**Superfícies Mínimas Completas
entre Dois Planos Paralelos no $\mathbb{R}^3$**

Valério Ramos Batista

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientador: **Prof. Plínio Amarante Quirino Simões**

- São Paulo, setembro de 1996 -

Superfícies Mínimas Completas entre Dois Planos Paralelos no $\mathbb{R}^3$

Este exemplar constitui-se no texto final da dissertação,
corrigido e defendido por Valério Ramos Batista,
aprovado pela banca examinadora.

São Paulo, 25 de setembro de 1996.

Comissão examinadora:

- Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões (Presidente) IME - USP
- Profa. Dra. Maria Elisa Galvão Gomes de Oliveira IME - USP
- Prof. Dr. Celso José da Costa UFF

À minha mãe, Carmen Miranda Ramos Batista.

Resumo

Este trabalho baseia-se no estudo das construções de exemplos de superfícies mínimas completas, com a característica de possuírem uma de suas coordenadas limitada em $\mathbf{R}^3$. Estes exemplos variam desde a simples prova da existência, onde emprega-se um importante resultado, que é o Teorema de Runge, até a obtenção de tais superfícies com propriedades especiais, ou seja, gênero e tipo conforme previamente especificados. Várias ferramentas de grande poder são introduzidas ao longo dos capítulos, tais como a representação de Weierstrass em $\mathbf{R}^n$, as séries de potência com lacunas de Hadamard, alguns resultados de Topologia Algébrica e de Superfícies de Riemann. Por último, são tratadas extensões para $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}^n$, $n \geq 4$, e elaboração de gráficos.

Abstract

This work is based on the survey of the construction of complete minimal surfaces, with the characteristic of having one of its coordinates limited in $\mathbf{R}^3$. Those examples vary since the proof of their existence, in which an important result is applied, the Runge's Theorem, until the construction of such surfaces with special properties, such as previously specified genus and conformal type. Several powerful tools are introduced along the chapters, such as the Weierstrass' Representation in $\mathbf{R}^n$, the power series with Hadamard gaps, some results on Algebraic Topology and on Riemann Surfaces. Finally we deal with extensions to $\mathbf{R}^4$ and $\mathbf{R}^n$, $n \geq 4$, and graphics' plotting.

Agradecimentos

Inúmeras foram as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho. Em especial, devo o meu muito obrigado:

- ┌ ao meu orientador, Prof. Plínio Amarante Quirino Simões, de quem muitas vezes discordei, mas o tempo ajudou-me a dar-lhe razão,
- ┌ aos meus professores de curso, pelos ensinamentos, que foram amplamente utilizados, e pela paciência e dedicação,
- ┌ aos meus amigos Alberto, Pedro e Márcia, na impressão dos rascunhos e da versão final.

Conteúdo

	pag
Introdução	I
Capítulo Zero - Preliminares	
§1. Variedades Diferenciáveis, Vetores, Plano Tangente e Métrica Riemanniana	01
§2. Superfícies Mínimas, Parâmetros Isotérmicos e Funções Harmônicas	03
§3. Superfícies de Riemann, Funções Diferenciáveis e Formas	06
§4. Integração de Formas Diferenciáveis	09
Capítulo I - A Representação de Weierstrass em $\mathbf{R}^n$ e a Aplicação Normal de Gauss	
§1. Representação de Weierstrass	11
§2. A Aplicação Normal de Gauss	15
Capítulo II - Os Primeiros Exemplos de Superfícies Mínimas Completas Reversas entre Dois Planos Paralelos do $\mathbf{R}^3$	
§1. O Exemplo de L. P. M. Jorge e F. Xavier	16
§2. O Exemplo de E. Toubiana e H. Rosenberg	21
§3. O Exemplo de F. F. Brito	24
Capítulo III - Superfícies Mínimas Completas Reversas de Gênero Arbitrário entre Dois Planos Paralelos do $\mathbf{R}^3$	
§1. O Primeiro Grupo Fundamental	27
§2. Espaços de Recobrimento e Recobrimento Holomorfo Ramificado	29
§3. Homologia Singular	30
§4. Feixes, Gérmenes de Função e Continuação Analítica	32
§5. Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta	33
§6. Homologia do n-Toro Menos um Número Finito de Pontos	34
§7. O Exemplo de C. J. Costa e P. A. Q. Simões	40

Capítulo IV - Superfícies Mínimas Completas Hiperbólicas de Tipo Conforme Arbitrário

§1. Divisores em uma Superfície de Riemann	47
§2. O Teorema das Lacunas de Noether	49
§3. O Exemplo de F. J. López	51

Capítulo V - Superfícies Mínimas Completas Não-Orientáveis entre Dois Planos Paralelos do $\mathbf{R}^3$

§1. Alguns Conceitos e Resultados Básicos sobre Superfícies Não-Orientáveis	59
§2. O Exemplo Não-Orientável de F. J. López	63

Capítulo VI - Extensões de Resultados, Análise Comparativa e Gráficos

§1. Superfícies Mínimas Completas em $\mathbf{R}^4$ Limitadas por Dois Pares de Hiperplanos	69
§2. Comparação entre os Métodos	71
§3. Cálculo de Erros	73
§4. Gráficos	74

Tabela de Símbolos	83
--------------------	----

Bibliografia	85
--------------	----

Introdução

A primeira idéia para a resolução do problema sugerido por E. Calabi, se era possível obter-se uma superfície mínima completa reversa inteiramente contida em um semi-espaço do $\mathbf{R}^3$, proveio da proposta de Remmert em usar o Teorema de Runge para construir mergulhos analíticos próprios do disco unitário $D \subset \mathbf{C}$ em $\mathbf{C}^3$.^[1]

Antes do fechamento desta questão, alguns resultados já eram conhecidos. A saber:

- (1) uma superfície que minimiza área globalmente e está contida em um semi-espaço do $\mathbf{R}^3$ é necessariamente um plano [Miranda].
- (2) existem superfícies completas de curvatura média constante não nula, situadas entre dois planos paralelos do $\mathbf{R}^3$ [Lawson].
- (3) não existe superfície mínima completa reversa com curvatura total limitada imersa em $\mathbf{R}^n$. Em particular, uma superfície mínima completa reversa em $\mathbf{R}^n$ com curvatura total limitada é um subconjunto ilimitado do $\mathbf{R}^n$ (em todas as direções)^[2]

Em 1980 foi publicada a resolução de L. P. M. Jorge e F. Xavier para o problema de E. Calabi, na qual um resultado ainda mais forte era obtido, ou seja, a existência de uma tal superfície entre dois planos paralelos. A este trabalho seguiram-se os de E. Toubiana e H. Rosenberg, de F. J. López (que deu exemplos não-orientáveis de tais superfícies), de F. F. Brito (que obteve uma demonstração construtiva para o problema), e finalmente de C. J. Costa e P. A. Q. Simões, e F. J. López, mostrando que tais superfícies podem ter um gênero e um tipo conforme pré-estabelecido.

Algumas questões, no entanto, permanecem em aberto:

- (1) haveria uma tal superfície mergulhada em $\mathbf{R}^3$?
- (2) existe superfície mínima completa inteiramente contida em um cilindro do $\mathbf{R}^3$?
- (3) existe superfície mínima completa totalmente limitada em $\mathbf{R}^3$?

Há pouco tempo a questão (3) para o $\mathbf{R}^4$ foi respondida afirmativamente.

O objetivo deste trabalho é justamente analisar os exemplos em $\mathbf{R}^3$ acima mencionados. O texto encontra-se dividido em sete capítulos, numerados de 0 a 6. Toda referência a um resultado anterior do texto é feita com os seguintes números de

[1] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1962)

[2] L. P. M. Jorge, F. Xavier, *On the existence of complete bounded minimal surfaces in $\mathbf{R}^n$* , BOL. SOC. BRAS. MAT., Vol. 10, Nº 2 (1979), 171-174

indentificação: (capítulo).(parágrafo).(item), sendo que o primeiro é omitido quando o resultado se encontra no mesmo capítulo da referência. No capítulo zero fornecemos algumas definições e resultados importantes para o entendimento das demonstrações posteriores. Apesar de que muitos já possam estar familiarizados com certos termos, a leitura deste capítulo é recomendada, pois vários conceitos foram fortemente direcionados, de modo a tornar a linguagem mais clara e concisa.

No capítulo I demonstra-se a Representação de Weierstrass em $\mathbf{R}^n$, um poderoso resultado que nos fornece uma condição necessária e suficiente para a construção de todas as superfícies mínimas orientáveis de $\mathbf{R}^n$.

O capítulo II é dedicado aos primeiros exemplos em $\mathbf{R}^3$ orientáveis. Duas ferramentas importantes são introduzidas: o Teorema de Runge e as séries de potência com lacunas de Hadamard. Na verdade, são a parte mais importante na construção destes exemplos.

O capítulo III inicia-se com um resumo de Topologia Algébrica e Superfícies de Riemann, que são teorias extremamente poderosas, indispensáveis para uma demonstração clara do resultado de C. J. Costa e P. A. Q. Simões.

No capítulo IV também introduzimos um resultado fabuloso, que é o Teorema das Lacunas de Noether, e o conceito de Divisores em uma superfície de Riemann, que constitui-se apenas numa linguagem simplificada de localização de pólos e zeros, com suas respectivas ordens.

Dedicamos o capítulo V aos exemplos de superfícies mínimas completas não-orientáveis, entre dois planos paralelos do $\mathbf{R}^3$. Devido à grande importância dos resultados sobre superfícies não-orientáveis, estes são expostos de uma forma mais geral, para serem particularizados somente quando da construção do exemplo de F. J. López.

Finalmente, o capítulo VI trata de algumas extensões imediatas de resultados em $\mathbf{R}^4$ e em $\mathbf{R}^n$, além de uma avaliação comparativa entre os artigos, e alguns gráficos aproximativos de uma superfície mínima completa reversa em $\mathbf{R}^3$, limitada por dois planos paralelos.

CAPÍTULO ZERO

Preliminares

Nesta parte daremos algumas definições básicas que serão usadas em todos os capítulos subsequentes. Nem todas são expostas de modo direto pois necessitam de conceitos prévios, aos quais alguns leitores podem não estar habituados. É o que ocorre por exemplo com as formas diferenciáveis. No entanto, aqui encontra-se somente um resumo que não se faz suficiente para uma boa familiarização com estes termos. A intenção é apenas permitir um entendimento melhor das demonstrações, direcionando a linguagem para os artigos aqui abordados.

1. Variedades Diferenciáveis, Vetores, Plano Tangente e Métrica Riemanniana

1.1 Definição Uma *variedade diferenciável de dimensão 2*, ou uma *2-variedade C^∞* , é um espaço topológico M de Hausdorff com base enumerável, munido de uma família $\Sigma(M)$ de homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, U_i aberto de M , V_i aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

- (1) $\bigcup_i U_i = M$
- (2) $\forall i, j$ com $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_i(W)$ e $\varphi_j(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^2$ e $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe C^∞
- (3) Dado um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, onde U é subconjunto aberto de M , V é aberto em $\mathbb{R}^2$, e $\{(\varphi, U)\} \cup \Sigma(M)$ satisfazendo (2), tem-se $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$. Ou seja, $\Sigma(M)$ é maximal.

Os elementos de $\Sigma(M)$ são chamados *cartas* da variedade M .

1.2 Definição Sejam M e N 2-variedades C^∞ . Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita *diferenciável em M* se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^∞ , para toda carta (φ, U) de M e toda carta (ψ, V) de N , tais que $f(U) \subset V$. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$, para toda carta (φ, U) de M é também dita *diferenciável*, e o conjunto de todas as funções diferenciáveis neste sentido é representado por $\mathcal{J}(M)$. Mais adiante nós introduziremos o conceito de superfície de Riemann, e neste caso o termo *função diferenciável* será usado em um sentido mais particular.

1.3 Definição Se M é uma 2-variedade C^∞ e $v_p: \mathcal{I}(M) \rightarrow \mathbf{R}$ é tal que $v_p[af+bg] = av_p[f] + bv_p[g]$ e $v_p[f \cdot g] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$ para quaisquer $a, b \in \mathbf{R}$ e $f, g \in \mathcal{I}(M)$, então v_p é um *vetor tangente a M em p* .

Exemplo: se M é uma 2-variedade C^∞ , $(z = (x, y), U) \in \Sigma(M)$ e u, v são os parâmetros em $\mathbf{R}^2$, defina $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p(f) = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial u}(z(p))$, $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p(f) = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial v}(z(p))$, $\forall f \in \mathcal{I}(M)$. Então $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$ e $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$ são vetores tangentes a M em p .

1.4 Proposição

Seja M uma 2-variedade C^∞ e $(z = (x, y), U)$ uma carta local em $p \in M$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial real de dimensão 2, gerado por $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$ e $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$. Este espaço independe da carta $(z = (x, y), U)$ e iremos indicá-lo por $T_p M$.

Prova: [Gray] - pag 515.

1.5 Definição O espaço $T_p M$ acima descrito é o *plano tangente a M em p* .

1.6 Definição Sejam M e N 2-variedades C^∞ , $p \in M$ e $v_p \in T_p M$. Se $f: M \rightarrow N$ é diferenciável, a aplicação $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, dada por $(df)_p(v_p)[g] = v_p[g \circ f] \quad \forall g \in \mathcal{I}(M)$, é dita a *diferencial de f em p* .

1.7 Definição Uma *curva C^1 por partes* é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow M$, I intervalo aberto, semi-aberto ou fechado de $\mathbf{R}$, em que $z \circ \gamma$ é C^1 por partes, qualquer que seja $(z, U) \in \Sigma(M)$ para a qual a composição faz sentido. Dizemos que $\gamma'(t_0)[f] = \frac{\partial(f \circ \gamma)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$, $t_0 \in I$, para toda $f \in \mathcal{I}(M)$, é o *vetor tangente a γ em t_0* .

Observação: se $\gamma(t_0) = p$, então $\gamma'(t_0) \in T_p M$.

1.8 Definição O traço de γ é o conjunto $\{\gamma\} = \gamma(I)$.

1.9 Definição Seja M uma 2-variedade C^∞ . Para cada $\alpha = (z, U) \in \Sigma(M)$ considere uma matriz simétrica positiva definida 2×2 $G_\alpha = (g_{ij})$, $g_{ij} \in \mathcal{F}(U)$. Suponhamos que para quaisquer α, β em $\Sigma(M)$, $\alpha = (z, U)$, $\beta = (w, V)$, com $U \cap V \neq \emptyset$, tenhamos o seguinte: se J é a matriz jacobiana de $z \circ w^{-1}$, então $G_\alpha = J^t G_\beta J$. Neste caso, dizemos que a família de matrizes G_α é uma *métrica Riemanniana* em M (notação: ds^2 ou $\langle, \rangle$). Se $p \in U$ e $(z = (x, y), U) \in \Sigma(M)$, definimos o produto interno em $T_p M$ a partir dos produtos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\rangle = g_{11}(p), \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\rangle = g_{12}(p) \text{ e } \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\rangle = g_{22}(p).$$

1.10 Definição Um *caminho* em M é uma curva C^1 por partes $\gamma: I \rightarrow M$. Ele é dito *divergente*, se $I = [0, b[$, $0 < b \leq \infty$, e para cada compacto $Q \subset M$, existe $t_0 \in I$ tal que $p(t) \notin Q$, para todo $t \in]t_0, b[$. Usaremos, de um modo abreviado, que $\gamma: p \sim q$ é um caminho em M ligando p a q , isto é, $\text{Dom}(\gamma) = [x, y]$ (intervalo fechado), $\gamma(x) = p$ e $\gamma(y) = q$.

1.11 Definição Uma 2-variedade diferenciável M é *completa* com respeito a uma métrica Riemanniana ds^2 se $\int_0^b \|\gamma'(t)\| dt = \infty$ para todo caminho divergente $\gamma: [0, b[\rightarrow M$, onde $\|\gamma'(t)\|^2 = ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$.

2. Superfícies Mínimas, Parâmetros Isotérmicos e Funções Harmônicas

2.1 Definição Uma *superfície* em $\mathbb{R}^n$ é um par (M, X) onde M é uma 2-variedade diferenciável e $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão C^∞ , isto é, $X \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$ e $d(X \circ \varphi^{-1})$ é injetiva para toda $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$. Como é mostrado abaixo, X induz uma métrica Riemanniana em M . Diremos que uma superfície $S = (M, X)$ é *completa* se M for completa, relativamente à métrica Riemanniana induzida por X sobre M .

Observação: se $p \in U$ e $d(X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é injetiva para alguma carta (φ, U) de M , então $d(X \circ \psi^{-1})(\psi(p))$ é também injetiva, onde $(\psi, V) \in \Sigma(M)$ e $p \in V$.

Considere u, v os parâmetros em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$. De um modo abreviado temos $d(X \circ \varphi^{-1}) = [X_u \ X_v]$. Portanto, $G = [X_u \ X_v]^t \cdot [X_u \ X_v]$ é uma matriz 2×2 simétrica, e $\det G \neq 0$. Neste caso, se $G = (g_{ij})$, defina $H = (g_{22}X_{vv} - 2g_{12}X_{uv} + g_{11}X_{uu}) / (2 \cdot \det G)$. Vemos por [Osserman] - pp 11-3 que H não depende de $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$.

2.2 Definição O vetor $H = H(p)$ acima descrito é o *vetor curvatura média* de S em p . S é uma *superfície mínima* se $H = 0$ para todo ponto de S . Uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ é *reversa* se $X(M)$ não for subconjunto de um hiperplano em $\mathbb{R}^n$. Também, dizemos que $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *imersão mínima*.

2.3 Definição Os parâmetros u, v são *isotérmicos* se $g_{11} \equiv g_{22}$ e $g_{12} \equiv 0$ em $\varphi(U)$.

2.4 Lema

Seja $S = (M, X)$ uma superfície mínima. Então, para todo $p \in S$, existe uma carta (φ, U) de M , com $p \in \varphi(U)$, tal que os parâmetros em U são isotérmicos.

Prova: [Osserman] - pag 31.

Observação: agora nós daremos um resultado mais forte, cuja prova não é tão elementar como a deste último. No entanto, ele nos permite concluir que toda 2-variedade C^∞ conexa M possui uma coleção de cartas $\Sigma' \subset \Sigma(M)$ tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos, para toda $(\varphi, U) \in \Sigma'$, e a família Σ' verifica os itens (1) e (2) da Definição 1.1.

2.5 Teorema Dada uma 2-variedade C^∞ M , para todo $p \in M$, existe uma carta (φ, U) de M , com $p \in U$, tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos.

Prova: [Hicks] - pag 139.

Considere uma superfície $S = ((M, \Sigma(M)), X)$. Se nós excluirmos todas as cartas de $\Sigma(M)$ nas quais os parâmetros não são isotérmicos, obteremos uma nova superfície $S' = ((M, \Sigma'), X)$, onde as composições como em (2) na Definição 1.1 são aplicações conformes ou anti-conformes (veja [Osserman] - pag 33). Nesta nova superfície, se existir um subconjunto Σ'' de Σ' tal que (1) se verifica para Σ'' , e em (2) as composições são todas conformes, dizemos que S é *orientável*, e Σ'' é uma *estrutura conforme* de M . Caso contrário, S é dita *não-orientável*.

2.6 Definição Sejam u e v os parâmetros em $\mathbf{R}^2$, e U um subconjunto aberto do $\mathbf{R}^2$. O *operador de Laplace* é a aplicação $\Delta: \mathcal{F}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}$, dada por $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$.

2.7 Definição Seja M uma 2-variedade C^∞ com uma estrutura conforme Σ . Uma função $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ é dita *harmônica* se $\Delta(f \circ \varphi^{-1}) \equiv 0$ em $\varphi(U)$, para toda carta $(\varphi, U) \in \Sigma$.

2.8 Lema

Considere uma superfície $S = (M, X)$ em $\mathbf{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e M com uma estrutura conforme Σ . Então S é mínima se, e somente se, x_k é harmônica para todo k .

Prova:

Seja $(\varphi, U) \in \Sigma$, e como X é imersão C^∞ , $x_k \circ \varphi^{-1}$ é $C^\infty \forall k$. Se u e v são os parâmetros de $\mathbf{R}^2$, estes são isotérmicos pois Σ é conforme. Considere $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ o operador de Laplace, e denote $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = (\Delta(x_1 \circ \varphi^{-1}), \Delta(x_2 \circ \varphi^{-1}), \dots, \Delta(x_n \circ \varphi^{-1}))$. Usando as mesmas notações da Definição 2.6, seja $\lambda^2 = g_{11}$. Por [Osserman] - pp 27,28, temos $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 2\lambda^2 H$.

Vimos que H independe da carta. Introduzindo o operador de Laplace-Beltrami, dado por $\Delta = \lambda^{-2} \Delta$, chegamos a uma importante relação, de onde concluímos o Lema: $\Delta X = 2H$. $\square$

2.9 Teorema (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas)

Seja G um aberto conexo de $\mathbf{C}$, $u: G \rightarrow \mathbf{R}$ uma função harmônica. Se existe $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z)$, para todo $z \in G$, então $u \equiv u(a)$ em G .

Prova: [Conway] - pag 255.

2.10 Proposição

Uma superfície mínima não pode ser compacta, isto é, se $S = (M, X)$ é mínima, então M não é compacto.

Prova:

Senão, as funções x_k atingiriam um máximo, portanto seriam constantes, mas X é uma imersão. Quer dizer, se $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e M é compacto e conexo, seja m o valor máximo de u . Os conjuntos $A = \{p \in M: u(p) = m\}$ e $B = \{p \in M: u(p) \neq m\}$ são ambos abertos e disjuntos, e $M = A \cup B$ ($\cup$ representa uma união disjunta). Então $B = \emptyset$. $\square$

3. Superfícies de Riemann, Funções e Formas Diferenciáveis

3.1 Definição Uma *superfície de Riemann* é uma 2-variedade de classe C^∞ M , onde M é conexo e as composições como em (2) na Definição 1.1 são todas holomorfas, com a identificação $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Observação: o Lema 2.4 nos garante que toda 2-variedade C^∞ conexa orientável admite um subsistema de cartas que a torna uma superfície de Riemann.

3.2 Definição Sejam M e N superfícies de Riemann. Uma função $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ é *diferenciável em* M se $\operatorname{Re}(f \circ x)$ e $\operatorname{Im}(f \circ x)$ são C^∞ , para toda carta (z, U) de M . O conjunto de todas as funções diferenciáveis em M será denotado por $\mathcal{E}(M)$.

3.3 Definição Se M e N são superfícies de Riemann, uma função $f: M \rightarrow N$ é dita *holomorfa* (ou *anti-holomorfa*) se $y^{-1} \circ f \circ x$ for holomorfa (ou anti-holomorfa), para toda carta (x, U) de M e toda carta (y, V) de N , com $f(U) \subset V$. O conjunto de todas as funções holomorfas em M para $N = \mathbb{C}$ e $(\operatorname{id}, \mathbb{C}) \in \Sigma(N)$ será denotado por $\mathcal{H}(M)$.

3.4 Definição Nas mesmas notações acima, f é *biholomorfa* se for holomorfa e bijetora.

3.5 Definição Considere M e N como na Definição 3.3. Se $N = \hat{C}$ e $(id, C) \in \Sigma(N)$, vamos denotar por $\mathcal{M}(M)$ o conjunto de todas as funções holomorfas em M , excluindo-se a função constante $= \infty$. Uma função *meromorfa* em M é um elemento de $\mathcal{M}(M)$.

