $j = 1, \dots, t$ (ou $j = 1, \dots, \infty$), são projetivos.

2. Uma álgebra de Artin Λ , é uma **álgebra de Auslander** se:

(a) $\text{dgl}(\Lambda) \leq 2$;

(b) $\dim.\text{dom}_\Lambda(\Lambda) = 2$.

3. Seja A uma álgebra de Artin. Um módulo M é um **gerador aditivo** em $\text{mod } A$ se $\text{add}(M) = \text{mod } A$.

Tomando como referência a quinta seção do sexto Capítulo de [ARS], temos o seguinte resultado:

Proposição

Seja Λ uma álgebra de Artin que satisfaz $dgl(\Lambda) = 2$ e $\dim.\text{dom}_\Lambda(\Lambda) = 2$. Seja $Q \in \text{mod } \Lambda$ tal que $\text{add}(Q) = \{ B \in \text{mod } \Lambda / B \text{ é bijetivo} \}$. Então:

1. A álgebra $A = \text{End}_\Lambda(Q)^{op}$ é de tipo de representação finita.
2. $\Lambda \cong \text{End}_A(M)^{op}$, onde M é um módulo gerador aditivo em $\text{mod } A$.

Notaremos $\Lambda = \Lambda(A)$ nas condições da proposição anterior. Também necessitamos mencionar o seguinte resultado:

O grafo subjacente à aljava de Auslander-Reiten Γ_A de uma álgebra de Artin A com tipo de representação finito coincide com a aljava ordinária associada à álgebra de Auslander $\Lambda(A)$.

Como introdução ao problema a ser resolvido na segunda seção apresentamos o seguinte resultado que é proposto como exercício em [DK].

Resultado:

Consideramos uma álgebra de Auslander Λ , que é hereditária. Então Λ é semisimples.

Demonstração:

A álgebra Λ é hereditária, portanto se consideramos uma resolução injetiva do Λ -módulo Λ :

$$\xi : 0 \rightarrow \Lambda \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow 0,$$

podemos concluir que I_0 e I_1 são projetivos, pois $\dim.\text{dom}(\Lambda) = 2$, já que Λ é uma álgebra de Auslander. Portanto temos que ξ cinde, e isto implica que $\Lambda \oplus I_1 = I_0$. Concluimos que todo módulo projetivo indecomponível é injetivo, e logo também todo injetivo indecomponível é projetivo.

Afirmção: Todo módulo $M \in \text{mod } \Lambda$ é bijetivo.

Dado um módulo $M \in \text{mod } \Lambda$ qualquer, considero a sua resolução projetiva:

$$\zeta : 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Como o módulo projetivo P_1 também é injetivo temos que ζ cinde e portanto $P_0 = P_1 \oplus M$. Logo fica provado que M é projetivo. Analogamente poderíamos provar que o módulo M é injetivo. Fica provado assim a afirmação e em particular conclui-se que Λ é uma álgebra semisimples. ■

Observação 7.1.1

Existe um outro caminho para provar o resultado anterior, que segue as linhas utilizadas na segunda seção para resolver o problema central de este capítulo:

Demonstração:

Se Λ é uma álgebra de Auslander, temos que existe uma álgebra de Artin A de tipo de representação finito, tal que $\Lambda = \Lambda(A)$. Mas $\Lambda(A)$ é hereditária, então pode se provar que DTr é um funtor nulo para $\text{mod } A$. Logo a álgebra A é semisimples e, segundo a Proposição 5.2 do [ARS], concluímos que $\Lambda(A)$ é semisimples. ■

7.2 Classificação das álgebras de Auslander quase hereditárias.

Lema 7.2.1

Seja $\Lambda(A)$ uma álgebra de Auslander quase hereditária. Então todo módulo indecomponível $M \in \text{ind}(A)$, é injetivo ou projetivo.

Demonstração:

Vamos provar que $(DTr)^2(M) = 0$, para todo módulo $M \in \text{ind}(A)$. Suponhamos que existe $M \in \text{ind}(A)$ tal que $(DTr)^2(M) \neq 0$. Seja n o vértice da aljava ordinária de $\Lambda(A)$, associado ao módulo indecomponível $DTr(M)$ em Γ_A . Considero o módulo simples $S_n \in \text{ind}(\Lambda(A))$, e também a situação local no vértice n da aljava ordinária de $\Lambda(A)$ (determinada pelas sequências de Auslander-Reiten que tem ao módulo M como poço e fonte em cada caso). Isto é:

Podemos concluir que $dp(S_n) = 2$, já que a sequência

$$0 \rightarrow P_{n+r+1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=r} P_{n+i} \rightarrow P_n \rightarrow S_n \rightarrow 0$$

é a resolução projetiva de S_n . Analogamente poderíamos provar que $di(S_n) = 2$. Portanto $\Lambda(A)$ não seria quase hereditária, o que é uma contradição. Provamos então que $(DTr)^2(M) = 0$, para todo módulo indecomponível M . Isto implica que todo módulo indecomponível é projetivo ou injetivo, pois se tivéssemos $M \in \text{ind}(A)$ não projetivo nem injetivo, então é fácil de ver que existiria $(DTr)^2(TrD(M))$. ■

Observação 7.2.1

Seja Γ_A a aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin A . Então não existe uma flecha saindo de um módulo injetivo indecomponível I e chegando a um módulo projetivo indecomponível P , pois no caso contrário teríamos um morfismo irreduzível $I \xrightarrow{\text{irr}} P$, o que é absurdo porque inevitavelmente cindiria. ■

Lema 7.2.2

Seja A uma álgebra de Artin de tipo de representação finita, onde todo módulo indecomponível é injetivo ou projetivo. Suponhamos que existe um módulo bijetivo indecomponível não simples $B \in \text{ind}(A)$. Então a aljava de Auslander-Reiten de A é:

Demonstração:

Seja B o módulo bijetivo indecomponível não simples. Localmente temos:

onde os módulos X_i com $i = 1, \dots, n$, e os Y_j com $j = 1, \dots, m$, são indecomponíveis, e $B \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{j=m} Y_j$ é uma fonte, e $\bigoplus_{i=1}^{i=n} X_i \rightarrow B$ é um poço. Pela Observação 7.2.1, podemos

concluir que os módulos X_i com $i = 1, \dots, n$, não são injetivos e portanto são projetivos, e os módulos Y_j com $j = 1, \dots, m$, não são projetivos e portanto são injetivos. Logo existe $DTr(Y_j)$, $\forall j = 1, \dots, m$, e existe $TrD(X_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$. Portanto pode-se concluir que $n = m$ e reordenando se necessário podemos assumir que $DTr(Y_j) = X_j$, $\forall j = 1, \dots, m$. Então localmente a situação é:

Notaremos $y_j = \ell(Y_j)$ e $x_j = \ell(X_j)$, $\forall j = 1, \dots, m$, e $b = \ell(B)$.

