**Dinâmica de Duas Equações
Parciais Escalares Discretizadas**

Liane Bordignon

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, novembro de 1996-

Dinâmica de Duas Equações
Parciais Escalares Discretizadas

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação apresentada por
Liane Bordignon devidamente corrigida e aprovada
pela comissão julgadora.
São Paulo, novembro de 1996

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira

IME-USP

Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira

IME-USP

Prof. Dr. Alexandre Nolasco Carvalho

ICMSC-USP

Abstract

In this work, we study the C^2 -semigroups obtained by discretization of the equations

$$u_t = au_{xx} + f(u)$$

and

$$u_{tt} + 2au_t = u_{xx} + f(u)$$

under Neumann conditions, where $a > 0$, $x \in (0, 1)$ f is of class C^2 and satisfies suitable dissipative conditions. We prove that these semigroups have gradient structure and global attractors whose bounds are independent of the number of mesh points taken in the discretization.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os C^2 -semigrupos originados pela discretização das equações

$$u_t = au_{xx} + f(u)$$

e

$$u_{tt} + 2au_t = u_{xx} + f(u)$$

com a condição de contorno $u_x(0, t) = u_x(1, t)$, onde $a > 0$, $x \in (0, 1)$ e f é de classe C^2 e satisfaz condições adequadas de dissipação. Demonstramos que estes semigrupos possuem estrutura gradiente e atrator global com limitação independente do número de pontos da malha tomada na discretização.

*Aos meus pais, Ernesto e Nilda
e à minha irmã, Lucrécia,
por cada etapa*

Agradecimentos

Agradeço a atenção, a disponibilidade, a paciência e a orientação do Prof. Antônio Luiz.

Espero que meu empenho e o prazer de fazer este trabalho demonstrem meu apreço e minha gratidão a familiares, amigos, colegas e aos professores que de alguma forma contribuíram para a realização do mesmo.

Quero agradecer especialmente à Luciane, pela etapa anterior; à Paty pelo início desta; à Cris, à Eliana, à Patrícia, à Adriana, ao Karl e ao Daniel pela presença e apoio e ao Carlos pela ajuda com o $\text{\LaTeX}$.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	10
1.1 Operadores Dissipativos e Semigrupos	10
1.2 Existência, Unicidade e Continuidade	12
1.3 Operadores Setoriais, Potências Fracionárias e Semigrupos Analíticos	13
1.4 Existência, Unicidade e Dependência Contínua	15
2 Atratores e Conjuntos Invariantes para C^r-semigrupos	19
3 Uma Equação Escalar Parabólica	34
3.1 O Problema Contínuo	34
3.2 O Problema Discreto	45
4 Uma Equação Escalar Hiperbólica	53
4.1 O Problema Contínuo	53
4.2 O Problema Discreto	60

Introdução

A discretização espacial da equação escalar

$$u_t = a\Delta u - f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (1)$$

com a condição de contorno

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

onde Ω é um domínio limitado, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d \leq 3$) com $\partial\Omega$ lipschitziano, $a > 0$ e f satisfaz as condições: $f(0) = 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\frac{f(r)}{r} > 0$, $\forall r$ tal que $|r| > \bar{u}$ para algum $\bar{u} > 0$, é estudada em [8]. Discute-se sistemas n -dimensionais de EDO's do tipo

$$MU' + aAU + Mf(U) = 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

onde M é uma matriz diagonal e A uma matriz simétrica positiva definida $n \times n$ e $U \in \mathbb{R}^n$, $f(U) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$.

Com as condições exigidas para f , a equação (1) com a condição de contorno (2), gera um C^1 -semigrupo em um espaço apropriado. Este C^1 -semigrupo foi estudado em [1], [3], [4] e [9] e sabe-se que possui estrutura gradiente e atrator global, o qual possui características bem conhecidas.

São descritas em [8] características novas introduzidas pela discretização como o surgimento de soluções de equilíbrio que não correspondem aos equilíbrios do problema contínuo e falsas características quanto a estabilidade das soluções de equilíbrio provenientes dos equilíbrios de (1), se a discretização não for suficientemente refinada. Contudo, as soluções de (3) geram um C^2 -semigrupo para o qual existe uma função de Lyapunov e atrator global. Prova-se que este atrator global é limitado, independentemente de n , ou seja, independentemente do número de pontos da malha tomada na discretização.

Comportamentos distintos entre problemas contínuos e a sua versão discretizada ocorrem em muitos exemplos.

A equação

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x), \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \quad (4)$$

onde função f satisfaz a condição de dissipatividade $f(x, u, 0) \cdot u < 0$ para $|u|$ suficientemente grande, com a condição de contorno de Neumann é discutida em [6]. Com estas condições, garante-se a existência de atrator global para o problema contínuo.

Nesse trabalho, utiliza-se o “método do tiro” (shooting method) para definir os pontos de equilíbrio da equação (4) e para os sistemas de EDO's n -dimensionais, resultantes da discretização espacial. Para o problema discreto, o método consiste da iteração de um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que preserva área e conduz, em alguns casos, ao aparecimento de equilíbrios estáveis que não correspondem a soluções de equilíbrio do problema contínuo e que são, portanto, consideradas numericamente irrelevantes.

Neste trabalho, consideramos a equação

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + f(u) & \text{se } x \in (0, 1) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 & t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}x + Lx = f^e(x) \quad (6)$$

onde L é um operador setorial com $D(L) \subset H^1([0, 1])$ e $f^e(x)$ é uma função localmente lipschitziana. Usando estas características de L e $f^e(x)$, provamos que (5) gera um C^2 -semigrupo em $H^1([0, 1])$, o qual possui estrutura gradiente e atrator global. Esta prova é semelhante a que está em [1] para condições de contorno de Dirichlet, com as devidas adaptações.

Com as condições de contorno colocadas em (5), os sistemas n -dimensionais de EDO's gerados pela discretização espacial são do tipo

$$U' + aLU - f(U) = 0$$

onde L é uma matriz simétrica não negativa, com um autovalor nulo.

Introduzimos, então, uma norma conveniente em $\mathbb{R}^n$, e provamos que o conjunto de pontos

de equilíbrio e o atrator global deste sistema são limitados independentemente de n nessa norma, o que implica, em particular, limitação na norma do máximo.

No capítulo 4, fazemos um estudo análogo para a equação escalar hiperbólica

$$u_{tt} + 2au_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in (0, 1), \quad t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

com condições de contorno de Neumann. Para (7), com condições de contorno de Dirichlet, demonstra-se em [10] a existência de atrator global.

Reescrevemos a equação (7) como

$$\frac{d}{dt}(x, y) + J(x, y) + (0, f^e(x)) = 0 \quad (8)$$

onde J é um operador linear gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo. Provamos que (8) gera um C^1 -semigrupo em $H^1([0, 1]) \times L^2([0, 1])$, que mostramos possuir estrutura gradiente e admitir um atrator global.

A discretização espacial origina sistemas de EDO's em $\mathbb{R}^{2n}$ do tipo

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \frac{1}{n^2}I \\ -L & \frac{-2a}{n^2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} 0 \\ f(U) \end{bmatrix}$$

onde O denota a matriz $n \times n$ nula, I a matriz identidade $n \times n$ e L e $f(U)$ são como no sistema anterior.

Estes sistemas originam um C^2 -semigrupo, o qual é sistema gradiente e possui um atrator global. Mostramos que este atrator é limitado, independentemente de n , usando uma norma conveniente.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 reunimos informações sobre operadores lineares dissipativos e setoriais e semigrupos por eles gerados. No capítulo 2, demonstramos resultados sobre C^r -semigrupos necessários para provar a existência de atrator global para os semigrupos estudados nos capítulos 3 e 4. No capítulo 3 estudamos o semigrupo gerado pela equação (5) e pela equação que surge da sua discretização. No capítulo 4, fazemos o estudo análogo para a equação (7).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Operadores Dissipativos e Semigrupos

Definição 1.1 Sejam X um espaço de Banach e $L : D(L) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. O *conjunto resolvente* de L , $\rho(L)$, é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - L$ é invertível, isto é, o *operador resolvente*

$$R(\lambda : L) = (\lambda I - L)^{-1}$$

é um operador linear limitado em X .

O conjunto $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ é chamado o *espectro* de L .

Consideraremos apenas espaços de Banach reais, com a convenção de que a teoria espectral é feita na complexificação. O dual de X será denotado por X^* e o valor de $y \in X^*$ em $x \in X$ será denotado por $\langle y, x \rangle$.

Definição 1.2 Um operador L definido num espaço de Hilbert é chamado *operador dissipativo* se $\forall x \in D(L)$, $\operatorname{Re} \langle Lx, x \rangle \leq 0$.

Definição 1.3 Um C^0 -*semigrupo* num espaço de Banach X é uma família de operadores lineares contínuos definidos em X , $T(t), t \geq 0$, satisfazendo

(i) $T(0) = I$

- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t \geq 0$, $s \geq 0$
- (iii) $T(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$ para cada $x \in X$.

Definição 1.4 O gerador infinitesimal L de um C^0 -semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$ é definido por

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

sendo seu domínio formado por todos os pontos de X para os quais este limite existe. Usualmente, escrevemos $T(t) = e^{Lt}$.

Nesta e na próxima seção reunimos alguns resultados sobre C^0 -semigrupos, os quais estão demonstrados em [2].

Enunciamos a seguir o teorema de Lumer-Phillips para espaços de Hilbert. A versão desse teorema para espaços de Banach pode ser encontrada em [2], com uma definição conveniente de operador dissipativo.

Teorema 1.1 (*Lumer-Phillips*) Seja L um operador linear com domínio denso $D(L)$ em um espaço de Hilbert X .

- a) Se L é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ para o qual a imagem de $\lambda_0 I - L$ é X , então L é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações em X (isto é, $\|e^{Lt}\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$).
- b) Se L é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações em X , então L é dissipativo e $\text{Im}(\lambda I - L) = X$ para cada $\lambda > 0$. Além disso, para todo $x \in D(L)$, $\text{Re}\langle Lx, x \rangle \leq 0$.

Teorema 1.2 Seja e^{Lt} , $t \geq 0$ um C^0 -semigrupo em um espaço de Banach X com gerador L , e seja J um operador linear limitado em X . Então $L+J : D(L) \subset X \rightarrow X$ é o gerador de um C^0 -semigrupo $e^{(L+J)t}$, $t \geq 0$. Se $\|e^{Lt}\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$, então $\|e^{(L+J)t}\| \leq Me^{(\omega+M\|J\|)t}$, para todo $t \geq 0$.

1.2 Existência, Unicidade e Continuidade

Definição 1.5 Seja X um espaço de Banach, e^{Lt} , $t \geq 0$ um C^0 -semigrupo em X gerado por L , $U \subset \mathbb{R} \times X$ e $f : U \rightarrow X$.

Uma *solução estrita* em (t_0, t_1) de uma equação do tipo

$$\frac{d}{dt}x = Lx + f(t, x) \quad (1.1)$$

é uma função de classe C^1 $x : (t_0, t_1) \rightarrow X$ tal que $(t, x(t)) \in U$ e $x(t) \in D(L)$ e x satisfaz a equação em (t_0, t_1) .

Uma *solução branda* (*mild solution*) em (t_0, t_1) é função contínua $x : (t_0, t_1) \rightarrow X$ tal que $(t, x(t)) \in U$ e para qualquer $\xi \in D(L^*)$, a aplicação $t \mapsto \langle \xi, x(t) \rangle$ é diferenciável com $\frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle = \langle L^* \xi, x(t) \rangle + \langle \xi, f(t, x(t)) \rangle$ em (t_0, t_1) .

Se um valor inicial $x(t_0) = x_0$ está especificado, em ambos os casos, exigimos que a solução seja contínua quando $t \rightarrow t_0+$.

Teorema 1.3 Sejam e^{Lt} , $t \geq 0$, um C^0 -semigrupo em um espaço de Banach X , $U \subset \mathbb{R} \times X$ aberto e $f : U \rightarrow X$ contínua e localmente lipschitziana no segundo argumento (isto é, dado $(t_0, x_0) \in U$, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ de forma que, se $|t - t_0| \leq \delta$, $\|x - x_0\| \leq \delta$ e $\|y - y_0\| \leq \delta$, então $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M\|x - y\|$).

Então, dado $(t_0, x_0) \in U$, existe $t_1 > t_0$ e uma solução branda $x : (t_0, t_1) \rightarrow X$ de (1.1) com $x(t) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow t_0^+$. Qualquer solução branda $\bar{x} : (t_0, \bar{t}_1) \rightarrow X$ com $\bar{x}(t) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow t_0^+$ satisfaz $\bar{x}(t) = x(t)$ para $t_0 \leq t \leq \min(t_1, \bar{t}_1)$.

Teorema 1.4 Sejam X , L , U e f como no teorema 1.3. Para cada (t_0, x_0) existe uma única solução branda máxima $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$. (Isto é, qualquer outra solução branda com valor inicial $x(t_0) = x_0$ é a restrição de x a um subintervalo de $[t_0, t_1)$.)

Suponhamos $t_1 < \infty$. Então ocorre uma das duas situações: ou existe $x_1 \in X$ tal que $(t_1, x_1) \in \partial U$ e $x(t) \rightarrow x_1$ quando $t \rightarrow t_1^-$; ou

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{\|f(t, x(t))\|}{(1 + \|x(t)\|)} = \infty.$$

Se $U = \mathbb{R} \times X$ e a imagem por f de cada subconjunto limitado e fechado de U é um subconjunto limitado de X , o segundo caso ocorre somente se $\overline{\lim}_{t \rightarrow t_1^-} \|x(t)\| = \infty$.

Teorema 1.5 Seja e^{Lt} , $t \geq 0$ um C^0 -semigrupo em um espaço de Banach X , $U \subset \mathbb{R} \times X$ e $f : U \rightarrow X$ contínua. Seja $x(t)$ uma solução branda da equação (1.1). São equivalentes

- i) $x(t)$ é uma solução estrita em (t_0, t_1) .
- ii) $x(t)$ é continuamente diferenciável em (t_0, t_1) .
- iii) $x(t) \in D(L)$ com $t \mapsto Lx(t)$ contínua em (t_0, t_1) .

Teorema 1.6 Sejam X um espaço de Banach e L o gerador infinitesimal do C^0 -semigrupo e^{Lt} , $t \geq 0$. Sejam, ainda, $U \subset \mathbb{R} \times X$, U aberto e $f : U \rightarrow X$ contínua, localmente lipschitziana no segundo argumento. Suponhamos que $x \mapsto f(t, x)$ é m vezes diferenciável $(t, x) \mapsto \partial_x^k f(t, x)$, $0 \leq k \leq m$ contínua em U e $\|\partial_x^m f(t, x+h) - \partial_x^m f(t, x)\| = O(\|h\|^\mu)$ ou $\|\partial_x^m f(t, x+h) - \partial_x^m f(t, x)\| = o(\|h\|^\mu)$ quando $h \mapsto 0$, $x \rightarrow x_0$, $t \rightarrow t_0$, para qualquer $(t_0, x_0) \in U$ e $\mu \in (0, 1)$ fixo. (Dizemos que $x \mapsto f(t, x)$ é $C^{m+\mu}$ ou $C^{m-\mu}$). Suponhamos, ainda, que $x(t; t_0, x_0)$ é a solução branda de (1.1) definida em (t_0, t_1) . Então $h \mapsto x(t; t_0, x_0 + h)$ é $C^{m+\mu}$ ou $C^{m-\mu}$ respectivamente, uniformemente para $t_0 \leq t \leq t_2 < t_1$. Além disso, $\frac{\partial}{\partial x_0} x(t; t_0, x_0) = J(t)$ é um operador linear contínuo em X e é a solução branda de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t)h &= LJ(t)h + \partial_x f(t, x(t, (t_0, x_0)))J(t)h, \quad t \in (t_0, t_2], \\ J(t_0)h &= h. \end{aligned}$$

1.3 Operadores Setoriais, Potências Fracionárias e Semigrupos Analíticos

Definição 1.6 Seja L um operador linear definido num espaço de Banach X . Dizemos que L é um *operador setorial* se é fechado, seu domínio é denso em X e existem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $b \in \mathbb{R}$, de forma que o setor

$$S_{b, \theta} = \{z \mid \theta \leq |\arg(z - b)| \leq \pi, z \neq b\}$$

está contido no conjunto resolvente de L e

$$\| (zI - L)^{-1} \| \leq \frac{M}{|z - b|}$$

para todo $z \in S_{b,\theta}$.

