**Desigualdade de Harnack
para Operadores Elípticos
Degenerados**

Jorge Groisman Kalenberg

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPQ*

**Desigualdade de Harnack
para Operadores Elípticos
Degenerados**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Jorge Groisman
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 10 de março de 1997.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. José Carlos Diniz Fernandes - IME-USP
- Profa. Dra. Beatriz Abadie - Universidad de la República (Uruguay)

*Al flamante campeón
y decano del fobal
uruguayo,
NACIONAL,*

Resumo

Demonstraremos a Desigualdade de Harnack para soluções fracas não negativas de operadores elípticos com certo grau de degeneração. O trabalho consistiu em adaptar o método de iteração de Moser, previamente aplicado para operadores menos gerais. Nos primeiros três capítulos supomos válida a versão da Desigualdade de Sobolev-Poincaré de que precisamos e no Capítulo 4 discutimos condições suficientes para sua validade.

Abstract

We prove a version of Harnack's inequality for non-negative weak solutions of certain degenerate elliptic operators. The work consists of adapting Moser's iteration technique, previously applied for less general operators. In the first three Chapters, we take for granted the version of Sobolev-Poincaré's inequality we need and in Chapter 4 we discuss sufficient conditions for its validity.

GRACIAS,
OBRIGADO,
ARIGATÔ,
UNA PALABRA,
TRES IDIOMAS,
MUCHOS AMIGOS.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Comentários.	1
1.2	Espaço onde se procuram soluções.	2
2	Preliminares	6
2.1	Métrica associada	6
2.2	Construção da função teste	13
2.3	Desigualdade de Sobolev-Poincaré	14
2.4	Confrontação das hipóteses.	18
2.5	Prévios para a iteração	21
3	Desigualdade de Harnack	27
3.1	Subsolução	27
3.2	Solução	35
3.3	Bombieri	44
3.4	Harnack	48
4	Trabalhando com um exemplo	50
4.1	Pesos <i>Strong</i> – A_∞ e Poincaré.	50
4.2	Apresentação do exemplo.	52
4.3	Verificação das hipóteses.	52
4.3.1	Condições da função λ	54

4.3.2	Hipóteses da desigualdade de Sobolev-Poincaré.	55
4.3.3	Pesos dobrantes.	57
4.4	Exemplo no contexto [ChW].	58
Referências Bibliográficas		60

Capítulo 1

Introdução

1.1 Comentários.

Sem querermos ser demasiado extensos, gostaríamos de narrar o processo que sofreu este trabalho até chegar ao resultado final.

O primeiro objetivo a que nos havíamos proposto, consistia em estudar em profundidade o artigo de [6] que procurou, entre outras coisas, demonstrar sob certas hipóteses a Desigualdade de Harnack para soluções de equações elípticas com certo grau de degeneração. Uma vez cumprida esta etapa, começamos a estudar o artigo de [1], no qual se faz menção da possibilidade de demonstrar a desigualdade antes mencionada para operadores com maior grau de degeneração. O caminho continuou seu curso, procurando adaptar os argumentos que [6] utilizava para sua demonstração. Estes estão fortemente baseados no Método de Iteração de Moser [12]. A ferramenta fundamental para essa iteração é a Desigualdade de Sobolev-Poincaré e a utilização de uma função “corte”, que intervém na construção de uma função teste a ser usada na definição da solução fraca. A métrica utilizada para esse novo contexto não tem uma interpretação geométrica clara. Porém é possível, através de alguns resultados já existentes na literatura, obter uma classe de retângulos, mais representáveis que as bolas dessa métrica, e que definem uma topologia equivalente à anterior. A função corte adequada a esse contexto, de “cubos”, foi construída sem demasiada dificuldade. É por isso que optamos, racionalmente, por procurar demonstrar Harnack para “cubos” e, então, retomar a desigualdade com bolas, como era anunciada em [1]. Superado esse obstáculo, surgiu uma nova pedra em nosso caminho: a Desigualdade de Sobolev-Poincaré sofria alterações que, com a iteração refletiam-se numa constante que explodia. Nesse ponto, recorreremos a um trabalho feito por José D. Fernandes,

onde consegue resolver um problema similar para operadores parabólicos. Adaptamos os argumentos por ele utilizados e é esse o resultado que esta dissertação procura transmitir.

1.2 Espaço onde se procuram soluções.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, Ω aberto e limitado. Consideremos o operador

$$L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(a_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \right),$$

onde as funções a_{ij} , a valores reais, são mensuráveis e a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica e satisfaz

$$v(z)(|\xi|^2 + \lambda^2(x)|\eta|^2) \leq \sum_{i,j} a_{ij}(z) \zeta_i \zeta_j \leq u(z)(|\xi|^2 + \lambda^2(x)|\eta|^2), \quad (1.1)$$

para todo $\zeta = (\xi, \eta)$ e $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, onde u e v são não negativos e localmente integráveis em $\mathbb{R}^N$, u é dobrante com respeito à métrica induzida por λ (i.e. existe uma constante positiva $c > 0$ tal que $u(2B) \leq cu(B)$ para toda bola $B \subset \mathbb{R}^N$ na métrica ρ a ser definida na Seção 2.1; por ora usaremos apenas que a topologia induzida por ρ é equivalente à topologia euclideana), $\int_{\Omega} u > 0$, e λ é contínua em $\mathbb{R}^n$. Mais condições serão impostas na seguinte seção.

Denotemos por $H(\Omega)$ o completamento do espaço das funções lipschitzianas em $\overline{\Omega}$, $\text{lip}(\overline{\Omega})$ com respeito à norma

$$\|f, H(\Omega)\| = \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(z) \partial_i f(z) \partial_j f(z) dz + \int_{\Omega} f^2(z) u(z) dz \right]^{1/2}.$$

Observação 1.2.1 Neste momento vale a pena determo-nos por um instante e mostrarmos que, efetivamente, a definida anteriormente é uma norma em $\text{lip}(\overline{\Omega})$.

Pela hipótese de elipticidade 1.1 temos

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\lambda} f|^2 v + \int_{\Omega} f^2(z) u(z) \leq \|f\|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\lambda} f|^2 u + \int_{\Omega} f^2 u, \quad (1.2)$$

onde $\nabla_{\lambda} f(x, y) = (\nabla_x f(x, y), \lambda(x) \nabla_y f(x, y))$.

Em particular, $\|f\|$ é finita, uma vez que o segundo membro é no máximo $(\|\nabla_\lambda f\|_\infty^2 + \|f\|_\infty^2)u(\Omega)$. Para provar que estamos em presença de uma norma, provemos que

$$a(f, \theta) = \int_\Omega \langle A \nabla f, \nabla \theta \rangle + \int_\Omega f \theta v$$

é um produto interno em $\text{lip}(\overline{\Omega})$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$. Sendo A simétrica, fica provado $a(f, \theta) = a(\theta, f)$ e, claramente, a linearidade é válida. Resta provar que é não degenerada, ou seja, $a(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Mas, temos

$$a(f, f) = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow \int_\Omega |\nabla_\lambda f|^2 v + \int_\Omega f^2 u = 0.$$

Assim, $f^2(z)u(z) = 0$ para quase todo ponto em Ω . Suponhamos que exista $z \in \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$. Então, por f ser contínua, temos que existe $B(z, r)$ tal que $f(z) \neq 0, \forall z \in B$. Então $u(z) = 0$ para quase todo ponto em B . Mas, u é dobrante e, portanto, $u = 0$ para quase todo ponto em Ω , caso em que nosso problema careceria de sentido (ou seja, estamos assumindo a hipótese adicional de que u não é identicamente nula). Deste modo, $f \equiv 0$ em Ω e, assim, $\|\cdot\|$ é uma norma em $\text{lip}(\overline{\Omega})$. ■

Provado o fato de que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\text{lip}(\overline{\Omega})$, ficamos em condições de considerar $H(\Omega)$ como o conjunto de classes de equivalência das seqüências de Cauchy $u = \{u_k\}$, com respeito à norma $\|\cdot\|$, com $u_k \in \text{lip}(\overline{\Omega})$. É claro que $\text{lip}(\overline{\Omega})$ fica incluído em $H(\Omega)$, considerando $\{u_k\}$ com $u_k = u, \forall k, u \in \text{lip}(\overline{\Omega})$. Se $u = \{u_k\}$ e $\theta = \{\theta_k\}$, $u, \theta \in H$, então, $a(u_k, \theta_k)$ é convergente, e portanto, podemos definir

$$a(u, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} a(u_k, \theta_k)$$

e

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

Dessa maneira, H resulta num espaço de Hilbert com respeito ao produto interno $a(u, \theta)$ e à norma $\|u\| = a(u, u)^{1/2}$. Concentremos nossa atenção na desigualdade do lado esquerdo em 1.2. Se $f \in H$, $f = \{f_k\}$, então $\{\nabla_\lambda f_k\}$ e $\{f_k\}$ são seqüências de Cauchy em $L_v^2(\Omega)$ e $L_u^2(\Omega)$ respectivamente, com $L_v^2(\Omega)$ e $L_u^2(\Omega)$ denotando o conjunto das funções f definidas em Ω tais que $\int_\Omega |f(z)|^2 v(z) dz < \infty$ e $\int_\Omega |f(z)|^2 u(z) dz < \infty$ respectivamente. Assim, existem $\tilde{f} \in L_u^2$ e um vetor $\alpha \in L_v^2$, tais que $f_k \rightarrow \tilde{f}$ em L_u^2 e $\nabla_\lambda f_k \rightarrow \alpha$ em L_v^2 .

Observação 1.2.2 *Provemos que as correspondências acima apresentadas estão bem definidas.*

Seja $\{g_k\}$ tal que $g_k \rightarrow f$ em H . Temos

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\lambda}(f_k - g_k)|^2 v + \int_{\Omega} (f_k - g_k)^2 u \leq \|f_k - g_k\|_H \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\|\nabla_{\lambda} f_k - \nabla_{\lambda} g_k\|_{L_v^2} \rightarrow 0,$$

e

$$\|f_k - g_k\|_{L_u^2} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Então, $g_k \rightarrow \tilde{f}$ em L_u^2 e $\nabla_{\lambda} g_k \rightarrow \alpha$ em L_v^2 .

Assim, fica claro que $\tilde{f}$ e α não dependem do representante escolhido para f , conforme enunciamos. ■

No que segue, denotaremos por $\tilde{f}$, a função de L_u^2 associada a f .

Observação 1.2.3 *Se a Desigualdade de Sobolev-Poincaré (veja Seção 2.3) é satisfeita, então*

$$a_0(f, \theta) = \int_{\Omega} \langle A \nabla f, \nabla \theta \rangle, \quad \text{com } f, \theta \in \text{lip}(\overline{\Omega}),$$

é um produto interno em $\text{lip}_0(\Omega) = \{f \in \text{lip}(\Omega) : \text{suporte de } f \text{ é compacto contido em } \Omega\}$ e, dessa forma, podemos definir $H_0(\Omega)$ como o complemento de $\text{lip}_0(\Omega)$ com respeito à norma induzida, que denotaremos $\|\cdot\|_0$.

Demonstraremos a afirmação anterior na Seção 2.3.

Já identificados os espaços onde procuraremos soluções, parece, este, o momento de definirmos formalmente o conceito de solução, com o qual trabalharemos. Mais tarde, mostraremos a existência dessas soluções.

Definição 1.2.1 *Dizemos que $f \in H(\Omega)$, é uma solução fraca de $Lf = 0$, se $a_0(f, \theta) = 0$, $\forall \theta \in H_0(\Omega)$.*

Resulta interessante perguntar-se se a definição anterior está de acordo com a definição de solução no sentido das distribuições. Um simples cálculo mostrará que a resposta é afirmativa. $a_0(f, \theta) = 0$ significa $\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial \theta}{\partial z_i} dz = 0$, ou seja se f é solução fraca, segue que

$$\left\langle \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j}, \theta \right\rangle, \quad \forall \theta \in C_c^\infty(\Omega),$$

ou seja f é solução no sentido das distribuições. C_c^∞ é o conjunto das funções infinitamente deriváveis de suporte compacto em Ω . A notação utilizada na última expressão é própria das distribuições. Informação sobre as distribuições pode se encontrar em [14].

Mostremos a existência das soluções assim definidas.

Fixemos nossa atenção no problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u = \psi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{onde } \psi \in H(\Omega),$$

onde $u = \psi$ em $\partial\Omega$ significa $u - \psi \in H_0(\Omega)$.

Consideremos o funcional $-a_o(\psi, \cdot)$ definido em $H_0(\Omega)$. Esse funcional é contínuo, pois

$$|a_o(\psi, \theta)| \leq a_o(\psi, \psi)^{1/2} \cdot a_o(\theta, \theta)^{1/2} = a_o(\psi, \psi)^{1/2} \cdot \|\theta\|_o.$$

Além disso, a desigualdade acima mostra-nos que a forma bilinear $a_o(\cdot, \cdot)$ é limitada em $H_0(\Omega)$ e é coerciva [12] (Pag. 78), pois $a_o(\theta, \theta) = \|\theta\|_0^2$ em H_0 . Portanto, aplicando o teorema de Lax-Milgram [12] temos que existe uma única $F \in H_0$ tal que $a_o(F, \theta) = -a_o(\psi, \theta)$, para todo $\theta \in H_0$. Considerando $u = F + \psi$, temos que $a_o(u, \theta) = 0$, para todo $\theta \in H_0$, e $u - \psi \in H_0$, ficando satisfeita a condição do bordo.

A partir do próximo capítulo, começaremos a preparar o terreno para atingir nosso objetivo principal, ou seja, demonstrar a Desigualdade de Harnack.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Métrica associada

Nosso objetivo nessa seção é procurar caraterizar a métrica sob a qual trabalharemos.

Seja λ uma função satisfazendo:

H1. λ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^n$ é não negativa e anula-se em um número finito de pontos.

H2. É dobrante, com respeito à métrica euclídeana. (i.e. existe C_{dob} tal que $\int_{2B_{euc}} \lambda \leq C_{dob} \int_{B_{euc}} \lambda$, para toda bola euclídeana $B_{euc}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^n; |z - z_0| < r\}$).

H3. (Condição RH_∞) Existe constante $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C} \max_Q \lambda(x) \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \lambda(x) dx \leq C \max_Q \lambda(x),$$

onde $Q = \{|x - x_0| < r\}$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, (Note que a segunda desigualdade é sempre satisfeita) e $|Q|$ denota a medida de Lebesgue de Q .

Definição 2.1.1 Dizemos que uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ absolutamente contínua, $N = n + m$, é uma curva sub-unitária se para todo $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in$

$\mathbb{R}^m$, temos

$$\langle \gamma'(t), \zeta \rangle^2 \leq |\xi|^2 + \lambda^2(\gamma(t))|\eta|^2 \quad (2.1)$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$, definimos

$\rho(z_1, z_2) = \inf\{T > 0; \text{ existe uma curva sub-unitária } \gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ tal que } \gamma(0) = z_1, \gamma(T) = z_2\}$, onde λ é uma função que satisfaz as condições impostas no começo deste capítulo.

Vale a pena destacar, a importância que a função possua um número finito de zeros. De fato, tal característica implicará que ρ seja finita, e portanto, uma métrica. Vejamos isto mais detalhadamente.

Seja $v = \frac{1}{n^{1/2}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e $\mu = \frac{1}{m^{1/2}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, as curvas “horizontais” $(x \pm tv, y)$, são curvas sub-unitárias $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N$ assim como as curvas “verticais” $(x, y \pm t\lambda(x)\mu)$. Como λ se anula em um número finito de pontos, é possível conectar dois pontos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ mediante a reunião de um número finito de tais curvas, o que mostra que $\rho(z_1, z_2)$ é finita. É fácil verificar que ρ é de fato uma métrica. Seja $B(z_0, t)$ a bola $B(z_0, t) = \{z \in \mathbb{R}^N : \rho(z_0, z) < t\}$.