Assim se consideramos as sequências:

$$0 \rightarrow rad(B) = \bigoplus_{j=1}^{j=m} X_j \rightarrow B \rightarrow \frac{B}{rad(B)} = S(B) \rightarrow 0 ;$$

$$0 \rightarrow soc(B) \rightarrow B \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{j=m} Y_j = \frac{B}{soc(B)} \rightarrow 0 ;$$

podemos obter as seguintes informações: $\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad b - x_j \leq y_j, \forall j = 1, \dots, m; \\ 2. \quad \sum_{j=1}^{j=m} y_j = b - 1; \\ 3. \quad \sum_{j=1}^{j=m} x_j = b - 1. \end{array} \right.$

Logo $m.b - (b - 1) \leq b - 1$, e portanto $(m - 2).b \leq -2$. As únicas possibilidades são $m = 0$ ou $m = 1$.

Se fosse $m = 0$, teríamos que o módulo B seria simples, o que contradiz nossa hipótese.

Logo $m = 1$, e portanto localmente temos:

onde X_1 é um módulo projetivo indecomponível, com $TrD(X_1) = Y_1$ sendo um módulo injetivo indecomponível. Logo $x_1 = b - 1 = y_1$.

Afirmação: Não existem mais flechas saindo de X_1 em Γ_A .

Suponhamos que existe $X_1 \rightarrow M$ em Γ_A , sendo M um módulo indecomponível não isomorfo a B . Pela hipótese, M é injetivo ou projetivo.

Se M é projetivo, temos que $\ell(M) \geq x_1 + 1 = b$, e se M é injetivo, temos que $\ell(M) \geq y_1 + 1 = b$. Em ambos casos $\ell(M) + b > y_1 + x_1$, o que também é absurdo. Assim fica provada a afirmação. Consequentemente podemos concluir também que não existem mais flechas chegando em Y_1 . Logo $x_1 + y_1 = b$, mas $x_1 = b - 1 = y_1$, portanto $x_1 = y_1 = 1$ e $b = 2$. Então X_1 é um módulo projetivo simples, e Y_1 é um módulo injetivo simples. A álgebra A é de tipo de representação finita, portanto Γ_A é conexo. Logo concluímos que:

Lema 7.2.3

Seja Γ_A a aljava de Auslander-Reiten da álgebra A , na qual temos localmente a seguinte situação:

sendo que os módulos X_i , com $i = 1, \dots, m$, são indecomponíveis, P é um módulo projetivo indecomponível e I é um módulo injetivo indecomponível. Se A é uma álgebra de Artin de tipo de representação finita onde todo módulo indecomponível é injetivo ou projetivo, então:

1. Os módulos X_i , com $i = 1, \dots, m$, são todos projetivos ou todos injetivos.
2. Verifica-se que $m \leq 2$.

Demonstração:

1. Suponhamos que $m \geq 2$, e que existe $1 \leq k \leq m$ tal que o módulo X_k é projetivo e existe $1 \leq j \leq m$ tal que X_j é injetivo. Logo se $x_k = \ell(X_k)$, $x_j = \ell(X_j)$, $p = \ell(P)$, e

$i = \ell(I)$, temos que $x_k > p$ e $x_j > i$. Então $\sum_{h=1}^{h=m} x_h > p + i$, o que é uma contradição. Mas pela hipótese, todo módulo indecomponível é projetivo ou injetivo, portanto os módulos X_i , com $i = 1, \dots, m$, são todos projetivos (e não injetivos se $m \geq 2$), ou são todos injetivos (e não projetivos se $m \geq 2$).

2. Pelo provado no ponto anterior, temos que os módulos X_h , com $h = 1, \dots, m$, são todos projetivos ou todos injetivos. Suponhamos que são todos projetivos. Suponhamos também que $m \geq 3$. Então pelo visto no ponto anterior, os módulos X_h , com $h = 1, \dots, m$, não são injetivos. Logo existe $Y_h = TrD(X_h)$, $\forall h = 1, \dots, m$. Notamos por $y_h = \ell(Y_h)$, e mantemos o resto das notações do ponto anterior. Então temos que $y_h \geq i - x_h = (\sum_{j=1}^{j=m} x_j - p) - x_h$, $\forall h = 1, \dots, m$. Logo obtemos as seguintes desigualdades:

$$\sum_{h=1}^{h=m} y_h - i \geq \sum_{h=1}^{h=m} \sum_{j=1}^{j=m} x_j - mp - \sum_{h=1}^{h=m} x_h - i = (m-1) \sum_{j=1}^{j=m} x_j - mp - i = (m-1) \sum_{j=1}^{j=m} x_j - mp - (\sum_{j=1}^{j=m} x_j - p) \geq (m-2) \sum_{j=1}^{j=m} (p+1) - (m-1)p > [m(m-2) - (m-1)]p > 0,$$

se $m \geq 3$. Então $\sum_{h=1}^{h=m} y_h - i > 0$, se $m \geq 3$, o que implicaria que existe o módulo $TrD(I)$, que é uma contradição. Concluimos que $0 \leq m \leq 2$. ■

Lema 7.2.4

Seja A uma álgebra de Artin de tipo de representação finita onde todo módulo indecomponível é injetivo ou projetivo, e suponhamos que temos localmente a seguinte situação na aljava de Auslander-Reiten Γ_A :

1. Se os módulos X_1 e X_2 são projetivos, então verifica-se que:

(a) O módulo P é projetivo simples:

- (b) Existem os módulos $Y_1 = \text{Tr}D(X_1)$ e $Y_2 = \text{Tr}D(X_2)$ que são injetivos (e não projetivos);
- (c) Os módulos Y_1 e Y_2 são os únicos sucessores do módulo I em Γ_A .

2. Se os módulos X_1 e X_2 são injetivos, então verifica-se que:

- (a) O módulo I é injetivo simples;
- (b) Existem os módulos $Y_1 = D\text{Tr}(X_1)$ e $Y_2 = D\text{Tr}(X_2)$ que são projetivos (e não injetivos);
- (c) Os módulos Y_1 e Y_2 são os únicos predecessores do módulo P em Γ_A .