Definição 1.7 Seja $T(t)$, $t \geq 0$ um C^0 -semigrupo definido num espaço de Banach X . Dizemos que $T(t)$, $t \geq 0$ é um *semigrupo analítico* em X se, para cada $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é uma aplicação analítica para $0 < t < \infty$.

O próximo teorema encontra-se demonstrado em [3].

Teorema 1.7 Se L é um operador setorial, então $-L$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico e^{-Lt} , $t \geq 0$, onde

$$e^{-tL} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda + L)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

sendo γ um contorno em $\rho(-L)$ com $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$ para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Definição 1.8 Seja L um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(L) > 0$. Para cada $\alpha > 0$, definimos

$$L^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-Lt} dt,$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Definimos também $L^\alpha = (L^{-\alpha})^{-1}$ com $D(L^\alpha) = \text{Im}(L^{-\alpha})$ e $L^0 = I$.

Definição 1.9 Seja L um operador setorial em um espaço de Banach X . Para cada $\alpha \geq 0$, definimos

$$X^\alpha = D(L_1^\alpha)$$

com a norma do gráfico, ou seja, $\|x\|_{X^\alpha} = \|L_1^\alpha x\|$ onde $L_1 = L + aI$ com a escolhido de forma que $\text{Re } \sigma(L_1) > 0$. Podemos provar que diferentes escolhas de a definem normas equivalentes ([3, pag 28]).

1.4 Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Seja L um operador setorial em um espaço de Banach X para o qual as potências fracionárias de $L_1 = L + aI$ estão bem definidas para algum $a \in \mathbb{R}$ e os espaços $X^\alpha = D(L_1^\alpha)$ com a norma do gráfico

$$\|x\|_{X^\alpha} = \|L_1^\alpha x\|$$

estão definidos para cada $\alpha \geq 0$. Seja $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, aberto e $f : U \rightarrow X$ uma função localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em x . Ou seja, para cada $(t_0, x_0) \in U$, existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) , $V \subset U$ e constantes $M > 0$, $\beta > 0$ tais que para $(t, x) \in V$, $(s, y) \in V$,

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq M(|t - s|^\beta + \|x - y\|_\alpha).$$

Consideramos, então, a seguinte equação não linear

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x + Lx &= f(t, x), \quad t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

A definição abaixo encontra-se em [5].

Definição 1.10 Uma *solução* da equação não-linear (1.2) em $[t_0, \tau)$ é uma função contínua $x : [t_0, \tau) \rightarrow X^\alpha$, com $x(t_0) = x_0$, tal que $f(t, x(\cdot)) : [t_0, \tau) \rightarrow X$ é contínua, $x(t) \in D(L)$, existe $\frac{d}{dt}x(t)$ e x satisfaz (1.2) em (t_0, τ) .

Nesta seção reunimos alguns teoremas que garantem a existência e a unicidade das soluções para o problema (1.2) e tratam da dependência das mesmas em relação às condições iniciais. Demonstrações e maiores detalhes encontram-se em [3]. Limitamo-nos a demonstrar o teorema 1.10, o qual foi ligeiramente alterado.

Nesta seção X denota um espaço de Banach.

Lema 1.1 Se x é a solução de (1.2) em (t_0, t_1) , então

$$x(t) = e^{-L(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-L(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (1.3)$$

Reciprocamente, se x é uma função contínua de (t_0, t_1) em X^α e, para algum $\eta > 0$, $\int_{t_0}^{t_0+\eta} \|f(t, x(t))\|dt < \infty$ e, além disso, a equação integral (1.3) é satisfeita para $t \in (t_0, t_1)$, então $x(\cdot)$ é a solução da equação diferencial (1.2) em (t_0, t_1) .

Teorema 1.8 Seja L um operador setorial e $0 \leq \alpha < 1$. Seja também $f : U \rightarrow X$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $f(t, x)$ localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em x . Então para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe $\tau = \tau(t_0, x_0) > 0$ tal que a equação (1.2) tem uma única solução x em $(t_0, t_0 + \tau)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.9 Sejam L e f como no teorema 1.8 acima. Suponhamos que a imagem de cada $B \subset U$, B fechado e limitado, por f é um subconjunto limitado de X . Seja x a solução de (1.2) em (t_0, t_1) com t_1 sendo o maior possível, isto é, não existe uma solução de (1.2) em (t_0, t_2) se $t_2 > t_1$. Então temos $t_1 = \infty$ ou existe uma seqüência $t_n \rightarrow t_1^-$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $(t_n, x(t_n)) \rightarrow \partial U$. (Se U não for limitado, incluímos o ponto no infinito em ∂U .)

Teorema 1.10 Sejam L um operador setorial com resolvente compacto e f como no teorema 1.8. Suponhamos ainda que $f(\mathbb{R}^+ \times B)$ é um subconjunto limitado de X se B é um subconjunto limitado e fechado de X^α .

Se para todo $x_0 \in B$, $x(t; t_0, x_0)$ é uma solução de (1.2) em (t_0, ∞) para a qual existe $r = r(B)$ de forma que $\|x(t; t_0, x_0)\|_{X^\alpha} \leq r \ \forall \ t \geq t_0$, então $\bigcup_{x_0 \in B} \bigcup_{t \geq t_0} \{x(t; t_0, x_0)\}$ é um subconjunto relativamente compacto de X^α .

Demonstração: Se $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$ e B é subconjunto limitado de X^β , então B é um subconjunto relativamente compacto de X^α ([3, pag 29]).

É suficiente, portanto, mostrarmos que $\bigcup_{x_0 \in B} \bigcup_{t \geq t_0+1} \{x(t; t_0, x_0)\}$ é um subconjunto limitado de X^β .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\operatorname{Re} \sigma(L) > \delta > 0$ e que, para alguma constante C , $\|f(t, x(t; t_0, x_0))\| \leq C$ para todo $t \geq t_0$.

Usando

$$\|L^\alpha e^{-Lt}\| \leq k_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

onde k_α é uma constante [3, teo 1.4.3], se $k = k_{\beta-\alpha}$, temos

$$\|x(t; t_0, x_0)\|_{X^\beta} \leq k(t - t_0)^{-\beta-\alpha} e^{-\delta(t-t_0)} \|x_0\|_{X^\alpha} + kC \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} ds \leq K(r)$$

Logo, $\bigcup_{x_0 \in B} \bigcup_{t \geq t_0+1} \{x(t; t_0, x_0)\}$ é limitado em X^β . Então, $\bigcup_{x_0 \in B} \bigcup_{t \geq t_0} \{x(t; t_0, x_0)\}$ é limitado em X^β e relativamente compacto em X^α . ■

Teorema 1.11 Sejam L um operador setorial em X , $0 \leq \alpha < 1$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, Λ um subconjunto aberto de um espaço de Banach Y , $f : U \times \Lambda \rightarrow X$ contínua com $\partial_x f$, $\partial_\lambda f$ contínuas em $U \times \Lambda$ e $f(t, x, \lambda)$ localmente Hölder contínua em relação a t .

Para $\mu > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $(\tau, \xi) \in U$, seja $x(t) = x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ a solução de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x + \mu Lx &= f(t, x, \lambda), \quad t > \tau \\ x(\tau) &= \xi \end{aligned}$$

definida num intervalo máximo.

Então $(\xi, \lambda, \mu) \mapsto x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ é continuamente diferenciável em todo o domínio de existência da solução.

Corolário 1.1 Além das hipóteses do teorema 1.11 acima, suponhamos que a aplicação $(x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda)$ é de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) com derivadas contínuas em $U \times \Lambda$, ou

uniformemente analítica em t para (t, x, λ) em uma vizinhança de cada ponto de $U \times \Lambda$. Então a aplicação

$$(\xi, \lambda, \mu) \mapsto x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$$

é de classe C^r ou analítica no intervalo de existência.

Capítulo 2

Atratores e Conjuntos Invariantes para C^r -semigrupos

Neste capítulo estão reunidos alguns resultados encontrados em [1], com demonstrações baseadas nas próprias demonstrações ou sugestões dadas pelo autor, exceto onde houver comentários indicando outra fonte.

Definição 2.1 Sejam $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ e X um espaço métrico completo. Uma família de funções $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, é um C^0 -semigrupo não linear se:

- (i) $T(0) = I$
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t \geq 0$, $s \geq 0$
- (iii) $T(t)x$ é contínuo em (t, x) para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.

Se X é um espaço de Banach e $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, satisfaz (i), (ii), (iii) e

- (iii)' $T(t)x$ possui derivadas de Fréchet em relação a x contínuas até a ordem r , $r \geq 1$ para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$,

então $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, é um C^r -semigrupo não linear.

Observamos que na definição acima, $T(t)$ pode ser linear, mas essa é a nomenclatura comumente usada. No decorrer deste texto, sempre que não causar dúvida, nos referiremos a

C^r -semigrupos não lineares apenas como C^r -semigrupos. Além disso, sempre que falarmos em C^r -semigrupos com $r \geq 1$, estaremos considerando X como espaço de Banach. Se tivermos $r = 0$, X poderá ser apenas um espaço métrico completo, a menos que haja comentários em contrário.

Definição 2.2 Para $x \in X$ e um $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$, definimos a *órbita positiva* $\gamma^+(x)$ por x como: $\gamma^+(x) = \{T(t)x, t \geq 0\}$.

Uma *órbita negativa* por x é uma função $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e $\forall s \leq 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$. A *órbita negativa* $\gamma^-(x)$ é definida como a reunião de todas as órbitas negativas por x , ou seja,

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde $H(t, x) = \{y \in X \mid \exists \text{ uma órbita negativa por } x, \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ com } \phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}$.

Dizemos que existe uma *órbita completa* por x através de $T(t)$, $t \geq 0$ quando existe uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$. Definimos $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x)$.

Para $B \subset X$, definimos $\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x)$, $H(t, B) = \bigcup_{x \in B} H(t, x)$, $\gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x)$ e $\gamma(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma(x)$.

Definição 2.3 Para um conjunto $B \subset X$, definimos *conjunto ω -limite de B* e *conjunto α -limite de B* , denotados como $\omega(B)$ e $\alpha(B)$, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t, B)}$$

Definição 2.4 Uma ε -vizinhança de um subconjunto C de X é o conjunto aberto C_ε , definido por $C_\varepsilon = \bigcup_{x \in C} B_\varepsilon(x)$, onde $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$.

Definição 2.5 Dizemos que um conjunto $B \subset X$ *atrai* um conjunto $C \subset X$ através de $T(t)$, $t \geq 0$ se $\text{dist}(T(t)C, B) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, onde

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{y \in A} \inf_{x \in B} d(y, x)$$

Em outras palavras, B atrai C se, dado $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tal que $\forall t \geq M$, $T(t)C \subset B_\varepsilon$.

Definição 2.6 Um conjunto $S \subset X$ é dito *invariante* se, $\forall x \in S$, existe uma órbita completa por x contida em S .

Lema 2.1 Se $B \subset X$ é não vazio e $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, atrai B e é invariante. Se $\overline{\gamma^-(B)}$ é não vazio e compacto, então $\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante.

Demonstração: Se $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto e $B \subset X$ é não vazio, segue da definição que $\omega(B)$ é interseção de subconjuntos de X compactos e não vazios e, portanto, é não vazio e compacto.

Suponhamos, por absurdo, que $\omega(B)$ não atrai B . Então existem $\varepsilon > 0$ e seqüências $t_j \rightarrow \infty$ e (y_j) em B tais que $\text{dist}(T(t_j)y_j, \omega(B)) > \varepsilon \forall j \in \mathbb{N}$. Como $\{T(t_j)y_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$ que é compacto, podemos tomar uma subsequência $T(t_k)y_k \rightarrow y$ quando $k \rightarrow \infty$. Então $y \in \omega(B)$ e temos um absurdo! Logo $\omega(B)$ atrai B .

Observemos que, pela continuidade de $T(t)$, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B) \forall t \geq 0$. Portanto, para cada $x \in \omega(B)$, $\gamma^+(x) \subset \omega(B)$. Vamos mostrar que há também uma órbita negativa por x contida em $\omega(B)$.

Vamos verificar que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B) \forall t \geq 0$. Seja $y \in \omega(B)$. Sabemos que existe uma seqüência (x_j) em B e $t_j \rightarrow \infty$ quanto $t \rightarrow \infty$ de forma que $T(t_j)x_j \rightarrow y$. Dado $t > 0$, tomando $H_t = \{T(t_j - t)x_j, t_j \geq t\} \subset \bigcup_{t \geq 0} \overline{T(t)B}$ que é compacto e atraído por $\omega(B)$, podemos assumir que existe uma seqüência (x_n) em H_t tal que $x_n \rightarrow z$. Então $z \in \omega(B)$ e $T(t)x_n \rightarrow T(t)z = y \in T(t)\omega(B)$. Logo $\omega(B) \subset T(t)\omega(B) \forall t \geq 0$. Assim, $\omega(B) = T(t)\omega(B) \forall t \geq 0$.

Seja $x \in \omega(B)$. Então $x = T(1)y_1$ para algum $y_1 \in \omega(B)$. Mas $y_1 = T(2)y_2$ e assim sucessivamente, de forma que $x = T(n)y_n$, $n = 1, 2, \dots$. Assim, podemos definir uma órbita negativa para x da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi : (-\infty, 0] &\rightarrow X \\ \phi(s)x &= T(n+s)y_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, n > -s \end{aligned} \tag{2.1}$$

Devido à unicidade da órbita positiva por cada ponto de X , ϕ está bem definida. Além disso, $\phi(0) = x$ e $T(t)\phi(s)x = T(t+s)x \forall 0 \leq t \leq -s$.

Logo, para cada $x \in \omega(B)$, existe uma órbita completa por x contida em $\omega(B)$. Ou seja, $\omega(B)$ é invariante.

De modo análogo, provamos a afirmação feita para $\alpha(B)$. ■

Definição 2.7 Dizemos que um C^r -semigrupo, $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ é *assintoticamente liso* se para cada conjunto $B \subset X$ não vazio, fechado e limitado para o qual $T(t)B \subset B \forall t \geq 0$, existe um compacto $J \subset B$ o qual atrai B .

Definição 2.8 Dizemos que um C^r -semigrupo, $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ é *condicionalmente completamente contínuo* para cada $t \geq t_1$ se, para $t \geq t_1$ e cada conjunto B limitado para os quais o subconjunto de X $\{T(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ é limitado, temos $T(t)B$ relativamente compacto. $T(t)$ é *completamente contínuo* se é condicionalmente completamente contínuo e, para cada $t \geq 0$, o conjunto $\{T(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ é limitado se B é limitado.

Proposição 2.1 Um C^r -semigrupo $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$, condicionalmente completamente contínuo para $t \geq t_0 \geq 0$, é assintoticamente liso.

Demonstração: Se $T(t)$ $t \geq 0$ é condicionalmente completamente contínuo para cada $t \geq t_0$, então para cada $t \geq t_0$ e cada conjunto $B \subset X$ limitado para o qual $\{T(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ é limitado, $T(t)B$ é relativamente compacto.

Em particular, para todo $B \neq \emptyset$, B fechado e limitado, com $T(t)B \subset B \forall t \geq 0$, temos $\gamma^+(B) \subset B$ e, portanto, limitada. Ainda, $\{T(j)\gamma^+(B), 0 \leq j \leq r\} \subset B$ também é limitado e, consequentemente, $T(r)\gamma^+(B)$ é relativamente compacto para cada $r \geq t_0$.

