**Formas p-invariantes em
álgebras de Bernstein**

Maria Luiza Paiva e Silva Lelis

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabricio Costa

São Paulo, outubro de 1996

Para Kermes, Joseli, Andréa, Letícia
e Carolina dedico este trabalho, que
os privou de muitos momentos da fi-
lha, mulher, mãe e avó Maria Luiza.

Agradecimentos

Durante os quatro anos em que estive em São Paulo cursando o doutoramento, minha sobrevivência foi parcialmente provida pela bolsa que recebi da CAPES, a qual agradeço. A outra parte foi suprida pela minha irmã Maria Helena, a quem já devo ter agradecido pessoalmente, mas faço-o novamente, de forma pública.

A primeira área da Matemática a me entusiasmar no bacharelado foi a álgebra. Tinha aulas com o prof. Ivan Camargo, muito jovem nessa época. Bem mais tarde, quando pude iniciar o doutorado, ele foi designado meu orientador de curso e sugeriu que procurasse o prof. Roberto Costa como um possível orientador de tese. Sou grata ao prof. Ivan pela acertada sugestão e pelas boas aulas.

O início do curso foi bem difícil, especialmente porque retomava hábitos de estudo regular após uma pausa de quinze anos. Foi valioso o auxílio de docentes, colegas e funcionários. Sou grata à comunidade do IME.

Resolvido, desde os primeiros contatos, que me dedicaria à área de álgebras não associativas, tratei de passar meu entusiasmo a uma colega de curso, a profa. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira. Tornamo-nos grandes amigas e constantes companheiras de estudos. Seu apoio, bem como de Luís e D. Rosa, seu marido e sua mãe, é uma das dívidas irresgatáveis que tenho.

Organizar uma seqüência de substantivos e adjetivos, devidamente costurados por verbos e outras palavras das diversas categorias gramaticais, com o propósito de expressar minha gratidão ao prof. Roberto Costa, é tarefa que requer bem mais talento do que possuo. O arsenal inesgotável de problemas que sempre tinha a sugerir, a maneira como acompanhou o desenvolvimento do trabalho e suas intervenções na medida exata confirmavam o brilhante orientador e

pesquisador. O apoio e estímulo recebidos, que extrapolaram muito a função do orientador, deixaram-me a convicção de que o prof. Roberto é uma das pessoas mais generosas, humanas e solidárias que conheci.

À Joelma, que digitou todo o texto, vão meus agradecimentos finais.

Machado de Assis, explicando a ingratidão humana, não me lembro agora em qual obra, diz que a memória do benefício é mais viva no autor do que no beneficiado. Suponho não estar isenta desta prática reprovável e, humildemente, peço desculpas às pessoas que deveria citar e não o fiz.

Maria Luiza Paiva e Silva Lelis

Abstract

We introduce the concept of p -invariant linear form in a baric algebra, as a generalization of the invariant linear forms introduced by Lyubich. The set of p -invariant linear forms in a baric algebra (A, w) is a vector subspace J_p of the dual A^* , with dimension at least 1. We calculate $J_p^\perp$ for every train polynomial p of arbitrary degree, in case A is a Bernstein algebra. Some consequences are proved, related to the problem of comparing train algebras and Bernstein algebras. As another consequence, we prove that the subspace $UZ + U^2Z$ has dimension invariant under change of idempotentes. In the final section, we prove some results for exceptional Bernstein algebras.

Resumo

Introduzimos o conceito de formas lineares p -invariantes numa álgebra bária, como uma generalização das formas invariantes definidas por Lyubich. O conjunto das formas lineares p -invariantes numa álgebra bária (A, w) é um subespaço vetorial J_p do espaço dual A^* , com dimensão pelo menos 1. Calculamos $J_p^\perp$ para todo train polinômio p de grau arbitrário, no caso em que A é uma álgebra de Bernstein. Algumas consequências são demonstradas, relacionadas ao problema de comparar train álgebras e álgebras de Bernstein. Como outra consequência, demonstramos que o subespaço $UZ + U^2Z$ tem dimensão invariante sob mudança de idempotentes. Na seção final, provamos alguns resultados para álgebras de Bernstein excepcionais.

Introdução

No início do século XVIII o Cálculo Diferencial e Integral já fora desenvolvido por Newton e Leibnitz. *Principia*, já na segunda edição, formulava leis da Física e da Mecânica Celeste usando a eficiente ferramenta que a Matemática lhe proporcionava.

Contudo, no mesmo século XVIII, os fenômenos de herança genética ainda eram explicados por variada espécie de lendas e superstições. É somente em meados do século XIX que nasce a Genética, com as experiências de Mendel sobre hibridação de ervilhas. Desde então, vários métodos matemáticos têm sido aplicados com sucesso nesse campo: teoria das probabilidades, equações diferenciais não lineares e álgebras não associativas.

A clássica lei de Hardy-Weinberg, estabelecida em 1908, afirma que, sob certas condições, as proporções genotípicas de uma população atingem o equilíbrio estacionário já a partir da segunda geração.

Em 1923, S. Bernstein suscitou - e parcialmente resolveu - o problema de caracterizar todos os operadores de evolução satisfazendo o princípio estacionário, isto é, os operadores quadráticos idempotentes agindo sobre as n -uplas de números reais $(x_1, \dots, x_n)$ com $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. O princípio de estacionaridade é uma generalização das leis de Mendel e do teorema de Hardy-Weinberg.

Uma sequência de artigos de I.M.H. Etherington, iniciada em 1939, deu origem a um novo campo da Matemática, as chamadas álgebras genéticas. Etherington deu uma formulação matemática precisa das leis de Mendel, introduziu as noções de álgebra básica, de train álgebra e de train-álgebra especial. Desde então muitos autores têm se dedicado a estudos nesse campo.

Muitos anos depois que Bernstein colocou o problema que mencionamos, Ju.I. Lyubich e Ph. Holgate, na década de 70, em trabalhos independentes, traduziram o problema em termos puramente algébricos, definindo assim as álgebras de Bernstein.

Assim como as demais álgebras emanadas da Genética, as álgebras de Bernstein são, em geral, não associativas. Entretanto, as técnicas usuais da teoria das álgebras não produzem muito resultado no estudo das álgebras de Bernstein, devido a certas características próprias. Um caminho importante para a abordagem de sua estrutura é o estudo dos idempotentes e da decomposição de Peirce que existe associada a cada um deles. Lyubich mostra que as dimensões dos subespaços que aparecem na decomposição de Peirce são invariantes sob mudança do idempotente. Diversos autores usaram a invariância da dimensão dos subespaços de Peirce, e de alguns outros obtidos a partir de produtos e somas deles, para obtenção de resultados acerca da estrutura das álgebras de Bernstein e da classificação delas em certos casos particulares. É razoável a suspeita de que, à medida que aumenta a complexidade das álgebras, o papel desses invariantes torna-se cada vez mais importante para decidir as classes de isomorfismos. Assim, julgamos que dispor de um grande número de subespaços de dimensões independentes da escolha do idempotente pode contribuir para a melhor compreensão da estrutura e auxiliar no complexo problema da classificação geral das álgebras de Bernstein. É nesse contexto que se insere a presente monografia.

No primeiro capítulo, são apresentados alguns fatos básicos já conhecidos sobre álgebras de Bernstein, particularmente aqueles associados à decomposição de Peirce. A partir dos subespaços de Peirce U e Z , relativos a um idempotente fixado numa álgebra de Bernstein, pode-se construir outros subespaços que se expressam como "polinômio" em U e Z , tais como $U^2, U^3, UZ, U(UZ), UZ \oplus U^2$, etc. Fixamos nossa atenção nos "polinômios" de grau ≤ 3 ; através da literatura disponível, de algumas técnicas simples e de contra-exemplos, estabelecemos uma lista de subespaços cujas dimensões dependem do idempotente. Restaram diversos subespaços sem conclusão a esse respeito. Cumpria descobrir uma técnica para obter resultados a respeito da independência, ou não, das dimensões desses subespaços restantes.

Examinando o conceito de formas invariantes em álgebras básicas dado por Lyubich vimos que a determinação do subespaço ortogonal do espaço de tais for-

mas numa álgebra de Bernstein permite concluir que o subespaço $(Z^2 + UZ) \oplus Z$ é invariante em relação à escolha do idempotente. Este fato já era conhecido por outros meios mas imaginamos que, estendendo o conceito de formas invariantes para formas p -invariantes, poderíamos obter mais subespaços de dimensões independentes da escolha do idempotente, dentre aqueles que restaram no Capítulo 1. Assim, no Capítulo 2, é dado o conceito de forma p -invariante numa álgebra bária e é determinado o subespaço ortogonal do espaço dessas formas numa álgebra de Bernstein, para um T -polinômio arbitrário $p(x)$. Foram obtidos assim alguns subespaços de dimensões invariantes da forma que buscávamos no Capítulo 1, mas não na quantidade que gostaríamos.

Mas o estudo das formas p -invariantes produziu e talvez ainda produza outros resultados interessantes. No Capítulo 3 são apresentados alguns deles. Por exemplo, é estabelecido um critério razoavelmente simples para decidir se uma álgebra de Bernstein é, ou não é, uma train-álgebra de determinado posto n . No caso em que a álgebra é train, exibimos uma T -equação necessariamente satisfeita pela álgebra. Ainda no Capítulo 3, obtemos uma cadeia descendente de subespaços invariantes contidos no núcleo de uma álgebra de Bernstein. Tal cadeia estabilizará em 0 se, e somente se, a álgebra for train. Encerramos o capítulo com algumas considerações sobre uma classe de álgebras particularmente complexa quanto à classificação: as álgebras de Bernstein excepcionais.

Conteúdo

1. Sobre invariantes numéricos numa álgebra de Bernstein	10
1.1 Preliminares	10
1.2 Identidades numa álgebra de Bernstein	12
1.3 Alguns subespaços de dimensões invariantes	14
1.4 Alguns subespaços de dimensões não invariantes	21
1.5 Conclusão	25
2. Formas p-invariantes	30
2.1 Formas invariantes	31
2.2 Formas p-invariantes	35
2.3 O caso de polinômios de grau 3 e 4	38
2.4 T-polinômios arbitrários	51
3. Aplicações	68
3.1 Train-álgebras de Bernstein	69
3.2 Álgebras quocientes	76
3.3 Ainda sobre train-álgebras de Bernstein	82
3.4 Subespaços anuladores	85
3.5 Sobre álgebras excepcionais do tipo $(2, n - 2)$	87
3.6 Considerações finais	98
Bibliografia	100

Capítulo 1

Sobre invariantes numéricos numa álgebra de Bernstein

Neste capítulo apresentamos alguns fatos básicos sobre as álgebras de Bernstein. Em particular exploramos um pouco a decomposição de Peirce associada a cada idempotente da álgebra. Esta decomposição define, para cada idempotente e , dois subespaços U_e e Z_e que dependem, em geral, de e . Mostraremos que alguns subespaços construídos a partir de U_e e Z_e são invariantes ou, pelo menos, têm dimensões invariantes em relação à escolha do idempotente. Estes invariantes numéricos podem ser usados para decidir sobre a existência ou não de isomorfismos entre duas álgebras dadas. A quase totalidade dos fatos aqui tratados são já bem conhecidos e por isso nos limitaremos a citar a maioria deles. As seções 4 e 5 contêm alguma contribuição nova à teoria das álgebras de Bernstein. Em alguns casos, como, por exemplo, na Proposição 1.2 colocamos uma demonstração, para facilitar a tarefa do leitor.

1.1. Preliminares

Seja K um corpo. O espaço vetorial sobre o corpo K livremente gerado pelos símbolos $e_1, e_2, e_3, \dots$ é o conjunto de todas as somas formais $\sum \alpha_i e_i$, onde (α_i) é uma família quase nula de elementos de K , para as quais definimos (dados α_i, β_i e α em K):

Igualdade: $\sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i e_i$ se e somente se $\alpha_i = \beta_i$, para todo i

Adição: $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i e_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) e_i$

Multiplicação por escalar: $\alpha (\sum \alpha_i e_i) = \sum (\alpha \alpha_i) e_i$

Indicaremos tal espaço vetorial por $\langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle$ e é claro que $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ é uma base deste espaço.

Dado um espaço vetorial V e um subconjunto X de V , indicaremos por $\langle X \rangle$ o subespaço de V gerado por X , isto é, $\langle X \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de X com coeficientes em K . Se X é o conjunto dos elementos x de V que satisfazem uma certa propriedade $P(x)$, às vezes escrevemos $\langle x \mid P(x) \rangle$ ao invés de $\langle X \rangle$. É claro que X não é necessariamente uma base de $\langle X \rangle$.

Uma álgebra A sobre um corpo K é um espaço vetorial sobre K no qual está definida uma multiplicação interna $x, y \in A \mapsto xy \in A$ que satisfaz as propriedades:

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

para quaisquer $x, y, z \in A$ e qualquer $\alpha \in K$.

A álgebra A se diz associativa ou comutativa conforme a multiplicação seja associativa ou comutativa: $x(yz) = (xy)z$ ou $xy = yx$, para todo $x, y, z \in A$.

Seja A uma álgebra sobre um corpo K , $x \in A$ e $V \subseteq A$ um subespaço vetorial de A . As potências principais à esquerda e à direita de x são definidas, respectivamente, por:

$${}^1x = x; \quad {}^{n+1}x = x({}^nx), \quad (n \geq 1)$$

$$x^1 = x; \quad x^{n+1} = (x^n)x, \quad (n \geq 1)$$

Similarmente, as potências principais à esquerda e à direita de V são definidas, respectivamente, por:

$${}^1V = V; \quad {}^{n+1}V = V({}^nV), \quad (n \geq 1)$$

$$V^1 = V; \quad V^{n+1} = (V^n)V, \quad (n \geq 1)$$

onde VW denota o subespaço vetorial gerado por todos os produtos vw com $v \in V$ e $w \in W$, se V e W são subespaços de A . É claro que se A é uma álgebra comutativa, então ${}^nx = x^n$ e ${}^nV = V^n$ para todo $n \geq 1$, $x \in A$ e V subespaço de A .

Dadas duas álgebras A e B sobre um mesmo corpo K , uma aplicação $\varphi : A \rightarrow B$ se diz um homomorfismo de álgebras se φ é uma aplicação linear tal que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer x e y em A .

Uma *álgebra bária* sobre K é um par (A, w) onde A é uma álgebra sobre K e $w : A \rightarrow K$ é um homomorfismo de álgebras, não nulo, o qual chamamos homomorfismo peso de (A, w) ou, simplesmente, de A . O conjunto $N = \{a \in A : w(a) = 0\}$ é um ideal bilateral de codimensão 1 em A .

Em todo este trabalho, K denota um corpo comutativo, infinito, de característica diferente de 2. Uma álgebra sobre K será sempre comutativa, não necessariamente associativa, de dimensão finita sobre K .

1.2. Identidades numa álgebra de Bernstein

O conceito de álgebra de Bernstein foi introduzido no início dos anos 70 por Ph. Holgate e Y. Lyubich, independentemente. Era uma tentativa de resolver um problema, colocado e parcialmente resolvido por S. Bernstein em 1923, referente à existência de operadores quadráticos idempotentes no $\mathbb{R}^n$, ver [4] para maiores detalhes.

Uma álgebra bária (A, w) é chamada uma *álgebra de Bernstein* se satisfaz a igualdade

$$(x^2)^2 = w(x)^2 x^2, \quad x \in A \quad (1.1)$$

Recordamos a seguir alguns resultados sobre álgebras de Bernstein que podem ser encontrados, por exemplo, em [26] e [24].

Para toda álgebra de Bernstein o homomorfismo peso é único. Toda álgebra de Bernstein (A, w) possui pelo menos um idempotente não nulo e um tal idempotente tem obrigatoriamente peso 1. A cada idempotente não nulo e de A está associada uma decomposição de Peirce

$$A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e \quad (1.2)$$

onde $U_e = \{x \in N \mid 2ex = x\}$ e $Z_e = \{x \in N \mid ex = 0\}$. Estes subespaços são os subespaços de Peirce relativamente a e . Não havendo possibilidade de confusão

escrevemos, por simplicidade, U e Z ao invés de U_e e Z_e . Os subespaços de Peirce satisfazem as relações:

$$UZ \subseteq U, \quad Z^2 \subseteq U, \quad U^2 \subseteq Z, \quad UZ^2 = 0, \quad N = \ker w = U \oplus Z \quad (1.3)$$

A linearização parcial de (1.1) produz as identidades

$$2x^2(xy) = w(xy)x^2 + w(x)^2xy \quad (1.4)$$

$$4(xy)(xz) + 2x^2(yz) = w(yz)x^2 + 2w(xy)xz + 2w(xz)xy + w(x^2)yz \quad (1.5)$$

para quaisquer x, y, z em A .

Em toda álgebra de Bernstein valem também as seguintes identidades:

$$u^3 = 0; \quad u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \quad (1.6)$$

$$u(uz) = 0; \quad u_1(u_2z) + u_2(u_1z) = 0 \quad (1.7)$$

$$uz^2 = 0; \quad u(z_1z_2) = 0 \quad (1.8)$$

$$(z_1z_2)^2 = 0; \quad z_1^2z_2^2 = 0 \quad (1.9)$$

$$u^2(ux) = 0; \quad z^2(zx) = 0 \quad (1.10)$$

$$(uz)^2 = 0; \quad (u_1z)(u_2z) = 0; \quad (uz_1)(uz_2) = 0 \quad (1.11)$$

$$u^2z^2 = 0; \quad (u_1u_2)z^2 = 0; \quad u^2(z_1z_2) = 0 \quad (1.12)$$

para quaisquer u, u_1, u_2 em U , z, z_1, z_2 em Z e $x \in \ker w$.

As identidades acima são muito conhecidas e por isso não apresentamos suas demonstrações, que podem ser encontradas, por exemplo, em [26].

A próxima proposição generaliza algumas das identidades anteriores.

Proposição 1.1 Para todo $k \geq 2$ e todo $u \in U$ e $z \in Z$, temos:

$$(a) \quad UZ^k = 0$$

$$(b) \quad uR_z^{k-1}(u) = 0$$

$$(c) \quad uR_z^{k-1}(u^2) = 0$$

onde, para cada $a \in A$, R_a indica o operador linear de A definido por $R_a(x) = xa$, para $x \in A$.

Prova de (a): Já observamos acima que $UZ^2 = 0$ logo (a) é verdadeiro para $k = 2$. Suponhamos agora que $UZ^k = 0$ para um certo $k \geq 2$ e mostremos

que $UZ^{k+1} = 0$. Por recorrência sobre $k \geq 2$ é fácil estabelecer que $Z^k \subseteq U$, generalizando assim a segunda inclusão em (1.3). Dados $u \in U$, $z \in Z$ e $w \in Z^k$, temos, usando (1.7), $u(zw) = -w(uz)$. Mas $w(uz) \in UZ^k = 0$. Logo, $u(zw) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$, $w \in Z^k$ e portanto $UZ^{k+1} = 0$.

Prova de (b): Para $k = 2$, usando (1.7) temos $uR_z^{k-1}(u) = uR_z(u) = u(uz) = 0$. Para $k = 3$ usando (1.7) e (1.11) temos $uR_z^{k-1}(u) = uR_z^2(u) = u((uz)z) = -(uz)(uz) = 0$. Suponhamos agora que para um certo $k \geq 3$ se tenha $xR_y^{l-1}(x) = 0$, para todo $x \in U$, para todo $y \in Z$ e $2 \leq l \leq k$. Devemos mostrar que $uR_z^k(u) = 0$ para todo $u \in U$ e $z \in Z$. Por recorrência, é fácil mostrar que $R_z^n(u) \in U$ para todo $n \geq 1$. Usando (1.7) temos $uR_z^k(u) = u((R_z^{k-1}(u))z) = -R_z^{k-1}(u)(uz) = -(uz)R_z^{k-2}(uz)$. Pela hipótese de indução, $(uz)R_z^{k-2}(uz) = 0$ uma vez que $uz \in U$ e $2 \leq k-1 < k$. Logo $uR_z^k(u) = 0$.

Prova de (c): Para $k = 2$ temos $uR_z^{k-1}(u^2) = uR_z(u^2) = u(u^2z) = 0$, por (1.8). Para $k = 3$ temos, usando (1.7), $uR_z^{k-1}(u^2) = uR_z^2(u^2) = u((u^2z)z) = -(u^2z)(uz) = 0$ pois $(u^2z)(uz) \in UZ^2 = 0$. Antes de considerarmos o caso $k > 3$, observemos que $R_z^n(x) \in U$ para todo $n \geq 1$, $z \in Z$ e $x \in \ker w$. De fato, como x é da forma $x = u_1 + z_1$, com $u_1 \in U$ e $z_1 \in Z$, temos, para $n = 1$: $R_z^n(x) = R_z(u_1 + z_1) = u_1z + z_1z \in U$. Supondo que $R_z^n(y) \in U$ para um certo inteiro positivo n , para todo $z \in Z$ e $y \in \ker w$, temos $R_z^{n+1}(x) = R_z^n(xz) \in U$. Seja agora $k > 3$. Mostremos que $uR_z^{k-1}(u^2) = 0$. Como $R_z^{k-2}(u^2) \in U$ e $R_z^{k-3}(u^2) \in U$ temos, usando (1.7) e (1.11), $uR_z^{k-1}(u^2) = u(R_z^{k-2}(u^2)z) = -R_z^{k-2}(u^2)(uz) = -(R_z^{k-3}(u^2)z)(uz) = 0$. ■

Os resultados desta proposição serão usados a partir do Capítulo 2.

1.3. Alguns subespaços de dimensões invariantes

Vamos reunir nesta seção alguns resultados conhecidos sobre invariância de dimensão de certos subespaços em uma álgebra de Bernstein.

Fixado um idempotente não nulo e de uma álgebra de Bernstein A , é bem conhecido que o conjunto $Ip(A)$ dos idempotentes não nulos de A é dado por $Ip(A) = \{e + u + u^2 \mid u \in U\}$. Ou seja, o conjunto dos idempotentes de A é parametrizado pelo subespaço U .

Proposição 1.2 Se (A, w) é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ em relação a um idempotente não nulo e e $f = e + \sigma + \sigma^2$ é um idempotente não nulo qualquer de A , onde $\sigma \in U_e$, então os subespaços de Peirce U_f e Z_f têm a seguinte descrição em termos de U_e e Z_e :

$$U_f = \{u + 2\sigma u \mid u \in U_e\} \quad (1.13)$$

$$Z_f = \{z - 2(\sigma + \sigma^2)z \mid z \in Z_e\} \quad (1.14)$$

Prova: Dado $u' = u + 2\sigma u$, com $u \in U_e$, temos $fu' = (e + \sigma + \sigma^2)(u + 2\sigma u) = eu + 2e(\sigma u) + \sigma u + 2\sigma(\sigma u) + \sigma^2 u + 2\sigma^2(\sigma u)$. Como

$$eu = \frac{1}{2}u \quad (\text{pois } u \in U_e)$$

$$e(\sigma u) = 0 \quad (\text{pois } \sigma u \in U_e^2 \subseteq Z_e)$$

$$\sigma^2 u + 2\sigma(\sigma u) = 0 \quad (\text{ver (1.6)})$$

$$2\sigma^2(\sigma u) = 0 \quad (\text{ver (1.10)})$$

segue que $fu' = \frac{1}{2}u + \sigma u = \frac{1}{2}u'$. Portanto $u' \in U_f$ e $\{u + 2\sigma u \mid u \in U_e\} \subseteq U_f$. Seja agora $x \in U_f$. Como $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ e $w(x) = 0$, x é da forma $x = u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Sendo $x = 2fx$ segue que $u + z = 2(e + \sigma + \sigma^2)(u + z) = (u + 2\sigma z + 2\sigma^2 u + 2\sigma^2 z) + 2\sigma u$. No último membro da igualdade acima, a expressão entre parênteses pertence a U_e e $2\sigma u \in Z_e$. Logo $2\sigma u = z$ e $x = u + 2\sigma u$; portanto $U_f \subseteq \{u + 2\sigma u \mid u \in U_e\}$, o que completa a demonstração de que $U_f = \{u + 2\sigma u \mid u \in U_e\}$.

Provemos agora a igualdade (1.14). Tomando-se $z' = z - 2(\sigma + \sigma^2)z$, com $z \in Z_e$, vem $fz' = (e + \sigma + \sigma^2)(z - 2\sigma z - 2\sigma^2 z) = ez - 2e(\sigma z) - 2e(\sigma^2 z) + \sigma z - 2\sigma(\sigma z) - 2\sigma(\sigma^2 z) + \sigma^2 z - 2\sigma^2(\sigma z) - 2\sigma^2(\sigma^2 z)$. Como

$$ez = 0 \quad (\text{pois } z \in Z_e)$$

$$2e(\sigma z) = \sigma z \quad (\text{pois } \sigma z \in U_e Z_e \subseteq U_e)$$

$$2e(\sigma^2 z) = \sigma^2 z \quad (\text{pois } \sigma^2 z \in Z_e^2 \subseteq U_e)$$

$$\sigma(\sigma z) = 0 \quad (\text{ver (1.7)})$$

$$\sigma(\sigma^2 z) = 0 \quad (\text{ver (1.8)})$$

$$\sigma^2(\sigma z) = 0 \quad (\text{ver (1.10)})$$

$$\sigma^2(\sigma^2 z) = 0 \quad (\text{ver (1.12)})$$

segue que $fz' = -\sigma z - \sigma^2 z + \sigma z + \sigma^2 z = 0$. Logo $z' \in Z_f$ e $\{z - 2(\sigma + \sigma^2)z \mid z \in Z_e\} \subseteq Z_f$. Por outro lado se $x = u + z \in Z_f$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $0 = fx = (e + \sigma + \sigma^2)(u + z) = eu + ez + \sigma u + \sigma z + \sigma^2 u + \sigma^2 z = (\frac{1}{2}u + \sigma z + \sigma^2 u + \sigma^2 z) + \sigma u$. Uma vez que a expressão entre parênteses do último membro da igualdade acima pertence a U_e e $\sigma u \in Z_e$ segue que $\frac{1}{2}u + \sigma z + \sigma^2 u + \sigma^2 z = 0$ e $\sigma u = 0$. De (1.6) temos $\sigma^2 u + 2\sigma(\sigma u) = 0$. Como aqui $\sigma u = 0$, tem-se $\sigma^2 u = 0$. Assim, de $\frac{1}{2}u + \sigma z + \sigma^2 u + \sigma^2 z = 0$ obtém-se $u = -2\sigma z - 2\sigma^2 z = -2(\sigma + \sigma^2)z$ e $x = z - 2(\sigma + \sigma^2)z$. Portanto $Z_f \subseteq \{z - 2(\sigma + \sigma^2)z \mid z \in Z_e\}$, o que encerra a demonstração de (1.14). ■

Corolário 1.3 Nas hipóteses acima, $\dim U_f = \dim U_e$ quaisquer que sejam os idempotentes não nulos e e f de uma álgebra de Bernstein (e portanto também $\dim Z_f = \dim Z_e$).

Prova: A aplicação $u \in U_e \mapsto u + 2\sigma u \in U_f$, onde σ é tal que $f = e + \sigma + \sigma^2$, é linear bijetora. ■

Em vista do corolário acima, define-se o tipo de uma álgebra de Bernstein da seguinte maneira: se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma decomposição de Peirce tal que $\dim U_e = r$ e $\dim Z_e = s$, o par de inteiros $(1 + r, s)$ é chamado o *tipo* de A . Notemos que, nesse caso, $\dim A = 1 + r + s$. Este invariante permite particionar a classe das álgebras de Bernstein de dimensão $n + 1$ em $n + 1$ subclasses, formadas pelas álgebras de tipo $(n + 1, 0)$, $(n, 1)$, $(n - 1, 2)$, ..., $(1, n)$. Ele realiza portanto uma pré classificação das álgebras de Bernstein. O problema de classificar as álgebras com um dado tipo encerra dificuldades somente resolvidas até agora para certos tipos mais simples.

Embora U_e e Z_e dependam em geral do idempotente e , suas dimensões são invariantes, como vimos acima. A partir de U_e e Z_e podemos formar os subespaços U_e^2 , Z_e^2 , $U_e Z_e$, $U_e^2 Z_e$, etc. Obtemos também novos subespaços ao somá-los, por exemplo, $U_e^2 \oplus U_e Z_e$. Assim, somando-se "monômios" em U_e e Z_e obtém-se uma extensa lista de "polinômios" que são subespaços da álgebra. Um problema interessante (e difícil) é decidir quais dentre eles são invariantes ou, pelo menos, têm dimensão invariante em relação ao idempotente escolhido. Alguns desses polinômios têm dimensão invariante: U_e^2 , $Z_e^2 + U_e Z_e$ e as somas diretas deles com subespaços de dimensões invariantes, tais como, $U_e \oplus U_e^2$, $(Z_e^2 + U_e Z_e) \oplus U_e^2$, $(Z_e^2 + U_e Z_e) \oplus Z_e$. Os subespaços $U_e \oplus Z_e$ e $(U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$ são invariantes. Apesar destes fatos serem conhecidos, nós os demonstraremos a seguir,

pois estão espalhados na literatura. Outra questão natural relacionada a estes "polinômios" é saber se eles são ou não são ideais de A . Por exemplo, $U_e \oplus U_e^2$ é um ideal; $(Z_e^2 + U_e Z_e) \oplus Z_e$ também é um ideal. Porém certamente U_e e Z_e não são ideais de A .

Proposição 1.4 Se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e = Kf \oplus U_f \oplus Z_f$ são duas decomposições de Peirce de uma álgebra de Bernstein A , em relação aos idempotentes não nulos e e f , então $\dim U_e^2 = \dim U_f^2$.

Prova: Basta observar que $Ke \oplus U_e \oplus U_e^2 = Kf \oplus U_f \oplus U_f^2 = A^2$ e portanto $U_e \oplus U_e^2 = U_f \oplus U_f^2$ é o núcleo da restrição de w a A^2 . Como $\dim U_e = \dim U_f$ segue que $\dim U_e^2 = \dim U_f^2$. ■

Chamamos de excepcional (ou exclusiva, segundo alguns autores) toda álgebra de Bernstein em que $U^2 = 0$. Pela Proposição 1.4, a condição $U^2 = 0$ independe do idempotente escolhido.