Demonstração:

1. Se existesse uma flecha chegando ao módulo P na aljava Γ_A , ela teria que ser da forma $I \rightarrow P$, o que é absurdo segundo a Observação 7.2.1. Logo P não tem predecessores em Γ_A , e portanto P é um módulo simples.

Por outro lado, segundo o Lema 7.2.3, como os módulos X_i , $i = 1, 2$, são projetivos, então não são injetivos. Logo existem $\text{Tr}D(X_i) = Y_i$, com $i = 1, 2$. Finalmente não é difícil de ver que não existem mais flechas saindo de I em Γ_A , pois seriam do tipo $I \rightarrow Q$, onde Q é um módulo projetivo indecomponível, o que é absurdo segundo a Observação 7.2.1. Logo localmente a situação é:

2. A demonstração é análoga, e localmente a situação seria:

Teorema 7.2.1

Seja Λ uma álgebra de Artin indecomponível. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Todo módulo indecomponível é projetivo ou injetivo.

2. A aljava de Auslander-Reiten Γ_A tem alguma das seguintes formas:

3. $\Lambda(A)$ é uma álgebra de Auslander inclinada.

4. $\Lambda(A)$ é uma álgebra de Auslander quase hereditária.

Demonstração:

(1) $\implies$ (2)

Observemos que se a álgebra Λ é indecomponível e de tipo de representação finito, então Γ_A é conexa. Esta é a situação aqui já que todo módulo é projetivo ou injetivo, e portanto A é de tipo de representação finito.

Suponhamos que existe um módulo bijetivo $B \in \text{ind}(A)$. Se o módulo B é simples, então

$$\Gamma_A : \begin{matrix} B \\ \bullet \end{matrix}$$

pois a aljava é conexa. Se o módulo B não é simples, pelo Lema 7.2.2, temos que

$$\Gamma_A : \begin{matrix} X & & Y \\ & \text{---} & \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{matrix}$$

Só resta analisar o caso em que não existe um módulo bijetivo indecomponível.

Seja P um módulo projetivo não injetivo. Então existe o módulo indecomponível $\text{Tr}D(P)$, que não é projetivo, e portanto, pela hipótese é injetivo. Notaremos $\text{Tr}D(P) = I$. Assim localmente temos a seguinte situação:

Então pelo Lema 7.2.3, o $m \leq 2$ e os módulos X_1 e X_2 são projetivos ou injetivos. Notaremos por $x_i = \ell(X_i)$, com $1 \leq i \leq m$, $p = \ell(P)$ e $i = \ell(I)$. Suponhamos que $m = 2$, e que X_1 e X_2 são projetivos (e portanto não injetivos). Então localmente a situação é:

onde $Y_1 = \text{Tr}D(X_1)$ e $Y_2 = \text{Tr}D(X_2)$ são módulos injetivos. Logo pelo Lema 7.2.4, o módulo P é simples e os sucessores de I são os módulos Y_1 e Y_2 .

Afirmção:

1. P é o único predecessor de X_1 e X_2 em Γ_A .
2. I é o único sucessor imediato de X_1 e X_2 em Γ_A .
3. I é o único predecessor imediato de Y_1 e Y_2 em Γ_A .
4. Y_1 e Y_2 não tem sucessores em Γ_A .

Pelo Lema 7.2.4, os únicos sucessores do módulo I são Y_1 e Y_2 . Então se $y_1 = \ell(Y_1)$ e $y_2 = \ell(Y_2)$, temos que $y_1 + y_2 = i - 1$. Como P é simples, temos que $p = 1$, e portanto $i = x_1 + x_2 - 1$. Consideramos as sequências de Auslander-Reiten:

$$\xi : 0 \rightarrow X_1 \rightarrow E_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow 0, \text{ onde } I \mid E_1 \text{ e,}$$

$$\zeta : 0 \rightarrow X_2 \rightarrow E_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow 0, \text{ onde } I \mid E_2.$$

Então $y_h \geq i - x_h$, com $h = 1, 2$. Portanto $i - 1 = y_1 + y_2 \geq 2i - x_1 - x_2 = 2i - (i + 1) = i - 1$. Concluimos que $y_1 = i - x_1$ e $y_2 = i - x_2$. Logo $I = E_1$, e $I = E_2$. Assim temos provado

que o único sucessor imediato dos módulos X_1 e X_2 em Γ_A assim como o único predecessor imediato dos módulos Y_1 e Y_2 é o módulo I . Pela hipótese, todo módulo indecomponível tem que ser injetivo ou projetivo, portanto, segue da Observação 7.2.1 que os módulos Y_1 e Y_2 não tem sucessores e que o único predecessor dos módulos X_1 e X_2 é P . Então temos todos os elementos para concluir que a aljava de Auslander-Reiten da álgebra A é:

Sendo $m = 2$ resta por analisar o caso em que os módulos X_1 e X_2 são injetivos. Fazendo um trabalho análogo concluiríamos que a aljava de Auslander-Reiten de A é:

Resta por analisar o caso $m = 1$. Localmente teríamos:

Adotando as notações anteriores, teríamos que $x_1 = p + i$. O módulo indecomponível X_1 tem que ser, segundo a hipótese, injetivo (e não projetivo) ou projetivo (e não injetivo). Suponhamos que X_1 é projetivo e não injetivo. Então existem $Y_1 = \text{Tr}D(X_1)$, e um módulo $M = \bigoplus_{h=1}^{h=s} M_h$ com $\ell(M) = y_1 + (x_1 - i) > 0$, tais que

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow I \oplus M \rightarrow Y_1 \rightarrow 0$$

é a sequência de Auslander-Reiten para o módulo X_1 . Localmente temos a situação:

onde Y_1 é um módulo não projetivo e portanto é injetivo. Estamos nas hipóteses do Lema 7.2.3, do qual deduzimos que $s = 1$ e que M_1 é injetivo. Então a situação localmente é:

onde o módulo X_1 é projetivo, e o módulo Y_1 é injetivo. Portanto pode-se ver que estamos na mesma situação local que no caso $m = 2$ com os módulos do termo central da sequência de Auslander-Reiten injetivos. Então conclui-se do mesmo jeito que a aljava de Auslander-Reiten de A tem a seguinte forma:

So resta considerar o caso em que o módulo X_1 é injetivo e não projetivo. Fazendo uma análise análoga concluiríamos que a aljava de Auslander-Reiten de A tem a seguinte forma:

onde Y_1 , P e M são módulos projetivos, e I , X_1 , e $TrD(M)$ são módulos injetivos.