3.6 Definição Se V é um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbf{R}$, defina em $V \times V$ as operações $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ e $(\alpha + i\beta) \cdot (u, v) = (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u)$. Então $(V \times V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbf{C}$, o *complexificado* de V , que denotamos por $V^{\mathbf{C}}$. Também podemos identificar $(u, 0) \equiv u$ e $(v, 0) \equiv v$.

Observação: uma vez que toda $f \in \mathcal{E}(M)$ pode ser escrita como $f = f_1 + if_2$, onde $f_1, f_2 \in \mathcal{J}(M)$, podemos estender a definição de vetor tangente para $\mathcal{E}(M)$, isto é, $v_p[f] = v_p[f_1] + iv_p[f_2]$, e $v_p: \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbf{C}$ é tal que $v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g]$ e $v_p[f \cdot g] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$, para quaisquer $a, b \in \mathbf{C}$ e $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Em $(T_p M)^{\mathbf{C}}$ definimos $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

Deste modo, $f \in \mathcal{O}(M)$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ em M .

No que segue, estaremos considerando os espaços complexificados.

3.7 Definição Seja $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$. Um *campo de vetores tangentes* em M é uma aplicação $X: M \rightarrow TM$ onde $X(p) \in T_p M$, para todo p . Um campo X é *diferenciável* se $X[f] \in \mathcal{E}(M)$, para toda $f \in \mathcal{E}(M)$, onde $X[f](p) = (X(p))(f)$, para todo p . Denote por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores em M .

3.8 Definição Para um espaço vetorial V , seja V^* seu dual e $(TM)^* = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$. Uma aplicação $\omega: M \rightarrow (TM)^*$, onde $\omega(p) \in (T_p M)^* \forall p$, é dita *1-forma sobre M* . Ela é *diferenciável*, *holomorfa* ou *meromorfa* conforme $\omega[X] \in \mathcal{E}(M)$, $\mathcal{O}(M)$ ou $\mathcal{M}(M)$, respectivamente, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Os conjuntos das 1-formas diferenciáveis, das holomorfas e das meromorfas em M serão denotados respectivamente por $\mathcal{E}^{(1)}(M)$, $\Omega(M)$ e $\mathcal{M}^{(1)}(M)$.

Usaremos na próxima definição o seguinte resultado: não existe $f \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$ tal que $f = \infty$ ou $f = 0$ num conjunto com pontos de acumulação em M (vide [Forster] - pag 7). Deste modo, os zeros e os pólos de uma função meromorfa não-nula são isolados.

3.9 Definição Seja N uma superfície de Riemann, $p \in N$ e $\Sigma(N)$. Se $f \in \mathcal{M}(N)$ e :

$$\text{ord}_p(f) = \text{ord}(p;f) = \begin{cases} k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um zero de ordem } k \in \mathbb{N} \text{ em } z(p) \\ -k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um pólo de ordem } k \in \mathbb{N} \text{ em } z(p) \\ \infty, & \text{se } f \equiv 0 \text{ numa vizinhança de } p, \end{cases}$$

dizemos que $\text{ord}(p;f)$ é a *ordem de f em p* (esta definição independe de $(z,U) \in \Sigma(N)$).

3.10 Proposição

Seja M uma 2-variedade C^∞ , $p \in U \subset M$, U aberto. Então existem $\varphi \in \mathcal{E}(M)$ e vizinhanças V, W de p tais que $V \subset W \subset U$ e : (1) $0 \leq \varphi(q) \leq 1 \quad \forall q \in M$; (2) $\varphi|_V \equiv 1$ e $\varphi|_{M-W} \equiv 0$.

Prova: [Gray] - pag 506.

Observação: a proposição acima é um resultado útil em várias circunstâncias. Por exemplo, para uma carta local $(z = x+iy, U)$, seja $\{dx, dy\}$ a base dual de $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$. Se $X \in \mathcal{X}(M)$, então $X|_U = f.(\partial/\partial x) + g.(\partial/\partial y)$. Vejamos que $f, g \in \mathcal{E}(U)$. Pela definição de diferenciabilidade para X , caso $\text{Dom}(x) = M$, podemos fazer $X[x] = f \in C^\infty$. Senão, consideramos $\varphi.x$. Do mesmo modo, se $\omega \in \mathcal{E}^\omega(M)$, então $\omega|_U = \eta.dx + \xi.dy$, onde $\eta, \xi \in \mathcal{E}(U)$. Em particular, se $\omega \in \mathcal{M}^\omega(M)$, $\omega[\partial/\partial x] = \eta$ e $\omega[\partial/\partial y] = \xi$ são holomorfas a menos de alguns pontos isolados, portanto $2.\omega|_U = (\eta - i\xi).dz$, onde $dz = dx + idy$, e neste caso $(\eta - i\xi) \in \mathcal{M}(U)$. Também denota-se $d\bar{z} = \bar{d}z = dx - idy$. Deste modo, caso $(\eta - i\xi)$ tenha um pólo (ou zero) em $p \in M$, dizemos que p é um *pólo* (ou *zero*) de ω . A Definição 3.9 estende-se para as 1-formas, e independe da carta (vide [Forster] - pp 57-8).

3.11 Definição Se V é um espaço vetorial complexo de dimensão 2, considere $\Lambda^2 V = \{u \wedge v : u, v \in V\}$, onde $u \wedge v = -v \wedge u$, $(u+v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$ e $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$, para quaisquer u, v em V e qualquer número complexo λ . Temos então que $\Lambda^2 V$ é um espaço vetorial. Considere $\Lambda^2(TM)^* = \bigcup_{p \in M} \Lambda^2(T_p M)^*$. Uma 2-forma em M é uma aplicação $\omega : M \rightarrow \Lambda^2(TM)^*$, onde $\omega(p) \in \Lambda^2(T_p M)$ para todo $p \in M$. Ela é *diferenciável*, *holomorfa* ou *meromorfa* se para

toda carta $(z = x+iy, U)$ de M , tem-se $\omega|_U = f \cdot dx \wedge dy$, com $f \in \mathcal{E}(U)$, $\mathcal{O}(U)$ ou $\mathcal{M}(U)$, respectivamente. O conjunto de todas as 2-formas diferenciáveis em M será denotado por $\mathcal{E}^{(2)}(M)$.

3.12 Definição Considere $f \in \mathcal{E}(M)$ e $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, para cada $(z = x+iy, U) \in M$. Então $df \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$. Se $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, com $\omega|_U = g \cdot dx + h \cdot dy$, $g, h \in \mathcal{E}(U)$, defina $d\omega = (dh - dg) \cdot dx \wedge dy$, que é uma 2-forma diferenciável em M ; ω é *fechada* se $d\omega \equiv 0$ em M .

4. Integração de Formas Diferenciáveis

4.1 Definição Seja M uma superfície de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, e $c: I \rightarrow M$ uma curva C^1 por partes. Como $c(I)$ é compacto, existe uma partição de I , $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tal que para cada $i = 1, \dots, n$, $c: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M$ é C^1 e $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para algum $(z_i = x_i + iy_i, U_i) \in \Sigma(M)$. Em cada U_i temos $\omega = f_i \cdot dx_i + g_i \cdot dy_i$, e deste modo definimos:

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f_i(c(t)) \cdot \frac{dx_i(c(t))}{dt} + g_i(c(t)) \cdot \frac{dy_i(c(t))}{dt}) dt$$

Observação: esta definição independe das cartas e das partições escolhidas.

Agora iremos introduzir o seguinte: dadas duas curvas $\alpha, \beta: I \rightarrow M$, diremos que α e β são *livremente homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H: I \times I \rightarrow M$ tal que $H(\cdot, 0) = \alpha$, $H(\cdot, 1) = \beta$ e $H(0, \cdot) = H(1, \cdot)$. Este termo será retomado no Capítulo III.

4.2 Proposição

Seja M uma superfície de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ fechada e $\alpha, \beta: I \rightarrow M$ duas curvas fechadas, C^1 por partes, e livremente homotópicas. Então $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.

Prova: [Forster] - pp 66,67.

Observação: A relação de homotopia livre entre curvas é uma relação de equivalência, que iremos denotar por $\sim$. Vamos indicar por $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as curvas em M . A proposição anterior nos garante que a integral sobre um elemento de $\mathcal{C}/\sim$ está bem definida.

4.3 Definição Considere $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ fechada. Para cada $\alpha \in \mathcal{C}/\sim$, o valor complexo $a_\alpha = \int_\alpha \omega$ é um *período de ω* . Dizemos que ω *não tem períodos reais* se $\operatorname{Re}(a_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}/\sim$. Uma *primitiva de ω* é uma função $f \in \mathcal{E}(M)$ tal que $\omega = df$. Quando existe uma primitiva, dizemos que ω é *exata*.

4.4 Teorema

Seja M superfície de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ fechada. Então ω tem primitiva se, e somente se, todos os períodos de ω são nulos.

Prova: [Forster] - pag 69.

CAPÍTULO I

Representação de Weierstrass em $\mathbb{R}^n$ e a Aplicação Normal de Gauss

Demonstraremos aqui um resultado geral, que será muito utilizado nos capítulos seguintes, e que nos fornece condições necessárias e suficientes para construirmos todas as superfícies mínimas orientáveis de $\mathbb{R}^n$. Apesar do nosso estudo estar voltado para as superfícies em $\mathbb{R}^3$, há algumas consequências imediatas para $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, que são estudadas no capítulo final. No entanto, as demonstrações desta parte são fáceis de se adaptarem ao caso $\mathbb{R}^3$, se este for o interesse especial do leitor.

1. A Representação de Weierstrass

Começaremos introduzindo alguns conceitos:

1.1 Definição Considere a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$: $(z_1, z_2, \dots, z_n) \sim (w_1, w_2, \dots, w_n)$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(z_1, z_2, \dots, z_n) = \lambda \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n)$. O espaço quociente de $\mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ por esta relação de equivalência é o *espaço projetivo complexo*, que denotaremos por $\mathbb{CP}^{n-1}$.

1.2 Definição $Q_{n-2} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{CP}^{n-1} : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}$ é a *quádrica* em $\mathbb{CP}^{n-1}$.

1.3 Proposição

Seja H o hiperplano $z_1 - iz_2 = 0$ em $\mathbb{CP}^{n-1}$. Então existe uma bijeção entre $Q_{n-2}^* = Q_{n-2} - H$ e $\mathbb{C}^{n-2}$ pela correspondência $(z_1, \dots, z_n) = \frac{z_1 - iz_2}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2, i + i \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2, 2\zeta_1, \dots, 2\zeta_{n-2} \right)$, $\zeta_k = \frac{z_{k+2}}{z_1 - iz_2}$, para todo k .

Prova: [Hoffman & Osserman] - pag 27.

1.4 Lema

Dada uma superfície $X = (x_1, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D aberto de $\mathbb{C}$, com parâmetros $u, v \in D$ e

$$\varphi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \text{ onde } z = u + iv, \text{ temos:}$$

a) $\varphi_k(z)$ é analítica em z se, e somente se, x_k é harmônica em u, v

b) u, v são isotérmicos se, e somente se, $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$

c) Se u, v são isotérmicos, então X é uma imersão se, e somente se, $\sum_{k=1}^n |\varphi_k^2| \neq 0$ em D

Prova: [Osserman] - pag 29.

Observação: os itens (a) e (b) são demonstrados sob a hipótese de X possuir *pontos de ramificação*, isto é, pontos isolados nos quais X pode não ser uma imersão.

1.5 Teorema

Considere uma superfície de Riemann M e $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um dos dois casos seguintes:

1) X é a soma direta de funções em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^{n-2}$, onde $x_1 + ix_2 \in \mathcal{O}(M)$ e $(x_3, \dots, x_n)$ define uma superfície mínima em $\mathbb{R}^{n-2}$ com parâmetros isotérmicos locais, a menos de pontos de ramificação nos quais $d(x_3, \dots, x_n)$ pode não ser injetora.

2) $\alpha \in \Omega(M) - \{0\}$, $g_1, \dots, g_{n-2} \in \mathcal{M}(M)$, $\mu_p = \text{ord}_p(\alpha)$, $\nu_p = \max\{\text{ord}_p(g_1), \dots, \text{ord}_p(g_{n-2}), \text{ord}_p(\sum_{k=1}^{n-2} g_k^2)\}$, $\phi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = ((\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2)\alpha, (\frac{i}{2} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2)\alpha, g_1\alpha, \dots, g_{n-2}\alpha)$, α_k sem

períodos reais e $x_k(p) = \text{Re} \int_{p_0}^p \alpha_k$, $k = 1, \dots, n$, $X = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Então, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ define uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ se em (1) $x_1 + ix_2$ é não-constante e $d(x_3, \dots, x_n)$ é injetiva sempre que a derivada de $x_1 + ix_2$ é zero, e em (2) $\mu_p = \nu_p$ para todo $p \in M$. Reciprocamente, toda superfície mínima orientável em $\mathbb{R}^n$ é obtida pela construção anterior.

Observações :

I. Vamos mostrar que o caso (2) implica que x_k é harmônica, para todo k . Considere $(z, U), (w, V) \in \Sigma(M)$, $W = U \cap V \neq \emptyset$, $z = x + iy$ e $w = u + iv$. Em U temos $\alpha_k = \varphi_k \cdot dz = (f + ig) \cdot dz$, e podemos definir $\omega_U = f \cdot dx - g \cdot dy \in \mathcal{E}^{(0)}(U)$. Em V , $\alpha_k = \psi_k \cdot dw = (h + i\sigma) \cdot dw$,

portanto em W vale $\varphi_k \cdot d(z \circ w^{-1} \circ w) = \psi_k \cdot dw$. Então $\psi_k = \varphi_k \cdot \frac{\partial(z \circ w^{-1})}{\partial w} = \varphi_k \cdot (z \circ w^{-1})'$, ou seja, $h + i\sigma = (f + ig) \cdot (z \circ w^{-1})'$. Mas $(z \circ w^{-1})' = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} - i \frac{\partial x}{\partial v}$, $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ e $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$ implica em $(h + i\sigma) \cdot dw = h \cdot du - \sigma \cdot dv + i(h \cdot dv + \sigma \cdot du) = f \cdot (\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u}) \cdot du - g \cdot (\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u}) \cdot dv + if \cdot (\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u}) \cdot dv + ig \cdot (\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u}) \cdot du$. Então $\text{Re}[(h + i\sigma) \cdot dw] = h \cdot du - \sigma \cdot dv = f \cdot (\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv) - g \cdot (\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv) = f \cdot dx - g \cdot dy = \omega_U$ em $W = U \cap V$. Logo, existe $\omega \in \mathcal{E}^0(M)$ tal que $\omega|_U = \omega_U$, para todo U , com $(z, U) \in \Sigma(M)$. Por isso, dizemos que ω_U é *globalizável*, e ω é uma *globalização* de ω_U .

Agora, se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva C^1 por partes fechada, então $\text{Re} \oint_{\gamma} \alpha_k = \oint_{\gamma} \omega = 0$.

Portanto, pelo Teorema 0.4.4 temos $\omega = d\eta$, $\eta \in \mathcal{E}(M)$. Ou seja, $\varphi_k = \partial\eta/\partial x - i\partial\eta/\partial y$. Entretanto, $\eta(p) = \int_{p_0}^p \omega = x_k(p)$, logo $\varphi_k = \partial x_k/\partial x - i\partial x_k/\partial y$ e x_k é harmônica.

II. Os casos (1) e (2) são mutuamente exclusivos pois

$$\alpha_1 - i\alpha_2 = \alpha \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v} = i \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial x_2}{\partial v} \text{ (u + iv variável local)} \Leftrightarrow x_1 + ix_2 \in \mathcal{O}(M).$$

No caso (1), $(x_3, \dots, x_n)$ imersão implica que $x_3, \dots, x_n$ são harmônicas. Logo, $S = (M, X)$ é uma soma direta de superfícies mínimas do $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^{n-2}$.

Prova do Teorema :

Começemos com o caso (2). Sejam $(u+iv, A)$ parâmetros locais logo $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$ e

$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$, portanto u, v são isotérmicos (Lema 1.2). Como $\mu_p \geq \nu_p$, temos que $\varphi_k \in \mathcal{O}(A)$ para

todo k . Mas $\mu_p = \nu_p$ implica que nem todos os $\varphi_k(p)$ se anulam, portanto $\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \neq 0$ em A e

então X é uma imersão (pelo Lema 1.4). No caso (1), defina $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$. Temos $x_1 + ix_2$

analítica se, e somente se $\varphi_1 \equiv i\varphi_2$, e neste caso $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 0$. Uma vez que $(x_3, \dots, x_n) : M \rightarrow \mathbf{R}^{n-2}$ define uma superfície mínima com parâmetros isotérmicos locais (a menos de pontos de

ramificação), temos $\varphi_3^2 + \dots + \varphi_n^2 \equiv 0$, logo $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$. Como φ_k é holomorfa em A , para todo k , então S é mínima a menos de pontos de ramificação. Agora, para $z = u + iv$, tem-se $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ se, e somente se $0 = \frac{\partial}{\partial z}(x_1 + ix_2) = \frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial v} - i \frac{\partial x_1}{\partial v}$. Mas sendo $(x_3, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ uma imersão neste ponto, ainda assim $\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \neq 0$. Portanto S é uma superfície mínima.

Na recíproca, dada uma superfície mínima $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, considere $\omega = dx_k \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$. Tomando $(w=u+iv, A) \in \Sigma(M)$, definimos $\eta_A = (\partial x_k / \partial u) dv - (\partial x_k / \partial v) du \in \mathcal{E}^{(1)}(A)$, globalizável por $\eta \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, ou seja, $\eta|_A = \eta_A$ para todo A , com $(w, A) \in \Sigma(M)$. Logo, $\alpha_k = \omega + i\eta \in \Omega(M)$ e localmente $\alpha_k = \varphi_k(w)dw$, φ_k holomorfa em A , para todo k , e $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$ em A . Há duas únicas possibilidades:

1. $\varphi_1 \equiv i\varphi_2$, portanto $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 0$, portanto $\varphi_3^2 + \dots + \varphi_n^2 \equiv 0$ e a aplicação $(x_3, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ é então constante ou define uma superfície mínima em $\mathbb{R}^{n-2}$ com parâmetros isotérmicos locais (a menos de pontos de ramificação). Então ocorre o caso (1).

2. Se $\varphi_1 \neq i\varphi_2$, $\psi = \varphi_1 - i\varphi_2$ é analítica com zeros isolados, portanto $g_k = \frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_1 - i\varphi_2} \in \mathcal{M}(A)$ estão bem definidas, $k=1, \dots, n-2$, e podem ser globalizadas em $\mathcal{M}(M)$, isto é, $g_k \in \mathcal{M}(M)$ para todo k . Se $\psi(p) \neq 0$, então $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$ implica em $\phi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p))$, que é representante de uma

classe de equivalência em $Q_{n-2}^* = Q_{n-2} \setminus H$, onde H é o hiperplano $z_1 - iz_2 = 0$ em $\mathbb{CP}^{n-1}$. Então, $(g_1(p), \dots, g_{n-2}(p))$ representa um ponto da quádrlica. Agora considere p genérico. O fato de que φ_k é analítica em A e $\varphi_k = g_{k-2} \cdot (\varphi_1 - i\varphi_2) = g_{k-2}\psi$, para $k = 3, \dots, n$, implica que $\mu_p \geq \max\{\text{ord}_p(g_1), \dots, \text{ord}_p(g_{n-2})\}$, e do Lema 1.4 (a), temos que $\varphi_1(p) = (1 - \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2)\psi/2$ implica

em $\mu_p \geq \text{ord}_p(\sum_{k=1}^{n-2} g_k^2)$, de onde $\mu_p \geq \nu_p$. Uma vez que vale a igualdade $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) =$

$\frac{\psi}{2}(1 - \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2, i + i \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2, 2g_1, \dots, 2g_{n-2})$ onde $\psi \neq 0$, por continuidade ela também vale onde $\psi = 0$.

Como X é uma imersão, nem todos os ψ_k se anulam. Portanto $\mu_p = \nu_p$. $\square$

1.6 Proposição

Nas hipóteses do Teorema anterior, X induz uma métrica em M dada por:

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \left| \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2 \right| \right)^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{n-2} |g_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2 \right| \right)^2 \right] |\alpha|^2$$

Prova:

Tome $(z, U) \in \Sigma(M)$. Devido aos parâmetros isotérmicos $u, v \in z(U) \subset \mathbb{C}$, temos $\|X_u\|^2 = \|X_v\|^2 = \lambda^2$, $\lambda > 0$, e $X_u \cdot X_v \equiv 0$. Se $p: [a, b] \rightarrow M$ é uma curva C^1 por partes, $p([a, b]) \subset U$, $c = X(p(a))$ e $d = X(p(b)) \Rightarrow L_c^d(X \circ p) = \int_c^d \|X_u \cdot u'(\tau) + X_v \cdot v'(\tau)\| d\tau$, e uma vez que $\|X_u \cdot u'(\tau) + X_v \cdot v'(\tau)\|^2 = (u'(\tau))^2 \cdot \|X_u\|^2 + (v'(\tau))^2 \cdot \|X_v\|^2 + 2u'(\tau)v'(\tau)X_u \cdot X_v = [(u'(\tau))^2 + (v'(\tau))^2]\lambda^2 = (\lambda \cdot \|p'(\tau)\|)^2$, $L_c^d(X \circ p) = \int_c^d \lambda \|p'(\tau)\| d\tau = \int_p \lambda(z) |dz|$, portanto $ds = \lambda |dz|$. Mas $\lambda^2 \cdot |\alpha|^2 = \|X_u\|^2 \cdot |\alpha|^2 = \|X_v\|^2 \cdot |\alpha|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |\phi_k|^2$. Defina $\sum_{k=1}^{n-2} g_k^2 = g^2 = \mu + i\beta$ e $\delta g = \sum_{k=1}^{n-2} |g_k|^2 - |g^2|$. Logo, $|1 - g^2|^2 + |1 + g^2|^2 + \sum_{k=1}^{n-2} |2g_k|^2 + |4g^2| - |4g^2| = (1-\mu)^2 + \beta^2 + (1+\mu)^2 + \beta^2 + |4g^2| + 4\delta g = 2 + 2(\mu^2 + \beta^2) + 4|g^2| + 4\delta g = 2(1+2|g^2|+|g^2|^2) + 4\delta g = 2(1 + |g^2|)^2 + 4\delta g$. Deste modo, temos $(\lambda \cdot |dz|)^2 = \left[\left(1 + |g^2|/2 \right)^2 + \delta \cdot g/2 \right] |\alpha|^2$. Então ds independe de $(z, U) \in \Sigma(M)$. Portanto este resultado generaliza-se para o caso $p([a, b]) \not\subset U$. $\square$

2. A Aplicação Normal de Gauss

Quando temos uma superfície orientada $S = (M, X)$ em $\mathbb{R}^3$, uma aplicação importante é a Aplicação Normal de Gauss, $N : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, que associa cada ponto $p \in M$ ao vetor normal unitário a $T_p M$ dado por $N = (X_u \wedge X_v) / \|X_u \wedge X_v\|$. Usando as mesmas notações anteriores, prova-se que, se M é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, e as funções $g, f: M \rightarrow \mathbb{C}$ são tais que g e df satisfazem às hipóteses do Teorema 1.5, então temos $N = \left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right)$. Também, se Γ é a projecção estereográfica, $\Gamma \circ N \equiv g$ (veja [Osserman] - pp 66, 67).

