**Hipersuperfícies com Curvatura
Média Constante em S^{n+1}**

Aldir Chaves Brasil Júnior

TESE DEFENDIDA NO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Geometria Diferencial
Orientador: **Prof.Dr.Fabiano Gustavo Braga Brito**

São Paulo, Agosto de 1996

HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM S^{n+1}

Este exemplar corresponde a redação
da tese devidamente corrigida
e defendida por Aldir Chaves Brasil Junior
e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 30 de Setembro de 1996

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Carlos Asperti

Profa. Dra. Walcy Santos

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida

Prof. Dr. Hilário Alencar

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Fabiano Brito pelo apoio constante durante o Doutorado. Ao prof. Antônio Carlos Asperti pela leitura cuidadosa da tese e pelas sugestões apresentadas. Ao Prof. Anchieta Delgado da UFC pelo incentivo para estudar Geometria desde os tempos de Graduação.

Aos colegas da UNESP (Ilha Solteira), em especial Edison Righeto, João Toledo, Luís e Roseli, Ernandes Oliveira e Francisco Villarreal.

Aos colegas do IMEUSP Orlando Stanley e João Batista.

A Walcy Santos pelas conversas e sugestões.

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo 0	
Notação e Preliminares	4
Capítulo 1	
Hipersuperfícies 3-dimensionais com curvatura Quase-Gauss-Kronecker constante e curvatura média constante	14
Capítulo 2	
Sobre o pinching para a curvatura escalar de hipersuperfícies com curvatura média constante em $S^{n+1}(1)$	22
Capítulo 3	
Hipersuperfícies compactas 4-dimensionais com curvatura média constante e curvatura escalar constante em $S^5(1)$	29
Capítulo 4	
Hipersuperfície Completa com Curvatura média constante e curvatura escalar constante em $S^{n+1}(1)$	39
Apêndice	47
Bibliografia	57

Abstract

We consider M^n a n -dimensional hypersurface with constant mean curvature immersed in the $(n+1)$ -dimensional Euclidean sphere $S^{n+1}(1)$. Applying the Simons techniques we prove some theorems about the pinching of the scalar curvature.

RESUMO

Neste trabalho mostraremos os seguintes resultados:

1. Seja M^3 uma hipersuperfície 3-dimensional compacta imersa em $S^4(1)$ com H constante

e com curvatura quase-Gauss-Kronecker $\tilde{K} = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i - \frac{H}{3}) = \text{cte} \neq 0$, e $\tilde{K}$ satisfaz uma

limitação, $f_1(H) \leq \tilde{K} \leq f_2(H)$ onde λ_i 's são as curvaturas principais de M^3 , então M^3 é isoparmétrica.

2. Seja M^n for uma hipersuperfície compacta imersa em $S^{n+1}(1)$, $n \geq 4$, com H e S constantes, satisfazendo $S > f_+(n, H)$, então

$$S > f_+(n, H) + C(n, H), \quad \text{onde } f_+(n, H) = \left\{ \frac{n^3 H^2}{2(n-1)} - \frac{H(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{H^2 + 4(n-1)} + n \right\}.$$

Se $H=0$, $C(n,0) = 1/12n$.

3. Seja M^4 uma hipersuperfície compacta imersa na esfera $S^5(1)$ com H e S constantes e satisfazendo $S_2^+ < S \leq S_1^+$, onde

$$S_2^+ = \frac{H^2}{2} + 4 \text{ e } S_1^+ = \frac{2}{3}H^2 + \frac{H^2}{3} \sqrt{\frac{H^2}{9} + \frac{4}{3}} + 4. \text{ Então } S = S_1^+.$$

4. Seja M^n for uma hipersuperfície completa, imersa em $S^{n+1}(1)$ com H e R constantes satisfazendo $S_1^- \leq S < S_2^-$

$$\text{onde } S_2^- = n + \left\{ \frac{n}{2(n-2)} H^2 - \frac{(4-n)}{2(n-2)} H \sqrt{H^2 + 4 + 2(n-2)} \right\}$$

$$\text{e } S_1^- = n + \left\{ nH^2 - \frac{(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{H^4 + 4(n-1)H^2} \right\}. \text{ Então } S = S_1^-$$

No Apêndice respondemos afirmativamente a conjectura de Chern para alguns tipos de hipersuperfícies compactas, mínimas e de Dupin, isto é, hipersuperfícies M^n de $S^{n+1}(1)$ cujas curvaturas principais são constantes ao longo de suas linhas de curvatura.

Introdução

Seja $M^n, n \geq 3$, uma hipersuperfície imersa na esfera Euclidiana unitária $S^{n+1}(1)$ e denotemos respectivamente por R, H e S a sua curvatura escalar, curvatura média e o quadrado $\|A\|^2$ da norma da segunda forma fundamental. Pela equação de Gauss, $R = n(n-1) + H^2 - S$, portanto se dois desses objetos são constantes, então o terceiro também é.

Para hipersuperfícies compactas, mínimas, imersas em $S^{n+1}(1)$, com curvatura escalar R constante, S.S. Chern (ver [Y], pg. 693) conjecturou que os valores de S são discretos.

Simons [S], Chern-Do Carmo-Kobayashi [CDK], Lawson [L] e S.T. Yau [Y] já haviam provado que, nessa situação, o primeiro e o segundo valores de S são $S = 0$ e $S = n$ respectivamente, e no último caso M^n é localmente o Toro de Clifford.

Em 1983 Peng e Terng [PT1] provaram o seguinte teorema:

Teorema (Peng e Terng [PT1]): Seja M^n uma hipersuperfície compacta, mínima, imersa em S^{n+1} com $S = \text{constante}$, e $S > n$, então existe um número positivo $C(n)$, tal que $S > n + C(n)$, onde $C(n) = \frac{1}{12n}$.

No Capítulo 2 deste trabalho, provamos uma generalização do resultado acima para imersões em $S^{n+1}(1)$ com curvatura média constante.

Teorema 2.1: Seja M^n uma hipersuperfície compacta, com curvatura média constante H , imersa em $S^{n+1}(1)$ com $S = \text{constante}$, e

$$S > f_+(n, H) = \left\{ \frac{n^3 H^2}{2(n-1)} - \frac{H(n-2)}{2(n-1)} \cdot \sqrt{H^2 + 4(n-1)} + n \right\}$$

então existe um número

$$C(n, H) = \frac{1}{12n} + \frac{2n^2 H(n+4)}{3[n(n+4) + 4]},$$

tal que

$$S > f_+(n, H) + C(n, H)$$

Observamos que quando $H = 0$, $f_+(n, H) = n$ e $C(n, H) = \frac{1}{12n}$.

Em 1990, Almeida, S.C. e Brito, F.G.B. [AB2] mostraram que no caso de dimensão 3 e H e R constantes, com $R \geq 0$, M^3 é isoparamétrica, logo, M^3 é isométrica ou a $S^3(r)$, $0 < r \leq 1$ ou $S^2(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$, $0 < r < 1$, ou uma hipersuperfície isoparamétrica obtida da hipersuperfície mínima de Cartan [Ca].

Em 1993. S. Chang [Cha2] mostrou que a condição $R \geq 0$ em [AB2] é consequência das demais, isto é, se M^3 é uma hipersuperfície compacta, imersa em $S^4(1)$ com H e R constantes, então não se pode ter $R < 0$.

No Capítulo 3 deste trabalho, provaremos:

Teorema 3.1: Seja M^4 uma hipersuperfície compacta, imersa em S^5 com H e S constantes, com $S_2^+ < S \leq S_1^+$, onde $S_2^+ = \frac{H^2}{2} + 4$ e

$$S_1^+ = \frac{2}{3}H^2 + \frac{H^2}{3}\sqrt{\frac{H^2}{9} + \frac{4}{3}} + 4,$$

então $S = S_1^+$ e M^4 é isométrica a $S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^3(r)$, $0 < r < 1$. Este resultado constitui em uma resposta parcial, afirmativa para a conjectura de Chern no caso H e S constantes e $n = 4$.

No Capítulo 4, usando a Técnica do Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau provaremos o seguinte teorema de “Pinching” para a Curvatura Escalar.

Teorema 4.1: Seja M^n , $n \geq 4$, uma hipersuperfície completa, imersa em $S^{n+1}(1)$, com H e R constantes, satisfazendo

$$S_1^- \leq S < S_2^- \quad \text{onde} \quad S_2^- = n + \left\{ \frac{n}{2(n-2)}H^2 - \frac{(4-n)}{2(n-2)}H\sqrt{\frac{H^2}{4} + 2(n-2)} \right\}$$

e

$$S_1^- = n + \left\{ nH^2 - \frac{(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{H^4 + 4(n-1)H^2} \right\}.$$

Então $S = S_1^-$ e M^n é localmente $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$.

Em 1987, Almeida, S.C. e Brito, F.G. provaram o seguinte teorema:

Teorema [AB1]: Seja M^3 uma hipersuperfície mínima, compacta, imersa em $S^4(1)$, com curvatura de Gauss-Kronecker $K = \text{constante} \neq 0$, então M^3 é isoparamétrica.

No Capítulo 1, estendemos parcialmente o teorema acima para imersões com H constante e uma limitação técnica para a curvatura Quase-Gauss-Kronecker $\tilde{K} = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i - \frac{H}{3})$.

Teorema 1.1: Seja M^3 uma hipersuperfície compacta, com curvatura média constante, imersa em $S^4(1)$, com curvatura Quase-Gauss-Kronecker $\tilde{K} = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i - \frac{H}{3}) = \text{cte} \neq 0$ e

$$f_1(H) \leq \tilde{K} \leq f_2(H)$$

onde

$$f_1(H) = \frac{(6H^3 + 54H) - \sqrt{(6H^3 + 57H)^2 + 9(H^4 + 18H^2 + 81)}}{162}$$

e

$$f_2(H) = \frac{(6H^3 + 54H) + \sqrt{(6H^3 + 57H)^2 + 9(H^4 + 18H^2 + 81)}}{162}.$$

Então, M^3 é isoparamétrica.

No Apêndice respondemos afirmativamente a conjectura de Chern para alguns tipos de hipersuperfície compactas, mínimas e de Dupin, isto é, hipersuperfície M^n de $S^{n+1}(1)$ cujas curvaturas principais são constantes ao longo de suas linhas de curvatura.

Fig. 2

Teorema do Capítulo 3

Teorema do Capítulo 4

Teorema Alekseev e Do Carmo

Fig. 1 :

Teorema do Capítulo 2

Teorema Alimkar e Do Carmo

Fig. 3-

Teorema do Capítulo 4

Teorema Alomar e De Carmo

Capítulo 0

Notação e Preliminares

Seguiremos a notação de Peng e Terng [PT1].

Seja M^n uma variedade n -dimensional imersa em uma variedade $(n+1)$ -dimensional N^{n+1} . Escolhemos um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ em N ; tal que, restritos a M^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ são tangentes a M , e sejam $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ o coreferencial dual. Então, as equações de estrutura de N são dadas por

$$(0.1) \quad \begin{aligned} dw_A &= - \sum_B w_{AB} \wedge w_B, w_{AB} + w_{BA} = 0 \\ dw_{AB} &= - \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} + \Omega_{AB} \end{aligned}$$

onde

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2} \sum_{C,D} K_{ABCD} w_C \wedge w_D,$$

$$K_{ABCD} + K_{ABDC} = 0.$$

O tensor de Ricci e a curvatura escalar são definidos respectivamente por

$$(0.2) \quad K_{AB} = K_{BA} = \sum_C K_{ACBC}$$

$$(0.3) \quad K = \sum K_{AA} = \sum_{A,C} K_{ACAC}.$$

Em S^{n+1} , temos

$$(0.4) \quad K_{ABCD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}$$

$$(0.5) \quad K_{AB} = n\delta_{AB}$$

$$(0.6) \quad K = n(n+1).$$

Se restringirmos estas formas a M^n , então $w_{n+1} = 0$. Então

$$0 = dw_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_{n+1,i} \wedge w_i.$$

Pelo Lema de Cartan, temos

$$(0.7) \quad w_{n+1,i} = \sum_j h_{ij} w_j, \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

Obtemos então,

$$(0.8) \quad dw_i = - \sum_{j=1}^n w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} + w_{ji} = 0$$

$$(0.9) \quad dw_{ij} = - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \wedge w_l$$

onde

$$(0.10) \quad R_{ijkl} = K_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}.$$

A 2-forma simétrica

$$(0.11) \quad h = \sum_{i,j} h_{ij} w_i w_j$$

e o escalar

$$(0.12) \quad H = \sum_i h_{ii}$$

são chamados segunda forma fundamental e curvatura média da variedade imersa M^n respectivamente; se $H = 0$, então M^n é mínima.

Consideraremos $N = S^{n+1}$.

Definimos a derivada covariante Dh de h (com componentes h_{ijk}) por

$$(0.13) \quad \sum_k h_{ijk} w_k = dh_{ij} - \sum_m h_{im} w_{mj} - \sum_m h_{mj} w_{mi}.$$

Derivando exteriormente (0.7) e usando as equação de estrutura (0.1), obtemos

$$(0.14) \quad \sum_{k,j} h_{ijk} w_k \wedge w_j = 0.$$

Então,

$$(0.15) \quad h_{ijk} = h_{ikj}.$$

Derivando exteriormente (0.13) definimos h_{ijkl} para

$$(0.16) \quad \sum_l h_{ijkl} w_l = dh_{ijk} - \sum_m h_{mj} w_{mi} - \sum_m h_{im} w_{mj} - \sum_m h_{ijm} w_{mk}.$$

Então,

$$(0.17) \quad \sum_{k,l} \left(h_{ijkl} - \frac{1}{2} \sum_m h_{im} R_{mjkl} - \frac{1}{2} \sum_m h_{mj} R_{mikl} \right) w_k \wedge w_l = 0.$$

$$(0.18) \quad h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{im} R_{mjkl} + \sum_m h_{mj} R_{mikl}.$$

Necessitaremos de terceira derivada covariante da segunda forma fundamental.