Fica provado assim a primeira implicação.

(2) $\implies$ (3)

Temos uma álgebra de Artin A tal que sua aljava de Auslander-Reiten Γ_A tem alguma das seguintes formas:

Consideramos a álgebra de Auslander $\Lambda(A)$, cuja aljava ordinária Δ coincide com a aljava subjacente a Γ_A . Evidentemente $\Lambda(A)$ é indecomponível. Vamos provar que a álgebra $\Lambda(A)$ é inclinada.

No caso em que $\Delta : \bullet \xrightarrow{1}$, teríamos que $\Lambda(A) \cong R\Delta \cong R$, e portanto $\Lambda(A)$ é inclinada.

Consideremos o caso em que:

Calculamos a aljava de Auslander-Reiten de $\Lambda(A)$:

Podemos concluir que $\Lambda(A)$ é inclinada, já que a classe $\mathcal{S} = \{ P_2, S_2, P_1 \}$ é uma fatia completa.

Consideremos o caso em que:

Calculamos a aljava de Auslander-Reiten de $\Lambda(A)$ e obtemos:

onde M, N, Q, R, T, V são os seguintes módulos indecomponíveis:

Não é difícil de ver que $\mathcal{S} = \{P_3, I_5, R, N, Q, P_2\}$ é uma fatia completa.

Logo concluímos segundo o mencionado na primeira seção do Capítulo 3, que a álgebra $\Lambda(A)$ é uma álgebra inclinada. Finalmente restaria o caso em que:

Fazendo uma análise análoga à feita no caso anterior, prova-se que também neste caso $\Lambda(A)$ é uma álgebra inclinada.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Segundo o exemplo 1.2.2, toda álgebra inclinada é quase hereditária.

(4) $\Rightarrow$ (1)

O resultado já foi provado no Lema 7.2.1. ■

Despedida '92.

.... aquel viejo sueño
hoy se ha derrumbado
y entre sus ruinas brotó
la nueva semilla adolescente
que hoy por el mundo
vuelve a empezar
la revolución.
Crear, construir
aunque te equivoques
no dejes de luchar
por ser feliz.
Te invito a cantar,
hasta inventar
otro Carnaval....

Falta y Resto !

APÊNDICE

Sobre as componentes regulares da aljava de Auslander-Reiten que contém módulos diretores.

A idéia é apresentar os Lemas 3 e 4 do [Sko], já que são utilizados no artigo [CS], e tem muita proximidade com as noções estudadas no nosso trabalho.

O próximo resultado surge como consequência direta da Proposição 1.5, do artigo [ARIV].

Lema 1

Seja I um ideal de uma álgebra de Artin Λ . Consideramos $\Upsilon \cong \frac{\Lambda}{I}$, e $M \in \text{mod } \Upsilon$. Então temos a seguinte inclusão $DTr_{\Upsilon}(M) \xhookrightarrow{l} DTr_{\Lambda}(M)$.

Lema 2

Sejam $M_1, \dots, M_r$, Λ -módulos indecomponíveis dois a dois não isomorfos tais que $\text{Hom}_{\Lambda}(M_i, DTr_{\Lambda}(M_j)) = 0$, $\forall 1 \leq j, i \leq r$. Considero o módulo $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$, o ideal $I = \text{Ann}(M)$, e a álgebra quociente $\Upsilon = \frac{\Lambda}{I}$. Então M é um Υ -módulo parcialmente inclinante. Em particular $r \leq n = rk(K_0(\Lambda))$.

Demonstração:

Pelo Lema 1, sabemos que $DTr_{\Upsilon}(M) \xhookrightarrow{l} DTr_{\Lambda}(M)$, e da hipótese pode-se concluir que $\text{Hom}_{\Lambda}(M, DTr_{\Lambda}(M)) = 0$.

Afirmção: $\text{Hom}_{\Upsilon}(M, DTr_{\Upsilon}(M)) = 0$.

Suponhamos que existe $0 \neq f \in \text{Hom}_{\Upsilon}(M, DTr_{\Upsilon}(M))$. Teríamos $M \xrightarrow{f} DTr_{\Upsilon}(M) \xrightarrow{\iota} DTr_{\Lambda}(M)$, e portanto $0 \neq \iota \circ f \in \text{Hom}_{\Lambda}(M, DTr_{\Lambda}(M))$, o que é absurdo. Assim fica provada a afirmação.

Logo, pelas fórmulas de Auslander-Reiten, $\text{Ext}_{\Upsilon}^1(M, M) \cong D\overline{\text{Hom}_{\Upsilon}}(M, DTr_{\Upsilon}(M)) = 0$.

Por outro lado vale que M é um Υ -módulo fiel, e portanto DM é um Υ^{op} -módulo fiel.

Logo existe $0 \rightarrow \Upsilon^{op} \xrightarrow{g} (DM)^s$, para algum $s \geq 1$. Aplicando o funtor D obtemos $M^s \xrightarrow{Dg} D\Upsilon \rightarrow 0$, mas como $\text{Hom}_{\Upsilon}(M, DTr_{\Upsilon}(M)) = 0$ então $\text{Hom}_{\Upsilon}(D\Upsilon, DTr_{\Upsilon}(M)) = 0$.

Logo $dp_{\Upsilon}(M) \leq 1$.

Concluimos que M é um Υ -módulo parcialmente inclinante, e por isso $r \leq rk(K_0(\Upsilon))$.

Mas não é difícil de ver que $rk(K_0(\Upsilon)) \leq rk(K_0(\Lambda))$, e logo $r \leq rk(K_0(\Lambda))$. ■

Lema 3

Seja M um Λ -módulo indecomponível e $\mathcal{C} = \text{Comp}(M) \subset \Gamma_{\Lambda}$. Suponhamos que existe um caminho seccional $M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n$ em $\mathcal{C}$ tal que:

1. $M_1, \dots, M_n$ não são projetivos e são dois a dois não isomorfos.
2. Para todo $1 \leq i \leq n-1$, se existe um caminho seccional em $\mathcal{C}$ com a forma:

$$U_t \rightarrow U_{t-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_1 \cong DTr_{\Lambda}(M_{i+1}) \rightarrow U_0 = M_i, \text{ com } t \leq n,$$

então tem que se verificar que $U_1, \dots, U_t$ são não projetivos e não isomorfos aos M_j , $0 \leq j \leq n$.