CAPÍTULO II

Os Primeiros Exemplos de Superfícies Mínimas Completas Reversas entre Dois Planos Paralelos do $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo apresentamos os primeiros resultados sobre tais superfícies. As provas são baseadas no Teorema de Runge, exceto no caso da superfície de F. F. Brito, que utiliza séries de potência com lacunas de Hadamard. Estes resultados são consideravelmente simples, se comparados com os dos Capítulos III, IV e V. Primeiramente enunciaremos o Teorema de Runge, um resultado muito poderoso, que nos permite aproximar qualquer função analítica por uma racional, em conjuntos compactos.

Teorema de Runge

Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto e $E \subset \hat{\mathbb{C}} - K$ tal que $E \cap V \neq \emptyset$ para cada componente V de $\hat{\mathbb{C}} - K$. Se f é analítica em um aberto contendo K e $\varepsilon > 0$, então existe uma função racional $R = R(z)$ cujos únicos pólos estão em E , e $|f - R| < \varepsilon$ em K .

Prova: [Conway] - pag 198.

1. O Exemplo de L. P. M. Jorge e F. Xavier

Vamos tratar em detalhes o artigo de Luquézio P. M. Jorge e F. Xavier, intitulado A complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ between two parallel planes. No que segue, indicaremos $B_r(a) = B(r,a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, e $(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$. Primeiro, considere:

1.1 Lema

Sejam $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas, D um subconjunto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, e considere $\phi_1 = f(1-g^2)/2$, $\phi_2 = f(1+g^2).i/2$, $\phi_3 = fg$. Se f nunca se anula em D , então a aplicação $X = (x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $x_k = \operatorname{Re} \int \phi_k$, $k = 1, 2, 3$, define uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ cuja métrica induzida em D é dada por $ds = \lambda|dz|$, $\lambda = |f|(1+|g|^2)/2$.

Prova:

Consequência direta do Teorema 1.1.5 e da Proposição 1.1.6, para $M = D$ e $\alpha = f.dz$. $\square$

1.2 Lema

Seja $D_n \subset \mathbb{C}$ uma seqüência de discos fechados centrados na origem, $D_n \subset \overset{\circ}{D}_{n+1}$, para todo n , e $\bigcup D_n \subset D = B_1(0)$. Sejam $K_n \subset D_n$ conjuntos compactos tais que $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset$ e $D - K_n$ é conexo. Se f é uma função holomorfa em uma vizinhança de $A = \bigcup_n K_n$, então existe uma seqüência de funções holomorfas em D que converge uniformemente para f em A , isto é, $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, onde f_n é holomorfa em D , para todo n .

Prova:

Vamos seguir algumas etapas.

I . $D - K_n$ conexo $\Rightarrow \mathbb{C} - K_n$ é conexo. Seja $d(K_n, \mathbb{C} - D) = 2v > 0$, portanto $K_n \subset B_{1-v}(0) = B$. Dados quaisquer dois pontos $p, q \in \mathbb{C} - K_n$, onde p (ou q) $\notin D - K_n$, existe $\gamma : p \sim q$ em $\mathbb{C}$, $\operatorname{Dom}(\gamma) = [0, 1]$. Se $\{\gamma\} \cap K_n \neq \emptyset$, então $\{\gamma\} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ e como $\gamma^{-1}(\overline{B})$ é um fechado de $I = [0, 1]$ então $t_0 = \inf \gamma^{-1}(\overline{B})$ e $t_1 = \sup \gamma^{-1}(\overline{B})$ são tais que $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \in \overline{B} \subset D$. Claramente, $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \notin K_n$. Então existe $\alpha : \gamma(t_0) \sim \gamma(t_1)$ em $D - K_n$. Portanto, existe $\beta : p \sim q$ em $\mathbb{C} - K_n$, $\beta(t) = \alpha(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ e $\beta(t) = \gamma(t)$ caso contrário.

Figura 1

II. $C-(K_n \cup D_0)$ é conexo, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $p, q \in C-(K_n \cup D_0)$, e $\gamma : p \sim q$ em $C-K_n$ é tal que $\{\gamma\} \cap D_0 \neq \emptyset$, temos $t_0 = \inf \gamma^{-1}(D_0) > 0$ e $t_1 = \sup \gamma^{-1}(D_0) < 1$. Como $2\varepsilon = d(K_n, D_0) > 0$ e γ é contínua, existe δ tal que $0 < 2\delta < \min(t_0, 1 - t_1)$ com $\gamma([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \subset B_\varepsilon(\gamma(t_0))$ e $\gamma([t_1 - \delta, t_1 + \delta]) \subset B_\varepsilon(\gamma(t_1))$. Deste modo temos $\gamma(t_0 - \delta/2), \gamma(t_1 + \delta/2) \in (0, r, r + \varepsilon)$, onde $r = \text{raio de } D_0$. Mas $(0, r, r + \varepsilon)$ é conexo, portanto existe $\alpha : \gamma(t_0 - \delta/2) \sim \gamma(t_1 + \delta/2)$ em $(0, r, r + \varepsilon) \subset C-(K_n \cup D_0)$, de onde concluímos que existe $\beta : p \sim q$ em $C-(K_n \cup D_0)$, $\beta(t) = \alpha(t)$, $t \in [t_0 - \delta/2, t_1 + \delta/2]$ e $\beta(t) = \gamma(t)$ caso contrário.

Figura 2

III. Conclusão do Lema. Tome $\varepsilon > 0$ genérico e f analítica em A . Temos $C-K_1$ conexo, então considere $E = \{\infty\}$ e pelo Teorema de Runge, existe um polinômio p_0 tal que $|p_0 - f| < \varepsilon/2$ em D_0 . Podemos tomar dois abertos disjuntos contendo D_0 e K_1 para construir uma analítica $g \equiv f$ em K_1 e $g \equiv p_0$ em D_0 . Como $C-(K_1 \cup D_0)$ é conexo, usamos o Teorema de Runge novamente para obter um polinômio p_1 tal que $|p_1 - g| < \varepsilon/4$ em $K_1 \cup D_0$, ou seja, $|p_1 - p_0| < \varepsilon/4$ em D_0 e $|p_1 - f| < \varepsilon/4$ em K_1 . Pelo mesmo argumento acima, existe um polinômio p_{n+1} tal que $|p_{n+1} - p_n| < \varepsilon/(2^{n+1})$ em D_n e $|p_{n+1} - f| < \varepsilon/(2^{n+1})$ em K_{n+1} . Claramente $\{p_n\}$ é uma seqüência de Cauchy que converge uniformemente para uma função h analítica em D_m , para todo m , portanto analítica em D . Agora, para todo z em A , $z \in K_m$ para algum m e existe $n \geq m$ tal que $|h(z) - p_n(z)| < \varepsilon$. Portanto, $|h(z) - f(z)| \leq |h(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - p_{n-1}(z)| + \dots + |p_m(z) - f(z)| < 2\varepsilon$. Deste modo, para todo $\varepsilon > 0$, existe h analítica em D tal que $|h - f| < 2\varepsilon$ em A . $\square$

1.3 Teorema

Existem superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, completas e reversas, entre dois planos paralelos.

Prova:

Figura 3

Considere a figura acima e os seguintes conjuntos:

$$D_n = \overline{B}_{1-1/n}(0) \subset D, \quad n > 2,$$

$$\hat{K}_n \text{ é o fecho de } (0, 1 - \frac{1}{n-1} + r_n, 1 - \frac{1}{n} - r_n), \text{ onde } r_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3n(n-1)},$$

$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{sgn}(x) = (-1)^n \text{ e } |y| < 1/4\}$ e $K_n = \hat{K}_n - A_n$, onde $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ é a função sinal, dada por $\text{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$ e $\text{sgn}(x) = 1$ se $x \geq 0$.

Seja $E = \bigcup_n K_{2n}$ e $O = \bigcup_n K_{2n+1}$. Diremos que um caminho em D *cruza* K_n se ele intercepta ambos os arcos internos e externos de $\hat{K}_n$, em pontos de K_n .

I. Se α é um caminho divergente em D que não cruza um número infinito de K_n 's em E , nem em O , então α tem comprimento Euclidiano infinito. Temos $\alpha(0) \in D_{n_0}$ para algum n_0 . Sejam $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots$ os compactos que α não cruza, onde $n_{p+1} > n_p \geq n_0$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Se B_n é o fecho de $\hat{K}_n \cap A$, temos que $\{\alpha\} \cap B_{n_i} \neq \emptyset \quad \forall i$, pois α é caminho divergente se, e somente se, para todo $K_{\text{cpt}} \subset D$, existe $t_0 \in \text{Dom}(\alpha)$ tal que $\alpha(t) \notin K$, para todo $t > t_0$ (por definição). Então seja t tal que $\alpha(t) \notin \Delta_1$, onde Δ_1 é o disco fechado de raio $1 - \frac{1}{n_i} - r_{n_i}$ centrado na origem (portanto $\Delta_1 \supset \hat{K}_{n_i}$). Como $\alpha(0) \in D_{n_0} \subset \Delta_2$, onde Δ_2 é o disco aberto de raio $1 - 1/(n_i - 1) + r_{n_i}$ centrado na origem, e $\{\alpha\}$ é conexo, existem $p_1, q_1 \in \alpha([0, t])$ tais que $p_1 \in \partial \Delta_2$ e $q_1 \in \partial \Delta_1$.

Podemos tomar $p_1 = \alpha(t_1)$, $t_1 = \inf \alpha^{-1}(\partial\Delta_2)$ e $q_1 = \alpha(t_2)$, $t_2 = \sup \alpha^{-1}(\partial\Delta_1)$. Temos $\alpha(t_1)$ (ou então $\alpha(t_2)$) $\notin \partial K_{n_1}$, logo $\{\alpha\} \cap B_{n_1} \neq \emptyset$. Agora seja τ_1 tal que $\alpha(\tau_1) \in B_{n_1} \subset D_{n_1}$. Pelo mesmo procedimento feito para t_0 , obtemos $\tau_2 > \tau_1$ tal que $\alpha(\tau_2) \in B_{n_2} \subset D_{n_2}$. Construímos então uma seqüência $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ da qual extraímos uma subsequência alternada de números pares e ímpares, e esta reindexamos por $m \in \mathbb{N}^*$ (é possível pois $n_{p+1} > n_p, \forall p \in \mathbb{N}^*$).

Então $\int_0^\infty \|\alpha'(t)\| dt \geq \sum_{m=1}^\infty \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \|\alpha'(t)\| dt \geq \sum_{m=1}^\infty 1$, pois a distância entre os conjuntos B_{n_p} é maior

ou igual a 1, se p é par e ímpar alternadamente. Portanto α tem comprimento Euclidiano infinito.

II. Conclusão do Teorema. Seja $\{c_n\}$ uma seqüência de reais positivos. A função $F(z) = c_n$, para $z \in (0, 1-1/(n-1), 1-1/n) \supset \hat{K}_n$ é analítica em uma vizinhança de $\bigcup_n K_n$, e pelo Lema 1.2, a escolha $\varepsilon = 1 > 0$ implica que existe h analítica em D tal que $|h - c_n| < 1$ em K_n . Então $g = e^h$ e $f = 1/g$ estão dentro das hipóteses do Lema 1.1, portanto elas definem uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ com x_3 limitada em D e portanto a superfície está entre dois planos paralelos. Ela é reversa pois a projeção esterográfica, composta com a Aplicação Normal de Gauss é a função g (não-constante). Vejamos que ela é completa. Tome D com a métrica induzida pela imersão X e $\alpha: [0, 1[\rightarrow D$ um caminho divergente em D .

1) Se α tem comprimento Euclidiano $L(\alpha)$ infinito, como $\lambda = (|g| + 1/|g|)/2 \geq 1$ temos $\ell(\alpha) =$

$$\int_\alpha ds = \int_0^1 \lambda(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt \geq L(\alpha) = \infty.$$

2) Se α tem comprimento Euclidiano finito $L(\alpha) = b$, vamos considerar α parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha: [0, b[\rightarrow D$, $\|\alpha'\| \equiv 1$. Por (I) vimos que α cruza todos os K_n 's em E (a menos de um número finito deles), ou o faz em O . Suponha o primeiro caso e seja $m \in \mathbb{N}$ tal que α cruza $K_n \in E$, para todo $n \geq m$. Mas $|g| = |e^{c_n} \cdot e^{h-c_n}| = e^{c_n} |e^{h-c_n}| = e^{c_n} \cdot e^{\operatorname{Re}(h-c_n)} e^{-\operatorname{Im}(h-c_n)}$. $-\operatorname{Re}(h - c_n) \leq |\operatorname{Re}(h - c_n)| \leq |h - c_n| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(h - c_n) > -1 \Rightarrow |g| > e^{c_n-1}$ em K_n . Defina $J_n = \{t \in [0, 1[: \alpha(t) \in K_n\}$. Uma vez que $2\lambda = (|g| + 1/|g|) \geq |g|$, então $2\ell(\alpha) \geq$

$$\int_0^b |g(\alpha(t))| dt \geq \sum_{n_{\text{par}} \geq m} \int_{J_n} |g(\alpha(t))| dt \geq \sum_{n_{\text{par}} \geq m} e^{c_n-1} \int_{J_n} dt \geq \sum_{n_{\text{par}} \geq m} e^{c_n-1} r_n. \text{ No segundo caso, temos}$$

$$2\ell(\alpha) \geq \sum_{n_{\text{ímpar}} \geq m} e^{c_n-1} r_n. \text{ Escolhendo } c_n = -\ln r_n, \ell(\alpha) = \infty \text{ e a superfície será completa. } \square$$

2. O Exemplo de E. Toubiana e H. Rosenberg

Analisemos agora o artigo A cylindrical type complete minimal surface in a slab of $\mathbb{R}^3$, de E. Toubiana e H. Rosenberg.

2.1 Teorema

Existem superfícies mínimas completas entre 2 planos paralelos, em $\mathbb{R}^3$, parametrizadas por um anel.

Prova:

Figura 4

Tome $A = (0, 1/r, r)$, $r > 1$ e $D = B_r(0)$. Seja $\{K_n\}$ uma sequência de compactos em $(0, 1/r)$, similar ao caso anterior. Considere $I: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $I(z) = -1/\bar{z}$ e $K'_n = I(K_n)$. Seja r_n a diferença entre os raios externo e interno de K_n , e r'_n entre os de K'_n . Como para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 1$ implica em $1/b - 1/a = (a - b)/ab < a - b$, temos $0 < r'_n < r_n$. Considere $\{c_n\}$ uma sequência de números positivos. Pelo Lema 1.2, existe F_1 analítica em D tal que $|F_1(z) - c_n| < 1$, para todo $z \in K_n$. Mas $z \in K'_n$ se, e somente se, $-1/\bar{z} \in K_n$. Logo, $|F_1(-1/\bar{z}) - c_n| = |\bar{F}_1(-1/\bar{z}) - c_n| < 1$, para todo z em K'_n .

Pelas Equações de Cauchy-Riemann, vemos que $\bar{F}_1 \circ I$ é analítica em A , e portanto $F = F_1 - \bar{F}_1 \circ I$ é analítica em A . Como F_1 é contínua em D , $|F_1| < \alpha$ se $|z| < 1$. Então, $z \in K_n$ implica que $|F_1(-1/\bar{z})| < \alpha$, e $z \in K'_n$ implica que $|F_1(z)| < \alpha$.

Temos $|\operatorname{Re}(F(z)) - c_n| \leq |F(z) - c_n| = |F_1(z) - \overline{F}_1(-1/\overline{z}) - c_n| \leq |F_1(z) - c_n| + |\overline{F}_1(-1/\overline{z})| < 1 + \alpha$ se $z \in K_n$. Então $-1 - \alpha < \operatorname{Re}(F(z)) - c_n < 1 + \alpha$ neste caso. Também, $|\operatorname{Re}(-F(z)) - c_n| \leq | - F(z) - c_n| = | - F_1(z) + \overline{F}_1(-1/\overline{z}) - c_n| \leq |F_1(z)| + |\overline{F}_1(-1/\overline{z}) - c_n| < 1 + \alpha$ se $z \in K'_n$. Deste modo,

$$\begin{aligned} -1 - \alpha + c_n &< \operatorname{Re}(F(z)) < 1 + \alpha + c_n, \quad \forall z \in K_n \\ -1 - \alpha + c_n &< -\operatorname{Re}(F(z)) < 1 + \alpha + c_n, \quad \forall z \in K'_n \end{aligned} \quad (1)$$

Agora defina $g(z) = ze^{F(z)}$ e $f(z) = 1/(zg(z)) = e^{-F(z)/z^2}$, ambas analíticas em A , e $f \neq 0$ em A . Usando as mesmas notações do Lema 1.1, $x_3 = \operatorname{Re} \int \phi_3 = \operatorname{Re} \int fg = \operatorname{Re} \int 1/z = 0,5 \ln(x^2 + y^2)$ a menos de uma constante aditiva, onde (x,y) são os parâmetros de plano $\mathbb{C}$. Então x_3 está bem definida e é harmônica em A . Vejamos que o mesmo ocorre para x_1 e x_2 .

Seja $\sigma : [0,1] \rightarrow A$ uma curva C^1 por partes fechada. Se $n(\sigma;0)$ é o índice desta curva, que é sempre um número inteiro, então podemos usar a expansão de Laurent e a convergência uniforme para concluir que $\int_{\sigma} \phi_k = 2\pi i \cdot n(\sigma;0) \cdot \operatorname{Res}(\phi_k, 0)$, $k = 1,2$, onde $\operatorname{Res}(\phi_k, 0)$ é o coeficiente do termo z^{-1} da série. Então, $\operatorname{Re} \int \phi_k$ independe do caminho se, e somente se, $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_k = 0$, onde $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Ou seja, basta mostrar que $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_1 = \operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_2 = 0$. Aplicando a mudança de variáveis $z = z(\overline{u}) = -1/\overline{u}$ (logo $dz = d\overline{u}/\overline{u}^2$) para $\int_{\gamma} f$, teremos $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \frac{\overline{g}(u)}{\overline{u}} d\overline{u} = \int_{\gamma} \left(\frac{g(u)}{u} du \right)^{-} = \left(\int_{\gamma} \frac{g(u)}{u} du \right)^{-}$ (I). Mas

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{zg} (1 - g^2) dz \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \int_{\gamma} f = \operatorname{Re} \int_{\gamma} \frac{g}{z} dz, \text{ e}$$

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(i \int_{\gamma} \frac{1}{zg} (1 + g^2) dz \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \int_{\gamma} f = -\operatorname{Im} \int_{\gamma} \frac{g}{z} dz.$$

Este último resultado equivale a (I). Então, concluímos que $\operatorname{Re} \int \phi_k$ independe do caminho, $k = 1,2$. No Teorema 1.1.5, tomando $M = A$ e a 1-forma fdz , concluímos que $X = (x_1, x_2, x_3): A \rightarrow \mathbb{R}^3$ define uma superfície mínima.

Podemos deduzir algumas características dessa superfície. Como $x_3 = 0,5 \ln(x^2 + y^2)$, toda circunferência de raio c , $1/r < c < r$, tem como imagem uma curva fechada em $\mathbb{R}^2 \times \{\ln c\}$. Também, o vetor normal unitário da Aplicação de Gauss é dado por $N = (2 \operatorname{Re}(g), 2 \operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1)/(|g|^2 + 1)$. Logo, $N = (0,0,\pm 1)$ se, e somente se $g = 0$ ou ∞ (vide [Osserman] - pag 66). Mas este não é o caso de g em A . Logo, qualquer plano tangente à esta

superfície não é paralelo ao xOy . Vamos provar que ela é completa. Tome qualquer caminho divergente γ em A com velocidade Euclideana unitária, $\gamma:[0,b) \rightarrow A$ onde $0 < b \leq \infty$. Então $\lim_{t \rightarrow b} |\gamma'(t)| = r$ ou $1/r$. Podemos usar os mesmos argumentos feitos na superfície de L. Jorge e

F. Xavier para provar que, no primeiro caso, γ tem comprimento Euclideano finito, então γ cruza K_{2n} (ou K_{2n+1}) para todo $n \geq p$, e no segundo, o mesmo ocorre para $\{K'_n\}$. Suponha primeiro que γ tem comprimento Euclideano finito e defina $J_n = \{t \in [0, b): \gamma(t) \in K_n\}$. Como λ

$$= (|g| + 1/|g|)/(2|z|) \geq |g|/(2r) \text{ em } A, \text{ podemos ter } \ell(\gamma) \geq \frac{1}{2r} \int_0^b |g(\gamma(t))| dt \geq \frac{1}{2r} \int_{\cup J_{2n}} |\gamma(t) e^{F(\gamma(t))}| dt$$

$$\geq \frac{1}{2r^2} \sum_{n \geq p} e^{c_{2n}-1-\alpha} \int_{J_{2n}} dt \quad \therefore \ell(\gamma) \geq \frac{e^{-1-\alpha}}{2r^2} \sum_{n \geq p} r_{2n} e^{c_{2n}}, \text{ ou o similar com índices ímpares, no caso}$$

$\lim_{t \rightarrow b} |\gamma'(t)| = r$. No caso $\lim_{t \rightarrow b} |\gamma'(t)| = 1/r$, como $\lambda \geq 1/(2r|g|)$ em A , podemos ter $\ell(\gamma) \geq$

$$\frac{1}{2r} \int_0^b dt/|g \circ \gamma| \geq \frac{1}{2r^2} \int_{\cup J'_{2n}} |e^{-F(\gamma(t))}| dt \geq \frac{1}{2r^2} \sum_{n \geq p} e^{c_{2n}-1-\alpha} \int_{J'_{2n}} dt, \text{ portanto } \ell(\gamma) \geq \frac{e^{-1-\alpha}}{2r^2} \sum_{n \geq p} r'_{2n} e^{c_{2n}},$$

ou o similar com índices ímpares. Escolhemos $\{c_n\}$ tal que $\sum_{n \geq p} r'_{2n} e^{c_{2n}}$ e $\sum_{n \geq p} r'_{2n+1} e^{c_{2n+1}}$

divergem, e como $0 < r'_n < r_n$, a divergência irá ocorrer também nos outros casos. Finalmente,

se γ tem comprimento Euclideano infinito, $\lambda \geq 1/r$ implica que $\ell(\gamma) \geq \frac{1}{2r} \int_0^\infty dt = \infty$. $\square$

Observação: poderíamos questionar se as imagens desta superfície e a de Xavier em $\mathbf{R}^3$ são iguais. Por exemplo, usando o Teorema da Aplicação de Riemann de D em $\{z \in \mathbf{C}: -\ln(r) < \operatorname{Re} z < \ln(r)\}$, e a função exponencial, temos que existe $\varphi : D \rightarrow A$ conforme, que é o recobrimento universal do anel. Então, a superfície de Toubiana também pode ser parametrizada por um disco. Mas o disco de Xavier é induzido por uma métrica diferente (note que λ agora tem um pólo na origem). Além disto, a escolha $g(z) = ze^{F(z)}$, $f(z) = e^{-F(z)}/z^2$ (e não $g(z) = e^{F(z)}$, $f(z) = e^{-F(z)}$) nos garante que as imagens dos dois exemplos em $\mathbf{R}^3$ são distintas, pois se $\varphi : D \rightarrow A$ é conforme e $\phi_3(z) = 1/z$, temos $\phi_3 \circ \varphi = 1/\varphi \neq 1$ (caso de L. Jorge e F. Xavier).