Em [14], Etherington introduziu o ideal gerado pelos "nil elementos" de uma álgebra bária (A, w) , isto é, os elementos da forma $x^2 - w(x)x$, onde x percorre A . Este ideal é conhecido na literatura como o ideal de Etherington de A .

Proposição 1.5 Seja (A, w) uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K e $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de Peirce de A em relação a um idempotente não nulo e . Então $Z \oplus (Z^2 + UZ)$ coincide com o ideal de A gerado pelos elementos da forma $x^2 - w(x)x$, com $x \in A$ (que é o ideal de Etherington de A).

Prova: Indiquemos por P o ideal de Etherington de A , isto é, P é o menor ideal de A que contém o conjunto $\{x^2 - w(x)x \mid x \in A\}$. Como

$$e[Z \oplus (Z^2 + UZ)] = Z^2 + UZ$$

$$U[Z \oplus (Z^2 + UZ)] = UZ \oplus U(UZ) \subseteq UZ + Z$$

$$Z[Z \oplus (Z^2 + UZ)] = Z^2 + ZZ^2 + (UZ)Z \subseteq Z^2 + UZ$$

segue que $Z \oplus (Z^2 + UZ)$ é ideal de A . Dado $x = w(x)e + u + z$, um elemento arbitrário de A , com $u \in U$ e $z \in Z$, temos $x^2 - w(x)x = (u^2 - w(x)z) + z^2 + 2uz \in Z \oplus (Z^2 + UZ)$ de onde concluímos que $P \subseteq Z \oplus (Z^2 + UZ)$. Resta mostrar que $Z \oplus (Z^2 + UZ) \subseteq P$. Se $w(x) = 0$ então $x^2 - w(x)x = x^2$ e portanto o quadrado de todo elemento de peso zero pertence a P . Assim, para qualquer $u \in U$ e quaisquer z, z_1, z_2 em Z , temos $z = z^2 - [(e + z)^2 - w(e + z)(e + z)] \in P$, $z_1 z_2 = \frac{1}{2}[(z_1 + z_2)^2 - z_1^2 - z_2^2] \in P$, $uz = \frac{1}{2}[(u + z)^2 - u^2 - z^2] \in P$ e daí segue que $Z \oplus (Z^2 + UZ) \subseteq P$, o que termina a demonstração. ■

Corolário 1.6 Se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Bernstein sobre K então $\dim(Z_e^2 + U_e Z_e)$ independe do idempotente e escolhido.

Prova: Se f é um idempotente qualquer de A , não nulo, pela Proposição 1.5 temos $Z_e \oplus (Z_e^2 + U_e Z_e) = Z_f \oplus (Z_f^2 + U_f Z_f) = P$. Calculando as dimensões e observando que $\dim Z_e = \dim Z_f$, segue o resultado desejado. ■

Observação: Z_e^2 e $U_e Z_e$ são ambos subespaços contidos em U_e e portanto podemos ter $U_e Z_e \cap Z_e^2 \neq 0$.

Recentemente, num trabalho ainda não publicado, A. Suazo demonstrou a independência da dimensão dos subespaços U^{2k} e $U(UZ)$. Nós a reproduzimos aqui pois não estão disponíveis na literatura. Recentemente também C. Martinez

[22] provou que em uma álgebra de Bernstein Jordan, a dimensão do subespaço U^k é invariante, que é parte da proposição seguinte. Uma álgebra comutativa A é uma *álgebra de Jordan* se satisfaz a identidade $x^2(xy) = x(x^2y)$, para todo $x, y \in A$. Uma álgebra de Bernstein que satisfaz esta identidade é dita Bernstein-Jordan.

Proposição 1.7 (A. Suazo e C. Martinez) Se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K então a dimensão do subespaço vetorial U^{2k} independe do idempotente e escolhido, para todo inteiro positivo k .

Prova: Vamos inicialmente mostrar que se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Bernstein Jordan então a dimensão do subespaço U^k é independente da escolha do idempotente em A . O quadrado A^2 de A é também uma álgebra de Bernstein-Jordan e tem a decomposição de Peirce $A^2 = Ke \oplus U \oplus U^2 = Ke \oplus N_1$. Então, $N_1^2 = (U \oplus U^2)^2 = U^2 \oplus U^3$ uma vez que $(U^2)^2 \subseteq Z^2 = 0$. De um modo geral, pode-se mostrar por indução que $N_1^k = U^k \oplus U^{k+1}$. Suponhamos que k é par. Então $U^k \subseteq U^2$ e $U^{k+1} \subseteq U$. Se $x_0 \in U^{k+1}$ e $x, y \in U$, podemos aplicar a identidade de Jacobi: $x_0(xy) = -x(x_0y) - y(x_0x)$. Mas $x(x_0y)$ e $y(x_0x)$ pertencem a U^{k+3} , que está contido em U^{k+1} de modo que podemos concluir que $U^{k+1}U^2 \subseteq U^{k+1}$. Além disso, $U^kU^2 \subseteq (U^2)^2 = 0$. Portanto, $N_1^{k+1} = (U^k \oplus U^{k+1})(U \oplus U^2) = U^{k+1} \oplus U^{k+2}$ para o caso em que k é par. Agora, suponhamos que k é ímpar. Então $U^{k+1}U^2 \subseteq (U^2)^2 = 0$ e, novamente pela identidade de Jacobi, temos: $U^kU^2 \subseteq U^{k+2}$. Assim, também no caso em que k é ímpar, obtemos $N_1^{k+1} = U^{k+1} \oplus U^{k+2}$. Se supusermos que a dimensão de U^s é invariante ($s \geq 1$) então também $\dim U^{s+1}$ é invariante pois $\dim U^s + \dim U^{s+1} = \dim N_1^s$, que certamente é invariante em relação à mudança de idempotentes uma vez que N_1 é o núcleo de w restrito a A^2 .

Vamos agora mostrar que $\dim U^{2k}$ independe do invariante escolhido, numa álgebra de Bernstein arbitrária $A = Ke \oplus U \oplus Z$. Consideremos a álgebra quociente A/L onde $L = \text{ann}_U(U)$, que é um ideal de A , ver também o Capítulo

3, Proposições 3.8 e 3.9. Sabe-se que A/L é uma álgebra de Bernstein-Jordan e seja $A/L = K\bar{e} \oplus \bar{U} \oplus \bar{Z}$ sua decomposição de Peirce em relação a $\bar{e} = e + L$. Pela parte inicial da demonstração, sabemos que as dimensões de todos os subespaços $\bar{U}^{2k}$ são independentes de $\bar{e}$. Mas $\bar{U}^{2k} = U^{2k} + L$ e, o fato de $U^{2k} \subseteq U^2 \subseteq Z$ implica que $U^{2k} \cap L = 0$ e portanto $\dim \bar{U}^{2k} = \dim U^{2k}$, o que mostra que também $\dim U^{2k}$ é invariante. ■

O exemplo 1.9 mais adiante mostra que $\dim U^3$ não é invariante em uma álgebra de Bernstein. Logo, o resultado da proposição acima não se estende para expoentes ímpares.

Proposição 1.8 (A. Suazo) Se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K então a dimensão do subespaço vetorial $U(UZ)$ independe do idempotente e escolhido.

Prova: Como na proposição anterior, trataremos inicialmente o caso das álgebras de Bernstein-Jordan. Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma álgebra de Bernstein-Jordan, seja e_0 outro idempotente de A e sejam U_0 e Z_0 os subespaços de Peirce correspondentes a e_0 . Então $N = U \oplus Z = U_0 \oplus Z_0$ e $N_1 = U \oplus U^2 = U_0 \oplus U_0^2$. Temos: $N_1 N^2 = (U \oplus U^2)(U \oplus Z)^2 = (U \oplus U^2)(U^2 \oplus UZ) = U^3 \oplus U(UZ)$. Similarmente, $N_1 N^2 = U_0^3 \oplus U_0(U_0 Z_0)$. Como vimos no início da demonstração da Proposição 1.7, $\dim U^3 = \dim U_0^3$ e portanto $\dim U(UZ) = \dim U_0(U_0 Z_0)$.

Agora, o caso geral. Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma álgebra de Bernstein arbitrária e consideremos a álgebra quociente $A/L = K\bar{e} \oplus \bar{U} \oplus \bar{Z}$, como na proposição anterior. Então, $\dim \bar{U}(\bar{U} \bar{Z})$ é invariante. Mas $\bar{U}(\bar{U} \bar{Z}) = U(UZ) + L$ e como $U(UZ) \cap L = 0$ temos que $\dim U(UZ) = \dim \bar{U}(\bar{U} \bar{Z})$, que é invariante. ■

Observemos que os subespaços U^{2k} e $U(UZ)$ estão todos contidos em Z , de acordo com (1.3).

No restante deste capítulo nos limitaremos a considerar "polinômios" de grau ≤ 3 em U_e e Z_e . Mesmo com esta limitação sobre o grau, obtemos uma lista bastante longa: não levando em consideração o monômio $U_e Z_e^2$, pois sabemos ser

ele sempre nulo, e nem o binômio $U_e \oplus Z_e = \ker w$, há 110 polinômios de grau ≤ 3 em U_e e Z_e . Em relação a tais polinômios, tendo em vista o exposto nesta seção temos que se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein em relação a um idempotente não nulo e então as dimensões dos subespaços

$$U$$

$$Z$$

$$U^2$$

$$U(UZ)$$

$$U \oplus U^2$$

$$UZ + Z^2$$

$$U \oplus U(UZ)$$

$$(UZ + Z^2) \oplus Z$$

$$(UZ + Z^2) \oplus U^2$$

$$(UZ + Z^2) \oplus U(UZ)$$

independem do idempotente e escolhido. Desta lista, os subespaços $U \oplus U^2$ e $(UZ + Z^2) \oplus Z$ são invariantes em relação à mudança de idempotentes, uma condição mais forte do que a invariância da dimensão.

1.4. Alguns subespaços de dimensões não invariantes

A seguir daremos alguns exemplos que demonstram a dependência da dimensão, em relação ao idempotente escolhido, de alguns subespaços de uma álgebra de Bernstein, que se exprimem como polinômios de grau ≤ 3 em U e Z . Em todos os exemplos, construímos uma álgebra sobre o corpo K , dando a tábua de multiplicação em uma base. O elemento e é sempre um idempotente e a função peso w vale 1 em e e zero nos demais elementos da base. Não faremos

a verificação de que realmente é válida a equação (1.1) pois são cálculos longos porém fáceis.

Exemplo 1.9 Seja $A = \langle e, u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3 \rangle$ um espaço vetorial de dimensão 7 sobre K . Definimos uma multiplicação comutativa em A através da tabela:

$$e^2 = e; \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad u_1^2 = z_1; \quad u_2^2 = z_2; \quad u_1u_2 = z_3; \quad z_1z_2 = 2u_3; \quad z_3^2 = -u_3; \quad \text{demais produtos nulos}$$

Verifica-se diretamente da tabela que (A, w) é uma álgebra de Bernstein. Em relação ao idempotente e temos as seguintes igualdades, cuja verificação é feita por um simples inspeção da tabela de multiplicação:

$$U_e = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$Z_e = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

$$U_e^2 = Z_e$$

$$Z_e^2 = \langle u_3 \rangle$$

$$U_e Z_e = 0$$

$$Z_e^3 = 0$$

$$U_e^3 = 0$$

$$U_e^3 + (U_e Z_e) Z_e = 0$$

$$U_e^3 + Z_e^3 = 0$$

$$U_e^3 + (U_e Z_e) Z_e + Z_e^3 = 0$$

Considerando o idempotente $f = e + (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2)^2 = e + u_1 + u_2 + z_1 + z_2 + 2z_3$ obtemos as seguintes expressões (os cálculos foram omitidos):

$$U_f = \langle u_1 + 2z_1 + 2z_3, u_2 + 2z_2 + 2z_3, u_3 \rangle$$

$$Z_f = \langle z_1 - 4u_3, z_2 - 4u_3, z_3 + 4u_3 \rangle$$

$$U_f^2 = Z_f$$

$$Z_f^2 = \langle u_3 \rangle$$

$$U_f Z_f = \langle u_3 \rangle$$

$$Z_f^3 = 0$$

$$U_f^3 = \langle u_3 \rangle$$

$$U_f^3 + (U_f Z_f) Z_f = \langle u_3 \rangle$$

$$U_f^3 + Z_f^3 = \langle u_3 \rangle$$

$$U_f^3 + (U_f Z_f) Z_f + Z_f^3 = \langle u_3 \rangle$$

Assim, as dimensões dos subespaços (todos contidos em U , por (1.3))

$$UZ$$

$$U^3$$

$$U^3 + (UZ)Z$$

$$U^3 + Z^3$$

$$U^3 + (UZ)Z + Z^3$$

são todas nulas para $U = U_e$ e $Z = Z_e$ e são todas iguais a 1 para $U = U_f$ e $Z = Z_f$. Portanto as dimensões dos 5 subespaços mencionados acima dependem do idempotente escolhido em A .

Observe-se ainda que $U_e^3 = 0$ mas $U_f^3 = \langle u_3 \rangle$. Assim, o conceito de ortogonalidade para álgebras de Bernstein que se encontra, por exemplo, em Worz [26] e também, sob uma forma equivalente, em Holgate [18], depende do idempotente escolhido. Chama-se *ortogonal* a toda álgebra de Bernstein tal que $U_e^3 = 0$ para todo idempotente e . O nosso exemplo não é ortogonal.

Exemplo 1.10 Consideremos o espaço vetorial $A = \langle e, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \rangle$ sobre o corpo K . Definimos uma multiplicação comutativa em A através da tábua:

$e^2 = e$; $ec_i = \frac{1}{2}c_i$ ($i = 3, 4, 5$); $c_1c_2 = c_3$; $c_1c_5 = -c_3$; $c_1c_3 = c_4$; $c_2c_4 = c_3$; $c_2c_3 = c_5$; demais produtos nulos.

É fácil verificar que (A, w) é uma álgebra de Bernstein e que o elemento $f = e + c_4$ é um idempotente de A ; em relação aos idempotentes e e f temos:

$$U_e = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$$

$$U_f = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$$

$$Z_e = \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$Z_f = \langle c_1, c_2 - 2c_3 \rangle$$

$$U_e^2 = 0$$

$$U_f^2 = 0$$

$$U_e Z_e = U_e$$

$$U_f Z_f = U_f$$

$$U_e^3 = 0$$

$$U_f^3 = 0$$

$$U_e^2 Z_e = 0$$

$$Z_e^2 = \langle c_3 \rangle$$

$$Z_e^3 = \langle c_4, c_5 \rangle$$

$$Z_e^2 + U_e^3 = \langle c_3 \rangle$$

$$Z_e^3 + U_e^2 Z_e = \langle c_4, c_5 \rangle$$

$$U_e^3 + U_e^2 Z_e + Z_e^3 = \langle c_4, c_5 \rangle$$

$$U_f^2 Z_f = 0$$

$$Z_f^2 = \langle c_3 - 2c_4, c_5 \rangle$$

$$Z_f^3 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$$

$$Z_f^2 + U_f^3 = \langle c_3 - 2c_4, c_5 \rangle$$

$$Z_f^3 + U_f^2 Z_f = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$$

$$U_f^3 + U_f^2 Z_f + Z_f^3 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$$

O exemplo mostra que a dimensão de cada um dos 5 subespaços (todos contidos em U , por (1.3))

$$Z^2$$

$$Z^3$$

$$Z^2 + U^3$$

$$Z^3 + U^2 Z$$

$$U^3 + U^2 Z + Z^3$$

de uma álgebra de Bernstein depende geralmente do idempotente escolhido.

Observação: A subálgebra N gerada por c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 é um exemplo importante na teoria das álgebras não associativas, produzido por Suttles em 1972. Trata-se de uma álgebra nil (temos $x^4 = 0$ para todo $x \in N$), de potências associativas (isto é, $x^i x^j = x^{i+j}$ para todo $x \in N$ e $i, j \geq 1$), solúvel ($(N^2)^2 = 0$) porém não nilpotente ($N^2 = N^3 \neq 0$).

Exemplo 1.11 Seja $A = \langle e, u, v, z \rangle$ espaço vetorial de dimensão 4 sobre o corpo K . Consideremos em A a multiplicação comutativa definida pela tábua

$$e^2 = e; eu = \frac{1}{2}u; uv = u; \text{ demais produtos nulos}$$

É fácil verificar que (A, w) é uma álgebra de Bernstein e que $f = e + u + u^2 = e + u$ é idempotente. Em relação aos idempotentes e e f temos:

$$U_e = \langle u \rangle$$

$$Z_e = \langle v, z \rangle$$

$$U_e^2 = 0$$

$$U_e Z_e = \langle u \rangle$$

$$U_f = \langle u \rangle$$

$$Z_f = \langle v - 2u, z \rangle$$

$$U_f^2 = 0$$

$$U_f Z_f = \langle u \rangle$$

$$Z_e^2 = 0$$

$$U_e^3 = 0$$

$$Z_e^3 = 0$$

$$Z_e^2 + Z_e^3 = 0$$

$$Z_e^2 + U_e^3 + Z_e^3 = 0$$

$$Z_f^2 = \langle u \rangle$$

$$U_f^3 = 0$$

$$Z_f^3 = \langle u \rangle$$

$$Z_f^2 + Z_f^3 = \langle u \rangle$$

$$Z_f^2 + U_f^3 + Z_f^3 = \langle u \rangle$$

Desse exemplo concluímos que as dimensões dos 2 subespaços (contidos em U)

$$Z^2 + Z^3$$

$$Z^2 + U^3 + Z^3$$

dependem em geral do idempotente escolhido em A .

1.5. Conclusão

Como já mencionamos, dada uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ existem 110 subespaços de A que se exprimem como polinômios de grau ≤ 3 em U e Z , além daqueles envolvendo $U \oplus Z = \ker w$ e $UZ^2 = 0$. Vamos agora citar tais polinômios separados em grupos, conforme seja a dimensão invariante, não invariante, ou não se tenha resultado a respeito no presente momento.

Proposição 1.12 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein em relação a um idempotente não nulo. Os subespaços de A abaixo relacionados têm dimensões invariantes em relação à escolha de idempotentes:

Grupo I

$$U$$

$$U \oplus U(UZ)$$

$$Z$$

$$Z^2 + UZ$$

$$U^2$$

$$(Z^2 + UZ) \oplus Z$$

$$U(UZ)$$

$$(Z^2 + UZ) \oplus U^2$$

$$U \oplus U^2$$

$$(Z^2 + UZ) \oplus U(UZ)$$

Grupo II

$$U^3 + U^2Z + (UZ)Z + Z^3$$

$$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$$

$$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus Z$$

$$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$$

Prova: Os subespaços do Grupo I já foram considerados na Seção 1.3. Quanto ao Grupo II, basta observar que o último subespaço é igual a $(\ker w)^3$. De fato, é óbvio que o referido subespaço está contido em $(\ker w)^3$; por outro lado, se $x = u_1 + z_1$, $y = u_2 + z_2$, $t = u_3 + z_3$ pertencem a $\ker w$, com $u_i \in U$ e $z_i \in Z$ ($i = 1, 2, 3$), obtemos $(xy)t = (u_1u_2)u_3 + (u_1u_2)z_3 + (u_1z_2)z_3 + (u_2z_1)z_3 + (z_1z_2)z_3 + u_3(u_1z_2) + u_3(u_2z_1) \in (U^3 + U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$. ■

Proposição 1.13 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein em relação a um idempotente e não nulo. Os subespaços de A relacionados nos grupos III e IV abaixo têm, em geral, dimensões que dependem do idempotente:

Grupo III

$$Z^2$$

$$U^3 + (UZ)Z$$

$$UZ$$

$$U^3 + Z^3$$

$$U^3$$

$$U^2Z + Z^3$$

$$Z^3$$

$$Z^2 + U^3 + Z^3$$

$$Z^2 + U^3$$

$$U^3 + U^2Z + Z^3$$

$$Z^2 + Z^3$$

$$U^3 + (UZ)Z + Z^3$$

Grupo IV

$$Z^2 \oplus Z$$

$$(Z^2 + Z^3) \oplus U^2$$

$$UZ \oplus Z$$

$$(U^3 + (UZ)Z) \oplus U^2$$

$$U^3 \oplus Z$$

$$(U^3 + Z^3) \oplus U^2$$

$Z^3 \oplus Z$	$(U^2Z + Z^3) \oplus U^2$
$Z^2 \oplus U^2$	$(Z^2 + U^3) \oplus U(UZ)$
$UZ \oplus U^2$	$(Z^2 + Z^3) \oplus U(UZ)$
$U^3 \oplus U^2$	$(U^3 + (UZ)Z) \oplus U(UZ)$
$Z^3 \oplus U^2$	$(U^3 + Z^3) \oplus U(UZ)$
$Z^2 \oplus U(UZ)$	$(U^2Z + Z^3) \oplus U(UZ)$
$UZ \oplus U(UZ)$	$(Z^2 + U^3 + Z^3) \oplus Z$
$U^3 \oplus U(UZ)$	$(U^3 + U^2Z + Z^3) \oplus Z$
$Z^3 \oplus U(UZ)$	$(U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus Z$
$(Z^2 + U^3) \oplus Z$	$(Z^2 + U^3 + Z^3) \oplus U^2$
$(Z^2 + Z^3) \oplus Z$	$(U^3 + U^2Z + Z^3) \oplus U^2$
$(U^3 + (UZ)Z) \oplus Z$	$(U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$
$(U^3 + Z^3) \oplus Z$	$(Z^2 + U^3 + Z^3) \oplus U(UZ)$
$(U^2Z + Z^3) \oplus Z$	$(U^3 + U^2Z + Z^3) \oplus U(UZ)$
$(Z^2 + U^3) \oplus U^2$	$(U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$

Prova: Os subespaços do Grupo III são aqueles considerados nos exemplos 1.9, 1.10 e 1.11 da seção 1.4. Quanto aos do Grupo IV, observe-se que todos eles são somas diretas de um subespaço do Grupo III (que está contido em U) com um subespaço, contido em Z , cuja dimensão é invariante. ■

Muitos outros exemplos de álgebras de Bernstein existentes na literatura foram analisados e nada acrescentaram aos Grupos III e IV. Também, até aqui, não conhecemos resultados que permitam aumentar a lista dos Grupos I e II. Assim, restam de nossa lista inicial, ainda sem conclusão quanto à invariância ou não da dimensão, os seguintes subespaços vetoriais:

Grupo V

U^2Z	$(Z^2 + (UZ)Z) \oplus U(UZ)$
$(UZ)Z$	$Z^2 + (UZ)Z + Z^3$
$(UZ)Z \oplus Z$	$(UZ + U^2Z) \oplus U(UZ)$

$U^2Z \oplus Z$	$(U^3 + U^2Z) \oplus U(UZ)$
$U^2Z \oplus U^2$	$U^3 + U^2Z + (UZ)Z$
$(UZ)Z \oplus U^2$	$(U^2Z + (UZ)Z) \oplus U(UZ)$
$(UZ)Z + Z^2$	$U^2Z + (UZ)Z + Z^3$
$UZ + U^2Z$	$((UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$
$U^3 + U^2Z$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z) \oplus Z$
$U^2Z \oplus U(UZ)$	$(Z^2 + (UZ)Z + Z^3) \oplus Z$
$U^2Z + (UZ)Z$	$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z) \oplus Z$
$(UZ)Z \oplus U(UZ)$	$(U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus Z$
$(UZ)Z + Z^3$	$(Z^2 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$
$(Z^2 + (UZ)Z) \oplus Z$	$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z) \oplus U^2$
$(UZ + U^2Z) \oplus Z$	$(U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$
$(U^3 + U^2Z) \oplus Z$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z) \oplus U^2$
$(U^2Z + (UZ)Z) \oplus Z$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z) \oplus U(UZ)$
$((UZ)Z + Z^3) \oplus Z$	$(Z^2 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$
$(Z^2 + (UZ)Z) \oplus U^2$	$Z^2 + U^3 + (UZ)Z + Z^3$
$(UZ + U^2Z) \oplus U^2$	$(U^3 + U^2Z + (UZ)Z) \oplus U(UZ)$
$(U^3 + U^2Z) \oplus U^2$	$(U^2Z + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$
$(U^2Z + (UZ)Z) \oplus U^2$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus Z$
$((UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U^2$
$Z^2 + U^3 + (UZ)Z$	$(Z^2 + U^3 + (UZ)Z + Z^3) \oplus U(UZ)$

Nos próximos capítulos tentaremos melhorar nosso conhecimento sobre esta questão. A questão básica é decidir se um dado subespaço do grupo V deve ir para os grupos I e II (dimensão invariante) ou para os grupos III ou IV (dimensão dependente do idempotente escolhido). As técnicas para resolver este problema precisam ser desenvolvidas em cada caso. É de se suspeitar que o estudo da invariância de dimensão de subespaços complicados, como por exemplo, $Z^2 + U^3 + (UZ)Z + Z^3$, depende de encontrar exemplos mais elaborados de álgebras de Bernstein. Por exemplo, para álgebras conservativas (aquelas que satisfazem

a condição $UZ = Z^2 = 0$) este polinômio se reduz a U^3 , que também é 0 pois $U^3 = U^2U \subseteq ZU = 0$. (Ver Proposição 2.6 no próximo capítulo.)

Capítulo 2

Formas p -invariantes

Examinando a questão da dependência, em relação ao idempotente, da dimensão dos subespaços listados no final do Capítulo 1, estudamos o conceito de formas lineares invariantes dado por Lyubich no Capítulo 3 de [20]. Através da determinação do espaço das formas lineares invariantes numa álgebra de Bernstein, obtém-se outro modo de demonstrar que a dimensão do subespaço $Z^2 + UZ$ independe do idempotente.

Uma forma linear invariante numa álgebra bária é uma forma linear f que satisfaz $f(x^2 - w(x)x) = 0$, para todo elemento x da álgebra. Observemos que $x^2 - w(x)x$ é um T-polinômio de grau 2. Imaginamos que, estendendo o conceito de formas invariantes para formas p -invariantes, isto é, para formas lineares f que satisfazem $f(p(x)) = 0$ para um T-polinômio $p(x)$, a determinação do espaço das formas p -invariantes para todos os T-polinômios poderia nos levar a encontrar mais subespaços de dimensões invariantes dentre aqueles citados no Grupo V no capítulo anterior. De fato, isto ocorreu, mas não na quantidade que gostaríamos. Em compensação, o estudo das formas p -invariantes produziu outros resultados interessantes, que veremos a seguir.

Na Seção 2.1 apresentamos a definição e algumas propriedades de formas invariantes. Maiores detalhes podem ser encontrados em Lyubich [20]. Na Seção 2.2 introduzimos o conceito de formas p -invariantes e o conceito de álgebras p -conservativas, que é uma extensão do conceito de álgebra conservativa dado por Lyubich. Na Seção 2.3 determinamos o espaço J_p das formas lineares p -invariantes sobre uma álgebra de Bernstein para os T-polinômios $p(x)$ de grau 3 ou 4. Seguem-se várias conclusões; algumas são resultados já conhecidos (por exemplo, uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra de Bernstein

seja uma álgebra de Jordan) outras não (como a invariância da dimensão de alguns subespaços dentre aqueles citados no grupo V do capítulo anterior). Na Seção 2.4 obtemos uma expressão conveniente para os valores assumidos por um T-polinômio $p(x)$ em uma álgebra de Bernstein e determinamos J_p (na verdade, determinamos seu subespaço ortogonal em A) para qualquer polinômio $p(x)$. Obtemos dessa forma vários subespaços invariantes de uma álgebra de Bernstein, porém eles são dados por geradores e não são polinômios em U e Z .

2.1 Formas invariantes

Seja (A, w) uma álgebra bárica sobre um corpo K . Uma forma linear $f : A \rightarrow K$ se diz uma *forma linear invariante* se satisfaz as identidades (2.1), (2.2) ou (2.3), que obviamente são equivalentes entre si:

$$2f(xy) = w(y)f(x) + w(x)f(y) \quad (2.1)$$

$$f(x^2) = w(x)f(x) \quad (2.2)$$

$$f(x^2) = f(x) \quad (w(x) = 1) \quad (2.3)$$

Como já dissemos, este conceito foi introduzido por Lyubich, que observa que o nome "forma invariante" é justificado pela identidade (2.3). Nessa identidade, se x representa a distribuição de frequência de determinado gen de uma população, x^2 representa a distribuição de frequência do mesmo gen na segunda geração, obtida da primeira através de cruzamentos aleatórios entre indivíduos; a forma invariante assume o mesmo valor quando aplicada à primeira e segunda gerações.

Indicaremos por J o conjunto das formas lineares invariantes definidas em (A, w) . É imediato concluir que J é um subespaço vetorial do espaço dual A^* de todas as formas lineares de A em K . Como w é obviamente uma forma linear invariante, temos sempre $1 \leq \dim_K J \leq \dim_K A$. O subespaço ortogonal a J , isto é, $J^\perp = \{x \in A \mid f(x) = 0, \text{ para todo } f \in J\}$, é um ideal de A . De fato, dados $x \in J^\perp$ e $a \in A$, temos $w(x) = 0$, uma vez que $w \in J$. Portanto, se $f \in J$, $2f(ax) = w(a)f(x) + w(x)f(a) = 0$, de modo que $ax \in J^\perp$. Notemos que

$$J^\perp \supseteq \text{ann } A \quad (2.4)$$

para toda álgebra bária (A, w) pois, se $x \in \text{ann } A$, tomando $a \in A$ tal que $w(a) = 1$, temos $w(x) = w(a)w(x) = w(ax) = w(0) = 0$. Para todo $f \in J$, temos $0 = 2f(ax) = w(a)f(x) + w(x)f(a) = f(x)$ e portanto $x \in J^\perp$.

Uma álgebra bária (A, w) é chamada *conservativa* quando $J^\perp = \text{ann } A$.