Então, existe um ciclo em mod Λ

$$M \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow M, \text{ com } X_1, \dots, X_k \in \mathcal{C}.$$

Demonstração:

Assumamos que $M_0 \not\cong M_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, (pois no caso contrário o resultado estaria valendo). Logo, pelo assumido e por (1), temos que $M_0, \dots, M_n$ são dois a dois não isomorfos. Então pelo Lema 2, existem $0 \leq p, q \leq n$ / $\text{Hom}_{\Lambda}(M_p, DTr_{\Lambda}(M_q)) \neq 0$. Em particular temos em mod Λ um caminho $M_p \rightarrow DTr_{\Lambda}(M_q) \rightarrow M_{q-1}$, se $q \geq 1$, ou

$$M_p \rightarrow DTr_\Lambda(M_0) \rightarrow DTr_\Lambda(M_1) \rightarrow M_0 \text{ se } q = 0.$$

Seja r o menor natural com $1 \leq r \leq n$ tal que existe um caminho em $\text{mod } \Lambda$

$$(*) : M_i = Z_s \xrightarrow{f_s} Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_2 \xrightarrow{f_2} Z_1 = DTr_\Lambda(M_r) \xrightarrow{f_1} Z_0 = M_{r-1},$$

com $Z_1, \dots, Z_s \in \mathcal{C}$ e $0 \leq i \leq n$.

Observação: Podemos supor que se $f_i \notin \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$, então f_i é irredutível, pois se existe l tal que $f_i \in \text{rad}^{l-1}(\text{mod } \Lambda) \setminus \text{rad}^l(\text{mod } \Lambda)$, o morfismo pode ser substituído por uma cadéia de morfismos irredutíveis.

Afirmção (1): $r = 1$.

Suponhamos que $r \geq 2$.

Afirmção (2): Existe um caminho com a forma de $(*)$, isto é

$$M_i = Z_s \xrightarrow{f_s} Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_2 \xrightarrow{f_2} Z_1 = DTr_\Lambda(M_r) \xrightarrow{f_1} Z_0 = M_{r-1},$$

com $s > n$, $f_1, f_2, \dots, f_n$ irredutíveis $Z_1, Z_2, \dots, Z_s \in \mathcal{C}$ e $Z_j \not\cong DTr_\Lambda(Z_{j-2})$, $\forall 2 \leq j \leq n$. Consideramos o caminho $(*)$. Se é seccional, então $s > n$ em $(*)$, pelo ponto (2) da hipótese (pois $Z_s = M_i$).

Se $(*)$ contém um morfismo $f_i \in \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$:

Seja m é o menor índice tal que $f_m \in \text{rad}^\infty(\text{mod } \Lambda)$. Logo existe em $\text{mod } \Lambda$ uma sequência de morfismos irredutíveis:

$$V_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} V_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow V_1 \xrightarrow{g_1} V_0 = Z_{m-1},$$

e existe $0 \neq g_n \in \text{Hom}_\Lambda(Z_m, V_{n-1})$. Assim obtemos em $\text{mod } \Lambda$ um caminho

$$(*) : M_i = Z_s \xrightarrow{f_s} Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_m \xrightarrow{g_n} V_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow V_1 \xrightarrow{g_1} V_0 = Z_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} Z_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 = DTr_\Lambda(M_r) \xrightarrow{f_1} Z_0 = M_{r-1},$$

com $f_1, \dots, f_{m-1}, g_1, \dots, g_{n-1}$, irredutíveis e todos os módulos em $\mathcal{C}$.

Suponhamos que existe $a < n$ e $a < s$ (se consideramos $(*)$, e o caminho está formado por morfismos irredutíveis), ou que existe $a < n \leq n - 1 + m - 1$ (pois $m \leq 2$) (se consideramos $(*)$ onde f_m que não era irredutível, foi substituído), tal que $f_1, \dots, f_a$ (ou $f_1, \dots, f_{m-1}, g_1, \dots, g_{a-m+1}$) são irredutíveis, $Z_j \not\cong DTr_\Lambda(Z_{j-2})$ com $2 \leq j \leq a$ e $Z_{a+1} \cong DTr(Z_{a-1})$ (ou com os V_j correspondentes).

Então pelos pontos (1) e (2) da hipótese, $Z_0, \dots, Z_{a-1}$ não são projetivos (comentário:

está jogando um papel importante o fato que $a < n$ no caso (*)), e portanto obteríamos um caminho

$$M_i \cong Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_{a+1} \cong DTr_\Lambda(Z_{a-1}) \rightarrow \dots \rightarrow DTr_\Lambda(Z_0) = DTr_\Lambda(M_{r-1}) \rightarrow M_{r-2},$$

o que seria uma contradição com a escolha de r .

Concluimos que em qualquer dos casos, a afirmação (2) é válida.

Logo, pelos pontos (1) e (2) da hipótese, os módulos $Z_0, \dots, Z_s$, são não projetivos. Se tivéssemos $Z_k \cong Z_h$, com $0 \leq h < k \leq n$, como não existem ciclos seccionais segundo [BS], teríamos que $Z_{h+1} \cong DTr_\Lambda(Z_{k-1})$, e portanto, obteríamos um novo caminho em mod Λ da forma

$$M_i \cong Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_{h+1} \cong DTr_\Lambda(Z_{k-1}) \rightarrow \dots \rightarrow DTr_\Lambda(Z_0) = DTr_\Lambda(M_{r-1}) \rightarrow M_{r-2},$$

o que é uma contradição com a escolha de r .

Logo pelo Lema 2, existem $0 \leq b, c \leq n / \text{Hom}_\Lambda(Z_b, DTr_\Lambda(Z_c)) \neq 0$, e portanto obtemos:

$$M_i \cong Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_b \cong DTr_\Lambda(Z_c) \rightarrow \dots \rightarrow DTr_\Lambda(Z_0) = DTr_\Lambda(M_{r-1}) \rightarrow M_{r-2},$$

o que é uma contradição.