O próximo resultado tem um papel fundamental em nosso trabalho. Em particular, ficará provado que a topologia induzida por esta métrica é equivalente à euclidiana. (Fato já usado no Capítulo 1)

Proposição 2.1.1 *Se $z_0 = (x_0, y_0)$ e $t > 0$, sejam:*

$$\Lambda(z_0, t) = \sup_{x: |x-x_0|<t} \lambda(x)$$

$$F(z_0, t) = t\Lambda(z_0, t)$$

$$Q(z_0, t) = B_{\text{euc}}(x_0, t) \times B_{\text{euc}}(y_0, F(z_0, t)),$$

onde $B_{\text{euc}}(x_0, t)$ denota o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < t\}$. Então, existe $b > 1$ tal que

$$Q(z_0, t/b) \subset B(z_0, t) \subset Q(z_0, bt), \quad t > 0$$

com b independente do ponto. (Vamos nos referir à propriedade acima como a “dupla inclusão”).

Prova:

Seja $z = (x, y) \in B(z_0, t)$. Por definição existe uma curva sub-unitária $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(T) = z$ com $T < t$.

Agora fixando k temos

$$|z_0^k - z^k| \leq \int_0^T |\gamma'_k(t)| dt,$$

onde $z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^N)$ e $z = (z^1, \dots, z^N)$.

Se $k > n$, então temos

$$\int_0^T |\gamma'_k(t)| dt \leq \int_0^T \lambda(\gamma(t)) dt \leq$$

$$\leq T\Lambda(z_0, T) < t\Lambda(z_0, t).$$

Se $k \leq n$, temos que

$$\int_0^T |\gamma'_k(t)| dt \leq \int_0^T dt = T < t.$$

Foi utilizada a definição de curva sub-unitária com $\zeta = (0, e_{k-n})$, $e_{k-n} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ em $\mathbb{R}^m$ no primeiro caso, enquanto no segundo $\zeta = (e_k, 0)$ com e_k em $\mathbb{R}^n$.

Assim, as normas euclidianas satisfazem $|x_0 - x| < tn^{1/2}$ e $|y - y_0| < tm^{1/2}\Lambda(z_0, t)$.

Então temos

$$B(z_0, t) \subset Q(z_0, tK),$$

onde $K = \max\{m^{1/2}, n^{1/2}\}$.

Mostremos a outra inclusão. Curvas

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

serão escritas na forma

$$\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t)),$$

onde

$$\gamma_x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\gamma_y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Seja dado $z \in Q(z_0, t) = \{z; |x - x_0| < t, |y - y_0| < F(z_0, t)\}$. A idéia é construir uma curva sub-unitária que conecte z e z_0 .

Para os movimentos “horizontais”, escolhamos $|\gamma'_x| = 1$ e $|\gamma'_y| = 0, \forall t$.

Vamos provar que sob estas hipóteses $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ é uma curva sub-unitária.

Devemos provar que

$$\langle (\gamma'_x(t), \gamma'_y(t)), (\xi, \eta) \rangle^2 \leq$$

$$|\xi|^2 + \lambda^2(\gamma(t))|\eta|^2 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Mas, levando em consideração nossas hipóteses, temos

$$\langle (\gamma'_x(t), \gamma'_y(t)), (\xi, \eta) \rangle = \langle \gamma'_x(t), \xi \rangle^2.$$

Porém a norma do funcional linear $\gamma'_x(t)$ é ≤ 1 .

Portanto,

$$\langle \gamma'_x(t), \xi \rangle^2 \leq |\xi|^2 \leq |\xi|^2 + \lambda^2(\gamma(t))|\eta|^2 \quad \forall (\xi, \eta).$$

Daí γ é uma curva sub-unitária.

Para os movimentos “verticais”, escolhamos $\gamma'_x = 0$. Daí $\gamma(t) = (x, \gamma_y(t))$. Escolhamos $|\gamma'_y(t)| = \lambda(x), \forall t$. Vamos conferir que em este caso γ também é uma curva sub-unitária. Suponhamos que $\lambda(x) \neq 0$, então temos que provar

$$\left\langle \frac{\gamma'_y(t)}{\lambda(x)}, \eta \right\rangle^2 \leq$$

$$\leq \frac{|\xi|^2}{\lambda^2(x)} + |\eta|^2$$

Mas

$$\frac{|\gamma'_y(t)|}{\lambda(x)} \leq 1, \quad \forall t$$

Então raciocinando da mesma forma que no caso anterior, temos que

$$\left\langle \frac{\gamma'_y(t)}{\lambda(x)}, \eta \right\rangle^2 \leq |\eta|^2.$$

Se $\lambda(x) = 0$, a “curva vertical” se reduz a um ponto. Daí o que queríamos provar.

Faremos a seguinte construção. Partimos de $z_0 = (x_0, y_0)$ e nos movimentamos “horizontalmente” nas condições anteriores até alcançar o ponto $z^1 = (x^1, y_0)$ onde x^1 é tal que $\lambda(x^1)$ é o maior valor que alcança λ em $\{|x - x_0| \leq t\}$, ou seja $\lambda(x^1) = \Lambda(z_0, t)$. O tempo utilizado neste percorrido é limitado superiormente pelo t . A seguir, nos movimentamos “verticalmente”, conectando $z^1 = (x^1, y_0)$ com $z_1 = (x^1, y)$

Nesta segunda etapa do percorrido, o tempo utilizado fica limitado por $\frac{F(z_0, t)}{\Lambda(z_0, t)} = t$. ($\Lambda(z_0, t) > 0$ pois λ se anula num número finito de pontos) Por último, conectamos “horizontalmente” $z_1 = (x^1, y)$ com $z = (x, y)$, onde novamente o tempo do percorrido fica limitado pelo t .

Daí

$$\rho(z, z_0) \leq 2t + \frac{F(z_0, t)}{\Lambda(z_0, t)} = 3t.$$

Então,

$$Q(z_0, t) \subset B(z_0, 3t)$$

Ou seja,

$$Q(z_0, t/3) \subset B(z_0, t).$$

Vale a pena dizer explicitamente as curvas sob as quais foram feitos os movimentos anteriores. Para os movimentos horizontais definimos, $\gamma_x : t \mapsto x_0 + \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|}t$ e $\gamma_y = y_0$ com $t \in [0, |x_1 - x_0|]$. É claro que $|x_1 - x_0| < t$.

Para os movimentos verticais, definimos $\gamma_x(t) \equiv x^1$ e $\gamma_y(t) = y_0 + \frac{y - y_0}{|y - y_0|} \lambda(x^1)t$ com $t \in [0, \frac{|y - y_0|}{\lambda(x^1)}]$. É claro em este outro caso que $\frac{|y - y_0|}{\lambda(x^1)} \leq \frac{|y - y_0|}{\Lambda(z_0, t)} \leq t$.

A conclusão final é que

$$Q(z_0, t/3) \subset B(z_0, t) \subset Q(z_0, Kt).$$

Assim, $b = \max\{3, K\}$. ■

A ideia dessa demonstração é baseada no Teorema 2.3 do [2].

Corolário 2.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado. Então existe uma bola B_ρ que o contém.*

Prova:

É possível achar $r > 0$ tal que $\Omega \subset Q(z_0, r)$, pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(z_0, t) = +\infty$. Logo, pela Proposição anterior temos $\Omega \subset Q(z_0, r) \subset B(z_0, br)$. ■

Definição 2.1.2 *X é um espaço métrico homogêneo, se existe uma medida boreliana μ tal que $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$, onde C independe da bola e do ponto.*

Lema 2.1.1 *$(\mathbb{R}^N, \rho)$ é um espaço métrico homogêneo.*

Prova:

Mostremos que a medida euclidiana é a μ procurada. A primeira etapa será provar que a função $t \mapsto \Lambda(z_0, t)$ é dobrante, partindo da hipótese que λ tem essa mesma propriedade (H2) e fazendo uso da “condição (RH_∞) ” (H3).

$$\begin{aligned} \Lambda(z_0, 2t) &= \sup_{|x - x_0| < 2t} \lambda(x) \leq C \frac{1}{|B_{\text{euc}}(x_0, 2t)|} \int_{|x - x_0| < 2t} \lambda(x) dx \leq \\ &\leq CC_{DOB} \frac{1}{|B_{\text{euc}}(x_0, 2t)|} \int_{|x - x_0| < t} \lambda(x) dx \leq \\ &\leq C^2 C_{DOB} \Lambda(z_0, t). \end{aligned}$$

Então fica provado que Λ é dobrante. É fácil ver que partindo do anterior, a função

$t \mapsto F(z_0, t)$ também é dobrante. Voltando ao objetivo do presente lema, queremos provar que

$$|B(z_0, 2r)| \leq K|B(z_0, r)|,$$

onde K não depende da bola B . Mas,

$$\begin{aligned} |B(z_0, 2r)| &\leq |Q(z_0, 2br)|_{R^N} = |B_{\text{euc}}(x_0, 2br)|_{R^n} \times |B_{\text{euc}}(y_0, F(z_0, 2br))|_{R^m} = \\ &C_n C_m (2br)^n (F(z_0, 2br))^m. (*) \end{aligned}$$

Como F é dobrante, então existe $\alpha > 0$ tal que $F(z, t/\theta) \leq C(1/\theta)^\alpha F(z, t)$, *for all* t e $\forall \theta \in (0, 1)$, onde C é a constante dobrante de F ou com $c = 1/C$,

$$F(z, t/\theta) \leq (1/c)(1/\theta)^\alpha F(z, t) \quad \forall t \text{ e } \forall \theta \in (0, 1). \quad (2.2)$$

Logo, veremos uma demonstração da afirmação anterior.

Aplicando o dito resultado temos,

$$\begin{aligned} (*) &\leq C_n C_m 2^n b^{2n} (2b^2)^{\alpha m} (r/b)^n F(z_0, r/b)^m = \\ &= (2b^2)^n (2b^2)^{\alpha m} |Q(z_0, r/b)| \leq K B(z_0, r). \end{aligned}$$

É claro que utilizamos o teorema (2.1.1) em várias oportunidades. O resultado aqui provado será de muita utilidade na demonstração de um resultado prévio da iteração, pertencente a uma próxima seção. ■

Na seguinte observação provaremos a afirmação feita em 2.2 .

Observação 2.1.1 *Existe $\alpha > 0$ tal que $F(z, \theta t) \geq c\theta^\alpha F(z, t)$, $t > 0$, $\theta \in (0, 1)$, com $c = 1/C$, onde C é tal que $F(z, 2t) \leq C F(z, t)$ para todo z e t .*

Já foi provado que F é dobrante. Então, $F(z, \theta t) \geq cF(z, 2\theta t) \geq \dots \geq c^n F(z, 2^n \theta t) \geq \dots$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_0} \theta \geq 1 > 2^{n_0-1} \theta$, ou seja, $1 - \log_2 \theta > n_0 \geq -\log_2 \theta$. Daí, $F(z, \theta t) \geq c^{n_0} F(z, t) \geq cc^{-\log_2 \theta} F(z, t) = c^{2^{\log_2 c} (-\log_2 \theta)} F(z, t) = c\theta^\alpha F(z, t)$, onde $\alpha = \log_2 c^{-1}$. Usamos que a constante do dobrante C é necessariamente maior que 1, e portanto $c < 1$; em particular $\alpha > 0$.

2.2 Construção da função teste

Nosso objetivo em esta seção é mostrar a construção de uma função com determinadas características, que será muito útil no recorrer do trabalho.

A existência desta função, pode ser provada da mesma forma que no [2], Proposição 5.10.

Seja $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^N$.

Lembremos que,

$$Q(z_0, t) = B_{euc}(x_0, t) \times B_{euc}(y_0, F(z_0, t)).$$

Consideremos dois reais $0 < r_1 < r_2$. Mostraremos que existe $c > 1$ tal que para todo $r_1 < r_2$ existe uma função η tal que $\eta \in C_o^\infty(Q(z_0, r_2))$ tal que $\eta = 1$ em $Q(z_0, r_1)$ e $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{c}{r_2 - r_1}$.

Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $(-\infty, 0)$ e $\psi \equiv 0$ em $(1, \infty)$. Dados $0 < r_1 < r_2$, a função $\varphi(t) = \psi\left(\frac{t - \frac{r_1}{r_2}}{1 - \frac{r_1}{r_2}}\right)$ satisfaz $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $[0, r_1/r_2]$, $\varphi \equiv 0$ em $[1, \infty]$, e $|\varphi'(t)| \leq c(1 - r_1/r_2)^{-1}$, com $c = \sup |\psi'|$.

Definamos

$$\eta(x, y) = \varphi\left(\frac{|x - x_0|}{r_2}\right) \varphi\left(\frac{|y - y_0|}{F(z_0, r_2)}\right).$$

É claro que $\text{supp } \eta \subset Q(z_0, r_2)$.

Por outro lado, se $z = z(x, y) \in Q(z_0, r_1)$ então $|y - y_0| < F(z_0, r_1) = r_1 \Lambda(z_0, r_1) \leq r_1 \Lambda(z_0, r_2) = r_1/r_2 F(z_0, r_2)$.

Assim, $\eta(z) = 1$.

Por último, lembremos que, $\nabla_\lambda \eta = \nabla_x \eta + \lambda(x) \nabla_y \eta$.

Como $z \in Q(z_0, r_2)$ então $|x - x_0| < r_2$ então $\lambda(x) \leq \Lambda(z_0, r_2)$.

Levando em consideração o anterior, temos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_i} = \varphi\left(\frac{|x - x_0|}{r_2}\right) \varphi'\left(\frac{|y - y_0|}{F(z_0, r_2)}\right) \frac{1}{F(z_0, r_2)} \frac{y^i - y_0^i}{|y^i - y_0^i|}.$$

Então,

$$\lambda(x) \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y_i} \right\| \leq \lambda(x) c (1 - r_1/r_2)^{-1} \frac{1}{F(z_0, r_2)} \leq$$

$$\leq c(1 - r_1/r_2)^{-1} \frac{1}{r_2} = \frac{c}{r_2 - r_1}. \blacksquare$$

2.3 Desigualdade de Sobolev-Poincaré

Daqui até o final do Capítulo 3 assumiremos que as funções u, v, λ são tais que existe $q > 2$ tal que vale a seguinte desigualdade de Sobolev-Poincaré:

$$\left(\frac{1}{u(B_\rho(z_0, r))} \int_{B_\rho(z_0, r)} |g - \mu|^q u(z) dz \right)^{1/q} \leq \quad (2.3)$$

$$Cr \left(\frac{1}{v(B_\rho(z_0, r))} \int_{B_\rho(z_0, r)} |\nabla_\lambda g|^2 v(z) dz \right)^{1/2}$$

para toda g lipschitziana, onde μ pode ser escolhida como sendo a u -média de g em $B_\rho(z_0, r)$, $\mu = u(B_\rho)^{-1} \int_{B_\rho} g(z) u(z) dz$. A constante C depende de q, u, v, λ mas independe de g, z_0, r .

Também daqui até o final do Capítulo 3 nos referiremos à hipótese (SP), quando u, v e λ satisfaçam as condições enunciadas acima. Esta desigualdade terá um papel fundamental no percurso do trabalho.

Não é o objetivo do mesmo, mostrar uma prova da dita desigualdade, e portanto neste momento adiamos até o Capítulo 4 a discussão e apresentação de condições que garantam a validade desta. Porém, pode-se consultar [3].