Proposição 2.1 Para que a álgebra bária (A, w) seja conservativa é necessário e suficiente que o produto xy dependa apenas do valor das formas invariantes em x e y , isto é,

$$x \equiv z, y \equiv t \pmod{J^\perp} \text{ implicam } xy = zt \quad (\text{para todo } x, y, z, t \in A) \quad (2.5)$$

Prova: Suponhamos (A, w) conservativa e sejam $x, y, z, t \in A$ com $x \equiv z$ e $y \equiv t \pmod{J^\perp}$. Assim, $x - z$ e $y - t$ pertencem a $J^\perp = \text{ann } A$ e portanto, $(x - z)y = 0$ e $(y - t)z = 0$, o que implica que $xy = zy$ e $tz = zy$. Logo, $xy = zt$. Suponhamos agora que (A, w) satisfaz (2.5). Mostremos que $J^\perp = \text{ann } A$. Em vista de (2.4), basta mostrar que $J^\perp \subseteq \text{ann } A$. Sejam então $x \in J^\perp$ e $y \in A$. Temos $x \equiv 0$ e $y \equiv y \pmod{J^\perp}$ e portanto, de (2.5), segue que $xy = 0y = 0$. Logo, $x \in \text{ann } A$ e $J^\perp \subseteq \text{ann } (A)$. ■

Proposição 2.2 Uma álgebra bária (A, w) é conservativa se, e somente se, a seguinte identidade é válida em A :

$$x^2y = w(x)xy \quad (2.6)$$

Prova: É claro que $x^2 - w(x)x \in J^\perp$ para todo $x \in A$ e portanto $x^2 \equiv w(x)x \pmod{J^\perp}$. Assim, se A é conservativa, segue de (2.5) que $x^2y = w(x)xy$, para todo $x, y \in A$. Reciprocamente suponhamos que (A, w) satisfaz (2.6). Se $f \in A^*$ é tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in \text{ann } A$, isto é, se $f \in (\text{ann } A)^\perp$, então $f \in J$ pois, de (2.6) decorre que $x^2 - w(x)x \in \text{ann } A$ para todo x em A e portanto $f(x^2 - w(x)x) = 0$, para todo $x \in A$. Assim, $(\text{ann } A)^\perp \subseteq J$ e daí segue que $\text{ann } A \supseteq J^\perp$. De (2.4) conclui-se então que $\text{ann } A = J^\perp$ e A é conservativa. ■

Lembramos que uma álgebra comutativa A é uma *álgebra de Jordan* se satisfaz a identidade $x^2(xy) = x(x^2y)$, para todo $x, y \in A$. Uma álgebra de Bernstein

que satisfaz esta identidade é dita Bernstein-Jordan.

Corolário 2.3 Toda álgebra bária conservativa é uma álgebra de Bernstein-Jordan.

Prova: Se uma álgebra bária (A, w) é conservativa então, pela Proposição 2.2, tem-se $x^2y = w(x)xy$ para quaisquer elementos $x, y \in A$. Em particular, $x^3 = w(x)x^2$ e é bem conhecido que a classe das álgebras báricas comutativas que verificam esta identidade é exatamente a classe das álgebras de Bernstein-Jordan. ■

Note-se que a recíproca do corolário acima é falsa, isto é, a classe das álgebras conservativas é uma subclasse própria da classe das álgebras de Bernstein-Jordan. De fato, em [6] encontramos a seguinte álgebra de Bernstein-Jordan: $A = \langle e, x, y, x^2, xy \rangle$, espaço vetorial de dimensão 5 sobre o corpo K , com um homomorfismo peso w tal que $\ker w = \langle x, y, x^2, xy \rangle$ e uma multiplicação comutativa definida pela tábua:

$$e^2 = e; \quad ex = \frac{1}{2}x; \quad e(xy) = \frac{1}{2}xy; \quad x.x = x^2; \quad x.y = xy; \quad \text{demais produtos nulos}$$

Tomando por exemplo $a = x + y$ e $b = e$, temos $a^2 = x^2 + 2xy$, $a^2b = xy$. Mas $w(a)ab = 0$, logo (A, w) não satisfaz (2.6) e portanto não é conservativa.

Veremos um pouco adiante, ainda nesta seção, que as álgebras chamadas conservativas por Lyubich são exatamente as álgebras de Bernstein normais, isto é, as álgebras de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ tais que $Z^2 = UZ = 0$, ou seja $UZ + Z^2 = 0$.

Proposição 2.4 Se (A, w) é uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K e $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é a decomposição de Peirce de A em relação a um idempotente não nulo e qualquer, então $J^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$.

Prova: Seja $x = \alpha e + u + z$ um elemento qualquer de A , com $\alpha \in K$, $u \in U$ e $z \in Z$. Temos $x^2 - w(x)x = 2uz + z^2 + u^2 - \alpha z$. Uma forma linear $f \in A^*$ é invariante se, e somente se, $f(x^2 - w(x)x) = 0$, para todo $x \in A$, isto é, se e

somente se $f(2uz + z^2 + u^2 - \alpha z) = 0$, ou ainda, $f((u + z)^2) - \alpha f(z) = 0$, para todo $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$. Fazendo $\alpha = 0$ e depois $\alpha = 1$ na equação acima, obtemos o sistema de igualdades, onde $u \in U$ e $z \in Z$ são arbitrários:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f((u + z)^2) = 0 \end{cases}$$

Se $f(z) = 0$, para todo $z \in Z$ então $f((u + z)^2) = f(u^2) + 2f(uz) + f(z^2) = 2f(uz) + f(z^2)$, uma vez que $u^2 \in Z$. Assim, $f \in A^*$ é invariante se e somente se são válidas as identidades:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ 2f(uz) + f(z^2) = 0 \end{cases}$$

Em particular, se $u = 0$, obtemos da segunda equação que $f(z^2) = 0$. Assim, $f \in A^*$ é invariante, se e somente se, são válidas as identidades em $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(z^2) = 0 \\ f(uz) = 0 \end{cases}$$

Logo, $J = \{f \in A^* \mid f(Z) = f(Z^2) = f(UZ) = 0\}$ e daí segue que $J^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$. ■

Uma consequência imediata da proposição acima é o seguinte resultado, já conhecido através da expressão do ideal de Etherington em função dos subespaços U e Z .

Corolário 2.5 Numa álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$, a dimensão do subespaço $Z^2 + UZ$ independe do idempotente fixado.

O próximo teorema mostra que a classe das álgebras conservativas coincide com a classe das álgebras de Bernstein normais.

Proposição 2.6 Uma álgebra bária (A, w) sobre um corpo K é conservativa, se e somente se, (A, w) é uma álgebra de Bernstein tal que, para alguma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$ tem-se $Z^2 = UZ = 0$.

Prova: Seja (A, w) uma álgebra conservativa. Então A satisfaz a identidade (2.6) e fazendo $y = x^2$ decorre que A é uma álgebra de Bernstein. Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de A em relação a um idempotente não nulo e qualquer. É claro que $\text{ann } A \subseteq Z$, para toda álgebra de Bernstein A . Como, nesse caso, $J^\perp = \text{ann } A$ segue que $J^\perp \subseteq Z$, isto é, $Z \oplus (Z^2 + UZ) \subseteq Z$. Portanto, $Z^2 = UZ = 0$. Reciprocamente, seja (A, w) uma álgebra de Bernstein tal que $Z^2 = UZ = 0$ para alguma decomposição $A = Ke \oplus U \oplus Z$. Da Proposição 2.4 segue que $J^\perp = Z$. Se $z_1 \in Z$ e $x = \alpha e + u + z$ é um elemento qualquer de A (com $\alpha \in K$, $u \in U$ e $z \in Z$) temos $xz_1 = \alpha ez_1 + uz_1 + zz_1 = 0$, uma vez que $Z^2 = UZ = 0$. Logo, $z_1 \in \text{ann } A$ de onde concluímos que $Z = \text{ann } A$ e como tínhamos $J^\perp = Z$, segue que $J^\perp = \text{ann } A$ e portanto A é conservativa. ■

Observemos, da demonstração acima, que uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é normal se, e somente se, $J^\perp = Z$. Em particular, numa álgebra de Bernstein normal, o subespaço Z independe do idempotente escolhido. Este fato torna-se óbvio também através da Proposição 1.2, que afirma que $Z_f = \{z - 2(\sigma + \sigma^2)z \mid z \in Z_e\}$ com $f = e + \sigma + \sigma^2$, $\sigma \in U_e$. Se $Z_e^2 = U_e Z_e = 0$ então $\sigma z = 0 = \sigma^2 z$ e $Z_f = Z_e$.

2.2 Formas p-invariantes

Na seção anterior vimos que uma forma linear f , definida em uma álgebra bária (A, w) , é invariante se $f(x^2) = w(x)f(x)$, para todo $x \in A$, ou seja, $f(p(x)) = 0$ ($x \in A$), onde $p(x) = x^2 - w(x)x$. Este conceito produziu, por exemplo, um invariante, que é a dimensão de $J^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$, embora já soubéssemos que esta dimensão deveria ser invariante, pois $Z \oplus (Z^2 + UZ)$ é o ideal de Etherington de A , que é definido sem referir-se aos idempotentes de A .

Nesta seção estenderemos o conceito de forma linear invariante considerando T-polinômios $p(x)$ quaisquer. Para $a \in A$, denotamos por $p(a)$ o valor do T-polinômio (que é apenas uma expressão formal) em a .

Definição : Se (A, w) é uma álgebra bária sobre um corpo K e $p(x)$ é um T-polinômio, isto é,

$$p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \gamma_2 w(x)^2 x^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x \quad (2.7)$$

onde $n \geq 2$, $\gamma_i \in K$ ($i = 1, \dots, n-1$) e $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$, diremos que uma forma linear $f \in A^*$ é p -invariante se $f(p(a)) = 0$ para todo $a \in A$.

Dada a álgebra bária (A, w) sobre o corpo K e $p(x)$ como em (2.7), denotaremos por J_p o conjunto das formas lineares p -invariantes definidas em A . É claro que J_p é um subespaço vetorial de A^* e que $\dim J_p \geq 1$, uma vez que $w \neq 0$ e $w \in J_p$. Indicaremos por $J_p^\perp$ o subespaço ortogonal de J_p , isto é,

$$J_p^\perp = \{x \in A : f(x) = 0 \text{ para toda } f \in J_p\} \quad (2.8)$$

No caso particular em que $p(x) = x^2 - w(x)x$, continuaremos com a notação da seção precedente: $J_p = J$ e $J_p^\perp = J^\perp$ e se $f \in J_p$ diremos que f é invariante.

Proposição 2.7 Dada a álgebra bária (A, w) e um T-polinômio $p(x)$ como em (2.7) com $\gamma_{n-1} \neq 0$ então $\text{ann } A \subseteq J_p^\perp$.

Prova: Se $a \in \text{ann } A$, mostra-se facilmente, usando indução em r , que $(a+y)^r = y^r$ para $r \geq 2$ e $y \in A$. Assim dados $a \in \text{ann } A$, $y \in A$ com $w(y) \neq 0$ e $f \in J_p$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= f(p(a+y)) = f(y^n + \gamma_1 w(y)y^{n-1} + \dots + \gamma_{n-2} w(y)^{n-2} y^2 + \gamma_{n-1} w(y)(a+y)) = \\ &= f(p(y)) + \gamma_{n-1} w(y)f(a) = \gamma_{n-1} w(y)f(a), \text{ uma vez que } f(p(y)) = 0. \text{ Sendo } \\ &\gamma_{n-1} \neq 0 \text{ segue que } f(a) = 0 \text{ e portanto } a \in J_p^\perp. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veremos logo mais, nos exemplos 2.11 e 2.12, que, contrariamente ao que ocorre com $J^\perp$, $J_p^\perp$ nem sempre é um ideal da álgebra A e também a inclusão $\text{ann } A \subseteq J_p^\perp$ pode não ser válida se $\gamma_{n-1} = 0$. Os resultados que seguem mostram que a teoria das formas p -invariantes é mais simples quando $\gamma_{n-1} \neq 0$ em (2.7).

Definição : Dadas a álgebra bária (A, w) e o T-polinômio $p(x)$ diremos que A é p -conservativa se $p(a) \in \text{ann } A$ para todo $a \in A$ (i.e. $p(a)y = 0$ para todo $a, y \in A$).

Recordemos que uma álgebra bária (A, w) é chamada uma train-álgebra (ou T-álgebra) se satisfaz a identidade $p(a) = 0$ ($a \in A$) para algum T-polinômio $p(x)$ como em (2.7). Note-se que se uma álgebra satisfaz a identidade $p(a) = 0$ então ela é p -conservativa. Por outro lado, se uma álgebra é p -conservativa, então ela é uma train-álgebra pois satisfaz a identidade $q(a) = 0$ onde $q(x)$ é o T-polinômio $q(x) = p(x)x$.

Dada uma álgebra bária comutativa (A, w) e um T-polinômio $p(x)$, denotamos por $E_A(p)$ o ideal de A gerado pelos valores $p(a)$ que p assume em A . Estes ideais foram estudados por A. Catalan em sua tese de doutorado [5].

Proposição 2.8 Para toda álgebra bária (A, w) e todo T-polinômio $p(x)$ como em (2.7), onde $\gamma_{n-1} \neq 0$, tem-se $\text{ann } A \subseteq E_A(p)$.

Prova: Basta observar que para todo $a \in \text{ann } A$ e $y \in A$, com $w(y) = 1$, temos que $a = (\gamma_{n-1})^{-1}(p(a+y) - p(y))$, logo $a \in E_A(p)$. ■

Observemos que se A é p -conservativa então $E_A(p) \subseteq \text{ann } A$ pois $p(a) \in \text{ann } A$ para todo $a \in A$. Segue da proposição acima que $\text{ann } A = E_A(p)$.

Notemos que, no caso em que A é conservativa, tínhamos $\text{ann } A = J^\perp$ e $J^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$ que é justamente o ideal de Etherington P , gerado como ideal pelo conjunto $\{p(a) = a^2 - w(a)a \mid a \in A\}$.

É claro também que se $\text{ann } A = E_A(p)$ então A é p -conservativa. Assim, temos o resultado

Proposição 2.9 Seja (A, w) uma álgebra bária e $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)x^{n-1}$ um T-polinômio com $\gamma_{n-1} \neq 0$. Então A é p -conservativa se e somente se $\text{ann } A = E_A(p)$. ■

Exemplo 2.10 Se (A, w) é uma train-álgebra satisfazendo a train-equação $p(a) = 0$ então toda forma linear em A é p -invariante. Nesse caso, $J_p = A^*$ e $J_p^\perp = 0$.

Exemplo 2.11 Seja $A = \langle e, u, v, z \rangle$ espaço vetorial de dimensão 4 sobre um

corpo K . Definindo em A uma multiplicação comutativa, através da tábua

$$e^2 = e; \quad eu = \frac{1}{2}u; \quad uv = u; \quad \text{demais produtos nulos}$$

e uma forma linear $w : A \rightarrow K$ tal que $w(e) = 1$ e $\ker w = \langle u, v, z \rangle$, (A, w) resulta uma álgebra bária. Esta álgebra é de Bernstein e já apareceu no exemplo 1.11. Seja $p(x) = x^3 - w(x)x^2$. Vamos determinar J_p e $J_p^\perp$. Dado um elemento a qualquer de A , $a = \alpha e + \beta u + \gamma v + \sigma z$ com $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in K$, calculando $p(a)$ obtemos $p(a) = 2\beta\gamma^2u$. Assim, $f \in A^*$ é p -invariante se e somente se $f(p(a)) = 0$, para todo $a \in A$, ou seja, se e somente se $2\beta\gamma^2f(u) = 0$, para todo $\beta, \gamma \in K$, o que equivale a $f(u) = 0$. Portanto, $J_p = \{f \in A^* \mid f(u) = 0\}$, que é um subespaço de dimensão 3 de A^* e $J_p^\perp = \langle u \rangle$, um subespaço de dimensão 1 de A . Como $\text{ann } A = \langle z \rangle$. Concluimos que o anulador de A não está contido em $J_p^\perp$. Note-se que isto não contradiz a Proposição 2.7 pois aqui $\gamma_2 = 0$.

Exemplo 2.12 Seja $A = \langle e, u, z \rangle$ espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo K . Definindo uma multiplicação comutativa em A através da tábua

$$e^2 = e, \quad eu = \frac{1}{2}u; \quad z^2 = u; \quad \text{demais produtos nulos}$$

e a forma linear w tal que $w(e) = 1$ e $w(u) = w(z) = 0$, o par (A, w) é uma álgebra de Bernstein. Tomando o T-polinômio $p(x) = x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$ e $a = \alpha e + \beta u + \gamma z$ um elemento qualquer de A , com $\alpha, \beta, \gamma \in K$, obtemos $p(a) = -\frac{1}{2}\alpha^2\gamma z$. Assim, $f \in A^*$ é p -invariante se e somente se $\alpha^2\gamma f(z) = 0$, para todo $\alpha, \gamma \in K$, ou seja, $f(z) = 0$. Portanto temos $J_p = \{f \in A^* \mid f(z) = 0\}$ e $J_p^\perp = \langle z \rangle$. Como $z^2 = u \notin J_p^\perp$ segue que $J_p^\perp$ não é um ideal de A .

2.3 O caso de polinômios de grau 3 ou 4

O cálculo dos subespaços $J_p^\perp$ de uma álgebra de Bernstein, quando o grau de p é 3 ou 4, pode ser feito diretamente, conforme veremos a seguir.

Seja (A, w) uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K . Vamos determinar $J_p^\perp$ quando p é um T-polinômio arbitrário de grau 3 da forma $p(x) = x^3 +$

$\gamma_1 w(x)x^2 + \gamma_2 w(x)^2 x$, onde $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ e $1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de Peirce de A em relação a um idempotente não nulo e . Seja $a = \alpha e + u + z$ elemento arbitrário de A , com $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$. Usando as igualdades $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $ez = 0$; $u^3 = 0$; $u(uz) = 0$; $uz^2 = 0$ vistas na Seção 1.1 obtemos:

$$a^2 = \alpha^2 e + \alpha u + 2uz + z^2 + u^2$$

$$a^3 = \alpha^3 e + \alpha^2 u + 2\alpha uz + \frac{1}{2}\alpha z^2 + 2(uz)z + z^3 + u^2 z + \alpha u^2$$

e portanto,

$$p(a) = \alpha^3 e + \alpha^2 u + 2\alpha uz + \frac{1}{2}\alpha z^2 + 2(uz)z + z^3 + u^2 z + \alpha u^2 + \gamma_1 \alpha^3 e + \gamma_1 \alpha^2 u + 2\gamma_1 \alpha uz + \gamma_1 \alpha z^2 + \gamma_1 \alpha u^2 + \gamma_2 \alpha^3 e + \gamma_2 \alpha^2 u + \gamma_2 \alpha^2 z$$

Como $1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$, podemos reescrever $p(a)$ como:

$$\begin{aligned} p(a) &= \alpha^2 \gamma_2 z + \alpha \left[2uz + \frac{1}{2}z^2 + u^2 + 2\gamma_1 uz + \gamma_1 z^2 + \gamma_1 u^2 \right] + 2(uz)z + z^3 + u^2 z = \\ &= \alpha^2 \gamma_2 z + \alpha \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 \right) z^2 - \gamma_2 u^2 - 2\gamma_2 uz \right] + 2(uz)z + z^3 + u^2 z \end{aligned}$$

Assim, $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, a seguinte expressão é nula:

$$\alpha^2 \gamma_2 f(z) + \alpha \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 \right) f(z^2) - \gamma_2 f(u^2) - 2\gamma_2 f(uz) \right] + 2f((uz)z) + f(z^3) + f(u^2 z)$$

para todo $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$. Logo os coeficientes de α^i ($i = 0, 1, 2$) devem ser zero:

$$\begin{cases} \gamma_2 f(z) = 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 \right) f(z^2) - \gamma_2 f(u^2) - 2\gamma_2 f(uz) = 0 \\ 2f((uz)z) + f(z^3) + f(u^2 z) = 0 \end{cases}$$

para todo $u \in U$, $z \in Z$. Em particular, se $u = 0$, obtemos da 2ª e 3ª equações que $\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 \right) f(z^2) = 0$ e $f(z^3) = 0$. Assim $f \in A^*$ é p -invariante se e somente se valem as identidades em $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} \gamma_2 f(z) = 0 \\ (\frac{1}{2} + \gamma_1) f(z^2) = 0 \\ f(z^3) = 0 \\ \gamma_2 (f(u^2) + 2f(uz)) = 0 \\ f(u^2 z) + 2f((uz)z) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Agora dividimos o estudo de (2.9) em casos.

Caso 1: $\gamma_2 = 0$, isto é, $p(x) = x^3 - w(x)x^2$.

Segue de (2.9) que f é p -invariante se e somente se para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z^2) = 0 \\ f(z^3) = 0 \\ f(u^2 z) + 2f((uz)z) = 0 \end{cases}$$

Mas $f(z^2) = 0$, para todo $z \in Z$ se, e somente se, $f(z_1 z_2) = 0$ para todo $z_1, z_2 \in Z$. Assim, $f(z^2) = 0$ implica que $f(u^2 z) = 0$, uma vez que $u^2 \in Z$. Logo, o sistema acima é equivalente ao sistema abaixo, onde $u \in U$ e z, z_1 e $z_2 \in Z$:

$$\begin{cases} f(z_1 z_2) = 0 \\ f(z^3) = 0 \\ f((uz)z) = 0 \end{cases}$$

Portanto, nesse caso, o ortogonal de J_p é o seguinte subespaço de U :

$$J_p^\perp = Z^2 + \langle z^3 \mid z \in Z \rangle + \langle (uz)z \mid u \in U, z \in Z \rangle$$

Caso 2: $\gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_2 \neq -\frac{1}{2}$ (e portanto $\gamma_1 \neq -\frac{1}{2}$).

Segue de (2.9) que f é p -invariante se e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(z^2) = 0 \\ f(z^3) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f((uz)z) = 0 \end{cases}$$

Mas $f(uz) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$, implica que $f(z^3) = f(z^2z) = 0$ e $f((uz)z) = 0$. Assim, do sistema acima pode-se concluir que f é p -invariante se, e somente se, valem as identidades

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(z^2) = 0 \\ f(uz) = 0 \end{cases}$$

e portanto, nesse caso $J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$.

Caso 3: $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, isto é, $p(x) = x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$.

Segue de (2.9) que f é p -invariante se, e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(u^2z) = 0 \end{cases}$$

e portanto, $J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$.

Observação: Na análise acima obtivemos, em cada caso, uma condição do tipo: f é p -invariante se, e somente se, $f(W) = 0$, onde W é um subespaço de A . A partir dessa condição sempre concluímos que $J_p^\perp = W$. De fato, se $x \in W$ então $f(x) = 0$, para todo $f \in J_p$ e portanto $x \in J_p^\perp$ e $W \subseteq J_p^\perp$. Por outro lado, se existisse $a \in J_p^\perp$ tal que $a \notin W$, então $a \neq 0$; tomando-se uma base de A contendo a e uma base de W e $f \in A^*$ tal que $f(a) = 1$ e $f(x) = 0$ para todos

os demais elementos da base resulta que $f(W) = 0$ e portanto f é p -invariante. Então $f(y) = 0$ para todo $y \in J_p^\perp$. Em particular, $f(a) = 0$, um absurdo e assim $J_p^\perp = W$.

Os cálculos feitos acima demonstram a Proposição 2.13 a seguir, que calcula os subespaços $J_p^\perp$: com apenas 2 excessões, $J_p^\perp$ é o ideal de Etherington de A . Notemos que todo T-polinômio de grau 3 é da forma $x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x$, onde $\gamma \in K$. Simplificamos um pouco a notação a partir daqui: $\langle z^3 \rangle$ representa $\langle z^3 : z \in Z \rangle$. Analogamente $\langle (uz)z \rangle$ representa o subespaço vetorial $\langle (uz)z : u \in U \text{ e } z \in Z \rangle$.

Proposição 2.13 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein sobre K em relação a um idempotente não nulo e e seja $p(x) = x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x$, $\gamma \in K$, um T-polinômio de grau 3. Então:

(a) Se $\gamma = 0$, isto é, se $p(x) = x^3 - w(x)x^2$, então

$$J_p^\perp = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle$$

(b) Se $\gamma = -\frac{1}{2}$, isto é, se $p(x) = x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$ então

$$J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$$

(c) Se $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq -\frac{1}{2}$ então

$$J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ) \quad \blacksquare$$

Corolário 2.14 Se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, w) sobre um corpo K , então a dimensão do subespaço vetorial $U^2Z + UZ$ independe do idempotente e . Em particular, se A é excepcional, a dimensão de UZ é invariante.

Prova: Segue da Proposição 2.13 (b) e do Corolário 1.3. A segunda afirmação segue do fato que $U^2 = 0$. ■

Observação: O subespaço $Z \oplus (U^2Z + UZ)$ de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ não é, necessariamente, ideal de A . Por exemplo, consideremos

$A = \langle e, u_1, u_2, z \rangle$ com tábua de multiplicação (comutativa) dada por: $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ ($i = 1, 2$), $u_1z = u_1$, $z^2 = u_2$, demais produtos nulos. É fácil ver que A é uma álgebra de Bernstein (excepcional), na qual $Z \oplus (U^2Z + UZ) = \langle u_1, z \rangle$, que não é ideal de A , uma vez que $z^2 = u_2$.

Através da Proposição 2.13 obtemos também a seguinte caracterização, já conhecida, das álgebras de Bernstein-Jordan.

Corolário 2.15 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, w) sobre um corpo K . Então A é uma álgebra de Jordan se, e somente se, $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para todo $u \in U$ e $z \in Z$.

Prova: Sabemos que uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra bária comutativa seja uma álgebra de Bernstein-Jordan é que satisfaça a identidade $x^3 - w(x)x^2 = 0$. Assim, a álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Jordan se, e somente se, $p(a) = a^3 - w(a)a^2 = 0$ para todo $a \in A$, isto é, se e somente se $J_p^\perp = 0$. Pela Proposição 2.13 (a) isto significa que $Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle = 0$, o que é equivalente às condições $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para todo $u \in U$, $z \in Z$. ■

Corolário 2.16 Uma álgebra de Bernstein (A, w) sobre um corpo K satisfaz a T-equação $x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x = 0$, com $\gamma \neq 0$, se e somente se, A é a álgebra gamética para herança Mendeliana simples, isto é, A é a álgebra bária cuja multiplicação é dada por $2xy = w(y)x + w(x)y$ para todo $x, y \in A$.

Prova: Da Proposição 2.13 (b) e (c) segue que, se A satisfaz a identidade $x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x = 0$, onde $\gamma \neq 0$, então $Z = 0$ para toda decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$. Logo dados $x = w(x)e + u$ e $y = w(y)e + \bar{u}$, elementos quaisquer de A , com $u, \bar{u} \in U$ temos, uma vez que $u\bar{u} \in Z = 0$, que $2xy = 2w(x)w(y)e + w(x)\bar{u} + w(y)u = w(y)(w(x)e + u) + w(x)(w(y)e + \bar{u}) = w(y)x + w(x)y$. Reciprocamente, se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é tal que $2xy = w(y)x + w(x)y$, para todo $x, y \in A$, então $0 = 2ez = w(z)e + w(e)z = z$, para todo

$z \in Z$. Portanto $Z = 0$ e $J_p^\perp = 0$ para $p(x) = x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x$ com $\gamma \neq 0$. Logo A satisfaz a identidade $p(x) = 0$. ■

Sabemos que o *posto* de uma train-álgebra é o grau do T-polinômio $p(x)$ de menor grau tal que $p(x) = 0$, para todo $x \in A$.

Corolário 2.17 Uma álgebra de Bernstein (A, w) é uma train-álgebra de posto ≤ 3 se, e somente se, satisfaz a T-equação $x^3 - w(x)x^2 = 0$, para todo $x \in A$, isto é, se e somente se, é uma álgebra de Bernstein-Jordan.

Prova: Se a álgebra satisfaz a identidade $x^2 - w(x)x = 0$ então satisfaz também $x^3 - w(x)x^2 = x(x^2 - w(x)x) = 0$. Se a álgebra tem posto 3 então satisfaz uma T-equação do tipo $p(x) = x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x = 0$ e portanto $J_p = A^*$ e $J_p^\perp = 0$. Se $\gamma = 0$ então a álgebra satisfaz a identidade $x^3 - w(x)x^2 = 0$. Se $\gamma \neq 0$ então, pelo Corolário 2.16, $2xy = w(x)y + w(y)x$ para quaisquer elementos x e y de A e portanto $x^2 = w(x)x$ para todo $x \in A$. Logo A satisfaz a identidade $x^3 - w(x)x^2 = 0$. A recíproca é óbvia. ■

A próxima proposição calcula os possíveis $J_p^\perp$ numa álgebra de Bernstein, para $p(x)$ de grau 4. Os cálculos são similares ao caso de grau 3, porém com mais subcasos a serem analisados. Como era esperado, a condição $\gamma_3 \neq 0$ é mais favorável. O cálculo de $J_p^\perp$ depende da análise de 3 parâmetros: γ_2, γ_3 e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2$.