Concluimos que a suposição $r \geq 2$ é falsa e então $r = 1$. Assim, obtemos um ciclo em mod Λ

$$M = M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_i \cong Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_0 = M, \text{ com os módulos em } \mathcal{C}. \blacksquare$$

Lema 4

Seja $\mathcal{C}$ uma componente conexa de Γ_Λ e $\mathcal{D}$ uma componente conexa de $\mathcal{C}_s$ ($\mathcal{C}_s$ é a parte estável de $\mathcal{C}$, ou seja $\mathcal{C} \setminus DTr_\Lambda$ -órbitas de projetivos e injetivos). Assumamos que $\mathcal{D}$ tem infinitas DTr_Λ -órbitas e que não tem ciclos orientados. Seja $M \in \mathcal{D}$ tal que o comprimento de todo caminho em $\mathcal{C}$ desde um módulo não estável para M é maior o igual que $2n$ ($n = rk(K_0(\Lambda))$). Então existe um caminho seccional

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

tal que $\mathcal{C}$ não contém caminhos da forma

$$M_i = Z_s \rightarrow Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 = DTr_\Lambda(M_j)$$

com $s \leq n$ e $0 \leq i, j \leq n$. Em particular existe um ciclo

$$M \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow M$$

em mod Λ com $X_1, \dots, X_k$ em $\mathcal{C}$.

Demonstração:

Como $\mathcal{D}$ é uma aljava de translação estável com infinitas DTr_Λ -órbitas e sem ciclos orientados, então, segundo [HPR] e [Zha], temos que $\mathcal{D} \cong \mathbb{Z}\Delta$ com Δ infinito, localmente finito, conexo, sem ciclos orientados.

Seja $\mathcal{O}$ uma órbita em $\mathcal{D}$.

Afirmção: Existe um caminho de M para $\mathcal{O}$.

Como $\mathcal{D}$ é conexo, então existe um passeio

$$M = Y_0 \text{---} Y_1 \text{---} \dots \text{---} Y_r \text{ em } \mathcal{D}, \text{ com } Y_r \in \mathcal{O}$$

Se $r = 0$, então $M = Y_0 = Y_r \in \mathcal{O}$.

Se $1 \leq r$:

Se fosse $Y_0 \xrightarrow{irr} Y_1$, fica assim.

Se fosse $Y_0 \leftarrow Y_1$, conseguimos $Y_0 \rightarrow TrD_\Lambda(Y_1)$.

Logo teríamos $M = Y_0 \rightarrow Y_1 \text{---} Y_2 \text{---} \dots \text{---} Y_r$ com $Y_r \in \mathcal{O}$,

ou $M = Y_0 \rightarrow TrD_\Lambda(Y_1) \text{---} TrD_\Lambda(Y_2) \text{---} \dots \text{---} TrD_\Lambda(Y_r)$, com $TrD_\Lambda(Y_r) \in \mathcal{O}$.

Fazemos o mesmo tipo de argumento para os morfismos irredutíveis restantes e conseguimos

$$M = Y_0 \rightarrow \dots \rightarrow TrD_\Lambda^q(Y_r), \text{ com } 0 \leq q \leq r, \text{ e } TrD_\Lambda^q(Y_r) \in \mathcal{O}.$$

(Comentário: todo o raciocínio anterior é válido pois estamos trabalhando dentro de $\mathcal{D}$, componente estável.)

Consideramos $\mathcal{P}$ o conjunto dos caminhos

$$M = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_k,$$

em $\mathcal{D}$ com $k < \infty$, tal que $DTr_\Lambda(N_k)$ não é sucessor de M em $\mathcal{D}$.

Observações:

1. Se $M = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_k$ é um caminho em $\mathcal{P}$ então $M = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_m$, com $1 \leq m \leq k$, é um caminho em $\mathcal{P}$, pois se tivéssemos $M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda(N_m)$, como evidentemente temos $DTr_\Lambda(N_m) \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda(N_k)$, obteríamos $M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda(N_k)$, o que é um absurdo.
2. Como $\mathcal{D}$ não tem ciclos orientados, então para toda DTr_Λ -órbita $\mathcal{O}$ em $\mathcal{D}$, existe um módulo $\tilde{N}(\mathcal{O})$ que é a “entrada” de um caminho de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{O}$, isto é existe um caminho $M \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{N}$ com $M \not\xrightarrow{\mathcal{P}} DTr(\tilde{N})$:

Nós já sabemos que para toda DTr_Λ -órbita $\mathcal{O}$, existe $M \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{O}$. Seja $N \in \mathcal{O} / M \xrightarrow{\mathcal{P}} N$.

Se temos que $M \not\xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda(N)$, então N é o módulo procurado.

Se $M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda(N)$, olhamos para $DTr_\Lambda^2(N)$. Se $M \not\xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda^2(N)$, então $DTr_\Lambda(N)$ é o módulo procurado. Se $M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda^2(N)$, olhamos para $DTr_\Lambda^3(N)$. Notar que o processo acaba pois se $M \xrightarrow{\mathcal{P}} N$, então existe $q \in \mathbb{N} / DTr_\Lambda^q(N) \xrightarrow{\mathcal{P}} M$. Logo o processo está limitado por q passos, pois no caso contrário obteríamos $DTr_\Lambda^q(N) \xrightarrow{\mathcal{P}} M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda^q(N)$, o que é uma contradição pois $\mathcal{D}$ é sem ciclos.

Como o processo acaba, concluímos que existe $1 \leq m < q$ e um caminho $M \xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda^m(N)$ com $M \not\xrightarrow{\mathcal{P}} DTr_\Lambda^{m+1}(N)$. Logo $DTr_\Lambda(N)$ é a entrada para $\mathcal{O}$, de um caminho em $\mathcal{P}$.

Agora, do fato de $\mathcal{D}$ ser localmente finita, e por $\mathcal{D}$ ter infinitas DTr_Λ -órbitas, e pelo provado anteriormente, dá para concluir que $\mathcal{P}$ contém caminhos de comprimento arbitrariamente grande. Logo, pela observação (1), podemos concluir que $\mathcal{P}$ contém um caminho

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n.$$

Suponhamos que $\mathcal{C}$ contenha um caminho

$$M_i = Z_s \rightarrow Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow DTr_\Lambda(M_j), \text{ com } s \leq n \text{ e } 0 \leq i, j \leq n.$$

Obtemos assim

$$(*) : M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_i = Z_s \rightarrow Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow DTr_\Lambda(M_j).$$

Como $i \leq n$ e $s \leq n$, deduzimos que $(*)$ tem comprimento menor ou igual a $2n$. Logo

$$M = M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_i = Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_1$$

tem comprimento menor ou igual a $2n - 1$ e portanto fica incluído em $\mathcal{D}$ (já sabíamos também que $DTr_\Lambda(M_j) \in \mathcal{D}$). Assim o caminho

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_i = Z_s \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow DTr_\Lambda(M_j) \rightarrow DTr_\Lambda(M_{j+1}) \rightarrow \dots \rightarrow DTr_\Lambda(M_n),$$

ficaria incluído em $\mathcal{D}$, o que é uma contradição pois $M \not\stackrel{\mathcal{P}}{\rightarrow} DTr_\Lambda(M_n)$.