Na observação (1.2.3) afirma-se que se a Desigualdade de Sobolev-Poincaré é satisfeita, então

$$a_0(f, f) = \int_{\Omega} \langle A \nabla f, \nabla f \rangle, \quad \text{com } f, \in \text{lip}_0(\Omega)$$

é uma norma em $\text{lip}_0(\Omega)$. Já enunciada Sobolev-Poincaré, é o momento de verificar a dita afirmação.

Como antes, a única dúvida que fica no objetivo proposto, é que $a_0(f, f) = 0$ implica $f = 0$. Fazendo uso da Desigualdade de Poincaré, provemos a não degeneração da futura norma. Porém, perderemos um instante em analisar as transformações que sofre a desigualdade antes mencionada, quando as funções são de suporte compacto.

Nosso problema é conseguir estimar

$$\left[\frac{1}{u(B)} \int_B |g|^q u(z) dz \right]^{1/q},$$

quando $\text{supp } g \subset B(z_0, r) = B_r$. Pela desigualdade triangular para L_u^q , obtemos

$$\left[\frac{1}{u(B_r)} \int_{B_r} |g(z)|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq$$

$$\left[\frac{1}{u(B_r)^{1/q}} \int_{B_r} |g(z) - \mu|^q u(z) dz \right]^{1/q} + |\mu|,$$

onde μ é a média de g citada na Desigualdade de Sobolev-Poincaré.

Por outro lado, aplicando a desigualdade 2.3 em $B(2r)$, temos que

$$\left[\frac{1}{u(B_{2r})} \int_{B_{2r}} |g(z) - \mu|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq 2Cr \left[\frac{1}{v(B_{2r})} \int_{B_{2r}} |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right]^{1/p} \quad (2.4)$$

Mas, $\text{supp } g \subset B_r$ e, então, o segundo membro da desigualdade 2.4 acima é igual a

$$2Cr \left[\frac{1}{v(B_{2r})} \int_{B_r} |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right]^{1/p}$$

que, por sua vez, é majorado por

$$\leq 2Cr \left[\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r} |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right]^{1/p}.$$

Agora, o lado esquerdo da Desigualdade 2.4, é minorado por

$$\frac{1}{u(B_{2r})^{1/q}} \left[\int_{B_{2r}/B_r} |\mu|^q u(z) dz \right]^{1/q} = |\mu| \left[\frac{u(B_{2r}/B_r)}{u(B_{2r})} \right]^{1/q} \geq K|\mu|,$$

onde no último passo usamos o fato que u é dobrante.

Combinando os fatos anteriores temos que

$$\left[\frac{1}{u(B_r)} \int_{B_r} |g|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{K} 2Cr \left[\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r} |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right]^{1/p} + \left[\frac{1}{u(B_r)} \int_{B_r} |g - \mu|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\
&\leq Dr \left[\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r} |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right]^{1/p},
\end{aligned}$$

onde aplicamos a Desigualdade 2.3 no último passo.

Até aqui, obtivemos uma versão da Desigualdade de Sobolev-Poincaré para funções de suporte compacto em B_r . É o momento de voltarmos a nosso problema de não degeneramento de a_0 .

Se $a_0(f, f) = 0$, então

$$\begin{aligned}
&\left[\int_B |f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\
&\leq K' \left[\int_B |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2} \leq \\
&\leq C' \left[\int_B \sum_{i,j} a_{i,j}(z) \partial_i f(z) \partial_j f(z) dz \right]^{1/2} = C' a_0(f, f),
\end{aligned}$$

onde $\Omega \subset B$. Para encontrar dita bola B usamos que Ω é limitado; desse modo pelo corolário (2.1.1) da Proposição (2.1.1), existe uma bola que o contém. Assim, $f \equiv 0$. Isto mostra que $a_0(f, f)^{1/2}$ é uma norma em $H_0(\Omega)$. ■

Na seção anterior demonstramos um resultado que vincula as ρ -bolas com certo tipo de retângulos, mostrando que

$$Q(z_0, t/b) \subseteq B(z_0, t) \subseteq Q(z_0, bt).$$

Procuraremos no seguinte lema, encontrar uma desigualdade de “Sobolev-Poincaré”

válida para os retângulos anteriormente mencionados.

Lema 2.3.1 *Suponhamos que seja válida a hipótese (SP) e que u seja dobrante, então temos,*

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq c_1^{n/q} c_2 b r \left[\frac{1}{v(Q)} \int_{b^2 Q} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde, $n > 2 \log_2 b$, c_1, c_2 são constantes que somente dependem de u, v, λ, m e n , $Q = Q(z, r) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r, |y - y_0| < F(z_0, r)\}$, $B = B_\rho(z_0, r)$, b é a constante que aparece na dupla inclusão acima mencionada, e $av_{\mu,bB}f = \frac{1}{u(bB)} \int_{bB} f(z)u(z)dz$.

Prova:

Partindo da desigualdade 2.3 e da dupla inclusão, temos que,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{u(Q)} \int_{bB} |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{u(\frac{1}{b}B)} \int_{bB} |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} = \\ & = \left[\frac{u(bB)}{u(\frac{1}{b}B)} \frac{1}{u(bB)} \int_{bB} |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq (*) \end{aligned}$$

Escolhamos n de maneira tal que, $\frac{2^n}{b} > b$ ié $n > 2 \log_2 b$. Assim, $u(bB) \leq u(\frac{2^n}{b}B) \leq c_1^n u(\frac{1}{b}B)$, onde c_1 é a constante do dobrante de u . Daí $\frac{u(bB)}{u(\frac{1}{b}B)} \leq c_1^n$, com $n > 2 \log_2 b$. Portanto,

$$(*) \leq \left[c_1^n \frac{1}{u(bB)} \int_{bB} |f - av_{\mu,bB}f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1^{n/q} c_2 b r \left[\frac{1}{v(bB)} \int_{bB} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2} \leq \\
&\leq c_1^{n/q} c_2 b r \left[\frac{1}{v(Q)} \int_{b^2 Q} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Logo o resultado que queríamos provar, com $c_2 = C$, a constante de 2.3. ■

Observação 2.3.1 *A desigualdade que acabamos de obter, foi sem dúvida, o obstáculo que mais dificultou na hora da iteração.*

Sem estarmos adiantando resultados, vale a pena ressaltar que a constante b aumentará em potência a cada passo da iteração.

Os resultados que seguem, foram chaves para a resolução do nosso problema. Para mais informação sobre os próximos resultados, consultar [4].

2.4 Confrontação das hipóteses.

Na seção seguinte e no Capítulo 3 estaremos supondo que os pesos u e v são dobrantes. Em [1] são dadas condições que implicam a validade da nossa "hipótese (SP)". Veremos agora que as hipótese de [1] implicam que u e v são dobrantes. Em particular, segue que a Desigualdade de Harnack demonstrada em [6] é um caso particular de nossa Desigualdade de Harnack, cuja demonstração é esboçada em [1].

Sabemos de [1] que $u, v \in L_{loc}^1$ são pesos não negativos tais que u é dobrante e existe um peso w tal que $vw^{-(N-1)/N} \in A_p$ (ver definição a seguir), com respeito à medida dobrante $w^{(N-1)/N} dz$. Nas condições anteriores, mostremos que v também é dobrante.

Definição 2.4.1 *Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $p' = \frac{p}{p-1}$. Dizemos que o peso w satisfaz a condição A_p se existir uma constante positiva C tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^N$*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w^{-1})^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C, \quad \text{se } 1 < p < \infty, \quad (2.6)$$

ou

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w \leq C \inf_{x \in Q} w(x), \quad \text{se } p = 1. \quad (2.7)$$

Observação 2.4.1 Dizemos que o peso w satisfaz a condição A_p , com respeito à medida μ , se existir uma constante positiva C tal que, para toda bola B ,

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B (w^{-1})^{\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{p-1} \leq C.$$

Observação 2.4.2 (Prévio) Sejam v e $1/v$ pertencentes a L^1_{loc} e $p > 1$. Então,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B v(z) dz \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B v^{-\frac{1}{p-1}}(z) dz \right)^{p-1} \geq 1.$$

Prova:

$$\begin{aligned} |B|^p &= \left[\int_B 1 dz \right]^p = \left[\int_B v^{1/p} v^{-1/p} dz \right]^p \leq \\ &\leq \left[\int_B v dz \right] \left[\int_B v^{-p'/p} dz \right]^{p/p'} \leq \\ &\leq \left[\int_B v dz \right] \left[\int_B v^{-\frac{1}{p-1}} dz \right]^{p-1}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que

$$1/p' = 1 - 1/p = \frac{p-1}{p}.$$

Assim,

$$p'/p = \frac{1}{p-1}.$$

Portanto,

$$1 \leq \left[\frac{1}{|B|} \int_B v(z) dz \right] \left[\frac{1}{|B|} \int_B v^{-\frac{1}{p-1}} dz \right]^{p-1}. \blacksquare$$

Proposição 2.4.1 *Se $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ não negativo é tal que existe $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ não negativo tal que $vw^{-(N-1)/N} \in A_p$ com respeito à medida dobrante $w^{(N-1)/N}dz$, então v é dobrante.*

Prova:

Com a finalidade de simplificar a notação, escrevamos

$$\mu(B) = \int_B w^{(N-1)/N}(z)dz.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B vw^{-(N-1)/N} w^{(N-1)/N} dz \right] \leq \\ & \leq C \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B \left[(vw^{-(N-1)/N})^{-1} \right]^{\frac{1}{p-1}} w^{(N-1)/N} dz \right]^{1-p}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\mu(2B)} \int_{2B} v(z)dz \right] \leq \\ & \leq C \left[\frac{1}{\mu(2B)} \int_{2B} \left((vw^{-(N-1)/N})^{-1} \right)^{\frac{1}{p-1}} w^{(N-1)/N} dz \right]^{1-p}. \end{aligned}$$

Levando em consideração que $1 - p$ é negativo, que a medida μ é dobrante, e que a desigualdade contrária da definição de peso A_p é sempre válida (vide observação anterior) temos que o segundo membro da desigualdade acima, é majorado por

$$\begin{aligned} & C_1 \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B \left((vw^{-(N-1)/N})^{-1} \right)^{\frac{1}{p-1}} w^{(N-1)/N} dz \right]^{1-p} \leq \\ & \leq C_2 \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B v(z)dz \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\mu(2B)}v(2B) \leq C_2 \frac{1}{\mu(B)}v(B).$$

Por outro lado, $\mu(2B) \leq c\mu(B) \leq c\mu(2B)$. Então, $\mu(B) \sim \mu(2B)$. Assim,

$$v(2B) \leq Kv(B),$$

onde K independe de B . Assim fica demonstrado que v é dobrante. ■

Observação 2.4.3 *Com o que temos visto até aqui, estamos em condições de afirmar que o caso $\lambda = 1$ do artigo [1] fica incluído no contexto de [6].*

- A geometria do [1], com $\lambda = 1$ é a euclidiana.
- Observando a condição de elipticidade 1.1, é claro que para $\lambda = 1$ se transforma em

$$v(z)|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq u(z)|\xi|^2,$$

que é a condição dual no [6].

- As funções u e v são dobrantes e verificam a desigualdade de Sobolev-Poincaré.

Reunindo toda a informação anterior temos que a afirmação feita na observação é válida. ■

2.5 Prévios para a iteração

Lema 2.5.1 *Dado $Q = Q(\xi, s)$ e $0 < r < s$, existem $z_1, \dots, z_{m(r,s)}$ em Q e $K \geq 1$ independente de ξ, r, s , tais que*

$$(i) \quad Q(z_j, r/K) \cap Q(z_h, r/K) = \emptyset, \quad h \neq j$$

$$(ii) \quad Q(\xi, s) \subset \bigcup_{j=1}^{m(r,s)} Q(z_j, r).$$

Além disso, $m(r, s) \leq c(\frac{s}{r})^{v'}$ para constantes c e v' dependendo somente das dimensões n e m e da constante dobrante de λ .

Prova:

Na demonstração aplicaremos o Teorema (1.2)[5], o qual enunciamos a seguir: "Se X é um espaço métrico homogêneo e $k > 3$, então: dado um $\{S(x, r(x))\}$ recobrimento de bolas de um conjunto limitado E , existe uma família enumerável $\{S(x_i, r(x_i))\}$ de bolas disjuntas tal que $\{S(x_i, kr(x_i))\}$ recobre E . Além disso, se $r(x) = r$ para todo x , então a tal subcobertura é finita."

Ja foi provado que $(\mathbb{R}^N, \rho)$ é um espaço métrico homogêneo. Então estamos em condições de aplicar o resultado acima a $\{B(z, \frac{r}{4b})\}_{z \in Q}$, com $k = 4$; Daí existem $z_1, \dots, z_{m(r,s)}$ em Q tais que

$$B(z_h, \frac{r}{4b}) \cap B(z_j, \frac{r}{4b}) = \emptyset, \quad \text{se } i \neq j,$$

e

$$Q(\xi, s) \subset \bigcup_{j=1}^{m(r,s)} B(z_j, r/b).$$

Mas sabemos da Proposição (2.1.1) que

$$B(z_j, r/(4b)) \supset Q(z_j, r/(4b^2))$$

e

$$B(z_j, r/b) \subset Q(z_j, r).$$

Então escolhendo $K = 4b^2$, as afirmações (i) e (ii) ficam demonstradas.

Ainda falta achar uma cota superior para $m(r, s)$. Primeiro, notemos que usando os mesmos argumentos do lema (2.5.2), temos

$$Q(z_j, r/K) \subset Q(\xi, \frac{b^2(K+1)s}{K}).$$

Mas,

$$\frac{r}{K} = \frac{2b^4(K+1)s}{K} \cdot \frac{r}{2b^4(K+1)s},$$

e pela Observação (2.1.1) e pela formula para $|Q|$ (veja demonstração do Lema (2.1.1)), temos

$$|Q(z_j, r/K)| \geq \left(\frac{r}{2b^4(K+1)s} \right)^{v'} \left| Q \left(z_j, \frac{2b^4(K+1)s}{K} \right) \right|,$$

e como os $Q(z_j, r/K)$ são disjuntos, temos

$$\begin{aligned} \left| Q \left(\xi, \frac{b^2(K+1)s}{K} \right) \right| &\geq \sum_j |Q(z_j, r/K)| \geq \\ &\geq c(r/s)^{v'} \sum_j \left| Q \left(z_j, \frac{2b^4(K+1)s}{K} \right) \right|. \end{aligned}$$

Mas (usando mais uma vez a dupla inclusão),

$$Q \left(z_j, \frac{2b^4(K+1)s}{K} \right) \supset Q \left(\xi, \frac{b^2(K+1)s}{K} \right).$$

Desta forma

$$\left| Q \left(\xi, \frac{b^2(K+1)s}{K} \right) \right| \geq c(r/s)^{v'} m(r, s) \left| Q \left(\xi, \frac{b^2(K+1)s}{K} \right) \right|.$$

Portanto, $m(r, s) \leq c(s/r)^{v'}$. ■

Lema 2.5.2 *Sejam dados $0 < \epsilon < 1$ e $\eta \in Q(\xi, s)$, então*

$$Q(\eta, \epsilon s) \subset Q(\xi, (1 + \epsilon)s). \quad (2.8)$$

Prova:

Seja $z \in Q(\eta, \epsilon s)$, $z = (z_1, z_2)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, então $|z_1 - \eta_1| < \epsilon s$ e $|z_2 - \eta_2| < \epsilon s \Lambda(\eta, \epsilon s) = \epsilon s \sup\{\lambda(z_1) : |z_1 - \eta_1| < \epsilon s\}$.

$$|z_1 - \xi_1| \leq |z_1 - \eta_1| + |\eta_1 - \xi_1| < \epsilon s + s = (1 + \epsilon)s.$$

$$|z_2 - \xi_2| \leq |z_2 - \eta_2| + |\eta_2 - \xi_2| < \epsilon s \Lambda(\eta, \epsilon s) + s \Lambda(\xi, s)$$

Mas,

$$\Lambda(\eta, \epsilon s) = \sup\{\lambda(z_1) : |z_1 - \eta_1| < \epsilon s\} \leq \sup\{\lambda(z_1) : |z_1 - \xi_1| < (1 + \epsilon)s\}.$$

A última desigualdade é válida pois

$$|z_1 - \xi_1| \leq |z_1 - \eta_1| + |\eta_1 - \xi_1| < \epsilon s + s = (1 + \epsilon)s.$$

Então,

$$|z_2 - \xi_2| < \epsilon s \Lambda(\xi, (1 + \epsilon)s) + s \Lambda(\xi, s) \leq$$

$$\leq \epsilon s \Lambda(\xi, (1 + \epsilon)s) + s \Lambda(\xi, (1 + \epsilon)s) = (1 + \epsilon)s \Lambda(\xi, (1 + \epsilon)s).$$

Logo,

$$z \in Q(\xi, (1 + \epsilon)s),$$

assim

$$Q(\eta, \epsilon s) \subset Q(\xi, (1 + \epsilon)s). \blacksquare$$

Lema 2.5.3 *Sejam u, v, λ, q e f tais que 2.3 é válida. Assim, se Q é um dos retângulos $Q(z_0, r)$ e $B = B(z_0, r)$,*

$$\left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q |f|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq c_1^{n/q} c_2 b r \left[\frac{1}{v(Q)} \int_{b^2 Q} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2} + av_{\mu, bB} f,$$

e

$$|av_{\mu, bB} f| \leq C \left[\frac{1}{u(Q)} \int_{b^2 Q} f^2 u(z) dz \right]^{1/2},$$

com $av_{\mu, bB} f$ definido no Lema 2.3.1.