3. O Exemplo de F. F. Brito

Neste último ponto, vamos estudar o artigo Power series with Hadamard gaps and hyperbolic complete minimal surfaces, de Francisco Fortes de Brito. Assim como na superfície de Xavier, a parametrização será feita pelo disco $D = B(0,1)$. No entanto, agora obteremos uma equação explícita para as funções f e g (*par de Weierstrass*).

3.1 Definição Dada uma série com raio de convergência 1, $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$, dizemos que ela possui *lacunas de Hadamard* se $n_{j+1}/n_j \geq q$ (constante) > 1 , para todo j .

3.2 Teorema

Suponha que $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ possui lacunas de Hadamard e satisfaz :

$$(a) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \quad (b) \lim_{j \rightarrow \infty} (|a_j| \min\{\frac{n_j}{n_{j-1}}, \frac{n_{j+1}}{n_j}\}) = \infty \quad (c) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j = \infty$$

Então, para cada caminho divergente γ em D , tem-se $\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$.

Prova:

Defina $R_k = (0, 1 - \frac{1}{n_k}, 1 - \frac{1}{2n_k})^-$, que é um anel fechado de largura $\frac{1}{2n_k}$. Das hipóteses (a) e (b) temos que $n_{k+1}/n_k > 2$ para k suficientemente grande, ou seja, os anéis R_k serão 2 a 2 disjuntos. Agora, $|z| < 1$ implica que $|h'(z)| \leq |zh'(z)| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j}|$, qualquer que seja $z \in D$.

Para $k \in \mathbb{N}$ fixado, seja $A_k = a_k n_k z^{n_k}$, $B_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j n_j z^{n_j}$ e $C_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j n_j z^{n_j}$. Então $|h'(z)| \geq |A_k| - |B_k + C_k| \geq |A_k| - |B_k| - |C_k|$. Quando $z \in R_k$, temos $|A_k| = |a_k| \cdot n_k \cdot |z|^{n_k} \geq |a_k| \cdot n_k \cdot (1 - \frac{1}{n_k})^{n_k}$, portanto existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|A_k| \geq \frac{1}{2e} |a_k| \cdot n_k$, para todo $k \geq k_1$.

Uma vez que n_j é crescente e $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = M < \infty$, temos $z \in R_k \Rightarrow |B_k| \leq \sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_k \cdot (1 - \frac{1}{2n_k})^{n_j} \leq \sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_k \leq M \cdot n_{k-1}$. Deste modo, para $k \geq k_1$ e z em R_k , $|A_k|/|B_k| \geq \frac{1}{2eM} |a_k| \cdot n_k / n_{k-1} \geq$

$\frac{1}{2eM} |a_k| \cdot \min\{n_k/n_{k-1}, n_{k+1}/n_k\}$. Da hipótese (b) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} (|A_k|/|B_k|) = \infty$, portanto existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geq k_1$, tal que $4 \leq |A_k|/|B_k|$, para todo $k \geq k_2$.

Agora, $z \in R_k$ implica que $|C_k| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| \cdot n_k \cdot (1 - \frac{1}{2n_k})^{n_j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| \cdot n_k \cdot e^{2n_k/n_j}$.

Já vimos que, para k suficientemente grande, $\min\{n_k/n_{k-1}, n_{k+1}/n_k\} > 2$, logo $n_{k-1} > 2n_k$. A função $x \cdot e^{-x/a}$ é tal que $(x \cdot e^{-x/a})' = e^{-x/a} - x \cdot e^{-x/a}/a = e^{-x/a} \cdot (1 - x/a) < 0$, para todo $x > a$, portanto decrescente para $x > a$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > k$, $z \in R_k$ implica em $|C_k| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| \cdot n_{k+1} \cdot e^{-n_{k+1}/2n_k} \leq M \cdot n_{k+1} \cdot e^{-n_{k+1}/2n_k}$. Chamemos este k de k_3 , portanto qualquer que seja $k \geq k_3$ vale esta última desigualdade, para z em R_k . Vamos considerar $k \rightarrow \infty$.

Tínhamos $|A_k| \geq \frac{1}{2e} |a_k| \cdot n_k$, $\forall k \geq k_1$ e da hipótese $\lim_{j \rightarrow \infty} (|a_j| \min\{\frac{n_j}{n_{j-1}}, \frac{n_{j+1}}{n_j}\}) = \infty$, então :

$$|C_k|/|A_k| \leq \frac{2eM}{|a_k| \cdot n_k} \cdot n_{k+1} \cdot e^{-(n_{k+1}/n_k)/2} = 2eM \cdot \underbrace{\frac{1}{|a_k| \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k}}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^2 \cdot e^{-\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)/2}}_0$$

Portanto existe k_4 tal que $|C_k| \leq |A_k|/4$, para todo $k \geq k_4$. Vamos reunir os resultados obtidos até agora :

$$\left. \begin{array}{l} |h'(z)| \geq |A_k| - |B_k| - |C_k|, \forall z \in D, \forall k \in \mathbb{N} \\ |A_k| \geq \frac{1}{2e} |a_k| \cdot n_k, \forall k \geq k_1, \forall z \in R_k \\ |B_k| \leq |A_k|/4, \forall k \geq k_2, \forall z \in R_k \\ |C_k| \leq |A_k|/4, \forall k \geq k_4, \forall z \in R_k \end{array} \right\} \Rightarrow \exists k_0 \text{ tal que } |h'(z)| \geq |A_k|/2 \geq \frac{1}{4e} |a_k| \cdot n_k, \forall k \geq k_0, \forall z \in R_k.$$

Um caminho divergente γ em D deve cruzar todos os anéis R_k , $k \geq m$, para algum m natural, portanto $\int_{\gamma} |h'(z)|^2 \cdot |dz| \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{16e^2} \cdot n_k^2 \cdot |a_k|^2 \cdot \underbrace{\int_{\{\gamma\} \cap R_k} |dz|}_{\geq 0,5/n_k} \geq \frac{1}{32e^2} \sum_{k=n}^{\infty} n_k \cdot |a_k|^2 = \infty$, pela

hipótese (c). $\square$

Observação: a série $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} z^{j^2}$ satisfaz às hipóteses do Teorema 3.2, pois

I) raio de convergência $= (\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j^2]{j^2})$. Mas se $j^2 = n$, como $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n}$, o Teorema do

Confronto nos dá o raio de convergência $= 1$.

II) $2^{(j+1)^2} / 2^{j^2} = 2^{(j+1-j)(j+1+j)} = 2 \cdot 2^{2j} = 2 \cdot 4^j \geq 2 > 1, \forall j \in \mathbb{N}^*$.

a) $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}$ converge; b) $\lim_{j \rightarrow \infty} j^{-2} \cdot \min\{2 \cdot 4^{j-1}, 2 \cdot 4^j\} = \frac{1}{2} \lim_{j \rightarrow \infty} j^{-2} \cdot 4^j = \infty$; e

c) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} \cdot 2^{j^2}$ diverge pois $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j^4} 2^{j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$.

Agora, seja $A(D)$ o espaço de todas as funções analíticas em D , contínuas em $\overline{D}$.

3.3 Corolário

Existe $h \in A(D)$ tal que h' é a Aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^3$, entre dois planos paralelos.

Prova:

Considere $f \equiv 1$ e $g = h'$ como par de Weierstrass. Como $\lambda(z)|dz| = \frac{1}{2}(1+|h'(z)|^2)|dz|$, basta que h satisfaça às hipóteses do Teorema 3.2 para que a métrica seja completa. Devido à hipótese (a) do teorema, a série converge uniformemente em $\overline{D}$, ou seja, h é contínua em $\overline{D}$,

logo $h \in A(D)$. Além disso, $x_3(z) = \operatorname{Re}(h(z))$, que é limitada pois $|h(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = M$. $\square$

CAPÍTULO III

Superfícies Mínimas Completas de Gênero Arbitrário entre Dois Planos Paralelos do $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo nós estudamos o exemplo de C. J. Costa e P. A. Q. Simões. Primeiro, alguns conceitos básicos são necessários para um melhor entendimento dos termos usados para a construção destas superfícies, que não mais se restringem à parametrização por um disco ou anel. Começaremos com um resumo da Teoria de Topologia Algébrica, somente dos resultados que serão usados adiante.

1. O Primeiro Grupo Fundamental

No que segue, vamos considerar $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

1.1 Definição Seja X um espaço topológico e $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ duas curvas fechadas. Dizemos que α e β são *livremente homotópicas*, e denotamos $\alpha \sim \beta$, se $\exists$ uma aplicação contínua $H: I \times I \rightarrow X$ tal que $H(\cdot, 0) = \alpha$, $H(\cdot, 1) = \beta$ e $H(0, \cdot) = H(1, \cdot)$. Neste parágrafo, iremos considerar $\alpha \sim \beta$ somente no caso em que $H(0, \cdot) \equiv p \equiv H(1, \cdot)$.

1.2 Definição Seja X um espaço topológico e $p \in X$. Um *laço em p* é uma curva fechada $\alpha: I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

1.3 Definição Seja o conjunto $\mathcal{L}(X, p) = \{\text{laços em } p \in X\}$. A operação $*$: $\mathcal{L}(X, p) \times \mathcal{L}(X, p) \rightarrow \mathcal{L}(X, p)$ dada por $\alpha * \beta : I \rightarrow X$, $\alpha * \beta(t) = \alpha(2t)$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e $\alpha * \beta(t) = \alpha(2t-1)$ se $1/2 \leq t \leq 1$, é chamada *produto* de α por β .

1.4 Proposição

A relação de homotopia descrita na Definição 1.1 é uma relação de equivalência entre laços em $p \in X$. Em $\mathcal{L}(X, p)/\sim$ definimos o produto de classes como $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$. Desta forma, o conjunto $\pi_1(X, p) = (\mathcal{L}(X, p)/\sim, *)$ é um grupo, e $\forall p, q \in X$, $\pi_1(X, p) \approx \pi_1(X, q)$, isto é, são isomorfos. Então, definimos $\pi_1(X)$ como o *grupo fundamental de X*.

Prova: [Massey] - pp 58-62.

1.5 Definição X é *simplesmente conexo* se X é conexo $\pi_1(X)$ é trivial.

1.6 Definição Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f, g : X \rightarrow Y$ são *homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : I \times X \rightarrow Y$ tal que $H(0, \cdot) = f$ e $H(1, \cdot) = g$. Neste caso denotamos $f \cong g$.

1.7 Definição X e Y têm o *mesmo tipo homotópico* se existem funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ contínuas tais que $(f \circ g) \cong \text{id}_Y$ e $(g \circ f) \cong \text{id}_X$. Neste caso denotamos $X \cong Y$.

1.8 Proposição

Se $X \cong Y$, então $\pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$.

Prova: [Massey] - pag 82.

1.9 Definição Sejam os grupos $(G, \bullet)$ e $(F, \diamond)$. Uma palavra é um elemento da forma $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k$, onde $a_i \in G$, $b_i \in F$, $i=1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Quando os elementos neutros de G e F são eliminamos da palavra, e os elementos do mesmo grupo que ficarem consecutivos forem substituídos da forma $a_i a_j \rightarrow a_i \bullet a_j$, e $b_i b_j \rightarrow b_i \diamond b_j$, e estes dois procedimentos forem repetidos até o ponto em que não ocorram mais alterações, a sequência resultante é chamada de *palavra reduzida*. O *produto livre* de G por F é o grupo $G * F$ cujos elementos são palavras reduzidas, sendo que o elemento neutro é uma "palavra vazia", e a operação em $G * F$ é a concatenação, seguida do processo de redução acima descrito.

1.10 Teorema de Van Kampem (1ª versão)

Seja $X = U \cup V$, U, V abertos e conexos por caminhos, $U \cap V$ simplesmente conexo.

Então $\pi_1(X) \approx \pi_1(U) * \pi_1(V)$.

Prova: [Massey] - pag 122.

2. Espaços de Recobrimento e Recobrimento Holomorfo Ramificado

No que segue, X e Y são espaços topológicos de Hausdorff, conexos por caminhos e *localmente conexos por caminhos*, isto é, dado um ponto p e uma vizinhança V de p , existe um aberto conexo por caminhos $U \subset V$ tal que $p \in U$.

2.1 Definição Dizemos que $p: Y \rightarrow X$ é uma *aplicação de recobrimento* se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x , conexa por caminhos, tal que cada componente de $p^{-1}(U)$ é homeomorfa a U por p .

2.2 Proposição

Toda aplicação de recobrimento $p: Y \rightarrow X$ tem a *propriedade do levantamento de curvas*, isto é, para cada $\alpha: I \rightarrow X$ contínua com $\alpha(0) = x$ e $y \in p^{-1}(x)$, existe uma única $\tilde{\alpha}: I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = y$ e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

2.3 Definição Quando $p: X \rightarrow Y$ é um recobrimento, e X é simplesmente conexo, dizemos que (p, X) é o *recobrimento universal* de Y .

2.4 Proposição

Seja $p: X \rightarrow Y$ um recobrimento. Então $\forall a, b \in X$, $p^{-1}(a)$ e $p^{-1}(b)$ têm a mesma cardinalidade. Deste modo, definimos o *número de folhas* de p como sendo a cardinalidade de $p^{-1}(x)$, $x \in X$, que denotaremos por $\#p$.

Prova: [Massey] - pag 153.

2.5 Definição Sejam M, N superfícies de Riemann e $f : M \rightarrow N$ holomorfa. Um ponto $p \in M$ é *ponto de ramificação* de f quando não existe vizinhança V de p tal que $f|_V$ seja injetora. O conjunto de todos os pontos de ramificação de f é denotado por $\text{Ram}(f)$.

Observação: se f é não-constante, $\text{Ram}(f)$ é um conjunto de pontos isolados.

2.6 Definição Usando as mesmas notações acima, dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um *recobrimento holomorfo ramificado* se f é sobrejetora e $f : M - \text{Ram}(f) \rightarrow N - f(\text{Ram}(f))$ é uma aplicação de recobrimento. Também indicamos por $\#f$ o número de folhas deste recobrimento.

3. Homologia Singular

3.1 Definição Dado $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ seja σ^k o menor convexo que contém $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. Se $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ for linearmente independente, dizemos que σ^k é um *k-simplexo*.

3.2 Proposição

O k -simplexo descrito acima é tal que $\sigma^k = \{t_0 \cdot x_0 + t_1 \cdot x_1 + \dots + t_k \cdot x_k : t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0,$

$$\sum_{i=0}^k t_i = 1\}.$$

Prova: [Vick] - pag 2.

3.3 Definição Considere $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos. A *soma direta* desta família é o grupo $\oplus_i G_i$, onde cada elemento é representado como uma soma formal $\sum_{i \in I} a_i$, onde $a_i \neq 0$

apenas para um número finito de índices. Esta soma é uma operação comutativa, e distinta da operação em G_i , para todo i .

3.4 Definição Um p -simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\phi: \sigma^p \rightarrow X$. Seja $S_p(X)$ o grupo abeliano livre nos p -simplexos singulares de X = soma direta de $\mathbb{Z}$'s (uma cópia para cada ϕ). Um elemento típico de $S_p(X)$ é chamado p -cadeia em X e se escreve de forma única como uma soma finita $\sum n_i \phi_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\phi_i: \sigma^p \rightarrow X$ contínua.

O seguinte resultado é um fato conhecido de Topologia Geral, e mostra que a definição acima independe de σ^p fixado.

3.5 Proposição

Se $K, Q \subset \mathbb{R}^n$ são compactos, convexos e com interior não-vazio, então existe um homeomorfismo $h: K \rightarrow Q$ tal que $h|_{\partial K}$ é um homeomorfismo entre ∂K e ∂Q .

Prova: [Lima] - pag 344.

3.6 Definição A i -ésima face de um p -simplexo singular ϕ é uma aplicação $(\partial_i \phi)(t_0, t_1, \dots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{p-1})$, $\partial_i \phi: \sigma^{p-1} \rightarrow X$. Um p -bordo de cadeia é uma aplicação

$$\partial_p: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X), \text{ dada por } \partial_p(\phi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i . (\partial_i \phi).$$

3.7 Proposição

Considere $\partial_p: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ e $\partial_{p-1}: S_{p-1}(X) \rightarrow S_{p-2}(X)$, p e $p-1$ bordos de cadeia, respectivamente. Então $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$.

Prova: [Vick] - pag 5.

3.8 Definição Sejam $Z_p(X) = \text{Ker}\{\partial_p: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)\}$ e $B_p(X) = \text{Im}\{\partial_p: S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)\}$, que são subgrupos do grupo abeliano $S_p(X)$. Da proposição anterior temos $B_p(X) \subset Z_p(X)$.

O p -ésimo grupo de homologia é o grupo quociente $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.

3.9 Proposição

Se $X \cong Y$, então $H_p(X) \approx H_p(Y)$ para todo p .

Prova: [Vick] - pag 18.

4. Feixes, Gérmenes de Função e Continuação Analítica

4.1 Definição Seja X um espaço topológico e $\tau = \{U \subset X: U \text{ é aberto de } X\}$ sua topologia.

Um *pré-feixe* de grupos abelianos em X é um par (F, ρ) tal que :

- i) $F = (F(U))_{U \in \tau}$ é uma família de grupos abelianos.
- ii) $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \tau, V \subset U}$ é uma família de homomorfismos de grupos, $\rho_V^U: F(U) \rightarrow F(V)$, com as propriedades $\rho_U^U = \text{id}_{F(U)}$, $\forall U \in \tau$ e $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$, $W \subset V \subset U$.

Do mesmo modo definimos pré-feixes de anéis, espaços vetoriais, etc. Para $f \in F(U)$, vamos escrever de modo abreviado $f|_V = \rho_V^U(f)$.

4.2 Definição Um pré-feixe $F = (F, \rho)$ em um espaço topológico X é um *feixe* quando para cada $U \in \tau$, e cada família de abertos $U_i \subset U$, $i \in I$, com $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, verificam-se os seguintes

axiomas :

- i) $f, g \in F(U)$, $f|_{V_i} = g|_{V_i} \forall i \in I \Rightarrow f = g$
- ii) $f_i \in F(U_i)$, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, $\forall i, j \in I \Rightarrow \exists f \in F(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i, \forall i \in I$.

Exemplos: se M é uma superfície de Riemann e τ é sua topologia, considere $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(U))_{U \in \tau}$ e $\rho_V^U(f) = f|_V$ (restrição natural). Então $\mathcal{E}$ é um feixe de espaços vetoriais em M . Do mesmo modo, temos que $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, $\mathcal{O}$, Ω e $\mathcal{M}$, junto com os homomorfismos $\rho_V^U(f) = f|_V$ (restrição natural), são feixes de espaços vetoriais em M .

Observação: o elemento f do axioma (ii) será denominado uma *globalização* de $(f_i)_{i \in I}$.

4.3 Definição Seja F um feixe sobre um espaço topológico X e $a \in X$. Vamos representar a união disjunta de conjuntos por $\dot{\cup}$. Então seja $F_a^* = \dot{\bigcup}_{U \ni a} F(U)$ e uma relação de equivalência

$\sim_a$ em F_a^* dada por:

$$f \in F(U) \text{ e } g \in F(V), f \sim_a g \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V, W \neq \emptyset, \text{ tal que } \rho_W^U(f) = \rho_W^V(g).$$

Seja $F_a = F_a^*/\sim_a$. Um elemento de F_a é dito *gérmen de função em $a \in X$* e é representado, por exemplo, por $[f]_a$. Quando X é Superfície de Riemann, para $F = \emptyset$ dizemos gérmen de função holomorfa, para $F = \mathcal{M}$, gérmen de função meromorfa, etc.

4.4 Proposição

Seja F um feixe sobre o espaço topológico X . Seja $|F| = \bigcup_{x \in X} F_x$ e $\Pi: |F| \rightarrow X$ definida por $\Pi([f]_x) = x$. Então $|F|$ admite uma topologia que torna Π um homeomorfismo local. Se $F = \emptyset$, $|F|$ é um espaço de Hausdorff, localmente conexo por caminhos.

Prova: [Forster] - pp 39,40.

Observação: o conjunto de todos os elementos da forma $[U, f] = \{[f]_x: x \in U\}$, onde $U \in \tau$ e $f \in F(U)$, é uma base da topologia de $|F|$.

4.5 Definição Denote por $|\emptyset([f]_a)|$ a componente conexa de $|\emptyset|$ que contém $[f]_a$. Temos $[g]_b \in |\emptyset([f]_a)|$ se, e somente se, existe uma curva $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow |\emptyset([f]_a)|$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = [f]_a$ e $\tilde{\alpha}(1) = [g]_b$. Neste caso, dizemos que $[g]_b$ é uma *continuação analítica* de $[f]_a$ ao longo de $\Pi \circ \tilde{\alpha}$.

5. Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta

5.1 Definição Sejam M, N superfícies de Riemann. Considere dois discos conformes fechados $D_1 \subset M$ e $D_2 \subset N$, $h: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ um homeomorfismo, $M' = M - \overset{\circ}{D}_1$ e $N' = N - \overset{\circ}{D}_2$. Em $M' \cup N'$ defina a relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x = y, x = h(y)$ ou $y = h(x)$. A *soma conexa de M por N* é, por definição, o conjunto $M \# N = (M' \cup N')/\sim$. Para um número finito $n \geq 2$ de superfícies de Riemann, $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n = (M_1 \# M_2 \# \dots \# M_{n-1}) \# M_n$.

5.2 Proposição

Toda superfície de Riemann compacta é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de um número finito de toros.

Prova: [Massey] - pag 29.

5.3 Definição Seja M uma superfície de Riemann compacta. O *gênero* de M é o número de toros cuja soma conexa é homeomorfa a M .

Exemplo: O gênero de $\hat{C} \approx S^2$ é zero. O símbolo $\approx$ indica um homeomorfismo (ou um isomorfismo, no caso de grupos).

6. Homologia do n-Toro Menos um Conjunto Finito de Pontos

6.1 Proposição

Seja M uma n -variedade C^∞ , $n = 2$, $p, q \in M$. Então $M - \{p\} \cong M - \{q\}$.