Derivando exteriormente (0.16), teremos

(0.19)

$$\sum_m h_{ijklm} \omega_m = dh_{ijkl} - \sum_m h_{mjkl} \omega_{mi} - \sum_m h_{imkl} \omega_{mj} - \sum_m h_{ijml} \omega_{mk} - \sum_m h_{ijkm} \omega_{ml}$$

e

$$(0.20) \quad h_{ijklm} - h_{ijkml} = \sum_m h_{rjk} R_{ril} \omega_m + \sum_r h_{irk} R_{rjlm} + \sum_m h_{ijr} R_{rklm}.$$

Denotamos por S o quadrado da norma de segunda forma fundamental, i.e.

$$(0.21) \quad S = \sum_{i,j} h_{ij}^2.$$

Para uma hipersuperfície mínima M^n em S^{n+1} teremos

$$(0.22) \quad S = n(n-1) - R$$

onde R é a curvatura escalar. No caso em que H for constante

$$(0.23) \quad S = n(n-1) + H^2 - R.$$

Calcularemos agora o laplaciano de h , $\Delta h = \Delta(\nabla h)$.

Por definição,

$$(\Delta h)_{ij} = \Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}.$$

De (0.15),

$$\Delta h_{ij} = \sum_k h_{kijk}$$

e de (0.18)

$$\Delta h_{ij} = \sum_k h_{kijk} + \sum_k \left(\sum_m h_{mi} R_{mkjk} + \sum_m h_{km} R_{mijk} \right).$$

Se M^n for mínima, $\sum_k h_{kk} = 0$, com (0.10)

$$(0.24) \quad \Delta h_{ij} = (n - S) h_{ij}.$$

Também,

$$(0.25) \quad \frac{1}{2}\Delta S = \sum_{ij} h_{ij}\Delta h_{ij} + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = (n-S)S + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

No caso H constante

$$(0.26) \quad \frac{1}{2}\Delta S = \sum_{ij} h_{ij}\Delta h_{ij} + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = (n-S)S - H^2 + Hf_3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$$

onde $f_3 = \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{jk}h_{ki}$.

Calcularemos o laplaciano da derivada covariante da segunda forma fundamental em M^n . Usando (0.18) e (0.20), teremos:

$$(0.27) \quad \begin{aligned} \Delta h_{ijk} &= \sum_l h_{ijkl} \\ &= (2n+3-S)h_{ijk} + 2 \sum_{ml} (h_{iml}h_{mk}h_{jl} + h_{jml}h_{mi}h_{lk} + h_{kml}h_{mi}h_{lj}) \\ &\quad - \sum_{m,l} (h_{ijm}h_{ml}h_{lk} + h_{ikm}h_{ml}h_{lj} + h_{jkl}h_{ml}h_{mi}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(0.28) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta \left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \right) &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}\Delta h_{ijk} + \sum_{i,j,k,l} h_{ijk}^2 \\ &= (2n+3-S)S(S-n) - 3 \sum_{i,j,k} h_{ijk}h_{ijl}h_{km}h_{ml} \\ &\quad + 6 \sum_{\substack{i,j,k \\ l,m}} h_{ijk}h_{ilm}h_{jl}h_{km} + \sum_{i,j,k,l} h_{ijk}^2. \end{aligned}$$

Supomos que $S = \text{constante}$, então, de (0.25)

$$(0.29) \quad \sum_{ijk} h_{ijk}^2 = S(S-n)$$

De (0.26),

$$(0.30) \quad \sum_{ijk} h_{ijk}^2 = S(S - n) + H^2 - Hf_3.$$

Para cada $p \in M$, podemos escolher um referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ que diagonalize (h_{ij}) em cada ponto, i.e., $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.

Portanto, em p , temos

$$(0.31) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = S(S - n)(S - 2n + 3) + 3(A - 2B)$$

onde

$$(0.32) \quad A = \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 \quad \text{e} \quad B = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j H_{ijk}^2.$$

No caso H constante, de (0.28):

$$(0.33) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = [S(S - n) + H^2 - Hf_3](S - 2n - 3) + 3(A - 2B) - 3H \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

No caso da imersão ter H constante, podemos introduzir o tensor ϕ de tipo $(1,1)$:

$$(0.34) \quad \Phi := h - \frac{H}{n} \langle, \rangle.$$

No referencial acima escolhido, denotaremos por μ_i os autovalores de Φ . Logo, $\mu_i = \lambda_i - \frac{H}{n}$.

Seja $\tilde{f}_k = Tr(\phi^k)$ e $f_k = Tr(h^k)$. Então,

$$(0.35) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_1 &= 0 \\ \tilde{S} = \tilde{f}_2 &= S - \frac{H^2}{n} \\ \tilde{f}_3 &= \frac{3}{n}HS - \frac{2}{n^2}H^3 - f_3. \end{aligned}$$

Denotaremos K a Curvatura de Gauss-Kronecker e $\tilde{K} = \det(\Phi)$ a curvatura quase-Gauss-Kronecker de M^n .

Precisaremos também dos Laplacianos de f_3 e f_4

$$(0.36) \quad \Delta f_3 = \sum_k (f_3)_{kk} = 3(n - S)f_3 + 3Hf_4 - 3HS + 6 \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j h_{ijk}^2$$

$$(0.37) \quad \Delta f_4 = \sum_k (f_4)_{kk} = 4(n - S)f_4 + 4Hf_5 - 4Hf_3 + 8 \sum \lambda_i^2 h_{ijk}^2 + 4 \sum \lambda_i \lambda_j h_{ijk}^2.$$

0.1 Famílias isoparamétricas de hipersuperfícies

Uma boa referência para este parágrafo é [AB3].

Seja M^n uma variedade riemanniana n -dimensional e A um tensor simétrico diferenciável em M^n de tipo $(1,1)$. Associado a este campo tensorial A existem $2(n+1)$ funções diferenciáveis $\sigma_r(A), f_r(A)$, $(0 < r < n)$ dadas por

$$\sigma_r(A) = \binom{n}{r} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$$

$$(0.38) \quad P(-\lambda) = \sum_{r=0}^n \lambda^{n-r} f_r,$$

onde $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Estas funções são relacionadas pelas fórmulas algébricas

$$(0.39) \quad f_r - \sigma_1 \cdot f_{r-1} + \dots + (-1)^r \cdot r \cdot \sigma_r = 0, \quad r < n,$$

$$(0.40) \quad f_r - \sigma_1 \cdot f_{r-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n f_{r-n} = 0, \quad r \geq n,$$

Outra importante função simétrica é

$$\gamma = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Observamos que se γ se anular, $P(\lambda)$ possui um fator linear múltiplo e que γ^2 é sempre um polinômio nas funções simétricas $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Temos que se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são constantes, se e somente se, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ou $f_1, \dots, f_n$ são constantes. Seja $x: M^n \rightarrow W^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas de dimensões n e $(n+1)$, respectivamente. Associada a h existem n funções $H_1, \dots, H_n$, definidas por $H_r = \sigma_r(h)$. Explicitamente, a r -ésima em média H_r é dada por

$$H_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r},$$

onde $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ são as curvaturas principais de M^n , que são os autovalores de segunda forma fundamental h . Dizemos então que M^n é isoparamétrica se as curvaturas principais λ_i 's são constantes.

Observamos que M^n é isoparamétrica se, e somente se, $H_1, \dots, H_n$ são funções constantes e que $H_1 = H$ é a curvatura média de x , $H_n = K$ a curvatura de Gauss-Kronecker e se W^{n+1} for um espaço de curvatura constante H_2 é a menos de constante, a curvatura escalar de M^n . Dizemos que uma hipersuperfície de S^{n+1} é chamada isoparamétrica de tipo p se possui p curvaturas principais constantes de multiplicidades constantes. Se M^n for uma hipersuperfície isoparamétrica de $S^{n+1}(1)$ com p curvaturas principais distintas, então $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. (Ver [Mu]).

Se $x: M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ for uma hipersuperfície orientável, imersa na esfera $(n+1)$ -dimensional, e e_{n+1} campo normal unitário a M^n em S^{n+1} e as curvaturas principais de M^n com respeito a S^{n+1} são constantes, onde $\lambda_i = \cot \alpha_i$, $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \pi)$.

Para cada parâmetro t , seja $x_t: M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ a imersão dada por $x_t(x) = \cos t x + \sin t e_{n+1}$ onde $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Então, a família x_t é chamada uma família isoparamétrica de hipersuperfícies. Se I for um intervalo, tal que $\lambda_i \in I$, $i = 1, \dots, n$. Para cada $t \in I - \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, x_t é uma imersão. As curvaturas principais de x_t são constantes e dadas por $\lambda_i = \cot(\lambda_i - t)$. Cartan [Ca] mostrou que se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ são as curvaturas principais de x_t , para cada i , $1 \leq i \leq p$, teremos

$$\sum_{i \neq j} m_j \cdot \frac{1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0 \quad (\text{Fórmula Fundamental de Cartan})$$

onde m_j são as multiplicidades de λ_j .

No caso $n = 3$, i.e., M^3 hipersuperfície imersa em S^4 , compacta com $H = \text{cte}$, temos três exemplos isoparamétricos em $S^4(1)$:

- (1) Esferas;
- (2) Produtos de esferas (toros de Clifford $S^2 \times S^1$);
- (3) Hipersuperfícies isoparamétricas de Cartan.

Descreveremos a seguir estes exemplos, relacionando a curvatura média H , a curvatura escalar R e a curvatura de Gauss-Kronecker K .

Esferas: Seja $x: S^3(r) \rightarrow S^4(1)$ imersão isométrica dada por $x(p) = (p, s)$, onde $s^2 + r^2 = 1$. Então $M^3 = S^3(r)$ é totalmente umbílica com curvaturas principais $\lambda_i = s/r$, $i = 1, 2, 3$. A curvatura média H e a curvatura escalar R e a Curvatura de Gauss-Kronecker K satisfazem as relações

$$R = 6 + 2H^2/3$$

$$R = 6(1 + K^{2/3}).$$

Toro de Clifford: Seja $X: S^2(r) \times S^1(1) \rightarrow S^4$ uma imersão isométrica dada por $X(p, q) = (p, q)$. Suas curvaturas principais são dadas por $\lambda_1 = -r/s$, $\lambda_2 = \lambda_3 = s/r$. A curvatura média e a curvatura escalar da imersão satisfazem:

$$R = 3 + (H^2 \pm H\sqrt{8 + H^2})/4$$

$$R = 2(1 + K^2)$$

Família isoparamétrica de Cartan

Consideremos a imersão mínima $\Psi: S^2(\sqrt{3}) \rightarrow S^4(1)$ dada por

$$\Psi(x, y, z) = (1/\sqrt{3})(xy, xz, yz, 1/2(x^2 - y^2), (1/2\sqrt{3})(x^2 + y^2 - 2z^2)).$$

Isto define um mergulho do plano projetivo real em S^4 . Este plano projetivo real mergulhado em S^4 é chamado superfície de Veronese. Seja $N_1(\Sigma)$ o fibrado normal unitário da superfície de Veronese Σ .

$$N_1(\Sigma) = \{(x, v) \in \Sigma \times S^4 \mid v \perp T_x \Sigma \text{ e } v \perp x\}.$$

Em $(x, v) \in N_1(\Sigma)$ as curvaturas principais da superfície de Veronese são dadas por $\lambda_1(x, v) = -\lambda_2(x, v) = \{\sqrt{3}/3\}$. Portanto, a superfície de Veronese é uma subvariedade mínima de S^4 . Considere a aplicação polar $\Phi: N_1(\Sigma) \rightarrow S^4$ dada por $\Phi(x, v) = v$. As curvaturas principais da imersão Φ são: $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

Finalmente, definimos a família isoparamétrica $\Phi: N_1(\Sigma) \rightarrow S^4$ por $\Phi(x, v) = \cos t \Phi(x, v) + \sin t x$. As curvaturas principais da imersão Φ_t são:

$$\frac{\sqrt{3} + t \operatorname{tg} t}{1 - t \operatorname{tg} t}, \frac{t \operatorname{tg} t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot t \operatorname{tg} t}, t \operatorname{tg} t.$$

A curvatura escalar de Φ_t é dada por $R_t = 0$.

A curvatura média H_t e a curvatura de Gauss-Kronecker K_t de Φ_t satisfazem $H_t + 3K_t = 0$.

0.2 No Capítulo 4 precisaremos da definição de $H(r)$ -Toro introduzida em [AC]. Um $H(r)$ -Toro imerso em S^{n+1} é obtido considerando as imersões canônicas de

$$S^{n-1}(r) \subset R^n, \quad S^1(r_1) \subset R^2, \quad r^2 + r_1^2 = 1 \setminus c^2,$$

onde $S^n(r)$ é a esfera de raio r e dimensão n , e tomando a imersão produto

$$S^{n-1}(r) \times S^1(r_1) \rightarrow R^n \times R^2.$$

Pela escolhas feitas, esta imersão estará de fato contida em S^{n+1} .

Capítulo 1

Hipersuperfícies 3-dimensionais com curvatura quase-Gauss-Kronecker constante e curvatura média constante

Nosso objetivo neste capítulo é estender parcialmente o seguinte teorema de Almeida, S.C. e Brito, F. [AB1].

Teorema [AB1]: Seja $M^3 \rightarrow S^4(1)$ uma hipersuperfície orientada, mínima, fechada e com curvatura de Gauss-Kronecker $K = \text{cte} \neq 0$, então M^3 é isoparamétrica.