Prova:

Consiste somente em somar e subtrair $av_{\mu,bB}f$ a f e logo depois aplicar a desigualdade triangular em L_u^q . Depois aplicamos 2.5. Para a última desigualdade aplicamos Cauchy-Schwartz e consideramos que $Q \subset bB \subset b^2Q$. ■

Observação 2.5.1 Se $0 < r < s$, w é um peso dobrante com respeito à métrica ρ , então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\frac{w(Q_s)}{w(Q_r)} \leq c(s/r)^\alpha$, onde c é a constante do dobrante.

Fazendo uso da dupla inclusão, segue que $w(2Q) \leq cw(Q)$, onde c depende da constante dobrante para bolas e de b .

Temos que $w(Q_s) \leq cw(Q_{s/2}) \leq \dots \leq c^{n_0}w(Q_{\frac{s}{2^{n_0}}}) \leq c^{n_0}w(Q_r)$ onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{s}{2^{n_0}} \leq r \leq \frac{s}{2^{n_0-1}}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{w(Q_s)}{w(Q_r)} &\leq c^{n_0} \leq c \cdot c^{\log_2 s/r} \\ &= c^{2^{\log_2 c} \cdot \log_2 s/r} = c(s/r)^\alpha, \end{aligned}$$

onde $\alpha = \log_2 c$. ($\alpha > 0$ pois $c > 1$) ■

O seguinte resultado é uma adaptação do Teorema D de [4]. Em aquele trabalho os operadores são parabólicos, mas as idéias usadas são as mesmas.

Lema 2.5.4 Sejam u, v, λ e q tais que vale a hipótese (SP), e u e v dobrantes. Sejam dados $Q = Q(\xi, s)$ e $0 < \epsilon < 1$. Então existem a e C dependentes de u, v, λ , das dimensões m, n e de q tais que:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q |f|^q u(z) dz \right] \leq \\ &\leq C \epsilon^{-a} \left[\left(\frac{s^2}{v(Q)} \int_{(1+\epsilon)Q} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{u(Q)} \int_{(1+\epsilon)Q} f^2 u(z) dz \right)^{1/2} \right]^q, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, para toda f lipschitz e para todo $Q = Q(\xi, s)$ tal que $(1 + \epsilon)Q \subset \Omega$.

Prova:

Pelo Lema (2.5.1), temos que para $r = \frac{\epsilon s}{2b^4}$,

$$\int_Q |f(z)|^q u(z) dz \leq \sum_{j=1}^{m(r,s)} \int_{Q_j(z_j,r)} |f(z)|^q u(z) dz \leq (*).$$

Mas, pelo Lema (2.5.3) temos

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{j=1}^{m(r,s)} u(Q_j) \left[c_1^{n/q} c_2 b s \left(\frac{1}{v(Q_j)} \int_{b^2 Q_j} |\nabla_\lambda f(z)|^2 v(z) dz \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. c_3 \left(\frac{1}{u(Q_j)} \int_{b^2 Q_j} f^2(z) u(z) dz \right)^{1/2} \right]^q \leq (**). \end{aligned}$$

Pelo Lema (2.5.2) temos

$$Q(z_j, b^2 r) = Q(z_j, \frac{\epsilon s}{2b^2}) \subset Q(z_j, \epsilon s) \subset Q(\xi, (1 + \epsilon)s).$$

Então usando que u e v são dobrantes e as seguintes inclusões, $Q(\xi, s) \subset Q(z_j, 2b^2 s)$ e $Q(z_j, s) \subset Q(\xi, 2b^2 s)$ temos que

$$\begin{aligned} (**) &\leq C(b)(s/r)^{v'} u(Q(\xi, s)) \left\{ \left[\left(\frac{r}{2b^2 s} \right)^{-\alpha} s^2 \frac{1}{v(Q(\xi, s))} \int_{(1+\epsilon)Q} |\nabla_\lambda f|^2 v(z) dz \right]^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{u(Q(\xi, s))} \left(\frac{r}{2b^2 s} \right)^{-\alpha} \int_{(1+\epsilon)Q} f^2 u(z) dz \right]^{1/2} \right\}^q, \end{aligned}$$

sendo que dentro das chaves usamos a Observação 2.5.1.

Agora, escolhendo $a = v' + (\alpha/2)q$ e $s/r = c\epsilon^{-1}$ ou seja $c = (s/r)\epsilon = 2b^4$ obtemos o resultado procurado. ■

Ate aqui, as ferramentas que necessitaremos para demonstrar a Desigualdade de Harnack. O Lema 2.5.4 é o resultado que procuravamos para poder sortear a famosa “pedra” citada na introdução.

Capítulo 3

Desigualdade de Harnack

Nosso objetivo aqui, neste o capítulo central do trabalho, é adaptar os argumentos utilizados em [6], à demonstração da desigualdade de Harnack, no nosso contexto.

3.1 Subsolução

Definição 3.1.1 Dizemos que um elemento $f \in H$ é uma subsolução de $Lf = 0$ se $a_0(f, \theta) \leq 0$, para qualquer $\theta \in H_0$, $\theta \geq 0$.

Observação 3.1.1 Seja $\epsilon > 0$ dado, então a seguinte desigualdade é verificada:

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2\epsilon} \langle Ay, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

onde A é a matriz dos coeficientes.

Prova:

$$\begin{aligned} |\langle Ax, y \rangle| &= |\langle A\epsilon_1 x, y/\epsilon_1 \rangle| \leq \\ &|\langle A\epsilon_1 x, \epsilon_1 x \rangle|^{1/2} |\langle Ay/\epsilon_1, y/\epsilon_1 \rangle|^{1/2} \leq \\ &1/2 |\langle A\epsilon_1 x, \epsilon_1 x \rangle| + 1/2 |\langle Ay/\epsilon_1, y/\epsilon_1 \rangle| = \\ &\frac{\epsilon_1^2}{2} |\langle Ax, x \rangle| + \frac{1}{2\epsilon_1^2} |\langle Ay, y \rangle|. \end{aligned}$$

A prova termina tomando $\epsilon_1^2 = \epsilon$. ■

Para $M > 0$ e $\beta \geq 1$, seja $H_{M,\beta}(t) = t^\beta$ para $t \in [0, M]$ e $H_{M,\beta}(t) = M^\beta + \beta M^{\beta-1}(t - M)$ para $t > M$.

Lema 3.1.1 *Existe $c > 0$ que só depende da função λ que define a métrica tal que, dados $f \in H(\Omega)$ subsolução não negativa de $Lf = 0$, $\{f_k\} \subset H(\overline{\Omega})$ representante de f , s e t tais que $1/2 \leq s < t < 1$, $Q = Q(z_0, h) \subset \Omega$; existe subsequência $\{f_{k_j}\}$ e sequência $\delta_{k_j} \rightarrow 0$ tais que*

$$\int_{sQ} |\nabla_\lambda H_M(f_{k_j})|^2 v \leq c \frac{1}{(t-s)^2 h^2} \int_{tQ} [f_{k_j}, H'_M(f_{k_j})]^2 u + 2|\delta_{k_j}|, \quad (3.1)$$

com $M > 0$, $\beta \geq 1$ e $H_M = H_{M,\beta}$ como foi definida antes do lema.

Prova:

Para $\beta \geq 1$ e $0 < M < \infty$, defina $H_M(t) = t^\beta$ para $t \in [0, M]$ e $H_M(t) = M^\beta + \beta M^{\beta-1}(t - M)$ para $t > M$. Note que $H'_M(t)$ é limitada para cada M fixo. Seja $f = (f_k)$, $f_k \in \text{lip}(\overline{Q})$, $f_k \geq 0$, $\|f_k - f_j\| \rightarrow 0$ e para M fixo defina

$$\varphi_k(z) = \eta(z)^2 \int_0^{f_k(z)} H'_M(t)^2 dt,$$

sendo que η será uma função em $C_o^\infty(Q)$ escolhida convenientemente. Claramente, $\varphi_k \in \text{lip}_o(Q)$ e $\varphi \geq 0$. Em seguida mostraremos que a sequência $\|\varphi_k\|_o$ é limitada. De fato, como

$$\nabla \varphi_k(z) = \eta^2(z) H'_M(f_k(z))^2 \nabla f_k(z) + 2\eta(z) \nabla \eta(z) \int_0^{f_k(z)} H'_M(t)^2 dt \quad (3.2)$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_0^2 &= \int_Q \langle A \nabla \varphi_k, \nabla \varphi_k \rangle = \\ &= \int_Q \eta^4 H'_M(f_k)^4 \langle A \nabla f_k, \nabla f_k \rangle + \\ &\quad + 4 \int_Q \eta^3 H'_M(f_k)^2 \left(\int_0^{f_k} H'_M(t)^2 dt \right) \langle A \nabla f_k, \nabla \eta \rangle \end{aligned}$$

$$+4 \int_Q \eta^2 \left(\int_0^{f_k} H'_M(t)^2 dt \right)^2 \langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle = 1 + 2 + 3.$$

Logo, para demonstrarmos que a sequência $\|\varphi_k\|_0$ é limitada basta majorarmos **1**, **2**, **3**. Claramente

$$0 \leq 1 \leq \|\eta\|_\infty^4 \|H'_M\|_\infty^4 \|f_k\|^2,$$

que é limitada em k já que (f_k) é uma sequência de Cauchy em H . Além disso, como $\int_0^{f_k} (H'_M)^2 \leq \|H'_M\|_\infty^2 f_k$,

$$|2| \leq \|\eta\|_\infty^3 \|H'_M\|_\infty^4 \int_Q f_k \langle A \nabla f_k, \nabla f_k \rangle^{1/2} \langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle^{1/2} \leq$$

$$c_{M,\eta} \int_Q \langle A \nabla f_k, \nabla f_k \rangle^{1/2} f_k |\nabla_\lambda \eta| u^{1/2},$$

sendo que a ultima desigualdade segue da condição de degeneramento. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$|2| \leq c_{M,\eta} \left(\int_Q \langle A \nabla f_k, \nabla f_k \rangle \right)^{1/2} \left(\int_Q f_k^2 u \right)^{1/2} \leq c_{M,\eta} \|f_k\|^2,$$

que é limitado em k . Finalmente,

$$0 \leq 3 \leq 4 \|\eta\|_\infty^2 \|H'_M\|_\infty^4 \int_Q f_k^2 |\nabla_\lambda \eta|^2 u \leq$$

$$\leq c_{M,\eta} \int_Q f_k^2 u \leq c_{M,\eta} \|f_k\|^2.$$

As majorações **1**, **2**, **3** demonstram que a sequência $(\|\varphi_k\|_0)$ é limitada e portanto podemos escolher uma subsequência (φ_{k_j}) fracamente convergente para $\varphi \geq 0$ em H_0 . Como $f \in H$ e $|a_0(f, \varphi)| \leq a_0(f, f)^{1/2} a_0(\varphi, \varphi)^{1/2} \leq \|f\| \|\varphi\|_0$, segue que $a_0(f, \cdot)$ é um funcional linear contínuo em H_0 . Portanto,

$$a_0(f, \varphi) = \lim a_0(f, \varphi_{k_j}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim[a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) + a_0(f - f_{k_j}, \varphi_{k_j})] = \\
&= \lim a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j})
\end{aligned}$$

já que $|a_0(f - f_{k_j}, \varphi_{k_j})| \leq \|f - f_{k_j}\| \|\varphi_{k_j}\|_0 \leq c\|f - f_{k_j}\| \rightarrow 0$.

Como f é subsolução, $a_0(f, \varphi) \leq 0$, e momentaneamente distinguiremos os casos $\lim a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) = 0$ e < 0 . No primeiro caso, $a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) = \delta_{k_j} \rightarrow 0$. De 3.2 e da fórmula $\int_Q \langle A \nabla f_{k_j}, \nabla \varphi_{k_j} \rangle = a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) = \delta_{k_j}$, obtemos

$$\int_Q \langle A \nabla f_{k_j}, \eta^2 H'_M(f_{k_j})^2 \nabla f_{k_j} \rangle + \int_Q \left\langle A \nabla f_{k_j}, 2\eta \nabla \eta \left(\int_0^{f_{k_j}} H'_M(t)^2 dt \right) \right\rangle = \delta_{k_j} \quad (3.3)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \langle A H'_M(f_{k_j}) \nabla f_{k_j}, H'_M(f_{k_j}) \nabla f_{k_j} \rangle \eta^2 \leq \\
&2 \int_{\{z \in Q; f_{k_j}(z) \neq 0\}} \left| \left\langle A H'_M(f_{k_j}) \eta \nabla f_{k_j}, \frac{\nabla \eta}{H'_M(f_{k_j})} \int_0^{f_{k_j}} H'_M(t)^2 dt \right\rangle \right| + |\delta_{k_j}|
\end{aligned} \quad (3.4)$$

já que o lado esquerdo de 3.4 é não negativo.

No caso $\lim a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) < 0$, temos que $a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) \leq 0$ para k_j suficientemente grande e assim teremos desigualdades análogas a 3.3 e 3.4 com $(= \delta)$ substituídos por (≤ 0) para k_j suficientemente grande. Neste caso 3.4 vale mesmo sem o termo $(+\delta)$. Logo 3.4 vale em qualquer um dos casos com $f = f_{k_j}$, para k_j grande e $|\delta| = |\delta_{k_j}| \rightarrow 0$.

Aplicando a desigualdade

$$| \langle Ax, y \rangle | \leq \frac{\epsilon}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2\epsilon} \langle Ay, y \rangle \quad (3.5)$$

para $\epsilon = 1/2$ no lado direito da desigualdade 3.4 e reagrupando os termos temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_Q \langle A H'_M(f_{k_j}) \nabla f_{k_j}, H'_M(f_{k_j}) \nabla f_{k_j} \rangle \eta^2 \leq \\
&\leq 2 \int_Q \langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle \left[\frac{1}{H'_M(f_{k_j})} \int_0^{f_{k_j}} H'_M(t)^2 dt \right]^2 + |\delta_{k_j}| \leq
\end{aligned}$$

$$2 \int \langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle [f_{k_j} H'_M(f_{k_j})]^2 + |\delta_{k_j}|,$$

onde na última desigualdade foi utilizado o fato que $\int_0^{f_{k_j}} H'_M(t)^2 dt \leq H'_M(f_{k_j})^2 \cdot f_{k_j}$, pois H'_M é uma função crescente em t .