Prova:

Seja $(z, U) \in \Sigma(M)$ com $z(U) \supset D = (B(0, 1)) \subset \mathbb{R}^n$ e $z(p) = 0$. Basta provar o caso $0 \neq z(q) = a \in \mathring{D}$. Tome $\Delta: D - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta(x) = (1 - \langle a, x \rangle)^2 - (1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2) = \langle a, x - a \rangle^2 + \|x - a\|^2$. $(1 - \|a\|^2) \geq 0$, $T: X \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = (-\langle a, x - a \rangle + \sqrt{\Delta}) / \|x - a\|^2$, $H: I \times X \rightarrow X$, $H(s, x) = (sT(x) - s + 1)(x - a) + a$. Temos $H(0, \cdot) = g = \text{id}_X$ e $H(1, \cdot) = f: X \rightarrow S^1$. Note que $H(s, \cdot)|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, para todo s . Se $i: S^1 \rightarrow X$ é a inclusão natural, $i \circ f \cong \text{id}_X$ e $f \circ i \equiv \text{id}_{S^1}$. Agora defina $F: I \times (M - \{q\}) \rightarrow M - \{q\}$, $F(s, x) = x$, se $z(x) \notin D$ e $F(s, x) = z^{-1}(H(s, x))$ caso contrário. Temos que F é contínua, portanto $M - \{q\} \cong M - z^{-1}(D)$. Mas $M - \{p\} \cong M - z^{-1}(D)$. $\square$

6.2 Proposição

Sejam $p_1, \dots, p_r \in T^2$ pontos distintos 2 a 2. Então $Y = T^2 - \{p_1, \dots, p_r\} \Rightarrow H_1(Y) = \bigoplus_{(r+1)} \mathbb{Z}$.

Prova:

Pela Proposição 6.1, Y pode ser considerado como na figura seguinte:

Figura 5

Da Proposição 3.5, $R_i \approx D^* = D - \{0\}$ por um homeomorfismo h . Também $f : D^* \rightarrow S^1$, dada por $f(x) = x/\|x\|$, é tal que, se $i : S^1 \rightarrow D^*$ é a inclusão natural, $f \circ i \equiv \text{id}_{S^1}$ e $i \circ f \equiv \text{id}_{D^*}$ pela função $H : I \times D^* \rightarrow D^*$, $H(t, x) = (1-t)x + tx/\|x\|$. Seja $F = (h^{-1}|S^1) \circ f \circ h$, $I = h^{-1} \circ i \circ h$ (inclusão natural), e seja $G_i = (\text{id}_I, h)^{-1} \circ H \circ (\text{id}_I, h) : I \times R_i \rightarrow R_i$. Temos $G_i \in C^0$, $G_i(0, \cdot) = \text{id}$ (em R_i) e $G_i(1, \cdot) = I \circ F$, logo $I \circ F \equiv \text{id}$ (em R_i) pela G_i , e $F \circ I \equiv \text{id}$ (em ∂R_i). Isto mostra que $R_i \cong \partial R_i$, para todo i , com $F \circ I \equiv \text{id}$ (em ∂R_i).

Figura 6

Então $g : I \times Y \rightarrow \mathcal{Y}$ (onde $\mathcal{Y}$ é a "grade" $\bigcup_{i=1}^r \partial R_i$), dada por $g(s, y) = G_i(s, y)$ se $y \in R_i$, é uma função contínua, portanto $Y \cong \mathcal{Y}$. Mas $\mathcal{Y} \approx \vee_{(r+1)} S^1 = r+1$ -buquê de S^1 (união de $r+1$ circunferências com um ponto em comum). Por Mayer-Vietoris ([Vick] - pag 25) obtém-se facilmente $H_1(\mathcal{Y}) = \oplus_{(r+1)} \mathbb{Z}$. $\square$

6.3 Proposição

Seja $nT^2 = T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2 = n$ -toro, $p \in nT^2$. Então $H_1(nT^2 - \{p\}) = \oplus_{2n} \mathbb{Z}$.

Prova:

Usaremos os seguintes resultados :

- i) (Teorema da Curva de Jordan) "Toda curva simples fechada no plano divide-o em duas regiões, e a região limitada é simplesmente conexa" [Veech] - pag 116.
- ii) (Carathéodory) : "Se $f : D = B(0,1) \rightarrow A$ é biholomorfa e A é limitado, então f se estende a um homeomorfismo entre $\bar{D}$ e $\bar{A}$ " [Veech] - pag 121.

Como nT^2 é homeomorfo a um $4n$ -ágono P com lados identificados, e (i),(ii) implicam que P pode ser considerado convexo, pelas Proposições 6.1 e 3.5, e utilizando raciocínio análogo ao da Proposição 6.2, temos $P - \{p\} \approx D^* = D - \{0\}$, portanto $P - \{p\} \cong \partial P = 2n$ -buquê de S^1 . $\square$

6.4 Proposição

Se $X = nT^2 - \{r \text{ pontos}\}$, $r \geq 1$, então $H_1(X) = \oplus_{(2n+r-1)} \mathbb{Z}$ e $H_1(nT^2) = \oplus_{2n} \mathbb{Z}$.

Prova:

Figura 7

Considere os abertos $U \cong T^2 - \{(r+1) \text{ pontos}\}$, e $V \cong (n-1)T^2 - \{1 \text{ ponto}\}$, como na Figura 7. Temos $U \cap V \cong S^1$, e os conjuntos U , V , $U \cap V$ e $X = U \cup V$ são todos conexos por caminhos. Logo, a sequência exata de Mayer-Vietoris ([Vick] - pag 25) fica :

$$\cdots \rightarrow H_2(U) \oplus H_2(V) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_1(U \cap V) \approx \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0$$

Como $U \cong r+2$ -buquê de S^1 e $V \cong 2(n-1)$ -buquê de S^1 , temos $H_2(U) \oplus H_2(V) = 0$. A sequência é exata curta, então $H_1(X) \approx (H_1(U) \oplus H_1(V)) / \text{Im} \varphi$ e $H_2(X) \approx \text{Ker} \varphi$. Mas $\varphi = (i_*, j_*)$, onde i_* e j_* são homomorfismos induzidos das inclusões naturais $i: U \cap V \rightarrow U$ e $j: U \cap V \rightarrow V$ (veja [Vick] - pp 6,7). O fato de S^1 ser bordo de cadeia em V implica que $j_* = 0$, e o fato de S^1 ser gerador de $H_1(U)$ implica que i_* é injetora. Então $\text{Im} \varphi \approx \mathbb{Z}$, e das Proposições 6.2 e 6.3, temos que $H_1(U) \oplus H_1(V) \approx \oplus_{(2n+r)} \mathbb{Z}$. Se $U \approx \mathring{D}$, φ seria nulo, portanto $H_1(nT^2) \approx H_1(V) = \oplus_{2n} \mathbb{Z}$. $\square$

6.5 Teorema

Seja $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(M)[X]$ um polinômio irreduzível, onde M é superfície de Riemann. Então existem $\tilde{M}$ superfície de Riemann, $\Pi: \tilde{M} \rightarrow M$ recobrimento holomorfo ramificado com n folhas e $f \in \mathcal{M}(\tilde{M})$ tal que $(\Pi^*P)(f) = f^n + (c_1 \circ \Pi) \cdot f^{n-1} + \dots + (c_n \circ \Pi) = 0$. Além disso, $(\tilde{M}, \Pi, f)$ é única no seguinte sentido: se (Z, τ, g) tem as mesmas propriedades, então $\exists \sigma: Z \rightarrow \tilde{M}$ biholomorfa tal que $\Pi \circ \sigma = \tau$ e $\sigma^*(f) = g$.

Prova: [Forster] - pag 50.

Observação: $(\tilde{M}, \Pi, f)$ é conhecida como a função algébrica definida por $P(X)$.

Seja $P(X) = X^2 + 1 - z^s \in \mathcal{M}(\hat{C})$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$. $P(X)$ é irreduzível, pois se houvesse $w \in \mathcal{M}(\hat{C})$ tal que $w^2 = z^s - 1$, teríamos $2ww' = -s \cdot z^{s-1}$. Mas $z = 1 \Rightarrow w(1) = 0 \Rightarrow 2w(1)w'(1) = 0 \neq -s \cdot 1^{s-1} = -s$ (absurdo). Denotemos por (M_s, Π, ω) a função algébrica definida por $P(X)$. De acordo com a demonstração do Teorema 6.5, a menos de um conjunto fechado e discreto $A \subset \hat{C}$, os elementos de M_s são do tipo $[\varphi]_z$, germen de função holomorfa em $z \in \hat{C} - A$. Neste caso temos $\varphi = \sqrt{z^s - 1}$ numa vizinhança U de z . Também, M_s é compacta pois Π tem um número finito de folhas, ou seja, é própria. Por [Jones and Singerman] - pag 157, também podemos identificar M_s com um k -toro, se $s = 2k+1$ ou $2k+2$, como esquematizado a seguir:

Figura 8

Seja $\theta = 2\pi/s$, $\varepsilon = e^{i\theta}$, $L_j = \{\varepsilon^j e^{it}, t \in [0, \theta]\}$ e $B_s = \{\rho e^{iu}; 1/2 < \rho < 2, -\theta/2 < u < 3\theta/2\}$. Considere $\gamma_0: I \rightarrow B_s$ uma curva de Jordan que contém L_0 em seu interior. Se Γ_0 é levantamento de γ_0 pela Π , em cada ponto $z \in \{\gamma_0\}$ temos o correspondente $[\varphi]_z \in \Gamma_0$. Se $[\varphi_j]_z$ é germen de $\sqrt{z - \varepsilon^j}$, temos $[\varphi]_z = \prod_{j=0}^{s-1} [\varphi_j]_z$. Como $\gamma_0 \sim 0$ em $\hat{C} - \{\varepsilon^j\}$, $j = 2, \dots, s-1$, temos que a

continuação analítica de $[\varphi_j]_Z$ ao longo do levantamento de γ_0 (com respeito à função algébrica de $X^2 + \varepsilon^j - z$) coincide com $[\varphi_j]_Z$. Nos casos $j = 0$ e 1 , γ_0 é gerador de $\pi_1(C - \{1\}) = \pi_1(C - \{\varepsilon\})$, portanto as continuações analíticas ficam $-\varphi_0|_Z$ e $-\varphi_1|_Z$, respectivamente. Então $\Gamma_0(0) = \Gamma_0(1)$, portanto Γ_0 é fechada.

Seja o biholomorfismo $\Delta(z) = \varepsilon^n z$ em $\hat{C}$, o qual induz um biholomorfismo $\Delta_n: M_S \rightarrow M_S$, pelo Teorema 6.5. Considere $\Lambda' = \{\Gamma_n = \Delta_n \circ \Gamma_0; n = 0, 1, \dots, s-1\}$. Em $C - \{\varepsilon^j : j = 0, 1, \dots, s-1\}$, as curvas $\gamma_n = \varepsilon^n \cdot \gamma_0$ são homologicamente independentes. Para verificar este fato, suponha que $0 = \sum \lambda_j \gamma_j$. Porém, $f_j(z) = (z - \varepsilon^j)^{-1}$ é tal que $\int_0 f_j = \int_\Sigma f_j$, portanto $0 = \lambda_j$. Como esquematizado abaixo, se γ_j cruza duas linhas pontilhadas, ela passa de uma folha para outra do k -toro; senão ela contorna um dos braços:

Figura 9

Vale lembrar que os pontos representados por ∞ na figura acima não são iguais. Cada um deles identifica-se com um gérmen diferente. Através da representação do k -toro por um polígono, vemos que tais curvas são geradores da homologia deste espaço, mas ali não formam um conjunto homologicamente independente. Se $j = 0, \dots, s-1$, temos s geradores em kT^2 , enquanto que $H_1(kT^2) = \oplus_{2k} \mathbb{Z}$, onde $2k < s$. No entanto, cada gerador em kT^2 provém de um elemento em Λ' . Então, Λ' contém uma base de $H_1(M_S)$.

6.6 Proposição

Se $p: M \rightarrow D^* = \{z \in \mathbb{C}^*: |z| < 1\}$ é recobrimento holomorfo não-ramificado, M superfície de Riemann, então M é biholomorfa a $D^* - \{0\}$ (caso $\#p$ finita), ou biholomorfo a $H = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) < 0\}$ se p tem um número infinito de folhas.

Prova: [Forster] - pag 34.

Seja $\delta \geq 3$, $V(\delta) = \Pi^{-1}\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| \geq \delta\}$. Como $\Pi^{-1}(\infty) \in V(\delta)$, no caso $s = 2k+1$ $V(\delta)$ é biholomorfo a um disco fechado pela Proposição 6.6 (portanto $V(\delta) \cong \{\text{pto}\}$), enquanto que para $s = 2k+2$ é união disjunta de dois discos, logo $H_1(M_S - V(\delta)) \approx \oplus_{s-1} \mathbb{Z}$ nos dois casos. Para s par, um elemento é acrescentado ao grupo $H_1(M_S)$, que tem como representante uma curva $\alpha: I \rightarrow M_S$, com $\Pi \circ \alpha(t) = \frac{1}{2}(1+\delta)e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$. Mas $\Pi \circ \alpha \sim \gamma_0 + \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_s$, então Λ' ainda contém uma base para a homologia de $M_S - V(\delta)$ (esta conclusão ficará evidente logo mais, onde daremos uma equação explícita para γ_0).

Seja $p_1 = [\varphi]_0$, $p_2 = -[\varphi]_0$ e $X = M_S - V(\delta) - \{p_1, p_2\}$. Então $H_1(X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus H_1(M_S - V(\delta))$. Se β_1 e β_2 são os dois levantamentos distintos pela Π da curva $\frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, então temos que $\Lambda = \Lambda' \cup \{\beta_1, \beta_2\}$ gera X . Pela demonstração da Proposição 6.2, vemos que β_1 não é homotópica a uma curva S^1 do buquê, mas a $S^1 \vee S^1 (\subset \text{buquê})$. O mesmo vale para β_2 .

6.7 Proposição

Seja N uma superfície de Riemann, M um espaço topológico Hausdorff e $p: M \rightarrow N$ um homeomorfismo local. Então existe uma única estrutura complexa sobre M que o torna uma superfície de Riemann e p holomorfa.

Prova: [Forster] - pag 20.

Seja o conjunto $E = \{(z, w) \in \hat{\mathbb{C}}^2 : w^2 = z^s - 1, |z| < \delta\}$. Se $z^s \neq 1$, os valores $\pm \sqrt{z^s - 1}$ determinam univocamente dois germens distintos $\pm[\varphi]_z$ numa vizinhança U de z . Se $z^s = 1$, há uma identificação biunívoca com os pontos de ramificação de Π . Logo, existe uma bijeção $B: M_S - V(\delta) \rightarrow E$. Como $B([U, \varphi]) = \{(z, w) \in U \times \hat{\mathbb{C}} : w^2 = z^s - 1, |z| < \delta\}$, temos B e B^{-1} abertas (usamos também a Proposição 6.6). Portanto B é homeomorfismo. Pela Proposição 6.7, E é superfície de Riemann e B é biholomorfa. Note que este raciocínio não vale entre M_S e o conjunto $\{(z, w) \in \hat{\mathbb{C}}^2 : w^2 = z^s - 1\}$, pois no caso de s par, M_S possui dois germens distintos no ∞ , logo não há uma identificação adequada entre os dois conjuntos.

7. O Exemplo de C. J. Costa e P. A. Q. Simões

Usaremos os resultados anteriores (parte 1 deste capítulo) no estudo do artigo de C. Costa e P. Simões, intitulado Complete minimal surfaces of arbitrary genus in a slab of $\mathbf{R}^3$. Começamos reenunciando o Teorema 2.3.2 :

7.1 Lema

Suponha que $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ possui lacunas de Hadamard e satisfaz :

$$(a) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \quad (b) \lim_{j \rightarrow \infty} (|a_j| \min \{ \frac{n_j}{n_{j-1}}, \frac{n_{j+1}}{n_j} \}) = \infty \quad (c) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j = \infty$$

Então, para cada caminho divergente γ em D° , tem-se $\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$.

Por exemplo, $h(z) = \frac{cz^s}{s} + \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{sn_j}$, onde $n_j = 2^{j!} + 1$, $a_j = 2^{-je^{it_j}}$, $c, t_j \in \mathbf{R}$. Vemos

que $|sn_j|^{1/sn_j} \geq |a_j|^{1/sn_j} \geq |a_j|^{1/a_j}$, portanto o Teorema do Confronto nos dá $\overline{\lim} |a_j|^{1/sn_j} = 1$, e então o raio de convergência é 1. Também, $n_{j+1}/n_j \geq 2 - 1/(2^{j!} + 1) \geq 1,5$. Portanto h é de Hadamard e

$$j \cdot j! > 2j \Rightarrow (2^{j!})^{j+1} > 2^{2j} \cdot 2^{j!} \Rightarrow n_{j+1}/n_j > 2^{2j} + (1 - 2^{2j})/(2^{j!} + 1) \Rightarrow |a_j| \cdot \min \{ n_{j+1}/n_j, n_j/n_{j-1} \} \rightarrow \infty.$$

Por fim, $|a_j|^2 n_j \rightarrow \infty$. Logo, h satisfaz a todas as hipóteses do Lema 7.1.

A partir deste ponto, indicaremos o sinal de indução ("pull-back") por $*$, por exemplo, $h \circ \Pi = \Pi^* h$, $d\Pi = \Pi^* dz$. Tínhamos considerado o biholomorfismo $\Delta(z) = \varepsilon^n z$ em $\hat{\mathbf{C}}$, que induz um biholomorfismo $\Delta_n : M_S \rightarrow M_S$ (Teorema 6.5). Lembrando que f é a função algébrica obtida por este teorema, considere $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $g = \frac{\lambda}{f} \Pi^* h'(z/\delta)$ e $\eta = f \cdot \Pi^* dz$. Portanto g é uma função meromorfa em $M_S - V(\delta)$ e η é uma 1-forma holomorfa em $M_S - V(\delta)$. Denotando $X = M_S - V(\delta) - \{p_1, p_2\}$, temos também $G = \Pi^*(z/\delta)^2 \cdot g \in \mathcal{M}(X)$ e $H = \Pi^*(\delta/z)^2 \eta \in \Omega(X)$.

7.2 Lema

Existem constantes $c, L, t_j \in \mathbf{R}$, $L \geq 3$, $j \in \mathbf{N}$, e $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tais que $\int_{\gamma} g^2 \eta = \overline{\int_{\gamma} \eta}$ e $\int_{\gamma} G^2 H = \overline{\int_{\gamma} H}$, para toda curva $\gamma \in C^1$ por partes em $M_S - V(\delta)$ (ou em X), qualquer que seja $\delta \geq L$.

Prova:

Primeiro observemos que $[h'(z)]^2 = \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^{m_j}$, $d_j \in \mathbf{C}$ e $m_j \equiv -2 \pmod{s}$ para todo j . Pelo Teorema 6.5, $\Delta_n^* f = f$, e como $\Pi \circ \Delta_n = \Delta \circ \Pi$, $\Delta_n^* d\Pi = \varepsilon^n d\Pi$. Portanto $\Delta_n^*(g^2 \eta) = \varepsilon^{-n} g^2 \eta$, $\Delta_n^* \eta = \varepsilon^n \eta$, $\Delta_n^*(G^2 H) = \varepsilon^n G^2 H$ e $\Delta_n^* H = \varepsilon^{-n} H$. Então $\int_{\Gamma_n} g^2 \eta = \int_{\Gamma_0} \Delta_n^*(g^2 \eta) = \varepsilon^{-n} \int_{\Gamma_0} g^2 \eta$, $\int_{\Gamma_n} \eta = \int_{\Gamma_0} \Delta_n^* \eta = \varepsilon^n \int_{\Gamma_0} \eta$, portanto $\int_{\Gamma_n} g^2 \eta = \overline{\int_{\Gamma_n} \eta}$ se, e somente se $\int_{\Gamma_0} g^2 \eta = \overline{\int_{\Gamma_0} \eta}$, e o mesmo vale com relação a G e H .

Na demonstração do Teorema 6.5, define-se $f([\varphi]_Z) = \varphi(z)$. Então $f \circ \Gamma_0 = w \circ \gamma_0$, portanto $\int_{\Gamma_0} \eta = \int_{\gamma_0} w dz$ e $\int_{\Gamma_0} H = \delta^2 \int_{\gamma_0} w \frac{dz}{z^2}$. Mais adiante provaremos que $\int_{\gamma_0} w dz = \int_L w dz$, e o mesmo vale para w/z^2 , onde L é uma curva tal que $L \sim \gamma_0$ e $\{L\} = L_0$. Então, se denotamos $I = \int_0^{\theta} e^{(1+S/4)it} (\sin(st/2))^{1/2} dt$, temos

$$\int_{\Gamma_0} \eta = \int_0^{\theta} (e^{ist} - 1)^{1/2} i e^{it} dt - \int_0^{\theta} (e^{ist} - 1)^{1/2} i e^{it} dt = (2i)^{3/2} \int_0^{\theta} e^{(1+S/4)it} (\sin(st/2))^{1/2} dt = (2i)^{3/2} I, \text{ e}$$

$$\int_{\Gamma_0} H = \delta^2 (2i)^{3/2} \int_0^{\theta} e^{(-1+S/4)it} (\sin(st/2))^{1/2} dt \neq 0 \quad \forall s \geq 3.$$

É claro que $I \neq 0$, para todo $s \geq 4$. Para $s = 3$, lembrando que em $[0, \theta]$, $(\sin 3t/2)^{1/2} \geq \sin 3t/2$, e em $[4\pi/7, \theta]$, $\sin 7t/4 \geq -1/2$ e $\sin 3t/2 \leq \sin \pi/7 \leq \sin \pi/6 \leq 1$, destas desigualdades vem $\text{Im}(I) \geq \int_0^{4\pi/7} (\sin 7t/4) (\sin 3t/2) dt - (2/3 - 4/7)\pi/2$. Também, $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, portanto $\text{Im}(I) \geq (28/13)\sin \pi/7 - \pi/21$. Como $\sin \pi/10 = (\sqrt{5}-1)/4 > 1/4$, temos $\text{Im}(I) > 7/13 - 7/21 > 0$.

Podemos escrever $[h'(z)]^2 = c^2 z^{2s-2} + 2c \sum_{j=1}^{\infty} n_j a_j z^{(n_j+1)s-2} + F(z)$, onde $F(z) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r z^{n_r}$ e

para cada r , $n_r \geq 2^{11} + 1 + 2^{11} + 1 - 2 = 6s - 2 > 2s$, $\forall s \geq 3$. Tome $r = 2s-2$ e $m_j = (n_j+1)s-2$,

$\forall j$. Defina $I_0 = \int_{\gamma_0} z^r \frac{dz}{w}$, $\delta^{(m_j-r)} I_j = 2^{-j} n_j \int_{\gamma_0} z^{m_j} \frac{dz}{w}$ e $\delta^{-r} J = \int_{\gamma_0} F\left(\frac{z}{\delta}\right) \frac{dz}{w}$. Deste modo,

$$c^{-1} \lambda^{-2} \delta^{-r} \int_{\Gamma_0} g^2 \eta = c I_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{it_j} I_j + c^{-1} J \quad (1)$$

Se tomarmos $r = 2s$ e $m_j = (n_j+1)s-2, \forall j$, veremos que a mesma igualdade vale para $\int_{\Gamma_0} G^2 H$ (no entanto, considere $\delta^{-r} J = \int_{\gamma_0} z^2 F\left(\frac{z}{\delta}\right) \frac{dz}{w}$). Provaremos mais adiante, que tanto no caso $r = 2s - 2$, como no caso $r = 2s$, tem-se $I_0 \neq 0$. Então vamos escolher t_j de forma que $\text{Arg}(e^{it_j} I_j) = \text{Arg}(I_0)$ se $I_j \neq 0$, e $t_j = 0$ caso contrário.

