SISTEMAS AUTO-REFERENTES E O

PARADOXO DE RUSSELL

AMADEO PETER HILLER

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE "DOUTOR EM MATEMÁ
TICA".

Orientador: PROF.DR NEWTON C.A.DA COSTA

São Paulo, agosto de 1980

revisada em novembro de 1981

Datilografia de Margaret Miller Robertson

P R E F Á C I O

O primeiro capítulo deste trabalho é na realidade uma longa introdução. Por esta razão vamos, aqui, fazer apenas alguns comentários pessoais.

Nosso interesse pelo assunto origina-se numa crença de não ser possível que uma atividade tão metódica e formalizada quanto a atividade matemática (mesmo a nível intuitivo), não seja descritível em termos de algum modelo matemático. Os modelos, isto é, as teorias matemáticas necessárias a este fim deverão, evidentemente, descrever a si próprias. É aí que reside a grande dificuldade do projeto, pois "sa-be-se" que o Paradoxo de Russell e os teoremas de Gödel e Tarski "pro-vam" a impossibilidade de uma tal teoria existir e ser consistente.

As tentativas iniciais que fizemos para atacar o problema situaram-se no campo da Teoria da Prova. Com a visão que fomos adquirindo a partir deste ponto de vista convencemo-nos que a saída para o problema deverá estar em uma análise profunda do uso da linguagem. Disto ainda estamos convencidos. Pensávamos também que o mais eficiente e único meio de atingir a meta estaria na Teoria da Prova, pura. Felizmente, em 1977, começamos a discutir estas idéias com o colega Prof. Jacob Zimbarb, que se interessara por idéias semelhantes partindo de problemas técnicos dentro da Teoria dos Conjuntos. Na época profetizamos que o projeto de chegar a uma teoria como desejávamos a partir dos conjuntos não poderia suceder senão após sua edificação com métodos da Teoria da Prova.

Nesta tese pretendemos ter dado um primeiro passo no projeto: o desenvolvimento de um sistema "imune" ao Paradoxo de Russell. Admiti-

mos, porém, nossa derrota em relação à profecia acima pois a solução en contra-se totalmente integrada na metodologia conjuntista. As idéias que apresentaremos estão profundamente influenciadas pelo Prof. Zimbarg. O próprio Axioma (5), sem o qual nosso sistema seria muito fraco, nos foi sugerido e ensinado pelo colega. Enfim, tudo que aqui apresentamos moldou-se em nossas discussões. Agradecemos, portanto, o estímulo, a paciência e a amizade e desejamos poder, no futuro, continuar a colaboração que esperamos seja frutífera para ambos como aqui foi para nós.

Queremos agradecer a nossos colegas que muito nos ajudaram no desenvolver das idéias aqui apresentadas. Agradecemos em especial ao nosso orientador, Prof. Newton C.A. da Costa, pela ajuda e constante encorajamento que nos tem oferecido.

Finalmente queremos registrar nosso voto de gratidão e louvor à Biblioteca do Instituto de Matemática, na pessoa de sua chefe D. Maria Alice Fernandes Carreira. Sem o acesso a uma boa biblioteca, e isto se refere tanto ao pessoal e à organização quanto aos livros em si, este trabalho não teria existido.

Amadeo Peter Hiller

São Paulo, 18 de junho de 1980

INDICE

Introdução (Prefácio)	I
Indice	III
CAPITULO I - MOTIVAÇÃO	
§1 - Classes e Conjuntos. Frege	1
2 - O Paradoxo de Russell	8
3 - O Sistema $(\mathcal{C}, *)$	12
4 - Futuras Direções	13
CAPITULO II - UM SISTEMA AUTO-REFERENTE	
§1 - Generalidades	15
2 - A Estrutura $(\mathcal{C}, *)$	18
- Regras e Axiomas	18/19
- Tabela de Axiomas	29
3 - Modelos de $(\mathcal{C}, *)$	30
4 - Algumas Classes de $(\mathcal{C}, *)$	33
CAPITULO III - $(\mathcal{C}, *)$ E OUTROS SISTEMAS DA TEORIA DOS CONJUNTOS	
§1 - Conjuntos em $(\mathcal{C}, *)$	37
2 - O Sistema de Ackermann	41
3 - O Sistema de Zermelo-Fraenkel	43
4 - Sistemas de Conjuntos e Classes	47
5 - Um Modelo Interno para ZF	50
6 - A Teoria das Categorias	57
CAPITULO IV - ALGUNS RESULTADOS E PROBLEMAS	
§1 - Modelos Internos	58
2 - Definições de Verdade	59
3 - "New Foundations" e o Axioma da Escolha	60
4 - Outros Sistemas	61
NOTAÇÕES	63
BIBLIOGRAFIA	64
RESUMO	67
ABSTRACT	68

CAPITULO I

MOTIVAÇÃO

Na presente tese pretendemos mostrar que é possível criar uma teoria matemática para falar de classes, formulada em uma linguagem cujos próprios predicados sejam representáveis por classes, i.e., por termos da linguagem e, condição essencial, a teoria suficientemente forte para conter Zermelo - Fraenkel (ZF).

O projeto de fazer esta teoria nasceu de desejo de desenvolver um modelo matemático para estudar a própria atividade matemática. Obviamente, um intuito de perseguir tal quimera não recomenda muito a sanidade ou modéstia de quem o empreita. A razão de mencionarmos o fato é que a análise das noções de classe e conjunto a partir da qual obtemos nossa teoria está profundamente influenciada por este objetivo. Queremos, neste capítulo, dar ao leitor uma idéia de como situamos o trabalho todo.

§1 - CLASSES E CONJUNTOS, FREGE

Todo matemático está acostumado ao método de reduzir entes como os números naturais, os números reais, espaços vectoriais, funções e outros a conjuntos. Quase sempre, o matemático devidamente estimulado é capaz de traduzir a teoria que está estudando à linguagem de conjuntos e até imergi-la

em alguma teoria formal de conjuntos como ZF.

Esta imersão, além de formar uma linguagem universal, é usada para "garantir a existência" de certas construções. Por exemplo, para demonstrar que uma definição não é totalmente sem sentido, costuma-se traduzir a definição para a linguagem de conjuntos e demonstrar, em geral informalmente em ZF, que existe um conjunto que verifica a definição.

O procedimento que descrevemos é tão comum que chega a ser um ato subconsciente. Entre as teorias que não se prestam a esta redução encontram-se a Teoria das Categorias e a própria Teoria dos Conjuntos.

Qual a razão deste grande sucesso da Teoria dos Conjuntos como base para outras teorias e qual a razão das exceções ? Grande parte deste capítulo será dedicada a sugerir uma resposta a esta questão. Começaremos com uma observação histórica.

A Teoria dos Conjuntos, como toda teoria matemática sensata, desenvolveu-se sob a força combinada de duas tendências diferentes: uma, puramente matemática, visa a solução de problemas específicos de formalizações da Teoria. Esta tendência trata os conjuntos como objetos matemáticos quaisquer. A segunda vê nos conjuntos um modelo de uma situação extra-matemática e procura principalmente adequar os conjuntos a esta situação e entender melhor a situação através dos conjuntos. O problema, a situação, que se dese-

ja modelar com conjuntos é a noção de predicado, ligada, portanto, à Teoria da Linguagem e à Filosofia.

O estudo moderno dos conjuntos sob esses dois ângulos teve início no último quartel do século XIX, Cantor representando o ponto de vista puramente matemático e Frege, o aspecto filosófico. Evidentemente estaremos interessados no segundo aspecto. Deve-se dizer que os dois pontos de vista são complementares e não antagônicos pois um volta-se a computações dentro da Teoria enquanto o outro dedica-se à formulação - axiomatização da teoria e a suas eventuais aplicações e interpretações.

A interpretação matemática de objetos matemáticos como conjuntos pode levar-nos a pensar em uma filosofia em que todos os objetos matemáticos são conjuntos. Frege, na realidade, partia de um pressuposto semelhante a este e sua intenção nos "*Grundgesetze der Arithmetik*", [3], era exatamente provar que a Aritmética e depois a Análise podiam ser feitas considerando-se números como sendo conjuntos (classes).

Em linhas muito gerais pode-se dizer o seguinte sobre o projeto de Frege:

Desenvolvendo o Cálculo de Predicados em um sistema formal, Frege deu à Lógica, pela primeira vez, uma álgebra em que era possível representar raciocínios matemáticos não-triviais. Os sistemas que se tinha antes pouco passa-

vam do Cálculo Proposicional, onde não há recursos para discutir fórmulas do tipo "Para todo A existe um B", por exemplo. Com este sistema em mãos Frege pretendia defender a tese de que a Matemática, ou ao menos a Aritmética e a Análise, podem ser vistas como um exercício da faculdade lógico-dedutiva, mais ainda, que os próprios números são entes lógicos.

Para tal tornava-se necessário criar, ou descobrir, um universo de entes lógicos dentre os quais fosse possível representar os números. É neste ponto que entram as classes.

Frege era um platonista e, para ele, existia um universo em que estão todas as coisas. Predicados, entes lógicos, são vistos como funções cuja imagem é V ou F, a Verdade ou a Falsidade. Aí, aliás, é que se origina a notação funcional " $P(x)$ " para um predicado. Agora, é possível a cada predicado associar um ente: a "classe" dos objetos que verificam o predicado, a imagem inversa de "V" pela função-predicado. Com isto, o objetivo final pode ser obtido mostrando-se que os números são classes tiradas de uma linguagem puramente lógica, i.e., que só emprega predicados "lógicos".

Esta linguagem além de usar os recursos do Cálculo de Predicados, possui predicados para representar a identidade e para representar a noção de verificar uma propriedade, a última feita através do " ε ". Finalmente, há um recurso

linguístico denotado por " $\{x:\phi\}$ ", que transforma predicados em termos da linguagem, i.e., nomes próprios de classes que correspondem aos predicados indicados por " ϕ ".

Resumindo: Deve ser construída uma linguagem cujos predicados e cujos termos podem ser considerados "lógicos", dentro da qual se pretende definir os números e provar suas propriedades. A indução, por exemplo, passa a ser uma propriedade de certas classes que chamamos de números naturais, pode ser demonstrada usando as propriedades lógicas dos números sem necessitar um *status* especial como desejava Poincaré (Science et Hypothèse |10|).

O sucesso parcial deste programa é indubitável, sendo atestado pelo fato já mencionado de que quase toda teoria matemática, e não sô a Aritmética e a Análise, é feita, hoje em dia, dentro da linguagem dos Conjuntos. A parte mal sucedida é aquela que pretende que as classes sejam extensões de predicados (imagens-inversas de "V" por predicados), extensões de *quaisquer* predicados da linguagem. Como o leitor já imagina, a dificuldade para criar o desejado sistema de classes é causada pelo Paradoxo de Russell.

Antes de entrar em detalhes sobre o paradoxo acima queremos responder a uma segunda questão:

Qual a importância de se criar uma linguagem geral de classes ?

A importância de realizar uma redução da Matemática às Classes decresceu da época de Frege para cá. Naquele tempo estava-se saindo de um período em que o conhecimento dos processos infinitários ainda era incompleto, sendo frequentes raciocínios e teoremas errados. Reduzindo tudo a um sistema que ele reputava não-problemático, Frege estava fazendo uma contribuição para colocar a Matemática em bases sólidas. Além disso o valor da redução filosófica era indiscutível.

Hoje, graças ao próprio trabalho de Frege, por um lado não há mais necessidade prática de colocar os raciocínios infinitários em base sólida; pelo outro, a Lógica é algo de tão complexo que o poder redutor do programa já não é tão óbvio quanto era cem anos atrás.

O interesse que o autor vê na solução da dificuldade está na contribuição que será dada à criação de uma estrutura matemática que possa servir para a construção de um modelo para linguagens naturais (tais como a linguagem usada informalmente no gerar e transmitir raciocínios matemáticos). Nestas linguagens a internalização de predicados é uma operação comum, digna de ser estudada. Adotando, como estamos, uma perspectiva empirista, não nos interessa investigar até que ponto foi realizada a redução filosófica preconizada por Frege.

A teoria que apresentamos nesta tese presta-se, também, à decisão de questões de independência em ZF. Nesta área,

que não discutiremos aqui, J. Zimbarg já obteve inúmeros resultados.

Feita esta digressão, pode-se ver que o sucesso da linguagem dos conjuntos como veículo para outras linguagens matemáticas não é, historicamente, surpreendente, já que a teoria foi desenvolvida desde o início visando a uma aplica-
ção semelhante.