Logo $\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$ é compacto e não vazio, está contido em B e atrai $T(t_0)B$, pelo lema 2.1. Então $\omega(B)$ atrai B e $T(t)$ $t \geq 0$ é assintoticamente liso. ■

Definição 2.9 Definimos a *medida de não-compactidade de Kuratowski* para cada subconjunto A limitado de um espaço métrico completo X por

$$\varrho(A) = \inf\{d \in \mathbb{R}^+ \mid A \text{ possui uma cobertura finita de diâmetro } < d\}$$

onde o diâmetro de A é dado por $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Teorema 2.1 Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço métrico completo X e ϱ a medida de não-compacidade de Kuratowski em X . Então ϱ satisfaz:

- a) $0 \leq \varrho(A) \leq \varrho(\overline{A}) \leq \text{diam}(A)$.
- b) $\varrho(A \cup B) = \max[\varrho(A), \varrho(B)]$.
- c) Se $A \subset B$, $\varrho(A) \leq \varrho(B)$.
- d) $\varrho(A) = 0$ para $A \subset X$ se, e somente se, A é relativamente compacto;
Se X é também um espaço linear,
- e) $\varrho(A + B) \leq \varrho(A) + \varrho(B)$.
- f) $\varrho(\text{co}A) = \varrho(A)$ onde $\text{co}A = \bigcap_{B \in C(X)} B$, onde $C(X) = \{B \subset X \mid B \text{ é convexo e } A \subset B\}$.

Demonstração: Lembramos que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$. As provas de a), de b) e de c) decorrem diretamente da definição. Para provarmos d), observamos que A é relativamente compacto se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ temos $\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{A}_j$, com $\text{diam}(A_j) < \varepsilon$ o que ocorre se, e somente se, $\varrho(A) = 0$.

As provas que seguem dos itens e) e f) foram transcritas de notas não publicadas de Daniel Henry.

Sejam $r > \varrho(A)$ e $s > \varrho(B)$; então $A \subset \bigcup_{j=1}^m A_j$ e $B \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$ com $\text{diam}(A_j) \leq r$ e $\text{diam}(B_k) \leq s$. Assim, $\text{diam}(A_j + B_k) \leq r + s$ e

$$A + B \subset \bigcup \{A_j + B_k \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}.$$

Logo $\varrho(A + B) \leq \varrho(A) + \varrho(B)$.

Como $A \subset \text{co}A$, basta mostrarmos que $\varrho(\text{co}A) \leq \varrho(A)$. Assumimos que $0 \in A$. Seja $r > \varrho(A)$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$, $\text{diam}(A_j) \leq r$. Desde que $\text{diam}(\text{co}A_j) = \text{diam}A_j$, podemos assumir que cada A_j é convexo e $A_j \cap A = \emptyset$, $j = 1, \dots, n$.

Observamos que $coA \subset co \bigcup_{j=1}^n A_j = \cup \{t_1 A_1 + \dots + t_n A_n \mid t = (t_1, \dots, t_n) \in \Delta\}$ onde $\Delta = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_j \geq 0 \text{ para cada } j \text{ e } t_1 + \dots + t_n = 1\}$. Como Δ é compacto, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $\{t^1, \dots, t^N\} \subset \Delta$ tal que $\min_{1 \leq l \leq N} \|t - t^l\| < \varepsilon$ para cada $t \in \Delta$. Se $t \in \Delta$, $\|t - t^l\| < \varepsilon$ para cada j e $t_1 A_1 + \dots + t_n A_n$ está contido em $B_{\bar{\varepsilon}}(0) + t_1^l A_1 + \dots + t_n^l A_n$, onde $\bar{\varepsilon} = n\varepsilon(\text{diam}(A) + r)$, usando o fato de que $\|a\| < r + \text{diam}(A)$, $\forall a \in \bigcup_{j=1}^n A_j$. (Lembremos que $0 \in A$ e $A_j \cap A \neq \emptyset$).

$$\text{Assim, } coA \subset \bigcup_{l=1}^N B_{\bar{\varepsilon}}(0) + t_1^l A_1 + \dots + t_n^l A_n \text{ e}$$

$$\text{diam}(B_{\bar{\varepsilon}}(0) + t_1^l A_1 + \dots + t_n^l A_n) \leq 2\bar{\varepsilon} + r(t_1^l + \dots + t_n^l) = r + 2\bar{\varepsilon}.$$

Logo, $\varrho(coA) \leq r + 2\varepsilon n(r + \text{diam} A)$. Como ε não depende de r , se $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $r \rightarrow \varrho(A)^+$. ■

O teorema abaixo e sua demonstração estão em notas não publicadas de Daniel Henry.

Teorema 2.2 Sejam $A_1 \supset A_2 \supset \dots A_n \supset \dots$ subconjuntos de um espaço métrico completo com $\varrho(A_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então $A_\infty = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ é não vazio e compacto.

Demonstração: Para provar que A_∞ é não vazio vamos provar que existe uma sequência (p_n) , $p_n \in A_n$, que possui uma sequência convergente cujo limite está em A_∞

Seja $\varepsilon_n = \varrho(A_n) + 1/n$. A sequência $(p_n) \subset A_1$ e também está contida numa união finita de conjuntos de diâmetro menor que ε_1 . Então um desses conjuntos contém infinitos termos da sequência. Assim, existe uma subsequência de (p_n) , (p_n^1) nesse conjunto e $p_n^1 \in A_2$ para $n \geq 2$. Analogamente existe uma subsequência (p_n^2) de (p_n^1) contida num conjunto de diâmetro menor que ε_2 . Continuando, contruímos sucessivamente subsequências (p_n^i) de (p_n^{i-1}) contidas em subconjuntos de A_i com diâmetro menor que ε_i .

Definimos $q_n = p_n^n$, uma subsequência diagonal. Então $\{q_n, n \geq m\}$ está contida num subconjunto contido em A_m de diâmetro menor que ε_m . Como $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, (q_n) é uma sequência de Cauchy e $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in A_n \forall n$. Logo $A_\infty \neq \emptyset$.

Decorre da definição que A_∞ é fechado. Usando a parte c) do teorema 2.1 concluímos que $\varrho(A_\infty) \leq \varrho(A_n) \forall n$. Então $\varrho(A_n) = 0$ e A_∞ é compacto. ■

Lema 2.2 Seja $T(t) = S(t) + U(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$, com $U(t)$, $t \geq 0$ completamente contínuo. Suponhamos ainda que exista $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $k(t, \rho) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $\|S(t)x\| \leq k(t, \rho)$ se $\|x\| \leq \rho$. Então $T(t)$, $t \geq 0$, é assintoticamente liso. (Se $r = 0$ e X é somente um espaço métrico completo, então $\|\cdot\| = d(\cdot, 0)$).

Demonstração: Seja ϱ a medida de não compacidade de Kuratowski definida em X . Sejam $B_r = \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ e $L_r = \{x \in B_r \mid T(t)x \in B_r \forall t \geq 0\}$.

Como $T(t)\gamma^+(L_r) = \gamma^+(L_r)$ e $\gamma^+(L_r) \subset B_r$, segue que $\|S(t)\gamma^+(L_r)\| \leq k(t, r)$ e $U(t)\gamma^+(L_r)$ é relativamente compacto, uma vez que $U(t)$, $t \geq 0$ é completamente contínuo. Então $\varrho(\gamma^+(T(t)L_r)) \leq \varrho(S(t)\gamma^+(L_r)) + \varrho(U(t)\gamma^+(L_r)) \leq k(t, r)$.

Como $\varrho(\overline{\gamma^+(T(t)L_r)}) = \varrho(\gamma^+(T(t)L_r))$ e $k(t, r) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, usando o teorema 2.2, concluímos que $\omega(L_r) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)L_r}$ é não vazio e compacto.

Verifiquemos que $\omega(L_r)$ atrai L_r . Suponhamos que isso não seja verdade. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(T(t_j)x_j)$ com $x_j \in L_r$ e $t_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ de forma que $T(t_j)x_j \notin \omega(L_r)_\varepsilon$ onde $\omega(L_r)_\varepsilon$ é uma ε -vizinhança de $\omega(L_r)$.

Seja $H_l = \{T(t_j)x_j \mid t_j \geq l\}$. Então $H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_n \supset \dots$ e

$$\varrho(\overline{H_l}) = \varrho(T(l)\{T(t_j - l)x_j, t_j \geq l\}) \leq \varrho(T(l)(L_r)) \leq k(l, r)$$

com $k(l, r) \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$. Assim $\bigcap_{l \geq 1} \overline{H_l}$ é compacto pelo teorema 2.2. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\overline{T(t_j)x_j} \rightarrow y$ quando $j \rightarrow \infty$. Logo $y \in \omega(L_r)$. Mas isso é uma contradição, pois $y \notin \omega(L_r)_\varepsilon$. Logo $\omega(L_r)$ atrai L_r .

Seja B um subconjunto limitado de X . Então $\exists r > 0$ tal que $B \subset B_r$. Portanto, $L(B) = \{x \in X \mid T(t)x \in B, t \geq 0\} \subset L_r$.

Como $\omega(L_r)$ atrai L_r , atrai $L(B)$. Então, $\omega(L(B)) \subset \omega(L_r)$ e é compacto, uma vez que $\omega(L_r)$ é compacto.

Além disso, de maneira semelhante a que provamos que $\omega(L_r)$ atrai L_r , podemos provar que $\omega(L(B))$ atrai $L(B)$.

Assim, se $L(B) = B$, $\omega(L(B)) = \omega(B) \subset B$ e $\omega(B)$ é compacto e atrai B . Logo, $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso. ■

Lema 2.3 Seja X um espaço de Banach. Se J é um subconjunto compacto invariante para um C^r -semigrupo, $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ que atrai subconjuntos compactos de X , então J é conexo.

Demonstração: Como J é compacto, seu fecho convexo, $\overline{\text{co}}J$ é conexo e compacto pois tem a mesma medida de Kuratowski de J , pelo teorema 2.1. Então, por hipótese, J atrai $\overline{\text{co}}J$.

Se J não é conexo, então existem abertos U e V de forma que $U \cap V = \emptyset$, $U \cap J \neq \emptyset$, $V \cap J \neq \emptyset$ e $J \subset U \cup V$.

Como $J \subset T(t)\overline{\text{co}}J$ para qualquer $t \geq 0$, temos $U \cap T(t)\overline{\text{co}}J \neq \emptyset$ $V \cap T(t)\overline{\text{co}}J \neq \emptyset$ para qualquer $t \geq 0$.

Pela continuidade de $T(t)$ em relação a t , $T(t)\overline{\text{co}}J$ é conexo para qualquer $t \geq 0$ e por isso podemos tomar uma sequência (x_n) de forma que $x_n \in T(n)\overline{\text{co}}J \setminus U \cap V$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como J atrai $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, existe uma subsequência que converge para um $x \in J$. Em outras palavras, podemos escolher x_n como acima de forma que $x_n \rightarrow x$, $x \in J$. Mas $x \notin U \cup V$, que é aberto, o que é uma contradição. Logo, J é conexo. ■

Definição 2.10 Seja $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$ e J um conjunto invariante por $T(t)$, $t \geq 0$. Dizemos que J é *estável* se, para cada vizinhança V de J , há uma vizinhança U de J tal que $T(t)U \subset V \forall t \geq 0$. Dizemos que J é *uniformemente assintoticamente estável* se J é estável e atrai uma vizinhança de J .

Definição 2.11 Seja $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$ e $A \subset X$, A compacto e invariante através de $T(t)$, $t \geq 0$. Dizemos que A é *compacto invariante maximal* para $T(t)$, $t \geq 0$, se todo o subconjunto B de X compacto e invariante através de $T(t)$, $t \geq 0$, está contido em A .

Observação 2.1 Segue diretamente da definição que se existe um subconjunto de X compacto invariante maximal para $T(t)$, $t \geq 0$, então é único.

Lema 2.4 Seja $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$. Se $H \subset X$ é compacto e existe $K \subset X$, tal que K é compacto e atrai H através de $T(t)$, $t \geq 0$, então $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto e $\omega(H) \subset K$.

Demonstração: Sejam H e K subconjuntos compactos de X tais que K atrai H .

Como K é compacto, pelo teorema 2.1, a medida de Kuratowski, $\varrho(K)$, é nula. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Como K atrai H , existe t_ε tal que $\forall t \geq t_\varepsilon$, $T(t)H \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Assim, se ϱ é a medida de Kuratowski em X , então $\varrho(\overline{\bigcup_{t \geq t_\varepsilon} T(t)H}) \leq \varepsilon$. Além disso, $\bigcup_{0 \leq t \leq t_\varepsilon} T(H) = T([0, t_\varepsilon] \times H)$ é compacto por ser imagem de um compacto por uma função contínua. Portanto, pelo teorema 2.1, $\varrho(\bigcup_{0 \leq t \leq t_\varepsilon} T(H)) \leq \varepsilon$. Então, pelo mesmo teorema, $\varrho(\overline{\gamma^+(H)}) = \varrho(\overline{\bigcup_{t \geq 0} T(t)H}) \leq \varepsilon$ e $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto.

Verifiquemos, ainda, que $\omega(H) \subset K$: Suponhamos, por absurdo, que $\omega(H) \not\subset K$. Então haveria $y \in \bigcup_{t \geq s} T(t)H \forall s \geq 0$ e $y \notin K$. Consequentemente, $\inf_{x \in K} d(y, x) > \delta > 0$. Absurdo, pois K atrai $\overline{H}$. ■

Teorema 2.3 Seja $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$ para o qual há um compacto $K \neq \emptyset$ que atrai os subconjuntos compactos de X e seja $A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$, então:

1. A independe de K e, se X é um espaço de Banach, A é conexo.
2. A é compacto invariante maximal de $T(t)$, $t \geq 0$.
3. A é estável e atrai os subconjuntos compactos de X .

Se, além disso, $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, então:

4. Para qualquer subconjunto compacto H de X , existe uma vizinhança H_1 de forma que $\gamma^+(H_1)$ é limitada e A atrai H_1 . Em particular, A é uniformemente assintoticamente estável.
5. Se C é um subconjunto de X tal que $\gamma^+(C)$ é limitada, então A atrai C .

Demonstração: Pelo lema 2.4, $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\omega(K) \subset K$. Concluimos, então, que $\omega(K) = \bigcap_{s \geq 0} T(s)\omega(K) \subset \bigcap_{s \geq 0} T(s)K = A$. Mas $A \subset \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} T(t)K = \omega(K)$. Logo $A = \omega(K)$.

Além disso, $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante, atrai os compactos de X pelo lema 2.1 e, pelo lema 2.3, é conexo se X é um espaço de Banach.

Observamos que, se $C \subset X$ é compacto, invariante através de $T(t)$, $t \geq 0$ e atrai os subconjuntos compactos de X , então $C = \omega(C) \subset K$. Uma vez que C é atraído por K , $\omega(C) = \omega(\omega(C)) \subset \omega(K)$. Analogamente, temos $\omega(K) \subset \omega(C)$. Assim, $A = \omega(K)$ é maximal e independe de K . Com isso, provamos 1 e 2 e que A atrai compactos.

Suponhamos, por absurdo, que A não é estável. Então, como A é compacto, dado um $\varepsilon > 0$, existe uma sequência (y_j) em X tal que $y_j \rightarrow y \in A$ quando $j \rightarrow \infty$, $T(t)y_j \in A_\varepsilon$ se $0 \leq t \leq j$ e $T(j+1)y_j \notin A_\varepsilon$. O conjunto $Y = \{y, y_j, j > 0\}$ é compacto e A atrai Y . Logo, $\overline{\gamma^+(Y)}$ é compacto e $\omega(Y) \subset A$.