Em $\{\gamma_0\}$ temos $|w| \geq v > 0$, $|\delta^r F(z/\delta)| \leq K$ (para todo $\delta \geq 3$). Portanto $|J(\delta)| \leq K v L(\gamma_0)$. Podemos escolher $c > 0$ de forma que $|c I_0| > |c^{-1} J|$, e deste modo, $\lambda^{-2} \int_{\Gamma_0} g^2 \eta \neq 0$, $c > 0$ fixo,

para todo $\delta \geq 3 = L$. Assim, escolhemos $\lambda = \lambda(\delta, r)$ de forma que $\int_{\Gamma_0} g^2 \eta = \overline{\int_{\Gamma_0} \eta}$, e

consequentemente, $\int_{\Gamma_n} g^2 \eta = \overline{\int_{\Gamma_n} \eta}$, $n = 0, 1, \dots, s-1$.

Resta-nos agora mostrar que $\int_{\beta_j} G^2 H = \overline{\int_{\beta_j} H}$, $j = 1, 2$. A equação (1) vale para uma

curva $\Gamma \subset \mathbb{C}^1$ por partes genérica. Então façamos $\Gamma = \beta_1$ ou β_2 . Temos f holomorfa e não se anula em $\Pi^{-1}(D)$, onde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, e um ramo bem definido w de $\sqrt{z^s - 1}$ em D (simplesmente conexo). Logo, $\text{Res}(z=0, z^m dz/w) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Desta forma, (1) nos dá $\int_{\beta_j} G^2 H = 0$, $j = 1, 2$. Vamos fazer o desenvolvimento de Taylor de $\sqrt{\zeta - 1} : D \rightarrow \mathbb{C}$ numa

vizinhança de $\zeta = 0$. Temos $\sqrt{\zeta - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$, ou seja, $w/z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{sn-2}$, e $s.n-2 = -1$ se,

e somente se, $s.n = 1$ (absurdo). Então, $\overline{\int_{\beta_j} H} = 0$. $\square$

7.3 Proposição

$$I_0 \neq 0.$$

Prova:

Como $d(z^{r+1-s}w) = (r+1-s)z^{r-s}wdz + (s/2)z^r.dz/w$, basta provar que $I = \int_{\gamma_0} z^{r-s}wdz \neq$

0. Mostraremos mais adiante que $\int_{\gamma_0} z^{r-s}wdz = \int_L z^{r-s}wdz$. Logo, $I = 2i \int_0^\theta e^{(r-s)it} e^{it} (e^{ist} - 1)^{1/2} dt$.

Mas $r+1-s = r+1-3s/4-s/4$, e $e^{-ist/4} (e^{ist}-1)^{1/2} = (2i \operatorname{sen}(st/2))^{1/2}$. Portanto, $I \neq 0$ se, e somente se, $0 \neq \int_0^\theta e^{(r+1-3s/4)it} (\operatorname{sen}(st/2))^{1/2} dt = J$. Faça $v = (st-\pi)/2$; logo $\operatorname{sen}(st/2) = \cos v$,

$r+1-3s/4 = (v+\pi/2) \cdot (-3/2-(2r+2)/s) = (v+\pi/2)\beta$, $dv = sdt/2$. Então

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\beta vi} e^{\beta i\pi/2} (\cos v)^{1/2} 2dv/s \neq 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\beta vi} (\cos v)^{1/2} dv \neq 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(\cos \beta v) \cdot (\cos v)^{1/2}] dv \neq$$

0, pois seno é função ímpar. Defina $J_0 = \int_0^{\pi/2} (\cos \beta v)(\cos v)^{1/2} dv$. Precisamos mostrar que

$J_0 \neq 0$. Para $m \in \mathbb{N}$, defina $J_m = \int_0^{\pi/2} (\cos(\beta-m)v)(\cos v)^{m+1/2} dv$. Faça $\beta-m = (\beta-m-1)+1$, e

aplique o cosseno da soma. Então

$$J_m = \int_0^{\pi/2} (\cos(\beta-m-1)v)(\cos v)^{m+3/2} dv - (m+3/2)^{-1} \cdot \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}(\beta-m-1)v) d(-(\cos v)^{m+3/2})$$

A segunda integral (por partes) fica: $(m+3/2)^{-1}(\beta-m-1) \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos(\beta-m-1)v)(\cos v)^{m+3/2} dv$.

Então $J_m = J_{m+1} \cdot [1-(m+3/2)^{-1}(\beta-m-1)] = J_{m+1} \cdot [1-2(\beta-m-1)/(2m+3)]$. Logo, para todo $m \in \mathbb{N}$

vale $J_0 = J_{m+1} \cdot \prod_{j=1}^{m+1} [1-2(\beta-j)/(2j+1)]$.

Temos $r = 2s-2$ ou $r = 2s$, logo $\beta = 5/2 \pm 2/s$ e $1-2(\beta-j)/(2j+1) = 0$ se, e somente se, $j = 1 \pm 1/s$ (absurdo para $s \geq 3$, $s \in \mathbb{N}$). Se $r = 2s-2$, $|\beta-2| \leq |1/2-2/s| < 1/2$, e se $r = 2s$, $|\beta-3| \leq |-1/2+2/s| < 1/2$. Ou seja, em cada caso existe $m \geq 2$ tal que $|\beta-m| < 1$, portanto $v \in [0, \pi/2]$ implica em $\cos(\beta-m)v > 0$, de forma que $J_m > 0$. $\square$

Ficamos de mostrar que $I = \int_{\gamma_0} z^{r-s}wdz = \int_L z^{r-s}wdz$, e o mesmo vale para os integrandos wdz e wdz/z^2 . Basta fazê-lo para um caso (os outros são análogos). A menos de uma reparametrização em $[0, 1]$, considere:

$$\begin{aligned}
& \alpha_v = (1+v)e^{it}, \quad 0 < t < \theta \\
\gamma(t,v) &= \begin{cases} -\varepsilon b = \varepsilon + ve^{it}, & \theta \leq t \leq \theta + \pi \\ \alpha_{-v} = (1-v)e^{i(2\theta + \pi - t)}, & \theta + \pi < t < 2\theta + \pi \\ b = 1 + ve^{i(t-2\theta)}, & 2\theta + \pi \leq t \leq 2(\theta + \pi) \end{cases}
\end{aligned}$$

Para algum $v_0 \in]0, 1[$, tome $\gamma(t, v_0) = \gamma_0$. Por [Conway] - pp 88-91, $\gamma_x \sim \gamma_y$ para quaisquer $x, y \in]0, 1[$, e neste caso, $\int_{\gamma_a} z^{r-s} w dz = \int_{\gamma_b} z^{r-s} w dz$. Para $z \in \{b\}$ (a menos de reparametrização), $|w|^2 = |z^s - 1| = |(1+ve^{it})^s - 1| = \left| \binom{s}{1} ve^{it} + \dots + \binom{s}{s} v^s e^{its} \right| \leq vK$, $L(b) = \pi v$ e $1-v \leq |z| \leq 1+v$. Então existe $\lim_{v \rightarrow 0} \int_b = 0$ pois $|\int_b| \leq (1+v)^{r-s} 2\pi v \sqrt{v}$. O mesmo vale para z em $\{-\varepsilon b\}$. Agora, considere a figura abaixo:

Figura 10

A função w é C^0 nas regiões compactas A e B do setor circular θ . Observe que Na fronteira comum entre A e B , os valores de w não coincidem (provém de ramos distintos), de forma que as regiões são consideradas em separado. Pela regra de Leibnitz ([Conway] - pag 68), temos que $\exists \lim_{v \rightarrow 0} \int_{\alpha(\pm v)} = \int_{\alpha(0)} \neq 0$. Então existe $\lim_{v \rightarrow 0} (\int_{\alpha(v)} + \int_{\alpha(-v)} + \int_b + \int_{-\varepsilon b}) = 2 \int_{\alpha(0)} + 0 + 0$. Mas vimos que $\int_{\gamma(v)}$ é constante para todo v , e $\alpha(0) = L_0$. Assim, $I = 2 \int_{\alpha(0)} = \int_L$. $\square$

No teorema a seguir, usamos os termos *curvatura total* e *fim planar*. Este último será comentado ao final da demonstração. Quanto àquele primeiro, sugerimos [Costa] - pag 84 para esclarecimentos.

7.4 Teorema

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, e $N = 1, 2, 3$ ou 4 , existe uma imersão mínima completa com curvatura total infinita, $x = x(N) : M = M(N) \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $x(M)$ limitada entre 2 planos paralelos do $\mathbb{R}^3$, tal que :

- (1) Se $N = 1$ ou 2 , M é uma superfície compacta de Riemann de gênero k , menos N discos fechados disjuntos.
- (2) Se $N = 3$ ou 4 , $M(N) = M(N-2) - \{p_1, p_2\}$, e x possui 2 fins planares.

Prova:

Precisamos mostrar que g , η , G e H satisfazem às condições do Teorema 7.2, e que a métrica induzida pela imersão é completa. Basta fazê-lo para g e η (o outro caso é análogo). Temos $d\Pi = \Pi^*dz$ uma diferencial holomorfa em E . Uma vez que $f([\varphi]_Z) = \varphi(z) \neq \infty$, para todo $[\varphi]_Z \in E$, e $f(\Pi^{-1}(\varepsilon^j)) = 0$, temos f holomorfa em E . Considere $n \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, $a = \varepsilon^n$, $z_a = r.z + a$, $r > 0$ de modo que $z_a : D^* = D - \{0\} \rightarrow U^*(a) = U - \{a\}$, $\varepsilon^j \notin U^*(a)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Figura 11

Se V^* uma componente conexa de $\Pi^{-1}(U^*(a))$, $\Pi|_{V^*}$ é recobrimento holomorfo de 2 folhas não-ramificado. Logo existe um biholomorfismo $\zeta : D^* \rightarrow V^*$, de forma que $\Pi \circ \zeta = z_a \circ \Pi_2$. Como $f^2 + 1 - \Pi^s \equiv 0$, temos $(f \circ \zeta)^2 + 1 - (\Pi \circ \zeta)^s \equiv 0$. Se $\mu \in D^*$, $\Pi \circ \zeta(\mu) = z_a \circ \Pi_2(\mu) = z_a(\mu^2) = r\mu^2 + a$, portanto $(f \circ \zeta)^2(\mu) \equiv (r\mu^2)^s + \binom{s}{1}(r\mu^2)^{s-1} + \dots + \binom{s}{s-1}.r\mu^2$ tem um zero duplo na origem, então f tem um zero simples em cada ponto de $\Pi^{-1}(\varepsilon^j)$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Mais ainda, estes pontos são zeros duplos de $\eta = fd\Pi$, e também os únicos em que η se anula. Como h é holomorfa não-constante em D , podemos fixar δ de modo que $h'(z/\delta) \neq 0$, para todo $z \in S^1$. Então, os únicos pólos de g são os zeros de η , e todos são simples.

A métrica induzida por x é $ds^2 = [(1+|g|^2)|\eta|/2]^2$. Tome um caminho $\ell : [0, 1] \rightarrow B(0, \delta) \subset \mathbb{C}$, de forma que $\lim_{t \rightarrow 1} |\ell(t)| = \delta$, portanto existe $\xi > 0$ tal que $(\delta+1)/2 \leq |\ell(t)| \leq \delta$, para todo

$t \in [\xi, 1]$. Se ℓ é levantamento de ℓ pela Π , do Lema 7.1 e do fato de que $|w|^2 \leq 4$ para $z \in D$ temos:

$$\int_{\ell} (1+|g|^2)|\eta| \geq \int_{\ell} |g^2\eta| \geq (\lambda/2)^2 \int_{\ell} |h'(z/\delta)|^2 |dz| = \infty$$

Vale observar que, se $\lim_{t \rightarrow 1} |\ell(t)| = 0$, temos um caminho divergente em X . Mas H tem pólo duplo em cada ponto de $\Pi^{-1}(0)$, portanto $\int_{\ell} (1+|G|^2)|H| = \infty$ também neste caso.

Finalmente, $|x_3(p)| = |\operatorname{Re} \int_{p_0}^p GH| = |\operatorname{Re} \{ \lambda \cdot h(\Pi(p)/\delta) - \lambda \cdot h(\Pi(p_0)/\delta) \}| \leq 2(c+1)|\lambda|/s$. Mas

$$p \rightarrow p_1 \Rightarrow \Pi(p) \rightarrow 0 \Rightarrow h(\Pi(p)/\delta) \rightarrow 0 \Rightarrow x_3(p) \rightarrow \operatorname{Re} \{ -\lambda \cdot h(\Pi(p_0)/\delta) \}$$

Ou seja, a coordenada x_3 aproxima-se de um plano paralelo ao $x_1 O x_2$. Dizemos que este é um *fim planar*. O outro ocorre quando $p \rightarrow p_2$. Ao final da demonstração do Lema 7.2 vimos que $w/z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-2}$, $a_0 \neq 0$. Então, em uma vizinhança V da origem temos

$$(x_1 + ix_2)(z) = - \int_{p_0}^p G^2 H + \overline{\int_{p_0}^p H} = a \cdot z^{-1} + h(z), \quad h \in \mathcal{O}(V), \quad a \neq 0. \text{ Isto significa que } x_1 + ix_2 \text{ é}$$

injetora em um aberto $U \subset V$, $0 \in U$, e por isso os fins planares são mergulhados.

Por [Osserman] - pag 81, se M tem curvatura total finita, então M é isométrico (logo conforme) a uma variedade compacta menos um número finito de pontos (absurdo). $\square$

CAPÍTULO IV

Superfícies Mínimas Completas Hiperbólicas de Tipo Conforme Arbitrário

Neste capítulo usaremos novamente o Teorema de Runge para expandir ainda mais a diversidade das superfícies mínimas completas entre dois planos paralelos do $\mathbb{R}^3$. Aqui faz-se necessário o conceito de divisor em uma superfície de Riemann, que constitui-se apenas em um modo de localizar pontos da variedade, com valores a eles correspondentes, mas que torna as demonstrações bem mais concisas.

1. Divisores em uma Superfície de Riemann

1.1 Definição Um *divisor* em uma superfície de Riemann M é uma aplicação $\alpha : M \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que $\alpha(P) \neq 0$ somente para um número finito de pontos $P \in M$.

Podemos representar um divisor como um produto formal $D = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)}$. Se

excluirmos os pontos onde α se anula, teremos um produto finito $D = \prod_{j=1}^s P_j^{\alpha_j}$, onde $P_j \in M$ e

$\alpha_j \in \mathbb{Z}^*$, $j = 1, \dots, s$. O conjunto de todos os divisores em M é denotado por $\text{Div}(M)$.

Seja $B \in \text{Div}(M)$, $B = \prod_{P \in M} P^{\beta(P)}$. Definem-se $D.B = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)+\beta(P)} \in \text{Div}(M)$, e

$D^{-1} = \prod_{P \in M} P^{-\alpha(P)} \in \text{Div}(M)$. Se M é compacta e $f \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$, definem-se os divisores

$[f] = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}(P,f)}$, $[f]_{\infty} = \prod_{P \in M} P^{\max\{-\text{ord}(P,f), 0\}}$, $[f]_0 = \prod_{P \in M} P^{\max\{\text{ord}(P,f), 0\}}$, e similarmente $[\omega]$,

$[\omega]_{\infty}$, $[\omega]_0$ para $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(M)$.

1.2 Definição Para um divisor $D = \prod_{j=1}^s P_j^{\alpha_j}$, $\deg(D) = \sum_{j=1}^s \alpha_j$ é o *grau* de D .

1.3 Definição Um divisor $D = \prod_{j=1}^s P_j^{\alpha_j}$ é *inteiro* (notação: $D \geq 1$), se $\alpha_j \geq 0$, para todo j . Se

$D, B \in \text{Div}(M)$, dizemos que $D \geq B$ se, e somente se, $D \cdot B^{-1} \geq 1$.

1.4 Definição Se M é superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(M)$, considere o conjunto $L(D) = \{f \in \mathcal{M}(M): [f] \geq D\}$, que é um espaço vetorial. A dimensão deste espaço será denotada por $r(D)$. Do mesmo modo, $\Omega(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(M): [\omega] \geq D\}$ é também um espaço vetorial. A dimensão de $\Omega(D)$ será denotada por $i(D)$.

2. O Teorema das Lacunas de Noether

No que segue, salvo menção contrária, M e N são superfícies de Riemann compactas.

2.1 Proposição

Se $f \in \mathcal{M}(M)$ é não-constante, então f tem número de pólos = número de zeros, levando em conta a multiplicidade.

Prova: [Forster] - pag 74.

2.2 Teorema de Riemann-Roch

Se $g(M) = g$, isto é, M tem gênero g , e D é um divisor em M , então

$$r(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i(D)$$

Prova: [Farkas] - pp 71,75.

2.3 Proposição

Tem-se $\deg D > 2g - 2 \Rightarrow i(D) = 0$.

Prova: [Forster] - pag 129.

Observe que $f : N \rightarrow M$ biholomorfa implica em $g(M) = g(N)$, pois para todo divisor D em N , $L(D) \approx f^*L(D)$ e $\Omega(D) \approx f^*\Omega(D)$, onde $*$ é o sinal de indução ("pull-back"). Também, se $M = \hat{\mathbb{C}}$ e f tem apenas um pólo de ordem 1, f é bijetora. De fato, se $x, y \in N$, $f(x) = f(y)$, então $f - f(x) \in \mathcal{M}(N)$ e tem apenas um pólo de ordem 1. Da Proposição 2.1, $x = y$. Mas f é aberta, portanto sobrejetora.

2.4 Teorema das Lacunas de Noether

Considere M com gênero $g > 0$, e $P_1, P_2, \dots$ uma sequência de pontos em M . Defina $D_0 = 1$, $D_{j+1} = P_{j+1}D_j$, $\forall j$. Então existem exatamente g inteiros n_k , $k=1, \dots, g$, tais que :

$$\text{não existe } f \in \mathcal{M}(M), [f] \geq D_j^{-1} \text{ e } [f] \not\geq D_{j-1}^{-1} \Leftrightarrow j = n_k, \text{ para algum } k.$$

Além disso, os inteiros são tais que $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_g < 2g$.

Prova:

Vale para $n_1 = 1$, pois se existe $f \in \mathcal{M}(M)$, $[f] \geq D_1^{-1}$ e $[f] \not\geq D_0^{-1}$, então $f : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é bijetora (absurdo pois $g(M) = g > 0$). Agora, se existe f , então $r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1}) \geq 1$. Tome uma função h nas mesmas condições que f . Então $f/h \in \mathcal{B}(M)$, e portanto $f = c.h$, onde c é uma constante complexa. Logo, $r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1}) = 1$. Mas se isso ocorre, temos que existe f . Ou seja :

$$\begin{aligned} \exists f &\Leftrightarrow r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1}) = 1, \text{ e} \\ \nexists f &\Leftrightarrow r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Pelo Teorema de Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} r(D_j^{-1}) &= \deg D_j - g + 1 + i(D_j) \text{ e} \\ r(D_{j-1}^{-1}) &= \deg D_{j-1} - g + 1 + i(D_{j-1}) \end{aligned}$$

Como $\deg D_j = j$, para todo j , tem-se $r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1}) = 1 + i(D_j) - i(D_{j-1})$. Portanto, para todo $k \geq 1$, $r(D_k^{-1}) - r(D_0^{-1}) = \sum_{j=1}^k (r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1})) = k + i(D_k) - i(D_0)$. Mas $1 = r(D_0^{-1}) = \deg D_0 - g + 1 + i(D_0)$, o que implica em $i(D_0) = g$. Uma vez que $r(D_j^{-1}) - r(D_{j-1}^{-1})$ só pode assumir os valores 0 ou 1, de acordo com (2), temos que $r(D_k^{-1}) - 1 = k + i(D_0) - g$ é o número de vezes em que não falha a existência da f , para $1 \leq j \leq k$. Como $k > 2g - 2$ implica em $i(D_k) = 0$, neste caso temos $k - (\text{número de falhas}) = k - g$, portanto $g = \text{número de falhas}$, que é constante para todo $k > 2g - 2$. No pior caso, temos a g -ésima falha em $k = 2g - 1 < 2g$. $\square$

2.5 Proposição

a) Seja $P \in M$ e z uma coordenada local com $z(P) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe uma diferencial meromorfa em M , holomorfa em $M - \{P\}$, com singularidade $1/z^{n+1}$ em P .

b) Dados dois pontos distintos P e Q em M , e coordenadas locais z e w , $z(P) = w(Q) = 0$, existe uma diferencial meromorfa em M , holomorfa em $M - \{P, Q\}$, com singularidade $1/z$ em P e $-1/w$ em Q .

Prova: [Farkas] - pag 49.

3. O Exemplo de F. J. López

Estudaremos agora o artigo Hyperbolic complete minimal surfaces with arbitrary conformal type, de F. J. López.

3.1 Teorema

Dada uma superfície de Riemann compacta M , de gênero maior ou igual a 1, existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$, com $0 \in U$, tal que a cada elemento λ de U corresponde uma superfície de Riemann M_λ e uma imersão mínima completa $x_\lambda: M_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou seja, existe uma família $\{x_\lambda: M_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{\lambda \in U}$ de imersões mínimas completas e conformes) satisfazendo:

1) $M_\lambda = M - \bigcup_{j=0}^s \overline{D}_j$, onde D_j , para $j = 0, 1, \dots, s$, são discos conformes em M com fechos 2 a 2

disjuntos, e s é um inteiro que independe de λ .

2) $x_\lambda(M_\lambda)$ está entre 2 planos paralelos do $\mathbb{R}^3$, ortogonais ao eixo x_3 .

Além disso, se $w(\lambda)$ é a distância entre os planos, então $|\lambda| \rightarrow 0$ implica que $w(\lambda) \rightarrow \infty$ e x_3 converge para um recobrimento ramificado de um plano, que é não-ortogonal ao eixo x_3 .

Prova:

Tome $P \in M$ e a seqüência $P, P, P, \dots$. Do Teorema das Lacunas de Noether (Teorema 2.4), existem n inteiros $q_1, q_2, \dots, q_n$, com $1 = q_1 < q_2 < \dots < q_n < 2n = 2g(M)$, tais que não existe uma função f meromorfa em M , com único pólo em P e com $\text{ord}(P; f) = q_j$, para $j = 1, \dots, n$. Além disso, a não-existência da função ocorre apenas nestes casos. Logo, existe $f \in \mathcal{M}(M)$ com $[f]_\infty = P^t$, $t \geq q_n + 1$. Se $D = \prod_{i=1}^q P_i^{\alpha_i}$ é divisor integral, defina $D^* = \prod_{i=1}^q P_i$. Então, tomando $P = Q_0$, $P[df]_0^* = \prod_{i=0}^s Q_i$. Sejam D_i , $i = 0, 1, \dots, s$, discos conformes com fechos 2 a 2 disjuntos tais que $Q_i \in D_i$, e $c_i = \partial D_i$. Temos $H_1(M) = 2n$, portanto temos uma base de homologia $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n}\} \subset M - \bigcup_{j=0}^s \overline{D_j}$. Então $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n}, c_1, \dots, c_s\}$ é base de $H_1(M - \bigcup_{j=0}^s \overline{D_j}) = H_1(M - \bigcup_{j=0}^s \overline{D_j})$.