O estudo da razão deste sucesso merece um ensaio de per se. Na opinião do autor, a causa está no fato de a linguagem de classes dar uma maneira operacional de lidar com propriedades, tratando-as como termos de uma linguagem que não está distante da linguagem original. Assim, o processo de estudar objetos - por exemplo números -, propriedades destes objetos, e daí, estudando logicamente estas propriedades, deduzir novas propriedades dos objetos, pode ser reduzido a um todo harmônico onde os objetos - números - e suas propriedades - classes de números - são considerados num mesmo nível. O ponto essencial está em que o relacionamento "horizontal" entre classes de números e os números imite o relacionamento "vertical" entre predicados e números. Isto foge à forma mais óbvia de tratar de predicados como termos, tal como se faz na metalinguagem onde se discute a gramática da linguagem original.

Nosso maior desejo é chegar a fazer uma análise do processo matemático mostrando que ele se desenvolve em vā-

rios níveis, observando ao mesmo tempo os objetos de estudo e as fórmulas usadas para falar dos objetos (isto, possivelmente, iterado um grande número de vezes) e que portanto um sistema em que os objetos e as fórmulas possam ser colocados em um só nível é o sistema certo para modelar o dito processo. Uma análise deste tipo, aliada a um modelo matemático eficaz, deverá trazer uma contribuição válida ao estudo da Lógica de Ordem Superior. Esperamos poder dizer mais a respeito em futuros trabalhos.

§2 - O PARADOXO DE RUSSELL

Já mencionamos que o grande impedimento encontrado por Frege está no fato de a noção de classe não ser tão simples e elementar quanto parece. A dificuldade levantada pelo Paradoxo de Russell (sem dúvida sobejamente conhecido pelo leitor e, por isto, omitido), é a de que, na colocação de Frege, nem todo predicado define uma classe.

Diante desta dificuldade há várias saídas possíveis, todas elas já tendo sido tentadas, com variável sucesso.

A primeira é desistir do projeto procurando ver a Matemática de outra forma. Isto, preconizado principalmente pelas várias correntes construtivistas, não se tem mostrado um caminho muito fértil.

Uma segunda saída é manter alguma forma do programa ge

ral de Frege, alterando a lógica usada, no caso o Cálculo Proposicional, de forma a que o Paradoxo possa ser absorvido na teoria. Estas tentativas, na opinião do autor, perdem por não ter algo tão simples e não problemático como é o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem Clássico como sua base. Uma formalização para estas lógicas pode ser encontrada nas obras de N.C.A. da Costa, por exemplo [9].

Uma terceira solução, proposta pela primeira vez por Russell [15], é a de modificar o modelo algébrico utilizado para representar a linguagem. Russell introduziu as linguagens com tipos para escapar ao Paradoxo por ele descoberto. Como nossa solução está dentro desta linha, deixá-la-emos para discutir no fim.

A quarta possibilidade é fazer uma investigação para descobrir quais os predicados que definem classes[†]. Esta é a solução representada pela teoria de Zermelo-Fraenkel. Não há dúvida que o sucesso de ZF é imenso; não só é possível interpretar a maioria das teorias matemáticas em ZF, como tentativas de definir outras teorias como a de Von-Neumann-Bernays-Gödel [4], ou a de Ackermann [1], levaram a teorias essencialmente equivalentes a ZF. Nossa crítica a ZF é que uma série de incompletudes, como os Axiomas de Infinitude e a própria Hipótese do Contínuo, surgem exatamente por não construir a teoria todas as classes possíveis. Podemos mostrar, embora não o façamos nesta tese, que vários Axio -

[†] Estamos usando a palavra como sinônimo de "conjunto" neste ponto.

mas de Infinitude são teoremas de versões mais fortes da Teoria que aqui apresentaremos. Resultados deste tipo já foram obtidos usando-se Princípios de Reflexão (Chuaqui [2]) nunca, porém, de uma forma sistemática. Em todo caso resta sempre o problema, aparentemente insolúvel, de caracterizar todos os predicados "bem comportados" que definem classes.

Naturalmente, há soluções que exploram combinações destas possibilidades como as teorias que falam de classes e conjuntos.

Vamos agora à solução de Russell.

A modificação de linguagem proposta por Russell é a introdução de "tipos". A hierarquia de tipos pode ser vista de forma primitiva, como uma subdivisão do universo das classes: no tipo "0" estarão as classes cujos elementos não são classes, no tipo " $i+1$ ", com " i " um número natural, as classes cujos elementos são classes de tipo " i ". Na nova linguagem todas as variáveis vêm com um índice de tipo e o Paradoxo é impedido por a classe " $\{x^i : x^i \notin x^i\}$ " ser um ente de tipo " $i+1$ ". Surge, porém, uma nova dificuldade: se a teoria for mantida em sua forma predicativa, i.e., se as classes de tipo " $i+1$ " forem criadas exclusivamente a partir das classes de tipos "0" a " i ", não será possível fazer a Análise dentro dos tipos. A razão é que se definem números reais através de Cortes de Dedekind de forma a que a definição de um real depende da existência do conjunto dos reais.

Este defeito pode ser corrigido através de um novo axioma, o Axioma de Redutibilidade, que garante que um objeto de tipo " ι ", definido em função de objetos de tipo superior a " ι ", também pode ser definido em função de objetos de tipo inferior ou igual a " ι ". Com este axioma a Teoria dos Tipos torna-se bastante próxima a ZF.

Há, porém, um grande problema na solução: não é possível falar de classes em geral; cada fórmula encontra-se num segmento inicial da hierarquia de tipos. Para salvar a visão do universo platônico de classes somos impedidos de quantificar sobre ele. A isto acresce o inconveniente de ser necessário escrever tudo em uma linguagem de tipos e o fato do sistema postular a existência de uma classe infinita, o que vai contra a finalidade de redução filosófica da teoria.

Em resumo: o Paradoxo de Russell parece haver bloqueado de forma efetiva a criação de uma linguagem cujos predicados possam ser convertidos em termos da própria linguagem; em que se possa quantificar de forma genérica sobre todos os termos; e na qual se possa representar a matemática usual.

É isto que pretendemos, agora, desmentir.

§3 - O SISTEMA $(\mathcal{L}, *)$

O sistema que introduzimos no próximo capítulo será chamado $(\mathcal{L}, *)$. Nossa solução é optar por uma linguagem de tipos, como a de Russell, porém negativos. Com isto queremos dizer que há um tipo, o "0", que contém todos os outros. Variáveis de tipo "i" são variáveis universais.

A introdução dos tipos não nos vem de uma teoria filosófica sobre uma hierarquia de predicados ou de um exercício em dualização com respeito aos tipos de Russell; os tipos são o resultado de um operador externo à linguagem que serve para permitir a interpretação dos predicados por termos, o operador "*" .

O operador "*" faz uma correspondência entre os predicados da linguagem de $(\mathcal{L}, *)$ que chamamos $\mathcal{L}$ e os predicados de $*\mathcal{L}$, uma sublinguagem de $\mathcal{L}$. Os predicados de $*\mathcal{L}$ serão transformados em termos através do operador "{ }" do modo usual.

Assim, o processo de transformar um predicado ϕ de $\mathcal{L}$ processa-se em duas etapas:

$$\phi(\text{de } \mathcal{L}) \xrightarrow{*} \phi^*(\text{de } *\mathcal{L}) \xrightarrow{\{ \}} \{:\phi^*\} \text{ (termo)}$$

Por meio deste artifício é possível fazer uma correspondência externa entre todos os predicados de $\mathcal{L}$ e termos de $\mathcal{L}$. Como a correspondência não é interna, i.e.; como ela não é expressável por um esquema

$$(x) [\phi(x) \leftrightarrow x \in \{x, \phi(x)\}] ,$$

pode-se escapar do Paradoxo de Russell usando os recursos da Teoria dos Tipos.

O surgimento dos tipos em $\mathcal{L}$ é uma consequência do uso de " $*$ ". Trata-se apenas de um recurso que torna a definição de " $*$ " mais simples. Outra possibilidade seria a introdução de uma infinidade de constantes primitivas. Para que o objetivo de falar dos predicados de $\mathcal{L}$ dentro da própria $\mathcal{L}$ seja atingido é essencial garantir que $\mathcal{L}$ e $*\mathcal{L}$ sejam praticamente a mesma linguagem. A procura de axiomas que aproximem cada vez mais $\mathcal{L}$ de $*\mathcal{L}$ é uma das maneiras de fortalecer $(\mathcal{L}, *)$.

Devido à ação involutiva de " $*$ ", o aspecto do universo em $(\mathcal{L}, *)$ é o inverso do aspecto nas teorias usuais: nestas últimas a construção começa com alguma classe básica, em geral o ϕ , progredindo por etapas a conjuntos cada vez maiores (ver Scott, [16]). Em $(\mathcal{L}, *)$ o universo já está pronto e o operador " $*$ " lhe induz uma estrutura em camadas, umas dentro das outras, cada vez menores, que são os tipos.

Os detalhes de construção de $(\mathcal{L}, *)$ são expostos no próximo capítulo.

§4 - FUTURAS DIREÇÕES

Na introdução deste capítulo já mencionamos nossa pre-

tensão de criar uma estrutura para estudar a Matemática.

Todo sistema matemático destinado a servir de matriz para o estudo de sistemas matemáticos quaisquer deve, em particular, servir para o estudo de si próprio. Para que isto se realize é necessário contornar dois grandes obstáculos. O primeiro, se quisermos analisar de maneira útil os predicados do sistema dentro do próprio sistema, é o Paradoxo de Russell. O segundo, se quisermos analisar as noções de verdade e demonstrabilidade de forma completa dentro do sistema, estão nos Teoremas de Gödel e de Tarski.

Parece-nos que os métodos descritos no presente trabalho mostram ser contornável o obstáculo causado pelo Paradoxo de Russell. Resta agora encaixar $(\mathcal{L}, *)$, ou algo semelhante, em um sistema sensato no qual não se apliquem os Teoremas de Incompletude. Após o rescaldo de $(\mathcal{L}, *)$, com algumas propriedades que não estamos incluindo nesta tese, é nessa direção que pretendemos concentrar nossos esforços.

CAPITULO II

UM SISTEMA AUTO-REFERENTE

§1 - GENERALIDADES

Nosso objetivo neste capítulo é construir uma linguagem formal $\mathcal{L}$ e uma teoria cujo objeto de discurso sejam os predicados de uma variável livre - as funções proposicionais - da própria $\mathcal{L}$, i.e., queremos que a interpretação dos termos de $\mathcal{L}$ sejam as funções proposicionais de $\mathcal{L}$.

A lógica empregada será o Cálculo de Predicados de 1a. Ordem com Tipos (para as regras deste cálculo e um teorema de completude vide N.C.A. da Costa [8]). Em linhas gerais, teremos uma teoria que denotaremos $(\mathcal{U}, *)$, composta de uma linguagem tipificada ; um operador externo à linguagem " $*$ "; um operador " $\{ \}$ ", para gerar constantes. Em linhas gerais, o que se deseja da estrutura é o seguinte:

1 - $\mathcal{L}$ é uma linguagem tipificada de 1a. ordem com operadores que permitam a formação de termos a partir de fórmulas. A condição de $\mathcal{L}$ ser tipificada, neste estágio, deve ser entendida como uma possibilidade de $\mathcal{L}$ possuir tipos; mais adiante mostraremos que as demais condições sobre $(\mathcal{U}, *)$ impõem uma tipificação a $\mathcal{L}$.

II - Para referir-se a si mesma, sem incorrer em eventuais paradoxos, a linguagem $\mathcal{L}$ é dotada de uma sublinguagem isomorfa a si própria. Assim, proposições referentes à sublinguagem podem ser interpretadas como proposições referentes à própria $\mathcal{L}$.

A função do morfismo $*$: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, e de seu inverso, é de associar $\mathcal{L}$ a esta sublinguagem, associando fórmulas a fórmulas, termos a termos, variáveis a variáveis e assim por diante, preservando as inter-relações lógicas entre fórmulas e inclusive mantendo a validade de sentenças, de maneira que $\mathcal{L}$ e $*\mathcal{L}$ sejam a "mesma" linguagem. Aliás, *a priori*, nada impede $*$ de ser a identidade.

III- As funções proposicionais† de $*\mathcal{L}$ podem ser transformadas em termos de $\mathcal{L}$ através do operador $\{ \}$.

IV - A relação da satisfatibilidade de predicados de $*\mathcal{L}$ é representável por uma relação de $\mathcal{L}$.

Para nossa comodidade, dotaremos a linguagem de um predicado binário e para representar a satisfatibilidade da condição IV. Admitimos, também, que o operador $*$, ao agir sobre um símbolo de $\mathcal{L}$, só altera o símbolo se este for uma variável. Com isto, a estrutura das fórmulas é rigorosamente mantida.