Concluimos que não existe em $\mathcal{C}$ nenhum caminho da forma

$$M_i = Z_s \rightarrow Z_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow DTr_\Lambda(M_j), \text{ com } s \leq n \text{ e } 0 \leq i, j \leq n.$$

Em particular, podemos deduzir que $M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ é seccional.

Consideremos agora um caminho seccional em $\mathcal{C}$ da forma

$$U_t \rightarrow U_{t-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_1 = DTr_\Lambda(M_{i+1}) \rightarrow U_0 = M_i, \text{ com } 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } t \leq n.$$

Afirmção: Os módulos $U_1, \dots, U_t$ são:

- (1) não isomorfos aos módulos $M_0, M_1, \dots, M_n$;
- (2) não projetivos.

(1) Se $U_s \cong M_j$, obtemos um caminho em $\mathcal{C}$ de comprimento $s - 1 < n$

$$M_j \cong U_s \rightarrow U_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_1 = DTr_\Lambda(M_{i+1}),$$

o que é uma contradição pelo provado anteriormente. Então fica provada a afirmação (1).

(2) Se U_i fosse projetivo para $1 \leq i \leq t$, obteríamos um passeio

$$U_i \rightarrow U_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_1 \rightarrow U_0 = M_i \leftarrow M_{i-1} \leftarrow \dots \leftarrow M_1 \leftarrow M_0 = M$$

de comprimento menor ou igual a $2n$, o que contradiz a hipótese. Assim fica provada a afirmação (2).

Também verifica-se que $M_i \not\cong M_j$, se $i \neq j$, pois não existem ciclos em $\mathcal{D}$. Por último, como $M = M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$, está incluído em $\mathcal{D}$, concluimos que para todo $0 \leq i \leq n$, M_i não é projetivo.

Logo estamos em condições de aplicar o Lema 3 e concluir que existe um ciclo

$$M \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow M,$$

em mod Λ com $X_1, \dots, X_k$ em $\mathcal{C}$. ■

Os seguintes resultados (do [Sko]) serão enunciados, mas não demonstrados por não ter relação direta com nosso trabalho.

Lema 5

Seja $\mathcal{C}$ uma componente regular conexa de Γ_Λ que contém somente um número finito de DTr -órbitas. Assumamos que existe um caminho

$$X = Z_0 \xrightarrow{f_1} Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{m-1} \xrightarrow{f_m} Z_m = Y,$$

em mod Λ , com $X, Y \in \mathcal{C}$, e $f_i \in rad^\infty(\text{mod } \Lambda)$, para $1 \leq i \leq m$.

Então todos os módulos em $\mathcal{C}$ são não diretores. ■

Teorema

Seja $\mathcal{C}$ uma componente regular de Γ_Λ que contém módulos diretores. Escrevemos $\Lambda = P \oplus Q$, onde os somandos simples de $\frac{P}{rad(P)}$ são exatamente os fatores de composição dos módulos em $\mathcal{C}$. Consideramos $\Upsilon = \frac{\Lambda}{t_Q(\Lambda)}$, onde $t_Q(\Lambda) = \sum_{f: Q \rightarrow \Lambda} \text{Im}(f)$.

Então:

1. $\mathcal{C}$ tem só um número finito de DTr -órbitas e todos os módulos de $\mathcal{C}$ são diretores.
2. $\mathcal{C}$ é uma componente “standard generalizada” de Γ_Λ .
3. $t_Q(\Lambda)$ é o anulador de $\mathcal{C}$.
4. Υ é uma álgebra inclinada da forma $\text{End}_H(T)$ sendo H uma álgebra hereditária (selvagem), e T um módulo inclinante regular.
5. $\mathcal{C}$ é a componente de conexão de Γ_Υ . ■

Corolário 1

Seja $\mathcal{C}$ uma componente regular conexa de Γ_Λ com infinitas DTr -órbitas. Então para todo módulo $M \in \mathcal{C}$, existe um ciclo

$$M \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_k \rightarrow M,$$

em $\text{mod } \Lambda$ com $M_1, \dots, M_k$ em $\mathcal{C}$. ■

Corolário 2

Γ_Λ admite ao máximo um número finito de DTr -órbitas com módulos diretores. ■

Corolário 3

Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Então Λ admite infinitas DTr -órbitas sem módulos diretores. ■

Prova do Teorema enunciado no Capítulo 2, segunda secção.

(A prova foi feita pela Dra. Sonia Trepode).

Teorema 7.2.2 *Seja Λ uma álgebra de Artin. Λ é uma álgebra inclinada se e só se existe em $\text{mod } \Lambda$ uma parêlha de torção que cinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que verifica: $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y})$; $dp(\mathcal{Y}) \leq 1$; e $\mathcal{Y} = \text{Cogen}(V)$, com $V \in \text{mod } \Lambda$.*

Demonstração:

O resultado direto é conhecido. Provemos o recíproco.

Consideremos $\mathcal{C} = \{ Y \in \text{ind } \Lambda \mid Y \in \text{Cogen}(V), \text{Ext}_\Lambda^1(-, Y)|_{\text{Cogen}(V)} = 0 \}$, e seja

$$Z = \bigoplus_{Y \in \mathcal{C}} Y.$$

Afirmção: $\text{Cogen}(Z) = \text{Cogen}(V)$.

Pela definição de $\mathcal{C}$, é evidente que $\text{Cogen}(Z) \subset \text{Cogen}(V)$.

Por outro lado, como $\mathcal{Y} = \text{Cogen}(V)$ temos que $\text{Cogen}(V)$ é uma classe livre de torção.

Segundo [Ass] $\text{Cogen}(V)$ é livre de torção $\Leftrightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(-, V)|_{\text{Cogen}(V)} = 0$, e portanto temos que $V' \in \mathcal{C}$ para todo V' somando indecomponível de V .

Logo $\text{Cogen}(V) \subset \text{Cogen}(Z)$. Fica provada assim a afirmação.

Afirmção: $\mathcal{C}$ forma uma fatia completa.

(α) $\mathcal{C}$ é sincero.

Isto é válido pois $\Lambda \in \text{add}(\mathcal{Y}) = \text{add}(\text{Cogen}(V)) = \text{Cogen}(V) = \text{Cogen}(Z)$.

(β) $\mathcal{C}$ é fechado para caminhos.