Proposição 2.18 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, w) sobre K . Seja $p(x) = x^4 + \gamma_1 w(x)x^3 + \gamma_2 w(x)^2x^2 + \gamma_3 w(x)^3x$, com $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K$ e $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, um T-polinômio de grau 4. Então temos os seguintes casos:

(a) se $\gamma_3 \neq 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$ então $J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$

(b) se $\gamma_3 \neq 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$ então $J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$

(c) se $\gamma_3 = 0$, $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_2 \neq 0$ então $J_p^\perp = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle$

(d) se $\gamma_3 = 0$, $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_2 = 0$, isto é, se $p(x) = x^4 - w(x)x^3$, então $J_p^\perp = Z^2 + \langle (uz)z \rangle + \langle (u^2z)z \rangle$

(e) se $\gamma_3 = 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$, isto é, se $p(x) = x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$, então $J_p^\perp = \langle z^3 \rangle + \langle z^4 \rangle + \langle ((uz)z)z \rangle$

Prova: Seja $a = \alpha e + u + z$, $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$ um elemento arbitrário de A . Usando as identidades (1.6) a (1.12) e a Proposição 1.1 vistas na Seção 1.1 temos:

$$a^2 = \alpha^2 e + \alpha u + 2uz + z^2 + u^2$$

$$a^3 = \alpha^3 e + \alpha^2 u + 2\alpha uz + \frac{1}{2}\alpha z^2 + 2(uz)z + z^3 + u^2z + \alpha u^2$$

$$a^4 = \alpha^4 e + \alpha^3 u + 2\alpha^2 uz + \frac{1}{4}\alpha^2 z^2 + 3\alpha(uz)z + \alpha z^3 + \frac{3}{2}\alpha u^2z + 2((uz)z)z + z^4 + (u^2z)z + \alpha^2 u^2.$$

Assim,

$$p(a) = \alpha^3 \gamma_3 z + \alpha^2 \left[-\gamma_3 u^2 - 2\gamma_3 uz + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2 \right) z^2 \right] + \alpha \left[\left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) u^2 z + 2\left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) (uz)z + (1 + \gamma_1) z^3 \right] + (u^2z)z + 2((uz)z)z + z^4$$

e $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, a seguinte expressão é nula:

$$\alpha^3 \gamma_3 f(z) + \alpha^2 \left[-\gamma_3 f(u^2) - 2\gamma_3 f(uz) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2 \right) f(z^2) \right] + \alpha \left[\left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) f(u^2z) + 2\left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) f((uz)z) + (1 + \gamma_1) f(z^3) \right] + f((u^2z)z) + 2f(((uz)z)z) + f(z^4),$$

para todo $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$. Isto equivale a dizer que o coeficiente de α^i é nulo, para $i = 0, 1, 2, 3$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$, o que nos conduz ao sistema de equações, onde $u \in U$ e $z \in Z$ são arbitrários:

$$\begin{cases} \gamma_3 f(z) = 0 \\ -\gamma_3 f(u^2) - 2\gamma_3 f(uz) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2 \right) f(z^2) = 0 \\ \left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) f(u^2z) + 2\left(\frac{3}{2} + \gamma_1 \right) f((uz)z) + (1 + \gamma_1) f(z^3) = 0 \\ f((u^2z)z) + 2f(((uz)z)z) + f(z^4) = 0 \end{cases}$$

Como as condições acima devem ocorrer em particular para $u = 0$ na segunda, na terceira e na quarta equação, obtemos que $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, valem as identidades:

$$\begin{cases} \gamma_3 f(z) = 0 \\ \gamma_3 f(u^2) + 2\gamma_3 f(uz) = 0 \\ (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2)f(z^2) = 0 \\ (\frac{3}{2} + \gamma_1)f(u^2z) + 2(\frac{3}{2} + \gamma_1)f((uz)z) = 0 \\ (1 + \gamma_1)f(z^3) = 0 \\ f((u^2z)z) + 2f(((uz)z)z) = 0 \\ f(z^4) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Passamos a analisar os diferentes casos.

Caso 1: $\gamma_3 \neq 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$

Segue, de (2.10) que f é p -invariante se e somente se

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(z^2) = 0 \end{cases}$$

que equivale a $f(Z \oplus (Z^2 + UZ)) = 0$, de onde vem $J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$.

Caso 2: $\gamma_3 \neq 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$

Nesse caso tem-se $\gamma_1 \neq -\frac{3}{2}$ pois, se $\gamma_1 = -\frac{3}{2}$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$ então $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ e de $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ segue que $\gamma_3 = 0$. Do sistema (2.10) segue que f é p -invariante se, e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$,

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(u^2z) = 0 \end{cases}$$

que equivale a $f(Z \oplus (U^2Z + UZ)) = 0$ e daí $J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$

Caso 3: $\gamma_3 = 0$, $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_2 \neq 0$

Nesse caso tem-se $\gamma_1 \neq -1$ pois, se $\gamma_1 = -1$, como $\gamma_3 = 0$, segue de $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ que $\gamma_2 = 0$. Tem-se também $\gamma_1 \neq -\frac{3}{2}$ pois, se $\gamma_1 = -\frac{3}{2}$ e $\gamma_3 = 0$ então $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$. De (2.10) concluímos que $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$,

$$\begin{cases} f(z^2) = 0 \\ f((uz)z) = 0 \\ f(z^3) = 0 \\ f((u^2z)z) = 0 \end{cases}$$

Agora, tendo em vista que $(u^2+z)^3 = (u^2+z)^2(u^2+z) = (2u^2z+z^2)(u^2+z) = 2u^2(u^2z) + 2(u^2z)z + u^2z^2 + z^3 = 2(u^2z)z + z^3$, uma vez que $u^2(u^2z) = 0 = u^2z^2$ de acordo com as identidades (1.12), segue que $2(u^2z)z = (u^2+z)^3 - z^3$. Assim, a condição $f(z^3) = 0$ para todo $z \in Z$ implica que $f((u^2z)z) = 0$. Portanto, $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$,

$$\begin{cases} f(z^2) = 0 \\ f((uz)z) = 0 \\ f(z^3) = 0 \end{cases}$$

Portanto, nesse caso, $J_p^\perp = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle$. Observemos que $J_p^\perp$ é um subespaço vetorial de U .

Caso 4: $\gamma_3 = 0$, $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_2 = 0$, isto é, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_1 = -1$, ou seja, $p(x) = x^4 - w(x)x^3$. De (2.10) segue que $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, valem as identidades:

$$\begin{cases} f(z^2) = 0 \\ f((uz)z) = 0 \\ f((u^2z)z) = 0 \end{cases}$$

Portanto, nesse caso, $J_p^\perp = Z^2 + \langle (uz)z \rangle + \langle (u^2z)z \rangle$, que também é subespaço vetorial de U .

Caso 5: $\gamma_3 = 0$ e $1 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$, isto é, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = \frac{1}{2}$, $\gamma_1 = -\frac{3}{2}$, ou seja, $p(x) = x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$. De (2.10) temos que $f \in A^*$ é p -invariante se, e somente se, valem as identidades (para todo $u \in U$ e $z \in Z$):

$$\begin{cases} f(z^3) = 0 \\ f((u^2z)z) + 2f(((uz)z)z) = 0 \\ f(z^4) = 0 \end{cases}$$

Como vimos acima, $f(z^3) = 0$ para todo $z \in Z$ implica que $f((u^2z)z) = 0$ para quaisquer $u \in U$ e $z \in Z$.

Logo, nesse caso, f é p -invariante se, e somente se,

$$\begin{cases} f(z^3) = 0 \\ f(z^4) = 0 \\ f(((uz)z)z) = 0 \end{cases}$$

Portanto, $J_p^\perp = \langle z^3 \rangle + \langle z^4 \rangle + \langle ((uz)z)z \rangle$, um subespaço vetorial de U .

Observação: Vimos no Exemplo 2.12 que se $p(x) = x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$ e $A = \langle e, u, z \rangle$ com $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $z^2 = u$, então $J_p^\perp$ não é um ideal de A . Veremos agora um exemplo similar porém para $p(x)$ de grau 4. Consideremos $A = \langle e, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \rangle$, espaço vetorial sobre um corpo K com a tabela de multiplicação comutativa:

$e^2 = e$; $ec_i = \frac{1}{2}c_i$ ($i = 3, 4, 5$); $c_1c_2 = c_3$; $c_1c_5 = -c_3$; $c_1c_3 = c_4$; $c_2c_4 = c_3$; $c_2c_3 = c_5$; demais produtos nulos.

Definindo uma forma linear ω em A por $\omega(e) = 1$, $\omega(c_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), (A, ω) é uma álgebra de Bernstein (que já foi considerada no exemplo 1.10). Temos: $U = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$ e $Z = \langle c_1, c_2 \rangle$. Dados $z = \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2$ e $u = \alpha_3c_3 + \alpha_4c_4 + \alpha_5c_5$, elementos quaisquer de Z e de U , respectivamente, obtemos:

$$z^2 = 2\alpha_1\alpha_2c_3$$

$$z^3 = 2\alpha_1^2\alpha_2c_4 + 2\alpha_1\alpha_2^2c_5$$

$$z^4 = 0$$

$$((uz)z)z = \sum_{i=3}^5 \sum_{j,k,l \in \{1,2\}} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l ((c_i c_j) c_k) c_l = 0, \quad \text{uma vez que}$$

$((c_3 c_1) c_2) c_1 = -((c_3 c_2) c_1) c_1 = c_4$, $((c_3 c_1) c_2) c_2 = -((c_3 c_2) c_1) c_2 = c_5$,
 $((c_4 c_2) c_1) c_2 = -((c_4 c_2) c_2) c_1 = c_3$, $((c_5 c_1) c_1) c_2 = -((c_5 c_1) c_2) c_1 = -c_3$ e os
demais $((c_i c_j) c_k) c_l$ são nulos. Observemos ainda que c_5 e c_4 pertencem ao
subespaço $\langle z^3 \rangle$ pois, por exemplo, se $z_1 = c_1 + c_2$ e $z_2 = c_1 - c_2$ então
 $z_1^3 + z_2^3 = 4c_5$ e $z_1^3 - z_2^3 = 4c_4$. Em vista do exposto, o subespaço $J_p^\perp$ da álgebra
 A , onde $p(x) = x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$ reduz-se a $J_p^\perp = \langle c_4, c_5 \rangle$, de acordo
com a Proposição 2.18. Mas $\langle c_4, c_5 \rangle$ não é um ideal de A pois $c_2 c_4 = c_3$.

Uma álgebra de Bernstein A se diz *nuclear* se $A^2 = A$, o que é equivalente a
dizer que $U^2 = Z$ para uma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$.

O resultado a seguir já é conhecido e pode ser encontrado em A. Micali e M.
Ouattara [23, cap.1]. É apresentado aqui com outra demonstração.

Corolário 2.19 Toda álgebra de Bernstein nuclear sobre o corpo K satisfaz a
T-equação $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = 0$.

Prova: Seja $A = Ke \oplus U \oplus U^2$ uma álgebra de Bernstein nuclear. Para provar-
mos que A satisfaz a identidade desejada basta verificarmos que $J_p = A^*$, ou
seja, $J_p^\perp = 0$, para $p(x) = x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$. Da Proposição 2.18 temos
a igualdade $J_p^\perp = \langle z^3 \rangle + \langle z^4 \rangle + \langle ((uz)z)z \rangle$. Notemos que um elemento
qualquer de U^2 , numa álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$, é combinação
linear de elementos da forma u^2 , com $u \in U$, pois $2u_1 u_2 = [(u_1 + u_2)^2 - u_1^2 - u_2^2]$.
Aqui, como A é nuclear, um elemento qualquer de Z é combinação linear de
elementos da forma u^2 com $u \in U$. Assim, $z^3 = z(zz)$ é combinação linear
de elementos da forma $u^2(zz)$. Mas $u^2(zz) = 0$ pois $u^2(z_1 z_2) = 0$ em qual-
quer álgebra de Bernstein (ver (1.12), seção 1.1). Portanto $z^3 = 0$ e daí vem
que $\langle z^3 \rangle = \langle z^4 \rangle = 0$. Resta apenas mostrar que $((uz)z)z = 0$ para todo
 $u \in U$ e todo $z \in Z$. Mas $((uz)z)z$ é combinação linear de elementos da

forma $((uz)z)\bar{u}^2$, com $\bar{u} \in U$. Da relação (1.10) dada na Seção 1.1, obtemos, por linearização parcial, $u_1^2(u_2x) + 2(u_1u_2)(u_1x) = 0$, para todo $u_1, u_2 \in U$, $x \in \ker w$. Assim, $((uz)z)\bar{u}^2 = -2(\bar{u}(uz))(\bar{u}z)$. Mas, da identidade (1.7), a saber, $u_1(u_2z) + u_2(u_1z) = 0$, podemos escrever $\bar{u}(uz) = -u(\bar{u}z)$ e portanto $((uz)z)\bar{u}^2 = 2(u(\bar{u}z))(\bar{u}z)$. De (1.6) obtemos $2(\bar{u}z)((\bar{u}z)u) = -(\bar{u}z)^2u$ e assim temos $((uz)z)\bar{u}^2 = -(\bar{u}z)^2u$. Usando agora (1.11), obtemos finalmente que $((uz)z)\bar{u}^2 = 0$ e portanto $((uz)z)z = 0$ para todo $u \in U$ e $z \in Z$. ■

O exemplo a seguir mostra que a recíproca do Corolário 2.19 é falsa pois uma álgebra de Bernstein pode satisfazer a identidade $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = 0$ sem ser necessariamente nuclear.

Exemplo 2.20 Seja $A = \langle e, u_1, u_2, \dots, u_r, z_1, z_2, \dots, z_s \rangle$, onde $r \geq 2$, $s \geq 2$, um espaço vetorial de dimensão $1 + r + s$ sobre K . Definindo em A uma multiplicação comutativa através da tábua:

$e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $u_1^2 = z_1$, $u_1z_2 = \frac{1}{2}u_r$, demais produtos nulos e uma forma linear $w : A \rightarrow K$ tal que $w(e) = 1$, $w(u_i) = w(z_j) = 0$ para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, verifica-se que (A, w) é uma álgebra de Bernstein. Temos $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$, $Z = \langle z_1, \dots, z_s \rangle$ e $U^2 = \langle z_1 \rangle$. Assim $U^2 \neq Z$ e portanto A não é nuclear. Mas $Z^2 = 0$, $UZ = \langle u_r \rangle$, $(UZ)Z = 0$ e portanto $z^3 = z^4 = ((uz)z)z = 0$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$, logo $J_p^\perp = 0$ de acordo com a condição (e) da Proposição 2.18 e portanto A satisfaz a identidade $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = 0$.

Corolário 2.21 Seja (A, w) um álgebra de Bernstein sobre um corpo K . Então A é uma train-álgebra de posto ≤ 4 se, e somente se, A satisfaz a identidade $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = 0$.

Prova: Seja A uma álgebra de Bernstein que é uma T-álgebra de posto ≤ 4 . Se o posto A é ≤ 3 , segue do Corolário 2.17 que A é uma álgebra de Bernstein-

Jordan e portanto satisfaz a identidade $x^3 - w(x)x^2 = 0$. Assim, teremos também $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = x(x^3 - w(x)x^2) - \frac{1}{2}w(x)(x^3 - w(x)x^2) = 0$, para todo $x \in A$. Suponhamos agora que A tem posto 4. Então $J_p^\perp \neq 0$ para qualquer T-polinômio de grau 3. Conclui-se, observando os possíveis subespaços $J_p^\perp$ dados na Proposição 2.13, que $Z \neq 0$, para uma decomposição de Peirce qualquer $A = Ke \oplus U \oplus Z$. A hipótese de que $Z \neq 0$ inviabiliza a igualdade $J_q^\perp = 0$ para $q(x) = x^4 + \gamma_1 w(x)x^3 + \gamma_2 w(x)^2x^2 + \gamma_3 w(x)^3x$ com $\gamma_3 \neq 0$ (ver Proposição 2.18, casos (a) e (b)). Assim, devemos ter $J_q^\perp = 0$ para um dos casos (c), (d) ou (e) da Proposição 2.18. Se $J_q^\perp = 0$ para algum polinômio $q(x) \neq x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$ (casos (c) ou (d)) então $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$. Portanto, $Z^3 = Z^4 = 0$, $((uz)z)z = 0$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$. Logo $J_q^\perp = 0$ para $q(x) = x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$ e portanto $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2 = 0$ para todo $x \in A$.

A recíproca é óbvia. ■

Corolário 2.22 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K . Então A é uma train-álgebra de posto 4 se, e somente se, A satisfaz as condições:

- (i) $a^4 - \frac{3}{2}w(a)a^3 + \frac{1}{2}w(a)^2a^2 = 0$, para todo $a \in A$
- (ii) $Z^2 \neq 0$ ou $(uz)z \neq 0$ para algum $u \in U$ e $z \in Z$

Prova: Segue imediatamente dos corolários 2.15, 2.17 e 2.21. ■

2.4 T-polinômios arbitrários

Neste parágrafo introduzimos um pouco de linguagem para depois tratar as formas p -invariantes, onde p é um T-polinômio de grau arbitrário. Esta linguagem era dispensável nos casos já tratados na seção anterior, quando o grau de p era 3 ou 4.

Seja K um corpo. Para cada par de inteiros (n, k) , com $2 \leq k \leq n$, vamos definir formas lineares $\beta_{n,k}, \delta_{n,k} : K^{n+1-k} \rightarrow K$, recursivamente, por (aqui $x_0, x_1, \dots$ representam elementos de K):

$$(a) \beta_{n,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2}$$

$$(b) \text{ Para } 2 < k < n, \beta_{n,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) = \beta_{n-1,k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) + \frac{1}{2}\beta_{n-1,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1-k})$$

$$(c) \beta_{n,n}(x_0) = x_0$$

e também

$$(a) \delta_{n,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) = \frac{1}{2^{n-2}}x_0 + \frac{1}{2^{n-3}}x_1 + \frac{1}{2^{n-4}}x_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-j}}x_{j-2} + \dots + \frac{1}{2}x_{n-3} + x_{n-2}$$

$$(b) \text{ Para } 2 < k < n, \delta_{n,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) = \delta_{n-1,k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) + \frac{1}{2}\delta_{n-1,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1-k})$$

$$(c) \delta_{n,n}(x_0) = x_0$$

A proposição a seguir fornece uma expressão para os valores assumidos por um T-polinômio qualquer, sobre elementos de uma álgebra de Bernstein, em termos das formas lineares $\beta_{n,k}$ e $\delta_{n,k}$ definidas acima. Esta expressão generaliza a expressão de $p(a)$ obtida na demonstração da Proposição 2.18. Para um dado T-polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}w(x)^{n-1}x$, denotamos $\bar{\beta}_{n,k} = \beta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$ e $\bar{\delta}_{n,k} = \delta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$.

Proposição 2.23 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein sobre o corpo K e seja $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}w(x)^{n-1}x$ um T-polinômio de grau $n \geq 2$, com coeficientes em K . Se $a = \alpha e + u + z$ é um elemento qualquer de A , onde $\alpha \in K$, $u \in U$ e $z \in Z$ então:

$$p(a) = \alpha^{n-1}\gamma_{n-1}z + \sum_{k=2}^n \alpha^{n-k}(\bar{\beta}_{n,k}R_z^{k-2}u^2 + 2\bar{\beta}_{n,k}R_z^{k-1}u + \bar{\delta}_{n,k}z^k) \quad (2.11)$$

Prova: Demonstraremos (2.11) usando indução em $n \geq 2$. Para $n = 2$ temos $p(x) = x^2 - w(x)x$. Como $a^2 = \alpha^2 e + \alpha u + 2uz + z^2 + u^2$, sendo $a = \alpha e + u + z$, segue que:

$$\begin{aligned} p(a) &= \alpha^2 e + \alpha u + 2uz + z^2 + u^2 - \alpha(\alpha e + u + z) = \\ &= -\alpha z + u^2 + 2uz + z^2 \end{aligned}$$

que é da forma dada em (2.11), uma vez que $\bar{\beta}_{2,2} = \bar{\delta}_{2,2} = 1$ e $\gamma_1 = -1$.

Vamos agora supor que (2.11) seja verdadeira para todo T-polinômio de grau $n \geq 2$ e seja $p(x) = x^{n+1} + \gamma_1 w(x)x^n + \gamma_2 w(x)^2 x^{n-1} + \dots + \gamma_n w(x)^n x$ um T-polinômio de grau $n+1$. Vamos mostrar que para $a = \alpha e + u + z$, $p(a)$ é da forma dada em (2.11), isto é:

$$p(a) = \alpha^n \gamma_n z + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha^{n+1-k} (\bar{\beta}_{n+1,k} R_z^{k-2} u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,k} R_z^{k-1} u + \bar{\delta}_{n+1,k} z^k)$$

Podemos reescrever $p(x)$ na forma $p(x) = xq(x) + \gamma_n w(x)^n x - \gamma_n w(x)^{n-1} x^2$, onde

$$q(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-2} w(x)^{n-2} x^2 + (\gamma_{n-1} + \gamma_n) w(x)^{n-1} x$$

O polinômio $q(x)$ é um T-polinômio de grau n e portanto, usando a hipótese de indução, podemos escrever:

$$q(a) = \alpha^{n-1} (\gamma_{n-1} + \gamma_n) z + \sum_{k=2}^n \alpha^{n-k} (\bar{\beta}_{n,k} R_z^{k-2} u^2 + 2\bar{\beta}_{n,k} R_z^{k-1} u + \bar{\delta}_{n,k} z^k)$$

De acordo com a Proposição 1.2 do Capítulo 1, são válidas as relações:

- (a) $uz^k = 0, z^k \in U \quad (k \geq 2)$
- (b) $uR_z^k(u) = 0, R_z^k u \in U \quad (k \geq 1)$
- (c) $uR_z^k u^2 = 0, R_z^k u^2 \in U \quad (k \geq 1)$

e portanto temos $a\bar{\beta}_{n,2}R_z^0 u^2 = (\alpha e + u + z)\bar{\beta}_{n,2}u^2 = \bar{\beta}_{n,2}u^2 z$ e para $k > 2$, $a\bar{\beta}_{n,k}R_z^{k-2} u^2 = \bar{\beta}_{n,k}(\frac{1}{2}\alpha R_z^{k-2} u^2 + R_z^{k-1} u^2)$. Para $k \geq 2$, temos também $aR_z^{k-1} u = \frac{1}{2}\alpha R_z^{k-1} u + R_z^k u$ e $az^k = \frac{1}{2}\alpha z^k + z^{k+1}$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} aq(a) &= \alpha^{n-1} (\gamma_{n-1} + \gamma_n) (uz + z^2) + \\ &+ \alpha^{n-2} \left[\bar{\beta}_{n,2} u^2 z + 2\bar{\beta}_{n,2} (\frac{1}{2}\alpha uz + R_z^2 u) + \bar{\delta}_{n,2} (\frac{1}{2}\alpha z^2 + z^3) \right] + \\ &+ \sum_{k=3}^n \alpha^{n-k} \left[\bar{\beta}_{n,k} (\frac{1}{2}\alpha R_z^{k-2} u^2 + R_z^{k-1} u^2) + 2\bar{\beta}_{n,k} (\frac{1}{2}\alpha R_z^{k-1} u + R_z^k u) + \right. \\ &\left. \bar{\delta}_{n,k} (\frac{1}{2}\alpha z^k + z^{k+1}) \right] \end{aligned}$$

e como $p(a) = aq(a) + \gamma_n w(a)^n a - \gamma_n w(a)^{n-1} a^2$, temos:

$$\begin{aligned}
p(a) &= \gamma_n \alpha^n (\alpha e + u + z) - \gamma_n \alpha^{n-1} (\alpha^2 e + \alpha u + 2uz + z^2 + u^2) + aq(a) = \\
&= \gamma_n \alpha^n z - 2\gamma_n \alpha^{n-1} uz - \gamma_n \alpha^{n-1} z^2 - \gamma_n \alpha^{n-1} u^2 + \alpha^{n-1} (\gamma_{n-1} + \gamma_n) uz + \\
&+ \alpha^{n-1} (\gamma_{n-1} + \gamma_n) z^2 + \alpha^{n-2} (\bar{\beta}_{n,2} R_z u^2 + \bar{\beta}_{n,2} \alpha R_z u + 2\bar{\beta}_{n,2} R_z^2 u + \frac{1}{2} \alpha \bar{\delta}_{n,2} z^2 + \\
&+ \bar{\delta}_{n,2} z^3) + \sum_{k=3}^n \alpha^{n-k} \left(\frac{1}{2} \alpha \bar{\beta}_{n,k} R_z^{k-2} u^2 + \bar{\beta}_{n,k} R_z^{k-1} u^2 + \alpha \bar{\beta}_{n,k} R_z^{k-1} u + \right. \\
&+ 2\bar{\beta}_{n,k} R_z^k u + \frac{1}{2} \alpha \bar{\delta}_{n,k} z^k + \bar{\delta}_{n,k} z^{k+1} \Big) = \alpha^n \gamma_n z + \alpha^{n-1} \left[-\gamma_n u^2 + \right. \\
&+ (-2\gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_n + \bar{\beta}_{n,2}) uz + (-\gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_n + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,2}) z^2 \Big] + \\
&+ \alpha^{n-2} \left[(\bar{\beta}_{n,2} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,3}) R_z u^2 + 2(\bar{\beta}_{n,2} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,3}) R_z^2 u + (\bar{\delta}_{n,2} + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,3}) z^3 \right] + \\
&+ \alpha^{n-3} \left[(\bar{\beta}_{n,3} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,4}) R_z^2 u^2 + 2(\bar{\beta}_{n,3} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,4}) R_z^3 u + (\bar{\delta}_{n,3} + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,4}) z^4 \right] + \dots \\
&+ \alpha \left[(\bar{\beta}_{n,n-1} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,n}) R_z^{n-2} u^2 + 2(\bar{\beta}_{n,n-1} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,n}) R_z^{n-1} u + (\bar{\delta}_{n,n-1} + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,n}) z^n \Big] + \alpha^0 \left[\bar{\beta}_{n,n} R_z^{n-1} u^2 + 2\bar{\beta}_{n,n} R_z^n u + \bar{\delta}_{n,n} z^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

Considerando que:

- (a) $-\gamma_n = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1} = \bar{\beta}_{n+1,2}$
- (b) $-2\gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_n + \bar{\beta}_{n,2} = -\gamma_n + \gamma_{n-1} + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-2} = \bar{\beta}_{n+1,2} + \bar{\beta}_{n+1,2} = 2\bar{\beta}_{n+1,2}$
- (c) $\gamma_{n-1} + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,2} = \gamma_{n-1} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} \gamma_1 + \frac{1}{2^{n-4}} \gamma_2 + \dots + \frac{1}{2} \gamma_{n-3} + \gamma_{n-2} \right] = \frac{1}{2^{n+1-2}} + \frac{1}{2^{n+1-3}} \gamma_1 + \frac{1}{2^{n+1-4}} \gamma_2 + \dots + \frac{1}{2} \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1} = \bar{\delta}_{n+1,2}$
- (d) $\bar{\beta}_{n,k-1} + \frac{1}{2} \bar{\beta}_{n,k} = \bar{\beta}_{n+1,k} \quad (2 < k < n+1)$
- (e) $\bar{\beta}_{n,n} = \beta_{n,n}(1) = 1 = \bar{\beta}_{n+1,n+1}$
- (f) $\bar{\delta}_{n,k-1} + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{n,k} = \bar{\delta}_{n+1,k} \quad (2 < k < n+1)$
- (g) $\bar{\delta}_{n,n} = \delta_{n,n}(1) = 1 = \bar{\delta}_{n+1,n+1}$

segue que o train polinômio $p(x)$, calculado em $a = \alpha e + u + z$, tem a forma:

$$\begin{aligned}
p(a) &= \alpha^n \gamma_n z + \\
&\alpha^{n-1} [\bar{\beta}_{n+1,2} u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,2} R_z u + \bar{\delta}_{n+1,2} z^2] + \\
&\alpha^{n-2} [\bar{\beta}_{n+1,3} R_z u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,3} R_z^2 u + \bar{\delta}_{n+1,3} z^3] + \\
&\alpha^{n-3} [\bar{\beta}_{n+1,4} R_z^2 u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,4} R_z^3 u + \bar{\delta}_{n+1,4} z^4] + \dots + \\
&\alpha^1 [\bar{\beta}_{n+1,n} R_z^{n-2} u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,n} R_z^{n-1} u + \bar{\delta}_{n+1,n} z^n] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha^0 [\bar{\beta}_{n+1,n+1} R_z^{n-1} u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,n+1} R_z^n u + \bar{\delta}_{n+1,n+1} z^{n+1}] = \\ & = \alpha^n \gamma_n z + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha^{n+1-k} (\bar{\beta}_{n+1,k} R_z^{k-2} u^2 + 2\bar{\beta}_{n+1,k} R_z^{k-1} u + \bar{\delta}_{n+1,k} z^k) \end{aligned}$$

o que termina a prova por indução sobre o grau de $p(x)$. ■

O próximo lema e a próxima proposição permitem expressar as formas lineares $\delta_{n,k}$ em termos das formas lineares $\beta_{n,j}$.

Lema Com as notações acima, temos $\delta_{n,2} = \beta_{n,2} - \frac{1}{2}\beta_{n,3}$ para todo $n \geq 3$. Mais exatamente, $\delta_{n,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) = \beta_{n,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) - \frac{1}{2}\beta_{n,3}(x_0, x_1, \dots, x_{n-3})$ para quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_{n-2} \in K$ e $n \geq 3$.