Existe, portanto, uma sequência (y_j) em Y , tal que $T(t_j)y_j \rightarrow z$, $z \in \omega(Y) \subset A$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $T(z) \in \omega(Y) \subset A \forall t \geq 0$, $T(t+t_j)y_j \rightarrow T(t)z \in \omega(Y) \subset A \forall t \geq 0$. Absurdo, pois $T(1+j)y_j \notin A_\varepsilon$. Logo, A é estável.

Vamos provar 4. Como A é estável e compacto, para cada vizinhança V de A , existe um aberto limitado $W \supset A$ tal que $T(t)W \subset V \forall t \geq 0$. Seja $U = \bigcup_{t \geq 0} T(t)W$. Então $T(t)\overline{U} \subset \overline{U}$. Como A atrai compactos, para cada $H \subset X$ compacto, existe $t_0 = t_0(H, U)$ tal que $T(t)H \subset U \forall t \geq t_0$. Por H ser compacto e T ser contínua em t , existe uma vizinhança H_1 de H tal que $T(t_0)H_1 \subset U$. Como $T(t)U \subset U$, segue que $T(t)H_1 \subset U \forall t \geq t_0$.

Sabemos ainda que há um compacto $K \subset U$ que atrai U , uma vez que $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso. Por 3, A atrai K . Portanto, A atrai U e, em particular, atrai H_1 . Logo, 4 está provado.

Seja $C \subset X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitada. Como $T(t)\overline{\gamma^+(C)} \subset \overline{\gamma^+(C)}$ e $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, existe um compacto K , o qual atrai $\gamma^+(C)$. Por 3, A atrai K e, portanto, atrai C . ■

Definição 2.12 Um conjunto compacto invariante maximal para um C^r -semigrupo em X , $T(t)$, $t \geq 0$, $r \geq 0$, é chamado *atrator global* para $T(t)$, $t \geq 0$ se atrai cada subconjunto limitado de X .

Observação 2.2 Observamos que decorre diretamente da definição que se existe atrator global para um C^r -semigrupo, $r \geq 0$, então é único.

Definição 2.13 Um *ponto de equilíbrio* de um C^r -semigrupo, $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ é um ponto $x \in X$ tal que $T(t)x = x \forall t \geq 0$. Denotaremos por E o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de $T(t)$, $t \geq 0$.

Definição 2.14 Um C^r -semigrupo $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$ é um *sistema gradiente* se satisfaz as condições abaixo:

- (i) Cada órbita positiva é relativamente compacta.
- (ii) Existe uma função de Lyapunov para $T(t)$, $t \geq 0$, ou seja, existe uma função contínua $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
 - (ii.1) $V(x)$ é limitada inferiormente.
 - (ii.2) $V(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$.
 - (ii.3) $V(T(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$.
 - (ii.4) Se $T(t)x$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x) \forall t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio de $T(t)$, $t \geq 0$.

Lema 2.5 Se um C^r -semigrupo $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$ é um sistema gradiente, então para qualquer $x \in X$, $\omega(x) \subset E$. Se $\gamma^-(x)$ é uma órbita precompacta por x , então $\alpha(x) \subset E$.

Demonstração: Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de Lyapunov para $T(t)$, $t \geq 0$. Pela definição 2.14, para cada $x \in X$, $V(T(t)x)$ é não crescente em t e limitada inferiormente. Logo, existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(T(t)x) = e.$$

Como $\gamma^+(x)$ é precompacta, $\omega(x)$ é não vazio, compacto e invariante, pelo lema 2.1. Se $v \in \omega(x)$, $\exists t_k \rightarrow \infty$ tal que $v = \lim_{k \rightarrow \infty} T(t_k)x$. Pela continuidade da função V , temos $V(v) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(T(t_k)x) = e$. Pela invariância de $\omega(x)$, temos $\gamma(v) \subset \omega(x) \forall v \in \omega(x)$. Então $V(T(t)v) = V(v) = e \forall t \geq 0$. Logo, pela definição 2.14, para cada $x \in X$, $\omega(x) \subset E$.

Suponhamos $\gamma^-(x)$ relativamente compacta e $x \notin E$. Então $\alpha(x)$ é compacto. Se $y \in \alpha(x)$, então existe uma sequência com $T(t_n)x \rightarrow y$. Escolhendo (t_n) de forma que $t_n - t_{n-1} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$V(T(t)(T(t_n + t)x)) \leq V(T(t_n)x) \quad \forall n$$

e então $V(T(t_n + t)x) \rightarrow V(y)$ como $n \rightarrow \infty$. Segue que $V(T(t)y) = V(y) \quad \forall t \in (0, 1)$ e, assim, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo $y \in E$. ■

Definição 2.15 Um C^r -semigrupo $T : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ é:

1. *pontualmente dissipativo* se existe um conjunto $B \subset X$ limitado que atrai cada ponto de X por $T(t)$, $t \geq 0$.
2. *compacto dissipativo* se X limitado o qual atrai cada subconjunto compacto de X por $T(t)$, $t \geq 0$.
3. *localmente compacto dissipativo* se existe $B \subset X$ limitado, o qual atrai uma vizinhança de cada subconjunto compacto de X por $T(t)$, $t \geq 0$.
4. *limitado dissipativo* se X limitado que atrai cada subconjunto limitado de X por $T(t)$, $t \geq 0$.

Lema 2.6 Se $T(t) : X \rightarrow X$ é um C^r -semigrupo, $r \geq 0$ assintoticamente liso e compacto dissipativo, então subconjunto compacto e invariante de X o qual atrai os subconjuntos compactos de X .

Demonstração: Do fato de ser compacto dissipativo decorre que há um conjunto C limitado que atrai os subcompactos de X .

Seja C_ε uma ε -vizinhança de C , $C_\varepsilon = \{x \in C_\varepsilon \mid T(t)x \in C_\varepsilon \quad \forall t \geq 0\}$. Observamos que $T(t)\overline{C_\varepsilon} \subset \overline{C_\varepsilon} \quad \forall t \geq 0$. Como $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, há um compacto K que atrai $\overline{C_\varepsilon}$. Logo K atrai todos os subconjuntos compactos de X . Aplicando o teorema 2.3, concluímos que existe um compacto que atrai os subconjuntos compactos de X . ■

Lema 2.7 Seja $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, um C^r -semigrupo, $r \geq 0$ assintoticamente liso e pontualmente dissipativo. Se a órbita de qualquer compacto é limitada, então $T(t)$, $t \geq 0$ é localmente compacto dissipativo.

Demonstração: Como $T(t)$, $t \geq 0$ é pontualmente dissipativo, existe $B \neq \emptyset$, fechado e limitado que atrai cada ponto de X .

Seja B_ε uma ε -vizinhança de B e $U^\varepsilon = \{x \in B_\varepsilon \mid \gamma^+(x) \subset B_\varepsilon\}$. Observamos que $\gamma^+(U^\varepsilon) = U^\varepsilon$ é limitado e atrai cada ponto de X . Como $T(t)U^\varepsilon \subset U^\varepsilon \forall t \geq 0$ e $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, há um conjunto compacto $K \subset \overline{U^\varepsilon}$ tal que K atrai U^ε e portanto também atrai cada ponto de X . Em particular, K atrai a si mesmo e então $\gamma^+(K)$ é relativamente compacta. Seja $J = \omega(K)$. Então J é compacto e invariante e atrai cada ponto de X .

Suponhamos, agora, que a órbita de qualquer compacto é limitada. Afirmamos, então, que há uma vizinhança V de J de forma que $\gamma^+(V)$ é limitada. De fato, se não fosse assim, existiriam seqüências $x_n \in X$ e $t_n \rightarrow \infty$ e $y \in J$ tal que $x_n \rightarrow y$ e $\|T(t_n)x_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas assim, $\{x_n, n \geq 1\}$ seria um compacto com uma órbita não limitada, o que contradiz a hipótese. Logo, há uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitada.

Como J atrai cada ponto de X e $T(t)$, $t \geq 0$ é contínuo em relação a x , para cada $x \in X$, existe uma vizinhança V_x de x e $t_0 = t_0(x) > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, $T(t)V_x \subset \gamma^+(V)$, ou seja, $\gamma^+(V)$ atrai V_x . Para todo compacto H , encontra-se uma cobertura finita de H e assim um aberto H_1 que contém H e é atraído por $\gamma^+(V)$. Com isso concluímos que $T(t)$, $t \geq 0$ é localmente compacto dissipativo. ■

Teorema 2.4 Se um C^r -semigrupo $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, $r \geq 0$ é assintoticamente liso, pontualmente dissipativo e órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então $T(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global. Se, além disso, X é um espaço de Banach, então o atrator global é conexo.

Demonstração: Pelo lema 2.7, $T(t)$, $t \geq 0$ é localmente compacto dissipativo, portanto, compacto dissipativo. Então, pelo lema 2.6, há um compacto invariante que atrai subconjuntos compactos de X . Usando o teorema 2.3, provamos que existe atrator global, o qual é conexo se X for um espaço de Banach. ■

Definição 2.16 Sejam X um espaço de Banach e $T(t)$, $t \geq 0$ um C^r -semigrupo em X , $r \geq 1$. Seja $x \in X$ um ponto de equilíbrio de $T(t)$, $t \geq 0$. Se o espectro de $DT(t)x$, $\sigma(DT(t)x)$ satisfaz $\sigma(DT(t)x) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \emptyset$, dizemos que x é um *ponto de equilíbrio hiperbólico* de $T(t)$, $t \geq 0$.

Observação 2.3 Seja $T(t)$, $t \geq 0$ e X como na definição 2.16 acima. Definimos a função $\varphi_t : X \rightarrow X$, $\varphi_t(y) = T(t)y - y$. Se x é um ponto de equilíbrio de $T(t)$, $t \geq 0$, então $\varphi_t(x) = T(t)x - x = 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Se x é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $T(t)$ $t \geq 0$, $\det(D\varphi_t(x)) = \det(D(T(t)x) - I) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, como φ_t é de classe C^1 , pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de x de forma que $\varphi_t|_V$ é um difeomorfismo $\forall t \geq 0$. Logo, $\forall y \in V$, $\varphi(y) \neq 0$ e x é um ponto de equilíbrio isolado de $T(t)$, $t \geq 0$.

Teorema 2.5 Se um C^r -semigrupo $T(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, é sistema gradiente, assintoticamente liso e E é limitado, então $T(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global A , o qual é dado por $A = W^u(E) = \{y \in X \mid T(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ e } T(-t)y \rightarrow E \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$.

Se X é um espaço de Banach, então A é conexo. Se, além disso, cada elemento de E é hiperbólico, então E é um conjunto finito e

$$A = \bigcup_{x \in E} W^u(x).$$

Demonstração: Como $T(t)$, $t \geq 0$ é um sistema gradiente, os lemas 2.5 e 2.1 e o fato de que E é limitado determinam que $T(t)$, $t \geq 0$ é pontualmente dissipativo.

As condições em V dadas na definição 2.14, implicam que órbitas de conjuntos limitados são limitadas e então, usando o teorema 2.4, podemos concluir que o atrator global A existe e é conexo se X é um espaço de Banach.

Como E é um conjunto invariante e limitado, $E \subset A$. Se $x \in W^u(E)$, então $T(-t)x \rightarrow A$ e $T(t)x \rightarrow A$ quando $t \rightarrow \infty$. Então $\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} T(t)x}$ é compacto e invariante. Logo $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} T(t)x \subset A$. Em particular, $x \in A$.

A é compacto. Então A é um espaço de Banach e $T^A(t) = T(t)|_A$, $t \geq 0$, é um C^r -semigrupo.

Para cada $x \in A$, seja $\gamma_{T^A}^-(x)$ a órbita negativa de $T^A(t)$, $t \geq 0$, por x . Observamos que $\gamma_{T^A}^-(x)$ é não vazia, uma vez que A é invariante por $T(t)$, $t \geq 0$. Ainda, $\overline{\gamma_{T^A}^-(x)}$ é compacto. Assim, pelo lema 2.5, $\alpha_{T^A}(x) \subset E$. Logo $x \in W^u(E)$.

Assim, temos $A = W^u(E)$.

Além disso, se todos os pontos de equilíbrio de $T(t)$ $t \geq 0$ são hiperbólicos, pela observação 2.3, são isolados. Então, como $E \subset A$ e A é compacto, E é finito e $A = \bigcup_{x \in E} W^u(x)$. ■

Capítulo 3

Uma Equação Escalar Parabólica

Consideramos neste capítulo a seguinte equação escalar parabólica

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + f(u), & 0 < x < 1 \\ u_x &= 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $a > 0$ e $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} < -\delta \quad (3.2)$$

para algum $\delta > 0$.

Na seção 3.1 mostramos, de maneira análoga a que se encontra em [1], que as soluções da equação (3.1) geram um C^1 -semigrupo em $H^1([0, 1])$, o qual possui atrator global.

Na seção 3.2, estudamos os C^2 -semigrupos definidos pelas soluções dos sistemas de EDO's que surgem a partir da discretização espacial desta equação. Este problema já foi considerado por [8] com condições de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ e fazemos aqui um estudo semelhante. Porém, a demonstração da existência de atrator global limitado, independentemente de n , para estes C^2 -semigrupos usa a teoria exposta no capítulo 2 e difere daquela apresentada em [8].

3.1 O Problema Contínuo

Seja $X = L^2([0, 1])$. Definimos

$$\begin{aligned} L : D(L) \subset X &\rightarrow X \\ L\phi(x) &= -a\phi'' \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $D(L) = H_N^2 = \{\phi \in H^2([0, 1]) \mid \phi'(0) = \phi'(1) = 0\}$.

Definimos também a função

$$\begin{aligned} f^e : H^1([0, 1]) &\rightarrow L^2([0, 1]) \\ f^e(\phi)(x) &= f(\phi(x)), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sejam

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2} = \int_0^1 \phi(x) \psi(x) dx$$

o produto interno em $L^2([0, 1])$,

$$\langle \phi, \psi \rangle_{H^1} = \int_0^1 \phi(x) \psi(x) dx + \int_0^1 \phi'(x) \psi'(x) dx$$

o produto interno em $H^1([0, 1])$ e

$$\langle \phi, \psi \rangle_{H_N^2} = \int_0^1 \phi(x) \psi(x) dx + \int_0^1 \phi'(x) \psi'(x) dx + \int_0^1 \phi''(x) \psi''(x) dx$$

o produto interno em H_N^2 . Definimos

$$\|\phi\|_{L^2} = (\langle \phi, \phi \rangle_{L^2})^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\phi\|_{H^1} = (\langle \phi, \phi \rangle_{H^1})^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\phi\|_{H_N^2} = (\langle \phi, \phi \rangle_{H_N^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Reescrevemos a equação (3.1) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u &= -Lu + f^e(u) \\ u(0) &= u_0 \quad \left(\text{de onde ? ?} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vamos mostrar que o operador L definido acima é setorial, com $\operatorname{Re} \sigma(L) \geq 0$. Assim, $(L + aI)^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, com domínio $D((L + aI)^{\frac{1}{2}}) = X^{\frac{1}{2}} = H^1([0, 1])$. Mostramos também que a função $f^e : H^1([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ definida em (3.4) é localmente lipschitziana. Logo, o problema (3.5) está nas condições do problema (1.2).

Em muitas demonstrações no decorrer deste e do próximo capítulo estaremos usando integração por partes de funções cuja diferencial está em $L^2([0, 1])$. O próximo lema nos garante que este método pode ser aplicado.

Lema 3.1 Sejam $\phi, \psi \in H^1([0, 1])$. Então

$$\int_0^1 \phi'(x)\psi(x)dx = [\phi(1)\psi(1) - \phi(0)\psi(0)] - \int_0^1 \phi(x)\psi'(x)dx.$$

Demonstração: Verifiquemos, em primeiro lugar, que se $\phi \in H^1([0, 1])$, então ϕ é contínua.