É fácil mostrar que isto leva a uma tipificação.

.....
† Predicados

Admitamos que em $\mathcal{L}$ haja variáveis universais, i.e., variáveis que admitem substituição universal. Suponha-se que a imagem de uma variável universal seja outra variável universal:

$$*(x) \equiv y$$

então, aplicando $*$ à fórmula $x \not\equiv x$

$$*(x \not\equiv x) \equiv y \not\equiv y$$

ou seja o predicado de $*\mathcal{L}$, $y \not\equiv y$, é um predicado cujo escopo é universal em $\mathcal{L}$.

É admissível, então, verificar se o termo de $\mathcal{L}$ $\{y: y \not\equiv y\}$ verifica, ou não, o predicado $y \not\equiv y$, resultando o paradoxo de Russell.

Conclui-se que a $*$ -imagem de uma variável universal x terá de ser uma variável de escopo mais restrito. O escopo de $*(x)$ estará contido no escopo de x .

É fato que $*\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, e $*$ deve funcionar como isomorfismo, ou seja, $*\mathcal{L}$ deve ter uma sublinguagem $**\mathcal{L}$ cuja situação em relação a $*\mathcal{L}$ deve ser análoga à desta última em relação a $\mathcal{L}$. Logo, o escopo de $*(*(x))$ deve estar contido no escopo de $*(x)$. Iterando este raciocínio, chega-se à conclusão de que a linguagem deve ser dotada, pelo menos, de uma estrutura de tipos negativos na ordem $-\omega$ onde o escopo das variáveis de tipo " i " está contido no escopo das variáveis de tipo " $i + 1$ ".

§2 - A ESTRUTURA $(\mathcal{L}, *)$

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1ª ordem, tipificada com tipos inteiros $i < \omega$. $\mathcal{L}$ possui um predicado binário ε e um operador $\{ \}$. Além disto, há em $\mathcal{L}$ os símbolos lógicos usuais e a igualdade. Quantificação universal será indicada por " (x) " e existencial por " $(\exists x)$ ".

As variáveis de $\mathcal{L}$ são obtidas usando-se as letras " x ", " y ", " z ", " u ", " v " etc com índices inferiores em ω e com um índice superior indicando tipo. Assim para o tipo " 0 " há as variáveis

$$x_0^0, x_1^0, \dots, y_0^0, y_1^0, \dots \text{ etc.}$$

Quando o índice inferior de uma variável é " 0 " vamos omiti-lo. Frequentemente usamos metavariáveis x_j^i, y_j^i , etc. Chamamos os termos " $\{x: \phi x\}$ " de constantes.

Seja $*$ um morfismo entre cadeias de símbolos do alfabeto de $\mathcal{L}$. A $*$ -imagem de uma fórmula ϕ será indicada por ϕ^* . Converteremos as condições I a IV nas seguintes regras e axiomas:

REGRAS

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad * : x_j^i &\mapsto x_j^{i-1} \\ * : y_j^i &\mapsto y_j^{i-1} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Se σ e τ são termos

$$* : \sigma = \tau \mapsto * \sigma = * \tau$$

$$* : \sigma \in \tau \mapsto * \sigma \in * \tau$$

Se ϕ e ψ são fórmulas

$$*: \phi \rightarrow \psi \mapsto \phi^* \rightarrow \psi^*$$

$$*: \sim \phi \mapsto \sim \phi^*$$

$$*: (x_j^i) \phi \mapsto (x_j^{i-1}) \phi^*$$

$$*: \{x_j^i : \phi\} \mapsto \{x_j^{i-1} : \phi^*\}$$

ii) Se $\phi(x_j^i)$ for uma fórmula cuja única variável livre é x_j^i , então

$$\{x_j^{i-1} : \phi^*\}$$

é um termo de tipo " i ".

iii) Todo termo de tipo " $i-1$ " também é um termo de tipo " i ".

De ii) pode-se concluir que $\{x^i : \phi x^i\}$ é um termo de tipo " $i+1$ " sempre que ϕ for uma fórmula em que só aparecem variáveis de tipo estritamente negativo.

AXIOMAS

$$a) (x^0)(y^0) \quad x^0 = y^0 \leftrightarrow (z^0)(z^0 \in x^0 \leftrightarrow z^0 \in y^0)$$

$$b) (x^0)(y^i) \quad x^0 \in y^i \vee x^0 < y^i \rightarrow (Ez^i) z^i = x^0$$

c) Seja $\phi(x^i, x_1^{i_1}, \dots)$ uma fórmula cujas variáveis livres são $x^i, x_1^{i_1}, \dots$ e tal que ϕ é ψ^* para alguma ψ :

$$(x_1^i) \dots (Ey^o)(x^o) [x^o \in y^o \leftrightarrow (Ez^i = x^o) \phi(z^i, x_1^i \dots)]$$

d) Para uma sentença σ

$$\sigma \leftrightarrow \sigma^*$$

e) Seja $\phi(x_1^i, \dots, x_n^i)$ uma fórmula cujo tipo mais baixo é (i) , sem constantes, e cujas variáveis livres são $x_1^i, \dots, x_n^i$:

$$(x_1^{i-1}) \dots (x_n^{i-1}) [\phi(x_1^{i-1}, \dots, x_n^{i-1}) \leftrightarrow \phi^*(x_1^{i-1} \dots x_n^{i-1})]$$

OBSERVAÇÕES SOBRE OS AXIOMAS

a) O primeiro axioma é a extensionalidade para termos de tipo "0". Como a substituição de variáveis de um certo tipo por termos de tipo inferior é admissível, vem:

$$(II, 0) (x^i)(y^j) \quad x^i = y^j \leftrightarrow (z^o)(z^o \in x^i \leftrightarrow z^o \in y^j) .$$

Usando o axioma (b), podemos ainda obter:

$$(II, 1) (x^i)(y^i) \quad x^i = y^i \leftrightarrow (z^i)(z^i \in x^i \leftrightarrow z^i \in y^i)$$

pois:

$$(z^o)(z^o \in x^i \rightarrow (Ez^i) x^i = z^o)$$

e portanto

$$(z^o)(z^o \in x^i \leftrightarrow z^o \in y^i) \leftrightarrow (z^i)(z^i \in x^i \leftrightarrow z^i \in y^i)$$

Este axioma, (a), impede a representação direta das sentenças da linguagem, já que todas elas serão representadas pela classe vazia.

- b) Com a imposição de (b) garantimos que o predicado ε representa a relação de satisfatibilidade de predicados de $* \mathcal{L}$ e, por extensão, de $* \dots * \mathcal{L}$

Na fórmula

$$x^i \varepsilon y^0,$$

y^0 está representando um predicado de $* \underbrace{\dots *}_{-i \text{ vezes}} \mathcal{L}$ e x^i

é um termo da mesma sublinguagem, a fórmula representando a asserção:

$$" x^i \text{ verifica a propriedade } y^0 " .$$

Já a fórmula

$$x^0 \varepsilon y^i$$

deveria estar, pela nossa interpretação, gramaticalmente incorreta. O axioma (b) permite-nos usar o predicado ε sem restrição de tipos, restabelecendo a interpretação desejada.

De (b), por restrição e usando a regra iii) vem:

$$(11,2) \quad (x^i)(y^j) \quad x^i \varepsilon y^j \vee x^i \subset y^j \rightarrow (Ez^j) \quad z^j = x^i$$

c) Esta forma predicativa de compreensão, dada uma fórmula ϕ de $*\mathcal{L}$, garante que, em $\mathcal{L}$, existe um termo cujos elementos são exatamente os x^i que satisfazem a fórmula. Graças aos axiomas (b) e (d) é possível obter uma forma impredicativa geral de compreensão, abandonando-se, inclusive, a exigência que ϕ seja sempre uma fórmula de $*\mathcal{L}$.

(11,3) Teorema: Seja $\phi(x^i, x_1^i, \dots)$ uma fórmula onde $i \leq -1; (x_1^i) \dots (Ey^{i+1})(x^o) [x^o \in y^{i+1} \leftrightarrow (Ez^i = x^o) \phi(z^i, x_1^i, \dots)]$

Prova:

Usando (c) vem:

$$(11,4) (Ey^o)(x^o) [x^o \in y^o \leftrightarrow (Ez^{-1} = x^o)(z^{-1} = z^{-1})]$$

onde o y^o é $\{x^{-1} : x^{-1} = x^{-1}\}$.

Aplicando (d) iteradamente $-i$ vezes a (11,4) vem

$$(11,5) (Ey^{i+1}) [x^{i+1} \in y^{i+1} \leftrightarrow (Ez^i = x^{i+1})(z^i = z^i)]$$

e por (b) concluímos

$$(11,6) (Ey^{i+1})(x^o) [x^o \in y^{i+1} \leftrightarrow (Ez^i = x^o)(z^i = z^i)]$$

onde y^{i+1} é $V_i = \{x^i : x^i = x^i\}$.

Ora, todo y^o do axioma (c) está contido num dos V_i acima e usando (b) concluímos que y^o é igual a um y^{i+1} de onde segue (11,3) restrito a fórmulas de $*\mathcal{L}$, i.e., nas quais não ocorre nenhuma variável de tipo "0".

Finalmente, chamemos (11,3) de " $C(\phi)$ "; como, por (d):

$$C(\phi) \leftrightarrow (C(\phi))^*$$

$$\text{e como } (C(\phi))^* \leftrightarrow C(\phi^*) ,$$

$$\text{temos } C(\phi) \leftrightarrow C(\phi^*)$$

Já provamos que $C(\phi^*)$ é uma instância válida de compreensão, de onde se segue que $C(\phi)$, o teorema (II. 3) - é válido sem restrição, exceto que $i \leq -1$.

d) O esquema $\sigma \leftrightarrow \sigma^*$ expressa o fato de $*$ ser um isomorfismo simples, sem procurar explorar que $*\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. É uma forma interna de dizer que σ é verdadeira se e somente se σ^* é verdadeira.

e) Neste axioma queremos explorar a natureza de endomorfismo de " $*$ ". Para isto lançamos mão de modelos internos (!) de nossos axiomas.

Tome-se uma das classes V_i , $V_i = \{x^i : x^i = x^i\}$; estas classes, de tipo " $i+1$ ", são modelos para os axiomas, interpretando-se termos τ^j em classes x^{j+1} de V_i . O Teorema de Gödel não é violado pela razão que, apesar dos V_i serem definíveis em nosso sistema, a demonstração de que um V_i é modelo só pode ser feita externamente ao sistema.

Se ϕ é uma sentença da linguagem $\mathcal{L}$ restrita ao tipo " i ", $\mathcal{L}_i$, podemos agora interpretar ϕ como sendo a clássica $V_i \models \phi$. Se $k_1^i, \dots, k_n^i$ forem constantes de V_i , então $\phi[k_1^i, \dots, k_n^i]$ pode ser vista como sendo

$$V_i \models \phi(x_1^i, \dots, x_n^i) [k_1^i, \dots, k_n^i]$$

Mais ainda, quantificadores de $\mathcal{L}$ podem ser interpretados como quantificadores da metalinguagem, vendo-se $(x^i)\phi(x^i)$ como

$$\forall \alpha \in V_i \quad V_i \models \phi x^i[a]$$

onde a é uma variável da metalinguagem de ϕ e V_i .

Isto posto, lembramos ainda que $V_{i-1} \subset V_i$ e que " $*$ " é um operador $*: V_i \rightarrow V_{i-1}$. É bastante natural, portanto, exigir do bom comportamento de " $*$ " que a classe V_i seja uma extensão elementar de 1ª. ordem de V_{i-1} . Infelizmente tal fato não se verifica, pois V_{i-1} é uma subclasse definível de V_i . Para defini-la, porém, utilizamos tipos inferiores a " i " ou constantes - como V_{i-1} - de tipo " i " ou superior. Se restringirmos a linguagem a L_i - sem tipos $j < i$ e sem constantes - teremos um sistema para o qual se pode exigir que V_i seja extensão elementar de V_{i-1} ; para isto basta e nunciar os axiomas com fórmulas de tipo estritamente igual a " i " e sem constantes. Para tais ϕ , teríamos classicamente, a definição de extensão elementar

$$\forall a_1 \dots \in V_{i-1} \left[V_1 \models \phi(x_1 \dots) [a_1 \dots] \leftrightarrow \right. \\ \left. \leftrightarrow V_{i-1} \models \phi(x_1 \dots) [a_1 \dots] \right]$$

da qual interessa-nos a consequência

$$Q_1 b_1 \dots Q_n b_n \in V_i \quad V_i \models \phi(x_1 \dots) [b_1 \dots] \\ \Leftrightarrow \\ Q_1 a_1 \dots Q_n a_n \in V_{i-1} \quad V_i \models \phi(x_i \dots) [a_1 \dots]$$

onde " $Q_n a_n$ " é " $\forall a_n$ " ou " a_n " ou " $[k_n/a_n]$ " com k_n em V_{i-1} . $Q_n b_n$ é definido análogamente.