Prova: Usaremos indução sobre n . Para $n = 3$ temos $\delta_{3,2}(x_0, x_1) = \frac{1}{2}x_0 + x_1$, $\beta_{3,2}(x_0, x_1) = x_0 + x_1$ e $\beta_{3,3}(x_0) = x_0$ logo $\delta_{3,2}(x_0, x_1) = \beta_{3,2}(x_0, x_1) - \frac{1}{2}\beta_{3,3}(x_0)$. Suponhamos agora que $\delta_{n,2} = \beta_{n,2} - \frac{1}{2}\beta_{n,3}$ para $n \geq 3$ e mostremos que $\delta_{n+1,2} = \beta_{n+1,2} - \frac{1}{2}\beta_{n+1,3}$. Das definições das formas $\delta_{m,k}$ e $\beta_{m,k}$ temos

$$\begin{aligned} \delta_{n+1,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= \frac{1}{2^{n-1}}x_0 + \frac{1}{2^{n-2}}x_1 + \dots + x_{n-1} = \\ &= \frac{1}{2}\delta_{n,2}(x_0, \dots, x_{n-2}) + x_{n-1}. \end{aligned}$$

$$\beta_{n+1,3}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) = \beta_{n,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) + \frac{1}{2}\beta_{n,3}(x_0, x_1, \dots, x_{n-3}) \quad \text{e}$$

$$\beta_{n+1,2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} = \beta_{n,2}(x_0, \dots, x_{n-2}) + x_{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \beta_{n+1,2} - \frac{1}{2}\beta_{n+1,3} &= \beta_{n,2} + x_{n-1} - \frac{1}{2}\beta_{n,2} - \frac{1}{4}\beta_{n,3} = \\ &= \frac{1}{2}\beta_{n,2} - \frac{1}{4}\beta_{n,3} + x_{n-1} = \frac{1}{2}(\beta_{n,2} - \frac{1}{2}\beta_{n,3}) + x_{n-1} = \frac{1}{2}\delta_{n,2} + x_{n-1} = \delta_{n+1,2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.24 Com as notações acima, para $2 \leq k < n$, $\delta_{n,k} = \beta_{n,k} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+1}$. Mais precisamente, para quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_{n-k} \in K$, temos que $\delta_{n,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) = \beta_{n,k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) - \frac{1}{2}\beta_{n,k+1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k-1})$

Prova: Faremos a demonstração utilizando indução sobre k . Para $k = 2$ já vimos no lema acima que o resultado é verdadeiro. Suponhamos que para um certo $k \geq 2$ se tenha $\delta_{n,k} = \beta_{n,k} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+1}$ para todo $n > k$. Devemos mostrar que $\delta_{n,k+1} = \beta_{n,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+2}$, para todo $n > k + 1$. Para demonstrar a igualdade acima usaremos indução em $n > k + 1$. Para $n = k + 2$

temos $\delta_{n,k+1} = \delta_{k+2,k+1} = \delta_{k+1,k} + \frac{1}{2}\delta_{k+1,k+1} = \delta_{k+1,k} + \frac{1}{2}x_0$ (pela definição de $\delta_{m,j}$). Mas, pela hipótese de indução, $\delta_{k+1,k} = \beta_{k+1,k} - \frac{1}{2}\beta_{k+1,k+1}$, isto é, $\delta_{k+1,k} = \beta_{k+1,k} - \frac{1}{2}x_0$. Assim, $\delta_{n,k+1} = \beta_{k+1,k}$ para $n = k + 2$. Como, da definição de $\beta_{m,j}$, $\beta_{k+2,k+1} = \beta_{k+1,k} + \frac{1}{2}\beta_{k+1,k+1}$ e portanto $\beta_{k+1,k} = \beta_{k+2,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{k+1,k+1} = \beta_{k+2,k+1} - \frac{1}{2}x_0 = \beta_{k+2,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{k+2,k+2}$ segue que $\delta_{n,k+1} = \beta_{k+2,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{k+2,k+2} = \beta_{n,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+2}$ para $n = k + 2$. Suponhamos agora que a igualdade $\delta_{n,k+1} = \beta_{n,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+2}$ é verdadeira para um certo $n > k+1$. Mostremos que também é verdadeira para $n+1$, isto é, mostremos que $\delta_{n+1,k+1} = \beta_{n+1,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n+1,k+2}$. Da definição de $\delta_{m,j}$ temos $\delta_{n+1,k+1} = \delta_{n,k} + \frac{1}{2}\delta_{n,k+1}$. Da hipótese inicial de indução, temos $\delta_{n,k} = \beta_{n,k} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+1}$. Da segunda hipótese de indução temos $\delta_{n,k+1} = \beta_{n,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+2}$. Substituindo estas duas últimas igualdades na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\delta_{n+1,k+1} &= \beta_{n,k} - \frac{1}{2}\beta_{n,k+1} + \frac{1}{2}\beta_{n,k+1} - \frac{1}{4}\beta_{n,k+2} = \\ &= \beta_{n,k} + \frac{1}{2}\beta_{n,k+1} - \frac{1}{2}(\beta_{n,k+1} + \frac{1}{2}\beta_{n,k+2})\end{aligned}$$

Como, por definição, $\beta_{n,k} + \frac{1}{2}\beta_{n,k+1} = \beta_{n+1,k+1}$ e $\beta_{n,k+1} + \frac{1}{2}\beta_{n,k+2} = \beta_{n+1,k+2}$, segue que $\delta_{n+1,k+1} = \beta_{n+1,k+1} - \frac{1}{2}\beta_{n+1,k+2}$, o que encerra a demonstração. ■

Nos dois próximos teoremas, determinaremos de modo geral o subespaço $J_p^\perp$ numa álgebra de Bernstein, para um T-polinômio arbitrário $p(x)$. Conforme veremos, este subespaço $J_p^\perp$ dependerá de igualdades e desigualdades envolvendo as formas β e δ introduzidos acima. Analisamos primeiramente o caso em que $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$, deixando para depois o caso $\bar{\beta}_{n,2} = 0$. Obtemos, no caso $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$, essencialmente o mesmo resultado já obtido para train polinômios de grau 3 ou 4.

Teorema 2.25 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A sobre um corpo K e seja $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}w(x)^{n-1}x$ um T-polinômio arbitrário com coeficientes em K , de grau $n \geq 3$. Suponhamos que $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$. Temos:

- (a) Se $2\bar{\beta}_{n,2} \neq \bar{\beta}_{n,3}$ então $J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$

(b) Se $2\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3}$ então $J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$

Prova: Seja $f : A \rightarrow K$ uma forma linear. Pelo que já foi dito até agora e tendo em vista a Proposição 2.23 temos as seguintes condições equivalentes:

- (i) $f \in J_p$
- (ii) $f(p(a)) = 0$ para todo $a \in A$
- (iii) $f(\alpha^{n-1}\gamma_{n-1}z + \sum_{k=2}^n \alpha^{n-k}(\bar{\beta}_{n,k}R_z^{k-2}u^2 + 2\bar{\beta}_{n,k}R_z^{k-1}u + \bar{\delta}_{n,k}z^k)) = 0$, para todo $\alpha \in K$, $u \in U$, $z \in Z$
- (iv) Para todo $\alpha \in K$, $u \in U$ e $z \in Z$, é nula a expressão $\alpha^{n-1}\gamma_{n-1}f(z) + \sum_{k=2}^n \alpha^{n-k}(\bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-2}u^2) + 2\bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-1}u) + \bar{\delta}_{n,k}f(z^k))$
- (v) O coeficiente de α^i na expressão acima é nulo, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, para todo $u \in U$, $z \in Z$

Assim sendo, devemos ter as identidades em $u \in U$ e $z \in Z$, para $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\begin{cases} \gamma_{n-1}f(z) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-2}u^2) + 2\bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-1}u) + \bar{\delta}_{n,k}f(z^k) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Por definição, $\bar{\beta}_{n,2} = 1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2} = -\gamma_{n-1}$. Como $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$, por hipótese, segue de (2.12) que a condição $f \in J_p$ equivale às identidades abaixo, onde $k = 3, 4, \dots, n$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,2}f(u^2) + 2\bar{\beta}_{n,2}f(uz) + \bar{\delta}_{n,2}f(z^2) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-2}u^2) + 2\bar{\beta}_{n,k}f(R_z^{k-1}u) + \bar{\delta}_{n,k}f(z^k) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Em particular, para $u = 0$, obtemos da segunda equação em (2.13) que $\bar{\delta}_{n,2}f(z^2) = 0$ e portanto $\bar{\beta}_{n,2}(f(u^2) + 2f(uz)) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$. Como $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$ e $f(u^2) = 0$, uma vez que $f(z) = 0$ para todo $z \in Z$, segue que $f(uz) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$. Portanto, em (2.13), a segunda equação pode ser substituída por

$$\begin{cases} f(uz) = 0 \\ \bar{\delta}_{n,2}f(z^2) = 0 \end{cases}$$

A condição $f(uz) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$ implica que a terceira equação de (2.13) se reduz a $0=0$ para $k > 3$, uma vez que $R_z^{k-2}u^2$, $R_z^{k-1}u$ e z^k pertencem a UZ para $k > 3$. Para $k = 3$, a terceira equação de (2.13) é:

$$\bar{\beta}_{n,3}f(R_z u^2) + 2\bar{\beta}_{n,3}f(R_z^2 u) + \bar{\delta}_{n,3}f(z^3) = 0$$

Como $z^3 \in UZ$ e $R_z^2(u) \in UZ$, esta equação se reduz $\bar{\beta}_{n,3}f(u^2 z) = 0$.

Do exposto concluímos que, sendo $\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$, $f \in J_p$ é equivalente a

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ \bar{\delta}_{n,2}f(z^2) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,3}f(u^2 z) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

para todo $u \in U$, $z \in Z$.

Caso (a): Nesse caso, por hipótese $2\bar{\beta}_{n,2} \neq \bar{\beta}_{n,3}$. Como $2\bar{\delta}_{n,2} = 2\bar{\beta}_{n,2} - \bar{\beta}_{n,3}$ (Proposição 2.24) segue que $f \in J_p$ se e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(z^2) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,3}f(u^2 z) = 0 \end{cases}$$

Mas $f(z^2) = 0$, para todo $z \in Z$ implica que $f(u^2 z) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$, uma vez que $u^2 z \in Z^2$. Assim, temos finalmente que $f \in J_p$ se, e somente, para todo $u \in U$ e $z \in Z$

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(z^2) = 0 \end{cases}$$

e daí temos que $J_p^\perp = Z \oplus (Z^2 + UZ)$, que é o ideal de Etherington de (A, w) .

Caso (b): Nesse caso, $0 = 2\bar{\beta}_{n,2} - \bar{\beta}_{n,3} = 2\bar{\delta}_{n,2}$ e $\bar{\beta}_{n,3} = 2\bar{\beta}_{n,2} \neq 0$. Segue de

(2.14) que $f \in J_p$ se e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(uz) = 0 \\ f(u^2z) = 0 \end{cases}$$

e daí temos que $J_p^\perp = Z \oplus (U^2Z + UZ)$. ■

Resta-nos analisar, no próximo teorema, o que ocorre quando $\bar{\beta}_{n,2} = 0$, isto é, quando $\gamma_{n-1} = 0$. Neste caso, o T-polinômio não tem o termo de grau 1, o que complica a análise dos casos possíveis e também produz os subespaços $J_p^\perp$ em função de geradores e não como "polinômios" em U e Z .

Teorema 2.26 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A sobre um corpo K . Seja $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-2}w(x)^{n-2}x^2$ um T-polinômio de grau $n, n > 3$ (com $\gamma_{n-1} = 0$) com coeficientes em K . Temos:

(I) Se $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,j-1} = 0$ e $\bar{\beta}_{n,j} \neq 0$ para algum j com $3 \leq j \leq n-2$ então:

(I.a) Se $2\bar{\beta}_{n,j} \neq \bar{\beta}_{n,j+1}$ então $J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle z^j \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle$.

(I.b) Se $2\bar{\beta}_{n,j} = \bar{\beta}_{n,j+1}$ então $J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle + \langle R_z^{j-1}u^2 \rangle$

(II) Se $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-2} = 0$ então:

(II.a) Se $\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 0$ e $2\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 1$ então $J_p^\perp = \langle z^{n-2} \rangle + \langle z^{n-1} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle$.

(II.b) Se $2\bar{\beta}_{n,n-1} = 1$ então $J_p^\perp = \langle z^{n-2} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle + \langle R_z^{n-2}u^2 \rangle$.

(II.c) Se $\bar{\beta}_{n,n-1} = 0$ então $J_p^\perp = \langle z^{n-1} \rangle + \langle z^n \rangle + \langle R_z^{n-1}u \rangle$

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.26 necessitamos de três lemas.

Lema 1 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de

Bernstein e f uma forma linear definida em A . Então, para todo inteiro $k \geq 2$, são equivalentes as seguintes condições, onde $u \in U$ e $z \in Z$:

- (i) $f(R_z^{k-2}u^2) + 2f(R_z^{k-1}u) = 0$
- (ii) $f(R_z^{k-2}u^2) = 0$ e $f(R_z^{k-1}u) = 0$

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii) Se supomos que $f(R_z^{k-2}u^2) + 2f(R_z^{k-1}u) = 0$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$, então $0 = f(R_z^{k-2}(u_1 + u_2)^2) + 2f(R_z^{k-1}(u_1 + u_2)) = f(R_z^{k-2}u_1^2) + 2f(R_z^{k-1}u_1) + f(R_z^{k-2}u_2^2) + 2f(R_z^{k-1}u_2) + 2f(R_z^{k-2}(u_1u_2)) = 2f(R_z^{k-2}(u_1u_2))$ para todo $u_1, u_2 \in U$. Daí, vem em particular que $f(R_z^{k-2}u^2) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$ e portanto também $f(R_z^{k-1}u) = 0$. A recíproca (ii) $\Rightarrow$ (i) é óbvia. ■

Lema 2 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A . Dados $u \in U$, $z \in Z$ e dois inteiros positivos l e m tem-se:

- (a) se $l \geq m$ então existe $\bar{u} \in U$ tal que $R_z^l u = R_z^m \bar{u}$.
- (b) se $l \geq m + 1$ então existe $\bar{u} \in U$ tal que $R_z^l u^2 = R_z^m \bar{u}$.
- (c) se $l \geq m + 2$ então existe $\bar{u} \in U$ tal que $z^l = R_z^m \bar{u}$.

Prova: Faremos, nos casos (a) e (c), a demonstração usando indução em l .

- (a) Para $l = m$, basta tomar $\bar{u} = u$. Suponhamos que o resultado valha para um certo $l \geq m$. Mostremos que vale para $l + 1$. Como $R_z u = uz \in U$ usando a hipótese de indução, temos $R_z^{l+1} u = R_z^l (R_z u) = R_z^m \bar{u}$, para algum $\bar{u} \in U$.
- (b) Como $u^2 z \in U$ e, neste caso, $l - 1 \geq m$, temos, usando a parte (a): $R_z^l u^2 = R_z^{l-1} u^2 z = R_z^m \bar{u}$ para algum $\bar{u} \in U$.
- (c) Para $l = m + 2$ temos $z^l = z^{m+2} = R_z^m z^2 = R_z^m \bar{u}$, com $\bar{u} = z^2 \in U$. Supondo que o resultado vale para um certo $l \geq m + 2$, temos $z^{l+1} = z^l z = (R_z^m u)z = R_z^m (uz) = R_z^m \bar{u}$, com $\bar{u} = uz \in U$. ■

Lema 3 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A . Então, para quaisquer $u \in U$ e $z \in Z$ e qualquer inteiro positivo

k tem-se: $2R_z^k u^2 = (u^2 + z)^{k+1} - z^{k+1}$. Em particular, tem-se a inclusão de subespaços: $\langle R_z^k u^2 \rangle \subseteq \langle z^{k+1} \rangle$.

Prova: Usaremos indução em $k \geq 1$. Para $k = 1$, temos: $(u^2 + z)^{k+1} - z^{k+1} = (u^2 + z)^2 - z^2 = (u^2)^2 + 2u^2 z + z^2 - z^2 = 2u^2 z = 2R_z^1 u^2$. Suponhamos que para um certo $k \geq 1$ se tenha o resultado desejado. Então: $(u^2 + z)^{k+2} - z^{k+2} = (u^2 + z)^{k+1}(u^2 + z) - z^{k+2} = (2R_z^k u^2 + z^{k+1})(u^2 + z) - z^{k+2} = 2u^2 R_z^k u^2 + 2R_z^{k+1} u^2 + u^2 z^{k+1} + z^{k+2} - z^{k+2}$. Da identidade (1.6) e da Proposição 1.1. da Seção 1.2 obtemos: $u^2 R_z^k u^2 = -2u(u R_z^k u^2) = -2u \cdot 0 = 0$, $u^2 z^{k+1} = -2u(uz^{k+1}) = -2u \cdot 0 = 0$. Portanto, $(u^2 + z)^{k+2} - z^{k+2} = 2R_z^{k+1} u^2$, o que encerra a demonstração. ■

Voltemos à prova do Teorema 2.26. Se $\bar{\beta}_{n,2} = 0$, isto é, se $\gamma_{n-1} = 0$ segue que (ver início da demonstração do Teorema 2.25) $f \in A^*$ é p -invariante se e somente se $\bar{\delta}_{n,2} f(z^2) = 0$ e $\bar{\beta}_{n,k} f(R_z^{k-2} u^2) + 2\bar{\beta}_{n,k} f(R_z^{k-1} u) + \bar{\delta}_{n,k} f(z^k) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$, $k = 3, 4, \dots, n$.

Fazendo $u = 0$ na última identidade acima, conclui-se que ela é equivalente ao sistema de identidades

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{n,k} (f(R_z^{k-2} u^2) + 2f(R_z^{k-1} u)) = 0 \\ \bar{\delta}_{n,k} f(z^k) = 0 \end{cases}$$

Como $\bar{\delta}_{n,k} = \bar{\beta}_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{\beta}_{n,k+1}$ (Proposição 2.24) e $\bar{\delta}_{n,n} = \bar{\beta}_{n,n} = 1$, segue que, no caso em que $\bar{\beta}_{n,2} = 0$, $f \in A^*$ é p -invariante se e somente se valem as identidades seguintes onde $u \in U$, $z \in Z$ e $k = 3, 4, \dots, n-1$:

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{n,3} f(z^2) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,k} (f(R_z^{k-2} u^2) + 2f(R_z^{k-1} u)) = 0 \\ (\bar{\beta}_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{\beta}_{n,k+1}) f(z^k) = 0 \\ f(R_z^{n-2} u^2) + 2f(R_z^{n-1} u) = 0 \\ f(z^n) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Caso I: Se $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,j-1} = 0$ e $\bar{\beta}_{n,j} \neq 0$ para algum j , com $3 \leq j \leq n-2$, segue de (2.15) que $f \in J_p$ se e somente se para todo $u \in U$, $z \in Z$

e $k = j, j + 1, \dots, n - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(R_z^{j-2}u^2) + 2f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(z^{j-1}) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,k}(f(R_z^{k-2}u^2) + 2f(R_z^{k-1}u)) = 0 \\ (\bar{\beta}_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{\beta}_{n,k+1})f(z^k) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) + 2f(R_z^{n-1}u) = 0 \\ f(z^n) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

De (2.16) e do Lema 1 segue que, no caso I, $f \in J_p$ se, e somente se, para todo $u \in U$, $z \in Z$, $k = j, j + 1, \dots, n - 1$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} f(R_z^{j-2}u^2) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(z^{j-1}) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,k}(f(R_z^{k-2}u^2) + 2f(R_z^{k-1}u)) = 0 \\ (\bar{\beta}_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{\beta}_{n,k+1})f(z^k) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) = 0 \\ f(R_z^{n-1}u) = 0 \\ f(z^n) = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Do Lema 2, a igualdade $f(R_z^{j-1}u) = 0$, para todo $u \in U$, $z \in Z$ implica para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(R_z^k u) = 0 & (k \geq j - 1) \\ f(R_z^k u^2) = 0 & (k \geq j) \\ f(z^k) = 0 & (k \geq j + 1) \end{array} \right.$$

Assim, de (2.17) segue que $f \in J_p$ se, e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z^{j-1}) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(R_z^{j-2}u^2) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,j+1}f(R_z^{j-1}u^2) = 0 \\ (\bar{\beta}_{n,j} - \frac{1}{2}\bar{\beta}_{n,j+1})f(z^j) = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Caso Ia: Se $2\bar{\beta}_{n,j} \neq \bar{\beta}_{n,j+1}$ e $\bar{\beta}_{n,j+1} \neq 0$, segue de (2.18) que $f \in J_p$ se e somente se as identidades abaixo são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z^{j-1}) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(R_z^{j-2}u^2) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u^2) = 0 \\ f(z^j) = 0 \end{array} \right.$$

e portanto, nesse caso, $J_p^\perp$ é a seguinte soma de subespaços:

$$J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle z^j \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle + \langle R_z^{j-2}u^2 \rangle + \langle R_z^{j-1}u^2 \rangle$$

Se $2\bar{\beta}_{n,j} \neq \bar{\beta}_{n,j+1}$ e $\bar{\beta}_{n,j+1} = 0$, segue de (2.18) que $f \in J_p$ se e somente se são válidas as identidades em u e z :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z^{j-1}) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(R_z^{j-2}u^2) = 0 \\ f(z^j) = 0 \end{array} \right.$$

Daí decorre que

$$J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle z^j \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle + \langle R_z^{j-2}u^2 \rangle$$

Em virtude do Lema 3 temos: $\langle R_z^{j-2}u^2 \rangle \subseteq \langle z^{j-1} \rangle$ e $\langle R_z^{j-1}u^2 \rangle \subseteq \langle z^j \rangle$.

Portanto, ambos os subespaços $J_p^\perp$ obtidos acima se reduzem a:

$$J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle z^j \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle$$

Caso Ib: Se $2\bar{\beta}_{n,j} = \bar{\beta}_{n,j+1}$ (e portanto $\bar{\beta}_{n,j+1} \neq 0$), segue de (2.18) que $f \in J_p$ se e somente se valem as identidades:

$$\begin{cases} f(z^{j-1}) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u) = 0 \\ f(R_z^{j-2}u^2) = 0 \\ f(R_z^{j-1}u^2) = 0 \end{cases}$$

e portanto

$$J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle + \langle R_z^{j-2}u^2 \rangle + \langle R_z^{j-1}u^2 \rangle$$

Como $\langle R_z^{j-2}u^2 \rangle \subseteq \langle z^{j-1} \rangle$ (pelo Lema 3), segue que:

$$J_p^\perp = \langle z^{j-1} \rangle + \langle R_z^{j-1}u \rangle + \langle R_z^{j-1}u^2 \rangle$$

Caso II: Se $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-2} = 0$ segue de (2.15) que $f \in J_p$ se e somente se valem as identidades em $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{n,n-1}(f(R_z^{n-3}u^2) + 2f(R_z^{n-2}u)) = 0 \\ \bar{\beta}_{n,n-1}f(z^{n-2}) = 0 \\ (\bar{\beta}_{n,n-1} - \frac{1}{2})f(z^{n-1}) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) + 2f(R_z^{n-1}u) = 0 \\ f(z^n) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Caso IIa: Se $\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 0$ e $2\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 1$ segue de (2.19) e dos Lemas 1 e 2 que $f \in J_p$ se, e somente se, valem as identidades em u e z :

$$\begin{cases} f(R_z^{n-3}u^2) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u) = 0 \\ f(z^{n-2}) = 0 \\ f(z^{n-1}) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) = 0 \end{cases}$$

e portanto, usando o Lema 3, temos:

$$J_p^\perp = \langle z^{n-2} \rangle + \langle z^{n-1} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle + \langle R_z^{n-3}u^2 \rangle + \langle R_z^{n-2}u^2 \rangle = \\ = \langle z^{n-2} \rangle + \langle z^{n-1} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle$$

Caso IIb: Se $2\bar{\beta}_{n,n-1} = 1$ segue de (2.19) e dos Lemas 1 e 2 que $f \in J_p$ se e somente se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(R_z^{n-3}u^2) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u) = 0 \\ f(z^{n-2}) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) = 0 \end{cases}$$

Assim, temos nesse caso, usando também o Lema 3:

$$J_p^\perp = \langle z^{n-2} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle + \langle R_z^{n-3}u^2 \rangle + \langle R_z^{n-2}u^2 \rangle = \\ = \langle z^{n-2} \rangle + \langle R_z^{n-2}u \rangle + \langle R_z^{n-2}u^2 \rangle$$

Caso IIc: Se $\bar{\beta}_{n,n-1} = 0$ segue de (2.19) e do Lema: 1 que $f \in J_p$ quando e somente quando, para todo $u \in U$ e $z \in Z$:

$$\begin{cases} f(z^{n-1}) = 0 \\ f(R_z^{n-2}u^2) = 0 \\ f(R_z^{n-1}u) = 0 \\ f(z^n) = 0 \end{cases}$$

e portanto nesse caso

$$J_p^\perp = \langle z^{n-1} \rangle + \langle z^n \rangle + \langle R_z^{n-1}u \rangle + \langle R_z^{n-2}u^2 \rangle$$

isto é

$$J_p^\perp = \langle z^{n-1} \rangle + \langle z^n \rangle + \langle R_z^{n-1}u \rangle, \text{ pelo Lema 3.} \quad \blacksquare$$

Julgamos conveniente nesse ponto considerar a seguinte questão: para cada caso dos Teoremas 2.25 e 2.26, existe um T-polinômio satisfazendo as condições dadas? A resposta é afirmativa, como mostram os exemplos 2.27 a 2.33 abaixo. Mas antes, fornecemos alguns valores de $\bar{\beta}_{n,k} = \beta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$, para um T-polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}\omega(x)x^{n-1}x$.

	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=2	1				
n=3	$1 + \gamma_1$	1			
n=4	$1 + \gamma_1 + \gamma_2$	$\frac{3}{2} + \gamma_1$	1		
n=5	$1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$	$\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\gamma_1 + \gamma_2$	$2 + \gamma_1$	1	
n=6	$1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$	$\frac{15}{8} + \frac{7}{4}\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 + \gamma_3$	$\frac{11}{4} + 2\gamma_1 + \gamma_2$	$\frac{5}{2} + \gamma_1$	1

Exemplo 2.27 O T-polinômio $x^3 - w(x)^2x$ satisfaz a condição (a) do Teorema 2.25, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{3,2} = 1 + \gamma_1 = 1 + 0 = 1 \neq 0$ e $\bar{\beta}_{n,3} = \bar{\beta}_{3,3} = 1 \neq 2\bar{\beta}_{n,2}$.

Exemplo 2.28 O T-polinômio $x^3 - \frac{1}{2}w(x)x^2 - \frac{1}{2}w(x)^2x$ satisfaz a condição (b) do Teorema 2.25, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{3,2} = 1 + \gamma_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$ e $\bar{\beta}_{n,3} = \bar{\beta}_{3,3} = 1 = 2\bar{\beta}_{n,2}$.

Exemplo 2.29 O T-polinômio $x^6 + \frac{1}{2}w(x)x^5 - \frac{5}{2}w(x)^2x^4 + w(x)^3x^3$ satisfaz a condição (I.a) do Teorema 2.26 para $j = 4$, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{6,2} = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 1 = 0$, $\bar{\beta}_{n,3} = \bar{\beta}_{n,j-1} = \bar{\beta}_{6,3} = \frac{15}{8} + \frac{7}{4}\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 + \gamma_3 = \frac{15}{8} + \frac{7}{8} - \frac{15}{4} + 1 = 0$, $\bar{\beta}_{n,j} = \bar{\beta}_{6,4} = \frac{11}{4} + 2\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{11}{4} + 1 - \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \neq 0$ e $\bar{\beta}_{n,j+1} = \bar{\beta}_{6,5} = \frac{5}{2} + \gamma_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \neq 2\bar{\beta}_{n,j}$.

Exemplo 2.30 O T-polinômio $x^6 - \frac{3}{4}w(x)x^5 - \frac{3}{8}w(x)^2x^4 + \frac{1}{8}w(x)^4x^2$ satisfaz a condição (I.b) do Teorema 2.26 para $j = 4$, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{6,2} = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + 0 + \frac{1}{8} = 0$, $\bar{\beta}_{n,3} = \bar{\beta}_{n,j-1} = \bar{\beta}_{6,3} = \frac{15}{8} + \frac{7}{4}\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 + \gamma_3 = \frac{15}{8} - \frac{21}{16} - \frac{9}{16} + 0 = 0$, $\bar{\beta}_{n,j} = \bar{\beta}_{6,4} = \frac{11}{4} + 2\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{11}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \neq 0$ e $\bar{\beta}_{n,j+1} = \bar{\beta}_{6,5} = \frac{5}{2} + \gamma_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 2\bar{\beta}_{n,j}$.

Exemplo 2.31 O T-polinômio $x^4 - 2w(x)x^3 + w(x)^2x^2$ satisfaz a condição (II.a) do Teorema 2.26, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,n-2} = \bar{\beta}_{4,2} = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 - 2 + 1 = 0$, $\bar{\beta}_{n,n-1} = \bar{\beta}_{4,3} = \frac{3}{2} + \gamma_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ e portanto $\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 0$ e $2\bar{\beta}_{n,n-1} \neq 1$.

Exemplo 2.32 O T-polinômio $x^4 - w(x)x^3$ satisfaz a condição (II.b) do Teorema

2.26, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,n-2} = \bar{\beta}_{4,2} = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 - 1 + 0 = 0$ e $2\bar{\beta}_{n,n-1} = 2\bar{\beta}_{4,3} = 3 + 2\gamma_1 = 3 - 2 = 1$.

Exemplo 2.33 O T-polinômio $x^4 - \frac{3}{2}w(x)x^3 + \frac{1}{2}w(x)^2x^2$ satisfaz a condição (II.c) do Teorema 2.26, pois $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,n-2} = \bar{\beta}_{4,2} = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0$ e $\bar{\beta}_{n,n-1} = \bar{\beta}_{4,3} = \frac{3}{2} + \gamma_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$.

No próximo capítulo, veremos que o caso (II.c) do Teorema 2.26 é particularmente importante e que, para cada inteiro $n \geq 3$, existe um único T-polinômio de grau n satisfazendo as condições dadas nesse caso.

Capítulo 3

Aplicações

O estudo das formas p -invariantes sobre uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$, feito no capítulo precedente, não produziu muitos subespaços de dimensões invariantes dentre aqueles do grupo V , a saber, os subespaços $U^2Z + UZ$, $(U^2Z + UZ) \oplus Z$, $(U^2Z + UZ) \oplus U^2$ e $(U^2Z + UZ) \oplus U(UZ)$. No entanto, obtivemos diversos subespaços invariantes expressos por geradores, que são os ortogonais dos subespaços J_p de A^* , para certos T -polinômios que não contêm o último termo em x . Neste capítulo vamos examinar algumas aplicações da invariância desses subespaços.

Quando Lyubich, em [20], define formas invariantes, ele observa que o subespaço $J^\perp$, ortogonal do espaço J das formas invariantes numa álgebra bária qualquer (A, ω) , sempre contém o anulador de A . O fato de $J^\perp$ ser igual ao anulador de A é destacado por ele: nesse caso a álgebra A se diz *conservativa*.

No entanto, no caso das formas p -invariantes numa álgebra de Bernstein, é falso em geral que $J_p^\perp \supseteq \text{ann } A$. Isto porque, se $A = Ke \oplus U \oplus Z$, então $\text{ann } A \subseteq Z$ e, exceto nos dois casos tratados no Teorema 2.25, temos que $J_p^\perp \subseteq U$. Mais precisamente, os Teoremas 2.25 e 2.26 mostram que dado um T -polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1}x$, então $J_p^\perp \subseteq U$ se $\gamma_{n-1} = 0$ e $\text{ann } (A) \subseteq J_p^\perp$ se $\gamma_{n-1} \neq 0$. Procurando encontrar uma relação entre os subespaços $J_p^\perp$ e subespaços anuladores, notamos que, para os T -polinômios tratados no Teorema 2.26 (aqueles polinômios $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1}x$ tais que $\gamma_{n-1} = 0$), $J_p^\perp$ está contido no subespaço $\text{ann}_U U$, formado pelos elementos $u \in U$ tais que $uU = 0$. Este subespaço já apareceu no Capítulo 1, na demonstração das Proposições 1.8 e 1.9, e foi denotado por L . Tal observação deu origem a algumas aplicações, que expomos a seguir.

3.1. Train-álgebras de Bernstein

Como um complemento ao Teorema 2.26 do Capítulo precedente, vamos mostrar na Proposição 3.1 que, para cada inteiro $n \geq 3$, existe um único T-polinômio $p_n(x)$ de grau n que satisfaz a hipótese do caso (II.c) do Teorema 2.26, isto é, tal que $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1} = 0$. Mas antes de calcular tal polinômio necessitamos de algumas propriedades da família de formas $\beta_{n,k} : K^{n-k+1} \rightarrow K$ (definida no início da Seção 2.4) que provamos a seguir.