Mostraremos que se $M^3 \rightarrow S^4(1)$ for uma hipersuperfície fechada com curvatura média constante H

$$\tilde{K} = (\lambda_1 - \frac{H}{3})(\lambda_2 - \frac{H}{3})(\lambda_3 - \frac{H}{3}) = \text{cte} \neq 0,$$

e

$$f_1(H) \leq \tilde{K} \leq f_2(H)$$

onde

$$f_1(H) = \frac{(6H^3 + 54H) - \sqrt{(6H^3 + 57H)^2 + 9(H^4 + 18H^2 + 81)}}{162}$$

e

$$f_2(H) = \frac{(6H^3 + 54H) + \sqrt{(6H^3 + 57H)^2 + 9(H^4 + 18H^2 + 81)}}{162}$$

então M^3 é isoparamétrica, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são as curvaturas principais de M^3 . Observamos que a curvatura quase-Gauss-Kronecker dos exemplos isoparamétricos imersos em S^4

satisfazem a limitação acima.

Recentemente Almeida, S.C. e Brito, F. provaram o seguinte teorema:

Teorema [AB3] : Seja M^3 uma hipersuperfície orientada, fechada, imersa em $S^4(1)$, com curvatura média constante H e curvatura Gauss-Kronecker $K = \text{cte} \neq 0$ então ou

(a) M^3 é isoparamétrica;

ou

(b) $(H, K) \in \{(H, K); \frac{H}{K} \leq -3\}$ (ver figura abaixo [AB3].)

Na demonstração deste teorema utilizaremos a técnica do caso mínimo que consiste no cálculo do Laplaciano de K e utilizar a fórmula de Simons. Calcularemos o laplaciano de $\tilde{K}$ e usaremos a Fórmula de Simons para hipersuperfícies de $S^4(1)$ com curvatura média constante, baseada em [NS] e [AC].

Teorema: Seja $M^3 \rightarrow S^4(1)$ uma hipersuperfície fechada, imersa em $S^4(1)$ com curvatura média constante H e $\tilde{K} = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i - \frac{H}{3}) = \text{cte} \neq 0$ e $f_1(H) \leq \tilde{K} \leq f_2(H)$, então M^3 é isoparamétrica.

Prova: Calculando $\tilde{K}$, temos

$$(1.1) \quad \tilde{K} = K + \frac{1}{6}HS - \frac{5}{54}H^3.$$

Precisaremos calcular f_3 em função de $\tilde{K}, H, S$. Temos

$$(1.2) \quad f_3 = 3\tilde{K} + HS - \frac{2}{9}H^3.$$

Usando (1.1), o Laplaciano de $\tilde{K}$ é dado por:

$$(1.3) \quad \Delta \tilde{K} = \Delta K + \frac{1}{3} H \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta S \right).$$

Por outro lado, de (1.2) o Laplaciano de f_3

$$(1.4) \quad \frac{1}{3} \Delta f_3 = \Delta \tilde{K} + \frac{1}{3} H \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta S \right).$$

Segundo [Che₂, pg. 127]

$$(1.5) \quad \frac{1}{3} \Delta f_3 = (3 - S)f_3 + Hf_4 - HS + 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

Logo, de (1.4) e (1.5),

$$(1.6) \quad \Delta \tilde{K} = \frac{1}{3} \Delta f_3 - \frac{1}{3} H \cdot \Delta S = (3 - S)f_3 + Hf_4 - HS + 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3} H \Delta S.$$

Segundo [Che₂, pg. 127]

$$(1.7) \quad f_4 = -H^2 S + \frac{1}{6} H^4 + \frac{4}{3} H f_3 + \frac{1}{2} S^2.$$

Continuando, podemos substituir f_4 na expressão do Laplaciano de $\tilde{K}$:

$$(1.8) \quad 0 = \Delta \tilde{K} = (3 - S)f_3 + H(-H^2 S + \frac{1}{6} H^4 + \frac{4}{3} H f_3 + \frac{1}{2} S^2) - HS + 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3} H \Delta S.$$

$$(1.9) \quad 0 = \Delta \tilde{K} = (3 - S)f_3 - H^3 S + \frac{1}{6} H^5 + \frac{4}{3} H^2 f_3 + \frac{1}{2} H S^2 - HS + 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3} H \Delta S.$$

Logo, por (1.2)

$$(1.10) \quad \begin{aligned} 0 = \Delta \tilde{K} &= (3 - S)(3\tilde{K} + HS - \frac{2}{9} H^3) - H^3 S + \frac{1}{6} H^5 + \frac{4}{3} H^2 f_3 + \frac{1}{2} H S^2 - HS \\ &+ 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3} H \Delta S. \end{aligned}$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta \tilde{K} &= ((3 - S) + \frac{4}{3}H^2)(3\tilde{K} + HS - \frac{2}{9}H^3) - H^3S + \frac{1}{6}H^5 + \frac{1}{2}HS^2 - HS \\
 (1.11) \quad &+ 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3}H\Delta S.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta \tilde{K} &= 3((3 - S) + \frac{4}{3}H^2)(\tilde{K} + 3HS - \frac{2}{3}H^3) - HS^2 + \frac{2}{9}H^3S \\
 (1.12) \quad &+ \frac{4}{3}H^3S - \frac{8}{27}H^5 - H^3S + \frac{1}{6}H^5 + \frac{1}{2}HS^2 - HS + 2 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 - \frac{1}{3}H\Delta S.
 \end{aligned}$$

Escolhamos $p \in M$, ponto de máximo para S . Logo, teremos:

$$\begin{aligned}
 \Sigma h_{iik}(p) &= 0 \text{ para cada } k \text{ (pois } dH(p) = 0) \\
 \Sigma \lambda_i \cdot h_{iik}(p) &= 0 \text{ para cada } k \text{ (pois } dS(p) = 0) \\
 (1.13) \quad \Sigma \lambda_i^2 \cdot h_{iik}(p) &= 0 \text{ para cada } k \text{ (pois } df_3(p) = 0).
 \end{aligned}$$

Em p , podemos ter as seguintes possibilidades:

- (1) $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = \lambda_3(p)$, logo $\mu_1(p) = \mu_2(p) = \mu_3(p)$, então como $\tilde{H} = 0$, teremos $3\mu_1(p) = 0$, logo $\mu_1(p) = 0$, portanto $3\mu_1(p)^2 = \tilde{S}(p) = 0$, portanto $\tilde{S}(p) = 0$, como $\tilde{S} \geq 0$, teremos $\tilde{S} = 0$, logo $S = \frac{H^2}{n}$, então M^3 é isoparamétrica.
- (2) $\lambda_i(p) \neq \lambda_j(p)$, para $i \neq j$;

No caso (2), de (1.8) teremos um sistema com incógnitas $h_{11k}(p), h_{22k}(p), h_{33k}(p)$ e o determinante da matriz dos coeficientes é um determinante de Vandermonde. Logo, $h_{iik}(p) = 0$ todo i, k . Usando a fórmula (1.12) acima em p e a Fórmula de Simons (0.26),

teremos:

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta \tilde{K} = & 3((3 - S) + \frac{4}{3}H^2)(\tilde{K} + 3HS - \frac{2}{3}H^3) \\
 & - HS^2 + \frac{2}{9}H^3S + \frac{4}{3}H^3S \\
 & - \frac{8}{27}H^5 - H^3S + \frac{1}{6}H^5 + \frac{1}{2}HS^2 - HS \\
 & + 4Hh_{123}^2(p) - \frac{2}{3}H \left[S \cdot (3 - S) - H^2 + Hf_3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Logo,teremos

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta \tilde{K} = & 3((3 - S) + \frac{4}{3}H^2)(\tilde{K} + 3HS - \frac{2}{3}H^3) \\
 & - HS^2 + \frac{2}{9}H^3S + \frac{4}{3}H^3S \\
 & - \frac{8}{27}H^5 - H^3S + \frac{1}{6}H^5 + \frac{1}{2}HS^2 - HS \\
 & + 4Hh_{123}^2(p) - 2HS + \frac{2}{3}H^5 + \frac{2}{3}H^3 \\
 & - \frac{2}{3}H^2(3\tilde{K} + HS - \frac{2}{9}H^3) - \frac{2}{3}H6h_{123}^2(p).
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta \tilde{K} = & [3(3 - S) + \frac{4}{3}H^2] \cdot \tilde{K} + \frac{5}{9}H^3S \\
 & - \frac{8}{27}H^5 + \frac{1}{6}H^5 - \frac{1}{2}HS^2 + \frac{2}{3}H^3 \\
 & + \frac{H^2}{S} - \frac{2}{3}H^3 - \frac{H^2}{3}\tilde{K} - \frac{2}{3}H^3S \\
 & + \frac{4}{27}H^5.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Então

$$0 = 3[(3 - S) + \frac{2}{3}H^2]\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3S + \frac{1}{54}H^5 + \frac{1}{6}HS^2.
 \tag{1.17}$$

Nosso objetivo agora é escrever o lado direito da expressão acima de uma forma fatorada, observamos que esta expressão é um polinômio do segundo grau com coeficientes dependendo de H e $\tilde{K}$:

$$(1.18) \quad F(S) = \frac{1}{6}HS^2 + (-3\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3)S + (\frac{1}{54}H^5 + (9 + 2H^2)\tilde{K}) = 0.$$

Portanto, no ponto p , ponto de máximo para S , teremos onde S_+ e S_- são raízes de $F(S) = 0$, e

$$(1.19) \quad S_+ = \left\{ (-3\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3) + \sqrt{(-3\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3)^2 - \frac{2}{3}H^5 + (2H^2 + 9)\tilde{K}} \right\} / \frac{H}{3}$$

$$(1.20) \quad S_- = \left\{ (-3\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3) - \sqrt{(-3\tilde{K} - \frac{1}{9}H^3)^2 - \frac{2}{3}H^5 + (2H^2 + 9)\tilde{K}} \right\} / \frac{H}{3}$$

Logo, em p , ou $S(p) = S_+$ ou $S(p) = S_-$.

Utilizaremos novamente a Fórmula de Simons para hipersuperfícies da esfera com curvatura média constante, ver (0.26). Calculando o Laplaciano de S , temos:

$$(1.21) \quad \frac{1}{2}\Delta S = (3 - S)S - H^2 + Hf_3 + \Sigma h_{ijk}^2.$$

Por compacidade de M e pelo Teorema de Stokes integrando sobre M , temos

$$(1.22) \quad \int_M [(3 - S)S - H^2 + Hf_3] = - \int_M |\nabla h|^2 \leq 0.$$

Usando (1.2) em (1.20),

$$(1.23) \quad \int_M [(3 - S)S - H^2 + H(3\tilde{K} + HS - \frac{2}{9}H^3)] \leq 0.$$

Logo,

$$(1.24) \quad \int_M [3S - S^2 - H^2 + 3H\tilde{K} + H^2S - \frac{2}{9}H^4] \leq 0.$$

Observamos que o integrando $G(S)$ da fórmula de Simons é um polinômio do segundo grau em S com coeficientes dependendo de H e $\tilde{K}$. Calculando as raízes de $G(S)$, temos S_+^G e S_-^G de (1.13), onde

$$S_-^G = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{6}\sqrt{H^4 + 18H^2 + 108H\tilde{K} + 81} + \frac{3}{2}$$

$$S_+^G = \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{6}\sqrt{H^4 + 18H^2 + 108H\tilde{K} + 81} + \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$(1.25) \quad \int_M (S_+^G - S)(S - S_-^G) \leq 0.$$

Sabemos que em p , ponto de máximo para S , $S(p) = S_+$ ou $S(p) = S_-$, mas $S(p) = S_+$, pois caso contrário, S seria constante. Analogamente, em q , ponto de mínimo para S teremos $S(q) = S_-$, pois caso contrário S seria constante. Então $S_- \leq S \leq S_+$. Comparando as raízes dos polinômios $G(S)$ e $F(S)$ e usando a limitação para $\tilde{K}$ da nossa hipótese teremos $S_-^G \leq S_- \leq S \leq S_+ \leq S_+^G$.

Portanto, de (1.21)

$$(1.26) \quad 0 \leq \int_M (S_+^G - S)(S - S_-^G) \leq 0.$$

Então, $S = S_+^G$ ou $S = S_-^G$. Como S_+^G e S_-^G dependem somente de H e $\tilde{K}$ que são constantes, teremos S constante. Logo, $H, \tilde{K}$ e S são constantes. Portanto, M^3 é isoparamétrica.

- (3) $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = \{H - \lambda_3(p)\}/2$. No caso (3), em que $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = (H - \lambda_3(p))/2$, consideremos a função $\tilde{F}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$, onde $\mu_i = (\lambda_i - \frac{H}{3})$, $i = 1, 2, 3$. Observamos que $\tilde{H} = \Sigma \mu_i = 0$ e $\tilde{K} = \text{cte} \neq 0$. Em p , ponto de máximo para S (e portanto para $\tilde{S}$), $\tilde{S}(p) = \sqrt[3]{54\tilde{K}^2}$ onde $\tilde{S} = \tilde{f}_2 = S - \frac{H^2}{3}$. Encontrando o mínimo para F acima com as condições de vínculo $H = 0$ e $\tilde{K} = \text{cte} \neq 0$, usando multiplicadores de Lagrange, temos

$$\tilde{F}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \geq \sqrt[3]{54\tilde{K}^2} = \tilde{S}(p).$$

Logo, $\tilde{S}$ é constante. Como H é constante e $\tilde{S} = S - \frac{H^2}{3}$, teremos S constante. Portanto, M^3 é isoparamétrica.