Ver uma outra formulação disto em Robinson, "Model Theory", Teorema 3.2.3, pg. 57.

Reformulando estas em $(\mathcal{L}, *)$ temos:

$$e) (x_1^{i-1}) \dots (x_n^{i-1}) \left| \phi | x_1^{i-1} \dots x_n^{i-1} | \leftrightarrow \phi^* (x_1^{i-1} \dots x_n^{i-1}) \right| ; \\ (11.7) \\ (q_1 x_1^i) \dots (q_n x_n^i) \phi(x_1^i \dots x_n^i) \leftrightarrow ((q_1 x_1^i) \dots (q_n x_n^i))^* \phi | x_1^{i-1} \dots x_n^{i-1} |$$

onde " $(q_j x_j^i)$ " é " (x_j^i) " ou " (Ex_j) " ou

" $(|k^z/x_j^i|)$ ". Aqui aliás, basta exigir que ϕ não possua constantes e nem variáveis de tipo inferior a " i ", não havendo necessidade de que todas as variáveis de ϕ sejam de tipo " i ".

Outros corolários interessantes de (e) são:

$$(11.8) \quad (x_1^i) \dots (x_n^i) (Ey_1^{i-1}) \dots (Ey_n^{i-1}) \left[\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow \right. \\ \left. \leftrightarrow \phi[y_1^{i-1} \dots] \right] \quad e$$

$$(11.9) \quad \phi[k_1^i \dots k_n^i] \leftrightarrow \phi[*k_1^i \dots *k_n^i]$$

Estes esquemas são uma reformulação do clássico

$$\forall b_1 \dots \in V_i \quad \exists a_1 \dots \in V_{i-1} \left[V_i \models \phi(x_1^i \dots) [b_1 \dots] \right. \\ \left. V_i \models \phi(x_1^i \dots) [a_1 \dots] \right]$$

(11.9) mostra que "*" pode ser considerada uma espécie de função de Skolem externa para (11.8).

Há uma outra forma intuitiva de entender o esquema (e):

Suponhamos uma extensão (externa) da linguagem em que "*" seja um símbolo funcional. Poderíamos estender (d) para

$$(x_1^i) \dots (x_n^i) \left[\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow (\phi(x_1^i \dots))^* \right],$$

ou seja

$$(x_1^i) \dots (x_n^i) \left[\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi^*(*x_1^i \dots) \right],$$

como por (e)

$$(x_1^i) \dots (x_n^i) \left[\phi(*x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi^*(*x_1^i \dots) \right],$$

viria, usando a primeira fórmula,

$$(x_1^i) \dots (x_n^i) \left[\phi(*x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi(x_1^i \dots) \right]$$

Ou seja,

se $\langle x_1^i \dots x_n^i \rangle$ é uma n-upla que verifica a relação

ϕ , então o operador externo "*" leva esta n-upla em $\langle *x_1^i \dots *x_n^i \rangle$, que ainda verifica a relação ϕ . O axioma (e) é uma forma interna de colocar esta condição externa sobre o isomorfismo "*".

Provemos (11.7), (11.8), (11.9) :

(11,10) Prova de (11.7)

Por indução suponhamos que :

$$(11.11) \quad (x_1^{i-1}) \dots (x_k^{i-1}) \left[q_{k+1} x_{k+1}^{i-1} \dots \phi [x_1^{i-1} \dots] \leftrightarrow \right. \\ \left. \leftrightarrow (q_{k+1} x_{k+1}^{i-1}) \dots \phi^* (x_1^{i-1} \dots) \right] .$$

Se $(q_k x_k^{i-1})$ é (x_k^{i-1}) tiramos (11.12) abaixo, de

$$(x)(y)(Axy \leftrightarrow Bxy) \rightarrow (x)((y)Axy \leftrightarrow (y)Bxy)$$

Se $(q_k x_k^{i-1})$ é (Ex_k^{i-1}) , (11.12) vem de

$$(x)(y)(Axy \leftrightarrow Bxy) \rightarrow (x)((Ey)Axy \leftrightarrow (Ey)(Bxy))$$

e se $(q_k x_k^{i-1})$ é $([c^{i-1}/x_k^{i-1}])$ onde c^i é uma constante de tipo "i", (11.12) vem de

$$(x)(y)(Axy \leftrightarrow Bxy) \rightarrow (x)(Axc \leftrightarrow Bxc)$$

(11.12) é :

$$(x_1^{i-1}) \dots (x_{k-1}^{i-1}) \left[(q_k x_k^{i-1}) \dots \phi [x_1^{i-1} \dots] \leftrightarrow \right. \\ \left. \leftrightarrow (q_k x_k^{i-1}) \dots \phi^* (x_1^{i-1} \dots) \right] .$$

Iterando este processo chegamos a

$$(q_1 x_1^{i-1}) \dots \phi [x_1^{i-1} \dots] \leftrightarrow (q_1 x_1^{i-1}) \dots \phi^* (x_1^{i-1} \dots)$$

aplicando o teorema (d) ao primeiro membro e a transformação óbvia ao segundo, vem

$$(11.7) \quad (q_1 x_1^i) \dots \phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow ((q_1 x_1^i) \dots)^* \phi [x_1^{i-1} \dots]$$

(11.13) Prova de (11,9)

Sejam $k_1^i, \dots, k_n^i$ constantes; então $*k_1^i, \dots, *k_n^i$ são constantes do tipo " $i-1$ ".

Por (e)

$$\phi(*k_1^i \dots) \leftrightarrow \phi^*(k_1^i \dots)$$

A segunda fórmula é

$$[\phi(k_1^i \dots)]^*$$

Como, por (d),

$$\phi(k_1^i \dots) \leftrightarrow [\phi(k_1^i \dots)]^{**}$$

segue que

$$(11.9) \quad \phi(k_1^i \dots) \leftrightarrow \phi(*k_1^i \dots) .$$

(11.14) Prova de (11.8)

Por absurdo, suponhamos

$$(Ex_1^i) \dots (Ex_n^i) (y_1^{i-1}) \dots (y_n^{i-1}) \sim (\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi(y_1^{i-1} \dots))$$

Como, por (e):

$$(y_1^{i-1}) \dots (\phi(y_1^{i-1} \dots) \leftrightarrow \phi^*(y_1^{i-1} \dots))$$

segue

$$(Ex_1^i) \dots (y_1^{i-1}) \sim (\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi^*(y_1^{i-1} \dots))$$

Mas, por (d),

$$(Ex_1^i) \phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow (Ey_1^{i-1}) \dots \phi^*(y_1^{i-1} \dots)$$

de onde segue uma contradição.

Logo,

$$(11.8) \quad (x_1^i) \dots (Ey_1^{i-1}) \dots (\phi(x_1^i \dots) \leftrightarrow \phi(y_1^{i-1} \dots)).$$

Concluimos, com este teorema, os comentários sobre os axiomas.

Eles serão, de ora em diante, usados na seguinte forma:

AXIOMAS - 2

$$(1) \quad (x^i)(y^j) \quad x^i = y^j \leftrightarrow (z^0)(z^0 \in x^i \leftrightarrow z^0 \in y^j)$$

$$(2) \quad (x^i)(y^j) \quad x^i \in y^j \wedge x^i < y^j \rightarrow (Ez^j) z^j = x^i$$

$$(3) \quad (x_1^{i1}) \dots (Ey^{i+1})(x^0) [x^0 \in y^{i+1} \leftrightarrow (Ez^i = x^0) \phi(z^i, x_1^{i1} \dots)]$$

$$(4) \quad \sigma \leftrightarrow \sigma^* \quad (\text{para sentenças})$$

$$(5) \quad \text{Seja } \phi(x_1^i, \dots, x_n^i) \text{ uma fórmula cujo tipo mais baixo é "i", sem constantes e cujas únicas variáveis livres são } x_1^i, \dots, x_n^i$$

$$(x_1^{i-1}) \dots \left[\phi [x_1^{i-1} \dots] \leftrightarrow \phi * (x_1^{i-1} \dots) \right]$$

(5a) (Teorema)

$$((q_1 x_1^i) \dots) \phi \leftrightarrow ((q_1 x_1^i) \dots)^* \phi$$

$$"q_j x_j^i" \text{ é } "(x_j^i)" \text{ ou } "(Ex_j^i)" \text{ ou } "(k^i/x_j^i)".$$

Devotaremos o próximo capítulo a mostrar que $(\mathcal{L}, *)$ é suficientemente forte para servir de fundamento à Matemática usual. Queremos ainda observar que há duas maneiras naturais de obter novos axiomas para estender $(\mathcal{L}, *)$: a primeira é enunciando novos princípios na linha do axioma (5). Com axiomas deste tipo, pode-se obter uma série de resultados sobre cardinais grandes. O outro aspecto de $(\mathcal{L}, *)$ que não está explorado pelos axiomas (1) a (5) é o fato de que há uma interpretação desejada para o sistema. Isto se reflete naturalmente em um axioma de definibilidade que diga que "toda classe é gerada por uma fórmula". Ambos estes aspectos de $(\mathcal{L}, *)$ serão explorados numa futura sequência a este trabalho.

§3 - MODELOS DE $(\mathcal{L}, *)$

Um modelo para $(\mathcal{L}, *)$ será um ente estratificado $\underline{V} = \underline{V}_0 \supset \underline{V}_{-1} \supset \underline{V}_{-2} \dots$ e uma função $* : \underline{V}_0 \rightarrow \underline{V}_1$, obedecendo

às condições usuais.

É fácil ver que $\langle V, * \rangle$ jamais poderá ser um modelo conjuntista "standard" em que a relação da linguagem " ε " é interpretada como pertinência: o universo $\underline{V} = \underline{V}_0$ não pode ser regular.

Além da regularidade, há o fato que $\wp \underline{V}_{i-1} \subset \underline{V}_i$ e, portanto, uma interpretação "standard" de $\wp \underline{V}_{i-1}$, aliada à injeção $*: \underline{V}_i \rightarrow \underline{V}_{i-1}$, induziria uma injeção $*: \wp \underline{V}_{i-1} \rightarrow \underline{V}_{i-1}$, o que seria absurdo.

Outro problema são os ordinais de $\underline{V}_0$, que (externamente) não são bem ordenados.

Em resumo:

(11.15) Teorema $(\mathcal{C}, *)$ não possui modelo "standard".

Os axiomas (4) e (5) impõem condições especiais aos $\underline{V}_i$ que ora passamos a discutir.

Seja σ uma sentença cujo tipo mais alto é " $j-1$ ". Interpretando as variáveis de tipo " k " de σ como variando em $\underline{V}_k$, temos:

(11.16) Teorema $\underline{V}_i \models \sigma$ se e somente se $\underline{V}_{i-1} \models \sigma$.

Prova: Imediata, pois nesta interpretação das variáveis de tipo " k ", temos:

$$\underline{V}_i \models \sigma \Leftrightarrow \underline{V}_0 \models \sigma \Leftrightarrow \underline{V}_{i-1} \models \sigma$$

Este teorema pode ser fortalecido, podendo-se mostrar que num certo sentido $\underline{V_i}$ e $\underline{V_{i-1}}$ são elementarmente equivalentes:

(11.17) Teorema Seja " $\models$ " uma interpretação de uma sentença σ em um $\underline{V_k}$ tal que o tipo mais alto de σ é interpretado em $\underline{V_k}$, o tipo imediatamente inferior em $\underline{V_{k-1}} \subset \underline{V_k}$ e assim por diante. Então

$$\underline{V_k} \models \sigma \Leftrightarrow \underline{V_{k-1}} \models \sigma$$

Prova: A interpretação de σ em $\underline{V_{k-1}}$ nada mais é que uma interpretação de σ^* em $\underline{V_k}$. Pelo axioma (4) segue-se a tese.

Em resumo:

(11.18) Teorema Na interpretação " $\models$ " todos os $\underline{V_k}$ são modelos elementarmente equivalentes de $(\mathcal{U}, *)$. Aplicando o axioma (5) vem:

(11.19) Teorema Seja T_i a subteoria de $(\mathcal{U}, *)$ formada pelos teoremas na linguagem L_i , sem constantes. Em relação a T_i temos que $\underline{V_i}$ é uma extensão elementar de primeira ordem de $\underline{V_{i-1}}$.