Vimos que $i(D_0) = n$, portanto, se $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ é base de $\Omega(M)$, tome $\xi_{n+i} \in \mathcal{M}^{(1)}(M)$, $[\xi_{n+i}]_\infty = P^{q_i+1}$, $i = 1, \dots, n$ (vide Proposição 1.5). Note que, se existem complexos α_i , $i = 0, 1, \dots, 2n$, tal que $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \xi_i = dg$ para alguma $g \in \mathcal{M}(M)$, temos $\alpha_{2n} = 0$ ($\text{ord}_P(g) \neq q_n$), portanto $\alpha_{2n-1} = \dots = \alpha_{n+1} = 0$. Então $dg \in \Omega(M)$, logo $g \in \mathcal{O}(M)$ e g é uma constante complexa, pois M é compacta. Então $dg = 0$, e como $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ é base, $\alpha_n = \dots = \alpha_1 = 0$. Por isso, diremos então que $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}\}$ é *homologicamente independente*.

Para cada $Q_j \in [df]_0$ considere $\tau_j \in \mathcal{M}^{(1)}(M)$, $[\tau_j]_\infty = PQ_j$, $\text{Res}(\tau_j, P) = -\text{Res}(\tau_j, Q_j) = -1$ (vide Proposição 2.5). Finalmente, seja $v \in \mathcal{M}(M)$ tal que $[v]_\infty \geq P[df]_0 \cdot ([df]_0^*)^2$ e $[v]_\infty^* = P[df]_0^*$. Vejamos por que $\exists v$: $P[df]_0 \cdot ([df]_0^*)^2 = Q_0 \cdot (\prod_{i=1}^s Q_i^{\alpha(i)}) \cdot (\prod_{i=1}^s Q_i^2) = Q_0 \cdot (\prod_{i=1}^s Q_i^{\alpha(i)+2})$.

Considere a seqüência

$$\underbrace{Q_1, Q_1, \dots, Q_1}_{\alpha(1)+2 \text{ termos}}, \underbrace{Q_2, Q_2, \dots, Q_2}_{\alpha(2)+2 \text{ termos}}, \dots, Q_{s+2}, Q_0, Q_0, \dots$$

Pelo Teorema de Noether, para $j = 2s + \sum_{i=1}^s \alpha_i + 1$, se $j < 2n$ tome k de forma que $j + k$

$\geq 2n$, com $D_{j+k} = D_j \cdot Q_0^k$. Neste caso, $\exists v \in \mathcal{M}(M)$ com $[v]_\infty = D_{j+k}$, $[v]_\infty^* = P[df]_0^*$. Podemos considerar k de modo que t não divida $1+k = m$, onde $[f]_\infty = P^t$, $t \geq q_{n+1}$.

Para $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}, \mu_1, \dots, \mu_s, \lambda) \in \mathbb{C}^{2n+s+1}$, seja $G(\Lambda) = \lambda v + (\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \xi_i + \sum_{j=1}^s \mu_j \tau_j) / df$.

Vamos comparar $P[df]_0^*$ com $[G(\Lambda)]_\infty^*$: temos $[df]_\infty = P^{t+1} \Rightarrow (\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \xi_i) / df$ é holomorfa numa vizinhança de P , portanto $(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \xi_i) / df$ tem pólos no máximo onde df se anula. Então $[(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \xi_i) / df]_\infty^* \leq [df]_0^*$. Como $[\tau_j]_\infty = PQ_j$, $Q_j \in [df]_0$, também $[(\sum_{j=1}^s \mu_j \tau_j) / df]_\infty^* \leq [df]_0^*$. Logo, $[G(\Lambda)]_\infty^* \leq P[df]_0^*$. Note que $\lambda \neq 0$ implica em $[\lambda v]_\infty^* = P[df]_0^*$ e $[\lambda v]_\infty \geq P[df]_0 ([df]_0^*)^2$ implica em $[G(\Lambda)]_\infty^* = P[df]_0^*$ (a última desigualdade garante que não há cancelamento de pólos entre λv e $(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \xi_i + \sum_{j=1}^s \mu_j \tau_j) / df$). Além disso, t não divide $\text{ord}(P; G(\Lambda)) = m$. Portanto $G(\Lambda)$ não é função racional de f .

Denote $D(0,1) = B(0,1)$. Defina $|\Lambda| = |\lambda| + \sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i| + \sum_{j=1}^s |\mu_j|$. Temos $G: \mathbb{C}^{2n+s+1} \times M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

contínua, por ser composta de somas e produtos de funções contínuas. Como $\bigcup_{j=0}^s D_j$ contém todos os pontos de $P[df]_0^*$, e $M - \bigcup_{j=0}^s D_j$ é compacto, existe $K > 0$ tal que neste conjunto $|v|, |\xi_i / df|, |\mu_j / df| \leq K$. Então $|G(\Lambda)| \leq |\Lambda| \cdot K$. Escolha $\varepsilon = 1/K$ e tome $|\Lambda| < \varepsilon$ de modo que $M - \bigcup_{j=0}^s D_j \subset G(\Lambda)^{-1}(D(0,1))$. Logo, $Q \in P[df]_0^*$, e se Q é pólo de $G(\Lambda)$, então temos $Q \notin G(\Lambda)^{-1}(D(0,1))$.

Como os pólos de uma função meromorfa não-constante são isolados, para cada Λ , com $0 < |\Lambda| < \varepsilon$, poderíamos ter providenciado que $D_j = D_j(\Lambda)$ tenha no máximo Q_j como ponto de ramificação de $G = G(\Lambda)$. Então, G é um recobrimento não-ramificado de $G^{-1}(C-D(0,1))$ em $C-D(0,1)$. Pela Proposição 3.6.6, cada componente de $G^{-1}(\hat{\mathbb{C}}-D(0,1))$ é conforme a $\bar{D}(0,1)$, e o diagrama abaixo comuta, onde definimos $\Pi_b(z) = z^b$, $b \in \mathbb{N}^*$.

Figura 12

Do fato de que $\lambda \neq 0$ implica em $[G]_\infty^* = P[df]_0^*$, tem-se $Q_j \notin G^{-1}(D(0,1))$, para $j = 0, 1, \dots, s$. Portanto $G^{-1}(\hat{C} - D(0,1))$ é constituído exatamente de $s+1$ discos fechados, disjuntos dois a dois.

Seja $\Omega = \{\Lambda \in \mathbb{C}^{2n+s+1} : |\Lambda| < \varepsilon\}$, $M(\Lambda) = G^{-1}(D(0,1))$, $\Lambda \in \Omega$.

Considere uma função holomorfa $H : D(0,1) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, tal que a métrica $ds^2 = (|H| + 1/|H|)^2 |dz|^2$ é completa em $D(0,1)$ (existe pela demonstração do Teorema 2.1.3). Mais adiante, precisaremos de algumas condições a mais sobre H . Para tanto, seja $h : D(0,1) \rightarrow \mathbb{C}^*$, dada por $h(z) = r\theta \cdot H(c(z-a)/(1-\bar{a}z))$, onde r é uma constante real, $\theta, c \in S^1$, e $|a| < 1$, determinados de modo que $h(0) \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$, $h'(0) \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (estas condições serão necessárias mais adiante). É possível obter h porque $h'(0)/h(0) = c(1-|a|^2)H'(-ac)/H(-ac)$, então escolha $x \in D(0,1)$ tal que $H'(x) \neq 0$. Logo $H'(x)/H(x) = \rho e^{iy}$, e defina $c = e^{-iy}$, $a = -xe^{iy}$. Portanto $-a \cdot c = x$ e $h'(0)/h(0) = \rho(1-|a|^2)$ é real positivo. Se $H(x) = Re^{i\alpha}$, tome $\theta = e^{-i\alpha}$. Deste modo $h'(0) = r\rho R(1-|a|^2)$, $h(0) = rR$, e basta que $r \neq 0$, $r \neq \pm 1/R$ para obtermos as condições acima.

Note que $(|h| + 1/|h|)^2 |dz|^2$ ainda é uma métrica completa em $D(0,1)$.

Em $M(\Lambda)$ defina :

$$\varphi_1 = \varphi_1(\Lambda) = (h - 1/h) \circ G \, df, \quad \varphi_2 = \varphi_2(\Lambda) = i(h + 1/h) \circ G \, df, \quad \varphi_3(\Lambda) = 2df$$

Seja $x = x(\Lambda) : M(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x = \text{Re} \int (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, que está bem definida se, e somente

se, $\text{Re} \int_{\gamma_i} \varphi_k = \text{Re} \int_{\gamma_j} \varphi_k = 0$, $i = 1, \dots, 2n$, $j = 1, \dots, s$, $k = 1, 2, 3$. Note que

$$x \text{ é imersão} \Leftrightarrow 0 \neq |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 (\geq 4 \cdot |df|^2) \text{ em } M(\Lambda) \Leftrightarrow Q_j \notin M(\Lambda), j = 1, \dots, s.$$

Lembramos que $P = Q_0 \notin [df]_0^*$. Como $[G]_\infty^* \leq P[df]_0^*$, um zero de df não é necessariamente pólo de G . Para que a implicação ocorra, uma condição suficiente é que λ seja diferente de zero.

Seja $x_{2i} = \text{Im}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, 2n$, $x_{4n+2j} = \text{Im}(\mu_j)$, $j = 1, \dots, s$ e $x_N = \text{Im}(\lambda)$, $N = 4n+2s+2$.

Tome as respectivas partes reais, indexando-as por x_{2k-1} para cada x_{2k} , $k = 1, \dots, N/2$, e $M = N-2$. Então Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ dada por :

$$F(\Lambda) = \text{Re} \left(\int_{\gamma_1} \varphi_k, \int_{\gamma_2} \varphi_k, \dots, \int_{\gamma_{2n}} \varphi_k, \int_{c_1} \varphi_k, \dots, \int_{c_s} \varphi_k \right)_{k \in \{1,2\}}$$

Temos $G(0) = 0$ implica que φ_1 e φ_2 são diferenciais exatas, e portanto $F(0) = 0$. Seja F_j a j -ésima componente de F . A matriz $dF(0)$ fica :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{M+1}}(0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{M+1}}(0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_N}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial F_M}{\partial x_2}(0) & \dots & \frac{\partial F_M}{\partial x_{M+1}}(0) & \frac{\partial F_M}{\partial x_N}(0) \end{bmatrix}$$

Considere $\mathcal{E}$ a submatriz $M \times M = dF(0)$ com as duas últimas colunas retiradas.

Suponha que $\det \mathcal{E} = 0$. Então, suas M colunas são **R-LD**. Temos

$$\partial \varphi_1 / \partial \lambda_i = [h'(G) \cdot \partial G / \partial \lambda_i + h'(G) \cdot h^{-2}(G) \cdot \partial G / \partial \lambda_i] df \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_i}(0) = h'(0) \cdot [1 + h^{-2}(0)] \xi_i.$$

Analogamente, para $a = h'(0) \cdot [1 + h^{-2}(0)]$ e $b = h'(0) \cdot [1 - h^{-2}(0)]$, temos $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_j}(0) = a \tau_j$,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_i}(0) = ib \xi_i \text{ e } \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_j}(0) = ib \tau_j. \text{ Observemos também que } \partial F_1 / \partial x_1 = \text{Re} \int_{\gamma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \text{Re} \int_{\gamma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1}$$

$$= a \cdot \text{Re} \int_{\gamma_1} \xi_1, \partial F_1 / \partial x_2 = \text{Re} \int_{\gamma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \text{Re} \int_{\gamma_1} i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} = -a \cdot \text{Im} \int_{\gamma_1} \xi_1, \text{ etc. Logo, a matriz } \mathcal{L} \text{ fica :}$$

$$\begin{bmatrix} a \cdot \text{Re} \int_{\gamma_1} \xi_1 & -a \cdot \text{Im} \int_{\gamma_1} \xi_1 & a \cdot \text{Re} \int_{\gamma_1} \xi_2 & \cdots & -a \cdot \text{Im} \int_{\gamma_1} \tau_s \\ a \cdot \text{Re} \int_{\gamma_2} \xi_1 & -a \cdot \text{Im} \int_{\gamma_2} \xi_1 & a \cdot \text{Re} \int_{\gamma_2} \xi_2 & \cdots & -a \cdot \text{Im} \int_{\gamma_2} \tau_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b \cdot \text{Im} \int_{\gamma_1} \xi_1 & -b \cdot \text{Re} \int_{\gamma_1} \xi_1 & -b \cdot \text{Im} \int_{\gamma_1} \xi_2 & \cdots & -b \cdot \text{Re} \int_{\gamma_1} \tau_s \\ -b \cdot \text{Im} \int_{\gamma_2} \xi_1 & -b \cdot \text{Re} \int_{\gamma_2} \xi_1 & -b \cdot \text{Im} \int_{\gamma_2} \xi_2 & \cdots & -b \cdot \text{Re} \int_{\gamma_2} \tau_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Se $\det \mathcal{L} = 0$, então existem constantes reais não todas nulas, A, B, C , etc., que zeram a soma ponderada das colunas. Temos $A \cdot a \cdot \text{Re} \int \xi - B \cdot a \cdot \text{Im} \int \xi = \text{Re} \int A a \xi - \text{Im} \int B a \xi = \text{Re} \int A a \xi + \text{Re} \int i B a \xi = \text{Re} \int (A a \xi + i B a) \xi = a \cdot \text{Re} \int \alpha \xi$, $\alpha = A + iB$. Analogamente, $-A \cdot b \cdot \text{Im} \int \xi - B \cdot b \cdot \text{Re} \int \xi = -b \cdot \text{Im} \int \alpha \xi$. Logo, $w = \sum_i \alpha_i \xi_i + \sum_j \beta_j \tau_j \in \mathcal{M}^{(1)}(M)$ é tq $\oint w = 0$, para qualquer curva C^1 por partes fechada. Pelo Teorema 0.4.4, como $dw = 0$, temos que w é exata. Então, $-\beta_j = \text{Res}[w, Q_j] = 0$. Logo, $w = \sum_i \alpha_i \xi_i$ é exata. No entanto, o fato de $\{\xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$ ser homologicamente independente implica em $\alpha_i = 0$, para todo i . Isto é um absurdo, pois $A, B, C, \dots$ não são todas nulas. Na verdade, $\det \mathcal{L} \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função ϕ de classe C^∞ , $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^M$, onde U é um aberto, tal que $F(\phi(\lambda), \lambda) = 0$, para todo λ em U , $0 \in U$ e $\phi(0) = 0$. Vamos indentificar $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Escreva $\Lambda(\lambda) = (\phi(\lambda), \lambda)$. Então $x = x(\Lambda(\lambda))$ está bem definida e é uma imersão mínima para $\lambda \neq 0$, de $M_\lambda = M(\Lambda(\lambda))$ em $\mathbb{R}^3$. Seja $\lambda \in U^* = U - \{0\}$. Tínhamos $M(\Lambda) = G(\Lambda)^{-1}(D(0, 1))$, $\Lambda \in \Omega$, e $G(\Lambda)^{-1}(\hat{C} - D(0, 1))$ compõe-se exatamente de $s+1$ discos fechados disjuntos. Também, $M - \bigcup_{j=0}^s D_j \subset G(\Lambda)^{-1}(D(0, 1)) = M - \bigcup_{j=0}^s \overline{D}_j(\lambda) = M_\lambda$. Logo, $\overline{D}_j(\lambda) \subset D_j$ é um disco conforme fechado, e Q_j está no interior de $\overline{D}_j(\lambda)$. Então, x_3 é limitada.

No Capítulo I, vimos que $ds^2 = 0,5 \cdot \sum_{k=1}^3 |\varphi_k(\Lambda(\lambda))|^2$ é a métrica induzida em M_λ .

Vamos provar que ela é completa. Para isso, precisaremos de uma aplicação conforme $z : D(0, 1) \rightarrow M_\lambda$ tal que $\partial M_\lambda \subset \partial z(D(0, 1))$. Tal aplicação existe. De fato, suponha que

existam índices j tais que $\{\gamma_i\} \cap \overline{D}_j = \emptyset$ para todo i . Considere curvas disjuntas α_j (sem auto-intersecções) em $\overline{M}_\lambda$ ligando um ponto $Q \in \partial D_j$ a algum ponto $P \in \{\gamma_1\} \cap M_\lambda$. Considere os conjuntos $Y = \bigcup_{i=1}^{2n} \{\gamma_i\}$ e $X = M_\lambda - Y - \bigcup_{j=0}^s \{\alpha_j\}$. Temos X conexo, e se $X \cong M - Y$ ($\approx$ interior de um polígono convexo), teremos X simplesmente conexo. Através do Teorema das Lacunas de Noether, é fácil exibir uma função harmônica tal que o *princípio do máximo* não é válido em X (vide [Ahlfors] - pag 139). Então, X é conforme a um disco ([Ahlfors] - pag 142).

Figura 13

Fixe j , tome q genérico em ∂D_j e suponha $\alpha(0) = P$. Seja $E = \{\alpha_j\} - \{P\}$. A função $q \cdot (1-s) + sQ$, $s \in I$, mostra que $\overline{D}_j \cup E \cong E$. Portanto $\pi_1(\overline{D}_j \cup E) = 0$. Considere $W =$ uma ε -vizinhança de $\overline{D}_j \cup E$ no conjunto $X \cup \overline{D}_j \cup E$. Então W é simplesmente conexo ($W \cong \overline{D}_j \cup E$), e pela 1ª versão do Teorema de Van Kampen, temos $\pi_1(W) * \pi_1(X) = \pi_1(X \cup \overline{D}_j \cup E)$. Procedendo sucessivamente deste modo, obteremos $\pi_1(X) = \pi_1(M - Y) = 0$.

Defina $C = M - \bigcup_{j=0}^s D_j$ e considere o compacto $\overline{M}_\lambda - \overset{\circ}{C}$ esquematizado na figura abaixo (áreas mais escuras).

Figura 14

Tome $K_1(\lambda) > 0$ tal que $K_1(\lambda) \leq |f'(z)|$, para todo $z \in \overline{M}_\lambda - \overset{\circ}{C}$. Isto é possível pois Q_j , $j = 1, \dots, s$ são os zeros de df . Seja também $K_2(\lambda) > 0$ tal que $K_2(\lambda) \geq |G'(\lambda)(z)|$, para todo z em

$\overline{M}_\lambda - \overset{\circ}{C}$. Isto também é possível pois $[dG]_\infty^* = [G]_\infty^*$. Temos $ds^2(z) = 0,5 \cdot [h^2 - 2 + 1/h^2 + h^2 + 2 + 1/h^2 + 4] \cdot |df|^2 = [h + 1/h]^2 \cdot |f'(z)|^2 \cdot |dz|^2$.

Sabemos que $dS^2 = [h(Z) + 1/h(Z)] \cdot |dZ|^2$ é completa em $D(0,1)$. Mas $Z = G(\lambda)$ implica em $|dZ|^2 = |G'(\lambda)(z)|^2 \cdot |dz|^2$. Portanto, em $\overline{M}_\lambda - \overset{\circ}{C}$ vale $ds^2(z) = |f'(z)|^2 \cdot |G'(\lambda)(z)|^{-2} dS^2 \geq (K_1/K_2)^2 dS^2$. Então a métrica é completa em $\overline{M}_\lambda - \overset{\circ}{C} \supset M_\lambda - C$. Logo, curvas divergentes em M_λ têm comprimento infinito em (M_λ, ds) , ou seja, a métrica é completa.

Finalmente, para $\lambda = 0$ temos $x(p) = \text{Re}(f(p) - f(p_0)) \cdot (a, 0, 2) + \text{Im}(f(p) - f(p_0)) \cdot (0, -b, 0)$. Porém, $f \in \mathcal{M}(M)$ implica em $f(M) = \hat{C}$. Então, temos a equação de um plano não-paralelo ao eixo x_3 . $\square$

CAPÍTULO V

Superfícies Mínimas Completas Não-Orientáveis entre Dois Planos Paralelos do $\mathbf{R}^3$

Vamos agora analisar o artigo de Francisco J. López, A Nonorientable Complete Minimal Surface Between Two Parallel Planes. Antes de construir estas superfícies, alguns resultados importantes são necessários. Uma vez que estes resultados são direcionados para um conceito mais geral de variedade que aquele com o qual estamos trabalhando, e vale a pena enunciá-los assim, iremos considerar aqui uma C^k n -variedade M como na Definição 0.1.1, mas estabelecendo que as composições (2) são de classe C^k , e as imagens dos homeomorfismos de $\Sigma(M)$ são subconjuntos abertos do $\mathbf{R}^n$. Também, as demonstrações aqui se tornam mais claras se definirmos o conjunto $\mathfrak{I} = \{(x, U): (x^{-1}, x(U)) \in \Sigma(M)\}$, e indicarmos a superfície $S = (M, \Sigma(M))$, X por $S = (M, \mathfrak{I}, X)$.

1. Alguns Conceitos e Resultados Básicos sobre Superfícies Não-Orientáveis

Considere, por exemplo, a faixa do cilindro circular reto dada por $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$, e $p \sim q \Leftrightarrow p = \pm q$ uma relação de equivalência em $\mathbf{R}^3$. A projeção $\pi: S \rightarrow S/\sim$ tem as seguintes propriedades: π é um difeomorfismo local (por [Carmo] - pag 23) e para cada $p, q \in S$, com $p = -q$, $(d\pi)_p: T_p S \rightarrow T_{\pi(p)}(S/\sim)$ e $(d\pi)_q: T_q S \rightarrow T_{\pi(q)}(S/\sim)$ são tais que $(d\pi)_q^{-1} \circ (d\pi)_p: T_p S \rightarrow T_q S$ é dada por $(d\pi)_q^{-1} \circ (d\pi)_p = dA$, onde A é a aplicação antípoda em $\mathbf{R}^3$. Então $dA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \therefore$ negativa definida. Note que a variedade $S/\sim$ (faixa de Möbius) é não-orientável.

1.1 Definição Um recobrimento duplo orientável é uma aplicação $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ onde

- (I) M é uma variedade conexa, $\tilde{M}$ é orientável e π é um difeomorfismo local.
- (II) $\forall p \in M, \# \pi^{-1}(p) = 2$.
- (III) $\pi(p_1) = \pi(p_2), p_1 \neq p_2 \Rightarrow (d\pi^{-1})_{p_2} \circ (d\pi)_{p_1} : T_{p_1} \tilde{M} \rightarrow T_{p_2} \tilde{M}$ é negativa definida.

1.2 Proposição

Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientável. Então M é não-orientável se, e somente se $\tilde{M}$ é conexa.

Prova:

($\Rightarrow$) Se $\tilde{M}$ fosse desconexa, poderíamos tomar uma componente C de $\tilde{M}$, e como $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ tem a propriedade do levantamento de curvas, $\pi(C) = M$. Mas para quaisquer $x, y \in \tilde{M}$, com $x \neq y$ e $\pi(x) = \pi(y)$, x e y não podem estar na mesma componente de $\tilde{M}$. Senão, o fato de que π levanta curvas e $\# \pi^{-1} = 2$ nos dá que $\tilde{M}$ é conexa. Então $\pi|_C$ seria injetora, portanto um difeomorfismo global. Então M seria orientável (absurdo).