O caso $\tilde{K} = 0$: Almeida, S.C. e Brito, F.G. [AB1] obtiveram exemplos de hipersuperfícies mínimas não isoparamétricas de $S^4(1)$ com curvatura de Gauss-Kronecker $K = 0$. A pergunta natural é se existem exemplos de hipersuperfícies com curvatura média constante H , não isoparamétricas, e $\tilde{K} = 0$.

Capítulo 2

Uma estimativa para o pinching constante de hipersuperfícies com curvatura média e curvatura escalar constantes em S^{n+1}

Seja M^n uma hipersuperfície compacta, mínima, imersa na esfera $S^{n+1}(1)$. Se o quadrado da norma da segunda forma fundamental da imersão satisfaz $0 \leq S \leq n$, então Simons [S] mostrou que $S = 0$ ou $S = n$. No caso $S = n$, Chern, do Carmo e Kobayashi [CDK] e independentemente Lawson [L] provaram que M^n é o Toro de Clifford imerso em $S^{n+1}(1)$. Posteriormente, Peng and Terng [PT] estudaram o caso $n = 3$ e $S = \text{cte}$ e mostraram que se $S > 3$, então $S \geq 6$, e no caso n , mostraram que se $S > n$, então $S > n + \frac{1}{12n}$. No caso $n = 3$ e Curvatura Média Constante, e $S = \text{cte}$, Almeida e Brito [AB] mostraram que se a curvatura escalar é constante $R \geq 0$, então M^3 é isoparamétrica. Recentemente, S. Chang [Cha2] mostrou que $R \geq 0$ é uma condição que não é necessária.

Neste capítulo mostraremos o seguinte teorema:

Teorema 1: *Seja $M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície compacta, com curvatura média constante H e quadrado da norma da segunda forma fundamental $S = \text{cte}$, imersa na esfera $(n+1)$ -dimensional. Se $S > f_+(n, H)$ então $S \geq f_+(n, H) + C(n, H)$, onde*

$$f_+(n, H) = \left\{ \frac{n^3 H^2}{2(n-1)} - \frac{H(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{H^2 + 4(n-1)} + n \right\},$$

e $C(n, H) = \frac{1}{12n} + \frac{2n^2 H \cdot (n+4)}{3 \cdot [n(n+4)+4]}$ é uma constante dependendo somente de n e H tal que se $H = 0$, $C(n, 0) = \frac{1}{12n}$.

Observamos que no toro isoparamétrico $S^1(r_1) \times S^{n-1}(r_2)$ onde $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $S = f_+(n, H)$

Este Teorema estende para o caso de curvatura média constante o resultado de Peng e Terng acima citado [PT1, pg.189]

Na prova do Teorema 2.1 fazemos uma adaptação para o caso curvatura média constante da estimativa feita por Peng e Terng [PT1, pg.185] e a desigualdade de Okumura utilizada em Alencar e Do Carmo [AC, pg.1226] e da Fórmula de Simons[NS].

Prova do Teorema 1: Calculando o Laplaciano da norma da derivada covariante the Segunda Forma Fundamental, teremos

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} \Delta \left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \right) = (2n+3-S)(S(S-n)+H^2-Hf_3) + (6B-3A) + 3HC + \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2$$

ver [PT, pg. 185], onde

$$A = \sum_{i,j,k} \lambda_i^2 h_{ijk}^2, \quad B = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j h_{ijk}^2 \quad \text{e} \quad C = \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

como S é constante, e da Fórmula de Simons (2.9)

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = S(S-n) + H^2 - Hf_3.$$

Substituindo em (2.1)

$$(2.2) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = \frac{1}{2} \Delta(S(S-n) + H^2 - Hf_3) + (S - (2n+3))(S(S-n) + H^2 - Hf_3) + (3A - 6B) - 3HC.$$

Então,

$$(2.3) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = -\frac{H}{2} \Delta f_3 + (S(S-n) + H^2 - Hf_3)(S - 2n - 3) + (3A - 6B) - 3HC.$$

Usando o mesmo argumento de Peng e Terng [PT1, pg. 185], devemos encontrar uma limitação inferior para $\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2$ usando S e H .

Observamos primeiramente que

$$(2.4) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq 3 \sum_{i \neq j} h_{ijij}^2 + \sum_i h_{iiii}^2.$$

Seja $t_{ij} := h_{ijij} - h_{jiij}$ e usando o fato que

$$(2.5) \quad h_{ijk} = h_{ikj} \text{ e } h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum h_{im} R_{mjkl} + \sum h_{mj} R_{mikl}$$

e da equação de Gauss obtemos

$$(2.6) \quad t_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)(1 + \lambda_i \lambda_j).$$

Obtemos

$$(2.7) \quad \sum_{i \neq j} h_{ijij}^2 = \sum_{i \leq j} h_{ijij}^2 + (h_{ijij} - t_{ij})^2 = \sum_{i \neq j} \left(h_{ijij} - \frac{t_{ij}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} t_{ij}^2.$$

Usando (2.5)

$$(2.8) \quad \begin{aligned} &= 4 \left[(nS - 2S^2 + S \sum_i \lambda_i^4 - (\sum_i \lambda_i^3)^2) \right] + 2nHf_3 - \frac{3}{4}H^2 = \\ &\sum_{i \neq j} t_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (1 + \lambda_i \lambda_j)^2 = \frac{2}{S} \sum_k \left[S\lambda_k^2 - \lambda_k \left(\sum_i \lambda_i^3 \right) - S \right]^2 + 8nHf_3 - \frac{9}{4}nH^2. \end{aligned}$$

Usando (2.3) e (2.5) temos

$$(2.9) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq \frac{3}{2S} \sum_{k=1}^n (S + f_3 \lambda_k - S\lambda_k^2)^2 + 6nHf_3 - \frac{27}{16}nH^2 + 3 \sum_{i \neq j} (h_{ijij} - \frac{1}{2}t_{ij})^2.$$

Usando (2.9) em (2.3), teremos:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} &(S - 2n - 3)(S(S - n) + H^2 - Hf_3) - \frac{H}{2}\Delta f_3 + (3A - 6B) + 3HC \\ &\geq \frac{3}{2S} \sum_{k=1}^n (S + f_3 \lambda_k - S\lambda_k^2)^2 + 6nHf_3 - \frac{27}{16}nH^2. \end{aligned}$$

Como

$$(2.11) \quad \Delta f_3 = 3f_3(n - S) - 3HS + 3Hf_4 + 6 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

Substituindo em (2.10) teremos

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & (S - 2n - 3)(S(S - n) + H^2 - Hf_3) - \frac{3}{2}Hf_3(n - S) \\ & - \frac{3}{2}H^2f_4 + (3A - 6B) + \frac{3}{2}H^2S - 3HSf_3 - 6HC \\ & \geq \frac{3}{2S} \sum_{k=1}^n (S + f_3\lambda_k - S\lambda_k^2)^2 + 6nHf_3 - nH^2. \end{aligned}$$

Necessitaremos agora do Lema de Okumura para conseguir estimar $\tilde{f}_3$, este lema encontra-se em Alencar e Do Carmo [AC, pg. 1226].

Lema 2.1: *Sejam $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ autovalores do tensor $\Phi = h - (H/n)\langle, \rangle$, então*

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \tilde{S} = S - \frac{H^2}{n} = \text{cte} \geq 0.$$

Logo,

$$(2.13) \quad \frac{-(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} \leq \tilde{f}_3 = \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$$

e

$$\tilde{f}_3 \equiv \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$$

se, e somente se, $(n-1)$ autovalores μ_i 's são iguais:

$$(2.14) \quad \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{1/2}, \quad \mu_n = \mp \frac{(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Podemos expressar f_4 e $\tilde{f}_3$ como funções de H e S , temos

$$(2.15) \quad f_4 = -H^2 S + \frac{H^2}{2n} + \frac{4}{n} H f_3 + \frac{S^2}{2}$$

$$(2.16) \quad \tilde{f}_3 = \frac{3HS}{n} - \frac{2H^3}{n^2} - f_3.$$

Precisaremos de uma estimativa para $(3A - 6B)$ e para $C = \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2$.

Lema 2.2: Seja M^n uma hipersuperfície compacta, imersa em S^{n+1} , com curvatura média constante H . Então

$$(i) \quad (3A - 6B) \leq 3S(S(S - n) + H^2 - H f_3);$$

$$(ii) \quad 3C \leq 9H(S(S - n) + H^2 - H f_3).$$

Prova: Calculando $3(A - 2B)$ teremos

$$(2.17) \quad \begin{aligned} 3(A - 2B) &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 [\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - 2(\lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_k + \lambda_k \lambda_i)] \\ &= \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 + 3 \sum_{i=j \neq k} h_{iik}^2 + \sum_i h_{iii}^2. \end{aligned}$$

Usando que $S = \sum_i \lambda_i^2$ e $H = \frac{1}{n} \sum_i \lambda_i$, temos

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 &= \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 [2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2) - 2(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)^2] \\ &\leq 2S \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 - 2H^2 \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 \leq 2S \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 \leq 3S \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 \end{aligned}$$

$$(2.19) \quad \sum_{i=j \neq k} h_{ijk}^2 = \sum_{i \neq k} h_{iik}^2 [\lambda_k^2 - 2\lambda_i \lambda_k] \leq \sum_{i \neq k} h_{iik}^2 [3(\lambda_i^2 + \lambda_k^2) - 2(\lambda_i + \lambda_k)^2] \leq 3S \sum_{i \neq k} h_{iik}^2.$$

$$(2.20) \quad \sum_{i \neq k} h_{iik}^2 = -3 \sum_i h_{iii}^2 \lambda_i \leq 0.$$

Além disso, pela Fórmula de Simons:

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2 + 3 \sum_{i=j \neq k} h_{ijk}^2 + \sum_i h_{iii}^2 = (S(S-n) + H^2 - Hf_3).$$

Então, de (2.18), (2.19) e (2.20)

$$(2.21) \quad (3A - 6B) \leq 3S(S(S-n) + H^2 - Hf_3).$$

Estimaremos agora $3C$:

$$(2.22) \quad 3C = 3 \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 = 3 \sum_{i \neq h \neq k} \lambda_i h_{ijk}^2 + 3 \sum_{i=j \neq k} \lambda_i h_{ijk}^2 + 3 \sum_{i=j=k} \lambda_i h_{ijk}^2 \leq 9H \sum_{ijk} h_{ijk}^2.$$

Por outro lado, temos que

$$(2.23) \quad \frac{3}{2S} \sum_{k=1}^n (S + f_3 \lambda_k - S \lambda_k^2)^2 = \frac{3}{2} nS + 3Hf_3 - \frac{3}{2} f_3^2 - 3S^2 + \frac{3}{2} S f_4.$$

Substituindo (2.22) em (2.12) teremos:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} & (S - 2n - 3)(S(S-n) + H^2 - Hf_3) - \frac{3}{2} Hf_3(n-S) \\ & - \frac{3}{2} H^2 f_4 + (3A - 6B) + \frac{3}{2} H^2 S - 3HSf_3 - 6HC \\ & \geq \frac{3}{2} nS + 3Hf_3 - \frac{3}{2} f_3^2 - 3S + \frac{3}{2} S f_4 + 6nHf_3 - \frac{27}{16} nH^2 \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2 e a fórmula (2.15) para f_4 em (2.23) teremos:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} & (S - 2n - 3)(S(S-n) + H^2 - Hf_3) - \frac{3}{2} Hf_3(n-S) \\ & - \frac{3}{2} H^2 \left(-H^2 S + \frac{H^2}{2n} + \frac{4}{n} Hf_3 + \frac{S^2}{2} \right) \\ & + 3S(S(S-n) + H^2 - Hf_3) + \frac{3}{2} H^2 S - 3HSf_3 - 6HC \\ & \geq \frac{3}{2} nS + 3Hf_3 - \frac{3}{2} f_3^2 - 3S + \frac{3}{2} S f_4 + 6nHf_3 - \frac{27}{16} nH^2 \end{aligned}$$

Substituindo novamente f_4 , teremos:

$$\begin{aligned}
 (2.26) \quad & ((4S - 2n - 3) - 18H^2)(S(S - n) + H^2) + (-7S + (18 - \frac{6}{n})H^2 - \frac{17}{2}n - 3)Hf_3 \\
 & + \frac{3}{2}H^4S - \frac{3}{4n}H^4 - \frac{3}{4}H^2S + \frac{3}{2}H^2S \\
 & \geq \frac{3}{2}nS - \frac{27}{16}nH^2 - \frac{3}{2}f_3^2 + \frac{3}{4}S^3 - \frac{3}{2}H^2S^2 + \frac{3}{4n}H^4S
 \end{aligned}$$

Usando o Lema de Okumura, teremos

(2.27)

$$\begin{aligned}
 S \left(\frac{3}{2}n - \frac{3}{4}S^2 \right) & \leq ((4S - 2n - 3) - 18H^2)(S(S - n) + H^2) \\
 & + \left(\frac{3HS}{n} - \frac{2H^3}{n^2} + \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} \right) \left((18 - \frac{6}{n})H^3 - (7S + \frac{17}{2}n + 3)H \right) \\
 & + \frac{3}{2} \left(\frac{3HS}{n} - \frac{2H^3}{n^2} + \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} \right)^2 \\
 & + \left(-\frac{3}{2}H^2S^2 + \left(\frac{6n-3}{4n} \right) H^4S - \frac{27}{16}nH^2 + \frac{3}{4}H^2S - \frac{3}{4n}H^4 \right)
 \end{aligned}$$

Portanto se $S > \left\{ \frac{n^3H^2}{2(n-1)} + \frac{(n-2)}{2(n-1)}H\sqrt{H^2 + 4(n-1)} + n \right\} = f_+(n, H)$ em (2.26), teremos $S > f_+(n, H) + C(n, H)$, onde $C(n, H)$ é um polinômio em H com coeficientes dependendo somente de n , $C(n, H) = \frac{1}{12n} + \frac{2n^2H(n+4)}{3[n(n+4)+4]}$.