Prova: Seja ϕ uma fórmula de L_i cujas variáveis livres são $x_1^i, \dots, x_n^i$. Sejam $a_1^{i-1}, \dots, a_n^{i-1}$ elementos de $\underline{V_{i-1}}$. O axioma (5) diz

$$(x_1^{i-1}) \dots (x_n^{i-1}) [\phi(x_1^i \dots x_n^i)] \leftrightarrow \phi^*(x_1^{i-1} \dots x_n^{i-1})$$

então $\underline{V_i} \models [\phi[x_1^{i-1} \dots] \leftrightarrow \phi^*(x_1^{i-1} \dots)] [a_1^{i-1}, \dots, a_n^{i-1}]]$

de onde vem

$$\underline{V_i} \models \phi(x_1^{i-1} \dots) [a_1^{i-1} \dots a_n^{i-1}] \Leftrightarrow \underline{V_i} \models \phi^*(x_1^{i-1} \dots) [a_1^{i-1} \dots]$$

Como todos os termos da última estão sendo interpretados em

$\underline{V_{i-1}}$:

$$\underline{V_i} \models \phi[x_1^{i-1} \dots] [a_1^{i-1} \dots] \Leftrightarrow \underline{V_{i-1}} \models \phi^*(x_1^{i-1} \dots) [a_1^{i-1} \dots]$$

ou seja

$$\underline{V_i} \models \phi[x_1^{i-1} \dots] [a_1^{i-1} \dots] \Leftrightarrow \underline{V_{i-1}} \models \phi(x_1^{i-1} \dots) [a_1^{i-1} \dots]$$

e, portanto, no sentido da interpretação " $\models$ ", $\underline{V_i}$ é uma extensão elementar de 1ª. ordem de $\underline{V_{i-1}}$.

Observação: Vale frisar que estes teoremas se aplicam a qualquer modelo de $(\mathcal{U}, *)$.

§4 - ALGUMAS CLASSES DE $(\mathcal{U}, *)$ [†]

i. A classe vazia

$$\text{Seja } \Phi_i = \{x^i : x^i \neq x^i\}$$

Pelo axioma da compreensão, Φ_i é uma classe de tipo " $i+1$ ".

Pela extensionalidade, porém,

$$\Phi_i = \Phi_j \quad \forall i, j$$

.....

[†] Para detalhes de demonstrações utilizar o §1º do Capítulo 3.

de onde

(11.20) Teorema Existe uma classe sem elementos, ϕ , que pertence a todos os tipos.

$$\phi = \{x^0 : x^0 \neq x^0\}.$$

ii. A classe $\{x^i\}$

Seja x^i uma classe de tipo " i ". Pelo axioma da compreensão

$$(x^0)(Ey^{i+1})(z^{i+1}) [z^{i+1} \in y^{i+1} \leftrightarrow z^{i+1} = x^i]$$

e usando (5a) na forma " (x^i) " temos

$$(11.21) \quad (x^{i+1})(Ey^{i+1})(z^{i+1}) [z^{i+1} \in y^{i+1} \leftrightarrow z^{i+1} \in x^{i+1}]$$

ou seja o tipo de " $\{x^i\}$ " é o mesmo que o tipo de " x^i ".

Da mesma forma prova-se que o tipo de " $x^i \cup \{x^i\}$ " ainda é " i ".

iii. A classe ω

Seja $I_j(x^j)$ a propriedade

$$I_j(x^j) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \phi \in x^j \wedge (z^j) [z^j \in x^j \rightarrow z^j \cup \{z^j\} \in x^j]$$

Já provamos nos itens i e ii que, para qualquer V_i ,

$$I_0(V_i)$$

e podemos portanto definir a classe não vazia ω .

$$(11.22) \quad \omega = \{x^{-1} : (y^0) [I_0(y^0) \rightarrow x^{-1} \in y^0]\}$$

cujas existência é garantida pelo axioma de compreensão (3).

Para qualquer V_i temos

$$\omega \subset V_i$$

de onde vem

$$*\omega = \omega \cap V_{-2} = \omega$$

ou seja, $\omega = *\omega$; ω está em todos os tipos e os elementos de ω estão em todos os tipos.

Pode-se ainda provar que

$$I_j(\omega)$$

e que os axiomas de Peano são válidos para ω .

iv. Ordinais

Podemos definir

$$(11.23) \quad \text{Ord}(x^i) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (y^i) [y^i \in x^i \rightarrow y^i \subset x^i] \wedge \\ \wedge (y^i) [y^i \subset x^i \wedge y^i \neq \Phi \rightarrow (Ez^i \in y^i) z^i \cap y^i = \Phi] \wedge \\ \wedge (y^i)(z^i) [y^i \in x^i \wedge z^i \in x^i \rightarrow y^i \in z^i \vee z^i \in y^i \vee x^i = y^i]$$

Da forma usual, vêm

$$\text{Ord}(\Phi)$$

$$\text{e} \quad \text{Ord}(x) \rightarrow \text{Ord}(x \cup \{x\}) .$$

Além disto, pode-se demonstrar:

(11.24) Teorema Seja x um ordinal e seja x' o ordinal $x \cup \{x\}$. Se x tem tipo " i " então x' também tem tipo " i ". Em particular, se, para todo V_j , $x \in V_j$ então $x' \in V_j$.

Vale também:

(11.25) Teorema ω é um ordinal.

CAPÍTULO III

$(\mathcal{C},*)$ E OUTROS SISTEMAS DE TEORIA DOS CONJUNTOS

Nossa intenção, ao apresentar $(\mathcal{C},*)$, foi, entre outras, a de criar um referencial para situar os vários sistemas clássicos usados nos Fundamentos. Neste capítulo discutimos as teorias de Zermelo-Fraenkel, Ackermann e Kelley-Morse. Provaremos a consistência relativa de cada um deles em relação a $(\mathcal{C},*)$.

§1 - CONJUNTOS EM $(\mathcal{C},*)$

Intuitivamente, conjuntos são classes bem comportadas cuja existência independe de tipos. Podemos representar isto dizendo que um termo τ é o nome de um conjunto se

$$\tau = *\tau$$

e portanto se $*\dots*\tau = \tau$

Em linguagem de modelos, isto significa que os conjuntos estão na intersecção de todos os tipos.

É fácil mostrar que estes termos verificam os axiomas de ZF com exceção da regularidade (e escolhã):

Para provar estes axiomas precisamos mostrar que, dadas classes τ tais que $*\tau = \tau$, as classes construídas a partir de τ usando os métodos de ZF ainda gozam da mesma propriedade.

a) Extensionalidade: É imediata, vem de (II,1).

b) Par não-ordenado:

$$\text{Seja } \{\tau, \lambda\} = \{x^{-1} : x^{-1} = \tau \vee x^{-1} = \lambda\}$$

$$\text{então } *\{\tau, \lambda\} = \{x^{-2} : x^{-2} = *\tau \vee x^{-2} = *\lambda\}$$

$$\text{como } *\tau = \tau \text{ e } *\lambda = \lambda$$

$$*\{\tau, \lambda\} = \{x^{-2} : x^{-2} = \tau \vee x^{-2} = \lambda\}$$

e como τ e λ pertencem a V_{-2} segue

$$*\{\tau, \lambda\} = \{x^{-1} : x^{-1} = \tau \vee x^{-1} = \lambda\}$$

$$\text{ou seja } *\{\tau, \lambda\} = \{\tau, \lambda\}$$

c) Separação:

$$\text{Seja: } k = \{x^{-1} : x^{-1} \in \tau \wedge \phi x^{-1}\}$$

Como $\tau = *\tau$ e portanto $\tau \in V_{-2}$, temos

$$k = \{x^{-2} : x^{-2} \in \tau \wedge \phi x^{-2}\}$$

mas pelo axioma (5)

$$(x^{-2}) [\phi(x^{-2}) \leftrightarrow \phi*(x^{-2})]$$

ou seja

$$*k = \{x^{-2} : x^{-2} \in \tau \wedge \phi*(x^{-2})\} \text{ e}$$

$$(x^{-2}) [x^{-2} \in k \leftrightarrow x^{-2} \in *k]$$

portanto

$$k = *k$$

d) Partes:

Seja $\wp(\tau) = \{x^{-1} : x^{-1} \in \tau\}$

Como $\tau = *\tau$ e, portanto, $\tau \in V_{-2}$, vem do axioma (2)

que $x^{-1} \in \tau \rightarrow (Ex^{-2}) x^{-2} = x^{-1}$

ou seja; $\wp(\tau) = \{x^{-2} : x^{-2} \in \tau\} = *\wp(\tau)$; e

$$\wp(\tau) = *\wp(\tau)$$

e) União:

Seja $U(\tau) = \{x^{-1} : (Ex^{-1} \in \tau) x^{-1} \in z^{-1}\}$

como no caso anterior, $\tau \in V_{-2}$ e portanto,

$$(Ex^{-1} \in \tau) x^{-1} \in z^{-1} \rightarrow (Ex^{-2} \in \tau) x^{-1} \in z^{-2}$$

de onde

$$U(\tau) = \{x^{-2} : (Ex^{-2} \in \tau) x^{-2} \in z^{-2}\} = *U(\tau)$$

ou seja

$$U(\tau) = *U(\tau)$$

f) Infinitude

Já mostramos, após (11.22), que $\omega = *\omega$

g) Substituição

Seja ϕ uma fórmula cujas únicas variáveis livres são

x^i e y^i ; sem constantes; e cujo tipo mais baixo é

"i". Suponhamos que

$$(x^i)(y^i)(E!y^i) \phi x^i y^i$$

Seja $k = \{y^i : (Ex^i \in \tau) \phi x^i y^i\}$

pelo axioma (5):

$$(y^{i-1}) [(Ex^i \in \tau) \phi(x^i y^{i-1}) \leftrightarrow (Ex^{i-1} \in * \tau) \phi^*(x^{i-1} y^{i-1})]$$

$$\text{ou seja } *k = \{y^{i-1} : (Ex^{i-1} \in \tau) \phi^*(x^{i-1}, y^{i-1})\} \subset k$$

$$\text{mas } x^i \in \tau \rightarrow (Ex^{i-1}) z^{i-1} = x^i$$

$$\text{ora } (x^i) (E! y^i) \phi x^i y^i \leftrightarrow (x^{i-1}) (E! y^{i-1}) \phi x^{i-1} y^{i-1} \text{ por (5)}$$

$$\text{portanto } y^i \in k \rightarrow (Ew^{i-1}) w^{i-1} = y^i$$

ou seja

$$k = \{y^{i-1} : (Ex^i \in \tau) \phi(x^i y^{i-1})\}$$

$$\text{e } *k = k$$

Concluindo

(III.1) Teorema : Os termos τ , com $\tau = *\tau$, são fechados sob as operações de ZF.

As demonstrações antecedentes podem ser estendidas, obtendo-se o

(III.2) Teorema: Num modelo $\langle \underline{V}, * \rangle$ de $(\mathcal{Z}, *)$, os objetos regulares $a \in \underline{V}$ tais que $*a = a$ formam um modelo de ZF. Para este último teorema é necessário restringir-mos às fórmulas ϕ tais que para todo x regular existe y regular tal que ϕxy .

(III.3) Teorema: Se $(\mathcal{Z}, *)$ for consistente, então ZF é consistente.

De ora em diante ao dizermos que uma certa constante τ representa um conjunto queremos dizer que $*\tau = \tau$ com o adendo, quando conveniente, de que τ é regular.

§2 - O SISTEMA DE ACKERMANN

Ackermann em [1] propõe um sistema muito interessante para caracterizar externamente os conjuntos. Sabe-se (Lévy [7], Reinhardt [13]) que este sistema é equivalente a ZF sem a regularidade. Há porém, uma maneira muito natural de representá-lo em relação a $(\mathcal{Z}, *)$.

No sistema A temos variáveis para classes e um predicado primitivo $M(x)$ que intuitivamente significa que x é um conjunto.

As classes são classes de conjuntos e procura-se definir quais classes são conjuntos:

$$\alpha) (x)(\phi x \rightarrow Mx) \rightarrow (Ey)(z)(z \in y \leftrightarrow \phi(z))$$

$$\beta) x \subset y \wedge y \subset x \rightarrow x = y$$

$$\gamma) (Mx_1 \wedge \dots \wedge Mx_n) \rightarrow ((y)(\phi y \rightarrow My) \rightarrow (Ez)Mz \wedge \\ \wedge (u)(u \in z \leftrightarrow \phi u))$$

$$\delta) Mx \wedge (y \subset x \vee y \in x) \rightarrow My$$

Em $\gamma, \phi(x, x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula cujos parâmetros são $x, x_1, \dots, x_n$ e na qual não ocorre o predicado M .