De fato, se $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 &= \left| \int_y^x \phi'(s)ds \right|^2 = \left| \int_y^x \phi'(s) \cdot 1 ds \right|^2 \leq \\ &\leq \int_y^x |\phi'(s)|^2 ds \cdot \int_y^x 1 ds \\ &\leq \|\phi'\|_{L^2}^2 |y - x| \end{aligned}$$

Portanto, $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \|\phi'\|_{L^2} |y - x|^{\frac{1}{2}} \forall x, y \in [0, 1]$. Logo, ϕ é contínua.

Desde que $C^\infty([0, 1])$ é denso em $H^1([0, 1])$ (como podemos verificar em [7]), existem seqüências $(\phi_n), (\psi_n)$ em $C^\infty([0, 1])$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\psi_n \rightarrow \psi$ em $H^1([0, 1])$, quando $n \rightarrow \infty$. Para estas seqüências temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \phi'_n(x)\psi_n(x)dx = [\phi_n(1)\psi_n(1) - \phi_n(0)\psi_n(0)] - \int_0^1 \phi_n(x)\psi'_n(x)dx.$$

Mas, observamos que

$$\left| \int_0^1 \phi'_n(x)\psi'_n(x)dx - \int_0^1 \phi(x)\psi'(x)dx \right| \leq \|\phi_n - \phi\|_{L^2} \|\psi'_n\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} \|\psi'_n - \psi'\|_{L^2} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo $\int_0^1 \phi'_n(x)\psi'_n(x)dx \rightarrow \int_0^1 \phi(x)\psi'(x)dx$. De modo análogo, provamos que $\int_0^1 \phi'_n(x)\psi_n(x)dx \rightarrow \int_0^1 \phi'(x)\psi(x)dx$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como já sabemos que ϕ e ψ são contínuas, podemos concluir também que para cada $x \in [0, 1]$, $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$ e $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Logo,

$$\int_0^1 \phi'(x)\psi(x)dx = [\phi(1)\psi(1) - \phi(0)\psi(0)] - \int_0^1 \phi(x)\psi'(x)dx. \quad \blacksquare$$

Lema 3.2 Seja $\{\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi x, n = 0, 1, \dots\}$, base ortonormal em $L^2([0, 1])$ e $\phi \in H_N^2$. Se $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ em $L^2([0, 1])$, onde $a_n = \langle \phi, \varphi_n \rangle_{L^2}$, então

$$\|\phi\|_{H^1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 (1 + \pi^2 n^2) \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \|\phi\|_{H_N^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 (1 + \pi^2 n^2 + \pi^4 n^4) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Reciprocamente, se $\phi \in L^2([0, 1])$, $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ e $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, então $\phi \in H^1([0, 1])$. E, se $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2 + \pi^4 n^4) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, então $\phi \in H_N^2$.

Demonstração: Suponhamos que $\phi \in H_N^2$ e $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ em $L^2([0, 1])$. Observamos que $\{\psi_n = (1 + \pi^2 n^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma base ortonormal em $H^1([0, 1])$. Como $\phi \in H^1([0, 1])$, temos $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n$ em $H^1([0, 1])$, onde

$$b_n = \langle \phi, \psi_n \rangle_{H^1} = (1 + \pi^2 n^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \phi(x) \varphi_n(x) + \phi'(x) \varphi_n'(x) dx$$

Usando o lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(x) \varphi_n(x) + \phi'(x) \varphi_n'(x) dx &= \int_0^1 \phi(x) \varphi_n(x) - \phi(x) \varphi_n''(x) dx \\ &= \int_0^1 \phi(x) \sqrt{2} \cos n\pi x + \pi^2 n^2 \phi(x) \sqrt{2} \cos n\pi x dx \\ &= (1 + \pi^2 n^2) a_n. \end{aligned}$$

Portanto, $b_n = (1 + \pi^2 n^2)^{\frac{1}{2}} a_n$. Logo,

$$\|\phi\|_{H^1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, $\{\zeta_n = (1 + \pi^2 n^2 + \pi^4 n^4)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n, n = 0, 1, 2\}$ é uma base ortonormal em H_N^2 e, de modo análogo, provamos que

$$\|\phi\|_{H^1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2 + \pi^4 n^4) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Reciprocamente, se $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ em $L^2([0, 1])$ e $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, então

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 + \pi^2 n^2)^{\frac{1}{2}} \psi_n.$$

Como a soma à direita converge para uma função $\psi \in H^1([0, 1])$, concluímos que $\phi \in H^1([0, 1])$.

De modo análogo, se $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2 + \pi^4 n^4) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, $\phi \in H_N^2$. ■

Proposição 3.1 O operador linear L definido em (3.3) é autoadjunto.

Demonstração: Provamos inicialmente que $D(L^*) \subset D(L)$. Lembramos que

$$D(L^*) = \{\psi \in L^2(0, 1) \mid \forall \phi \in D(L), \exists \zeta \in L^2(0, 1) \text{ tal que } \langle L\phi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \phi, \zeta \rangle_{L^2}\}$$

e $L^*\psi = \zeta$.

Seja $\{\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi x, n = 0, 1, \dots\}$, base ortonormal em $L^2([0, 1])$. Sejam $\psi, \zeta \in L^2([0, 1])$ tais que $\langle L\phi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \phi, \zeta \rangle_{L^2} \forall \phi \in H_N^2$, ou seja, $\psi \in D(L^*)$ e $L^*\psi = \zeta$.

Observamos que $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n$, $b_n = \langle \psi, \varphi_n \rangle_{L^2}$ e $\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, $c_n = \langle \zeta, \varphi_n \rangle_{L^2}$. Então,

$$an^2\pi^2 b_n = \langle L\varphi_n, \psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi_n, \zeta \rangle_{L^2} = c_n.$$

Logo $\left(a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \pi^4 n^4 b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e, pelo lema 3.2, $\psi \in H_N^2$.

Concluimos que $D(L^*) \subset D(L)$. Vamos provar que $\forall \phi \in D(L)$, $\phi \in D(L^*)$ e $L\phi = L^*\phi$.

Sejam $\phi, \psi \in H_N^2$. Então $\langle L\phi, \psi \rangle_{L^2} = -a \int_0^1 \phi'' \psi dx$. Usando o lema 3.1, e o fato de que $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ e $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, obtemos que

$$-a \int_0^1 \phi'' \psi dx = a \int_0^1 \psi' \phi' dx = -a \int_0^1 \phi \psi'' dx$$

Mas $-a \int_0^1 \phi \psi'' dx = \langle \phi, L\psi \rangle_{L^2}$. Portanto, $\langle L\phi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \phi, L\psi \rangle_{L^2} \forall \phi, \psi \in H_N^2$. Logo, $\psi \in D(L^*)$ e $L\psi = L^*\psi$. ■

Lema 3.3 O operador linear L definido em (3.3) é um operador setorial.

Demonstração: Observamos que $D(L)$ é denso em X . Vamos verificar que L é fechado: Seja (u_k) uma sequência em H_N^2 tal que $u_k \rightarrow u$ e $(L + I)(u_k) \rightarrow v$ em X . Se $\phi \in H_N^2$, podemos mostrar, usando séries de Fourier, que existe uma constante C tal que

$$\|\phi\|_{H_N^2} \leq C \|(L + I)\phi\|_{L^2}$$

Fazendo $v_k = (L + I)u_k$, temos que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tal que $\|v_k - v_j\|_{H_N^2} < \frac{\varepsilon}{C}$ se $k, j > M$. Assim,

$$\|u_k - u_j\|_{H_N^2} \leq C \|v_k - v_j\|_{L^2} < \varepsilon \text{ se } k, j > M.$$

Como H_N^2 é completo, temos que $u_k \rightarrow \bar{u}$ em H_N^2 , quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $u = \bar{u} \in H_N^2$ e $(L + I)u = \lim_{k \rightarrow \infty} (L + I)u_k = v$, ou seja $u \in D(L + I)$ e $(L + I)(u) = v$ o que prova que $L + I$ é fechado. Logo, $L = L + I - I$ é um operador fechado.

Usando o teorema de Sobolev [7, pag 1692], provamos que o operador resolvente de L é compacto. Portanto, o espectro de L é formado somente pelos seus autovalores, isto é, $\sigma(L) = \{(n\pi a)^2, n = 0, 1, \dots\}$. Então

$$S_{0, \frac{\pi}{4}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} \leq |\arg(z)| \leq \pi, z \neq 0\} \subset \rho(L)$$

onde $\rho(L)$ é o conjunto resolvente de L . Usando séries de Fourier, verificamos que

$$\|(zI - L)^{-1}\|_{L^2} \leq \frac{2}{|z|} \quad \forall z \in S_{0, \frac{\pi}{4}}.$$

Logo, L é um operador setorial. ■

Podemos então definir $(L + aI)^{\frac{1}{2}}$ e temos $D((L + aI)^{\frac{1}{2}}) = X^{\frac{1}{2}} = H^1([0, 1])$. Observamos também que $\|(L + aI)^{\frac{1}{2}}\phi\|_{L^2} = a^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{H^1}$.

Lema 3.4 A função $f^e : H^1([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, $f^e(\phi)(x) = f(\phi(x))$, definida em (3.4) é de classe C^1 e localmente lipschitziana. Além disso, se $B \subset H^1([0, 1])$ é limitado, então $f^e(B)$ é um subconjunto relativamente compacto de $L^2([0, 1])$.

Demonstração: Se $\phi \in H^1([0, 1])$, então ϕ é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} |\phi(y) - \phi(x)| &= \left| \int_x^y \phi'(s) ds \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 |\phi'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\phi'\|_{L^2} (y - x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, ϕ é contínua em $[0, 1]$.

Verifiquemos também que

$$|\phi(x)| \leq \sqrt{2}\|\phi\|_{H^1} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Com efeito, se $x_0 \in [0, 1]$ é tal que $|\phi(x_0)| \leq |\phi(x)| \forall x \in [0, 1]$, então

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= \int_{x_0}^x |\phi'(s)| ds + |\phi(x_0)| \\ &\leq \left(\int_0^1 |\phi'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 ds \right)^{\frac{1}{2}} + |\phi(x_0)| \\ &\leq \|\phi\|_{L^2} + \|\phi'\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{2}(\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo $|\phi(x)| \leq \sqrt{2}\|\phi\|_{H^1}$.

Sejam $\phi, h \in H^1([0, 1])$. Verifiquemos que $f^{e'}(\phi)h = f'(\phi)h$. Para isso, observamos que, se $k = \max_{|s| \leq 2\sqrt{2}\|\phi\|_{H^1}} \frac{|f''(s)|}{2}$, tomando h tal que $\|h\|_{H^1} \leq \|\phi\|_{H^1}$ e $t \in (0, 1)$ e definindo

$$R(h) = f^e(\phi + h) - f^e(\phi) - f^{e'}(\phi)h,$$

temos que

$$\begin{aligned} \|R(h)\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 [f(\phi(x) + h(x)) - f(\phi(x)) - f'(\phi(x))h(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{f''(\phi(x) + th(x))}{2} (h(x))^2 \right]^2 dx \\ &\leq k \int_0^1 (h(x))^2 (h(x))^2 dx \leq 4k\|h\|_{H^1}^4 \end{aligned}$$

Então, $\lim_{\|h\|_{H^1} \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|_{L^2}}{\|h\|_{H^1}} = 0$ e $f^{e'}(\phi)h = f'(\phi)h$.

Mostremos que f^e é de classe C^1 . Seja $h \in H^1([0, 1])$ tal que $\|h\|_{H^1} \leq 1$. Pela desigualdade (3.6), se tomamos $\rho = \max\{\|\phi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1}\}$ e $C = \max_{|s| \leq \sqrt{2}\rho} \{|f'(s)|, |f''(s)|\}$, temos

$$\begin{aligned} \|f^{e'}(\phi)h - f^{e'}(\psi)h\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 [f^{e'}(\phi)h - f^{e'}(\psi)h]^2 dx \\ &\leq \int_0^1 [f'(\phi(x))h(x) - f'(\psi(x))h(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 (f'(\phi(x)) - f'(\psi(x)))^2 (h(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f''(s) ds \right)^2 (h(x))^2 dx \\ &\leq C^2 2 \int_0^1 (\phi(x) - \psi(x))^2 dx \leq 2C^2 \|\phi - \psi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Logo f^e é de classe C^1 .

Para verificarmos que f^e é localmente lipshitziana, tomamos $\phi, \psi \in H^1([0, 1])$ tais que $\|\phi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1} \leq \rho$ para algum $\rho > 0$, e $k_1 = \max_{|s| \leq \sqrt{2}\rho} |f'(s)|$. Pela desigualdade (3.6)

$$\begin{aligned} \|f^e(\phi) - f^e(\psi)\|_{L^2}^2 &\leq \int_0^1 [f(\phi(x)) - f(\psi(x))]^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f'(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq 2k_1^2 \int_0^1 |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx \\ &\leq 2Ck_1^2 \|\phi - \psi\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

e, portanto, f^e é localmente lipshitziana.

Sejam $r > 0$ tal que $\forall \phi \in B, \|\phi\|_{H^1} \leq r$ e $C_1 = \max_{|s| \leq \sqrt{2}r} \{|f(s)|, |f'(s)|\}$. Temos

$$\|f^e(\phi)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (f(\phi(x)))^2 dx \leq C_1^2$$

Analogamente, verificamos que

$$\begin{aligned} \|f^e(\phi)'\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 (f'(\phi(x))\phi'(x))^2 dx \\ &\leq C^2 \|\phi\|_{H^1}^2 = K(r) \end{aligned}$$

Logo, $\forall \phi \in B, \|f^e(\phi)\|_{H^1} \leq (C_1^2 + K)^{\frac{1}{2}}$.

Assim, se B é um subconjunto limitado de $H^1([0, 1])$, $f^e(B)$ também é limitado em $H^1([0, 1])$. Logo $f^e(B)$ é um subconjunto relativamente compacto de $L^2([0, 1])$, pelo teorema de Sobolev ([7]). ■

Teorema 3.1 As soluções de (3.5) definem um C^1 -semigrupo em $H^1([0, 1])$,

$$\begin{aligned} S(t) : H^1([0, 1]) &\rightarrow H^1([0, 1]), \quad t \geq 0 \\ S(t)\phi &= u(t; \phi) \end{aligned}$$

onde $u(t; \phi)$ é solução de 3.5 com $u(0) = \phi$.

Demonstração: Pelo lema 3.3, L é um operador setorial e pelo lema 3.4, f^e é localmente lipschitziana. Então, pelo teorema 1.8, dado $u(0) = \phi$, o problema (3.5) possui uma única solução, $u(t; \phi)$.

Pelo lema 3.4, f^e é de classe C^1 . Então, pelo corolário 1.1, as soluções de (3.5) são de classe C^1 .

Ainda pelo lema 3.4, f^e leva subconjuntos limitados e fechados de $H^1([0, 1])$ em subconjuntos limitados de X . Portanto, pelo teorema 1.9, se as soluções de (3.5) são limitadas em seu intervalo de definição, estão definidas em $[0, \infty)$.