Logo, notando que $H'_M(f_{k_j}) \nabla f_{k_j} = \nabla H_M(f_{k_j})$ e aplicando a hipótese de degeneração, temos

$$\int |\nabla_\lambda H_M(f_{k_j})|^2 v \eta^2 \leq 4 \int |\nabla_\lambda \eta|^2 u [f_{k_j} H'_M(f_{k_j})]^2 + 2|\delta_{k_j}|.$$

Dados s e t satisfazendo $1/2 \leq s < t < 1$, escolhamos a função η de tal modo que $\eta = 1$ em sQ , $\eta = 0$ fora de tQ e $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{c}{(t-s)h}$, onde h é o raio do cubo Q . O anterior é possível usando os argumentos da seção (2.2). Então

$$\int_{sQ} |\nabla_\lambda H_M(f_{k_j})|^2 v \leq c \frac{4}{(t-s)^2 h^2} \int_{tQ} [f_{k_j} H'_M(f_{k_j})]^2 u + 2|\delta_{k_j}|. \blacksquare$$

Lema 3.1.2 *Sejam u , v e λ satisfazendo a hipótese (SP) e u e v dobrantes. Neste caso, existem constantes c e d dependendo de u, v, λ, q, n e m , tais que para $1/2 \leq \alpha < 1$ e $p \geq 2$, temos*

$$(\sup_{\alpha Q} \tilde{f}) \leq \left[\frac{c}{(1-\alpha)^d} \mu^{2\sigma/(\sigma-1)} \frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p u \right]^{1/p},$$

para f subsolução não negativa de $Lf = 0$ pertencendo a $H(Q)$, $\sigma = q/2$, sendo q o expoente para o qual vale a hipótese (SP).

Prova:

Dados s e t satisfazendo $1/2 \leq s < t < 1$, apliquemos o Lema (2.5.4) à função $H_{M,\beta}(f_{k_j})$ em sQ e escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)s < t$.

Então,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} |H_M(f_{k_j}(z))|^q u(z) dz \leq \\ & \leq c \epsilon^{-a} \left\{ \left[\frac{h^2 s^2}{v(sQ)} \int_{(1+\epsilon)sQ} |\nabla_\lambda (H_M(f_{k_j}(z)))|^2 v(z) dz \right]^{1/2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{(1+\epsilon)sQ} |H_M(f_{k_j}(z))|^2 u(z) dz \right]^{1/2} \Bigg\}^q.$$

Aplicando lema anterior com $(1+\epsilon)s$ no lugar de s e usando que $H_M(t) \leq tH'_M(t) \quad \forall t$, temos que

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} |H_M(f_{k_j}(z))|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq c\epsilon^{-A} \left[\frac{s}{t - (1+\epsilon)s} \mu(sQ) + 1 \right] \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} (f_{k_j}(z) H'_M(f_{k_j}(z)))^2 u(z) dz \right]^{1/2} + \\ & + \frac{csh}{v(sQ)^{1/2}} |\delta_{k_j}|^{1/2}, \quad \text{onde } A = a/q. \end{aligned}$$

Na última desigualdade levamos em consideração a hipótese $1/2 \leq s < t < 1$ para usar que

$$\frac{u(tQ)}{v(sQ)} \leq c_{dob} \mu(sQ) \quad \text{com } \mu(sQ) = \frac{u(sQ)}{v(sQ)}.$$

Considerando uma outra subsequência, podemos supor $f_{k_j} \rightarrow \tilde{f}$ para quase todo ponto em Ω com respeito a medida $u(z)dz$. Fazemos $j \rightarrow \infty$ e utilizamos para o lado esquerdo o lema de Fatou [11] ($\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$) e o fato que H_M é uma função contínua, e para o lado direito utilizamos,

$$\begin{aligned} & |f_{k_j} H'_M(f_{k_j}) - \tilde{f} H'_M(\tilde{f})|^2 \leq \\ & \leq 2[|f_{k_j} - \tilde{f}|^2 H'_M(f_{k_j})^2 + |\tilde{f}|^2 |H'_M(f_{k_j}) - H'_M(\tilde{f})|^2] \end{aligned}$$

e mais a continuidade e limitação de H'_M . Logo,

$$\left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} H_M(\tilde{f}(z))^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \epsilon^{-A} C \left[\frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu(sQ) + 1 \right] \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} [\tilde{f}(z) H'_M(\tilde{f}(z))]^2 u(z) dz \right]^{1/2}$$

Note que $\frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \geq 1$ e $\mu \geq 1$, então,

$$\frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu + 1 \leq 2 \frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu.$$

Portanto devido aos fatos $\tilde{f} H'_M(\tilde{f}) \leq \tilde{f} \beta \tilde{f}^{\beta-1} = \beta \tilde{f}^\beta$ e $H_M(\tilde{f}(x)) \geq \tilde{f}(x)^\beta \chi_{\{x: \tilde{f}(x) \leq M\}}$. Fazendo $M \rightarrow \infty$ obtemos,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \tilde{f}(z)^{\beta q} u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq \epsilon^{-A} C \beta \left[\frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu \right] \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} \tilde{f}(z)^{2\beta} u(z) dz \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade anterior à potência $1/\beta$ escrevendo $r = 2\beta$ e lembrando que $q = 2\sigma$ (veja Seção (2.3)), segue que,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \tilde{f}(z)^{\sigma r} u(z) dz \right]^{\frac{1}{\sigma r}} \leq \\ & \leq \left[C \epsilon^{-A} r \frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu \right]^{2/r} \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} \tilde{f}(z)^r u(z) dz \right]^{1/r}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para $r \geq 2$.

Agora, inicie com α e p fixos, $1/2 \leq \alpha < 1$, $p \geq 2$ e itere a desigualdade acima para s , t e ϵ assumindo os seguintes valores:

$$t = \alpha_j, \quad s = \alpha_{j+1}, \quad \epsilon = \frac{s_{j+1} - s_{j+2}}{s_{j+1}},$$

onde $\alpha_j = \alpha + \frac{1 - \alpha}{j + 1}$, e itere r na sequência $\{\sigma^j p\}$. Assim obtemos

$$\left[\frac{1}{u(s_{j+1}Q)} \int_{s_{j+1}Q} \tilde{f}^{\sigma^{j+1}p}(z) u(z) dz \right]^{\frac{1}{\sigma^{j+1}p}} \leq$$

$$\leq \left[C \epsilon_{j+1}^{-A} \sigma^j p \mu \frac{s_{j+1}}{s_j - (1 + \epsilon_{j+1})s_{j+1}} \right]^{\frac{2}{\sigma^j p}} \left[\frac{1}{u(s_j Q)} \int_{s_j Q} \tilde{f}^{\sigma^j p}(z) u(z) dz \right]^{\frac{1}{\sigma^j p}}.$$

Como $\alpha Q \subset s_{j+1} Q$ e $u(s_{j+1} Q) \cong u(\alpha Q)$, temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(\alpha Q)} \int_{\alpha Q} \tilde{f}^{\sigma^{j+1} p}(z) u(z) dz \right]^{\frac{1}{\sigma^{j+1} p}} \leq \\ & \leq \prod_{k=0}^j \left[C \mu \sigma^k p \epsilon_{k+1}^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1})s_{k+1}} \right]^{\frac{2}{\sigma^k p}} \left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p(z) u(z) dz \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

E, portanto

$$\sup_{\alpha Q} \tilde{f} \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left[C \mu \sigma^k p \epsilon_{k+1}^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1})s_{k+1}} \right]^{\frac{2}{\sigma^k p}} \left[\frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p(z) u(z) dz \right]^{1/p}.$$

Observemos que acontece com o termo geral da produtória.

$$\begin{aligned} & \epsilon_{k+1}^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1})s_{k+1}} = \\ & = \left(\frac{s_{k+1} - s_{k+2}}{s_{k+1}} \right)^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1})s_{k+1}} \end{aligned}$$

Procuremos majorar um dos fatores anteriores,

$$\left(\frac{s_{k+1}}{s_{k+1} - s_{k+2}} \right)^A \leq C^A \frac{(k+2)^{2A}}{(1-\alpha)^A}$$

Logo voltando ao fator geral, temos que

$$\frac{C^A (k+2)^{2A}}{(1-\alpha)^A} C \frac{(k+2)^2}{1-\alpha} = \frac{C(A)(k+2)^{2(A+1)}}{(1-\alpha)^{A+1}}.$$

Assim,

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(c \mu \sigma^k p \epsilon_{k+1}^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1})s_{k+1}} \right)^{\frac{2}{\sigma^k p}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\frac{c(A)p\mu}{(1-\alpha)^{A+1}} \right]^{2/p \sum_0^\infty \frac{1}{\sigma^j}} \prod_{k=0}^\infty \left[\sigma^k (k+2)^{2(A+1)} \right]^{\frac{2}{\sigma^k p}} = \\
&= \left[\frac{c(A)p\mu}{(1-\alpha)^{A+1}} \right]^{\frac{2}{p} \frac{\sigma}{\sigma-1}} \prod_{k=0}^\infty \left[\sigma^k (k+2)^{2(A+1)} \right]^{\frac{2}{\sigma^k p}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=0}^\infty \left[\sigma^k (k+2)^{2(A+1)} \right]^{\frac{2}{\sigma^k p}} = \\
&= \prod_{k=0}^\infty \exp \left[\frac{2}{\sigma^k p} (k \log \sigma + 2(A+1) \log(k+2)) \right] = \\
&= \exp \left\{ 2/p \left[\log \sigma \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{\sigma^k} + 2(A+1) \sum_{k=0}^\infty \frac{\log(k+2)}{\sigma^k} \right] \right\} = \\
&= \exp [2/pc(A)].
\end{aligned}$$

As series são convergentes pois $\sigma > 1$. Então

$$\sup_{\alpha Q} \tilde{f} \leq \left[\frac{c(A)p\mu}{(1-\alpha)^{A+1}} \right]^{\frac{2}{p} \frac{\sigma}{\sigma-1}} \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p(z) u(z) dz \right)^{1/p}.$$

Observemos que A é uma constante que depende do dobrante e da dimensão do espaço. ■

3.2 Solução

Lema 3.2.1 *Existe $c > 0$ que só depende da função λ que define a métrica, tal que dados $f \in H(\Omega)$ solução não negativa de $Lf = 0$, $\{f_k\} \subset H(\overline{\Omega})$ representante de f , s e t tais que $1/2 \leq s < t < 1$, $Q = Q(z_0, h) \subset \Omega$; existe subsequência $\{f_k\}$ e*

seqüência $\delta_{k_j} \rightarrow 0$, tais que

$$\int_{sQ} |\nabla_\lambda f_{k_j}^{(\beta+1)/2}|^2 v \leq c \frac{|\beta+1|^2}{|\beta|^2} \frac{1}{(t-s)^2 h^2} \int_{tQ} f_{k_j}^{\beta+1} u + c_\beta |\delta_{k_j}|,$$

com $\beta \leq 1$, $\beta \neq 0, -1$.

Prova:

Seja $f = \{f_k\}$, $f_k \in \text{lip}(\overline{Q})$, um representante de f com $f_k \geq 0$. Podemos assumir que $f_k(x) \geq \epsilon_0$ para algum $\epsilon_0 > 0$ e todo k pois poderíamos considerar $\{f_k(x) + \epsilon_0\}$. Isso não implica uma perda de generalidade, pois podemos tomar o limite quando ϵ_0 tende a 0. Com $\eta(x)$ como no lema anterior e $\eta(x) \geq 0$, defina $\varphi_k = \eta^2 f_k^\beta$, $-\infty < \beta < +\infty$. Note que f_k^β é limitada, possui derivadas limitadas e que $\varphi_k \geq 0$, $\varphi_k \in \text{lip}_0(Q)$. Também, se fizermos a restrição $\beta \leq 1$, pode-se mostrar que $\|\varphi_k\|_0$ é limitada em k . A verificação desse fato é similar à parte análoga do lema correspondente para subsoluções (Lema (3.1.1)), e por isso, deixaremos de apresentar os detalhes. Entretanto, apresentaremos alguns fatos úteis. Em primeiro lugar, $f_k^{2(\beta-1)}$ é limitada em x e em k por $\epsilon_0^{2(\beta-1)}$. Também $2(2\beta-1) \leq 2$ e, portanto, usando a desigualdade de Hölder ou o fato de que $f_k \geq \epsilon_0$, dependendo do sinal de $2\beta-1$, obtemos

$$\int_Q f_k^{2(2\beta-1)} u \leq C_{u,\beta} \left[\left(\int_Q f_k^2 u \right)^{2\beta-1} + \epsilon_0^{2(2\beta-1)} \right]$$

a qual é limitada em k . Aclaremos um pouco a afirmação anterior. Se $2\beta-1 \geq 0$ temos que pela desigualdade de Hölder

$$\int_Q f_k^{2(2\beta-1)} u^{2\beta-1} u^{2-2\beta} \leq \left(\int_Q f_k^2 u \right)^{2\beta-1} + c_{u,\beta}.$$

Por outro lado, se $2\beta-1 < 0$ temos que

$$\int_Q f_k^{2(2\beta-1)} u \leq d_{u,\beta} \epsilon_0^{2(2\beta-1)}.$$

Levando em consideração as duas estimativas, obtemos o resultado procurado. Em forma similar, como $2\beta \leq 2$,

$$\int_Q f_k^{2\beta} u = C_{u,\beta} \left[\left(\int_Q f_k^2 u \right)^\beta + \epsilon_0^{2\beta} \right].$$

Como $\|\varphi_k\|_0$ é limitada em k , podemos considerar uma subsequencia $\varphi_{k_j} \rightarrow \varphi$ (no sentido da convergencia fraca) em H_0 e obter como anteriormente

$$a_0(f_{k_j}, \varphi_{k_j}) \rightarrow a_0(f, \varphi) = 0.$$

Assim,

$$\int_Q \langle A \nabla f_{k_j}, \nabla \varphi_{k_j} \rangle = \delta_{k_j} \rightarrow 0.$$

A partir das fórmulas

$$\nabla \varphi_{k_j} = \eta^2 \beta f_{k_j}^{\beta-1} \nabla f_{k_j} + 2\eta \nabla \eta f_{k_j}^\beta$$

e

$$\nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right) = \frac{\beta+1}{2} f_{k_j}^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla f_{k_j},$$

obtemos para $\beta \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta+1} \int_Q \left\langle A \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right), \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right) \right\rangle \eta^2 &= \\ &= - \int_Q \left\langle A \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right), \nabla \eta \right\rangle f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \eta + (\beta+1) \delta_{k_j}. \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos resulta em

$$\begin{aligned} \frac{|\beta|}{|\beta+1|} \int_Q \left\langle A \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right), \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right) \right\rangle \eta^2 &\leq \\ &\leq \int_Q \left| \left\langle A \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right), \nabla \eta \right\rangle \right| f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \eta + c_\beta |\delta_{k_j}|. \end{aligned}$$

Aplicando 3.5 com $\epsilon = \frac{|\beta|}{|\beta+1|}$, $-\infty < \beta \leq 1$, $\beta \neq 0, -1$, com $x = \nabla f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \eta$ e

$y = \nabla \eta f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_Q \left\langle A \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right), \nabla \left(f_{k_j}^{\frac{\beta+1}{2}} \right) \right\rangle \eta^2 \leq \\ & \leq \frac{|\beta+1|^2}{|\beta|^2} \int_Q |\langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle| f_{k_j}^{\beta+1} + c_\beta |\delta_{k_j}|. \end{aligned}$$

Aplicando em ambos os membros a hipótese de elipticidade e levando em consideração a construção da η , obtemos o resultado que procurávamos. ■

Lema 3.2.2 *Existem c e d que só dependem de u, v, λ, n, m e q tais que se $-\infty < p < +\infty$, $p \neq 0, 1$, temos,*

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha Q} (\tilde{f})^p \leq \\ & \leq \frac{c}{(1-\alpha)^d} (1 + \mu|p|)^{2\sigma/(\sigma-1)} \frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p u, \end{aligned}$$

onde $\tilde{f}$ é a função associada a f que é uma solução não negativa de $Lf = 0$, α é tal que $1/2 \leq \alpha < 1$, $Q = Q(z, h)$ é um retângulo incluso em Ω e u, v, λ satisfazem a hipótese (SP).