Lema 1 Dados dois inteiros m e k , com $m \geq 3$ e $2 \leq k \leq m$, temos a igualdade $\beta_{m+1,k}(0, 1, x_1, x_2, \dots, x_{m-k}) = \beta_{m,k}(1, x_1, x_2, \dots, x_{m-k})$, para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_{m-k}$ em K .

Prova: Para $k = 2$ temos, de acordo com a definição, $\beta_{m+1,2}(0, 1, x_1, \dots, x_{m-2}) = 0 + 1 + x_1 + \dots + x_{m-2} = 1 + x_1 + \dots + x_{m-2} = \beta_{m,2}(1, x_1, x_2, \dots, x_{m-2})$. Daqui para a frente vamos supor $k \geq 3$ e demonstraremos o resultado desejado usando indução em m . Para $m = 3$ o único valor possível de k é 3 e temos, nesse caso, de acordo com a definição das funções $\beta_{m,k}$, $\beta_{m+1,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m-k}) = \beta_{4,3}(0, 1) = \beta_{3,2}(0, 1) + \frac{1}{2}\beta_{3,3}(0) = 1 = \beta_{3,3}(1) = \beta_{m,k}(1)$.

Suponhamos que, para um certo $m \geq 3$ se tenha $\beta_{m+1,l}(0, 1, x_1, \dots, x_{m-l}) = \beta_{m,l}(1, x_1, \dots, x_{m-l})$ para todo l tal que $2 \leq l \leq m$ e quaisquer $x_1, \dots, x_{m-l}$ pertencentes ao corpo K . Mostremos que o resultado vale para $m + 1$, isto é, mostremos que:

$$\beta_{m+2,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) = \beta_{m+1,k}(1, x_1, x_2, \dots, x_{m+1-k})$$

para todo k tal que $3 \leq k \leq m + 1$ e quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_{m+1-k}$ em K . Temos, da definição de $\beta_{m,k}$, para $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} \beta_{m+2,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) &= \beta_{m+1,k-1}(0, 1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) + \\ &+ \frac{1}{2}\beta_{m+1,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m-k}) \end{aligned}$$

No caso $3 \leq k \leq m$, podemos usar a hipótese de indução nas duas parcelas do 2º membro da igualdade acima e obtemos:

$$\begin{aligned}\beta_{m+2,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) &= \beta_{m,k-1}(1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) + \frac{1}{2}\beta_{m,k}(1, x_1, \dots, x_{m-k}) = \\ &= \beta_{m+1,k}(1, x_1, \dots, x_{m+1-k})\end{aligned}$$

No caso $k = m + 1$ temos, por definição:

$$\begin{aligned}\beta_{m+2,k}(0, 1, x_1, \dots, x_{m+1-k}) &= \beta_{m+2,m+1}(0, 1) = \beta_{m+1,m}(0, 1) + \frac{1}{2}\beta_{m+1,m+1}(0). \\ \text{Usando a hipótese de indução tem-se } \beta_{m+1,m}(0, 1) &= \beta_{m,m}(1) = 1 \text{ e, como } \\ \beta_{m+1,m+1}(0) &= 0, \text{ segue que } \beta_{m+2,m+1}(0, 1) = 1 = \beta_{m+1,m+1}(1)\end{aligned}$$

Lema 2 Dados os inteiros n e k , com $2 \leq k \leq n$, se $\beta_{n,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n-k}) = 0$ então $x_{n-k} = 0$

Prova: Usaremos indução em n . Se $n = 2$, devemos ter $k = 2$ e, nesse caso, $\beta_{n,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n-k}) = \beta_{2,2}(x_0) = x_0$. Assim, $\beta_{2,2}(x_0) = 0$ implica $x_0 = 0$. Suponhamos que para um certo inteiro $n \geq 2$ valha a condição: para todo inteiro l , com $2 \leq l \leq n$, se $\beta_{n,l}(0, 0, \dots, 0, x_{n-l}) = 0$ então $x_{n-l} = 0$. Supondo que $2 \leq k \leq n + 1$ e que $\beta_{n+1,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) = 0$, mostremos que $x_{n+1-k} = 0$. Da definição de $\beta_{m,j}$ temos: para $k = 2$, se $\beta_{n+1,k}(0, 0, \dots, 0, 0, x_{n+1-k}) = 0$ então $0 = \beta_{n+1,2}(0, 0, \dots, 0, x_{n-1}) = 0 + 0 + \dots + 0 + x_{n-1} = x_{n-1}$; se $k = n + 1$ e $\beta_{n+1,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) = 0$ então $0 = \beta_{n+1,n+1}(x_0) = x_0$; se $2 < k < n + 1$, temos $\beta_{n+1,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) = \beta_{n,k-1}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) + \frac{1}{2}\beta_{n,k}(0, 0, \dots, 0) = \beta_{n,k-1}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k})$. Assim, se $\beta_{n+1,k}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) = 0$, segue que $\beta_{n,k-1}(0, 0, \dots, 0, x_{n+1-k}) = 0$, o que implica, usando a hipótese de indução, que $x_{n+1-k} = 0$

Usando a notação $\bar{\beta}_{n,k} = \beta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$ introduzida no início da seção 2.4 temos:

Proposição 3.1 Fixados um corpo K e um inteiro $n \geq 3$, existe um e um só T-polinômio $p_n(x)$ de grau n , com coeficientes em K , tal que $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1} = 0$. Este polinômio $p_n(x)$ pode ser escrito formalmente como $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3}$.

(Na expressão acima, $p_n(x)$ é o polinômio que obtemos efetuando os produtos indicados, interpretando x como se fosse uma variável associativa).

Prova: Em primeiro lugar, vamos estabelecer recursivamente os coeficientes de $p_n(x)$. Para $n = 3$, temos $p_3(x) = x^2(x - w(x)) = x^3 - w(x)x^2$.

Se $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3} = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \gamma_2 w(x)^2 x^{n-2} + \dots + \gamma_{n-2} w(x)^{n-2} x^2 + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x$ (onde, é claro, $\gamma_{n-1} = 0$) e $p_{n+1}(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-2} = x^{n+1} + \bar{\gamma}_1 w(x)x^n + \bar{\gamma}_2 w(x)^2 x^{n-1} + \dots + \bar{\gamma}_{n-1} w(x)^{n-1} x^2 + \bar{\gamma}_n w(x)^n x$, temos:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n(x)(x - \frac{1}{2}w(x)) = \\ &= (x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-2} w(x)^{n-2} x^2 + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x)(x - \frac{1}{2}w(x)) = \\ &= x^{n+1} + (\gamma_1 - \frac{1}{2})w(x)x^n + (\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1)w(x)^2 x^{n-1} + \dots + (\gamma_{n-1} - \frac{1}{2}\gamma_{n-2})w(x)^{n-1} x^2. \end{aligned}$$

Assim temos as relações recorrentes entre os coeficientes de $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \gamma_1 - \frac{1}{2} = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 \\ \bar{\gamma}_2 &= \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 \\ &\vdots \\ \bar{\gamma}_k &= \gamma_k - \frac{1}{2}\gamma_{k-1} \\ &\vdots \\ \bar{\gamma}_{n-1} &= \gamma_{n-1} - \frac{1}{2}\gamma_{n-2} = -\frac{1}{2}\gamma_{n-2} \end{aligned}$$

Vamos mostrar, usando indução sobre o grau n , que o polinômio $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3} = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x$ é de fato um T-polinômio e que satisfaz a condição $\bar{\beta}_{n,2}(p_n) = \bar{\beta}_{n,3}(p_n) = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1}(p_n) = 0$, onde $\bar{\beta}_{n,k}(p_n) = \beta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$. Para $n = 3$, $p_3(x) = x^3 - w(x)x^2$, que é um T-polinômio tal que $\bar{\beta}_{3,2}(p_3) = \bar{\beta}_{3,2}(1, -1) = 1 - 1 = 0$. Suponhamos que, para um certo grau $n \geq 3$, $p_n(x)$ seja T-polinômio e que $\bar{\beta}_{n,2}(p_n) = \bar{\beta}_{n,3}(p_n) = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1}(p_n) = 0$. Mostremos que $p_{n+1}(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-2}$ é também um T-polinômio e que $\bar{\beta}_{n+1,2}(p_{n+1}) = \bar{\beta}_{n+1,3}(p_{n+1}) = \dots = \bar{\beta}_{n+1,n}(p_{n+1}) = 0$. Como $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$ (pela hipótese de indução) e como o coeficiente de x é zero em $p_n(x)$, isto é, $\gamma_{n-1} = 0$,

temos, para os coeficientes $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n$ de $p_{n+1} : 1 + \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \dots + \bar{\gamma}_n = 1 + \gamma_1 - \frac{1}{2} + \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} - \frac{1}{2}\gamma_{n-2} = (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) - \frac{1}{2}(1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}) = 0$. Assim, p_{n+1} é um T-polinômio. Além disso, temos:

$$\bar{\beta}_{n+1,2}(p_{n+1}) = \beta_{n+1,2}(1, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-1}) = 1 + \bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_{n-1} = 0$$

Se $2 < k \leq n$, usando a linearidade da função $\beta_{n+1,k}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{n+1,k}(p_{n+1}) &= \beta_{n+1,k}(1, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{n+1-k}) = \\ &= \beta_{n+1,k}(1, \gamma_1 - \frac{1}{2}, \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1-k} - \frac{1}{2}\gamma_{n-k}) = \\ &= \beta_{n+1,k}(1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1-k}) - \frac{1}{2}\beta_{n+1,k}(0, 1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}) \end{aligned}$$

Da definição da função $\beta_{m,k}$ e da hipótese de indução, temos, para $2 < k < n$:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1,k}(1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1-k}) &= \\ \beta_{n,k-1}(1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1-k}) + \frac{1}{2}\beta_{n,k}(1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-k}) &= 0. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1, que vimos logo acima, e a hipótese de indução, temos $\beta_{n+1,k}(0, 1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}) = \beta_{n,k}(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}) = 0$. Portanto $\bar{\beta}_{n+1,k}(p_{n+1}) = 0$ para $2 \leq k < n$. Finalmente, para $k = n$ temos, usando a definição e novamente a hipótese de indução, $\beta_{n+1,n}(1, \gamma_1) = \beta_{n,n-1}(1, \gamma_1) + \frac{1}{2}\beta_{n,n}(1) = 0 + \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$. Do Lema 1, temos $\beta_{n+1,n}(0, 1) = \beta_{n,n}(1) = 1$. Portanto, $\bar{\beta}_{n+1,n}(p_{n+1}) = \beta_{n+1,n}(1, \bar{\gamma}_1) = \beta_{n+1,n}(1, \gamma_1 - \frac{1}{2}) = \beta_{n+1,n}(1, \gamma_1) - \frac{1}{2}\beta_{n+1,n}(0, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.1 = 0$. Isto encerra a demonstração de que existe, para cada grau $n \geq 3$, um T-polinômio, com coeficientes no corpo K , tal que $\bar{\beta}_{n,2} = \bar{\beta}_{n,3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1} = 0$ e que o polinômio $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3}$ satisfaz tais condições. Resta-nos mostrar a unicidade deste polinômio.

A unicidade do polinômio decorre do seguinte fato mais geral: se $p(x)$ e $q(x)$ são T-polinômios com coeficientes num corpo K , ambos de mesmo grau n e tais que $\bar{\beta}_{n,k}(p) = \bar{\beta}_{n,k}(q)$ para $k = 2, 3, \dots, n-1$, então $p(x) = q(x)$. De fato: se $p(x) = x^n + \gamma_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}w(x)^{n-1}x$ e $q(x) = x^n + \bar{\gamma}_1 w(x)x^{n-1} + \dots + \bar{\gamma}_{n-1}w(x)^{n-1}x$ são tais que $\bar{\beta}_{n,k}(p) = \bar{\beta}_{n,k}(q)$ para $k = 2, 3, \dots, n-1$, temos:

$$\bar{\beta}_{n,n-1}(p) = \beta_{n,n-1}(1, \gamma_1) \text{ e } \bar{\beta}_{n,n-1}(q) = \beta_{n,n-1}(1, \bar{\gamma}_1). \text{ Assim, } \bar{\beta}_{n,n-1}(p) = \bar{\beta}_{n,n-1}(q) \text{ implica } \beta_{n,n-1}(1, \gamma_1) = \beta_{n,n-1}(1, \bar{\gamma}_1) \text{ e daí } \beta_{n,n-1}(0, \gamma_1 - \bar{\gamma}_1) =$$

0. Do Lema 2 podemos concluir que $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1$. Supondo que já tenhamos mostrado que $\gamma_i = \bar{\gamma}_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$, sendo $1 \leq k \leq n - 3$. Da igualdade $\bar{\beta}_{n,n-k-1}(p) = \bar{\beta}_{n,n-k-1}(q)$ resulta que $\beta_{n,n-k-1}(1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}) = \beta_{n,n-k-1}(1, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1})$ e portanto $\beta_{n,n-k-1}(0, 0, \dots, 0, \gamma_{k+1} - \bar{\gamma}_{k+1}) = 0$. Novamente usando o Lema 2, concluímos que $\gamma_{k+1} = \bar{\gamma}_{k+1}$. Assim, $\gamma_i = \bar{\gamma}_i$ para $1 \leq i \leq n - 2$. O fato de que $\gamma_{n-1} = \bar{\gamma}_{n-1}$ resulta então da igualdade $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 1 + \bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_{n-1} = 0$. ■

A seguir, damos no próximo teorema e no corolário que o sucede, respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra de Bernstein A seja uma train-álgebra de posto $\leq n$ e exatamente n , para um dado n . Neste último caso exibimos a train-equação de grau n satisfeita por A .

Teorema 3.2 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A sobre um corpo K e $n \geq 2$ um inteiro. Então A é uma train-álgebra de posto $\leq n$ se, e somente se, para quaisquer $u \in U$ e $z \in Z$ tem-se simultaneamente as identidades $z^{n-1} = 0$ e $R_z^{n-1}u = 0$.

Prova: Se $n = 2$ então A é train-álgebra de posto 2 se e somente se $x^2 - w(x)x = 0$, para todo $x \in A$, ou seja, se e somente se, $2xy = w(x)y + w(y)x$, para todo $x, y \in A$, ou ainda, se e somente se $0 = 2ez = z$, para todo $z \in Z$. Se $n = 3$ segue dos Corolários 2.15 e 2.17 que A é train-álgebra de posto 3 se e somente se A é uma álgebra de Bernstein-Jordan, o que equivale a $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para todo $u \in U$ e $z \in Z$. Logo, o teorema é verdadeiro nos casos $n = 2$ e $n = 3$. Vamos agora considerar $n > 3$. Se A é uma train-álgebra de posto $\leq n$ então existe um T-polinômio $p(x)$ de grau n , tal que $p(a) = 0$ para todo $a \in A$ (Note-se que se A satisfaz um T-polinômio $q(x)$ de grau l então satisfaz a T-equação $xq(x) - w(x)q(x) = 0$, que tem grau $l + 1$). Assim, $J_p = A^*$ e $J_p^\perp = 0$. Mas $J_p^\perp$ tem uma das formas descritas no Teorema 2.25 ou 2.26. Sendo $J_p^\perp = 0$ segue que $Z = 0$, se $p(x)$ tem uma das formas descritas no Teorema 2.25. Nos casos descritos nos Teoremas 2.26, segue que para quaisquer $u \in U$ e $z \in Z$, temos:

No caso I: $z^{j-1} = 0$ e $R_z^{j-1}u = 0$ com $3 \leq j \leq n-2$. Portanto,

$$z^{n-1} = R_z^{n-j}z^{j-1} = 0$$

$$R_z^{n-1}u = R_z^{n-j}(R_z^{j-1}u) = 0$$

Nos casos IIa e IIb: $z^{n-2} = 0$ e $R_z^{n-2}u = 0$. Portanto,

$$z^{n-1} = z^{n-2}z = 0$$

$$R_z^{n-1}u = R_z R_z^{n-2}u = 0$$

No caso IIc: $z^{n-1} = 0$ e $R_z^{n-1}u = 0$.

Vamos agora à recíproca. Suponhamos que $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Bernstein tal que, para um certo inteiro $n \geq 3$, $z^{n-1} = 0$ e $R_z^{n-1}u = 0$ para quaisquer $u \in U$ e $z \in Z$. Mostremos que A é uma T-álgebra de posto $\leq n$. Do Teorema 2.26, no caso IIc, segue que $J_{p_n}^\perp = 0$ onde $p_n(x)$ é o T-polinômio tal que $\bar{\beta}_{n-2} = \bar{\beta}_{n-3} = \dots = \bar{\beta}_{n,n-1} = 0$, calculado na Proposição 3.1. Assim A satisfaz a T-equação $p_n(x) = 0$. ■

Corolário 3.3 Uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma train-álgebra de posto n , $n \geq 3$, se e somente se satisfaz as condições:

- (i) Para todo $u \in U$ e $z \in Z$ tem-se: $z^{n-1} = 0$ e $R_z^{n-1}u = 0$.
- (ii) Pelo menos uma das duas condições abaixo ocorre:
 - (a) Para algum $z \in Z$, $z^{n-2} \neq 0$
 - (b) Para algum $z \in Z$ e $u \in U$, $R_z^{n-2}u \neq 0$

Prova: Se A é um train-álgebra de posto n então, da proposição anterior, temos $z^{n-1} = 0$ e $R_z^{n-1}u = 0$ para todo $u \in U$, $z \in Z$. Se, para todo $u \in U$ e $z \in Z$, tivermos $z^{n-2} = 0$ e $R_z^{n-2}u = 0$ então, do Teorema 3.2 segue que A tem posto $\leq n-1$. Mas isto é um absurdo pois, por hipótese, o posto de A é n .

Reciprocamente, seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma álgebra de Bernstein que satisfaz as condições (i) e (ii) acima. De (i) usando o Teorema 3.2 segue que A é uma train-álgebra de posto $\leq n$. De (ii), ainda pelo Teorema 3.2, conclui-se que A não tem posto $\leq n-1$. Logo o posto de A é n . ■

Já vimos, no Corolário 2.19, que toda álgebra de Bernstein nuclear é uma train-álgebra, de posto ≤ 4 . Para álgebras de Bernstein excepcionais, não só é falso que são sempre train-álgebras, como ainda podem sê-lo, de qualquer posto $n \geq 2$ que se queira. Os exemplos a seguir mostram tais fatos.

Exemplo 3.4 Seja $A = \langle e, u, z \rangle$ espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo K . Definindo em A uma multiplicação (comutativa) através da tábua:

$$e^2 = e, \quad eu = \frac{1}{2}u, \quad uz = u, \quad \text{demais produtos nulos}$$

e um homomorfismo peso w , tal que $w(e) = 1$, $w(u) = w(z) = 0$, é simples verificar que (A, w) é uma álgebra de Bernstein excepcional. Como $R_z^n u = u$ para todo inteiro $n \geq 0$, pelo Teorema 3.2 podemos concluir que A não é uma train-álgebra. Outra maneira de ver que A não é train é observar que o ideal gerado por u e z não é nil.

Exemplo 3.5 Seja $A = \langle e, u \rangle$ um espaço vetorial de dimensão 2 sobre K . Definindo uma multiplicação comutativa em A através da tábua $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $u^2 = 0$ e o homomorfismo peso w tal que $w(e) = 1$ e $w(u) = 0$, (A, w) é uma álgebra de Bernstein excepcional. Se $x = \alpha e + \beta u$ é um elemento qualquer de A , com α, β em K , temos $x^2 = \alpha^2 e + \alpha\beta u = \alpha x = w(x)x$ e portanto A é uma train-álgebra de posto 2. Se $A = \langle e, z \rangle$ com $e^2 = e$, $ez = ze = 0$, $w(e) = 1$ e $w(z) = 0$ então (A, w) é uma álgebra de Bernstein excepcional tal que $x^3 - w(x)x^2 = 0$ para todo x em A (pois se $x = \alpha e + \beta z$ é um elemento qualquer de A , com $\alpha, \beta \in K$, temos: $x^2 = \alpha^2 e$, $x^3 = \alpha^3 e$ e portanto $x^3 - w(x)x^2 = \alpha^3 e - \alpha.\alpha^2 e = 0$) mas $(e + z)^2 - w(e + z)(e + z) = e - e - z = -z \neq 0$. Logo, (A, w) é uma train-álgebra de posto 3.

Exemplo 3.6 Seja n um inteiro maior do que 3. Seja $A = \langle e, u_1, u_2, \dots, u_{n-3}, z \rangle$ um espaço vetorial de dimensão $n - 1$ sobre K . Definimos em A o homomorfismo peso w tal que $w(e) = 1$ e $w(u_i) = w(z) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n - 3$) e uma multiplicação comutativa através da tábua: $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n -$

3), $u_1z = u_2, u_2z = u_3, \dots, u_{n-4}z = u_{n-3}, z^2 = u_1$, demais produtos nulos. É fácil ver que (A, w) é uma álgebra de Bernstein excepcional cujos subespaços de Peirce em relação ao idempotente e são $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{n-3} \rangle$ e $Z = \langle z \rangle$. Temos: $z^2 = u_1, z^3 = u_1z = u_2, \dots, z^{n-2} = u_{n-3} \neq 0$ e $z^{n-1} = u_{n-3}.z = 0$. Temos ainda: $R_z^{n-1}u_1 = R_z^{n-2}u_2 = \dots = R_z^3u_{n-3} = 0, R_z^{n-1}u_2 = R_z^{n-2}u_3 = \dots = R_z^4u_{n-3} = 0$ e, de modo geral, para todo l tal que $1 \leq l \leq n-3, R_z^{n-1}u_l = R_z^{l+2}u_{n-3} = 0$. Portanto, para quaisquer $u \in U$ e $\bar{z} = \alpha z \in Z$ temos: $\bar{z}^{n-1} = 0$ e $R_{\bar{z}}^{n-1}u = 0$. Além disso, $z^{n-2} \neq 0$. Segue, do Corolário 3.3, que (A, w) é uma train-álgebra de posto n .

O resultado a seguir exhibe a train-equação satisfeita necessariamente por uma train-álgebra de Bernstein de posto $n \geq 3$.

Corolário 3.7 Se A é uma train-álgebra de Bernstein de posto $n, n \geq 3$, então A satisfaz a train-equação $p_n(a) = 0$ ($a \in A$), onde $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3}$.

Prova: Se A é uma train-álgebra de Bernstein de posto n segue, do Teorema 3.2, que $\langle z^{n-1} \rangle = 0$ e $\langle R_z^{n-1}u \rangle = 0$. Assim, $J_{p_n}^\perp = 0$ (e portanto $p_n(a) = 0$ para todo $a \in A$), onde $p_n(x)$ é um T -polinômio de grau n que satisfaz a condição (II.c) do Teorema 2.26. Mas, pela Proposição 3.1, existe um único T -polinômio $p_n(x)$ que satisfaz tal condição, que é $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3}$. ■

Observação: Este resultado foi obtido recentemente e de maneira independente por H.Guzzo e P.Vicente, ver [17].

3.2. Álgebras quocientes

Nesta seção vamos introduzir uma cadeia descendente de subespaços de uma álgebra de Bernstein. Tais subespaços, embora descritos por geradores u e z pertencentes aos subespaços de Peirce U_e e Z_e da álgebra, são invariantes em relação à escolha do idempotente. Na próxima seção, exploraremos um pouco

mais essa cadeia de subespaços. A presente seção é dedicada principalmente a estabelecer um ideal J de uma álgebra de Bernstein que é "quase" igual ao subespaço $Z^2 + (UZ)Z + Z^3$ que aparece no final do Capítulo 1, como um dos casos sem conclusão quanto à invariância da dimensão. Mostraremos que J é invariante sob mudança do idempotente. Além disso, veremos que $J \subseteq L = \text{ann}_U U$, A/J é uma álgebra de Jordan e é possível termos $J \neq L$.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A sobre um corpo K relativamente a um idempotente e . Indiquemos por L_e o seguinte subespaço de A :

$$L_e = \{u \in U_e \mid uU_e = 0\}$$

Proposição 3.8 Para qualquer idempotente não nulo e de A temos $L_e = \cap U_f$, onde $f \in I_p(A)$.

Prova: Seja $f = e + \sigma + \sigma^2$ um idempotente qualquer de A , com $\sigma \in U_e$, e seja $u \in L_e$. Então $\sigma u = 0$, de modo que $u + 2\sigma u = u \in U_f$. Logo $L_e \subseteq \cap U_f$, com $f \in I_p(A)$. Seja agora $\bar{u} \in \cap U_f$, onde $f \in I_p(A)$ e seja u um elemento qualquer de U_e . Então $\bar{u} \in U_e$ e $\bar{u} \in U_f$ para $f = e + u + u^2$. Portanto $\frac{1}{2}\bar{u} = \bar{u}f = \bar{u}(e + u + u^2) = \frac{1}{2}\bar{u} + \bar{u}u + \bar{u}u^2$, de onde segue que $\bar{u}u + \bar{u}u^2 = 0$. Como $\bar{u}u \in Z_e$ e $\bar{u}u^2 \in U_e$, podemos concluir que $\bar{u}u = 0$. Portanto, $\bar{u} \in L_e$ e $\cap U_f \subseteq L_e$, o que encerra a demonstração. ■

A proposição acima implica que $L_e = L_f$ para quaisquer idempotentes e e f da álgebra A ou seja, L_e é um subespaço, contido em U , invariante por mudança de idempotentes. Daqui para a frente omitiremos o índice e quando nos referirmos ao subespaço L_e , isto é, usaremos a notação

$$L = \{u \in U_e \mid uU_e = 0\} \quad (3.1)$$

Proposição 3.9 O subespaço L definido acima é um ideal da álgebra A tal que $L^2 = 0$.

Prova: Dados $\bar{u} \in L$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, de (1.7) segue que $u(\bar{u}z) = -\bar{u}(uz)$. Como $\bar{u}(uz) = 0$ uma vez que $uz \in U_e$ temos que $u(\bar{u}z) = 0$. Logo $\bar{u}z \in L$

e portanto $LZ_e \subseteq L$. Como $eL = L$ e $U_eL = 0$, segue que L é ideal de A . É imediato que $L^2 = 0$. ■

Estes resultados sobre o ideal L já são conhecidos. O fato mencionado na Proposição 3.8 é dado, por exemplo, em [8], na Proposição 3.4. O resultado da Proposição 3.9 é dado no artigo *Semi prime Bernstein algebras*, publicado em 1989 por Hentzel e Peresi. Também é conhecido que A/L é uma álgebra de Jordan. Porém L não é o menor ideal de A tal que A/L é Jordan. Alguns autores denominam L como o ideal de Jordan de A . O próximo Lema exhibe muitos elementos do ideal L .

Lema 3.10 Em uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$, para qualquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$ e qualquer inteiro $k \geq 2$ temos $R_z^k u \in L$, $R_z^{k-1} u^2 \in L$ e $Z_e^k \subseteq L$.

Prova: Notemos, em primeiro lugar, que $R_z^n u \in U_e$, $R_z^{n-1} u \in U_e$ e $Z_e^{n+1} \subseteq U_e$ para todo inteiro $n \geq 1$ (já nos referimos a este fato na demonstração da Proposição 1.1). Dado $\bar{u} \in U_e$ temos, de (1.7) e (1.11) que, para $k \geq 2$, $\bar{u}R_z^k u = \bar{u}((R_z^{k-1} u)z) = -(R_z^{k-1} u)(\bar{u}z) = -((R_z^{k-2} u)z)(\bar{u}z) = 0$. Portanto $R_z^k u \in L$ para $k \geq 2$. Pela Proposição 1.2 sabemos que $U_e Z_e^k = 0$, para $k \geq 2$, logo $Z_e^k \subseteq L$. Para concluirmos que $R_z^{k-1} u^2 \in L$ para $k \geq 2$, basta observarmos que $R_z^{k-1} u^2 \in Z_e^k$. ■

Consideremos agora a seguinte família de subespaços L_n de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$:

$$L_n = \langle z^{n+1} \rangle + \langle z^{n+2} \rangle + \langle R_z^{n+1} u \rangle \quad (3.2)$$

onde $u \in U_e$, $z \in Z_e$ e $n = 1, 2, 3, \dots$. Estes subespaços aparecem nos casos II.a e II.c do Teorema 2.26. Aparentemente, L_n depende do idempotente e .

Proposição 3.11 Para todo inteiro $n \geq 1$, L_n é um subespaço invariante em relação ao idempotente escolhido em A .

Prova: Observemos que $L_n = J_p^\perp$ para qualquer T -polinômio $p(x)$, de grau $n + 3$, que satisfaz as condições dadas no Teorema 2.26, caso II(a) ou para o

T-polinômio $p_{n+2}(x) = x^2(x - \omega(x))(x - \frac{1}{2}\omega(x))^{n-1}$, de grau $n + 2$, que satisfaz as condições do caso (II.c) do mesmo Teorema 2.26. ■

Proposição 3.12 Os subespaços L e L_n definidos em (3.1) e (3.2), respectivamente, formam a seguinte cadeia descendente:

$$L \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_n \supseteq L_{n+1} \supseteq \dots$$

Prova: O fato de que $L \supseteq L_n$ para todo $n \geq 1$, segue do Lema 3.10. Resta mostrar que $L_n \supseteq L_{n+1}$. De (3.2) temos:

$$L_{n+1} = \langle z^{n+2} \rangle + \langle z^{n+3} \rangle + \langle R_z^{n+2}u \rangle$$

Considerando que:

$$\langle z^{n+2} \rangle \subseteq L_n$$

$$z^{n+3} = R_z^{n+1}z^2 \in \langle R_z^{n+1}u \rangle \subseteq L_n$$

$$R_z^{n+2}u = R_z^{n+1}(uz) \in \langle R_z^{n+1}u \rangle \subseteq L_n$$

segue que $L_n \supseteq L_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. ■

Consideremos agora o seguinte subespaço de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$:

$$J_e = (Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e) \cap L = Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e \cap L$$

(A igualdade acima se deve ao fato de $Z_e^2 \subseteq L$ e $Z_e^3 \subseteq L$, conforme provado no Lema 3.10).

Proposição 3.13 O subespaço J_e definido acima é um ideal de A e, além disso, $L \supseteq J_e \supseteq L_1$.