Mostremos, então, que as soluções de (3.5) são limitadas em $[0, t_m)$ para cada $t_m > 0$ dado. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : H^1([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{V}(\phi) &= \int_0^1 \left[\frac{a}{2} \phi'^2(x) - F(\phi(x)) \right] dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds \quad (3.9)$$

Como estamos supondo que $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} < -\delta$ para algum $\delta > 0$, $\exists \bar{u} > 0$ tal que $\forall u$ com $|u| > \bar{u}$, $\frac{f(u)}{u} < -\delta$. Assim

$$\begin{aligned} F(u) + \frac{\delta}{2} u^2 &= \int_0^u \left(\frac{f(r)}{r} + \delta \right) r dr \\ &= \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{f(r)}{r} + \delta \right) r dr + \int_{\bar{u}}^u \left(\frac{f(r)}{r} + \delta \right) r dr \\ &\leq \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{f(r)}{r} + \delta \right) r dr = c. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$F(u) \leq -\frac{\delta}{2} u^2 + c \quad (3.10)$$

Se $u(t; \phi)$ é uma solução de (3.5), $u(t; \phi) \in H^1([0, 1])$. Então, usando o lema 3.1, verificamos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(u(t; \phi)) = \int_0^1 [a u_x u_{xt} - f(u) u_t] dx = \int_0^1 [a u_{xx} u_t - f(u) u_t] dx = - \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0. \quad (3.11)$$

Usando a desigualdade (3.10), obtemos que

$$\mathcal{V}(\phi) \geq \int_0^1 \left[\frac{a}{2} \phi'^2(x) + \frac{\delta}{2} \phi^2(x) - c \right] dx \geq \delta_1 \|\phi\|_{H^1} - c \quad (3.12)$$

onde $0 < \delta_1 = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{a}{2})$. Logo

$$\mathcal{V}(\phi) + c \geq \delta_1 \|\phi\|_{H^1}.$$

De (3.11) concluímos que $\mathcal{V}(u(t; \phi)) \leq \mathcal{V}(\phi)$. Assim $\delta_1 \|u(t; \phi)\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{V}(\phi) + c$, ou seja, as soluções de 3.1 são limitadas em $[0, t_m)$ para cada $t_m > 0$ dado. Portanto, estão definidas $\forall t \geq 0$.

Devido à unicidade de solução de (3.5) para cada valor inicial dado, $S(t+s) = S(t)S(s)$ $\forall t, s \geq 0$. Logo, $S(t)$, $t \geq 0$, é um C^1 -semigrupo em $H^1([0, 1])$. ■

Lema 3.5 O C^1 -semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$, é assintoticamente liso e um sistema gradiente.

Demonstração: Observamos que se $\|\phi\|_{H^1} \leq r$ para algum $r > 0$, então, usando a desigualdade (3.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\phi) &= \int_0^1 \left[\frac{a}{2} \phi'^2(x) - F(\phi(x)) \right] dx \\ &\leq \frac{a}{2} \|\phi'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 |F(\phi(x))| dx \\ &\leq \frac{a}{2} \|\phi'\|_{L^2}^2 + \max_{|s| \leq \sqrt{2}r} |f(s)| \|\phi\|_{L^2} = K(r) \end{aligned}$$

Portanto, decorre da desigualdade (3.12) que, $\forall t \geq 0$,

$$\|S(t)\phi\|_{H^1} \leq (\mathcal{V}(\phi) + c)\delta_1^{-1} \leq (K(r) + c)\delta_1^{-1}$$

Assim, como L possui resolvente compacto, pelo teorema 1.10, as órbitas positivas de conjuntos limitados em $H^1([0, 1])$ são relativamente compactas o que nos permite concluir que $S(t)$, $t \geq 0$, é um sistema localmente completamente contínuo. Logo, pela proposição 1.1, $S(t)$, $t \geq 0$, é assintoticamente liso.

Vamos provar que a função $\mathcal{V}$ é uma função de Lyapunov para $S(t)$, $t \geq 0$. Da desigualdade em (3.11) concluímos que $\mathcal{V}$ é não crescente em t . Concluímos, também, da mesma

desigualdade, que se $\mathcal{V}(S(t)\phi) = \mathcal{V}(\phi) \forall t$, então $S(t)\phi = \phi \forall t$, ou seja, ϕ é um ponto de equilíbrio para $S(t)$, $t \geq 0$. Por (3.12), $\mathcal{V}$ é limitada inferiormente. Então, $\mathcal{V}$ é uma função de Lyapunov para $S(t)$, $t \geq 0$.

Logo, $S(t)$, $t \geq 0$ é um sistema gradiente. ■

Lema 3.6 O conjunto dos pontos de equilíbrio de $S(t)$, $t \geq 0$ é limitado.

Demonstração: Seja E o conjunto dos pontos de equilíbrio de $S(t)$, $t \geq 0$ e $\phi \in E$. Então $u_t(t; \phi) = 0$ e ϕ é solução de

$$\begin{aligned} au_{xx} + f(u) &= 0, & 0 < x < 1 \\ u_x &= 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ u(0, x) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é um ponto crítico da função $\mathcal{V}$ definida em 3.8, isto é,

$$\int_0^1 [a\phi'\psi' - f(\phi)\psi]dx = 0 \quad \forall \psi \in H^1([0, 1]) \quad (3.13)$$

pois, usando integração por partes, temos que

$$\int_0^1 [a\phi'\psi' - f(\phi)\psi]dx = \int_0^1 [(-a\phi''\psi - f(\phi)\psi)]dx = 0 \quad \forall \psi \in H^1([0, 1]) \Leftrightarrow \phi \in E$$

Dado $0 < \varepsilon < \delta$, por (3.2), $\exists M > 0$ tal que $\frac{f(u)}{u} \leq -\varepsilon \forall |u| > M$. Escolhendo $\psi = \phi$ em 3.13 obtemos que

$$\int_0^1 a\phi'^2 dx = \int_0^1 f(\phi)\phi dx = \int_{I_1} f(\phi)\phi dx + \int_{I_2} f(\phi)\phi dx \quad (3.14)$$

onde $I_1 = \{x \in [0, 1] \mid |\phi(x)| \leq M\}$, $I_2 = [0, 1] \setminus I_1$. Então existe uma constante $K(\varepsilon)$ tal que

$$a\|\phi'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 a\phi'^2 dx \leq K - \varepsilon\|\phi\|_{L^2},$$

ou seja, tomando $m = \min(a, \varepsilon)$, temos que

$$m\|\phi\|_{H^1} \leq a\|\phi'\|_{L^2} + \varepsilon\|\phi\|_{L^2} \leq K$$

Assim,

$$\|\phi\|_{H^1} \leq K(m)^{-1}.$$

Logo E é limitado. ■

Teorema 3.2 O C^1 -semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$, possui atrator global.

Demonstração: Observamos que $S(t)$, $t \geq 0$, está nas condições do teorema 2.5, ou seja, $S(t)$, $t \geq 0$, é um sistema gradiente e assintoticamente liso pelo lema 3.5. Além disso, pelo lema 3.6 E é limitado.

Logo, podemos concluir que $S(t)$, $t \geq 0$, possui atrator global conexo A dado por

$$A = W^u(E).$$

3.2 O Problema Discreto

Nesta seção, estaremos considerando a discretização espacial de 3.1. Consideramos os pontos do tipo $x_j = \frac{j - \frac{1}{2}}{n}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Denotamos $u_j = u(x_j, t)$.

Aplicamos a discretização semi-implícita de Euler à equação 3.1, ou seja, consideramos

$$u_x(x_j, t) = (u_j - u_{j-1})n$$

$$u_{xx}(x_j, t) = (u_x(x_{j+1}, t) - u_x(x_j, t))n = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})n^2.$$

Reescalando, então, o tempo por n^2 , obtemos o seguinte sistema de EDO's:

$$u'_j = a(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{n^2}f(u_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

considerando $u_1 = u_0$ e $u_n = u_{n+1}$, o que expressa as condições de contorno tomadas para a equação (3.1).

Definindo $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, podemos reescrever o sistema na forma

$$U' = -aLU + \frac{1}{n^2}f(U), \tag{3.15}$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $f(U) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$.

Observamos que L é uma matriz simétrica $n \times n$.

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Usamos as seguintes normas em $\mathbb{R}^n$:

A versão discreta da norma L^∞

$$\|U\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j| \quad (3.16)$$

e a versão discreta da norma de $H^1([0, 1])$

$$\|U\| = \left(\|U\|_2^2 + \|U\|_{2'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \|U\|_2 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e} \\ \|U\|_{2'} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} n^2 (u_{j+1} - u_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observamos que $\|U\|_{2'}$ é uma semi-norma em $\mathbb{R}^n$. Com um cálculo simples, verificamos que

$$\|U\|_{2'} = \langle nLU, U \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n} \langle n^2LU, U \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

Observamos que $\|U\| = \left(\frac{1}{n} \langle (n^2L + I)U, U \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$.

Lema 3.7 Verifica-se a seguinte desigualdade:

$$\|U\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\|U\|.$$

Demonstração: Seja $1 \leq m \leq k \leq n$. Então

$$\begin{aligned} |u_m| &\leq |u_k| + \sum_{j=k}^{m-1} |u_{j+1} - u_j| \\ &\leq |u_k| + \left(\sum_{j=1}^{n-1} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |u_{j+1} - u_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |u_k| + \|U\|_{2'} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|u_m| \leq \min_{1 \leq k \leq n} |u_k| + \|U\|_{2'} \leq \|U\|_2 + \|U\|_{2'} \leq \sqrt{2}(\|U\|_2^2 + \|U\|_{2'}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

Logo, $\|U\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\|U\|$. ■

Proposição 3.2 Os autovalores de L são

$$\lambda_k^n = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demonstração: Lembramos que as autofunções do operador

$$L\phi = -a\phi''$$

definido na seção anterior são:

$$\begin{aligned} \phi_k &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi_k(x) &= \cos k\pi x \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Discretizando as autofunções de L , temos o vetor

$$\nu_k^n = (\cos k\pi x_1, \cos k\pi x_2, \dots, \cos k\pi x_n)$$

e o vetor $L(\nu_k^n)$ tem as seguintes coordenadas:

$$(L\nu_k^n)_j = -\cos k\pi \left(x_j - \frac{1}{n}\right) + 2\cos k\pi x_j - \cos k\pi \left(x_j + \frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} & \text{para } j = 2, 3, \dots, n-1 \\ (L\nu_k^n)_1 &= -\cos k\pi\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) + \cos \frac{k\pi}{2n} \\ (L\nu_k^n)_n &= -\cos k\pi\left(x_n - \frac{1}{n}\right) + \cos k\pi x_n \end{aligned}$$

Usando identidades trigonométricas adequadas, deduzimos que

$$L\nu_k^n = 4\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n} \nu_k^n, \text{ para } 0 \leq k \leq n-1$$

Assim, L possui n autovalores distintos dados por

$$\lambda_k^n = 4\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n} \quad k = 0, 2, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

Lema 3.8 O operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por

$$L(u_1, \dots, u_n) = (u_1 - u_2, -u_1 + 2u_2 - u_3, \dots, -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}, \dots, -u_{n-1} + u_n),$$

é setorial.

Demonstração: Pode-se provar que em espaços de dimensão finita todo operador linear é setorial. Faremos aqui uma prova para o operador L em particular.

Pela proposição 3.2, $\sigma(L) = \{\lambda_k^n = 4\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n} \quad k = 0, 2, \dots, n-1\}$. Então

$$S_{0, \frac{\pi}{4}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} \leq |\arg(z)| \leq \pi, z \neq 0\} \subset \rho(L)$$

onde $\rho(L)$ é o conjunto resolvente de L .

Observamos que $(zI - L)^{-1}$ é simétrica e portanto existe uma matriz ortogonal T com $\|T\|_2 = \|T^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e uma matriz diagonal D com entradas $d_{jj} = \frac{1}{z - \lambda_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ onde λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ é autovalor de L tais que

$$(zI - L)^{-1} = TDT^{-1}$$

Então

$$\|(zI - L)^{-1}\|_2 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{|z - \lambda_j|} \leq \frac{2}{|z|} \quad \forall z \in S_{0, \frac{\pi}{4}}.$$

A última desigualdade se verifica, uma vez que $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z \quad \forall z \in S_{0, \frac{\pi}{4}}$. Logo, L é um operador setorial. \(\blacksquare\)

Observação 3.1 A demonstração do lema abaixo poderia ser feita usando resultados bem conhecidos para EDO's, mas preferimos usar os resultados do capítulo 1, para enfatizar a semelhança entre o problema discreto e o contínuo.

Lema 3.9 O problema de valor inicial

$$\begin{aligned} U' + aLU - \frac{1}{n^2}f(U) &= 0 \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

possui uma única solução $U(t; U_0)$, a qual está definida $\forall t \geq 0$ e é de classe C^2 .

Demonstração: Pelo lema 3.8, L é um operador setorial. Como f é de classe C^2 , f é de classe C^2 e, portanto, é localmente lipschitziana. Então, pelo teorema 1.8, o problema (3.21) possui uma única solução, $U(t; U_0)$, a qual, pelo corolário 1.1, será de classe C^2 .

Observamos também que a função f leva subconjuntos limitados e fechados de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$. Então, pelo teorema 1.9, se as soluções de (3.5) são limitadas em seu intervalo de definição, estão definidas em $[0, \infty)$. Verifiquemos, então, que $U(t; U_0)$ é limitadas em $[0, t_m)$, para cada t_m dado.

Sejam $H = (1, 1, 1, \dots, 1)$ e $F(U) = (F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n))$, onde F é a função definida em 3.9 por

$$F(u_i) = \int_0^{u_i} f(s)ds.$$

Definimos $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$V(U) = \frac{an}{2} \langle LU, U \rangle - \frac{1}{n} \langle F(U), H \rangle \quad (3.22)$$

Usando a desigualdade (3.10) e o lema 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} V(U) &\geq \frac{an}{2} \langle LU, U \rangle + \frac{\delta}{2} \|U\|_2^2 - c \\ &\geq \frac{a}{2} \|U\|_{2'}^2 + \frac{\delta}{2} \|U\|_2^2 - c \\ &\geq \delta_1 \|U\|^2 - c, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\delta_1 = \min(\frac{a}{2}, \frac{\delta}{2})$. Como $U(t; U_0)$ é de classe C^2 , temos $V(U(t; U_0))$ de classe C^2 e

$$\frac{d}{dt}V(U(t; U_0)) = an\langle LU, U' \rangle - \frac{1}{n}\langle f(U), U' \rangle = -n\langle U', U' \rangle \leq 0 \quad (3.24)$$

Segue das desigualdades (3.23) e (3.24) que $\|U(t; U_0)\|^2 \leq (V(U_0) + c)\delta_1^{-1} \forall t \geq 0$ para o qual $U(t; U_0)$ está definida. Logo, pelo teorema 1.9, $U(t; U_0)$ está definida $\forall t \geq 0$. ■

Proposição 3.3 Seja

$$\begin{aligned} S^d(t) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \\ S^d(t)U_0 &= U(t; U_0). \end{aligned}$$

Então $S^d(t)$, $t \geq 0$ é um C^2 -semigrupo assintoticamente liso e sistema gradiente.

Demonstração: Pelo lema 3.9 $S^d(t)$, $t \geq 0$ é um C^2 -semigrupo.

Para mostrarmos que $S^d(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente, vamos provar que a função V definida em (3.22) é uma função de Lyapunov para $S^d(t)$, $t \geq 0$. Com efeito, pela desigualdade (3.23) podemos concluir que V é limitada inferiormente e, se $\|U\| \rightarrow \infty$, então $|V(U)| \rightarrow \infty$.

Pela desigualdade (3.24), temos $V(S^d(t)U_0)$ não crescente em t para cada $U_0 \in \mathbb{R}^n$.

Notamos ainda que, se $U(t; U_0)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$V(U(t; U_0)) = V(S^d(t)U_0) = V(U_0) \quad \forall t,$$

então, pela desigualdade (3.24), $U'(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$. Portanto, $S^d(t)U_0 = U_0 \quad \forall t$ e U_0 é um ponto de equilíbrio de $S^d(t)$, $t \geq 0$.

Logo, segundo a definição (2.14), V é uma função de Lyapunov para $S^d(t)$, $t \geq 0$. Além disso, cada órbita positiva de $S^d(t)$, $t \geq 0$ é limitada e, portanto, relativamente compacta. Logo, temos que $S^d(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente.