Prova:

Dados s e t satisfazendo $1/2 \leq s < t < 1$, aplicaremos o Lema (2.5.4) à função $f_{k_j}^{(\beta+1)/2}$, (f_{k_j} é um representante de f) em sQ e escolheremos $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)s < t$. Então,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \left| f_{k_j}^{(\beta+1)/2}(z) \right|^q u(z) dz \leq \\ & \leq c\epsilon^{-a} \left\{ \left[\frac{h^2 s^2}{v(sQ)} \int_{(1+\epsilon)sQ} \left| \nabla_\lambda (f_{k_j}^{(\beta+1)/2}(z)) \right|^2 v(z) dz \right]^{1/2} + \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{u(z)} \int_{(1+\epsilon)sQ} \left| f_{k_j}^{(\beta+1)/2}(z) \right|^2 u(z) dz \right]^{1/2} \right\}^q. \end{aligned}$$

Aplicando o lema anterior, com $(1 + \epsilon)s$ no lugar de s e seguindo os mesmos argumentos utilizados no Lema (3.1.2), temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \left| f_{k_j}^{(\beta+1)/2}(z) \right|^q u(z) dz \right]^{1/q} \leq \\ & \leq c\epsilon^{-A} \left[\frac{|\beta+1|}{|\beta|} \frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu + 1 \right] \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} f_{k_j}^{\beta+1}(z) u(z) dz \right]^{1/2} + c_\beta |\delta_{k_j}|. \end{aligned}$$

Podemos (como no Lema anterior) supor, sem perda de generalidade que $f_{k_j}(x) \geq \epsilon_0$ para todo x e k . Tomamos o limite em ambos os lados da desigualdade acima quando $j \rightarrow +\infty$. No que se refere a expressão do lado direito, notamos que se $\beta + 1 < 0$, então $f_{k_j}^{\beta+1}$ é uniformemente limitada por $\epsilon_0^{\beta+1}$ e converge pontualmente para $\tilde{f}^{\beta+1}$. Isso é claro aplicando o teorema da convergência dominada. Se $0 < \beta + 1 \leq 2$, aplicamos o lema de Fatou para o lado esquerdo, enquanto que para o lado direito usamos o fato que as medias em L_u^p são não decrescentes com respeito a p . Assim,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \left(\tilde{f}^{(\beta+1)/2} \right)^q u \right]^{1/q} \leq \\ & \leq c\epsilon^{-A} \left[\left| \frac{\beta+1}{\beta} \right| \frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu + 1 \right] \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} \tilde{f}^{\beta+1} u \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Colocando $\beta + 1 = r$ e $q = 2\sigma$, vemos que para quaisquer r com $-\infty < r \leq 2$, $r \neq 0, 1$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u(sQ)} \int_{sQ} \tilde{f}^{\sigma r} u \right]^{1/|\sigma|} \leq \tag{3.7} \\ & \leq \epsilon^{-(A/2)|r|} C^{2/|r|} \left[\frac{|r|}{|r-1|} \frac{s}{t - (1 + \epsilon)s} \mu + 1 \right]^{2/|r|} \left[\frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} \tilde{f}^r u \right]^{1/|r|} \end{aligned}$$

Essa última desigualdade é análoga à 3.6 obtida no Lema (3.1.2). Tudo o que resta agora é um argumento de iteração. O valor inicial de r é quaisquer p fixo com $-\infty < p \leq 2$, $p \neq 0, 1$. Se $p < 0$, os valores $r = \sigma^j p$ decrescem a $-\infty$ e a desigualdade anterior é válida para todo r . O valor limite do lado esquerdo é $\sup_{\alpha Q} (1/\tilde{f})$.

Definindo

$$\epsilon = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_{j+2}}{\alpha_{j+1}}, \quad s = \alpha_{j+1}, \quad t = \alpha_j,$$

onde $\alpha_j = \alpha + \frac{1 - \alpha}{j + 1}$, o produto infinito das constantes é,

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left[C \epsilon_{k+1}^{-A} \left(\frac{\sigma^k |p|}{|\sigma^k p - 1|} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1}) s_{k+1}} \mu + 1 \right) \right]^{\frac{2}{\sigma^k |p|}} \leq$$

Levando em consideração que $\sigma^k \geq 1$, $\frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1}) s_{k+1}} \geq 1$, e $|\sigma^k p - 1| \geq 1$, temos que

$$\leq \prod_{k=0}^{\infty} \left[C \sigma^k (\mu |p| + 1) \epsilon_{k+1}^{-A} \frac{s_{k+1}}{s_k - (1 + \epsilon_{k+1}) s_{k+1}} \right]^{\frac{2}{\sigma^k |p|}} \leq (*)$$

Usando mesmo argumento do outro lema,

$$(*) \leq \left[\frac{C}{(1 - \alpha)^d} (1 + \mu |p|)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}} \right]^{1/|p|},$$

e o lema segue no caso $p < 0$. Se $0 < p < 2$, $p \neq 1$, os valores $r = \sigma^j p$ tendem a $+\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$ e usamos 3.7 no caso em que $r < 2$, $r \neq 1$ e 3.6 quando $r \geq 2$. Ao computar o produto infinito das constantes, podemos assumir para as constantes correspondentes a $r < 2$ que o termo $|r - 1| = |\sigma^j p - 1|$ no denominador de 3.7 é limitado inferiormente por uma constante positiva dependendo somente de σ . Com a finalidade de aclarar a afirmação anterior consideremos o seguinte argumento. É claro que $|\sigma^j p - 1| < \delta$ é equivalente a

$$\frac{\log(1 - \delta) - \log p}{\log \sigma} < j < \frac{\log(1 + \delta) - \log p}{\log \sigma}.$$

Nosso objetivo é achar uma constante δ positiva tal que

$$\frac{\log(1 + \delta) - \log p}{\log \sigma} < \frac{\log(1 - \delta) - \log p}{\log \frac{1+\sigma}{2}}.$$

Levando em consideração que nosso problema acontece com p perto de zero, e portanto $\log p$ negativo, temos que é possível achar um tal valor de δ . Com essa escolha, na hora que j seja tal que $|\sigma^j p - 1| < \delta$, mudamos o valor de σ para $\frac{1+\sigma}{2}$ e então teremos $\left| \left(\frac{\sigma+1}{2} \right)^j p - 1 \right| \geq \delta$. Portanto, adaptando o valor de c poderemos aplicar

3.6 na iteração. Desse modo, podemos ignorar $|r - 1|$. É importante ter obtido δ dependendo somente de σ que é um parâmetro da Desigualdade de Sobolev-Poincaré. Vemos portanto, que o enunciado é válido não necessariamente com o σ original mas certamente para $\sigma' = \frac{\sigma+1}{2}$, que também é tal que vale 2.3 com $q' = 2\sigma'$. ■

Lema 3.2.3 *Existem c e d dependendo de u, v, λ, n, m e q tais que se são satisfeitas as condições do Lema (3.2.2), temos*

$$\sup_{\alpha Q} f \leq \frac{C}{(1 - \alpha)^d} (1 + \mu)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f} u,$$

onde $\tilde{f}$ é a função associada a f que é uma solução não negativa de $Lf = 0$, α é tal que $1/2 \leq \alpha < 1$, $\mu = \left[\frac{u(Q)}{v(Q)} \right]^{1/2}$ e $Q = Q(z, h)$ está contido em Ω .

Prova:

Sabemos que $\tilde{f} \in L_u^2 \subset L_u^1$. Aos efeitos de simplificar o resultado do lema (3.2.2) escrevemos,

$$\sup_{\alpha Q} \tilde{f} \leq K^{1/p} av_{p,u} \tilde{f}, \quad \forall p > 1,$$

$$\text{onde, } av_{p,u} \tilde{f} = \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q \tilde{f}^p u \right)^{1/p} e$$

$$K = \frac{C}{(1 - \alpha)^d} (1 + \mu p)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}$$

Tomamos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $p_n > 1$, convergindo de forma decrescente a 1. Segue do resultado apresentado no Problema 4, Capítulo 3 de [16], que $av_{p,u}$ é decrescente e contínua em p . Daí,

$$\text{existe o } \lim_{p_n \rightarrow 1} K^{1/p_n} av_{p_n,u} = K av_{1,u}.$$

Com isto fica demonstrado o resultado proposto no lema. ■

No caso $p = 0$ ($\beta = -1$), o resultado acima não contém nenhuma informação e o próximo lema é um substituto.

Dizemos que $f \geq \epsilon$ para um elemento $f \in H$ se existir uma sequência de cauchy $\{f_k\}$ que represente f tal que $f_k \geq \epsilon \quad \forall k$.

Lema 3.2.4 *Existem constantes c e a positivas que só dependem de u, v, λ, q, n e m tais que se as hipóteses do lema anterior são satisfeitas, $f \geq \epsilon_0$ para algum $\epsilon_0 > 0$, $1/2 \leq \alpha < 1$ e definimos $k = k(\alpha, \tilde{f})$ pela expressão:*

$$\log k = \frac{1}{u(\alpha b B)} \int_{\alpha b B} (\log \tilde{f}) u,$$

onde $Q = Q(z, h)$ e $B = B(z, h)$, então para $\lambda > 0$,

$$u(\{x \in \alpha Q : |\log \frac{\tilde{f}(x)}{k}| > \lambda\}) \leq \frac{c}{(1-\alpha)^{1+\frac{q}{2}}} \frac{\mu}{\lambda} u(\alpha Q).$$

Prova:

Seja $\eta(x)$ uma função satisfazendo $\eta = 1$ em αQ , $\text{supp}(\eta) \subset Q$ e $|\nabla \eta| \leq \frac{c}{(1-\alpha)h}$, sendo h o raio da bola Q . Pela hipótese, $f = \{f_k\}$ onde $f_k \geq \epsilon > 0$.

Definindo $\varphi_k = \frac{\eta^2}{f_k}$, temos

$$\nabla \varphi_k = -\eta^2 f_k^{-2} \nabla f_k + 2\eta f_k^{-1} \nabla \eta$$

e seguindo os argumentos de resultados anteriores, não resulta dificultoso provar que a sequência $\{\|\varphi_k\|_0\}$ é limitada. Deste modo, existe uma subsequência satisfazendo

$$\int_Q \langle A \nabla f_{k_j}, \nabla \varphi_{k_j} \rangle = \delta_{k_j} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\int_Q \left\langle A \frac{\nabla f_{k_j}}{f_{k_j}}, \frac{\nabla f_{k_j}}{f_{k_j}} \right\rangle \eta^2 = 2 \int_Q \left\langle A \frac{\nabla f_{k_j}}{f_{k_j}} \eta, \nabla \eta \right\rangle - \delta_{k_j}.$$

Note que o lado esquerdo é não negativo e que $\nabla(\log f) = \frac{\nabla f}{f}$.

Logo, tomando os valores absolutos e usando

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2\epsilon} \langle Ay, y \rangle$$

com $\epsilon = 1/2$, e reagrupando, obtemos

$$\int_Q \langle A \nabla(\log f_{k_j}), \nabla(\log f_{k_j}) \rangle \eta^2 \leq$$

$$\leq 4 \int_Q \langle A \nabla \eta, \nabla \eta \rangle + 2|\delta_{k_j}|.$$

Pela hipótese de elipticidade e a definição de η ,

$$\int_{\alpha Q} |\nabla_\lambda (\log f_{k_j})|^2 v \leq c \frac{1}{(1-\alpha)^2 h^2} \int_Q u + 2|\delta_{k_j}| \quad (3.8)$$

Pelo Lema (2.5.1), temos para $r = \frac{\epsilon s}{2b^4}$ e um retângulo Q “de raio s ” (r , s e ϵ serão escolhidos oportunamente), que

$$\int_Q |\log f_{k_j} - av_{bB,u}(\log f_{k_j})|^2 u \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m(r,s)} \int_{Q_j(z_j,r)} |f_{k_j} - av_{bB,u} \log f_{k_j}|^2 u \leq (*).$$

Agora, usando o Lema (2.5.2), o fato que u e v são dobrantes e 2.5 temos

$$(*) \leq c(b)(s/r)^{v'} u(Q) \left(\frac{r}{2b^2 s}\right)^{-\alpha} s^2 \frac{1}{v(Q)} \int_{(1+\epsilon)Q} |\nabla_\lambda f_{k_j}|^2 v.$$

Escolhendo $a = v' + \alpha$, $\frac{s}{r} = c\epsilon^{-1}$, $(1+\epsilon)\alpha < 1$ e aplicando a equação 3.8 com αQ no lugar de Q (e portanto $s = h\alpha$ obtemos

$$\frac{1}{u(\alpha Q)} \int_{\alpha Q} |\log f_{k_j} - av_{\alpha bB,u}(\log f_{k_j})|^2 u \leq$$

$$\leq \epsilon^{-a} \frac{c(b)}{(1-\alpha)^2} \frac{u(Q)}{v(Q)} + \epsilon^{-a} \frac{ch^2}{v(Q)} |\delta|.$$

Como $(1+\epsilon)\alpha < 1$, então $\epsilon < \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Fixemos $\epsilon = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$. Assim

$$\epsilon^{-a} = \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)^a \leq \frac{2^a}{(1-\alpha)^a},$$

pois $\alpha < 1$. Desse modo

$$\frac{1}{u(\alpha Q)} \int_{\alpha Q} |\log f_{k_j} - av_{\alpha bB,u}(\log f_{k_j})|^2 \leq$$

$$\frac{c}{(1-\alpha)^{2+a}} \frac{u(Q)}{v(Q)} + \frac{ch^2}{v(Q)(1-\alpha)^a} |\delta_{k_j}|.$$

O próximo passo é fazer o limite quando $j \rightarrow \infty$. Como $f_k, \tilde{f} \geq \epsilon > 0$,

$$|\log f_{k_j} - \log \tilde{f}| \leq \frac{|f_{k_j} - \tilde{f}|}{\epsilon},$$

pelo teorema do valor médio.

Logo, $\log f_{k_j} \rightarrow \log \tilde{f}$ em L_u^2 e levando em consideração que $L_u^2 \subset L_u^1$, temos

$$av_{\alpha b B, u}(\log f_{k_j}) = \frac{1}{u(\alpha b B)} \int_{\alpha b B} \log(f_{k_j}) u \rightarrow \log k$$

e

$$\frac{1}{u(\alpha Q)} \int_{\alpha Q} |\log \tilde{f} - \log k|^2 u \leq \frac{c}{(1-\alpha)^{2+a}} \mu^2, \quad \text{onde } \mu = \frac{u(Q)}{v(Q)}.$$

Pela desigualdade de Chebyshev, temos para $\lambda > 0$,

$$u(\{x \in \alpha Q; |\log(\tilde{f}(x)/k)| > \lambda\}) \leq 1/\lambda \int_{\alpha Q} |\log \tilde{f}/k| u \leq$$

$$\leq 1/\lambda \left(\int_{\alpha Q} |\log \tilde{f}/k|^2 u \right)^{1/2} u(\alpha Q)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \frac{c\mu}{(1-\alpha)^{1+\frac{a}{2}}} u(\alpha Q),$$

o que completa a demonstração. ■

3.3 Bombieri

O seguinte resultado é um fato meramente de análise real. Porém é um resultado fundamental para nós, o qual nos motiva a exibir sua demonstração.