Prova: É óbvio, pela definição, que $J_e \subseteq L$. De (3.2) temos: $L_1 = Z_e^2 + \langle z^3 \rangle + \langle R_z^2 u \rangle$. É claro que $L_1 \subseteq Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e$. Além disso vimos, na Proposição 3.12, que $L_1 \subseteq L$. Logo $L_1 \subseteq J_e$. Quanto a J_e ser um ideal, temos: $eJ_e = J_e$, uma vez que $J_e \subseteq U_e$; $U_e J_e \subseteq U_e L = 0$; $Z_e Z_e^2 = Z_e^3 \subseteq J_e$, $Z_e Z_e^3 = (Z_e^2 Z_e)Z_e \subseteq (U_e Z_e)Z_e$, $Z_e Z_e^3 \subseteq L$ (pelo Lema 3.10) e portanto $Z_e Z_e^3 \subseteq (U_e Z_e)Z_e \cap L \subseteq J_e$; finalmente, $((U_e Z_e)Z_e \cap L)Z_e \subseteq ((U_e Z_e)Z_e)Z_e \cap LZ_e \subseteq (U_e Z_e)Z_e \cap L$ uma vez que $U_e Z_e \subseteq U_e$ e $LZ_e \subseteq L$ já que L é um ideal. ■

Observação: É possível se ter $J_e \subseteq L$ e $J_e \neq L$. Como um exemplo, seja $A = \langle e, u_1, u_2, z \rangle$ um espaço vetorial de dimensão 4 sobre K , no qual definimos uma multiplicação comutativa através da tabela: $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i (i = 1, 2)$; $u_1z = u_2z = u_2$; demais produtos nulos. É fácil ver que A é uma álgebra de Bernstein (excepcional) tal que $U_e = \langle u_1, u_2 \rangle$, $Z_e = \langle z \rangle$, $U_e Z_e = \langle u_2 \rangle$, $U_e^2 = Z_e^2 = Z_e^3 = 0$ e $(U_e Z_e)Z_e = \langle u_2 \rangle$. Portanto $L = U_e = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $J_e = \langle u_2 \rangle \neq L$.

Proposição 3.14 Com as notações acima, A/J_e é uma álgebra de Jordan.

Prova: Para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$ temos: $z^2 \in J_e, (uz)z \in L_1 \subseteq J_e$. Logo, $\bar{z}^2 = 0 = (\bar{u} \bar{z})\bar{z}$ (onde $\bar{z} = z + J_e$ e $\bar{u} = u + J_e$), que é uma condição suficiente (e necessária) para que A/J_e seja uma álgebra de Jordan. ■

Proposição 3.15 Com as notações acima, o ideal J_e é invariante em relação ao idempotente escolhido.

Prova: Seja $f = e + \sigma + \sigma^2$ um idempotente qualquer de A , com $\sigma \in U_e$. Mostremos que $J_f = J_e$, onde $J_f = Z_f^2 + Z_f^3 + (U_f Z_f)Z_f \cap L$. Como L_1 é invariante em relação ao idempotente escolhido, temos:

$$\begin{aligned} L_1 &= Z_e^2 + \langle z^3 \mid z \in Z_e \rangle + \langle R_z^2 u \mid u \in U_e, z \in Z_e \rangle = \\ &= Z_f^2 + \langle z^3 \mid z \in Z_f \rangle + \langle R_z^2 u \mid u \in U_f, z \in U_f \rangle \end{aligned}$$

Da Proposição 3.13 sabemos que $L_1 \subseteq J_e$. Logo, $Z_f^2 \subseteq J_e$ e portanto, sendo J_e um ideal de A , temos ainda que $Z_f^3 \subseteq J_e$. Resta mostrar que $(U_f Z_f)Z_f \cap L \subseteq J_e$. Sejam $\bar{u} = u + 2\sigma u$, $\bar{z}_1 = z_1 - 2(\sigma + \sigma^2)z_1$ e $\bar{z}_2 = z_2 - 2(\sigma + \sigma^2)z_2$, onde $u \in U_e$, $z_1 \in Z_e$, $z_2 \in Z_e$, elementos quaisquer de U_f e Z_f , respectivamente. Temos:

$$\bar{u} \bar{z}_1 = uz_1 - 2u(\sigma z_1) - 2u(\sigma^2 z_1) + 2(\sigma u)z_1 - 4(\sigma u)(\sigma z_1) - 4(\sigma u)(\sigma^2 z_1).$$

Das relações (1.8) e (1.12) da Seção 1.2, sabemos que $u(\sigma^2 z_1) = 0 = (\sigma u)(\sigma^2 z_1)$.

Assim, $\bar{u} \bar{z}_1 = uz_1 - 2u(\sigma z_1) + 2(\sigma u)z_1 - 4(\sigma u)(\sigma z_1)$. Observando que

$$uz_1 - 4(\sigma u)(\sigma z_1) \in U_e Z_e;$$

$$-2u(\sigma z_1) \in U_e^2;$$

$$2(\sigma u)z_1 \in Z_e^2;$$

temos, em relação às parcelas do produto $(\bar{u} \bar{z}_1)\bar{z}_2$:

$$(\bar{u} \bar{z}_1)z_2 \in (U_e Z_e)Z_e + U_e^2 Z_e + Z_e^3 \subseteq (U_e Z_e)Z_e + Z_e^2 + Z_e^3;$$

$$(\bar{u} \bar{z}_1)(-2\sigma z_2) \in (U_e Z_e)(U_e Z_e) + U_e^2(U_e Z_e) + Z_e^2(U_e Z_e) \subseteq U_e^2 + (U_e Z_e)Z_e + U_e Z_e^2 \subseteq (U_e Z_e)Z_e + Z_e;$$

$$(\bar{u} \bar{z}_1)(-2\sigma^2 z_2) \in (U_e Z_e)Z_e^2 + U_e^2 Z_e^2 + Z_e^2 Z_e^2 \subseteq U_e Z_e^2 + U_e^2 Z_e^2 = 0.$$

Assim, $(\bar{u} \bar{z}_1)\bar{z}_2$ pode ser expresso como uma soma $u_1 + v$, onde $u_1 \in Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e$ e $v \in Z_e$. Um elemento a qualquer de $(U_f Z_f)Z_f \cap L$ é uma soma de elementos do tipo $(\bar{u} \bar{z}_1)\bar{z}_2$ descrito acima e portanto a pode ser expresso como: $a = b + c$, onde $b \in Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e \subseteq U_e$ e $c \in Z_e$. Mas como $a \in L$ e $L \subseteq U_e$ segue que $c = 0$. Logo, $a = b \in (Z_e^2 + Z_e^3 + (U_e Z_e)Z_e) \cap L = J_e$. Portanto $J_f \subseteq J_e$ e, de modo análogo, conclui-se que $J_e \subseteq J_f$, provando que $J_e = J_f$. ■

Daqui para a frente omitiremos o índice ao nos referirmos ao ideal J_e e escreveremos:

$$J = Z^2 + Z^3 + (UZ)Z \cap L \quad (3.3)$$

Sabe-se que o menor ideal I de uma álgebra de Bernstein (A, w) tal que A/I é uma álgebra de Jordan é o ideal de A gerado (como ideal) pelos elementos da forma $x^3 - w(x)x^2$. Este é um dos E -ideais de álgebra A , correspondente ao trinômio $x^3 - w(x)x^2$. A teoria dos E -ideais foi desenvolvida em [5]. Mostraremos agora que I é o ideal gerado por Z^2 e pelos elementos $(uz)z$, com $u \in U$ e $z \in Z$, para uma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$.

Proposição 3.16 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, w) . Então o ideal I de A gerado pelo conjunto $\{x^3 - w(x)x^2 \mid x \in A\}$ coincide com o ideal de A gerado pelo conjunto $Z^2 \cup \{(uz)z \mid u \in U, z \in Z\}$

Prova: Como $(z+e)^3 - (z+e)^2 = z^3 - \frac{1}{2}z^2 \in I$ e $(e-z)^3 - (e-z)^2 = -\frac{1}{2}z^2 - z^3 \in I$ para todo $z \in Z$, concluímos que $z^2 \in I$. Logo $Z^2 \subseteq I$. Usando as relações

(1.6) a (1.12) da Seção 1.2, dados $u \in U$ e $z \in Z$, obtemos: $(u+z)^3 = (u^2 + 2uz + z^2)(u+z) = u^3 + u^2z + 2u(uz) + 2(uz)z + uz^2 + z^3 = u^2z + 2(uz)z + z^3$. Como $(u+z)^3 \in I$, $z^3 \in I$ e $u^2z \in Z^2 \subseteq I$, segue que $(uz)z \in I$. Denotando por I_1 o ideal gerado por $Z^2 \cup \{(uz)z \mid u \in U, z \in Z\}$, concluímos do exposto acima, que $I_1 \subseteq I$. Por outro lado, se $x = \alpha e + u + z$ é um elemento qualquer de A onde $\alpha \in K$, $u \in U$ e $z \in Z$, obtemos: $x^3 - w(x)x^2 = -\frac{1}{2}\alpha z^2 + u^2z + 2(uz)z + z^3$. Logo, $x^3 - w(x)x^2 \in I_1$ e portanto $I = I_1$. ■

Observação: O ideal I , gerado por Z^2 e pelos elementos da forma $(uz)z$ é claramente o ideal gerado pelo subespaço $L_1 = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle$, uma vez que $Z^2 \cup \{(uz)z\} \subseteq L_1$ e $L_1 \subseteq I$. Assim, a cadeia descendente formada pelos subespaços L_n fica agora precedida por três ideais:

$$L \supseteq J \supseteq I \supseteq L_1 \supseteq L_2 \dots$$

3.3. Ainda sobre train-álgebras de Bernstein

Nesta seção, $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein (A, w) , L e J são os ideais de A definidos em (3.1) e (3.3), respectivamente, e L_n é o subespaço definido em (3.2). Estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que (A, w) seja uma train-álgebra de posto fixado, em função dos subespaços L_n . Mais adiante, mostraremos que, se $\ker w$ é nilpotente de grau n , então (A, w) é train-álgebra de posto no máximo igual a $n + 1$. Ainda estabelecemos uma condição suficiente para que (A, w) seja uma train-álgebra examinando simplesmente o subespaço $\langle R_z^n u \rangle$ que, como também veremos, sob certas condições, independe do idempotente escolhido.

Proposição 3.17 Com as notações anteriores, A é uma álgebra de Bernstein-Jordan se e somente se $L_1 = 0$.

Prova: De (3.2) temos $L_1 = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle (uz)z \rangle$ pois $Z^2 = \langle z^2 \rangle$. Assim, $L_1 = 0$ se, e somente se, $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$ e estas duas condições são equivalentes à condição de A ser uma álgebra de Bernstein-Jordan, como já é bem conhecido. ■

Proposição 3.18 Seja n um inteiro maior do que 1. Então A é uma train-álgebra de posto $n + 2$ se e somente se $L_n = 0$ e $L_{n-1} \neq 0$.

Prova: Pelo Corolário 3.3, A é train-álgebra de posto $n + 2$ se, e somente se, para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, $z^{n+1} = 0$ e $R_z^{n+1}u = 0$ e, além disso para algum $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, $z^n \neq 0$ ou $R_z^n u \neq 0$. Portanto concluímos que A é train-álgebra de posto $n + 2$ se, e somente se, $L_n = 0$ e $L_{n-1} = \langle z^n \rangle + \langle z^{n+1} \rangle + \langle R_z^n u \rangle \neq 0$. ■

Observemos ainda que, para todo inteiro $n \geq 1$:

$$z^{n+1} = R_z^{n-1} z^2 \in \langle R_z^{n-1} u \rangle$$

$$z^{n+2} = R_z^{n-1} (z^2 z) \in \langle R_z^{n-1} u \rangle$$

$$R_z^{n+1} u = R_z^{n-1} ((uz)z) \in \langle R_z^{n-1} u \rangle$$

De (3.2) segue que $L_n \subseteq \langle R_z^{n-1} u \rangle$ para todo $n \geq 1$. Também de (3.2) temos que para $n \geq 3$, $L_{n-2} = \langle z^{n-1} \rangle + \langle z^n \rangle + \langle R_z^{n-1} u \rangle$ e portanto $\langle R_z^{n-1} u \rangle \subseteq L_{n-2}$. Portanto, para $n \geq 3$ temos $L_n \subseteq \langle R_z^{n-1} u \rangle \subseteq L_{n-2}$. Em particular, se a cadeia $L \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ estabiliza a partir do índice m , temos $L_{m+2} \subseteq \langle R_z^{m+1} u \rangle \subseteq L_m$ e como $L_{m+2} = L_m$ segue que $L_m = \langle R_z^{m+1} u \rangle$. Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3.19 Os subespaços L_n de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ verificam as seguintes propriedades:

- (a) $L_n \subseteq \langle R_z^{n-1} u \rangle$ para todo inteiro $n \geq 1$.
- (b) $L_n \subseteq \langle R_z^{n-1} u \rangle \subseteq L_{n-2}$ para todo inteiro $n \geq 3$.
- (c) se a cadeia de subespaços $L \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ estabiliza a partir do índice m então $L_m = \langle R_z^{m+1} u \rangle$.

Corolário 3.20 Com as notações acima, se a cadeia $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \dots$ estabiliza então existe um inteiro não negativo l tal que:

(a) $\langle R_z^l u \rangle$ é um subespaço invariante de A , em relação à escolha do idempotente;

(b) para todo inteiro $k, k \geq l$, tem-se $\langle z^k \rangle + \langle z^{k-1} \rangle + \langle R_z^k u \rangle = \langle R_z^l u \rangle$.

Prova: Seja m o índice a partir do qual a cadeia $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \dots$ estabiliza e seja $l = m + 1$. Pela Proposição 2.19 temos que $\langle R_z^l u \rangle = L_m$, um subespaço invariante sob mudança do idempotente, conforme a Proposição 3.11. Além disso, se $k \geq l$, de (3.2) temos: $\langle z^k \rangle + \langle z^{k+1} \rangle + \langle R_z^k u \rangle = L_{k-1} = L_m = \langle R_z^l u \rangle$. ■

Corolário 3.21 Se (A, w) é uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K , tal que $\ker w$ é nilpotente de grau n , então A é uma train-álgebra de posto $\leq n + 1$.

Prova: Se $(\ker w)^n = 0$ então, dada uma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$ temos: $L_{n-1} = \langle z^n \rangle + \langle z^{n+1} \rangle + \langle R_z^n u \rangle = 0$. De acordo com a Proposição 3.18, A é uma train-álgebra de posto $n + 1$ se $L_{n-2} \neq 0$. Se $L_{n-2} = 0$, então A tem posto menor que $n + 1$. ■

Corolário 3.22 Se (A, w) é uma álgebra de Bernstein tal que $\ker w$ é nilpotente de grau n então, dada uma decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$, o subespaço $\langle z^{n-1} \rangle$ é invariante em relação ao idempotente escolhido. Além disso, se $\langle z^{n-1} \rangle \neq 0$ então A é train-álgebra de posto $n + 1$ e, se $\langle z^{n-1} \rangle = 0$ então A é train-álgebra de posto $\leq n$.

Prova: De acordo com (3.2) temos: $L_{n-2} = \langle z^{n-1} \rangle + \langle z^n \rangle + \langle R_z^{n-1} u \rangle$ e $L_{n-1} = \langle z^n \rangle + \langle z^{n+1} \rangle + \langle R_z^n u \rangle$. Assim se $(\ker w)^n = 0$ então: $L_{n-2} = \langle z^{n-1} \rangle$ e $L_{n-1} = 0$. Como os subespaços L_n são invariantes, segue que $\langle z^{n-1} \rangle$ é um subespaço invariante sob mudança do idempotente. Se $\langle z^{n-1} \rangle \neq 0$ temos $L_{n-1} = 0$ e $L_{n-2} \neq 0$. Segue então, da Proposição 3.18,

que A é train, de posto $n + 1$. Se $\langle z^{n-1} \rangle = 0$ então $L_{n-2} = 0$. Segue da Proposição 3.18 que A é train de posto no máximo igual a n . ■

Corolário 3.23 Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A . Se $\langle R_z^n u \rangle = 0$ para algum inteiro n então o subespaço Z é nil, de grau $\leq n + 2$. Além disso, A é train-álgebra de posto $\leq n + 3$.

Prova: Da Proposição 3.19(a) temos: $L_{n+1} \subseteq \langle R_z^n \rangle = 0$. Como $L_{n+1} = \langle z^{n+2} \rangle + \langle z^{n+3} \rangle + \langle R_z^{n+2} u \rangle$ segue que $z^{n+2} = 0$ para todo $z \in Z$. Assim, Z é nil de grau $\leq n + 2$. Além disso, como $L_{n+1} = 0$, pela Proposição 3.18 podemos concluir que A é train, de posto $\leq n + 3$. ■

3.4. Subespaços anuladores

Indiquemos por l_z o operador linear de U_e definido por $l_z(u) = uz$, $u \in U_e$ e consideremos os seguintes subespaços de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$:

$$\text{ann } U_e = \{x \in A \mid xU_e = 0\} \quad (3.4)$$

$$\text{ann } A = \{x \in A \mid xA = 0\} \quad (3.5)$$

$$W_e = \{\alpha e + z \mid \alpha \in K, z \in Z_e \text{ e } 2l_z + \alpha \text{id}_{U_e} = 0\} \quad (3.6)$$

Proposição 3.24 Os subespaços de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ definidos em (3.4), (3.5) e (3.6) satisfazem as relações:

$$(a) \text{ ann } A \subseteq Z_e$$

$$(b) \text{ ann } U_e = L \oplus W_e$$

$$(c) \text{ ann } A \subseteq W_e$$

Prova:

(a) Se $x = \alpha e + u + z$ pertence a $\text{ann } A$, com $\alpha \in K$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, então $0 = xe = \alpha e + \frac{1}{2}u$ e portanto $\alpha = 0$ e $u = 0$ e daí $x \in Z_e$.

(b) É claro que $L \cap W_e = 0$ uma vez que $L \subseteq U_e$ e $W_e \subseteq Fe \oplus Z_e$. Dados $u \in L$, $\alpha e + z \in W_e$ e $\bar{u} \in U_e$ temos $(u + \alpha e + z)\bar{u} = \frac{1}{2}\alpha\bar{u} - \frac{1}{2}\alpha\bar{u} = 0$ e portanto

$L \oplus W_e \subseteq \text{ann } U_e$. Por outro lado, se $x = \alpha e + u + z$ é um elemento qualquer de $\text{ann } U_e$, com $\alpha \in K$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, então, para todo $\bar{u} \in U_e$, temos $0 = \bar{u}x = \frac{1}{2}\alpha\bar{u} + u\bar{u} + \bar{u}z$. Portanto $\bar{u}z = -\frac{1}{2}\alpha\bar{u}$ e $u\bar{u} = 0$, de onde se conclui que $\alpha e + z \in W_e$ e $u \in L$. Logo $x = \alpha e + u + z \in L \oplus W_e$ e $\text{ann } U_e = L \oplus W_e$.

(c) Se $z \in \text{ann } A$ então $0 = zu = (0.e + z)u = -\frac{1}{2}.0.u$ para todo $u \in U_e$ e portanto $0e + z = z \in W_e$, logo, $\text{ann } A \subseteq W_e$. ■

Proposição 3.25 Com as notações da Proposição 3.24, se existe $\alpha \in K$ tal que $\alpha \neq 0$ e $\alpha e + z \in W_e$ para algum $z \in Z_e$ então:

- (a) $U_e^2 = 0$
- (b) $\langle R_z^k u \rangle = U_e$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Em particular $U_e Z_e = U_e$.
- (c) $L = U_e = L_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Prova:

- (a) Seja $\alpha e + z \in W_e$, com $\alpha \neq 0$ e $z \in Z_e$. Então para todo $u \in U_e$ temos (usando 1.7 e 3.6) $0 = u(uz) = u(-\frac{1}{2}\alpha u) = -\frac{1}{2}\alpha u^2$, portanto $u^2 = 0$ e $U_e^2 = 0$.
- (b) Para $k = 0$ temos $\langle R_z^k u \rangle = \langle u \rangle = U_e$. Suponhamos $k \geq 1$ e seja $\alpha e + \bar{z} \in W_e$ com $\alpha \neq 0$ e $\bar{z} \in Z_e$. Temos $R_{\bar{z}}^k \bar{u} = R_{\bar{z}}^{k-1}(\bar{u} \bar{z}) = R_{\bar{z}}^{k-1}(-\frac{1}{2}\alpha \bar{u}) = R_{\bar{z}}^{k-2}(\frac{1}{2^2}\alpha^2 \bar{u}) = \dots = \frac{(-1)^k}{2^k}\alpha^k \bar{u}$, para todo $\bar{u} \in U_e$. Assim, $\bar{u} = (-1)^k 2^k \alpha^{-k} R_{\bar{z}}^k \bar{u} \in \langle R_{\bar{z}}^k u \rangle$ para todo $\bar{u} \in U_e$, de onde concluímos que $\langle R_z^k u \rangle = U_e$.
- (c) Segue imediatamente do item (a) que $L = U_e$. O fato de L_n ser igual a U_e segue de (3.2), observando que L_n é uma soma de subespaços contidos em U_e e, nesse caso, um deles, $\langle R_z^{n+1} u \rangle$, é o próprio U_e pelo item (b). ■

Vamos agora considerar mais um subespaço de uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$. Definimos

$$V_e = \{z \in Z_e \mid 2l_z + \alpha \text{id}_{U_e} = 0, \text{ para algum } \alpha \in K\} \quad (3.7)$$

ou seja

$$V_e = \{z \in Z_e \mid \forall u \in U_e, 2uz + \alpha u = 0, \text{ para algum } \alpha \in K \text{ fixado}\}.$$

Proposição 3.26 Com as notações acima, se $U_e \neq 0$ então, para cada $z \in V_e$ existe um único $\alpha \in K$ tal que $2l_z + \alpha \text{id}_{U_e} = 0$.

Prova: Dado $z \in V_e$, se $2l_z + \alpha id_{U_e} = 0 = 2l_z + \beta id_{U_e}$, com α e β em K , então $(\alpha - \beta)id_{U_e} = 0$. Se $U_e \neq 0$ segue que $\alpha = \beta$. ■

Corolário 3.27 Com as notações acima, se $U_e \neq 0$ então $\dim W_e = \dim V_e$.

Prova: Pela Proposição 3.26, para cada $z \in V_e$ existe um único escalar $\alpha = \alpha_z$ tal que $2l_z + \alpha id_{U_e} = 0$. A aplicação que associa a cada $z \in V_e$ o elemento $\alpha_z e + z \in W_e$ é um isomorfismo de espaços vetoriais e assim $\dim W_e = \dim V_e$. ■

Observação: Se $U_e = 0$ então $W_e = Ke \oplus Z_e$ e $V_e = Z_e$. Portanto, nesse caso, não se tem $\dim V_e = \dim W_e$.

Proposição 3.28 Se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Bernstein excepcional, então $\dim V_e$ independe do idempotente escolhido.

Prova: Se $U_e = 0$ então $V_e = Z_e$ portanto $\dim V_e$ independe do idempotente. Suponhamos $U_e \neq 0$. Seja $f = e + \sigma + \sigma^2 = e + \sigma$ um idempotente qualquer de A , com $\sigma \in U_e$. Seja $T : V_e \rightarrow V_f$ a aplicação definida por $T(z) = z - 2\sigma z = z + \alpha\sigma$, para cada $z \in V_e$ onde $\alpha \in K$ é tal que $2l_z + \alpha id_{U_e} = 0$ (e portanto $\alpha\sigma = -2\sigma z$). Como em toda álgebra excepcional $U_e = U_f$, temos, para cada $u \in U_f$: $u(z + \alpha\sigma) = uz = -\frac{1}{2}\alpha u$. Logo, $2l_{z+\alpha\sigma} + \alpha id_{U_f} = 0$ e portanto $z + \alpha\sigma \in V_f$, de modo que $T(V_e) \subseteq V_f$. Por outro lado, se $z - 2\sigma z \in V_f$, com $z \in Z_e$, então $0 = 2l_{z-2\sigma z} + \beta id_{U_f} = 2l_z + \beta id_{U_e}$ para algum $\beta \in K$. Logo, $z \in V_e$ e $z - 2\sigma z = T(z)$, de modo que $T(V_e) = V_f$. Se $z \in V_e$ é tal que $0 = T(z) = z - 2\sigma z$, então $z = 0$ pois $z \in Z_e$ e $\sigma z \in U_e$. Do exposto, segue que T é um isomorfismo de V_e em V_f , que têm portanto a mesma dimensão. ■

3.5. Sobre álgebras excepcionais de tipo $(2, n-2)$

No problema da classificação das álgebras de Bernstein, as excepcionais constituem uma classe especialmente complexa. De fato, se $A = Ke \oplus U \oplus Z =$

$\langle e, u_1, u_2, \dots, u_r, z_1, z_2, \dots, z_s \rangle$ é o espaço vetorial sobre um corpo K , livremente gerado por $e, u_1, \dots, u_r, z_1, \dots, z_s$, definindo uma multiplicação comutativa qualquer em A tal que $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ para $i = 1, 2, \dots, r$, $ez_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, s$, $u_i u_l = 0$ para $i, l = 1, \dots, r$, $u_i z_j \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$ e $z_j z_k \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ para $j, k = 1, \dots, s$ e o homomorfismo w tal que $w(e) = 1$ e $\ker w = \langle u_1, \dots, u_r, z_1, \dots, z_s \rangle$, então (A, w) resulta uma álgebra de Bernstein excepcional. Se K é um corpo infinito e r e s são não nulos, é possível definir uma infinidade de tábuas de multiplicação como descrevemos acima. A questão fundamental é determinar as classes de isomorfismos. Em termos mais concretos: dado o espaço vetorial $\langle e, u_1, \dots, u_r, z_1, \dots, z_s \rangle$ sobre o corpo K , com homomorfismo peso e duas tábuas de multiplicação satisfazendo as condições acima, como decidir se as duas álgebras de Bernstein excepcionais assim obtidas são ou não isomorfas? Responderemos parcialmente esta questão na presente seção, no caso $r = 1$.

Proposição 3.29 Se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é uma decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein excepcional então os subespaços U e UZ são ideais de A que independem do idempotente escolhido.

Prova: Como $eU = U$, $U^2 = 0$, $UZ \subseteq U$ e também $e(UZ) = UZ$, $U(UZ) \subseteq U^2 = 0$ e $(UZ)Z \subseteq UZ$, segue que U e UZ são ideais de A . Dado um idempotente qualquer de A , $f = e + \sigma$, com $\sigma \in U$, segue da Proposição 1.3 que $U_f = U$, uma vez que $\sigma u = 0$. A invariância de UZ se deve ao fato de que $U_f = U$ e $Z_f = \{z - 2(\sigma + \sigma^2)z \mid z \in Z\} = \{z - 2\sigma z \mid z \in Z\}$ (pela Proposição 1.2), de modo que, dados $u \in U_f = U$ e $z - 2\sigma z \in Z_f$, com $z \in Z$, então $u(z - 2\sigma z) = uz \in UZ$. Logo, $U_f Z_f \subseteq UZ$ e, de modo análogo, mostra-se que $UZ \subseteq U_f Z_f$. Logo, $U_f Z_f = UZ$. ■

Vamos agora estimar quantas álgebras de Bernstein excepcionais existem, sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, do tipo $(2, n - 2)$, tais que $UZ = 0$. No entanto, o leitor verificará que algumas afirmações que fazemos são válidas para

um corpo K arbitrário. Notemos que todas elas são train-álgebras, de posto 4 se $Z^2 \neq 0$ e de posto 3 se $Z^2 = 0$ e $n > 2$ pois, nesse caso, $L_2 = \langle z^3 \rangle + \langle z^4 \rangle + \langle R_z^3 u \rangle = 0$ e $L_1 = Z^2 + \langle z^3 \rangle + \langle R_z^2 u \rangle = Z^2$ (ver Proposição 3.18). Notemos ainda que, se $U^2 = 0$ e $UZ = 0$ então Z é um subespaço invariante em relação ao idempotente escolhido pois, se e e f são dois idempotentes quaisquer com $f = e + \sigma$, $\sigma \in U_e$, então $z - 2(\sigma + \sigma^2)z = z$ para todo $z \in Z_e$, de modo que $Z_f = Z_e$. Sendo Z invariante, também é invariante o subespaço $Z_0 = \{z \in Z \mid zZ = 0\}$. Como $Z_0 \subseteq Z$ segue que $0 \leq \dim Z_0 \leq n - 2 = \dim Z$. Fixado um inteiro m , com $0 \leq m \leq n - 2$, vamos, a seguir, dar uma estimativa de quantas álgebras de Bernstein excepcionais existem, do tipo $(2, n - 2)$ tais que $UZ = 0$ e $\dim Z_0 = m$.

Se $m = n - 2$ então $Z_0 = Z$ e portanto $Z^2 = 0$. Nesse caso há uma única álgebra: o espaço vetorial $A = \langle e, u, z_1, \dots, z_{n-2} \rangle$ com tabela de multiplicação comutativa dada por: $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$ e demais produtos nulos.

Vamos agora considerar $0 \leq m \leq n - 3$ e portanto $Z_0 \neq Z$. Logo $Z^2 \neq 0$, isto é, $Z^2 = U$. Seja $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de Z_0 e seja $\{z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m\}$ uma base de Z , onde $m + l = n - 2$. Seja $z_1^2 = u \neq 0$. (Notemos que existe $z \in Z$ com $z^2 \neq 0$, uma vez que $Z^2 = U$ e, se $z^2 \neq 0$ então $z \notin Z_0$; escolho um tal z como sendo z_1).

Fato 1: Podemos supor $z_1 z_j = 0$ para $j = 2, 3, \dots, l$.

De fato: se $z_1 z_j = \lambda_j u$, substituindo z_j por $\bar{z}_j = z_j - \lambda_j z_1$ temos ainda $Z = \langle z_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $z_1^2 = u$ e $z_1 \bar{z}_j = 0$ para $j = 2, 3, \dots, l$.

■

Fato 2: Podemos supor $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $z_1^2 = u$, $z_1 z_j = 0$ para $j = 2, \dots, l$ e $z_2^2 = \pm u$.

De fato: Se algum z_i é tal que $z_i^2 = \lambda u \neq 0$ e $2 \leq i \leq l$, substituímos z_i por $\bar{z}_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} z_i$ e obtemos $\bar{z}_i^2 = u$ ou $\bar{z}_i^2 = -u$, conforme λ seja positivo ou negativo. Depois, na base $\{z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m\}$ fazemos $z_2 = \bar{z}_i$ e $z_i = z_2$.