Consideramos o caminho

$$* : V_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow V_1$$

onde $V_0, V_1 \in \mathcal{C}$. Como a parêlha $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde, temos que $X_i \in \mathcal{Y}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo se X_i é injetivo, temos que $X_i \in \mathcal{C}$.

Suponhamos que nenhum X_i é injetivo, e aplico $\text{Tr}D$ ao caminho $*$. Obtemos

$$\text{Tr}D(*) : \text{Tr}D(V_0) \rightarrow \text{Tr}D(X_1) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Tr}D(V_1)$$

Mas segundo [Ass], como V_0, V_1 são Ext-injetivos em $\mathcal{Y} = \text{Cogen}(V)$, temos que $\text{Tr}D(V_0) \in \mathcal{X}$ e $\text{Tr}D(V_1) \in \mathcal{X}$. Novamente, como a parêlha $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ cinde, temos que todo o caminho $\text{Tr}D(*) \in \mathcal{X}$. Portanto $\text{Tr}D(X_i) \in \mathcal{X}$ para todo $i = 1, \dots, n$, e assim podemos concluir que $X_i \in \mathcal{C}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

(γ) Seja um morfismo irredutível $X \xrightarrow{\text{irr}} V_i$, com $V_i \in \mathcal{C}$. Temos que provar que $X \in \mathcal{C}$ ou $\text{Tr}D(X) \in \mathcal{C}$.

Suponhamos que $X \notin \mathcal{C}$. Então, segundo [Ass], $\text{Tr}D(X) \notin \mathcal{X}$, e como a parêlha de torção cinde, temos que $\text{Tr}D(X) \in \mathcal{Y}$.

Suponhamos que $\text{Tr}D(X) \neq 0$. Teríamos o morfismo irredutível $\text{Tr}D(V_i) \rightarrow (\text{Tr}D)^2(X)$, e portanto concluiríamos que $\text{Tr}D(V_i) \in \mathcal{Y}$ e que $(\text{Tr}D)^2(X) \in \mathcal{Y}$. Logo $\text{Tr}D(X) \in \mathcal{X}$.

No caso que $\text{Tr}D(X) = 0$ o raciocínio seria análogo. (δ) Óbvio. ■

Referências Bibliográficas

- [ARIV] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras IV: Invariants given by almost split sequences*, Comm. Algebra **5**, (1977).
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, (1995).
- [AS] M. Auslander, S. Samlø, *Preprojective modules over artin algebras*, J. Algebra **66**, (1980).
- [Ass] I. Assem, *Tilting theory - an introduction*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, Vol 26 PWN, Warsaw (1990).
- [Baer] D. Baer, *Wild hereditary artin algebras and linear methods*, Manuscr. Math. **55**, (1986).
- [BS] R. Bautista, S. Smalø, *Nonexistent cycles*, Comm. in Algebra **11**, (1983).
- [CH] F. U. Coelho, D. Happel, *Quasitilted-algebras admit a preprojective component*, Proc. Amer. Math. Soc. (a aparecer, 1996)
- [CS] F. U. Coelho, A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components for quasitilted algebras*, Fund. Math. **149**, (1996).
- [DK] Y. Drozd, V. Kirichenko, *Finite dimensional algebras*, Springer-Verlag, (1994).
- [HPR] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, *Vinberg's characterisation of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications to DTr-periodic modules*, in: Representation Theory II, Springer Lecture Notes Math. **832**, (1980).

- [HR] D. Happel, I. Reiten, *An introduction to quasitilted algebras*.
- [HRi] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **274**, (1982).
- [HRS1] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 575, Vol. 120, (1996).
- [HRS2] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Quasitilted algebras*, NATO Advanced Science Institute Series/Kluwer Academic Publishers, Vol. 424 163-182, (1994).
- [Liu] S. Liu, *Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver*, Journal London Math. Soc. **43**, (1993).
- [Sko] A. Skowroński, *Regular Auslander-Reiten components containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**, (1994).
- [Zha] Y. Zhang, *The structure of stable components*, Can. J. Math. **43**, (1991).

Desaparecidos.

*Están en algún sitio
concertados / desconcertados / sordos /
buscándose / buscándonos.
bloqueados por los signos y las dudas
contemplando las verjas de las plazas
los timbres de las puertas
las viejas azoteas
ordenando sus sueños / sus olvidos
quizá convalescientes de su muerte privada*

*nadie les ha explicado con certeza
si ya se fueron o si no
si son pancartas o temblores
sobrevivientes o responsos
ven pasar árboles y pájaros
e ignoran a que sombra pertenecen*

Otra voz canta.

*Por detrás de mi voz
-escucha, escucha-
otra voz canta.
Viene de atrás, de lejos;
viene de sepultadas
bocas y canta.
Dicen que no están muertos
-escúchalos, escucha-
mientras se alza la voz
que los recuerda y canta.
Escucha, escucha,
otra voz canta.*

*Dicen que ahora viven
en tu mirada.
(Sostenlos con tus ojos,
con tus palabras;
sostenlos con tu vida,
que no se pierdan,
que no se caigan).
Escucha, escucha,
otra voz canta.*

cuando empezaron a desaparecer,
hace tres / cinco / siete ceremonias
a desaparecer como sin sangre
como sin rostro y sin nosotros,
vieron por la ventana de su ausencia
lo que quedaba atrás
ese andamiaje de cielo y humo.

No son sólo memoria,
son vida abierta,
continua y ancha;
son camino que empieza.
Cantan conmigo,
conmigo cantan.
Dicen que no están muertos
-escúchalos, escúchalos-
mientras se alza la voz
que los recuerda y canta.
Cantan conmigo,
conmigo cantan.

cuando empezaron a desaparecer
como el oasis en los espejismos
a desaparecer sin últimas palabras
tenían en sus manos los trocitos
de cosas que querían
están en algún sitio / nube o tumba
están en algún sitio / estoy seguro
allá en el sur del alma
es posible que hayan extraviado la brújula
y hoy vaguen preguntando preguntando
dónde carajo queda el buen amor
porque vienen del odio

Mario Benedetti.

*Dicen que no están muertos,
-escúchalos, escucha-
mientras se alza la voz
que los recuerda y canta.
Escucha, escucha,
otra voz canta.
No son sólo memoria,
son vida abierta,
son camino que empieza
y que nos llama.
Cantan conmigo,
conmigo cantan;
cantan conmigo,
conmigo cantan;
cantan conmigo,
conmigo cantan.*

Daniel Viglietti.