Lema 3.3.1 (Bombieri) *Sejam $\mu > 0$, $u(x)$ uma medida dobrante e $f(x)$ uma função não negativa limitada numa bola B . Assuma que existam constantes c e d dependendo da função λ que define a métrica, tais que*

$$\sup_{sB} (f^p) \leq \frac{c}{(t-s)^d} \frac{1}{u(tB)} \int_{tB} f^p u, \quad (3.9)$$

para todo s, t, p tais que $0 < p < 1/\mu$ e $1/2 \leq s < t \leq 1$;

$$u(\{x \in B; \log f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c\mu}{\lambda} u(B), \quad (3.10)$$

para todo $\lambda > 0$. Então existem constantes C e D (que dependem de c , d e da medida, mas não de f ou B) tais que para $0 < \alpha < 1$,

$$\sup_{\alpha B} f \leq \exp \left(\frac{C}{(1-\alpha)^D \mu} \right).$$

Prova:

Para simplificar nosso trabalho faremos as substituições f por f^μ e λ por $\lambda\mu$, ficando desta maneira nossas hipóteses e tese para o caso $\mu = 1$. De forma similar, podemos supor sem perda de generalidade que $u(B) = 1$. Definamos

$$\varphi(s) = \sup_{sB} \log f$$

com $\alpha \leq s < 1$, la que é uma função não decrescente.

Afirmamos e mostraremos a seguir que as hipóteses implicam

$$\varphi(s) \leq 3/4 \varphi(t) + \frac{\gamma_1}{(t-s)^{2d}},$$

com $\alpha \leq s < t \leq 1$ e com γ_1 dependendo de α, d, c .

Com esse propósito descompomos tB em conjuntos onde $\log f > 1/2 \varphi(t)$ e onde $\log f \leq 1/2 \varphi(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(tB)} \int_{tB} f^p u &\leq \exp(p\varphi/2) + \frac{1}{u(tB)} \int_{\{x \in tB; \log f(x) > 1/2 \varphi(t)\}} f^p u \leq \\ &\leq \exp(p\varphi/2) + \exp(p\varphi) \frac{1}{u(tB)} \int_{\{x \in tB; \log f(x) > 1/2 \varphi(t)\}} u \leq \end{aligned}$$

$$\leq \exp(p\varphi/2) + \exp(p\varphi) \frac{1}{u(tB)} \frac{2c}{\varphi} u(tB),$$

onde na última desigualdade aplicamos 3.10. Escolhamos p tal que $\exp(p\varphi/2) = \exp(p\varphi) \frac{2c}{\varphi}$, ou seja $p = \frac{2}{\varphi} \log(\frac{\varphi}{2c})$. Precisamos verificar que o p escolhido fica entre 0 e 1. Para isso é necessário que

$$\varphi = \varphi(t) > c_3, \quad (3.11)$$

com $c_3 = c_3(c)$. Neste caso, temos

$$\int_{tB} f^p \leq 2 \exp(p\varphi/2),$$

e então usando 3.9, temos

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \sup_{sB} \log f < 1/p \log \left(\frac{2c}{(t-s)^d} \exp(p\varphi/2) \right) = \\ &= 1/p \log \frac{2c}{(t-s)^d} + 1/2\varphi(t). \end{aligned}$$

Agora, usando el valor de p antes mencionado, temos

$$\varphi(s) < 1/2\varphi(t) \left[\frac{\log \left(\frac{2c}{(t-s)^d} \right)}{\log \left(\frac{\varphi}{2c} \right)} + 1 \right].$$

Se $\varphi(t)$ é suficientemente grande como para que

$$\frac{\log \left(\frac{2c}{(t-s)^d} \right)}{\log \left(\frac{\varphi}{2c} \right)} < 1/2,$$

o que significa que

$$\varphi(t) > \frac{8c^3}{(t-s)^{2d}}, \quad (3.12)$$

então é claro que

$$\varphi(s) < 3/4\varphi(t).$$

Por outro lado se alguma das condições 3.11 ou 3.12 não são satisfeitas, então,

$$\varphi(t) \leq \frac{\gamma_1}{(t-s)^{2d}},$$

com $\alpha \leq s < t \leq 1$ e $\gamma_1 = \gamma_1(c, c_3, d, \alpha)$. Como $\varphi(s) \leq \varphi(t)$, temos que

$$\varphi(s) < 3/4\varphi(t) + \frac{\gamma_1}{(t-s)^{2d}} \quad (3.13)$$

com $\alpha \leq s < t \leq 1$ Considerando qualquer seqüência

$$\alpha \leq s_0 < s_1 < \dots < s_k \leq 1,$$

e iterando 3.13, temos

$$\varphi(s_0) < (3/4)^k \varphi(s_k) + \gamma_1 \sum_{j=0}^{k-1} (3/4)^j (s_{j+1} - s_j)^{-2d}.$$

Pela monotonia, temos que $\varphi(s_k) \leq \varphi(1) < +\infty$. Então tomando $k \rightarrow +\infty$ obtemos,

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(s_0) \leq \gamma_1 \sum_{j=0}^{\infty} (3/4)^j (s_{j+1} - s_j)^{-2d}$$

Se escolhemos

$$s_j = 1 - \frac{1-\alpha}{1+j}$$

Então a serie converge, pois

$$s_{j+1} - s_j = (1-\alpha) \left[\frac{1}{(1+j)(2+j)} \right].$$

Assim

$$\sum_1^{\infty} (3/4)^j \left[\frac{(1+j)(2+j)}{1-\alpha} \right]^{2d} = \frac{1}{(1-\alpha)^{2d}} K.$$

Desse modo

$$\sup_{\alpha B} f \leq \exp \left[\frac{K}{(1-\alpha)^D \mu} \right] \cdot \blacksquare$$

Observação 3.3.1 *Este resultado é válido para retângulos Q em $(\mathbb{R}^N, \rho)$ usando que u é dobrante com respeito a métrica ρ e a dupla inclusão.*

3.4 Harnack

Teorema 3.4.1 (Desig. de Harnack) *Sejam u, v dobrantes, u, v e λ satisfazendo a hipótese (SP). Se f é uma solução não negativa de $Lf = 0$ pertencendo a $H(\Omega)$, com $2B \subset \Omega$ e $\tilde{f}$ é a função em L_u^2 associada a f , então*

$$\sup_B \tilde{f} \leq \exp(c\mu) \inf_B \tilde{f}$$

onde $\mu = \left[\frac{u(B)}{v(B)} \right]^{1/2}$ e c é independente de f e B .

Prova:

Seja Q um retângulo tal que $Q \subset B$. Seja f uma solução não negativa de $Lf = 0$ e $\tilde{f}$ a função de L_u^2 associada a f . Vamos mostrar que

$$\sup_Q \tilde{f} \leq \exp \left[C \left(\frac{u(Q)}{v(Q)} \right)^{1/2} \right] \inf_Q \tilde{f}$$

na qual C é independente de f e de Q .

Considerando, caso seja necessário, $f + \epsilon$, ou seja, $\{f_k + \epsilon\}$, podemos assumir $f \geq \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Assim, $\tilde{f} \geq \epsilon > 0$. Sabemos que $\tilde{f}$ é essencialmente limitado superiormente em αQ para $1/2 < \alpha < 1$. Nossa intenção é aplicar o lema de Bombieri, com as funções $\tilde{f}/k$ e $k/\tilde{f}$, com k definida por

$$\log k = \frac{1}{u(3/2bB)} \int_{3/2bB} (\log \tilde{f}) u,$$

com α, Q e μ do referido lema substituídos por $2/3, 3/2Q$ e $\left[\frac{u(2Q)}{v(2Q)} \right]^{1/2} \left(\simeq \left[\frac{u(Q)}{v(Q)} \right]^{1/2} \right)$ respectivamente.

A hipótese 3.10 do lema de Bombieri pode ser verificada aplicando-se o lema (3.2.4) a $2Q$; Observe-se que como existe um valor absoluto na conclusão do lema citado, este se verifica tanto para $\tilde{f}/k$ quanto para $k/\tilde{f}$.

A hipótese 3.9 no entanto, pode ser verificada aplicando o lema (3.2.2) à função $\tilde{f}/k$. Isso é claro pois aplicando o resultado do Lema (3.2.2) com $s = \alpha$, $Q = tQ$, obtemos

$$\sup_{sQ} \tilde{f} \leq \left[\frac{c}{(1-\alpha)^d} (1 + \mu p)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{u(tQ)} \int_{tQ} \tilde{f}^p u \right]^{1/p}.$$

Mas, levando em consideração que $0 < p < 1/\mu$, com $\mu > 0$, temos que $1 + p\mu < 2$ e então obtemos a hipótese exigida no Lema de Bombieri. Desse modo, obtemos por Bombieri

$$\sup_Q \left(\frac{\tilde{f}}{k} \right) \leq \exp(c\mu),$$

$$\sup_Q \left(\frac{k}{\tilde{f}} \right) \leq \exp(c\mu),$$

Como as funções são não negativas temos que

$$\inf_Q \tilde{f} = \frac{1}{\sup_Q 1/\tilde{f}}.$$

Então, multiplicando as duas estimativas chegamos a nossa conclusão.

Por último, voltemos às bolas em nossa geometria, usando para isto o teorema (2.1.1)

$$\sup_B \tilde{f} \leq \sup_{bQ} \tilde{f} \leq$$

$$\leq \exp(2c\mu) \inf_{bQ} \tilde{f} \leq \exp(2c\mu) \inf_B \tilde{f},$$

onde

$$\mu = \left[\frac{u(Q)}{v(Q)} \right]^{1/2} \sim \left[\frac{u(B)}{v(B)} \right]^{1/2},$$

como consequência que u, v são dobrantes. ■

Capítulo 4

Trabalhando com um exemplo

Este é o momento indicado de enunciar a desigualdade de Sobolev-Poincaré como no artigo [1]. O objetivo que cumprimos nos três primeiros capítulos foi, supondo válida a hipótese (SP) para bolas da métrica ρ , demonstrar a desigualdade de Harnack. Porém, neste nosso último capítulo, tentaremos mostrar, através de um exemplo, a dificuldade de que sejam satisfeitas as hipóteses do principal teorema de [1], que dá condições suficientes para a validade de (SP), exigidas em [1]. Cabe ressaltar que, no decorrer desta etapa, surgiram obstáculos que, embora não totalmente transpostos, incentivaram um estudo mais aprofundado de certos conceitos. Este resultou em interessantes questionamentos, os quais desejamos compartilhar.

4.1 Pesos *Strong* – A_∞ e Poincaré.

Definição 4.1.1 *Seja w um peso A_∞ com respeito à métrica ρ e à medida de Lebesgue, ou seja, w pertence à classe A_p para algum $p \geq 1$. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$, definimos*

$$\delta(z_1, z_2) = \inf_{B_\rho: z_1, z_2 \in B_\rho} \left(\int_{B_\rho} w(z) \lambda^{m/(N-1)}(z) dz \right)^{1/N}.$$

Se $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma curva contínua, definimos o w – comprimento de γ como

$$l(\gamma) = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \inf \sum_i \delta(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)),$$

onde $\sigma = \{t_0, \dots, t_p\}$ é uma partição de $[0, T]$, e definimos a distância $d(z_1, z_2)$ como o ínfimo dos w – comprimentos das curvas sub-unitárias que ligam z_1 e z_2 . Se

existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \delta(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2) \leq c_2 \delta(z_1, z_2),$$

dizemos que w é um peso Strong- A_∞ , com respeito à métrica ρ .

No que segue, assumiremos que w satisfaz a seguinte condição de limitação local próximo aos zeros de λ :

$$(Z_\lambda) \quad \text{Se } \lambda(x_1) = 0, \text{ então } w(x, y) \text{ é uniformemente limitada em } y,$$

quando $x \rightarrow x_1$, com y em qualquer conjunto limitado.

Vejamos o enunciado da desigualdade de Poincaré, dado em [1].

Teorema 4.1.1 *Seja ρ a métrica induzida por λ (ver capítulo 2), que satisfaz às hipóteses listadas na observação 4.1.1. Sejam u e $v \in L^1_{loc}$ pesos não negativos tais que u é dobrante e sejam p, q tais que $1 \leq p < q < \infty$. Assumamos que existam constantes positivas c_1, c_2 tais que, para toda bola $B_0 = B_\rho(z_0, r_0)$ e $B_r = B_\rho(z, r) \subseteq c_1 B_0$, tenhamos que*

$$\frac{r}{r_0} \left(\frac{u(B_r)}{u(B_0)} \right)^{1/q} \leq c_2 \left(\frac{v(B_r)}{v(B_0)} \right)^{1/p},$$

onde $u(B_0) = \int_{B_0} u(z) dz$.

Se existe um peso Strong- A_∞ , w , satisfazendo (Z_λ) , tal que $vw^{-(N-1)/N}$ pertence à classe A_p com respeito à métrica dobrante $w^{(N-1)/N} dz$, então a seguinte Desigualdade de Sobolev-Poincaré é válida:

$$\left(\frac{1}{u(B)} \int_B |g - \mu|^q u(z) dz \right)^{1/q} \leq Cr \left(\frac{1}{v(B)} \int_B |\nabla_\lambda g|^p v(z) dz \right)^{1/p},$$

para toda função g lipschitziana, onde μ pode ser escolhida como a u -média de g em B .

Não é nosso interesse comentar a demonstração deste teorema. Porém, seu enunciado nos detalha as hipóteses que devemos verificar.

Observação 4.1.1 *Com respeito à função λ , em [1], são detalhadas as condições impostas, e seria bom explicitá-las neste momento.*

- $\lambda = \lambda(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ não negativa e tem um número finito de zeros.
- λ^n é um peso Strong- A_∞ no sentido de [8].
- λ satisfaz a desigualdade de Hölder inversa (RH_∞), ou seja, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, temos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \lambda(x) dx \sim \max_Q \lambda(x),$$

onde $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

Observação 4.1.2 *O fato que λ seja Strong- A_∞ implica que λ pertença a A_p para algum $p \geq 1$ e então pelo Teorema (1.2) de [8] temos que λ é dobrante. Isso mostra que a hipótese (H2) feita na Seção 2.1 é consequência das hipóteses de [1].*

4.2 Apresentação do exemplo.

Procuraremos mostrar que o seguinte exemplo satisfaz as hipóteses do artigo [1], mas não aquelas da literatura anterior, como em [6]:

$$Lf = \operatorname{div} \left((|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\alpha/(\sigma+1)} (\partial_x f, |x|^\sigma \partial_y f) \right) = 0,$$

onde $\alpha, \sigma > 0$ e $z = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in \Omega$. Escolhemos $u(x, y) = v(x, y) = (|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\alpha/(\sigma+1)}$ e $\lambda(x) = |x|^\sigma$.

4.3 Verificação das hipóteses.

Enunciaremos um teorema que aparece em [9](pag.109), que será de bastante utilidade e que, logo em seguida, procuraremos adaptar ao nosso caso.