Capítulo 3

Hipersuperfícies compactas 4-dimensionais com curvatura média constante e curvatura escalar constante em $S^{n+1}(1)$

Em [AB], S.C. Almeida e F. Brito, mostraram o seguinte Teorema de “Gap” para $S = \|A\|^2$ para hipersuperfícies 3-dimensionais imersas em $S^4(1)$.

Seja M^3 uma hipersuperfície fechada, imersa em $S^4(1)$ com curvatura média constante H se $S = \|A\|^2$ é constante e

$$\frac{H^2}{3} \leq S \leq 6 + H^2.$$

Então, $S = \frac{H^2}{3}$ ou, $S = 3 + \frac{3H^2}{4} \pm \frac{1}{8}\sqrt{H^4 + 8H^2}$ ou $S = 6 + H^2$.

Neste capítulo mostraremos o seguinte Teorema de Gap para $S = \|A\|^2$ de Hipersuperfícies fechadas, no caso de dimensão 4.

Teorema 3.1: *Seja $M^4 \rightarrow S^5(1)$ uma hipersuperfície compacta, imersa em $S^5(1)$, com curvatura média constante H e S constante satisfazendo $S_2^+ < S \leq S_1^+$ onde*

$$S_2^+ = \frac{H^2}{2} + 4 \quad e \quad S_1^+ = \frac{2}{3}H^2 + \frac{H^2}{3}\sqrt{\frac{H^2}{9} + \frac{4}{3}} + 4.$$

Então, $S = S_1^+$

Observamos que os valores de S_1^+ e S_2^+ correspondem aos casos dos toros isoparamétricos $S^1 \times S^3$ e $S^2 \times S^2$ respectivamente.

Prova do Teorema: Necessitaremos de uma estimativa para $\Delta |\nabla^2 A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$ e do Princípio do máximo de Omori e Yau. Inicialmente precisaremos do seguinte Lema:

Lema 3.1: *Seja M^4 uma hipersuperfície compacta, com curvatura média constante H , imersa na esfera 5-dimensional $S^5(1)$. Então,*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = -\frac{3}{2} H \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 - \left(\frac{3}{4} S - \frac{3}{8} H^2 - 3 \right) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \\
 & + \left(\frac{3}{4} S^3 - \left(-\frac{9}{8} H^2 - 3 \right) S^2 + \left(\frac{3}{4} H^4 - \frac{9}{4} H^2 - 12 \right) S + \left(-\frac{3}{32} H^6 - \frac{3}{4} H^4 - 3H^2 \right) \right) \\
 (ii) \quad & \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = -\frac{3}{2} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 \\
 & + 10H \sum_{ijk} \mu_i h_{ijk}^2 + \left(-\frac{3}{4} S - \frac{3}{8} H^2 - 3 \right) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \\
 & + \left(\frac{3}{4} S^3 + \left(-\frac{9}{8} H^2 - 3 \right) S^2 + \left(\frac{3}{4} H^4 - \frac{9}{4} H^2 - 12 \right) S \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{3}{32} H^6 - \frac{3}{4} H^4 - 3H^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

Prova: Pela fórmula de Simons

$$(3.1) \quad \frac{1}{2} \Delta S = S(4 - S) - H^2 + H f_3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Quando H e S forem constantes, calculando o Laplaciano de f_3 , teremos:

$$(3.2) \quad -H \Delta f_3 = \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

e usando

$$(3.3) \quad f_4 = -H^2 S + \frac{H^4}{8} + H f_3 + \frac{S^2}{2},$$

$$(3.4) \quad \Delta f_4 = \frac{4}{3} H \Delta f_3 = -\frac{4}{3} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Então,

$$(3.5) \quad -\frac{H}{4} \Delta f_3 = \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = -\frac{3H}{4} (4 - S) f_3 + \frac{3}{4} H^2 S - \frac{3}{2} H \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

Então,

$$(3.6) \quad \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \frac{3}{4} H S f_3 - 3 H f_3 - \frac{3}{4} H^2 f_4 + \frac{3}{4} H^2 S - \frac{3}{2} H \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2.$$

Introduzindo os autovalores de ϕ : $\mu_i = \lambda_i - \frac{H}{4}$, teremos

$$(3.7) \quad \lambda_i = \left(\frac{H}{4} - \mu_i \right)$$

e

$$f_4 = -H^2 S + \frac{H^4}{8} + H f_3 + \frac{S^2}{2},$$

em (3.6), teremos

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= -\frac{3H}{2} \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 - \frac{3H^2}{8} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \frac{3}{4} H^2 S + \left(\frac{3}{4} S - \frac{3}{4} H^2 - 3 \right) H f_3 \\ &\quad - \frac{3}{4} H^2 \left(-H^2 S + \frac{H^4}{8} + \frac{S^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Como

$$H f_3 = S(4 - S) + H^2 - \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2,$$

substituindo em (3.8), teremos:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= -\frac{3H}{2} \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 - \left(\frac{3}{4} S - \frac{3H^2}{8} - 3 \right) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} S^3 - \left(3 + \frac{9}{8} H^2 \right) S^2 + \left(\frac{3H^4}{4} - \frac{9}{2} H^2 + 12 \right) S + \left(-\frac{3}{4} H^4 - 3H^2 - \frac{3}{32} H^6 \right) \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$(3.10) \quad \frac{1}{4} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = -\frac{3H}{2} \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 - \left(\frac{3}{4} S - 3 - \frac{3}{8} H^2 \right) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + G(H, S)$$

onde

$$(3.11) \quad G(H, S) = \frac{3}{4} S^3 + \left(-\frac{9}{8} H^2 - 3 \right) S^2 + \left(\frac{3}{4} H^4 - \frac{9}{4} H^2 - 12 \right) S + \left(-\frac{3}{32} H^6 - \frac{3}{4} H^4 - 3H^2 \right)$$

(ii) A Prova de (ii) é análoga a prova encontrada em [Che2 Lema 1, (ii) pg. 127]. Utiliza-se (i) e o laplaciano de f_4 , e expressões para f_4 e f_3 abaixo.

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Delta f_4 &= 4(n - S)f_4 + (8A + 4B) + 4Hf_5 - 4Hf_3 \\ f_4 &= -H^2 S + \frac{H^4}{8} + Hf_3 + \frac{S^2}{2} \\ f_5 &= (5Sf_3 + 5H^2 f_3 + H^5 - 5H^3 S)/8 \end{aligned}$$

Prova do Teorema: Se $f_3 = \text{cte}$, então f_4 é constante por (3.12), então M^4 é uma hipersuperfície em $S^5(1)$ com curvaturas principais constantes, logo isoparamétrica. Como $S_2^+ < S \leq S_1^+$, M^4 deve ter duas curvaturas principais distintas, logo por Cartan [Ca], $S = S_1^+$. Logo, localmente $M^4 = S^1 \times S^3$.

Suponha $f_3 \neq \text{cte}$. Desde que S é constante, f_3 , $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$ e $\sum_{ijkl} h_{ijkl}^2$ são limitadas (da fórmula de Simons e do Lema (ii)) e a curvatura de Ricci é limitada inferiormente pois H e S são constantes. Seja $F = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$. Podemos aplicar o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau a F . Portanto existe uma sequência $\{p_m\} \in M$, tal que

$$(3.13) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F(p_m) = \inf F, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla F(p_m)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \Delta F(p_m) \geq 0$$

Como

$$(3.14) \quad \tilde{f}_3 = \frac{3HS}{4} - \frac{H^3}{8} - f_3$$

e

$$(3.15) \quad -Hf_3 = S(4 - S) - H^2 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$$

De (3.10) e (3.11),

$$(3.16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f_3(p_m) = \sup f_3 \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \nabla f_3 = 0 \quad (H > 0)$$

Logo,

$$(3.17) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) = \inf f_3, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla \tilde{f}_3| = 0$$

Se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) = (1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2},$$

então

$$\tilde{f}_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (S - H^2/4)^{3/2}$$

Portanto, $\tilde{f}_3$ constante. Contradição!

Logo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) < (1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2}.$$

Mostraremos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) = -(1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2}$$

De fato se,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) > -(1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2},$$

então:

$$(3.18) \quad \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) \right| < (1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2}$$

Como λ_i , h_{ijk} e h_{ijkl} são limitadas, pois $S = \text{cte}$, podemos supor

$$(3.19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_i(p_m) = \dot{\lambda}_i$$

$$(3.20) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijk}(p_m) = \dot{h}_{ijk}$$

$$(3.21) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijkl}(p_m) = \dot{h}_{ijkl}.$$

Tomando uma subsequência de $\{p_m\}$ se necessário

$$(3.22) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_i(p_m) = \lambda_i - \frac{H}{4} = \dot{\mu}_i$$

Temos,

$$\sum_i \dot{\mu}_i = 0,$$

$$(3.23) \quad \sum_i (\dot{\mu}_i)^2 = \left(S - \frac{H^2}{4}\right)$$

$$\sum_i (\dot{\mu}_i)^3 < (1/\sqrt{3}) \cdot \left(S - \frac{H^2}{4}\right)^{3/2}$$

De

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad \sum_i (\mu_i)^2 = \left(S - \frac{H^2}{4}\right),$$

obtemos

$$(3.24) \quad \sum_i h_{iik} = 0$$

$$(3.25) \quad \sum_i \mu_i h_{iik} = 0$$

De

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijk}(p_m) = \dot{h}_{ijk},$$

teremos

$$(3.26) \quad \sum_i h_{iik} = 0$$

e de

$$\sum_i (\mu_i)^2 = \left(S - \frac{H^2}{4} \right),$$

temos

$$(3.27) \quad \sum_i \dot{\mu}_i \dot{h}_{iik} = 0.$$

De (3.3),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla \tilde{f}_3| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum \left(\sum_i \mu_i \cdot h_{iik} \right)^2 = 0$$

Portanto,

$$(3.28) \quad \sum_i \dot{\mu}_i^2 \cdot \dot{h}_{iik} = 0$$

Como $f_4 = -H^2 S + \frac{H^4}{8} + H f_3 + \frac{S^2}{2}$ e H e S são constantes, $\nabla f_4 = H \nabla f_3$ e $\nabla \tilde{f}_3 = \nabla f_3$.

Logo $\nabla f_4 = \nabla \tilde{f}_3 \cdot H$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} f_4(p_m) = \sup f_4$

$$(3.29) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_4| = 0 \quad (H > 0)$$

Como, $\tilde{f}_4 = f_4 + H f_3 + \frac{3}{8} H^2 S + \frac{1025}{64} H^4$, teremos

$$(3.30) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla \tilde{f}_4| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_4| + H \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_3| = 2H \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_3| = 0$$

Logo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla \tilde{f}_4| = \lim \sum_k \left(\sum_i \dot{\mu}_i^3 \cdot \dot{h}_{iik} \right)^2 = 0$$

e

$$(3.31) \quad \sum_i \dot{\mu}_i^3 \cdot \dot{h}_{iik} = 0$$

Desde que μ_i são distintos.

De (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) e (3.18) temos $\dot{h}_{iik} = 0$ para cada i e k .

Como

$$(3.32) \quad \frac{1}{4}\Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = -\frac{3H}{2} \cdot \sum \mu_i \cdot h_{ijk}^2 - \left(\frac{3}{4}S - \frac{3}{8}H^2 - 3\right) \cdot \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + G(H, S)$$

onde

$$G(H, S) = \frac{3}{4}S^3 + \left(-\frac{9}{8}H^2 - 6\right) \cdot S^2 + \left(\frac{3}{4}H^4 - \frac{9}{2}H^2 - 12\right) \cdot S + \left(-\frac{3}{32}H^6 - \frac{3}{4}H^4 - 3H^2\right).$$

Passando ao limite

$$(3.33) \quad \left(\frac{3}{4}S - \frac{3}{8}H^2 - 3\right) \cdot \sum_{i,j,k} \dot{h}_{ijk}^2 \leq -\frac{3H}{2} \cdot \sum \dot{\mu}_i \cdot \dot{h}_{iik}^2 + G(H, S)$$

e do Lema (ii)

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \dot{h}_{ijkl}^2 &= -\frac{3}{2} \cdot \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \cdot (\dot{\mu}_i + \dot{\mu}_j + \dot{\mu}_k)^2 + \\ &+ 10H \cdot \sum \dot{\mu}_i \cdot h_{ijk}^2 \cdot \left(\frac{3}{4}S - \frac{3}{8}H^2 - 3\right) \cdot \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + G(H, S). \end{aligned}$$

De $\dot{h}_{iik}^2 = 0$ e $\sum_i \dot{\mu}_i = 0$, temos para cada i e k

$$(3.35) \quad \sum_{i,j,k} (\dot{\mu}_i + \dot{\mu}_j + \dot{\mu}_k)^2 \cdot h_{ijk}^2 = 0, \quad \sum_{i,j,k} \dot{\mu}_i \cdot \dot{h}_{ijk}^2 = 0.$$

Por outro lado,

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq 3 \cdot \sum_{i \neq j} h_{ijij}^2 = 3 \cdot \sum_{i \neq j} (h_{ijij} - (1/2) \cdot t_{ij})^2 + \frac{3}{4} \sum_{i \neq j} t_{ij}^2$$

onde $t_{ij}^2 = (h_{ijij} - h_{jiij})^2 = (\lambda_i - \lambda_j)^2 \cdot 1 + \lambda_i \cdot \lambda_j$. Portanto

$$(3.36) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq (3/4) \cdot \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \cdot (1 + \lambda_i \cdot \lambda_j) > 0$$

desde que por (3.18) $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ e $\dot{\lambda}_4$ são distintos.