Se, no entanto, $z_i^2 = 0$ para $i = 2, 3, \dots, l$, como $z_2 \notin Z_0$ e $z_1 z_2 = 0$, deve existir um índice j , $3 \leq j \leq l$, tal que $z_2 z_j = \lambda u \neq 0$. Substituindo z_2 por $\bar{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}}(z_2 + z_j)$ obtemos $\bar{z}_2^2 = \frac{1}{2|\lambda|} \cdot 2\lambda u = \pm u$. ■

Fato 3: Podemos supor $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $z_1^2 = u$, $z_2^2 = \pm u$, $z_1 z_j = 0$ para $j = 2, \dots, l$ e $z_2 z_k = 0$ para $k = 3, 4, \dots, l$.

De fato: sendo $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $z_1^2 = u$, $z_2^2 = \pm u$ e $z_1 z_j = 0$ para $2 \leq j \leq l$, como vimos ser possível, sendo $z_2 z_k = \lambda_k u$, substituímos z_k por $\bar{z}_k = z_k - \lambda_k z_2$, no caso $z_2^2 = u$, ou por $\bar{z}_k = z_k + \lambda_k z_2$, no caso $z_2^2 = -u$, e obtemos: $z_2 \bar{z}_k = 0$, $Z = \langle z_1, z_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4, \dots, \bar{z}_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ onde $\{z_1, z_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_l, w_1, \dots, w_m\}$ satisfaz as condições desejadas. ■

Fato 4: Podemos supor $Z = \langle z_1, z_2, z_3, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $z_i^2 = \pm u$ e $z_i z_j = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, l$ com $i \neq j$.

De fato: Já vimos que se pode ter $z_1^2 = u$ e $z_1 z_j = 0$ para $j = 2, 3, \dots, l$. Suponhamos que, para um certo inteiro k , com $1 \leq k < l$, tenhamos escolhido $z_1, z_2, \dots, z_k$ tais que $z_i^2 = \pm u$ e $z_i z_j = 0$ para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$, com $j \neq i$. Mostremos que é possível escolher z_{k+1} tal que $z_{k+1}^2 = \pm u$ e $z_{k+1} z_j = 0$ para $1 \leq j \leq l$, com $j \neq k+1$. Se existe um índice t , com $k+1 \leq t \leq l$, tal que $z_t^2 = \lambda u \neq 0$, substituindo z_t por $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} z_t$, e, se necessário, permutando z_{k+1} e z_t , obtemos $z_{k+1}^2 = \frac{1}{|\lambda|} \lambda u = \pm u$. Se $z_{k+1} z_j = \lambda_j u$, com $j > k+1$, substituímos z_j por $\bar{z}_j = z_j - \lambda_j z_{k+1}$ ou por $\bar{z}_j = z_j + \lambda_j z_{k+1}$, conforme se tenha $z_{k+1}^2 = u$ ou $z_{k+1}^2 = -u$, e obtemos $z_{k+1} \bar{z}_j = 0$ para $k+1 < j < l$. (Observemos que já tínhamos $z_{k+1} z_i = 0$ para $1 \leq i < k+1$, pela hipótese de indução). Por outro lado, se $z_t^2 = 0$ para todo $t = k+1, k+2, \dots, l$, então $z_{k+1}^2 = 0$ e, como $z_{k+1} \notin Z_0$, existe j , com $k+1 < j \leq l$, tal que $z_{k+1} z_j = \lambda u \neq 0$. Substituindo z_{k+1} por $\bar{z}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}}(z_{k+1} + z_j)$ obtemos $\bar{z}_{k+1}^2 = \frac{1}{2|\lambda|} \cdot 2\lambda u = \pm u$. Aí, basta substituir, para cada $j > k+1$, z_j por $\bar{z}_j = z_j + \lambda_j \bar{z}_{k+1}$ ou por $\bar{z}_j = z_j - \lambda_j \bar{z}_{k+1}$ conforme se tenha $\bar{z}_{k+1}^2 = -u$ ou $\bar{z}_{k+1}^2 = u$, onde $\bar{z}_{k+1} z_j = \lambda_j u$, para obtermos $\bar{z}_{k+1} \cdot \bar{z}_j = 0$ ■

Do Fato 4 acima concluímos que as álgebras de Bernstein excepcionais, de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, $A = Ke \oplus U \oplus Z$, do tipo $(2, n-2)$ e tais que $UZ = 0$ são os espaços vetoriais $A = \langle e, u, z_1, z_2, \dots, z_l, v_1, v_2, \dots, v_t, w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$ onde $l + t + m = n - 2$, com tábua de multiplicação comutativa dada por: $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$; $z_i^2 = u$ para $i = 1, \dots, l$, $v_j^2 = -u$ para $j = 1, \dots, t$; demais produtos nulos e homomorfismo peso w definido por $w(e) = 1$ e $\ker w = \langle u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$. Diremos que a álgebra A descrita acima está associada à terna (l, t, m) . Se $m_1 \neq m_2$, as álgebras associadas às ternas (l_1, t_1, m_1) e (l_2, t_2, m_2) são não isomorfas uma vez que m é a dimensão do subespaço invariante $Z_0 = \{z \in Z \mid zZ = 0\}$. Assim, para cada dimensão $n \geq 2$, há pelo menos $n - 1$ álgebras de Bernstein excepcionais não isomorfas tais que $UZ = 0$, correspondentes às ternas (l, t, m) onde $m = 0, 1, \dots, n - 2$. Como existem $\frac{1}{2}n(n - 1)$ ternas de números naturais (l, t, m) com $l + t + m = n - 2$ há, no máximo, $\frac{1}{2}n(n - 1)$ álgebras de Bernstein excepcionais $A = Ke \oplus U \oplus Z$, sobre o corpo $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n - 2)$ tais que $UZ = 0$. Mas faremos agora algumas observações que colocam a quantidade de álgebras dentro de uma faixa mais estreita.

As álgebras associadas às ternas (l, t, m) e (t, l, m) são isomorfas pois, se

$$A = \langle e, u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$$

$$\bar{A} = \langle \bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_l, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m \rangle$$

são tais álgebras, respectivamente, a aplicação linear $\varphi : A \rightarrow \bar{A}$ tal que $\varphi(e) = \bar{e}$, $\varphi(u) = -\bar{u}$, $\varphi(z_i) = \bar{v}_i$ para $i = 1, \dots, l$, $\varphi(v_j) = \bar{z}_j$ para $j = 1, \dots, t$, $\varphi(w_k) = \bar{w}_k$ para $k = 1, \dots, m$ é um isomorfismo de álgebras. Assim, para cada n , basta considerarmos as álgebras associadas às ternas (l, t, m) com $l + t + m = n - 2$ e $l \geq t$. O número de ternas nestas condições é $\frac{1}{4}n^2$ ou $\frac{1}{4}(n^2 - 1)$, conforme n seja par ou ímpar. Este resultado reduz o número máximo de álgebras obtido anteriormente que era $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Agora vamos cuidar de aumentar o número mínimo $n - 1$ já obtido.

As álgebras associadas às ternas $(l, 0, m)$ e (l_1, t, m) , com $l_1 \neq 0$ e $t \neq 0$, são não isomorfas. De fato: seja $A = \langle e, u, z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_m \rangle$ a álgebra

associada à terna $(l, 0, m)$. Suponhamos que A seja isomorfa à álgebra associada a terna (l_1, t, m) . Isto significa que existe um idempotente $\bar{e}$ de A e subespaços de Peirce correspondentes, $U_{\bar{e}} = \langle \bar{u} \rangle$ e $Z_{\bar{e}} = \langle \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{l_1}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m \rangle$ tais que a tábua de multiplicação da nova base

$$\{\bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{l_1}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$$

é a tábua da álgebra associada à terna (l_1, t, m) . Logo, existem escalares $\alpha, \beta, \alpha_{1j}$ e $\beta_{1,j}$, $j = 1, \dots, l$ tais que:

$$\bar{e} = e + \alpha u$$

$$\bar{u} = \beta u, \beta \neq 0$$

$$\bar{z}_1 = \alpha_{11}z_1 + \dots + \alpha_{1l}z_l + a$$

$$\bar{v}_1 = \beta_{11}z_1 + \dots + \beta_{1l}z_l + b$$

onde $a, b \in \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$. Como $\bar{z}_1^2 = \bar{u}$ e $\bar{v}_1^2 = -\bar{u}$ concluímos que $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \dots + \alpha_{1l}^2 = \beta$ e $\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \dots + \beta_{1l}^2 = -\beta$. Portanto $\beta \geq 0$ e $\beta \leq 0$. Logo $\beta = 0$ e $\bar{u} = 0$, um absurdo.

Em vista do fato demonstrado acima podemos dizer, em relação à quantidade mínima de álgebras de dimensão n , satisfazendo as condições dadas, que: fixado m , $0 \leq m < n - 3$, há pelo menos duas álgebras, que são aquelas associadas às ternas $(n - m - 2, 0, m)$ e $(n - m - 3, 1, m)$. Para $m = n - 2$ há apenas uma álgebra, aquela associada à terna $(0, 0, n - 2)$. Para $m = n - 3$, também há apenas uma álgebra, aquela associada à terna $(1, 0, n - 2)$ (que é isomorfa àquela associada à $(0, 1, n - 2)$). Assim, o número mínimo de álgebras satisfazendo as condições dadas, para uma fixada dimensão n , é: $2(n - 3) + 1 + 1 = 2n - 4$. Logo, indicando por N o número de tais álgebras, temos: $2n - 4 \leq N \leq \frac{1}{4}n^2$ (para n par) e $2n - 4 \leq N \leq \frac{1}{4}(n^2 - 1)$ (para n ímpar).

Resumimos o exposto na definição e proposição seguintes:

Definição: Para cada terna de inteiros não negativos (l, t, m) a álgebra associada à terna (l, t, m) é o espaço vetorial $A = \langle e, u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ sobre $\mathbb{R}$, com tábua de multiplicação comutativa dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $z_i^2 =$

u para $i = 1, 2, \dots, l$, $v_j^2 = -u$ para $j = 1, 2, \dots, t$, demais produtos nulos e homomorfismo peso w tal que $w(e) = 1$ e $\ker w = \langle u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$.

Proposição 3.30 Seja $n \geq 2$ um inteiro.

(a) A álgebra $A = \langle e, u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ associada a qualquer terna de inteiros não negativos (l, t, m) com $l + t + m = n - 2$ é uma álgebra de Bernstein excepcional, do tipo $(2, n - 2)$, tal que os subespaços de Peirce associados ao idempotente e são $U = \langle u \rangle$ e $Z = \langle z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $UZ = 0$. Além disso, A é uma train-álgebra cujo posto é 3, se $m = n - 2$, ou 4, se $m < n - 2$.

(b) Dados os inteiros não negativos $l_1, t_1, m_1, l_2, t_2, m_2$, com $n - 2 = l_1 + t_1 + m_1 = l_2 + t_2 + m_2$, se $m_1 \neq m_2$ então as álgebras associadas às ternas (l_1, t_1, m_1) e (l_2, t_2, m_2) são não isomorfas.

(c) As álgebras associadas às ternas $(l, 0, m)$ e (l_1, t, m) , com $l_1 \neq 0$, $t \neq 0$ e $l_1 + t = l$ são não isomorfas.

(d) As álgebras associadas às ternas (l, t, m) e (t, l, m) são isomorfas.

(e) Se A é uma álgebra de Bernstein excepcional sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n - 2)$, tal que $UZ = 0$ para alguma decomposição de Peirce $A = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$, então existem inteiros não negativos l, t e m , com $l + t + m = n - 2$ tais que A é a álgebra associada à terna (l, t, m) .

(f) Se N é a quantidade de álgebras de Bernstein A de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n - 2)$, tais que $UZ = 0$ para alguma decomposição de Peirce $A = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$, então: $2n - 4 \leq N \leq \frac{1}{4}n^2$ para n par e $2n - 4 \leq N \leq \frac{1}{4}(n^2 - 1)$ para n ímpar.

Nos exemplos 3.31 que seguem determinaremos todas as álgebras de Bernstein sobre $\mathbb{R}$, excepcionais, do tipo $(2, n - 2)$, tais que $UZ = 0$, nos casos $n = 3, 4, 5, 6$ e 7 .

Exemplos 3.31

(a) Para $n = 3$ há, de acordo com a Proposição 3.30, 2 álgebras satisfazendo as condições dadas:

$A_1 = \langle e, u, w \rangle$, associada à terna $(0,0,1)$.

$A_2 = \langle e, u, z \rangle$, associada à terna $(0,1,0)$.

(b) Para $n = 4$, há 4 álgebras distintas da espécie considerada:

$A_1 = \langle e, u, w_1, w_2 \rangle$, associada a $(0,0,2)$.

$A_2 = \langle e, u, z, w \rangle$, associada a $(1,0,1)$.

$A_3 = \langle e, u, z_1, z_2 \rangle$, associada a $(2,0,0)$.

$A_4 = \langle e, u, z, v \rangle$, associada a $(1,1,0)$.

(c) Para $n = 5$, há 6 álgebras distintas, correspondentes às ternas:

$(0,0,3)$, $(1,0,2)$, $(2,0,1)$, $(1,1,1)$, $(3,0,0)$ e $(2,1,0)$

(d) Para $n = 6$, temos: $2n - 4 = 8$ e $\frac{1}{4}n^2 = 9$

Assim há no mínimo 8 e no máximo 9 álgebras satisfazendo as condições em estudo. São elas:

A_1 , associada à terna $(0,0,4)$.

A_2 , associada à terna $(1,0,3)$.

A_3 , associada à terna $(2,0,2)$.

A_4 , associada à terna $(1,1,2)$.

A_5 , associada à terna $(3,0,1)$.

A_6 , associada à terna $(2,1,1)$.

A_7 , associada à terna $(4,0,0)$.

A_8 , associada à terna $(3,1,0)$.

A_9 , associada à terna $(2,2,0)$.

De acordo com a Proposição 3.30, o único isomorfismo possível é entre A_8 e A_9 .

Seja $A_8 = \langle e, u, z_1, z_2, z_3, v \rangle$ a álgebra associada à terna $(3,1,0)$. Tomando

$\bar{e} = e$, $\bar{u} = u$, $\bar{z}_1 = z_1$, $\bar{z}_2 = z_2$, $\bar{v}_1 = z_3 + \sqrt{2}v$, $\bar{v}_2 = v$, temos: $A_8 = \langle \bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$ onde $\bar{e}^2 = \bar{e}$, $\bar{e} \bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u}$, $\bar{e} \bar{z}_i = \bar{e} \bar{v}_i = 0$ (para $i = 1, 2$), $\bar{u}^2 = 0$, $\bar{u} \bar{z}_i = \bar{u} \bar{v}_i = 0$ (para $i = 1, 2$), $\bar{z}_1^2 = \bar{u}$, $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = 0$, $\bar{z}_1 \bar{v}_i = 0$ (para $i = 1, 2$), $\bar{z}_2^2 = \bar{u}$, $\bar{z}_2 \bar{v}_i = 0$ ($i = 1, 2$), $\bar{v}_1^2 = \bar{z}_3^2 + 2v^2 = u - 2u = -u = -\bar{u}$, $\bar{v}_1 \bar{v}_2 = 0$ e $\bar{v}_2^2 = -\bar{u}$. Logo A_8 é isomorfa à álgebra A_9 , associada à terna $(2,2,0)$. Assim, há 8 álgebras de dimensão 6, satisfazendo as condições acima.

(e) Para $n = 7$ as possíveis álgebras são

- A_1 , associada à terna $(0,0,5)$.
- A_2 , associada à terna $(1,0,4)$.
- A_3 , associada à terna $(2,0,3)$.
- A_4 , associada à terna $(1,1,3)$.
- A_5 , associada à terna $(3,0,2)$.
- A_6 , associada à terna $(2,1,2)$.
- A_7 , associada à terna $(4,0,1)$.
- A_8 , associada à terna $(3,1,1)$.
- A_9 , associada à terna $(2,2,1)$.
- A_{10} , associada à terna $(5,0,0)$.
- A_{11} , associada à terna $(4,1,0)$.
- A_{12} , associada à terna $(3,2,0)$.

De acordo com a Proposição 3.30, os únicos isomorfismos possíveis são entre A_8 e A_9 e entre A_{11} e A_{12} . Assim, o número de álgebras distintas para $n = 7$ é 10, 11 ou 12. Seja $A_8 = \langle e, u, z_1, z_2, z_3, v, w \rangle$ a álgebra associada a $(3,1,1)$. Tomando $\bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ como fizemos acima no caso $n = 6$ e $\bar{w} = w$, é fácil verificar que $A_8 = \langle \bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w} \rangle$ é a álgebra associada à terna $(2,2,1)$. Logo A_8 e A_9 são isomorfas. No caso de A_{11} e A_{12} , se $A_{11} = \langle e, u, z_1, z_2, z_3, z_4, v \rangle$, tomando $\bar{e} = e$, $\bar{u} = u$, $\bar{z}_1 = z_1$, $\bar{z}_2 = z_2$, $\bar{z}_3 = z_3$, $\bar{v}_1 = z_4 + \sqrt{2}v$ e $\bar{v}_2 = v$ é fácil verificar que $A_{11} = \langle \bar{e}, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$ é a álgebra A_{12} , associada a $(3,2,0)$. Logo, há 10 álgebras de dimensão 7 nas condições consideradas.

Vamos agora considerar as álgebras de Bernstein excepcionais sobre $\mathbb{R}$, ainda do tipo $(2, n - 2)$, tais que $UZ = U$ para alguma decomposição de Peirce $A = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$. Se $U = \langle u \rangle$, existe $z \in Z$ com $uz = u$. Tomando-se uma base de Z contendo z , podemos supor $ux = 0$ para todo elemento $x \neq z$ nessa base pois se $ux = \lambda u$, podemos substituir x por $\bar{x} = x - \lambda z$ e temos $u\bar{x} = 0$. Assim, a subálgebra bária B de A , $B = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z_B$, onde Z_B tem como base o conjunto complementar de $\{z\}$ na base acima de Z , é uma álgebra de Bernstein excepcional, do tipo $(2, n - 3)$, tal que $UZ_B = 0$. Reciprocamente, se B é uma álgebra de Bernstein excepcional sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n - 3)$, tal que $UZ = 0$ para alguma decomposição de Peirce $B = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$ é claro que a álgebra $A = B \oplus \langle z \rangle$ cuja multiplicação restrita aos elementos de B é a multiplicação em B e tal que $ez = 0$, $uz = u$ (onde $U = \langle u \rangle$), $z^2 \in U$ e $zZ \subset U$, é uma álgebra de Bernstein excepcional do tipo $(2, n - 2)$ tal que seus subespaços de Peirce em relação ao idempotente e são U e $Z_A = Z \oplus \langle z \rangle$ com $UZ_A = U$. Pela Proposição 3.30, B é a álgebra associada a alguma terna (l, t, m) de inteiros não negativos tais que $l + t + m = n - 3$.

Do exposto, segue o seguinte resultado:

Proposição 3.32 A é uma álgebra excepcional sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n - 2)$, com $UZ = U$ para alguma decomposição de Peirce $A = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$ se, e somente se, A admite uma base $\{e, u, z, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m\}$ onde $l + t + m = n - 3$, com tabela de multiplicação comutativa tal que: $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $uz = u$; $z_i^2 = u$ ($i = 1, \dots, l$); $v_j^2 = -u$ ($j = 1, \dots, t$); z^2, zz_i, zv_j e zw_k pertencem ao subespaço $U = \langle u \rangle$; demais produtos nulos.

Seja $A = \langle e, u, z, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ uma álgebra conforme descrevemos na Proposição 3.32. Mostremos que se pode supor $z^2 = u$.

De fato: se $z^2 = \alpha u$, com $\alpha \neq 0$, substituindo u por $\bar{u} = \alpha u$, z_i por $\bar{z}_i = \sqrt{|\alpha|}z_i$ ($i = 1, \dots, l$) e v_j por $\bar{v}_j = \sqrt{|\alpha|}v_j$ ($j = 1, \dots, t$) obtemos $\bar{u}z = \alpha uz = \alpha u = \bar{u}$; $z^2 = \alpha u = \bar{u}$; $\bar{z}_i^2 = \bar{u}$ e $\bar{v}_j^2 = -\bar{u}$ para $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, t$

ou $\bar{z}_i^2 = -\bar{u}$ e $\bar{v}_j^2 = \bar{u}$ para $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, t$, conforme se tenha $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Assim $A = \langle e, \bar{u}, z, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ ainda é uma álgebra que satisfaz as condições descritas na Proposição 3.32. Se $B = \langle e, u, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ não é a álgebra associada à terna $(0, 0, n-3)$ e $z^2 = 0$, substituindo z por $\bar{z} = z + (\sqrt{\alpha_1^2 + 1} - \alpha_1)z_1$, onde $zz_1 = \alpha_1 u$, obtemos $\bar{z}^2 = u$ e ficam mantidas as demais condições. Assim, temos o resultado:

Proposição 3.33 A é uma álgebra de Bernstein excepcional sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n-2)$, com $UZ = U$ se, e somente se, A satisfaz uma das duas condições seguintes:

- (i) $A = \langle e, u, z, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ com $l+t+m = n-3$ e com tábua de multiplicação comutativa que satisfaz: $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $uz = u$; $z^2 = u$; $z_i^2 = u$ ($i = 1, \dots, l$); $v_j^2 = -u$ ($j = 1, \dots, t$); zz_i, zv_j, zw_k pertencem ao subespaço $\langle u \rangle$; demais produtos nulos.
- (ii) $A = \langle e, u, z, w_1, \dots, w_m \rangle$, $m = n-3$, com tábua de multiplicação comutativa dada por: $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $uz = u$; demais produtos nulos.

Notemos que no caso (ii) da Proposição acima, para cada $m = 0, 1, \dots, n-3$ obtém-se apenas uma álgebra e como $m = \dim \text{ann } A$ é um invariante sob mudança do idempotente, há exatamente $n-2$ álgebras nesse caso. Mas o caso (i) descreve uma infinidade de álgebras: se $zz_i = \alpha_i u$, $zv_j = \beta_j u$ e $zw_k = \gamma_k u$ a tábua dada, para cada terna (l, t, m) , depende dos $l+t+m$ parâmetros α_i, β_j e γ_k . No caso em que $\text{ann } A \neq \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$, conseguimos eliminar os parâmetros. É o que expomos a seguir. Em primeiro lugar, notemos que $\text{ann } A \subseteq \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$.

De fato: já vimos, na Proposição 3.4, que $\text{ann } A \subseteq Z$ para qualquer álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$. No caso das álgebras $A = \langle e, u, z, z_1, \dots, z_l, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_m \rangle$ que estamos considerando, se $x = az + \sum a_i z_i + \sum b_j v_j + \sum c_k w_k$

é um elemento de $\text{ann } A$, então: $0 = ux = au$ e portanto $a = 0$; $0 = z_i x = a_i u$ e portanto $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, l$; $0 = v_j x = -b_j u$ e portanto $b_j = 0$ para $j = 1, \dots, t$. Assim, $x = \sum c_k w_k$.

Consideremos agora o caso em que $\text{ann } A \neq \langle w_1, \dots, w_m \rangle$. Então $w_k \notin \text{ann } A$ para algum k . Sem perda de generalidade, podemos supor que $w_1 \notin \text{ann } A$. Logo, $zw_1 \neq 0$. Podemos admitir que $zw_1 = u$. Substituindo z por $\bar{z} = z - \frac{1}{2}w_1$ e depois para cada índice $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, t$, $k = 2, \dots, m$, substituindo z_i, v_j e w_k respectivamente por $\bar{z}_i = z_i - \alpha_i w_1$, $\bar{v}_j = v_j - \beta_j w_1$, $\bar{w}_k = w_k - \gamma_k w_1$ (onde $zz_i = \alpha_i u$, $zv_j = \beta_j u$ e $zw_k = \gamma_k u$) obtemos a base para a álgebra A formada por $e, u, \bar{z}, \dots, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, w_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m$ com $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $u\bar{z} = u$; $\bar{z}_i^2 = u$ ($i = 1, \dots, l$); $\bar{v}_j^2 = -u$ ($j = 1, \dots, t$); $w_1\bar{z} = u$; demais produtos nulos.

3.6 Considerações finais

Fazendo a última revisão do texto restaram-me duas tentações opostas: cortar partes deste capítulo ou ampliá-lo.

A opção de ampliar o trabalho trouxe contra si a escassez do tempo. Depois, sempre temos na memória aqueles pensamentos de pessoas marcantes que servem para nos redimir: Agatha Christie comenta, em sua autobiografia, que os autores tendem a exagerar a generosidade em suas primeiras obras, usando muitas idéias num único livro, quando poderiam distribuí-las em vários.

A decisão de não fazer cortes ficou por conta de uma reflexão pessoal: não considero descabido, num texto dessa natureza, ficarem algumas pontas soltas. Alguém pode achar que vale a pena atá-las e nessa hipótese o trabalho terá sido muito mais gratificante. Dentre as pontas soltas cito algumas, sem pretender exaurí-las:

- (a) Vimos, na última parte da Seção 3.5, que as álgebras de Bernstein excepcionais sobre $\mathbb{R}$, do tipo $(2, n-2)$ e tais que $UZ = U = \langle u \rangle$ são da forma $B \oplus \langle z \rangle$ onde $uz = u$ e B é a álgebra associada a uma terna de inteiros

(l, t, m) com $l + t + m = n - 3$. Se $A_1 = B_1 \oplus \langle z_1 \rangle$ e $A_2 = B_2 \oplus \langle z_2 \rangle$ são da forma acima, então A_1 e A_2 são isomorfas se, e somente se, B_1 e B_2 são isomorfas?

- (b) Os subespaços J , L e L_n definidos na Seção 3.2 fornecem muitos invariantes numa álgebra de Bernstein. Através deles e de outros invariantes conhecidos, poderíamos subdividir uma certa classe de álgebras em tantos casos de modo que obtivéssemos uma única álgebra em cada um deles, seguramente não isomorfas às demais? Por exemplo, digamos que se queira obter todas as álgebras de Bernstein do tipo $(3,4)$ que são train-álgebras de posto 4. Como $\dim U = 2$ e $U \supseteq L \supseteq J \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ devemos ter: $1 \leq \dim L \leq 2$, $1 \leq \dim J \leq \dim L$, $1 \leq \dim L_1 \leq \dim J$, $L_2 = L_3 = \dots = \langle R_z^3 u \rangle = 0$. E ainda resta explorar $\dim \text{ann } A \leq \dim W_e$ e as dimensões invariantes de $U^2, Z^2 + UZ, U^2Z + UZ$.
- (c) O E -ideal de uma álgebra de Bernstein (ver [5]) correspondente ao T -polinômios $x^3 - w(x)x^2$ é, como vimos, o ideal gerado por L_1 . O E -ideal de A gerado por $p_n(x) = x^2(x - w(x))(x - \frac{1}{2}w(x))^{n-3}$ é o ideal gerado por L_{n-2} ? Nesse caso, se a cadeia $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \dots$ estaciona a partir do índice m , o E -ideal gerado por p_{m+2} é o ideal gerado por $L_m = \langle R_z^{m+1}u \rangle$.

Bibliografia

- [1] Abraham V.M.: *A note on train algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **20** 53-58 (1976).
- [2] Albert A.A.: *Non-associative algebras II*, Annals of Math. **43** (4) 708-723 (1942).
- [3] Alcalde M.T., Baeza R., Burgueño C.: *Autour des algèbres de Bernstein*, Arch. Math. **53** 134-140 (1989).
- [4] Bernstein S.: *Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel*, C. R. Acad. Sci. Paris **177** 528-531 (1923).
- [5] Catalan A.: *E-ideais em álgebras báricas*, Tese de doutorado, IME-USP (1995).
- [6] Correa, I., Peresi L.A.: *Bernstein-Jordan algebras of dimension five*, Alg. Groups Geom. **11**: 397-402 (1994).
- [7] Cortés T.: *Classification of 4-dimensional Bernstein algebras*, Comm. in Algebra **19** (5) 1429-1443 (1991).
- [8] Cortés T., Montaner F.: *On the structure of Bernstein algebras*, J. London Math. Soc. **51** (2) 41-52 (1995).
- [9] Costa R.: *A note on Bernstein algebras*, Linear Algebra and its Applications **112**: 195-205 (1989).
- [10] Costa R.: *On the classification of Bernstein algebras* (preprint).
- [11] Costa R., Guzzo H.: *Indecomposable baric algebras*, Linear Algebra and its Applications **183**: 223-236 (1993).
- [12] Costa R., Guzzo H.: *Indecomposable baric algebras II*, Linear Algebra and its Applications **196**: 233-242 (1994).

- [13] Costa R., Catalan, A. and Mallol C.: *E-ideals in baric algebras: basic properties* (to appear in Proc. Edinb. Math. Soc.).
- [14] Etherington I.M.H.: *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59**, 242-258 (1939).
- [15] González S., Martínez C.: *Idempotent elements in a Bernstein algebra*, J. London Math. Soc. (2) **42** 430-436 (1990).
- [16] Guzzo H.: *Contribuições à teoria das álgebras não associativas*, Tese de doutorado. IME-USP (1992).
- [17] Guzzo H. and Vicente, P.: *Train algebras of rank n which are Bernstein or power associative algebras*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra (to appear).
- [18] Holgate P.: *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*, J. London Math. Soc. **9** (2) 613-623 (1975).
- [19] Ljubich J.I.: *Basic concepts and theorems of evolution genetics of free populations*, Uspehi Math. Nauk **26** (5) 51-116 (Russich). English Überetzung: Russian Math. Surveys **26** 5 51-123 (1971).
- [20] Ljubich J.I.: *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).
- [21] Ljubich J.I.: *A new advance in the Bernstein problem in mathematical genetics* (preprint).
- [22] Martínez, C.: *On nuclear Bernstein Jordan algebras*. J. of Algebra 174, 453-472 (1995).
- [23] Micali A., Ouattara M.: *Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington*, Linear Algebra and its Applications **153**: 193-207 (1991).
- [24] Ouattara M.: *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T -algèbres*, Linear Algebra and its Applications **148**: 171-178 (1991).

- [25] Walcher S.: *Bernstein algebras which are Jordan algebras*, Arch. Math. **50**, 218-222 (1988).
- [26] Wörz A.: *Algebras in Genetics, Lectures Notes in Biomathematics 36*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1980).