Teorema 4.3.1 *Existem constantes c_1, c_2 tais que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N$*

$$c_1 \leq \frac{\rho(x, y)}{\sum_{j=1}^N \varphi_j(x^*, |x_j - y_j|)} \leq c_2,$$

com φ_j definidas como se segue:

Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$, seja

$$\begin{cases} H_0(x, t) = x, \\ H_{k+1}(x, t) = H_k(x, t) + t\lambda_{k+1}(H_k(x, t))e_{k+1}, \text{ para } k = 0, \dots, N-1, \end{cases}$$

onde e_k é o k -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^N$ e $\lambda_{k+1} = 1$ se $k = 0, \dots, n-1$ e é igual a λ se $k = n, \dots, m+n-1$.

Denotemos por $\mathbb{R}_j^N$ o conjunto dos pontos $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ tais que $x_k \geq 0$, com $k = 1, \dots, j-1$. Se $x \in \mathbb{R}_j^N$, a função

$$s \mapsto F_j(x, s) = s\lambda_j(H_{j-1}(x, s))$$

é estritamente crescente em $(0, +\infty)$. Deste modo, podemos definir

$$\varphi_j(x, \cdot) = (F_j(x, \cdot))^{-1},$$

para $j = 1, \dots, N$. Se $x \in \mathbb{R}^N$, denotaremos $x^* = (|x_1|, \dots, |x_N|)$ e, se $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\varrho(x, y) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(x^*, |x_j - y_j|).$$

Observação 4.3.1 *Procuremos adaptar o resultado acima ao nosso exemplo:*

$$\varrho((0, 0), (x, y)) = \varphi_1((0, 0), |x|) + \varphi_2((0, 0), |y|),$$

onde $\varphi_1((0, 0), \cdot) = (F_1((0, 0), \cdot))^{-1}$. Assim, $\varphi_1((0, 0), s) = s$, pois $F_1(0, s) = s$.

Por outro lado, como $\varphi_2((0, 0), \cdot) = (F_2((0, 0), \cdot))^{-1}$ e $F_2((0, 0), s) = s^{\sigma+1}$, temos que $\varphi_2((0, 0), s) = s^{1/(\sigma+1)}$. Portanto,

$$\varrho((0, 0), (x, y)) = |x| + |y|^{1/(\sigma+1)}.$$

Mas, $|a| + |b| \approx (|a|^{\sigma+1} + |b|^{\sigma+1})^{1/(\sigma+1)}$. Desta forma,

$$\varrho((0,0), (x,y)) \approx (|x|^{\sigma+1} + |y|^{\sigma+1})^{1/(\sigma+1)}.$$

A partir do que foi feito acima, concluímos que

$$\rho(z, 0) \approx (|x|^{\sigma+1} + |y|^{\sigma+1})^{1/(\sigma+1)}, \quad (4.1)$$

com $z = (x, y)$. Este resultado nos será de muita utilidade na verificação de determinadas condições, como veremos a seguir. ■

4.3.1 Condições da função λ .

Procuraremos verificar as condições apresentadas com respeito à função λ na Seção 4.2.

- É claro que λ é contínua e que $\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Usaremos o lema 1.20 de [10] (pag.10) que enunciamos abaixo.

Lema 4.3.1 *Dado $\alpha > -N$, existe uma constante positiva c tal que*

$$c^{-1}(|x_0| + r)^{\alpha} r^N \leq \int_{B_{\text{euc}}(x_0, r)} |x|^{\alpha} dx \leq c(|x_0| + r)^{\alpha} r^N,$$

ou seja,

$$(|x_0| + r)^{\alpha} r^N \simeq \int_{B_{\text{euc}}(x_0, r)} |x|^{\alpha} dx, \quad (4.2)$$

para toda bola $B_{\text{euc}}(x_0, r)$ centrada em x_0 e com raio $r > 0$.

Aplicando o lema anterior, temos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \lambda(x) dx \sim \max_Q \lambda(x)$$

com $Q = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$. Isso mostra que λ satisfaz a condição reversa de Hölder. (RH_{∞})

- Na verificação do fato de que λ^n é um peso Strong- A_∞ , no sentido de [8], ficaram algumas dúvidas. Não temos certeza, por exemplo, se a definição 4.1.1 para o caso em que ρ é a métrica euclideana é equivalente à definição de [8]. Caso afirmativo, deve ser possível adaptar os argumentos da Proposição 4.3.1 para demonstrar o que queremos.

4.3.2 Hipóteses da desigualdade de Sobolev-Poincaré.

Para satisfazer as hipóteses enunciadas no teorema (4.1.1), começamos pela necessidade de escolher um peso w , Strong- A_∞ , satisfazendo (Z_λ) , tal que $vw^{-1/2} \in A_2$, com respeito à medida dobrante $w^{1/2}dz$. No artigo [3] (exemplo 2.12, pag.15), demonstra-se o seguinte resultado:

Proposição 4.3.1 *Fixemos um ponto $z_0 = (x_0, y_0)$. Então, a função $w(z) = \rho(z, z_0)^\alpha$ é um peso Strong- A_∞ , qualquer que seja $\alpha > 0$.*

Pela proposição anterior, escolhamos $w(z) = \rho(z, 0)^\beta$, com $\beta > 0$. Logo imporemos mais alguma condição para β . O próximo passo que daremos é, baseando-nos nos argumentos do [15] (ex.3.7), provar que, efetivamente, $vw^{-1/2}$ pertence a A_2 , com respeito à métrica ρ , e à medida $w^{1/2}(z)dz$.

Proposição 4.3.2 *Seja λ a função que satisfaz as condições apresentadas na Observação (4.1.1). Então $vw^{-1/2} \in A_2$, com respeito à métrica ρ e à medida $w^{1/2}(z)dz$, onde $v(z) = v(x, y) = (|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\alpha/(\sigma+1)}$, e $w(z) = \rho(z, 0)^\beta$, para algum $\beta > 0$.*

Prova:

Queremos provar que

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B vw^{-1/2}w^{1/2} \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B v^{-1}w^{1/2}w^{1/2} \right) \leq C,$$

onde $\mu(B) = \int_B w^{1/2}(z)dz \approx |B| \max_B w^{1/2}$. Nesta última afirmação, levamos em conta o exemplo [2.12] do [1], onde se prova, entre outras coisas, que $\rho(z, z_0)$ satisfaz a condição inversa de Hölder (RH_∞).

Para que $\int_B v^{-1}(z)w(z)dz$ seja finita, devemos impor $\frac{\beta-\alpha}{\sigma+1} > -1$, pois $v^{-1}(z)w(z) = (|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma+1}}$. A condição que impomos a β é:

$$\beta - \alpha + \sigma > -1.$$

É claro que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B v^{-1}(z)w(z)dz \leq \frac{\max_B w(z)}{\mu(B)} \int_B v^{-1}(z)dz.$$

Mas, lembrando de $\mu(B) \approx |B| \max_B w^{1/2}$, o lado direito da desigualdade acima fica majorado por $\frac{\max_B w^{1/2}(z)}{|B|} \int_B v^{-1}(z)dz$.

Por todo o anterior, basta analisarmos o que acontece com $\frac{1}{|B|} \int_B v(z)dz$ e $\frac{1}{|B|} \int_B v^{-1}(z)dz$. Pelo Teorema (4.3.1), temos, tomando $B = B(0, r)$,

$$\frac{1}{|B|} \int_{B(0,r)} \rho(z, 0)^\alpha dz \leq \frac{C_1}{|B|} \sum_{j=1}^2 \int_{|x_j| \leq F_j(0, c_2 r)} \varphi_j^\alpha(0, |x_j|) dz \leq \dots \quad (4.3)$$

(definindo y_j tal que $x_j = y_j F_j(0, c_2 r)$)

$$\dots \leq C_3 \sum_{j=1}^2 \int_{|y_j| \leq 1} \varphi_j^\alpha(0, |y_j| F_j(0, c_2 r)) dy. \quad (*)$$

Levando em consideração que F é dobrante e o fato de que as φ_j são as inversas das F_j , temos

$$\varphi_j(x^*, \theta s) \leq \theta^{1/k} \varphi_j(x^*, s),$$

com $0 < \theta < 1$ e $s > 0$ (veja Lema (2.1.1)). Usando o argumento anterior, podemos continuar majorando a desigualdade inicial e, portanto, temos

$$(*) \leq C_4 r^\alpha \sum_{j=1}^2 \int_{|y_j| \leq 1} |y_j|^{\alpha/k} dy = C_5 r^\alpha.$$

De forma análoga, obtemos

$$\frac{1}{|B|} \int_B \rho(z, 0)^{-\alpha} dz \leq C_6 r^{-\alpha}.$$

Multiplicando as duas estimativas, chegamos ao resultado procurado, a menos da dúvida exposta abaixo. ■

Observação 4.3.2 *Com respeito à demonstração acima, prestando atenção à mesma, note que só verificamos a condição A_2 para bolas centradas na origem (veja 4.3). Fica colocada a dúvida da suficiência de analisar-se esse caso.*

4.3.3 Pesos dobrantes.

Como primeiro passo, mostremos um resultado que será útil na prova de que u e v são dobrantes.

Lema 4.3.2 *A função $w(z) = \rho(z, 0)^\alpha$ satisfaz*

$$\frac{1}{|B(z_1, r)|} \int_{B(z_1, r)} \rho(z, 0)^\alpha dz \sim [r + \rho(z_1, 0)]^\alpha, \quad z_1 \in \mathbb{R}^N, \quad r > 0. \quad (4.4)$$

Prova:

A demonstração está feita no artigo [3] (Ex.2.12, pag.15). ■

Pelo que foi provado na primeira parte deste capítulo, temos $u(z) = v(z) \sim \rho(z, z_0)^\alpha$. Procuremos mostrar que esses pesos são dobrantes, ou seja,

$$u(2B) \leq Cu(B), \quad C \text{ independente da bola.}$$

Agora, levando em consideração 4.4, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B(z_1, 2r)|} \int_{B(z_1, 2r)} \rho(z, 0)^\alpha dz \leq c[2r + \rho(z_1, 0)]^\alpha = \\ & = 2^\alpha c \left[r + \frac{\rho(z_1, 0)}{2} \right]^\alpha \leq c_1 [r + \rho(z_1, 0)]^\alpha \leq c_1 c_3 \left(\frac{1}{|B(z_1, r)|} \int_{B(z_1, r)} \rho(z, 0)^\alpha dz \right). \end{aligned}$$

Assim, u e v são dobrantes. ■

Observação 4.3.3 *Tudo o que foi feito até aqui mostra, salvo algumas dúvidas, que esse exemplo se encontra nas hipóteses de [1]. Procuremos, agora, visualizar o que acontece com este mesmo operador, com respeito à literatura mais antiga, em particular, o artigo de [6].*

4.4 Exemplo no contexto [ChW].

No artigo de [6], coloca-se como condição suficiente para o cumprimento da Desigualdade do Sobolev-Poincaré ali apresentada, a necessidade de que o peso w seja de classe A_2 . Para isso, precisamos impor que $1/w$ seja L^1_{loc} . Observaremos, a seguir, sob que condições o anterior é certo. Destaquemos que no contexto de [6], $w(x)|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq v(x)|\xi|^2$. O anterior nos permite identificar

$$w(x, y) \text{ com } (|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\alpha/(\sigma+1)} |x|^\sigma.$$

Procuremos, em primeiro lugar, majorar $1/w$. Consideremos $|y| \leq 1$. Então, temos $|y|^{\sigma+1} \leq |y|$. Assim,

$$(|x|^{\sigma+1} + |y|)^{1/(\sigma+1)} \geq (|x|^{\sigma+1} + |y|^{\sigma+1})^{1/(\sigma+1)} \geq Cr,$$

onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Assim, temos $w = (|x|^{\sigma+1} + |y|)^{\alpha/(\sigma+1)} |x|^\sigma \geq Cr^\alpha |x|^\sigma$ e, então, $1/w \leq Cr^{-\alpha} |x|^{-\sigma}$.

Analisemos a integral de $1/w$ no disco unitário de $\mathbb{R}^2$ e passemos a coordenadas polares. Um simples cálculo mostra a necessidade da convergência de duas integrais:

$$\int_0^1 r^{1-(\alpha+\sigma)} dr \text{ e } \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\cos \theta|^\sigma} d\theta.$$

É fácil ver que as condições ficam sendo $\sigma + \alpha < 2$ e $0 < \sigma < 1$.

Por outro lado, minorando $1/w$, obtemos

$$1/w \geq cr^{-\frac{\sigma^2 - \sigma + \alpha}{\sigma+1}} |\cos \theta|^{-\sigma}.$$

Analisando a mesma integral aparecem duas novas condições, agora de divergência: $\sigma \geq 1$ e $\sigma^2 - \sigma + \alpha > 2$. A partir de todas as condições obtidas, concluímos:

- Se $\alpha + \sigma < 2$ e $\sigma < 1$, então, $1/w$ pertence a L^1_{loc} .
- Se $\sigma \geq 1$ e $\sigma^2 - \sigma + \alpha > 2$, então $1/w$ não pertence a L^1_{loc} .

Desta forma para que w pertença a A_2 , é necessário que $0 < \sigma < 1$ e $0 < \alpha < 9/4$, como indica um cálculo sem dificuldade. Claro está que todo o estudo anterior, mostra que as condições de $\alpha, \sigma > 0$, que satisfazem as hipóteses de [1], não são satisfatórias

no caso da imposição da condição $w \in A_2$. Não sabemos provar que a versão de (SP) de [6] não é válida tomando u e v iguais a w , o que mostramos aqui é que a condição suficiente dada em [6] não é satisfeita por w . Ou seja, a versão da desigualdade de Harnack de [6], com bolas euclidianas, em princípio não se aplica ao exemplo deste capítulo. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Franchi, B.; Gutiérrez, C.; Wheeden, R. *Two-weight Sobolev-Poincaré inequalities and Harnack inequality for a class of degenerate elliptic operators*, Atti. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei. Mat Appl. 1994, Serie 9, Vol 5, Fasc. 2 167-175.
- [2] Franchi, B. *Weighted Sobolev-Poincaré Inequalities and Pointwise Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 1991, 327 125-158.
- [3] Franchi, B.; Gutierrez, C.; Wheeden, R; *Weighted Sobolev-Poincaré Inequalities For Grushin type operators*.
- [4] Fernandes, J. *Mean value and Harnack inequalities for a certain class of degenerate parabolic equations*, Revista Mat. Iberoam. 1991, vol.7, 3 247-286.
- [5] Coifman, R. and Weiss, G. *Analyse Harmonique Non-Commutative sur certain Espaces Homogènes*, Springer-Verlag 1971.
- [6] Chanillo, S., Wheeden, R. *Harnack's Inequalities for solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. in Partial Diff. Equations 1986, 11(10) 1111-1134.
- [7] Moser, J. *On pointwise estimate for parabolic differential equations*, Comm. in Pure and Applied Math. 1971, 24 727-740.
- [8] David, G., Semmes, S. *Strong- A_∞ weights, Sobolev Inequalities, and Quasiconformal Mappings*, Lectures Notes in Pure and Applied Math. 1990, 1222.
- [9] Franchi, B. Lanconelli, E. *Une Métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino 1983, Fascicolo speciale.
- [10] Fernandes, J. Zani, S. *Desigualdades de Sobolev e Poincaré com pesos*, Vigésimo Coloquio Brasileiro de Matemática 1995.

- [11] Wheeden, R. Zygmund, A. *Measure and Integral. An introduction to real analysis*, Pure and Applied Mathematics, 1977.
- [12] Gilbarg, D. Trudinger, N. *Elliptic partial diff. equations of second order*, Springer, 1977.
- [13] Treves, F. *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.
- [14] Hounie, J. *Teoria elementar das distribuições*, 12 Coloquio Brasileiro de Matematica, C.N.P.Q. 1979
- [15] Franchi, B., Serapioni, R. *Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1987, 14(4) 527-568.
- [16] Rudin, W. *Real and complex analysis*, Second edition, Mac Graw Hill, 1981.