De (3.30), (3.32) e de (3.20) temos que:

$$(3.37) \quad \left(-\frac{3}{4}S - \frac{3}{8}H^2 - 3 \right) \cdot \sum_{i,j,k} \dot{h}_{ijk}^2 \leq G(H, S)$$

De (3.31) e (3.32)

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = \left(\frac{3}{4}S - \frac{3}{8}H^2 - 3 \right) \cdot \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + G(H, S).$$

Usando (3.35) em (3.34)

$$(3.38) \quad \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \leq 2G(H, S).$$

Se

$$S_2 = \frac{H^2}{2} + 4 < S \leq S_1^+ = \frac{2}{3}H^2 + \frac{H^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{H^2}{9} + \frac{2}{3}} + 4$$

então $G(H, S) \leq 0$.

Logo, $\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \leq 0$. Contradição com (3.33). Portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) = -(1/\sqrt{3}) \cdot (S - H^2/4)^{3/2}.$$

De $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = S \cdot (S - 4) + H^2 - H f_3$, passando ao limite teremos

$$\sum_{i,j,k} \dot{h}_{ijk}^2 = S \cdot (S - 4) + H^2 - H \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} f_3(p_m).$$

Como

$$\tilde{f}_3 = -f_3 - \frac{3HS}{4} - \frac{2H^3}{16} = -f_3 - \frac{3}{4}HS - \frac{1}{8}H^3$$

teremos

$$(3.39) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f_3(p_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_3(p_m) + \frac{3}{4}HS + \frac{H^3}{8}$$

Logo,

$$(3.40) \quad \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = S \cdot (S - 4) + H^2 - H \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(S - \frac{H^2}{4} \right)^{3/2} + \frac{3}{4}HS + \frac{1}{8}H^3 \right).$$

Portanto, usando a fatoração encontrada em [Xu, pg. 402] teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= S(S - 4) + H^2 - \frac{H}{\sqrt{3}} \cdot \left(S - \frac{H^2}{4} \right) - \frac{3}{4}H^2S - \frac{1}{8}H^4 \\ &= \left(S - \frac{H^2}{4} \right) \cdot \left(\sqrt{S - \frac{H^2}{4}} - \frac{H}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\sqrt{12H^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{S - \frac{H^2}{4}} - \frac{H}{2\sqrt{3}} + \sqrt{12H^2 + 16} \right) \end{aligned}$$

Se $S > \left(\frac{H^2}{2} + 4 \right)$, então $\left(S - \frac{H^2}{4} \right) > 0$ e $\left(\sqrt{S - \frac{H^2}{4}} - \frac{H}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{3H^2 + 4} \right) > 0$. Logo, por (3.40)

$$S \geq \left(\frac{2}{3}H^2 + \frac{H^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{H^2}{9} + \frac{4}{3}} + 4 \right).$$

Portanto, $S = S_1^+$.

Capítulo 4

Hipersuperfícies completas n -dimensionais com curvatura média constante e curvatura escalar constante em S^{n+1}

Neste capítulo usaremos o Princípio do Máximo Generalizado de Omori e Yau para provarmos o seguinte teorema:

Teorema: *Seja $M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície completa, imersa na esfera $(n+1)$ -dimensional com curvatura média constante H e $S = \|A\|^2$ constante, onde $S_1^- \leq S < S_2^-$ onde*

$$S_2^- = n + \left\{ \frac{nH^2}{2(n-2)} - \frac{(4-n)}{2(n-2)} H \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{H^2}{2(n-2)}} \right\}$$

e

$$S_1^- = n + \left\{ nH^2 - \frac{(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{H^4 + 4(n-1)H^2} \right\}.$$

Então, $S = S_1^-$ e portanto M^n é localmente $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$.

Além disso, usando o resultado provado por H. Alencar e M. do Carmo [AC, pg. 1224], mostra-se que $S_0 \leq S \leq S_1^-$, então $S = S_0$ ou $S = S_1^-$, onde $S_0 = \frac{H^2}{n}$ e

$$S_1^- = n + \left\{ nH^2 - \frac{(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{H^4 + 4(n-1)H^2} \right\}.$$

Seja $\mu_i = (\lambda_i - \frac{H}{n})$.

Sejam

$$(4.1) \quad \tilde{f}_2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \left(S - \frac{H^2}{n} \right)$$

$$(4.2) \quad \tilde{f}_3 = \mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 = f_3 - HS + \frac{2}{n^2}H^3.$$

Precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.1: *Seja $M^n \rightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície completa com curvatura média constante H . Se S for constante, temos:*

$$(i) \quad |\nabla h|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = Hf_3 - S^2 + (H^2 - n)S - H^2 - \frac{2}{n}H^4.$$

$$(ii) \quad |\nabla^2 h|^2 = (n-1)H\Delta f_3 - \frac{3}{(n-1)} \sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 - \frac{30H}{n} \sum_{i,j,k} \mu_i + 4G(H, S)$$

onde

$$G(H, S) = \frac{5}{2n}H^6 - \frac{5}{2n}HS - \frac{1}{2n}H^4S - \frac{S^2}{2} + H^2S^2 + \frac{H^4}{2} + \frac{nS^2}{2} - \frac{3}{2} \left(S - \frac{4}{n}H^2 - n \right).$$

Prova: A prova de (i) segue da equação de Simons, substituindo $\tilde{f}_3 = f_3 - HS + \frac{2}{n^2}H^3$.

(ii) De $\nabla S = 0$ e da Equação (4.2)

$$(4.3) \quad |\nabla^2 h|^2 = \frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 - (-S + (2n+3))|\nabla h|^2 - 3HC + 3(A+2B)$$

onde

$$C = \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2, \quad A = \sum_{i,j,k} \lambda_i^2 h_{ijk}^2 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j h_{ijk}^2.$$

Substituindo $\lambda_i = \mu_i + \frac{H}{n}$ nas expressões A, B e C

$$(4.4) \quad C = \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 + \frac{H}{n} |\nabla h|^2$$

$$(4.5) \quad A + 2B = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 + \frac{6H}{n} \sum \mu_i h_{ijk}^2 + \frac{3H^2}{n^2} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Por outro lado, das relações (4.3) e

$$f_4 = \frac{H^4}{2n} + \frac{4}{n} H f_3 + \frac{1}{2} S^4 - H^2 S$$

podemos expressar a a função C em termos de f_3 :

$$6C = \Delta f_3 - 3 \left(S + \frac{12H^2}{n} - n \right) f_3 + \frac{3}{2} H S^2 + 3H \left(\frac{H^4}{2n} - H^2 S \right) - 3HS.$$

Desta equação combinada com (4.1), $|\nabla h|^2 = S(n - S) - H f_3 + H^2$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} 2HC = & \frac{1}{3} \Delta |\nabla h|^2 + \frac{1}{3} \left(S - \frac{4}{n} H^2 - n \right) |\nabla h|^2 + \left(S - \frac{4}{n} H^2 - n \right) (S(S - n) + H^2) \\ & + \frac{1}{2} H^2 S^2 - H^2(1 + H^2)S + \frac{H^6}{2n}. \end{aligned}$$

Da Equação (4.8) combinada com

$$f_4 = \frac{H^4}{2n} + \frac{4}{n} H f_3 + \frac{1}{2} S^4 - H^2 S \quad \text{e} \quad f_5 = \frac{5}{2n} (S + H^2) f_3 + \frac{1}{2n} H^5 - \frac{5}{2n} H^3 S$$

e

$$|\nabla h|^2 = S(n - S) - H f_3 + H^2$$

teremos

$$\begin{aligned} 2A + B = & \frac{1}{3} \Delta |\nabla h|^2 - \frac{1}{2n} (-3S + 5H^2 + 8n) |\nabla h|^2 \\ & + \frac{1}{2n} (-3S + 5H^2 + 8n) (H^2 - S(S - n)) \\ & + \frac{5}{2n} H^6 - \frac{5}{2n} H S - \frac{H^4 S}{2n} - \frac{S^3}{2} + H^2 S^2 + \frac{H^4}{2} + \frac{n S^2}{2} + n H^2 S. \end{aligned}$$

Das expressões anteriores para $A + 2B$ e $(2A + B)$ obtemos

$$(4.7) \quad \begin{aligned} 3(A - 2B) = & \frac{4}{n} \Delta |\nabla h|^2 - \frac{4}{2n} (-3S + 5H^2 + 8n) - \frac{15H^2}{n^2} |\nabla h|^2 \\ & - \frac{30H}{n} \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 - \frac{3}{(n-1)} \sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 - 4G(H, S) \end{aligned}$$

onde

$$G(H, S) = 4 \left(\frac{5}{2n} H^6 - \frac{5}{2n} HS - \frac{1}{2n} H^4 S - \frac{S^2}{2} + H^2 S^2 + \frac{H^4}{2} + \frac{nS^2}{2} + nH^2 S \right) - \frac{3}{2} \left(S - \frac{4}{n} H^2 - n \right).$$

De $|\nabla^2 h|$ de (4.3), combinada com (4.4), (4.6) e (4.7) obtemos

$$|\nabla^2 h|^2 = - \left(\frac{1}{(n-1)} \right) H \Delta f_3 - \frac{3}{(n-1)} \sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 + \frac{30H}{n} \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 + 4G(H, S)$$

Lema 4.2 (Princípio do máximo de Omori-Yau): *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Seja F uma função C^2 , limitada inferiormente em M^n , então para cada $\varepsilon > 0$ existe um ponto $p \in M$, tal que*

$$F(p) < \inf F + \varepsilon, \quad |\nabla F|(p) < \varepsilon, \quad \Delta F(p) > -\varepsilon.$$

Lema 4.3: *Seja $M^n \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície completa com curvatura média constante $H = \frac{h}{n}$ e curvatura escalar constante R . Seja $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ e $\tilde{f}_3 = f_3 - HS + \frac{2}{n^2} H^3$. Então, S é constante e $\tilde{f}_3$ satisfaz:*

$$|\tilde{f}_3| \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}.$$

Quando M^3 não for totalmente umbílica,

$$\tilde{f}_3 = \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}, \text{ se e somente se, } M^n \text{ for localmente } S^{n-1}(c_1) \times S^1(c_2)$$

e

$$\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\mu_n = \mp \frac{(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova: Como $R = n(n-1) - H^2 + S$ e R é constante, S é constante. Para provar a segunda parte precisaremos encontrar o máximo e o mínimo para $\tilde{f}_3$ sujeitas às restrições $\tilde{f}_1 = 0$ e $\tilde{f}_2 = S - \frac{H^2}{n}$ constante. Usando a desigualdade de Okumura [AC, pg. 1225]

$$(4.8) \quad -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} \leq \tilde{f}_3 \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$$

e a igualdade ocorre no lado direito se, e somente se,

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \mu_n = \frac{(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Logo, $\tilde{f}_3 \equiv \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{1/2} \neq 0$ se, e somente se, M^n possui duas curvaturas principais distintas.

Prova do Teorema: Desde que M^3 não é totalmente umbílica, pois $S_1^- \leq S < S_2^-$, pelo Lema 4.3 é suficiente provar que $\tilde{f}_3 \equiv \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$. Suponhamos que $\tilde{f}_3 \neq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$. Observamos que $\tilde{f}_3$ é diferenciável e limitada inferiormente. Pela equação de Gauss a curvatura de Ricci de M^n é limitada inferiormente. Podemos então aplicar o Lema 4.2 a $\tilde{f}_3$. Seja $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} - \inf \tilde{f}_3$. Portanto, pelo Lema 4.2 existe $p \in M^n$, tal que

$$(i) \quad \tilde{f}_3(p) < \inf \tilde{f}_3 + \varepsilon < \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2};$$

$$(ii) \quad |\nabla \tilde{f}_3(p)| < \varepsilon, \quad \Delta \tilde{f}_3(p) > -\varepsilon.$$

Dividiremos agora a prova em dois casos:

$$(I) \text{ Caso 1: } \inf \tilde{f}_3 = -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2};$$

$$(II) \text{ Caso 2: } \inf \tilde{f}_3 > -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}.$$

No Caso 1, usando (i) do Lema 4.1,

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = H\tilde{f}_3 - S^2 + (H^2 + n)S - H^2 - \frac{2}{n^2}H^4 \\ (4.9) \quad &= H\tilde{f}_3 - S^2 + (H^2 + n)S - H^2 - \frac{2}{n^2}H^4. \end{aligned}$$

Em p , $\tilde{f}_3(p) < -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} + \varepsilon < \varepsilon$. Logo,

$$(4.10) \quad |\nabla h|^2(p) < H\varepsilon - S^2 + (H^2 + n)S - H^2 - \frac{2}{n^2}H^4 < H\varepsilon + M,$$

onde

$$\begin{aligned} M &= -\left(S - \frac{H^2}{n} \right) \left[\left(\sqrt{S - \frac{H^2}{n}} + \frac{n}{(n-1)\sqrt{n(n-1)}} \left(\frac{H}{n} - \sqrt{H^2 + 8} \right) \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{S - \frac{H^2}{n}} + \frac{n}{(n-1)\sqrt{n(n-1)}} \left(\frac{H}{n} + \sqrt{H^2 + 8} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $S_1^- \leq S < S_2^-$ teremos $M < 0$, tomando $\varepsilon = \min \left\{ \frac{|M|}{H}, \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} - \inf \tilde{f}_3 \right\}$,

temos $|\nabla h|^2(p) < H\varepsilon$. Fazendo ε suficientemente pequeno, existe $p \in M$ tal que $|\nabla h|^2(p) <$

0. Contradição.

Caso 2: Suponha $\inf \tilde{f}_3 > -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$.