Segue diretamente da definição e do fato de estarmos trabalhando num espaço de dimensão finita que $S^d(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso. ■

Lema 3.10 O conjunto dos pontos de equilíbrio de $S^d(t)$, $t \geq 0$ é limitado, independentemente de n nas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\infty$.

de $S^d(t)$, $t \geq 0$. Então, se $U_0 \in E^d$, $U(t; U_0) = S^d(t)U_0 = U_0 \forall t \geq 0$ e $U'(t) = 0$. Assim, temos

$$a\langle LU, U \rangle - \frac{1}{n^2}\langle f(U), U \rangle = 0.$$

Pela condição (3.2) exigida para f , $\exists r > 0$ tal que

$$f(u)u \leq -\delta u^2 + \sigma \quad (3.25)$$

onde $\sigma = \sup_{|u| \leq r} (\delta u^2 + |f(u)u|)$. Portanto,

$$\frac{a}{n}\|U\|_2^2 = a\langle LU, U \rangle = \frac{1}{n^2}\langle f(U), U \rangle \leq \frac{-\delta}{n}\|U\|_2^2 + \frac{\sigma}{n},$$

ou seja

$$a\|U\|_2^2 + \delta\|U\|_2^2 \leq \sigma.$$

Logo, tomando $m = \min(a, \delta)$, $\|U\|^2 \leq \sigma m^{-1}$. Pelo lema 3.7, $\|U\|_\infty^2 \leq \sqrt{2}\sigma m^{-1}$.

Teorema 3.3 O C^2 -semigrupo $S^d(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global A^d , o qual é conexo e dado por

$$A^d = W^u(E^d).$$

Demonstração: O C^2 -semigrupo $S^d(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente, assintoticamente liso pela proposição 3.3. Pelo lema 3.10 E^d é limitado. Então pelo teorema 2.5 podemos concluir que $S^d(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global

$$A^d = W^u(E^d).$$

Como estamos trabalhando em um espaço de Banach, pelo mesmo teorema, temos que A^d é conexo. ■

Proposição 3.4 O atrator global de $S^d(t)$, $t \geq 0$ A^d é limitado, independentemente de n , nas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\infty$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\overline{E_\varepsilon^d} = \overline{\bigcup_{e \in E^d} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - e\| < \varepsilon\}}$.

Pelo lema 3.10, $\forall U \in \overline{E_\varepsilon^d}$, $\|U\| \leq \sigma m^{-1} + \varepsilon$. Portanto $\|U\|_\infty \leq \sqrt{2}(\sigma m^{-1} + \varepsilon)$ e $\overline{E_\varepsilon^d}$ é compacto.

Assim, $\forall U \in \overline{E_\varepsilon^d}$,

$$|V(U)| \leq \frac{a}{2} \|U\|_2^2 + \max_{|x| \leq \sqrt{2}(\sigma m^{-1} + \varepsilon)} |f(x)| \|U\|_2 = K(\overline{E_\varepsilon^d}).$$

Observamos que, se $U \in A^d = W^u(E^d) = \{U \in \mathbb{R}^n \mid S^d(t)U \text{ está definido } \forall t \leq 0 \text{ e } S^d(t)U \rightarrow E^d \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$, então $U = S^d(t_1)U_0$ para algum $t_1 \geq 0$ e algum $U_0 \in \overline{E_\varepsilon^d}$. Portanto, como a função de Lyapunov $V(U(t; U_0))$ é não crescente em t , pela desigualdade (3.23), concluímos que $\forall U \in A^d$, $\|U\|^2 \leq (K(\overline{E_\varepsilon^d}) + c)\delta^{-1}$. Logo, A^d é limitado, independentemente de n na norma $\|\cdot\|$.

Pelo lema 3.7, A^d também é limitado na norma $\|\cdot\|_\infty$. ■

Capítulo 4

Uma Equação Escalar Hiperbólica

Neste capítulo, consideramos a equação escalar hiperbólica

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2au_t - u_{xx} &= f(u) & \text{se } 0 < x < 1 \quad t \in \mathbb{R} \\ u_x &= 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $a > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$\overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} < -\delta \quad (4.2)$$

para algum $\delta > 0$.

De maneira análoga ao que foi feito no capítulo anterior para uma equação parabólica, estudamos, na seção 4.1, o C^1 -semigrupo gerado pelas soluções da equação (4.1). Tratamos este problema de maneira semelhante a que é usada em [1] para estudar a mesma equação com condições de contorno de Dirichlet. Contudo, para demonstrarmos que as soluções da equação (4.1) geram um C^1 -semigrupo, usamos o teorema de Lumer-Phillips (teorema 1.1) e os resultados da seção 1.2, o que difere do modo como o problema é tratado em [1].

Na seção 4.2, estudamos os C^2 -semigrupos gerados pelos sistemas de EDO's que surgem com a discretização espacial de (4.1).

4.1 O Problema Contínuo

Seja $X = H^1([0, 1]) \times L^2([0, 1])$ e $J : D(J) \subset X \rightarrow X$, dado por

$$J(u, v) = (v, u_{xx} - 2av) \quad (4.3)$$

e $D(J) = H_N^2 \times H^1([0, 1])$. Seja f^e a função definida em (3.4)

$$\begin{aligned} f^e : H^1([0, 1]) &\rightarrow L^2([0, 1]) \\ f^e(u)(x) &= f(u(x)) \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever formalmente a equação (4.1)

$$\begin{aligned} (u_t, v_t) &= J(u, v) + (0, f^e(u)) \\ (u(0), v(0)) &= (u_0, v_0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Consideramos X com o produto interno

$$\langle (\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \rangle_{H^1 \times L^2} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{H^1} + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2}$$

e a norma

$$\|(\phi, \psi)\|_{H^1 \times L^2} = (\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 4.1 O operador linear J definido em (4.3) gera um C^0 -semigrupo em X , e^{Jt} , $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $P : X \rightarrow X$ definido por $P(u, v) = (0, -u)$ e $J_1 = J + P$ com $D(J_1) = D(J)$.

Vamos mostrar que J_1 gera um C^0 -semigrupo usando o teorema de Lumer-Phillips (teorema 1.1). Observamos que $D(J_1)$ é denso em X . Então, nos resta ainda provar que J_1 é dissipativo e que a imagem de $\lambda I - J_1$ é X para algum $\lambda > 0$.

J_1 é dissipativo pois $J_1(u, v) = (v, u_{xx} - 2av - u)$ e

$$\begin{aligned} \langle J_1(u, v), (u, v) \rangle_{H^1 \times L^2} &= \int_0^1 (uv + u_x v_x + u_{xx} v - uv - 2avv) dx \\ &= -2a \int_0^1 v^2 dx \leq 0 \quad \forall (u, v) \in D(J) \end{aligned}$$

Verifiquemos que a imagem de $I - J_1$ é X . Seja $(r, s) \in H^1([0, 1]) \times L_2([0, 1])$. Então, $(I - J)(u, v) = (r, s)$ se

$$\begin{cases} u - v = r \\ u + (2a + 1)v - u_{xx} = s \end{cases}$$

o que equivale a termos

$$\begin{cases} v = u - r \\ 2(a+1)u - u_{xx} = s + (2a+1)r \end{cases}$$

Como $s + (2a+1)r \in L^2([0, 1])$, a segunda equação do sistema acima tem solução em H_N^2 . Então, a primeira equação do sistema tem solução em $H^1([0, 1])$. Portanto a imagem de $I - J_1$ é todo o espaço X . Logo, pelo teorema 1.1, J_1 gera um C^0 -semigrupo em X . Consequentemente, usando o teorema 1.2, concluímos que $J = J_1 - P$ gera um C^0 -semigrupo em X .

Na verdade, usando o método de separação de variáveis para o problema

$$\begin{aligned} (u_t, v_t) &= J(u, v) \\ (u(0), v(0)) &= (\phi, \psi) \end{aligned}$$

obtemos a seguinte representação explícita para $e^{Jt}(\phi, \psi)$:

$$e^{Jt}(\phi, \psi) = (u(t; (\phi, \psi)), v(t; (\phi, \psi))), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} u(t; (\phi, \psi)) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\langle \phi, \varphi_n \rangle u_n(t) + \langle \psi, \varphi_n \rangle v_n(t)] \varphi_n, \\ v(t; (\phi, \psi)) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\langle \phi, \varphi_n \rangle u'_n(t) + \langle \psi, \varphi_n \rangle v'_n(t)] \varphi_n, \end{aligned}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ e^{-at} [\cosh(a^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} t + \frac{a}{(a^2 - n^2)} \sinh(a^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} t], & \text{se } n^2 < a^2 \\ e^{-at} (1 + at), & \text{se } n^2 = a^2 \\ e^{-at} [\cos(n^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} t + \frac{a}{(n^2 - a^2)} \sin(n^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} t], & \text{se } n^2 > a^2 \end{cases}$$

$$v_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} (e^{-at} - 1), & \text{se } n = 0 \\ e^{-at} \frac{1}{(a^2 - n^2)} \sinh(a^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} t, & \text{se } n^2 < a^2 \\ te^{-at}, & \text{se } n^2 = a^2 \\ e^{-at} \frac{1}{(n^2 - a^2)} \sin(n^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} t, & \text{se } n^2 > a^2 \end{cases}$$

e $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi x$, $n = 0, 1, \dots$ Pelo lema 3.2, $e^{Jt}(\phi, \psi) \in X$ se $(\phi, \psi) \in X$. ■

Lema 4.2 As soluções de (4.4) geram um C^1 -semigrupo em X .

Demonstração: Pelo lema 3.4, f^e é de classe C^1 e, portanto, localmente lipschitziana. Então

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ g(u, v) &= (0, f^e(u)) \end{aligned}$$

é localmente lipschitziana. Pelo lema 4.1, o operador linear J é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo. Então, usando o teorema 1.3, obtemos que, dado um valor inicial (u_0, v_0) , a equação em (4.4) possui uma única solução definida num intervalo máximo.

Vamos mostrar que as soluções estão definidas $\forall t \geq 0$. Observamos que, como g é localmente lipschitziana, leva subconjuntos fechados e limitados em subconjuntos limitados de X . Assim, pelo teorema 1.4, se $\|(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0)))\| < \infty$ em $[0, t_m)$ para cada $t_m \geq 0$ dado, $(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0)))$ está definida $\forall t \geq 0$.

Seja $\mathcal{Y} : X \rightarrow X$ definida por

$$\mathcal{Y}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\|\phi'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 - \int_0^1 F(\phi(x))dx \quad (4.6)$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Lembramos que, pela condição exigida para a função f em (4.2),

$$F(u) \leq -\frac{\delta}{2}|u|^2 + c.$$

Portanto,

$$\mathcal{Y}(\phi, \psi) \geq \frac{1}{2}\|\phi'\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 - c \quad (4.7)$$

Pelos teoremas 1.5 e 1.6, se $(u_0, v_0) \in D(J)$, a solução $(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0)))$ é de classe C^1 . Então, usando o lema 3.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{Y}(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0))) &= \int_0^1 (u_{xt}u_x + vv_t - f(u)u_t)dx \\ &= \int_0^1 u_t(-u_{xx} + u_{tt} - f(u))dx \\ &= -2a \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\mathcal{Y}(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0))) = \mathcal{Y}(u(0), v(0)) - 2a \int_0^t \int_0^1 v^2 dx ds \quad (4.8)$$

Lembramos que $D(J)$ é denso em X . Portanto, a igualdade em (4.8) vale para toda solução de (4.4) em seu intervalo de definição.

Tomamos $m = \min(\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2})$ e, usando as desigualdades em (4.7) e (4.8), concluímos que

$$-c + m(\|u(t; (u_0, v_0))\|_{H^1} + \|v(t; (u_0, v_0))\|_{L^2}) \leq \mathcal{Y}(u_0, v_0). \quad (4.9)$$

Logo, $(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0)))$ está definida $\forall t \geq 0$.

Finalmente, definimos

$$G(t) : X \rightarrow X \quad t \geq 0$$

$$G(t)(u_0, v_0) = (u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0))).$$

Pela unicidade das soluções de (4.4) para cada valor inicial dado, $G(t)$ satisfaz $G(0) = I$, $G(t+s) = G(t)G(s)$. Logo $G(t)$, $t \geq 0$ é um C^1 -semigrupo em X . ■

Observação 4.1 Como e^{Jt} está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, pode-se mostrar que as soluções de (4.4) estão definidas em $\mathbb{R}$. Para $t \leq 0$, observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0))) + c &\leq \mathcal{Y}(u_0, v_0) + c + 2a \int_t^0 \int_0^1 v^2 dx ds \\ &\leq \mathcal{Y}(u_0, v_0) + c + 4a \int_t^0 (\mathcal{Y}(u(s; (u_0, v_0)), v(s; (u_0, v_0))) + c) ds. \end{aligned}$$

Usando, então, a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\mathcal{Y}(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0))) + c \leq (\mathcal{Y}(u_0, v_0) + c)e^{-4at}$$

para cada $t \leq 0$. Assim, em cada intervalo $(t, 0]$, $(u(t; (u_0, v_0)), v(t; (u_0, v_0)))$ é limitada e portanto está definida $\forall t \leq 0$.

Lema 4.3 O C^1 -semigrupo $G(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso.

Demonstração: Pela “Fórmula de Variação das Constantes”, podemos representar $G(t)$ da seguinte forma:

$$G(t)(\phi, \psi) = e^{Jt}(\phi, \psi) + \int_0^t e^{J(t-s)}(0, f(u(s)))ds$$

Temos, então $G(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t)$, $t \geq 0$, onde

$$G_1(t)(\phi, \psi) = e^{Jt}(\phi, \psi) - \left(\int_0^1 2\phi - \frac{1}{a}\psi dx, 0 \right)$$

$$G_2(t)(\phi, \psi) = \left(\int_0^1 2\phi - \frac{1}{a}\psi dx, 0 \right)$$

$$G_3(t)(\phi, \psi) = \int_0^t e^{J(t-s)}(0, f(u(s; (\phi, \psi))))ds = \int_0^t e^{J(s)}(0, f(u(t-s; (\phi, \psi))))ds$$

Verifiquemos que $\|G_1(t)(\phi, \psi)\| \leq Ke^{-\delta t}\|(\phi, \psi)\|$ para constantes K e δ positivas. De fato, pela expressão de e^{Jt} dada em (4.5), concluímos que $G_1(t)$ $t \geq 0$ pode ser expresso como uma soma cujas parcelas decrescem exponencialmente em relação a t . Logo basta tomarmos constantes positivas K e $\delta > 0$ adequadas e obtemos

$$\|G_1(t)(\phi, \psi)\| \leq Ke^{-\delta t}\|(\phi, \psi)\|. \quad (4.10)$$

Dado $B \subset X$, B limitado vamos mostrar que $\{G_2(t)B, t \geq 0\}$ é relativamente compacto. Com efeito, para cada $(\phi, \psi) \in X$, $G_2(t)(\phi, \psi)$ é constante em t . Então, para cada $B \subset X$, B limitado, podemos dizer que $\{G_2(t)B, t \geq 0\}$ é limitado e está contido num subespaço de X de dimensão um. Logo, $\{G_2(t)B, t \geq 0\}$ é relativamente compacto em X .

Queremos mostrar que $G_3(t)$, $t \geq 0$ é completamente contínuo, porque assim temos que $G_2(t) + G_3(t)$, $t \geq 0$ é completamente contínuo e, pelo lema 2.2, $G(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso.

Seja B um subconjunto limitado de X . Pela desigualdade (4.9), para $t \geq 0$,

$$\|G(t)(\phi, \psi)\| \leq (\mathcal{Y}(\phi, \psi) + c)m^{-1}$$

Além disso, $\mathcal{Y}(\phi, \psi)$ é limitada superiormente, pois

$$\|\mathcal{Y}(\phi, \psi)\| \leq \frac{1}{2}\|\phi'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 + \max_{|x| \leq \sqrt{2}\|\phi\|_{H^1}} |f(x)|\|\phi\|_{L^2},$$

Assim, se $(\phi, \psi) \in B$, então existem $r > 0$ tal que $\|(\phi, \psi)\| \leq r$ e uma constante $C_1 = C_1(r)$ tal que, para cada $t \geq 0$, $\|(G(t)(\phi, \psi))\| \leq C_1$.