Se interpretarmos $M(x)$ como o predicado externo $x = *x$ vemos que os quatro axiomas são facilmente dedutíveis de $(\mathcal{Z}, *)$ enriquecido. Equivalentemente, é fácil construir um modelo para A, partindo de um modelo para $(\mathcal{Z}, *)$: basta usar o modelo de ZF feito no parágrafo anterior.

É interessante observar que o artificialismo da condição sobre o axioma γ) desaparece neste contexto, ficando a condição extremamente natural.

Há outra maneira de interpretar A em relação a $(\mathcal{Z}, *)$.

Seja M o predicado

$$M(x^O) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} x^O \in V_i$$

e tomamos o sistema $(T_0, V_i, *)$ que é a subteoria de $(\mathcal{Z}, *)$ cuja linguagem tem como única constante V_i e como único tipo o tipo "0".

Obviamente, verificam-se em $(T_0, V_i, *)$ os axiomas α), β) e δ).

(III.4) Teorema Seja ϕ uma fórmula de $(T_0, V_i, *)$ em que não aparece a constante V_i , então

$$\begin{aligned} & [x_1^O \in V_i \wedge \dots \wedge x_n^O \in V_i] \rightarrow [(y^O)(\phi(y^O, x_1^O, \dots) \rightarrow y^O \in V_i) \rightarrow \\ & \rightarrow (Ez^O)(z^O \in V_i) \wedge (u^O)(u^O \in z^O \leftrightarrow \phi(u^O, x_1^O, \dots))] \end{aligned}$$

Prova: Tomando por hipótese

$$\phi(y^O, x_1^O, \dots) \rightarrow (Ez^i)z^i = y^O$$

temos

$$(x_1^{i+1}) \dots (x_n^{i+1})(Ey^{i+1})(x^{i+1})[x^{i+1} \in y^{i+1} \leftrightarrow \phi(x_1^{i+1}; x_1^{i+1}, \dots)]$$

aplicando (5a) vem

$$(x_1^i) \dots (x_n^i)(Ey^i)(x^i)[x^i \in y^i \leftrightarrow \phi(x^i, x_1^i, \dots)]$$

e usando a hipótese mais uma vez

$$(x_1^i) \dots (x_n^i) (E y^i) (x^o) [x^o \in y^i \leftrightarrow \phi(x^o, x_1^i, \dots)]$$

substituindo x^i por $x^o \in V_i$ e y^i por $z^o \in V_i$ temos a tese do teorema.

Conclusão:

(III.5) Teorema

$$(T_o, V_i, *) \vdash A$$

Usando os resultados de Levy e Reinhardt podemos tirar

(III.6) Teorema

$$(T_o, V_i, *) \vdash \text{ZF sem regularidade.}$$

No próximo parágrafo obtemos um resultado deste gênero diretamente.

§3 - O SISTEMA DE ZERMELO-FRAENKEL

Neste parágrafo apresentamos uma contrapartida sintática às considerações essencialmente semânticas do §1.

Seja T_i a subteoria de $(\mathcal{L}, *)$ constituída a partir das fórmulas em que não ocorrem constantes e cujas variáveis tem todas tipo " i ".

Há uma tradução imediata entre as linguagens de T_i e de ZF, por omissão e introdução do tipo " i ". Por meio desta

tradução, queremos demonstrar que

$$T_i \vdash \text{ZF sem regularidade.}$$

Para isto, como no §1, demonstramos os axiomas de ZF, um a um:

a) Extensionalidade

A forma desejada neste contexto é

$$(x^i)(y^i) \quad x^i = y^i \leftrightarrow (z^i)(z^i \in x^i \leftrightarrow z^i \in y^i)$$

já demonstrada em (II.1).

b) Par não ordenado

Pelo axioma (3) temos

$$(x^{i-1})(y^{i-1})(\exists z^i)(v^i)(v^i \in z^i \leftrightarrow v^i = x^{i-1} \vee v^i = y^{i-1})$$

e por (5a) na forma " $(x^i)(y^i)$ " vem

$$(x^i)(y^i)(\exists z^i)(v^i)(v^i \in z^i \leftrightarrow v^i = x^i \vee v^i = y^i)$$

c) Separação

Pelo axioma (3) temos:

$$(x^i)(\exists y^{i+1})(z^{i+1}) [z^{i+1} \in y^{i+1} \leftrightarrow z^{i+1} \in x^i \wedge \\ \wedge (\exists z^i = z^{i+1}) \phi z^i]$$

Como este $y^{i+1} \subset x^i$, temos pelo axioma (2)

$$(x^i)(\exists y^i)(z^i) [z^i \in y^i \leftrightarrow z^i \in x^i \wedge \phi z^i]$$

d) Partes

Pelo axioma (3)

$$(x^{i-1})(\exists y^i)(z^i)(z^i \in y^i \leftrightarrow z^i \subset x^{i-1})$$

aplicando (5a) na forma " (x^i) ", vem:

$$(x^i)(\exists y^i)(z^i)(z^i \in y^i \leftrightarrow z^i \subset x^i)$$

e) União

Pelo axioma (3)

$$(x^{i-1})(Ey^i)(z^i)(z^i \in y^i \leftrightarrow (Eu^i)(z^i \in u^i \wedge u^i \in x^{i-1}))$$

e, novamente por (5a):

$$(x^i)(Ey^i)(z^i)(z^i \in y^i \leftrightarrow (Eu^i)(z^i \in u^i \wedge u^i \in x^i))$$

f) Infinitude

Já mostramos após (II.22) que ω tem tipo " i ".

g) Substituição

Seja ϕ uma fórmula de L_i cujas únicas variáveis livres são x^i e y^i . Suponhamos que

$$(x^i)(E!y^i)\phi x^i y^i$$

Pelo axioma (5a) na forma " $(x^i)(Ey^i)$ " segue

$$(x^{i-1})(E!y^{i-1})\phi x^{i-1} y^{i-1} ;$$

aplicando (3) e (2) vem

$$(u^{i-1})(Ev^i)(y^i)[y^i \in v^i \leftrightarrow (Ex^i)(x^i \in u^{i-1} \leftrightarrow \phi x^i y^i)]$$

e aplicando (5a) na forma " (x^i) " segue:

$$(u^i)(Ev^i)(y^i)[y^i \in v^i \leftrightarrow (Ex^i)(x^i \in u^i \leftrightarrow \phi x^i y^i)]$$

Com estes fatos, temos suficientes recursos para de
finir os R_α , para qualquer ordinal α ,

(III.7) Definição

$$R_{\alpha+1} = \mathcal{S}(R_\alpha) \quad \text{e,}$$

se α é um ordinal limite,

$$R_\alpha = U\{R_\delta : \delta < \alpha\}$$

(III.8) Teorema $\alpha \in V_i \rightarrow R_\alpha \in V_i$

Prova : Se $R_\alpha \in V_i$, obviamente

$$R_\alpha' = \mathcal{O}(R_\alpha) \in V_i$$

No caso de um ordinal limite basta tomar a fórmula

$$\phi(x^i, y^i) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{Ord}(x^i) \wedge y^i = R_{x^i}$$

como, por hipótese,

$$(\delta \in \alpha) (E! y^i) \phi(\delta, y^i)$$

segue que

$$(Ez^i)(y^i) [y^i \in z^i \leftrightarrow (E\delta \in \alpha) \phi(\delta, y^i)]$$

Como $R_\alpha = \bigcup z^i$ e portanto tem tipo " i " vem

$$R_\alpha \in V_i$$

A propriedade $R(x)$, " $(E\alpha) x \in R_\alpha$ ", é expressável em L_i .

Pode-se refazer as provas (a)-(g) deste parágrafo, adicionando $(x^i)R(x^i)$ como hipótese. Isto significa adicionar o "axioma de Rank" a L_i . Tem-se então

(III.9) Teorema $T_i + (x^i)R(x^i) \vdash ZF$

(III.10) Definição

$$0_i = \{x^i : \text{Ord}(x^i)\} \quad (\text{que tem tipo } i+1)$$

Usando o teorema anterior, teremos

(III.11) Teorema A classe R_{0_i} é modelo de ZF.

Vale a pena enunciar mais um fato sobre 0_i . Usando o teorema de Hartog, pode-se provar que dado um ordinal α de tipo " i ", sempre existe β de tipo " i " tal que β não é injetável em α .

Suponha que 0_i seja injetável em um α de tipo " i ". Esta injeção, que seria uma função de tipo " $i+1$ ", induziria funções injetoras de tipo " i " de quaisquer $\beta > \alpha$ em α . Ora, isto contradiz o resultado de Hartog. Logo:

(III.12) Teorema Os ordinais 0_i são cardinais.

§4 - SISTEMAS DE CONJUNTOS E CLASSES

Neste parágrafo construímos um modelo para uma teoria do tipo "Kelley Morse" - ver Kelley [6].

Trata-se de uma teoria cujas variáveis representam "classes", algumas das quais podem ser "conjuntos". Uma classe é um conjunto se ela pertencer a outra classe. Pode-se supor um operador " $\{ \}$ " como o de $(\mathcal{C}, *)$.

Os Axiomas, com as convenções usuais, são:

$$I \quad - \quad (x)(y) \quad x = y \leftrightarrow (z)(z \in x \leftrightarrow x \in y)$$

$$II \quad - \quad (x_1) \dots (Ey)(x) [x \in y \leftrightarrow \phi(x, x_1, \dots)]$$

Definição: Seja M a classe

$$M = \{x : (Ey) x \in y\}$$

M é a classe dos conjuntos.

$$\text{III} - (x) [x \in M \rightarrow \exists x \in M]$$

$$\text{IV} - (x)(y) [x \in M \wedge y \in M \rightarrow (x \cup y) \in M]$$

$$\text{V} - (x) ["x \text{ é função}" \wedge "(dom\ x) \in M" \rightarrow "(im\ x) \in M"]$$

$$\text{VI} - (x) [x \in M \rightarrow Ux \in M]$$

$$\text{VII} - (x) [x \neq \Phi \rightarrow (Ey \in x)(y \cap x = \Phi)]$$

$$\text{VIII} - (Ex) [x \in M \wedge \Phi \in x \wedge (y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)]$$

Seja $\langle V, * \rangle$ um modelo para $(\mathcal{L}, *)$. Podemos construir um modelo para a teoria "KM" acima:

Para representar a classe M tomamos o conjunto $\underline{R_0}$ do modelo - é o R_α para o ordinal 0_{-1} .

Para representar as classes próprias tomamos o conjunto $\underline{K}$, definido externamente, de todas as classes de $\underline{R_0}$ dadas por constantes " $\{x^i : \phi x^i\}$ ", onde ϕ é uma fórmula de $L_{-1,0}$ a linguagem, sem constantes, dos tipos "0" e "-1".

O conjunto base do modelo será então:

$$\underline{C} = \underline{R_0} \cup \underline{K}$$

A relação de pertinência será representada pela própria relação " ε " do modelo original.

(III.13) Teorema $\langle \underline{C}, \varepsilon \rangle$ é um modelo para KM.

A prova é imediata para todos os axiomas com exceção da substituição V.

Seja f um elemento de $\underline{C}$ tal que f é uma coleção de pares $\langle a, b \rangle$ tais que se $\langle a, b \rangle \varepsilon f$ e $\langle a, c \rangle \varepsilon f$ então $b = c$,

Seja $m \in \underline{R_0}$ e seja n a classe dos " b " tais que existe $a \in m$ e $\langle a, b \rangle \varepsilon f$.

Para verificar o axioma (V) deve-se provar que

$$n \in \underline{R_0}$$

Ora, se $f \in \underline{R_0}$ isto é imediato e se $f \notin \underline{R_0}$ então $f \in K$, ou seja,

$$f = \{x^{-1} : \phi x^{-1}\}$$

onde ϕx^{-1} é uma fórmula tal que

$$\phi x^{-1} \leftrightarrow (Ey^{-1})(Ez^{-1})(x^{-1} = \langle y^{-1}, z^{-1} \rangle)$$

a partir da qual se pode obter uma fórmula $\psi(y^{-1}, z^{-1})$

$$f = \{\langle y^{-1}, z^{-1} \rangle : \psi(y^{-1}, z^{-1})\}$$

onde ψ está nas condições do axioma (5).

Dáí, tal como no caso de ZF, segue-se que nosso " n "

pertence a V_{-1} e portanto, $n \in \underline{R_0}$

Podemos concluir com o

(III.14) Corolário Consis $(\mathcal{C}, *) \rightarrow$ Consis KM.