Usando (ii) Lema 4.1:

$$|\nabla^2 h|^2 = -(n-4) \cdot \frac{H}{n} \Delta \tilde{f}_3 + \frac{(n+2)}{n} \sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 - (30H/n) \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 + G(H, S)$$

Como

$$(4.11) \quad \tilde{f}_3(p) < \inf \tilde{f}_3 + \varepsilon < \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}$$

$$(4.12) \quad \inf \tilde{f}_3 > -\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}, \quad |\tilde{f}_3|(p) < \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2}.$$

Devido H e S serem constante e μ_i serem distintos, podemos então encontrar constantes positivas R_1 e R_2 tal que:

$$(4.13) \quad \sum_{i,j,k} \mu_i h_{ijk}^2 < R_1 \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \left[\sum_{i,j,k} (\mu_i + \mu_j + \mu_k)^2 h_{ijk}^2 \right] < R_2 \varepsilon^2.$$

Portanto, em p ,

$$(4.14) \quad |\nabla^2 h|^2(p) < \frac{H}{2} \varepsilon + \left(CHR_1 + \frac{(n+2)}{n} R_2 \right) \varepsilon^2 + G(H, S)$$

Como, $S_1^- \leq S < S_2^-$

$$(4.15) \quad |\nabla^2 h|^2(p) < \frac{H}{2} \varepsilon + \left(CHR_1 + \frac{(n+2)}{n} R_2 \right) \varepsilon^2.$$

Fazendo ε suficientemente pequeno, encontraremos um ponto $p \in M$, $|\nabla^2 h|^2(p) < 0$.

Contradição. Logo,

$$\tilde{f}_3 \equiv \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(S - \frac{H^2}{n} \right)^{3/2} = \text{cte.}$$

Portanto, $S = S_1^-$.

Consideraremos agora o caso $S_0 < S < S_1^-$

Seja $M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície completa com curvatura média constante e curvatura escalar constante. Então, se $S_0 \leq S \leq S_1^-$, $S = S_0$ ou $S = S_1^-$.

A prova baseia-se em H. Alencar e Do Carmo [AC]. Como $\|\phi\|^2 = S - \frac{H^2}{n}$, calculando $\Delta\|\phi\|^2$, temos [AC, pg. 1225]

$$(4.16) \quad \frac{1}{2}\Delta\|\phi\|^2 = |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n|\phi|^2 + nH^2|\phi|^2 - nHf_3 .$$

Usando o Lema 4.3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\|\phi\|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n(H^2 + 1)|\phi|^2 - \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 \\ &= |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 - \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n(H^2 + 1) \right) . \end{aligned}$$

Como $S_0 \leq S \leq S_1^-$, e $\|\phi\|^2 = S - \frac{H^2}{n} = \text{cte}$,

então, $0 \leq \|\phi\|^2 < B_H$, onde B_H : quadrado da raiz positiva de

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2 + 1).$$

Então,

$$0 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 - \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n(H^2 + 1) \right) \geq 0 .$$

Logo, $|\nabla\phi|^2 \equiv 0$ e ou $|\nabla\phi|^2 = 0$ ou $|\phi|^2 \equiv B_H$.

Portanto ou M^n é totalmente umbílica ou M^n é localmente o $H(r)$ -toro $S^1(\sqrt{1-r}) \times S^{n-1}(r)$.

APÊNDICE

1. Introdução

Uma hipersuperfície M^n imersa na esfera unitária S^{n+1} é dita Dupin se suas curvaturas principais forem constantes ao longo de suas linhas de curvatura.

Se o número de curvaturas principais for constante, M^n é chamada Dupin própria. Estas hipersuperfícies estão intimamente relacionadas com as hipersuperfícies isoparamétricas. Thorbergsson [T] mostrou que a restrição encontrada por Münzner para as hipersuperfícies Isoparamétricas com p curvaturas principais distintas também são válidas para as Hipersuperfícies de Dupin, compactas, próprias, mergulhadas em S^{n+1} , i.e., $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Grove e Halperin [GH] encontraram semelhanças topológicas entre estas duas classes de hipersuperfícies.

Cecil e Ryan [CR] propuseram a seguinte conjectura:

Toda hipersuperfície Dupin Própria, compacta em S^{n+1} é equivalente por uma transformação de Lie e uma hipersuperfície Isoparamétrica. Nos casos $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$ esta conjectura é verdadeira. (para definição de equivalência de Lie ver [P]). Para $p = 4$, foram encontrados contra-exemplos por Miyaoka e Ozawa [MO] somente em S^7 . Pinkall e Thorbergsson [PT], encontraram contra-exemplos para $p=4$. Os contra-exemplos utilizam um invariante de Lie, chamado curvatura de Lie, denotado por Ψ , introduzido por R. Miyaoka [Mi]. No caso $p = 4$ e $p = 6$,

$$\Psi = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

Quando a hipersuperfície Dupin M^n for equivalente de Lie a uma Hipersuperfície Isopa-

ramétrica $\Psi = \frac{1}{2}$.

Thorbergsson [T] também mostrou que no caso de M^n ser Dupin e possuir p curvaturas principais distintas de multiplicidades m_i , se p for par

$$m_1 = m_3 = m_5 = \cdots = m_+ \text{ e } m_2 = m_4 = m_6 = \cdots = m_-$$

e se p for ímpar, $m_1 = m_2 = m_3 = \cdots$. Neste trabalho estaremos interessados em dar respostas parciais a conjectura de Chern para hipersuperfícies Dupin. Isto é, considere-mos a família $\Omega = \{M^n \rightarrow S^{n+1} \text{ hipersuperfície compacta, Dupin, mínima, imersa, com curvatura escalar constante } R\}$.

Seja

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M^n \rightarrow \varphi(M^n) = R_M.$$

Então $\varphi(M)$ é discreto? Ou seja, os possíveis valores que a curvatura Escalar assume são discretos. A resposta é afirmativa para $p = 1, 2, 3, 4$. O caso $p = 4$ é respondido somente quando a dimensão for $n = 4$. Mais precisamente provaremos os seguintes Teoremas:

Teorema 1: *Seja M^n uma hipersuperfície mínima, Dupin, com curvatura escalar constante imersa em S^{n+1} , com p curvaturas principais distintas $p \in \{1, 2, 3\}$. Então M^n é isoparamétrica e portanto $S \in \{0, n, 2n\}$.*

Quando $p = 3$, o resultado é segue-se de S.Chang [Cha3].

Teorema 2: *Seja M^4 uma hipersuperfície mínima, Dupin, com curvatura escalar constante $R \geq 0$, imersa em S^5 , com 4 curvaturas principais distintas. Então M^4 é isoparamétrica e portanto $S = 8$.*

Teorema 3: *Seja M^n uma hipersuperfície mínima, Dupin, com curvatura escalar constante imersa em $S^{n+1}(1)$*

$$V = \sum_i \left(\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2 \lambda_4 + 2S_1 \lambda_4^2 \right) e_i,$$

um campo vetorial definido em M^n .

Então, se $\operatorname{div} V = 0$, então M^n é isoparamétrica.

Prova do Teorema 1

Seja M^n uma hipersuperfície mínima, Dupin, com curvatura escalar constante, imersa em $S^{n+1}(1)$, de tipo p .

Quando $p = 1$, M^n é totalmente geodésica, logo isoparamétrica e $S = 0$. Quando $p = 2$, teremos $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu$ e $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = \delta$.

Como M^n é Dupin, $d\mu(e_1) = d\mu(e_2) = \dots = d\mu(e_k) = 0$ e $d\delta(e_{k+1}) = \dots = d\delta(e_{n+1}) = 0$.

Como M^n é mínima, $k\mu + (n - k)\delta = 0$, portanto, $kd\mu(e_{k+1}) + (n - k)d\delta(e_{k+1}) = 0$.

Então, $kd\mu(e_{k+1}) = 0$. Portanto, $d\mu(e_{k+1}) = 0$, analogamente $d\mu(e_i) = 0$ para $k + 1 \leq i \leq n$. Logo, $d\lambda_i(e_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, M^n é isoparamétrica e $S = n$.

Quando $p = 3$, R. Miyaoka [Mi2] mostrou que M^n é equivalente de Lie a uma hipersuperfície isoparamétrica. Mostraremos que M^n é isoparamétrica e $S = 2n$.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ as curvaturas principais com multiplicidades $m_1 = m_2 = m_3 = i$. Sem perda de generalidade podemos considerar $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Sejam $1 \leq k \leq i$, $i + 1 \leq k \leq 2i$, $2i + 1 \leq k \leq 3i$. Consideremos as distribuições principais $\mathcal{D}(\lambda_i) = \{X \in T_x M \mid AX = \lambda_i X\}$. Quando $\dim \mathcal{D}(\lambda_i) = m_i = \text{cte}$, então $\mathcal{D}(\lambda_i)$ é uma distribuição involutiva. Seja L_i a folha correspondente a Distribuição $\mathcal{D}(\lambda_i)$.

Como $H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$ e $H = 0$, $dH(e_k) = \sum_i h_{iik} = 0$

$$(1.1) \quad 1(h_{11k} + \dots + h_{iik}) + 1(h_{2i+12i+1k} + \dots + h_{3i3ik}) = 0$$

como $S = \sum_i h_{ii}^2$ é constante, $dS(e_k) = 2 \sum_i \lambda_i h_{iik} = 0$.

Portanto,

$$(1.2) \quad \lambda_1(h_{11k} + h_{22k} + \dots + h_{iik}) + \lambda_2(h_{i+1i+1k} + \dots + h_{2i2ik}) + \lambda_3(h_{2i+12i+1k} + \dots + h_{3i3ik}) = 0.$$

Como M^n é Dupin $d\lambda_i(e_i) = e_i(\lambda_i) = h_{iii} = 0$.

Seja $i + 1 \leq k \leq 2i$, logo, como M^n é Dupin,

$$(1.3) \quad h_{i+1i+1k} + \dots + h_{2i2ik} = 0.$$

Portanto, de (3.1) e (3.2):

$$(1.4) \quad \begin{cases} 1(h_{11k} + \cdots + h_{iik}) + 1(h_{2i+12i+1k} + \cdots + h_{3i3ik}) = 0 \\ \lambda_1(h_{11k} + \cdots + h_{iik}) + \lambda_3(h_{2i+12i+1k} + \cdots + h_{3i3ik}) = 0. \end{cases}$$

Seja $A = \sum_{j=1} h_{jjk}$ e $B = \sum_{l=2i+1}^{3i} h_{llk}$, teremos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \lambda_1 A + \lambda_3 B = 0 \end{cases}. \text{ O Sistema tem solução não-trivial se, e somente se,}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ se e somente se } \lambda_3 = \lambda_1.$$

Portanto, como $\lambda_1 < \lambda_3$, $A = 0$ e $B = 0$, então

$$(1.5) \quad \begin{cases} h_{11k} + \cdots + h_{iik} = 0 \\ h_{2i+12i+1k} + \cdots + h_{3i3ik} = 0. \\ h_{i+1i+1k} + \cdots + h_{2i2ik} = 0 \end{cases}$$

Logo, se $i+1 \leq k \leq 2i$, $h_{iik} = d\lambda_1(e_k) = 0$.

Se $1 \leq k \leq i$, a mesma análise pode ser feita, logo, $h_{iik} = d\lambda_i(e_k) = 0$.

Se $2i+1 \leq k \leq 3i$, $h_{iik} = d\lambda_i(e_k) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_{iil} &= \sum_{l=1}^i h_{iil} = 0 \Rightarrow \Lambda_{ii}^l = 0, \quad i \notin [l] \\ \sum_{i=1}^n h_{iil} &= \sum_{l=(i+1)}^{2i} h_{iil} = 0 \Rightarrow \Lambda_{ii}^l = 0, \quad i \notin [l] \\ \sum_{i=1}^n h_{iil} &= \sum_{l=(2i+1)}^{3i} h_{iil} = 0 \Rightarrow \Lambda_{ii}^l = 0, \quad i \notin [l] \end{aligned}$$

onde

$$\Lambda_{ii}^l = \frac{e_1(\lambda_i)}{(\lambda_i - \lambda_1)}(p), \quad i \neq 1.$$

Logo, M^n é isoparamétrica com 3 curvaturas principais distintas (3PC) e $S = 2n$.

2. A Forma Diferencial Ψ e sua Generalização

Em [AB2] Almeida, S.C. e Brito, F.G.B. introduziram a 2-forma diferencial

$$(2.1) \quad \Psi_0 = (w_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge w_{23}) - (w_{12} \wedge \theta_3 + \theta_1 \wedge w_{32}) + (w_{21} \wedge \theta_3 + \theta_2 \wedge w_{31})$$

e provaram que

$$(2.2) \quad d\Psi_0 = \frac{R}{2} \text{vol} + \sum_{i \in I} w_i \wedge \theta_{i'} \wedge \theta_{i''} = \frac{R}{2} \text{vol} + \sum_{i \in I} \frac{\lambda_{i'}^2 \lambda_{i''}^2 f_i^2}{\gamma^2} \text{vol}$$

onde R é a Curvatura Escalar $\gamma^2 = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$, $f = \text{Traço}(A)$ e $(df = \sum f_i w_i)$ f_i são as componentes de df e vol é a forma de volume de M^3 .

Denotaremos

$$\mu_1 = w_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge w_{23}$$

$$\mu_2 = w_{12} \wedge \theta_3 + \theta_1 \wedge w_{32}$$

$$\mu_3 = w_{21} \wedge \theta_3 + \theta_2 \wedge w_{31}.$$

Portanto, $\Psi_0 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3$.