Pelo lema 3.4, $B_1 = \{(0, u(t-s; (\phi, \psi))) \mid (\phi, \psi) \in B, 0 \leq s \leq t\}$ é compacto. Portanto, $B_2 = \{e^{Js}(B_1) \mid 0 \leq s \leq t\}$ é compacto, uma vez que $(s, (\phi, \psi)) \mapsto e^{Js}(\phi, \psi)$ é contínua e $[0, t] \times B_1$ é compacto.

Logo, $\{G_3(s)B \mid 0 \leq s \leq t\}$ é limitado. Consequentemente, pelo teorema 2.1, o fecho convexo de B_2 , $\overline{\text{co}}B_2$, é compacto. Então, $t\overline{\text{co}}B_2$ é compacto. Portanto, como, para $(\phi, \psi) \in B$, $G_3(t)(\phi, \psi) = \int_0^t e^{J(t-s)}(0, f(u(s; (\phi, \psi))))ds \in t\overline{\text{co}}B_2$, temos que $G_3(t)$, $t \geq 0$ é completamente contínuo.

Podemos concluir, então que $G(t) = G_1(t) + G_4(t)$, $t \geq 0$ onde $\|G_1(t)(\phi, \psi)\| \leq k(t, r)$ se $\|(\phi, \psi)\| \leq r$, com $k(t, r) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $G_4(t) = G_2(t) + G_3(t)$, $t \geq 0$ é completamente contínuo. Logo, pelo lema 2.2, $G(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso. ■

Lema 4.4 O C^1 -semigrupo $G(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente.

Demonstração: Seja $(\phi, \psi) \in H^1([0, 1]) \times L^2([0, 1])$. Pela desigualdade em (4.9), $\gamma^+(\phi, \psi)$ é limitado. Logo, $\overline{\gamma^+(\phi, \psi)}$ é fechado e limitado e $G(t)\overline{\gamma^+(\phi, \psi)} \subset \overline{\gamma^+(\phi, \psi)}$. Como $G(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, há um subconjunto compacto B de X , $B \subset \overline{\gamma^+(\phi, \psi)}$, o qual atrai $\overline{\gamma^+(\phi, \psi)}$. Logo $\gamma^+(\phi, \psi)$ é relativamente compacta, pelo lema 2.4.

Verifiquemos que a função $\mathcal{Y}$ definida em (4.6) é uma função de Lyapunov para $G(t)$, $t \geq 0$. De fato, da desigualdade em (4.7) temos que $\mathcal{Y}(\phi, \psi)$ é limitada inferiormente e $|\mathcal{Y}(\phi, \psi)| \rightarrow \infty$ quando $\|(\phi, \psi)\| \rightarrow \infty$. Da desigualdade em (4.8), $\mathcal{Y}(G(t)(\phi, \psi))$ é não crescente em t e observamos ainda que, se

$$\mathcal{Y}(G(t)(\phi, \psi)) = \mathcal{Y}(\phi, \psi),$$

então $v(x, t) = u_t(x, t) = 0$. Consequentemente, $G(t)(\phi, \psi) = (\phi, \psi) \forall t$ e (ϕ, ψ) é um ponto de equilíbrio para $G(t)$, $t \geq 0$.

Logo, $G(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente. ■

Lema 4.5 O conjunto dos pontos de equilíbrio do C^1 -semigrupo $G(t)$, $t \geq 0$ é limitado.

Demonstração: Seja (ϕ, ψ) um ponto de equilíbrio de $G(t)$, $t \geq 0$. Então $G(t)(\phi, \psi) = (\phi, \psi) \forall t$ e $(u_t(t; (\phi, \psi)), v_t(t; (\phi, \psi))) = (0, 0)$, ou seja, (ϕ, ψ) é solução de

$$\psi = 0$$

$$\phi'' + f(\phi) = 0$$

Logo, $\phi \in E \subset H^1([0, 1])$, o conjunto dos pontos de equilíbrio de $S(t)$, $t \geq 0$, o C^1 -semigrupo definido no capítulo 3.

Assim, se Q é o conjunto dos pontos de equilíbrio de $G(t)$, $t \geq 0$, $Q = E \times \{0\}$. Como, pelo lema 3.6, E é limitado em $H^1([0, 1])$, Q é limitado em X .

Teorema 4.1 O C^1 -semigrupo $G(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global.

Demonstração: Pelo lema 4.3, $G(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso. Pelo lema 4.4, $G(t)$, $t \geq 0$ é sistema gradiente. Ainda, pelo lema 4.5, o conjunto dos pontos de equilíbrio de $G(t)$, $t \geq 0$, Q , é limitado. Então, pelo teorema 2.5, $G(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global conexo Ω , o qual é dado por

$$\Omega = W^u(Q). \quad \blacksquare$$

4.2 O Problema Discreto

Como fizemos com o problema parabólico no capítulo anterior, estudamos agora a equação (4.1) após discretizarmos o intervalo $[0, 1]$. Como anteriormente, consideramos os pontos do tipo $x_j = \frac{j - \frac{1}{2}}{n}$, $j = 1, 2, \dots, n$, e fazemos $u_j = u(x_j, t)$, $v_j = v(x_j, t)$. Aplicando a discretização semi-implícita de Euler e reescalando o tempo por n^2 obtemos o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} u_j' &= \frac{1}{n^2} v_j \\ v_j' &= \frac{-2a}{n^2} v_j + (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{n^2} f(u_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

tomando $u_1 = u_0$ e $u_n = u_{n+1}$, o que reflete as condições de contorno tomadas em (4.1)

Fazendo $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, o sistema acima pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \frac{1}{n^2} I \\ -L & \frac{-2a}{n^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} 0 \\ f(U) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde O denota a matriz $n \times n$ nula, I a matriz identidade $n \times n$, L e $f(U)$ são como no capítulo anterior.

Adotamos em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a norma

$$\|(U, V)\|_{\bullet} = (\|U\|^2 + \|V\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma em $\mathbb{R}$, definida em (3.17) e $\|\cdot\|_2$ é a norma definida em (3.18).

Observação 4.2 Os resultados de existência e unicidade abaixo, como no problema parabólico visto no capítulo 3, seguem de perto o problema contínuo. Poderíamos, é claro, usar os resultados conhecidos para EDO's.

Lema 4.6 O operador linear $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definido por

$$J(U, V) = \left(\frac{1}{n^2}V, -LU - \frac{2a}{n^2}V \right)$$

gera um C^0 -semigrupo, e^{Jt} , $t \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: A demonstração é análoga à do lema 4.1.

Definimos $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por $P(U, V) = (0, -\frac{1}{n^2}V)$ e $J_1 = J + P$. Usando o teorema de Lumer-Phillips (teorema 1.1), mostraremos que J_1 gera um C^0 -semigrupo. Então, pelo teorema 1.2, $J = J_1 - P$ gera um C^0 -semigrupo.

Verifiquemos que J_1 satisfaz as hipóteses do teorema 1.1. Como $D(J_1) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, devemos ainda verificar que J_1 é dissipativo e que a imagem de $\lambda_0 I - J_1$ é $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. De fato, operador J_1 é dissipativo pois

$$\begin{aligned} \langle J_1(U, V), (U, V) \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{n^2}V, -LU - \frac{2a}{n^2}V - \frac{1}{n^2}V \right), (U, V) \right\rangle \\ &= -\langle LU, V \rangle - \left\langle \frac{2a}{n^2}V, V \right\rangle \leq 0 \quad \forall (U, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

A última desigualdade decorre da proposição 3.2. Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2}I - J_1 \right)(U, V) = (0, 0) &\iff \left(\frac{1}{n^2}U - \frac{1}{n^2}V, \frac{1}{n^2}V - LU - \frac{2a}{n^2}V \right) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} U = V \\ (-2a - 1)U - LU = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Mas, se $(U, V) \neq (0, 0)$, a última igualdade verifica-se somente se $(2a + 1)$ é um autovalor de $-L$. Pela proposição 3.2, $(2a + 1)$ não é um autovalor de $-L$. Conseqüentemente, temos $(\frac{1}{n^2}I - J_1)(U, V) \neq (0, 0) \forall (U, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto, a imagem de $(\frac{1}{n^2}I - J_1)(U, V)$ é $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Assim, pelo teorema de Lumer-Phillips, J_1 gera um C^0 -semigrupo. Pelo teorema 1.2, J gera um C^0 -semigrupo. ■

Lema 4.7 Dada uma condição inicial $(U(0), V(0)) = (U_0, V_0)$, a equação (4.11) possui uma única solução definida em $[0, \infty)$.

Demonstração: Observemos que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $g(U, V) = (0, f(U))$ é de classe C^2 e, portanto, é localmente lipschitziana. Logo, pelo teorema 4.4, a equação 4.11 possui uma única solução $(U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0)))$, definida num intervalo máximo, satisfazendo a condição inicial $(U(0), V(0)) = (U_0, V_0)$. Pelo teorema 1.5, $(U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0)))$ é de classe C^2 .

Usando o teorema 1.4, mostremos que a solução está definida em $[0, \infty)$. De fato, g leva subconjuntos fechados e limitados em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto, se $\|(U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0)))\|_\bullet < \infty$ em $[0, t_m]$ para cada $t_m \geq 0$ dado, podemos concluir que $(U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0)))$ está definida $\forall t \geq 0$.

Seja

$$\begin{aligned} Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ Y(U, V) &= \frac{n}{2} \langle LU, U \rangle + \frac{1}{2n} \langle V, V \rangle - \frac{1}{n} \langle F(U), H \rangle, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $H = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Se $(U(t), V(t)) = (U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0)))$ é uma solução do sistema (4.11), temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} Y(U(t), V(t)) \\ &= n \langle LU(t), U'(t) \rangle + \frac{1}{n} \langle V(t), V'(t) \rangle - \frac{1}{n} \langle f(U(t)), U'(t) \rangle \\ &= n \langle LU(t), \frac{1}{n^2} V(t) \rangle + \frac{1}{n} \langle V(t), -LU(t) - \frac{2a}{n^2} V(t) + \frac{1}{n^2} f(U(t)) \rangle - \frac{1}{n} \langle f(U(t)), \frac{1}{n^2} V(t) \rangle \\ &= -\frac{2a}{n^3} \langle V(t), V(t) \rangle = -\frac{2a}{n^2} \|V(t)\|_2^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

o que nos permite concluir que

$$Y(U(t), V(t)) \leq Y(U(0), V(0)) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.14)$$

Usando a desigualdade (3.10) e tomando $\delta_1 = \min(\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2})$, verificamos que

$$\begin{aligned} Y(U, V) &\geq \frac{1}{2}\|U\|_2^2 + \frac{1}{2}\|V\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|U\|_2^2 - c \\ &\geq \|(U(t), V(t))\|_\bullet^2 \delta_1 - c \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das desigualdades (4.14) e (4.15) podemos concluir que

$$\|(U(t), V(t))\|_\bullet^2 \leq (Y(U(0), V(0)) + c)\delta_1^{-1} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.16)$$

ou seja, cada solução é limitada em $[0, t_m)$, para cada t_m dado. Logo, pelo teorema 1.4, as soluções de (4.11) estão definidas $\forall t \geq 0$. ■

Proposição 4.1 Definindo

$$\begin{aligned} G^d(t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \\ G^d(t)(U_0, V_0) &= (U(t; (U_0, V_0)), V(t; (U_0, V_0))) \end{aligned}$$

temos que $G^d(t), t \geq 0$ é um C^2 -semigrupo assintoticamente liso e sistema gradiente. Além disso, o conjunto dos pontos de equilíbrio de $G^d(t), t \geq 0$ é limitado, independentemente de n na norma $\|\cdot\|_\bullet$ e na norma do máximo.

Demonstração: Devido à unicidade das soluções da equação (4.11), para cada (U, V) dado, temos $G^d(t+s)(U, V) = G^d(t)G^d(s)(U, V) \quad \forall t, s \geq 0$ e $G^d(0)(U, V) = (U, V)$.

Para mostrarmos que $G^d(t), t \geq 0$ é sistema gradiente, vamos provar que a função Y definida em (4.12) é uma função de Lyapunov.

Observamos que se $Y(G^d(t)(U_0, V_0)) = Y(U_0, V_0)$, então

$$\frac{d}{dt}Y(G^d(t)(U_0, V_0)) = \frac{d}{dt}Y(U(t), V(t)) = 0.$$

Portanto, pela igualdade em (4.2), temos que, se $Y(G^d(t)(U_0, V_0)) = Y(U_0, V_0) \quad \forall t$, então $V(t) = U'(t) = 0 \quad \forall t$. Consequentemente,

$$U(t) = U(0) + \int_0^t U'(s)ds = U(0) \quad \forall t,$$

ou seja, se $Y(G^d(t)(U_0, V_0)) = Y(U_0, V_0)$, então $G^d(t)(U_0, V_0) = (U_0, V_0)$ e (U_0, V_0) é um ponto de equilíbrio de $G^d(t)$, $t \geq 0$ e satisfaz

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \\ -LU + f(U) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Além disso, pela desigualdade (4.15), Y é limitada inferiormente e $|Y(U, V)| \rightarrow \infty$ quando $\|(U, V)\| \rightarrow \infty$. Pela desigualdade em (4.2), $Y(G^d(t)(U, V))$ é não crescente em t para cada $(U, V) \in \mathbb{R}^n$ fixo. Assim, pela definição 2.14, Y é uma função de Lyapunov para G^d , $t \geq 0$. Ainda, como cada órbita positiva é limitada (conforme a desigualdade em (4.16)) e, portanto, relativamente compacta, G^d , $t \geq 0$ é sistema gradiente.

Como estamos trabalhando num espaço de dimensão finita, decorre diretamente da definição que $G^d(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso.

Seja Q^d o conjunto dos equilíbrios de $G^d(t)$, $t \geq 0$. Pelas igualdades em (4.17)

$$Q^d = \{(U, 0) \mid U \in E^d\}.$$

Logo, assim como o conjunto dos equilíbrios do C^2 -semigrupo $S^d(t)$, $t \geq 0$, definido no capítulo 3, E^d , Q^d é limitado, independentemente de n e $\|(U, V)\|_\bullet \leq \sigma m^{-1}$. ■

Teorema 4.2 O C^2 -semigrupo $G^d(t)$, $t \geq 0$ possui atrator global, o qual é conexo e limitado, independentemente de n , na norma $\|\cdot\|_\bullet$.

Demonstração: Pela proposição 4.1, $G^d(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente liso, sistema gradiente e o conjunto de seus pontos de equilíbrio é limitado. Logo, pelo teorema 2.5 $G^d(t)$, $t \geq 0$ possui um atrator global conexo $\Omega^d = W^u(Q^d)$.

A demonstração de que $\Omega^d = W^u(Q^d)$ é limitado é análoga à demonstração de que o atrator global do C^2 -semigrupo $S^d(t)$, $t \geq 0$, estudado no capítulo 3, é limitado. ■

Referências Bibliográficas

- [1] J. HALE. *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, volume 25 of *AMS Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [2] D. HENRY. Evolution equations in banach spaces. notas não publicadas. 1981.
- [3] D. HENRY. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, volume 840 of *Lectures Notes in Math*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] H. MATANO. Asymptotic behaviour and stability of solutions of semilinear diffusion equations. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, (15):401–454, 1979.
- [5] M. MIKLAVCIC. Stability for semilinear equations with nonlinear operator. *Pacific J. Math*, (118):199–214, 1985.
- [6] C. ROCHA. Bifurcations in discretized reaction-diffusion equations. *Resenhas*, 1(4):1–16, 1994.
- [7] N. DUNFORD & J. T. SCHWARTZ. *Linear Operators, II*. Pure and Applied Mathematics. Willey-Interscience, 1971.
- [8] C M. ELLIOTT & A M. STUART. The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(6):1622–1663, 1993.
- [9] R. TEMAN. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] G. F. WEBB. A bifurcation problem for a nonlinear hyperbolic partial differential equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 10(5), September 1979.