§5 - UM MODELO INTERNO PARA ZF

Seja T_i a subteoria de $(\mathcal{U}, *)$ cuja linguagem, L_i , está restrita às fórmulas com variáveis de tipo " i " e sem constantes.

Já mostramos que há uma tradução de Zermelo-Fraenkel para L_i e vice-versa, tal que os teoremas de ZF são teoremas de T_i .

É um fato conhecido que, através de uma gödelização da linguagem, pode-se internamente em Zermelo-Fraenkel (e portanto em L_i) definir a noção de modelo. Em particular, pode-se definir a noção de modelos para Zermelo-Fraenkel e, devido ao Teorema de Gödel, segue, em notação óbvia, $ZF \not\vdash (\text{Existe um modelo para ZF})$, onde " $(\text{Existe um modelo para ZF})$ " é uma tradução da frase "Existe um modelo para ZF" para a linguagem de Zermelo-Fraenkel.

Denotamos por " $[\text{Existe um modelo para ZF}]$ " a tradução, para L_i da frase entre parênteses. Podemos, agora enunciar o teorema cuja prova pretendemos indicar neste parágrafo:

(III.15) Teorema $(\mathcal{U}, *) \vdash [\text{Existe um modelo de ZF}]$
do qual segue o

(III.16) Corolário $(\mathcal{U}, *) \vdash \text{Consis ZF}$

O esboço da prova de (III.15) será feito em vários passos:

1) Fixado um " i ", mostraremos primeiro que V_{i-1} é modelo para Zermelo-Fraenkel sem regularidade. A linguagem L_i será a linguagem formal a ser internalizada. Para falar de elementos do modelo usaremos variáveis de tipo " $i-1$ ". Assim, até menção em contrário, usaremos a linguagem $L_{i-1,i}$ enriquecida com a constante V_{i-1} .

2) As fórmulas de L_i serão gödelizadas na própria L_i - em elementos de V_{i-1} - da forma usual:

- I $\ulcorner x_m^i \in x_m^i \urcorner = \langle 0, \ulcorner x_n^i \urcorner, \ulcorner x_m^i \urcorner \rangle$
- II $\ulcorner x_n^i = x_m^i \urcorner = \langle 1, \ulcorner x_n^i \urcorner, \ulcorner x_m^i \urcorner \rangle$
- III $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner = \langle 2, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- IV $\ulcorner \sim \phi \urcorner = \langle 3, 3, \ulcorner \phi \urcorner \rangle$
- V $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner = \langle 4, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- VI $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner = \langle 5, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- VII $\ulcorner (x_m^i) \phi \urcorner = \langle 6, \ulcorner x_m^i \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner \rangle$
- VIII $\ulcorner (Ex_m^i) \phi \urcorner = \langle 7, \ulcorner x_m^i \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner \rangle$

3) A classe-modelo será V_{i-1} . A classe que corresponde às constantes da linguagem diagrama de V_{i-1} será

$$\{x^{i-1} : (Ey^{i-1}) x^{i-1} = \langle 8, 8, y^{i-1} \rangle\}$$

A relação ε de L_i será representada pela classe

$$D = \{x^{i-1} : (Ey^{i-1}) (Ez^{i-1}) (x^{i-1} = \langle y^{i-1}, z^{i-1} \rangle \wedge y^{i-1} \varepsilon z^{i-1})\}$$

4) Através desta gödelização as noções de "fórmula atômica", "fórmula", "sentença" e outras necessárias, tanto de L_i quanto da linguagem-diagrama, estão correspondidas por classes definíveis - i.e., definíveis através de uma fórmula - de $L_{i-1,i}$.

5) Seja " $\models$ " a relação de $L_{i-1,i}$, com a constante V_{i-1} que será definida pelas condições a seguir. Consideramos o sentido dos abusos de linguagem aqui empregados como auto-explanatório.

Condição 1: Seja A a classe das gödelizações de fórmulas da linguagem diagrama do tipo " $x^{i-1} \in y^{i-1}$ ".

$$(III.17) (x^i \in A) | V_{i-1} \models x^i \leftrightarrow (x^{i-1})(y^{i-1})(x^i = \ulcorner x^{i-1} \in y^{i-1} \urcorner \rightarrow \rightarrow (x^{i-1}, y^{i-1} \rangle_{\in D}) |$$

ou seja,

$$(III.18) (x^{i-1})(y^{i-1}) [V_{i-1} \models \ulcorner x^{i-1} \in y^{i-1} \urcorner \leftrightarrow \langle x^{i-1}, y^{i-1} \rangle_{\in D}]$$

Lembrando que $\langle x^{i-1}, y^{i-1} \rangle_{\in D} \leftrightarrow x^{i-1} \in y^{i-1}$, vem

$$(III.19) (x^{i-1})(y^{i-1}) [V_{i-1} \models \ulcorner x^{i-1} \in y^{i-1} \urcorner \leftrightarrow x^{i-1} \in y^{i-1}]$$

Condição 2: Seja B a classe das gödelizações de fórmulas da linguagem diagrama do tipo " $x^{i-1} = y^{i-1}$ ".

$$(III.20) (x^i \in B) [V_{i-1} \models x^i \leftrightarrow (x^{i-1})(y^{i-1})(x^i = \ulcorner x^{i-1} = y^{i-1} \urcorner \rightarrow \rightarrow x^{i-1} = y^{i-1})]$$

$$(III.21) \quad (x^{i-1})(y^{i-1}) [V_{i-1} \models x^{i-1} = y^{i-1} \leftrightarrow x^{i-1} = y^{i-1}]$$

As condições 3 a 8 são análogas entre si, por isto apenas apresentaremos a condição 7.

Condição 7: Seja C a classe das gödelizações de fórmulas do tipo " $\phi(x_m^i)$ ", de uma variável livre. Seja $S(z^{i-1}, y^i)$ a operação que, dado y^i em C , encontra a gödelização da fórmula obtida da fórmula representada por y^i substituindo-se z^{i-1} no lugar de x^i

$$(III.22) \quad (y^i \in C) [V_{i-1} \models \langle x_m^i, y^i \rangle \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (z^{i-1})(V_{i-1} \models S(z^{i-1}, y^i))]$$

trocado em miúdo e abusando da notação, isto significa

$$(III.23) \quad (\ulcorner \phi(x_m^i) \urcorner) [V_i \models \ulcorner (x_m^i) \phi(x_m^i) \urcorner \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (x^{i-1})(V_{i-1} \models \ulcorner \phi(x_m^i) [x^{i-1}] \urcorner)]$$

6) A relação " $\models$ " acima é definível por uma fórmula de $L_{i-1, i}$ e V_{i-1} .

7) Seja AZ a classe (definível) de L_i correspondente às gödelizações das fórmulas de L_i que são traduções dos axiomas de Zermelo-Fraenkel sem a regularidade.

Queremos mostrar que:

$$(III.24) \quad \text{Teorema: } (x^i) [x^i \in AZ \rightarrow V_{i-1} \models x^i]$$

Isto pode ser feito em $(\mathcal{C}, *)$, com auxílio de vários lemas:

(III.25) Lema (Extensionalidade)

$$(\mathcal{C}, *) \vdash (V_{i-1} \models^{\ulcorner} (x^i)(y^i) \quad x^i = y^i \leftrightarrow (z^i)(z^i \varepsilon x^i \leftrightarrow z^i \varepsilon y^i) \urcorner)$$

Prova: Pela definição de " $\models$ " e por (III.19) o consequente vem de

$$(x^{i-1})(y^{i-1}) [V_{i-1} \models^{\ulcorner} x^{i-1} = y^{i-1} \leftrightarrow (z^{i-1})(z^{i-1} \varepsilon x^{i-1} \leftrightarrow z^{i-1} \varepsilon y^{i-1}) \urcorner]$$

e a expressão entre colchetes é equivalente a:

$$(V_{i-1} \models^{\ulcorner} x^{i-1} = y^{i-1} \urcorner) \leftrightarrow (z^{i-1})(V_{i-1} \models^{\ulcorner} z^{i-1} \varepsilon x^{i-1} \leftrightarrow z^{i-1} \varepsilon y^{i-1} \urcorner)$$

onde, por (III.21) o primeiro membro equivale a

$$x^{i-1} = y^{i-1}$$

e o segundo a

$$(z^{i-1}) [(V_{i-1} \models^{\ulcorner} z^{i-1} \varepsilon x^{i-1} \urcorner) \leftrightarrow (V_{i-1} \models^{\ulcorner} z^{i-1} \varepsilon y^{i-1} \urcorner)]$$

e portanto a

$$(z^{i-1}) [(z^{i-1} \varepsilon x^{i-1}) \leftrightarrow (z^{i-1} \varepsilon y^{i-1})]$$

de onde se conclui (III.25) usando o axioma de extensionalidade (1) de $(\mathcal{C}, *)$.

Os outros axiomas e esquemas podem ser demonstrados de maneira análoga. A dificuldade é que as demonstrações e até os enunciados, se feitos com rigor, são extremamente complexos. A título de exemplo, daremos o enunciado do teorema que permite a definição de " $\models$ " para axiomas de separação, com os abusos usuais:

Lema (III.26) Seja P a classe das gödelizações de predicados com uma variável livre. Seja $C(x^i, y^i)$ o predicado que diz " y^i é a gödelização do axioma de compreensão sobre o predicado representado pela gödelização x^i ".

Então

$$(x^i)(y^i)[x^i \in P \wedge C(x^i, y^i) \rightarrow V_{i-1} \not\models y^i]$$

Através destes lemas, em número de 7: extensionalidade, par, separação, partes, união, infinidade e substituição, obtemos por uma disjunção a prova do Teorema (III.24).

8) Internalizando a noção de prova é possível mostrar que a classe ZI das gödelizações de teoremas de Zermelo - Fraenkel sem regularidade é definível por uma fórmula e que:

(III.27) Teorema

$$(\mathcal{C}, *) \vdash [(x^i)(x^i \in ZI \rightarrow V_{i-1} \models x^i)]$$

9) Até aqui, usamos V_{i-1} como modelo, mesmo sabendo que V_{i-1} só é modelo de ZI e não de ZF (com regularidade) por razões de simplicidade e para chegar ao teorema (IV,3) do próximo capítulo. Substituindo V_{i-1} por R_{α^i} , que é o " R_α " do ordinal α^i (o "menor ordinal" do tipo " i "), todas as provas podem ser refeitas e, provando a regularidade, vem na notação óbvia,

(III.28) Teorema

$$(x^i) [x^i \in ZF \rightarrow R_{0i} \not\models x^i]$$

9) Resta, finalmente, reduzir a fórmula acima, que está na linguagem $L_{i-1,i}$ com as constantes V_{i-1} e R_{0i} a uma fórmula conveniente de L_i .

Para isto tomamos duas variáveis, v^i e w^i onde a primeira representará R_{0i} e a segunda a relação " $\models$ ".

A própria definição implícita que demos de " $\models$ " permite-nos obter uma fórmula $\Phi(x^i, y^i)$, que diz " y^i é uma relação entre x^i e godelizações de fórmulas de L_i , tal que x^i serve como modelo interno de Zermelo-Fraenkel". As variáveis de tipo " $i-1$ " i.e., os elementos do modelo V_{i-1} , são elimináveis por condições " $z^i \in x^i$ ", onde x^i é o modelo.

Podemos, então reformular (III.15):

(III.29) Teorema:

$$(\mathcal{U}, *) \vdash (Ev^i)(Ew^i) [\Phi(v^i, w^i) \wedge (z^i)(z^i \in ZF \rightarrow \langle v^i, z^i \rangle \in w^i)]$$

e chegamos à conclusão que $(\mathcal{U}, *)$ é uma teoria mais forte que ZF no sentido em que T_i (subteoria de $(\mathcal{U}, *)$) tem teoremas não demonstráveis em ZF.

§6 - CATEGORIAS

Para encerrar este capítulo, mencionamos o fato de que é possível colocar todas as categorias usuais dentro de $(\mathcal{C}, *)$.

Uma forma de se fazer isto é considerar categorias, funtores e transformações naturais como classes de tipo "0", os objetos e morfismos sendo classes de tipo "-1". Desejando-se tratar de uma categoria dada por uma constante τ como objeto dentro de outra categoria, basta tomar o termo $*\tau$ para representar τ na categoria maior. Assim, toda categoria dada por uma constante estará representada, seja como categoria, seja como objeto de outras categorias.

CAPÍTULO IV

ALGUNS RESULTADOS E PROBLEMAS

§1 - MODELOS INTERNOS

As teorias $(\mathcal{L}, *)$ e T_i estão próximas de violar os Teoremas de Incompletude. Esta, ao menos, é a impressão que se tem quando observamos os vários modelos internos que construímos. Para esclarecer a situação enunciaremos vários teoremas a respeito neste parágrafo e no seguinte. Os teoremas serão válidos se $(\mathcal{L}, *)$ for consistente.