Podemos portanto, no caso dimensão n definir

$$(2.3) \quad \Psi = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \mu_i.$$

Onde:

$$\mu_n = w_{1n} \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-1} + \theta_1 \wedge w_{2n} \wedge \theta_3 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-1} + \cdots + \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge w_{n-1n}$$

$$\mu_{n-1} = w_{1n-1} \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_n + \theta_1 \wedge w_{2n-1} \wedge \theta_3 \wedge \cdots \wedge \theta_n + \cdots + \theta_1 \wedge \cdots \wedge w_{nn}$$

$$\mu_i = w_{1i} \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_n + \theta_1 \wedge w_{2i} \wedge \cdots \wedge \theta_n + \cdots + \theta_1 \wedge \cdots \wedge w_{nn}$$

$$\mu_1 = w_{1n} \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_n + \theta_1 \wedge w_{2n} \wedge \cdots \wedge \theta_n + \cdots + \theta_1 \wedge \cdots \wedge w_{nn}$$

onde

$$\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\}$$

é um referencial adaptado a imersão, com e_n normal a imersão.

Podemos relacionar a forma Ψ com operadores introduzidos por Cheng e Yau [CY] e com o operador Linearizado L_r utilizado por H. Rosenberg [Ro].

Definindo a r -ésima forma diferencial como

$$(2.4) \quad \Psi_r = \frac{1}{r} \operatorname{div}(h \nabla f_r) = L_r(f_r)$$

onde $f_r = \operatorname{traço}(h^r)$.

No caso $r = 3$, Ψ_3 aparece no artigo de Peng e Terng [PT2]

$$(2.5) \quad \Psi_3 = -\frac{|\nabla S|^2}{4} + S f_4 - f_3^2 - S^2 - (A - 2B) \quad \text{onde} \quad A = \sum_{i,j,k} \lambda_i^2 h_{ijk} \quad \text{e} \quad B = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j h_{ijk}.$$

Consideremos o operador $\square f = (nH\delta_{ij} - h_{ij})f$ e o operador $L_r = \operatorname{div}(P_r \nabla f)$ onde $P_0 = I$, $P_r = IS_r - hP_{r-1}$ e S_r é a r -ésima função simétrica elementar das curvaturas principais.

Podemos então relacionar $\square f_3$, $L_1(f_3)$ e Ψ_3 :

$$(2.6) \quad \square f_3 = \operatorname{div}(HI \nabla f_3) - 3\Psi_3 = L_1(f_3).$$

Observamos que Ψ_3 também pode ser escrita como:

$$\Psi_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)^3 w_{12} \wedge \theta_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)^3 w_{13} \wedge \theta_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^3 w_{23} \wedge \theta_1.$$

Estaremos interessados em calcular $d\Psi$. Calculando $d\mu_i$ e substituindo em $d\Psi$

$$d\Psi = \sum_{i=1} (-1)^{i+1} d\mu_i = \sum_{i \in I} d\mu_i \left(\sum_{k < j, k \neq i, j \neq i} \frac{h_{kki} h_{jji}}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_1)} \right) + \sum_i \operatorname{Ricci}(e_i)$$

3. O Caso 4-Dimensional

Neste parágrafo provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2: *Seja M^4 uma hipersuperfície compacta, mínima, Dupin, com curvatura escalar constante $R \geq 0$, imersa em $S^5(1)$. Então, M^4 é isoparamétrica.*

Como $p = 4$, s.p.g., podemos supor $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$.

Por [T], $m_1 = m_3 = m_- = 1$ e $m_2 = m_4 = m_+ = 1$, pois $\sum_{i=1}^3 m_i = 4$. Logo,

$$(3.1) \quad \sum_{i,k < j, k \neq i, k \neq j} \frac{h_{kki}h_{kkj}}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)} = \frac{h_{112}h_{224}}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ + \frac{h_{224}h_{334}}{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \frac{h_{114}h_{334}}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}.$$

Portanto, como $H = 0$, R é constante e M^n é Dupin:

$$(3.2) \quad 1h_{114} + 1h_{224} + 1h_{334} = 0$$

$$(3.3) \quad \lambda_1 h_{114} + \lambda_2 h_{224} + \lambda_3 h_{334} = 0$$

$$(3.4) \quad h_{111} = h_{222} = h_{333} = h_{444} = 0.$$

De (3.2), $h_{334} = -h_{114} - h_{224}$. Substituindo em (3.3)

$$(3.5) \quad \lambda_1 h_{114} + \lambda_2 h_{224} + \lambda_3 (-h_{114} - h_{224}) = 0$$

$$(3.6) \quad \lambda_1 h_{114} + \lambda_2 h_{224} - \lambda_3 h_{114} - \lambda_3 h_{224} = 0$$

$$(3.7) \quad (\lambda_1 - \lambda_3)h_{114} + (\lambda_2 - \lambda_3)h_{224} = 0$$

Então,

$$h_{224} = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_3)} h_{114}$$

e

$$(3.8) \quad h_{334} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)} h_{114}$$

Substituindo em (5.2)

$$\frac{h_{114}^2(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{h_{114}^2(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{h_{114}^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i,k < j, k \neq i, j \neq i} \frac{h_{kki} h_{jjj}}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)} &= \frac{h_{114}^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{h_{114}^2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ &+ \frac{h_{114}^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$,

$$\left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right\} = I \not\approx 0.$$

Integrando sobre M^n , e usando a hipótese que $R \geq 0$, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d\Psi \\ &= \int_M h_{114}^2 \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right\} \text{vol} \\ &+ \int_M \frac{R}{3} \text{vol} \not\approx 0. \end{aligned}$$

Portanto $h_{114} = 0$. Analogamente, $h_{224} = 0$ e $h_{334} = 0$.

Teremos então:

$$e_j(\lambda_1) = \wedge_{ii}^j(\lambda_i - \lambda_j) = 0, \quad j \notin [i].$$

Portanto,

$$e_4(\lambda_i) = \frac{h_{114}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} = 0, \quad e_4(\lambda_2) = \frac{h_{224}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} = 0, \quad e_4(\lambda_3) = \frac{h_{334}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} = 0.$$

Então M^4 é isoparamétrica.

4. Neste parágrafo provaremos o Teorema 3:

Teorema 3: *Seja M^4 uma hipersuperfície compacta Dupin, mínima, imersa na esfera 5-dimensional. Considere o campo vetorial V . Então, se $\text{div } V = 0$, M^4 é isoparamétrica.*

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2 \lambda_4 + 2S_1 \lambda_4^2 \right) \cdot e_i$$

definido em M^4 .

Prova: Como M^4 é Dupin e mínima,

$$(4.1) \quad \frac{h_{114}}{(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{h_{224}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{h_{334}}{(\lambda_4 - \lambda_3)} = 0.$$

Portanto

$$(4.2) \quad \frac{d\lambda_1(e_4)}{(\lambda_4 - \lambda_1)} = \frac{d(\lambda_1 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)}(e_4) = d\ln(\lambda_1 - \lambda_4)(e_4).$$

$$(4.3) \quad \frac{d\lambda_2(e_4)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} = \frac{d(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_4)}(e_4) = d\ln(\lambda_2 - \lambda_4)(e_4).$$

$$(4.4) \quad \frac{d\lambda_3(e_4)}{(\lambda_4 - \lambda_3)} = \frac{d(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_3 - \lambda_4)}(e_4) = d\ln(\lambda_3 - \lambda_4)(e_4).$$

De (4.2), (4.3) e (4.4)

$$d\ln\{[(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)]\}(e_4) = 0.$$

Calculando

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) &= (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 + \lambda_4^2)(\lambda_3 - \lambda_4) \\ &= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4^2 - \lambda_1\lambda\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4^2 + \lambda_2\lambda_4^2 - \lambda_4^3) \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4^2 - \lambda_4^3) \\ (4.5) \quad &= \left(\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2\lambda_4 + 2(S_1 - \lambda_4)\lambda_4^2 - \lambda_4^3 \right) \\ &= \left(\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2\lambda_4 + 2S_1\lambda_4^2 - 3\lambda_4^3 \right) \end{aligned}$$

Então, teremos

$$d\ln[(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)] = d\ln \left\{ \left[\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2\lambda_4 + 2S_1\lambda_4^2 - 3\lambda_4^3 \right] (e_4) \right\} = 0.$$

onde

$$(4.6) \quad \begin{cases} S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ S_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \end{cases}$$

Considerando o campo V como:

$$(4.7) \quad V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_4}{\lambda_4} - \sigma_2 \lambda_4 + 2S_1 \lambda_4^2 \right) \cdot e_i.$$

Segue-se que se $\operatorname{div} V = 0$, $h_{441} = h_{442} = h_{443} = h_{444} = 0$. Portanto M^4 é isoparamétrica.

5. O Caso 6PC

Seja M^n uma hipersuperfície compacta, mínima, Dupin com 6 curvaturas principais distintas (6PC) imersa na esfera $(n+1)$ -dimensional S^{n+1} . T. Ozawa e R. Miyaoka [MO] mostraram que é possível construir exemplos de hipersuperfícies Dupin próprias que não são equivalentes (por uma transformação de Lie) a uma hipersuperfície isoparamétrica. Os exemplos obtidos estão imersos em S^7 . A pergunta natural é se existem exemplos Dupin, mínima, 6PC com curvatura escalar constante que não sejam isoparamétricas.

Bibliografia

- [A] S.C. Almeida. *Hipersuperfícies 3-dimensionais com curvatura escalar constante não-negativa*. Tese. (DMAT/UFC), 1994.
- [AC] H. Alencar e M. do Carmo. *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*. P.A.M.S. **120** (1994), 1223–1229.
- [AB1] S.C. Almeida e F.G.B. Brito. Minimal hypersurfaces of S^4 with constant Gauss-Kronecker curvature. *Math. Z.*, **195** (1987), 99–107.
- [AB2] S.C. Almeida e F.G.B. Brito. Closed 3-dimensional hypersurface with constant mean curvature and constant scalar curvature. *Duke Math. J.* **61** (1990), 195–206.
- [AB3] S.C. Almeida e F.G.B. Brito. *3-dimensional hypersurfaces of S^4 with constant Gauss-Kronecker curvature*. Preprint (1994). 18p.
- [Be] Bérard, P. *Simon's equation revisited*. Preprint (1994). 8p.
- [Ca] E. Cartan. Sur the familles remarquables d'hypersurfaces isoparametrique dans les espaces sphériques. *Math. Z.*, **45** (1939), 335–367.
- [Cha1] S. Chang. On minimal hypersurfaces with constant scalar curvatures in S^4 . *J. Differential Geometry*, **37** (1993), 523–534.
- [Cha2] S. Chang. A closed hypersurface with constant scalar curvature and mean curvature in S^4 is isoparametric. *Communications in Analysis and Geometry*, vol. 1, n 1 (1993), 71–100.
- [Cha3] S. Chang. On closed hypersurfaces of constant scalar curvatures and mean curvatures in S^{n+1} . *Pacific Journal of Mathematics*, **165** (1994), 67–76.
- [CDK] S.S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi. Minimal submanifolds of the sphere with second fundamental form of constant length. *Functional Analysis and Related Fields*, 57–75, Ed. Browder, Springer (1970).
- [Che1] Q.M. Cheng. Complete minimal hypersurfaces in $S^4(1)$ with constant scalar curvature. *Osaka J. Math.*, **27** (1990), 885–892.

- [Che2] Q.M. Cheng. Complete hypersurfaces in a 4-dimensional unit sphere with constant mean curvature. *Yokohama Mathematical Journal*, **39** (1992) 125–139.
- [CR] T.E. Cecil, P.J. Ryan. Tight and Taut immersions of manifolds, Res. Notes. Math. **107**, Pitman, Boston 1985.
- [CY] S.Y. Cheng and S.T. Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.* **225** (1977), 195–204.
- [GH] Grove and Halperin. Dupin Hypersurfaces, group actions and double mapping cylinder. *J. Differential Geom.* **26** (1987), 429–457.
- [L] H.B. Lawson. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.*, **89**, 187–197 (1969).
- [M] Munzner, H.F. Isoparametric Hyperflächen in Sphären I, *Math. Ann.*, **251** (1980), 57–71.
- [Mi] R. Miyaoka, Dupin hypersurfaces and a Lie invariant, *Kodai Math J*, **12** (1989), 228–256.
- [MO] R. Miyaoka and T. Ozawa, Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan conjecture. *Geometry of Manifolds* (Shiohama, K. ed) Academic Press, 1989, 181–189.
- [NS] K. Nomizu and B. Smith. Formula of Simons type and hypersurfaces with constant mean curvature. *J. Diff. Geom.*, **3**, (1969), 367–377.
- [P] U. Pinkall, Dupin Hypersurfaces. *Math. Ann.* **270**, (1985), 427–440.
- [PiT] Pinkall and Thorbergsson. Deformations of Dupin Hypersurfaces. *P.A.M.S.*, **107**, n.4 (1989), 1037–1043.
- [PT1] C.K. Peng e C.L. Terng. Minimal hypersurfaces of sphere with constant scalar curvature. *Ann. Math. Stud.*, **103** (1983), 177–198.
- [PT2] Peng, C.K. e Terng, C.L. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres, *Math. Ann.*, **266** (1983), 105–113.
- [R] J. Ramanathan. Minimal hypersurfaces in S^4 with vanishing Gauss-Kronecker curvature. *Math. Z.*, **205** (1990), 645–658.

- [Ro] H. Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in Space Forms, *Bull. Sci. Math.* 2a. Serie, **117**, (1993), 211–239.
- [S] J. Simons. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, **88** (1968), 62–105.
- [T] G. Thorbergsson, Dupin Hypersurfaces, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 493–498.
- [Y] S.T. Yau. Seminar on Differential Geometry. *Analls of Math. Studies*, Princenton no. **102**, (1982), p. 693.
- [YC] H. Yang and Q.M. Cheng. An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere. *Manuscripta Math.*, **84** (1994), 89–100.
- [Xu] H. Xu. A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature in a sphere. *Arch. Math.*, vol. **61** (1993), 489–496.