(IV.1) Teorema: V_{i-1} é modelo para $(\mathcal{L}, *)$. Não se pode, porém, definir a relação " $\models$ " por uma fórmula.

A demonstração externa de que V_{i-1} é modelo já foi indicada no Capítulo II, bastando interpretar termos de tipo " j " em classes de tipo " $i-1-j$ " de V_{i-1} . Esta interpretação não pode ser descrita internamente por uma só fórmula por causa da impossibilidade de se quantificar sobre tipos. Evidentemente é possível mostrar internamente que V_{i-1} serve de modelo para conjuntos finitos (externos) de fórmulas de $(\mathcal{L}, *)$.

(IV.2) Teorema: V_{i-1} é modelo para T_i mas não se pode provar numa prova finita que, para toda σ de T_i , $V_i \models \ulcorner \sigma \urcorner$.

Aqui a demonstração do teorema (III.15), tal como feita

atê o item 6), mostra que a relação " $\models$ " pode ser definida por uma fórmula de L_i . O choque com os Teoremas de Incompletude é impedido, contrariamente ao caso de ZF_1 , por ser impossível construir uma prova de $V_{i-1} \models \ulcorner \alpha \urcorner$ para todos os axiomas α de T_i . Isto é, dada uma gôdelização K de um axioma de T_i , é possível provar que $V_{i-1} \not\models K$; o que não se consegue é mostrar que

$$(x^i \in T) (V_{i-1} \models x^i)$$

onde T é a classe das gôdelizações de axiomas de T_i .

§2 - DEFINIÇÕES DE VERDADE

(IV.3) Teorema: Existe uma definição de Verdade para L_i em $L_{i-1,i} + V_{i-1}$.

A prova deste teorema pode ser baseada na prova do teorema (III.15), item 5. Lá fica estabelecido que existe uma relação definível " $\models$ " tal que, para toda sentença σ , $(V_{i-1} \models \ulcorner \sigma \urcorner) \leftrightarrow (\sigma^*)$. Como $\sigma \leftrightarrow \sigma^*$, resulta

$$(V_{i-1} \models \sigma) \leftrightarrow (\sigma)$$

Procurando reduzir isto a uma fórmula da linguagem L_i chegamos ao

(IV.4) Teorema: Em L_i é possível dar uma aproximação de definição de Verdade para a própria L_i .

Seja $\Phi(u^i, w^i)$, como em (III.29), a fórmula de L_i

que diz ser u^i uma classe apropriada para representar V_{i-1} e w_i uma relação binária para representar " $\in$ ". Então, do teorema anterior (IV.3) vem

$$(IV.5) (Eu^i)(Ew^i)(\Phi(u^i, w^i) \wedge (\langle u^i, \sigma \rangle \in w^i \leftrightarrow \sigma))$$

esquema este que chega muito próximo a uma definição de Verdade.

§3 - SISTEMAS MAIS FORTES QUE $(\mathcal{C}, *)$

Há duas maneiras naturais de fortalecer $(\mathcal{C}, *)$. A primeira é por introdução de um Axioma de Definibilidade que garanta que todo elemento de qualquer V_i seja dado por uma constante. A operação consiste em algo análogo à introdução do Modelo Minimal da Teoria dos Conjuntos de Cohen. A segunda possibilidade, já bastante explorada pelo autor e por J. Zimbarb, modifica o axioma (5), exigindo que cada V_i seja extensão de ordem superior (num sentido bem preciso) de V_{i-1} . Com este axioma é possível provar uma série de Axiomas de Infinitude de ZF, concluindo portanto que o Axioma de Construtibilidade, $V = L$, é falso se imergirmos ZF em $(\mathcal{C}, *)$.

Há esperanças que um estudo cuidadoso de extensões de $(\mathcal{C}, *)$ leve inclusive à solução da Hipótese do Contínuo.

Queremos ainda observar que apresentamos o sistema $(\mathcal{C}, *)$ com os axiomas (1) a (5) por desejarmos explorar uma das teorias mais fracas, construtíveis dentro de nosso esque

ma geral, em que ainda fosse possível tirar ZF.

§4 - "NEW FOUNDATIONS" E O AXIOMA DA ESCOLHA

Um dos problemas mais elusivos dos Fundamentos é a comparação do sistema "New Foundations", NF, de Quine [12], com outros sistemas de conjuntos.

Quine sugere uma fórmula de evitar o Paradoxo de Russell e a linguagem tipificada, que é a seguinte:

Chama-se uma fórmula ϕ da linguagem de ZF de *estratificável* quando for possível atribuir tipos (positivos) a todas as variáveis de ϕ de modo que em toda subfórmula $x \in y$ de ϕ o tipo atribuído a y é uma unidade superior ao tipo atribuído a x .

Axiomas:

- I $(x)(y) \quad x = y \leftrightarrow (z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$
- II $(x_1) \dots (Ey)(x) [x \in y \leftrightarrow \phi(x, x_1, \dots)] (\phi \text{ estratificável})$

Esta teoria é bastante diversa das demais. Specker [17] mostra que o Axioma da Escolha é falso para NF. Specker [18] mostra que a consistência de NF é equivalente à consistência de uma teoria de tipos inteiros, positivos e negativos, em que os universos de dois tipos quaisquer sejam isomorfos ($\sigma \leftrightarrow \sigma^*$). No mesmo artigo, Specker afirma que o Axioma da

Escolha é falso para uma tal teoria de tipos. Baseado nestes dados procuramos mostrar que a existência de modelos para $(\mathcal{U},*)$ acarretaria a existência de modelos para NF e que o Axioma da Escolha é falso em $(\mathcal{U},*)$. Infelizmente ambos os esforços goraram. Parece ser essencial nas teorias de tipos que se associam a NF, segundo o método de Specker, que os tipos sejam bem separados; $x^i \in x^j$ acarretando que $j > i$. Isto é falso em $(\mathcal{U},*)$.

NF é uma teoria muito instável ; em [5], Jensen mostra que a introdução de *Urelemente* na teoria já basta para tornar o Axioma da Escolha consistente.

O estudo comparado de NF e $(\mathcal{U},*)$ poderá trazer resultados interessantes.

§5 - OUTROS SISTEMAS

Neste parágrafo queremos apenas mencionar dois sistemas relacionados com o nosso. O primeiro é o sistema obtido de ZF com a introdução do Princípio de Reflexão de Lévy. É fácil ver que este Princípio é um teorema de T_1 .

O outro sistema a mencionar encontra-se na tese de G.G. Priest [11], cuja intenção também é de criar uma linguagem auto-referente. Sua solução é criar uma hierarquia positiva (aberta em cima) de linguagens e está aberta às objeções que fizemos aos tipos de Russell, especialmente o fato de o axioma de compreensão ser insuficiente para gerar conjuntos infinitos .

NOTAÇÕES

(x) - "para todo x "

(Ex) - "existe x "

$\phi(x_1^i, \dots, x_n^i)$ - uma fórmula ϕ cujas variáveis livres são $x_1^i, \dots, x_n^i$.

$\phi[y_1^j, \dots, y_n^j]$ - a fórmula ϕ acima onde y_k^j foi substituído no lugar de x_k^i .

$[\tau/y^i]$ - é um "quantificador de ordem zero": substituição da variável y^i pelo termo τ .

ϕ^* - a fórmula obtida da fórmula ϕ quando toda variável x_j^i - livre, ligada e mesmo dentro de " $\{ \}$ " - é substituída por x_j^{i-1} .

$\mathcal{L}$ - a linguagem de $(\mathcal{L}, *)$.

L - a linguagem obtida de $\mathcal{L}$ sem o operador $\{ \}$.

L_i - a linguagem obtida de L restringindo todos os tipos a " i ".

T_i - a restrição da teoria $(\mathcal{L}, *)$ à linguagem L_i , i.e., os teoremas de $(\mathcal{L}, *)$ que estão escritos na sublinguagem L_i .

$L_{i-1, i}$ - a linguagem obtida de L restringindo os tipos a " $i-1$ " ou " i ".

Em algumas fórmulas são omitidos parênteses quando seu lugar fica óbvio pelo contexto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ACKERMANN, W. Zur axiomatik der mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 131:336-345, 1956.
- [2] CHUAQUI, R. Bernays' class theory. In: COSTA, N. C. A.; ARRUDA, A. I.; CHUAQUI, R., eds. *Mathematical logic: proceedings of the first Brazilian Conference, Campinas, 1977*. New York, Marcel Dekker, 1978. p.31-55. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, 39)
- [3] FREGE, G. *Grundgesetze der Arithmetik*. 2.Aufl. Hildesheim, Georg Olms, 1962. 265p.
- [4] GÖDEL, K. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton, Princeton University Press, 1940. 66p. (Annals of Mathematics Studies, 3)
- [5] JENSEN, R. B. On the consistency of a slight(?) modification of Quine's new foundations. In: DAVIDSON, D.; HINTIKKA, J., eds. *Words and objections: essays on the work of W. V. Quine*. Dordrecht, D. Reidel, 1975. p.278-291. (Synthese Library, 21)
- [6] KELLEY, J. L. *General topology*. New York, Van Nostrand, 1955. 298p. (The University Series in Higher Mathematics)

- [7] LÉVY, A. On Ackermann's set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 24(2):154-166, jun, 1959.
- [8] COSTA, N. C. A. On the underlying logic of two systems of set theory. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A*, 73:1-8, 1970.
- [9] COSTA, N. C. A. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15(4):497-510, july 1974.
- [10] POINCARÉ, H. *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1927. 292p. (Bibliothèque de Philosophie Scientifique)
- [11] PRIEST, G. G. *Type theory in which variables range over predicates*. London, 1974. Tese (Doutoramento)
- [12] QUINE, W. V. O. New foundations for mathematical logic. In: _____. *From a logical point of view: 9 logico-philosophical essays*. Cambridge, Harvard University Press, 1953. p.80-101. Publicado originalmente em: *American Mathematical Monthly*, 44(2):70-80, feb. 1937.
- [13] REINHARDT, W. N. *Topics in the metamathematics of set theory*. Berkeley, 1967. Tese (Doutoramento) - University of California.

- [14] ROBINSON, A. *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Amsterdam, North-Holland, 1965. 284p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)
- [15] RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. In: HEIJENOORT, J. V. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Harvard University Press, 1967. p.150-182. Publicado originalmente em: *American Journal of Mathematics*, 30:70-80, 1908.
- [16] SCOTT, D. Axiomatizing set theory. In: AXIOMATIC set theory. Providence, AMS, 1974. v.2, p.207-214. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 13, p.2)
- [17] SPECKER, E. P. The axiom of choice in Quine's new Foundations for mathematical logic. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39:972-975, 1953.
- [18] SPECKER, E. P. Dualität. *Dialectica*, 12:451-465, 1958.
- [19] WANG, H. *A survey of mathematical logic*. Peking, Science Press, 1963. 651p. (Studies in Logic and the Foundations Mathematics)

Apresentamos uma teoria de tipos cujos índices variam sobre os inteiros negativos. Os tipos são cumulativos na medida em que termos de tipo " i " tem tipo " $i+1$ " também. Através de um morfismo " $*$ ", que não é símbolo da linguagem, é possível fazer um isomorfismo entre todos estes tipos de modo que a sub-teoria na linguagem cujos tipos vão até " $i-1$ " é essencialmente a mesma que aquela cujos tipos são até " i " ou até " 0 ".

Com estes recursos criamos uma teoria $(\mathcal{U}, *)$ mais forte que ZF $((\mathcal{U}, *) \vdash \text{Consis ZF})$ em que (externamente) vale a compreensão plena, isto é, em que a todo predicado corresponde uma classe que "representa" o predicado. $(\mathcal{U}, *)$ dispensa um axioma especial de infinidade.

A B S T R A C T

We present a type theory where the type indices range over negative integers. The types are cumulative in that terms of type " i " also belong to type " $i+1$ ". Through a morphism " $*$ ", " $*$ " does not belong to the language, it is possible to make all types isomorphic so that the subtheory in the language whose types range up to " $i-1$ " is essentially the same as the subtheory that ranges up to " i " or up to " 0 ". Using these methods we are able to design a theory $(\mathcal{U}, *)$ stronger than ZF $((\mathcal{U}, *) \vdash \text{Consis ZF})$ with an (external) kind of full comprehension, i.e., to each predicate it is possible to associate a class that "portrays" it. $(\mathcal{U}, *)$ also dispenses with a special Infinity Axiom.