($\Leftarrow$) Se M fosse orientável, o difeomorfismo local $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ induziria uma sistema de cartas em M que manteria ou inverteria sua orientação original. Então, para quaisquer $x, y \in M$, $(d\pi)_x : T_x \tilde{M} \rightarrow T_{\pi(x)} M$ e $(d\pi)_y : T_y \tilde{M} \rightarrow T_{\pi(y)} M$ seriam simultaneamente positivas ou negativas. Então $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow (d\pi^{-1})_y \circ (d\pi)_x : T_x \tilde{M} \rightarrow T_y \tilde{M}$ seria positiva (contradição). $\square$

1.3 Proposição

Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientável de classe C^k , $k \geq 1$. Então existe uma única involução $I : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ (isto é, $I \circ I = \text{id}$, $I \in C^k$) negativa, sem pontos fixos e tal que $\pi \circ I = \pi$.

Prova:

Para cada p_1 em $\tilde{M}$, tome $p_2 \neq p_1$ tal que $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ e defina $I : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ por $I(p_1) = p_2$. Como π é um recobrimento, existe uma vizinhança $V(p)$ de p , $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$, tal que $\pi^{-1}(V) = V(p_1) \dot{\cup} V(p_2)$. Logo, $I|_{V(p_1)} = (\pi|_{V(p_2)})^{-1} \circ (\pi|_{V(p_1)}) \in C^k$ e $\pi \circ I(p_1) = \pi(p_2) = \pi(p_1)$ para todo $p_1 \in \tilde{M}$, portanto $\pi \circ I = \pi$. Claramente $I \circ I = \text{id}$ e I não tem pontos fixos. Mas $I|_{V(p_1)} = (\pi|_{V(p_2)})^{-1} \circ (\pi|_{V(p_1)})$ implica que $(dI)_{p_1} = (d\pi)_{p_2}^{-1} \circ (d\pi)_{p_1} : T_{p_1} \tilde{M} \rightarrow T_{p_2} \tilde{M}$ é negativa. Para qualquer outra $\hat{I}$ com as mesmas propriedades, $\# \pi^{-1} = 2$ implica em $\hat{I} = I$. $\square$

1.4 Proposição

Toda variedade conexa $M \in C^k$, $k \geq 1$, admite um recobrimento duplo orientável C^k .

Prova:

Para cada $x \in M = (M, \mathfrak{I})$, escolha uma única orientação O_x em $T_x M$. Considere $\tilde{M} = \{(x, O_x), (x, -O_x) : x \in M \text{ e } O_x \text{ é a orientação escolhida em } T_x M\}$ e $p: \tilde{M} \rightarrow M$ dada por $p(x, \cdot) = x$, logo $\#p^{-1} = 2$. Para cada aberto $U \subset M$ seja $U^+ = \{(x, O_x) : x \in U\} \subset \tilde{M}$. Claramente $p|_{U^+} : U^+ \rightarrow U$ é uma bijeção e $\tilde{M} = \bigcup_{U \subset M} (U^+ \cup U^-)$. Para cada (φ, A) em $\mathfrak{I}$ construímos $\phi^+ = (p|_{\varphi(A)^+})^{-1} \circ \varphi$ e ϕ^- , o que resultará num sistema de injeções $\tilde{\mathfrak{I}}$ em $\tilde{M}$, logo, para quaisquer $(\phi_A, A), (\phi_B, B) \in \tilde{\mathfrak{I}}$ com $\phi_A(A) \cap \phi_B(B) \neq \emptyset$, temos $\phi_A^{-1} \circ \phi_B : B \cap A \rightarrow B \cap A$ um difeomorfismo C^k . Logo $\tilde{M}$ é uma variedade C^k . Agora, $p: \tilde{M} \rightarrow M$ é um difeomorfismo local e também um recobrimento. Portanto $d(\phi_A^{-1} \circ \phi_B) = d(\varphi_A)^{-1} \circ d(\varphi_B)$ que pode ser positiva ou não. No segundo caso, se $\phi_B = (p|_{\varphi_B(B)^+})^{-1} \circ \varphi_B$, podemos redefiní-la por $(p|_{\varphi_B(B)^-})^{-1} \circ \varphi_B$ e vice-versa. Assim, a composição $\phi_A^{-1} \circ \phi_B$ não tem mais efeito ($\phi_A(A) \cap \phi_B(B) = \emptyset$). Também podemos provar que $dp: T(\varphi_A(A)^+) \rightarrow T(\varphi_A(A))$ seja positiva e $dp: T(\varphi_A(A)^-) \rightarrow T(\varphi_A(A))$ seja negativa. Fazendo isso para todos os pares com intersecção não-vazia em $\tilde{\mathfrak{I}}$ estaremos dando a $\tilde{M}$ uma orientação. Portanto, para quaisquer $x, y \in \tilde{M}$ com $p(x) = p(y)$, temos $(p|_{V_x})^{-1} \circ (p|_{V_y}) = (p|_{V_x})^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ (p|_{V_y}) = \phi_x \circ \phi_y^{-1}$, onde $(\varphi, \varphi^{-1}(p(V_x))) \in \mathfrak{I}$. Portanto, $d(p|_{V_x})^{-1} \circ d(p|_{V_y}) = d\phi_x \circ d\phi_y^{-1}$ é negativa. $\square$

1.5 Definição Se $S = ((M, \mathfrak{I}), X)$, e usando as mesmas notações da demonstração acima consideramos $\tilde{S} = ((\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{I}}), X \circ p)$, então dizemos que $\tilde{S}$ é a *superfície dupla* de S .

1.6 Teorema

Seja S uma superfície mínima conexa não-orientável em $\mathbf{R}^n$. Então, a superfície dupla $\tilde{S}$ será uma superfície mínima regular em $\mathbf{R}^n$ dada por :

$$\tilde{X}: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \phi(\tau) d\tau, \quad p_0, p \in \tilde{M} \text{ e } \alpha = \phi(\tau) d\tau \quad (I)$$

tal que $I^* \alpha_k = \tilde{\alpha}_k$, $k = 1, \dots, n$. Reciprocamente, dada $\tilde{S}$ uma superfície mínima conexa orientável como em (I), se existe $I: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ anti-holomorfa sem pontos fixos tal que $I^* \alpha = \tilde{\alpha}$ e $I \circ I = \operatorname{id}$, então $\tilde{S}$ é a superfície dupla de uma superfície mínima não-orientável S em $\mathbf{R}^n$.

Prova:

($\Rightarrow$) Da Proposição 3.5, temos que $\tilde{S}$ é mínima, se e somente se, S é mínima, pois esta é uma característica local e basta compor as imersões de $\tilde{M}$ e M em $\mathbf{R}^n$ com o duplo recobrimento $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ e suas inversas locais para verificar a equivalência.

Temos $X: M \rightarrow \mathbf{R}^n$, então defina $\tilde{X} = X \circ \pi$. Agora, $\tilde{X}: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{R}^n$ satisfaz $\tilde{X}(I(p)) = (X \circ \pi)(I(p)) = X(\pi(I(p))) = X(\pi(p)) = \tilde{X}(p)$, para todo p em $\tilde{M}$. Então, $\tilde{X}(I(p)) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^{I(p)} \alpha =$

$$\tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha, \quad p_0, p \in \tilde{M}. \text{ Mas } \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha = \operatorname{Re} \left[\int_{p_0}^{I(p_0)} \alpha + \int_{I(p_0)}^p \alpha \right] = \tilde{X}(I(p_0)) + \operatorname{Re} \int_{p_0}^p I^* \alpha, \text{ e como}$$

$$\tilde{X}(I(p_0)) = \tilde{X}(p_0) = 0, \text{ concluímos que } \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p I^* \alpha. \text{ Temos } I \text{ negativa implica que } I \text{ é}$$

anti-holomorfa, logo $I^* \alpha_k = \alpha_k(I(\tau)) = \phi_k(I(\tau)) d(I(\tau)) = f_k \bar{d}\tau$, $1 \leq k \leq n$. Localmente, se $\phi_k =$

$$u_k + i v_k, \quad f_k = r_k + s_k \text{ e } d\tau = d\xi + i d\eta, \text{ temos } \int_{p_0}^p u_k d\xi - i v_k d\eta = \int_{p_0}^p r_k d\xi + i s_k d\eta, \text{ portanto } u_k =$$

r_k e $v_k = -s_k$, de onde temos $f_k = \bar{\phi}_k$. Logo, $I^* \alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ para todo k em uma vizinhança de p_0 .

Claramente a igualdade vale em todo $\tilde{M}$.

$$(\Leftarrow) \text{ Temos } \tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \phi(\tau) d\tau, \text{ portanto } \tilde{X}(I(p)) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^{I(p)} \alpha = \operatorname{Re} \left[\int_{p_0}^{I(p_0)} \alpha + \int_{I(p_0)}^p \alpha \right] =$$

$$\tilde{X}(I(p_0)) + \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha = \tilde{X}(I(p_0)) + \tilde{X}(p), \text{ para todo } p \text{ em } \tilde{M}. \text{ Se } p = I(q), \text{ temos } \tilde{X}(I(I(q))) =$$

$\tilde{X}(q) = \tilde{X}(I(p_0)) + \tilde{X}(I(q)) = 2\tilde{X}(I(p_0)) + \tilde{X}(q)$. Logo, $\tilde{X}(I(p_0)) = 0$ e assim, $\tilde{X}(I(p)) = \tilde{X}(p)$, para todo p em $\tilde{M}$ (II).

Considere $p \sim q \Leftrightarrow I(p) = q$ ou $p = q$, que é uma relação de equivalência. Denote $M = \tilde{M}/\sim$ e tome a projeção $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$. Por [Carmo] - pp 22-3, M é uma variedade diferenciável e π é um difeomorfismo local. O seguinte resultado é imediato (basta definir $X(q) = \tilde{X}(p)$, para $q = \pi(p) \in M$): existe X contínua tal que $X \circ \pi = \tilde{X}$ se, e somente se, sempre que $\pi(x) = \pi(y)$, tem-se $\tilde{X}(x) = \tilde{X}(y)$. É o que ocorre em (II).

Como $I: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ é anti-holomorfa, I é aberta, portanto se $I(p) = q$, tomamos abertos disjuntos $V(p)$ e $V(q)$. Da hipótese, $I^*\alpha = \tilde{\alpha}$, logo, para qualquer vetor $v \neq 0$ temos $I^*\alpha(v) = \alpha(dI(v)) = \tilde{\alpha}(v) \neq 0$ pois $\tilde{S}$ é regular. Então $dI(v) \neq 0$ implica que I é localmente injetora. Poderíamos ter tomado $V(p)$ e $V(q)$ tais que $I|_{V(p)} = (\pi|_{V(q)})^{-1} \circ (\pi|_{V(p)})$. Então $(d\pi)_q^{-1} \circ (d\pi)_p = dI_p$, que é negativa pois I é anti-holomorfa. Porém, $\pi^{-1}(\pi(V(p))) = V(p) \cup V(q)$. Então π é um recobrimento com $\#\pi^{-1} = 2$, ou seja, um recobrimento duplo orientável. $\square$

2. O Exemplo Não-Orientável de F. J. López

2.1 Lema Sejam $f, g: A = (0, 1/L, L)_{L>1} \rightarrow \mathbb{C}$, f holomorfa, g meromorfa, tais que $f(z) = 0$ se, e somente se, $g(z) = \infty$. Também, que z é pólo de ordem m de g se, e somente se, é zero de ordem $2m$ de f . Se as funções ϕ não tem períodos reais, elas definem uma imersão mínima de A em $\mathbb{R}^3$.

Prova:

Considere $M = A$ e $\alpha = fdz$ no Teorema 1.1.5. $\square$

2.2 Corolário

Dentro das hipóteses do Lema 3.1, a superfície mínima obtida é a dupla de uma superfície mínima não-orientável em $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ (i) $g \circ I = -1/\bar{g}$ e (ii) $I^*w = -\overline{g^2 w}$, $w = fdz$, onde $I: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ é uma involução anti-holomorfa.

Prova:

($\Rightarrow$) Considere $N: \tilde{M} \rightarrow S^2$ a Aplicação de Gauss e Γ a projeção estereográfica. Logo $\Gamma \circ N = g$ e $N \circ I = -N$ pois I é negativa. Logo, $\Gamma \circ N \circ I = g \circ I = \Gamma \circ (-N) = \Gamma \left(\frac{-2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{-2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{1 - |g|^2}{|g|^2 + 1} \right) = -2g/(2|g|^2) = -1/\bar{g}$.

Temos $I^*w = f(I)dI$ e $\overline{-g^2w} = -\overline{g^2}f d\bar{z}$. Mas $I^*\alpha_3 = \bar{\alpha}_3$ implica em $I^*(fgdz) = \bar{f}g d\bar{z}$, ou seja, $f(I)g(I)dI = \bar{f}g d\bar{z}$. Logo $f(I)dI = \bar{f}g d\bar{z}/g \circ I = -\overline{g^2}f d\bar{z}$, portanto $I^*w = -\overline{g^2}f d\bar{z}$.

($\Leftarrow$) $I: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ não tem pontos fixos, pois $I(p) = p$ implicaria em $g(I(p)) = g(p) = -1/\bar{g}(p)$ (absurdo). Também temos $I^*\alpha = \alpha \circ I = (f(I) - f(I)g^2(I), if(I) + if(I)g^2(I), 2f(I)g(I))d(I)/2 \stackrel{i,ii}{=} (I^*w)(1 - \bar{g}^{-2}, i + i\bar{g}^{-2}, -2\bar{g}^{-1})/2 = ((-\bar{g}^2 + 1)\bar{f}d\bar{z}, (-\bar{g}^2 - 1)\bar{f}d\bar{z}, 2\bar{f}g d\bar{z})/2 = \bar{\alpha}$. Agora usamos a recíproca do Teorema 1.6. $\square$

2.3 Lema

Nas hipóteses do Lema 2.1, a superfície mínima obtida é a superfície dupla de uma superfície mínima não-orientável regular em $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, (i) $g \circ I = I \circ g$ e (ii) $(zg(z))^2 = -\bar{f}(I(z))/f(z)$, onde $I: A \rightarrow A$ é dada por $I(z) = -1/\bar{z}$. A superfície não-orientável é, de fato, a faixa de Möbius.

Prova:

Considere $\tilde{M} = A$. Se tomarmos o grupo $\{id, I\}$ e $M = \tilde{M}/\{id, I\}$, é suficiente identificar cada classe de equivalência a um ponto adequado na faixa de Möbius F , para ver que M e F são difeomorfas.

Figura 15

Resta apenas mostrar que (ii) no Corolário 2.2 e aqui são equivalentes : $I^*w = f(I(z))d(I(z)) = -\overline{g^2w} = -\overline{g^2(z)f(z)dz} \Leftrightarrow g^2(z)dz = -\bar{f}(I(z))\bar{d}(I(z))/f(z)$. Mas $\bar{d}(I(z))/dz = d(-1/z)/dz = 1/z^2$. $\square$

Figura 16

Considere a Figura 16. K_n^2 é um anel em A , menos dois trechos antípodas centrados no eixo imaginário, quando n é par, e no eixo real, quando n é ímpar, e K_n^2 tende para o círculo externo de A quando $n \rightarrow \infty$. $K_n^1 = I(K_n^2)$ e $K_n = K_n^1 \cup K_n^2$. Sejam $\{M_n\}, \{N_n\}$ seqüências em C , e $\varepsilon > 0$.

2.4 Teorema de Montel

Uma família de funções holomorfas em um aberto $A \subset C$ é normal se, e somente se, ela é localmente limitada.

Prova: [Conway] - pag 153.

2.5 Lema

Existe $h: A \rightarrow C$ holomorfa tal que $|h - M_n| \leq \varepsilon$ em K_n^2 e $|h - N_n| \leq \varepsilon$ em K_n^1 .

Prova:

Pelo Teorema de Runge, concluímos que existe um polinômio h_1 em $C \supset A$ tal que $|h_1 - M_1| \leq \varepsilon/2$ em K_1^2 e $|h_1 - N_1| \leq \varepsilon/2$ em K_1^1 , para E (do teorema) = $\{\infty\}$. Seja D_{n-2} um anel fechado em A tal que $D_{n-2} \cap (\bigcup_j K_j) = \bigcup_{i=1}^{n-2} K_i$. Temos $K_{n-1}^1 \cup D_{n-2} \cup K_{n-1}^2$ compacto em C e aplicamos novamente o Teorema de Runge para este conjunto, com $E = \{0, \infty\}$. Portanto existe h_{n-1} analítica em $C^* = C - \{0\} \supset A$, $|h_{n-1} - h_{n-2}| < \varepsilon/2^{n-1}$ em D_{n-2} , $|h_{n-1} - M_{n-1}| < \varepsilon/2^{n-1}$ em K_{n-1}^2 e $|h_{n-1} - N_{n-1}| < \varepsilon/2^{n-1}$ em K_{n-1}^1 . Deste modo, $\{h_n\}$ é uma seqüência de funções analíticas em C^* , e como $D_{n-1} \subset D_n$, $\bigcup_j D_j = A$ e para todo j temos :

(a) $j \leq n \Rightarrow \max_{D_n} |h_j| \leq \varepsilon + \max_{D_n} |h_j| \leq \varepsilon + \max\{\max_{D_n} |h_i|, i = 1, \dots, n\}$, ou

(b) $j > n \Rightarrow$ em D_n , $|h_j - h_n| \leq |h_j - h_{j-1}| + \dots + |h_{n+1} - h_n| \leq \varepsilon/2^j + \dots + \varepsilon/2^{n+1} < \varepsilon \therefore |h_j| \leq |h_n| + \varepsilon \therefore |h_j| \leq \max_{D_n} |h_n| + \varepsilon \Rightarrow \max_{D_n} |h_j| \leq \varepsilon + \max\{\max_{D_n} |h_i|, i = 1, \dots, n\}$.

Mas para todo w em A , $w \in \mathring{D}_n$ para algum n . Logo $|h_j(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathring{D}_n$, qualquer que seja $h \in \{h_n\}$. Então, esta família de funções é localmente limitada. Pelo Teorema de Montel, concluímos que ela é normal, isto é, $\{h_n\}$ possui uma subsequência que converge para uma função h em $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$, que é o espaço das funções contínuas de A em $\mathbb{C}$. Esta convergência é dada pela métrica ρ (vide [Conway] - pag 143), com a qual $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$ é um espaço métrico completo. Logo, h é analítica em A . Dados K_n e $\delta > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|h - h_m| < \delta$ em K_n , para todo $m \geq m_0$. Portanto $|h - M_n| \leq |h - h_m| + \dots + |h_n - M_n| < \delta + \varepsilon/2^m + \dots + \varepsilon/2^n \leq \varepsilon$ se $\delta \leq \varepsilon/2$. Do mesmo modo, $|h - N_n| \leq \varepsilon$. $\square$

2.6 Teorema

Existe uma família de superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$, entre dois planos paralelos.

Prova:

Seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência de reais, $M_{2n} = M_{2n-1} = \begin{cases} 1, n \text{ par} \\ \alpha_n, n \text{ impar} \end{cases}$; $N_{2n} = N_{2n-1} =$

$\begin{cases} 1, n \text{ par} \\ \alpha_n, n \text{ impar} \end{cases}$. Então $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, \dots) = (\alpha_1, \alpha_1, 1, 1, \alpha_3, \alpha_3, 1, 1, \dots)$ e

$(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, \dots) = (1, 1, \alpha_2, \alpha_2, 1, 1, \alpha_4, \alpha_4, \dots)$. Agora fixe $\varepsilon > 0$, logo existe h em A pelo Lema 2.5. Defina $p = e^h$, $t = p/\bar{p} \circ I$, $\sqrt{A} = (0, 1/\sqrt{L}, \sqrt{L})$ e $q(z) = t(z^2).t(-z^2)$ em $\sqrt{A}$.

Temos q analítica em $\sqrt{A}$, e $q(z).\bar{q}(I(z)) = t(z^2).t(-z^2).\bar{t}(-1/\bar{z}^2).\bar{t}(1/\bar{z}^2) =$

$\frac{p(z^2)}{\bar{p}(I(z^2))} \frac{p(-z^2)}{\bar{p}(I(-z^2))} \left(\frac{p(I(z^2))}{\bar{p}(z^2)} \right)^{-} \left(\frac{p(-I(z^2))}{\bar{p}(-z^2)} \right)^{-} = 1$, para todo $z \in (I)$. Seja $\sqrt{K}_n^i = \{z \in \sqrt{A} : z^2 \in$

$K_n^i\}$, $n \in \mathbb{N}$, $i=1,2$. $K_n^1 = I(K_n^2) \Rightarrow \sqrt{K}_n^1 = I(\sqrt{K}_n^2)$, e $|h - M_m| < \varepsilon$ em K_m^2 , $|h - N_m| < \varepsilon$ em K_m^1

implicam que $-\varepsilon \leq \text{Re}(h) - \text{Re}(M_m) \leq \varepsilon$ em K_m^2 , $-\varepsilon \leq \text{Re}(h) - \text{Re}(N_m) \leq \varepsilon$ em K_m^1 . Como $|p| =$

$e^{\text{Re}(h)}$, temos $e^{\text{Re}(M_m) - \varepsilon} \leq |p| \leq e^{\text{Re}(M_m) + \varepsilon}$, $e^{\text{Re}(N_m) - \varepsilon} \leq |p| \leq e^{\text{Re}(N_m) + \varepsilon}$ (portanto $e^{-\text{Re}(N_m) - \varepsilon} \leq |p \circ I|^{-1}$

$\leq e^{-\text{Re}(N_m) + \varepsilon}$ em K_m^2) implica em $e^{2\text{Re}(M_m - N_m) - 4\varepsilon} \leq |t|^2 \leq e^{2\text{Re}(M_m - N_m) + 4\varepsilon}$. Logo $e^{2\alpha_n - 2 - 4\varepsilon} \leq |q| \leq$

$e^{2\alpha_n-2+4\varepsilon}$, n ímpar, em $\sqrt{K_{2n-1}^2}, \sqrt{K_{2n}^2}$. Similarmente, $e^{2\alpha_n-2-4\varepsilon} \leq |q| \leq e^{2\alpha_n-2+4\varepsilon}$, n par, em $\sqrt{K_{2n-1}^1}, \sqrt{K_{2n}^1}$ (III). Como $t \in \mathcal{O}(A)$, $t(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n z^n$. Logo, $t(z^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n z^{2n}$.

O seguinte teorema, devido a Mertens, encontra-se demonstrado em [Rudin] - pag 75:

"Se (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ converge absolutamente; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \beta$; e (c) $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = c_n$ para todo n natural, então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \alpha\beta$ ".

Quando $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, então o faz $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ pois $|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$.

Vamos definir $s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^{2n}$, $s_2 = t(z^2) - s_1$, $s_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-z^2)^n$ e $s_4 = t(-z^2) - s_3$. Agora apliquemos o teorema para (s_1, s_3) , (s_1, s_4) , (s_2, s_3) e (s_2, s_4) , e teremos que $t(z^2)t(-z^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\lambda}_n z^{2n}$ (os termos puderam ser reordenados pois a convergência é absoluta). Este teorema provê que os produtos $(\lambda_m z^{2m}) \cdot (\lambda_k (-z^2)^k) = \lambda_m \lambda_k z^{2m} (-z^2)^k$ e $(\lambda_k z^{2k}) \cdot (\lambda_m (-z^2)^m) = \lambda_k \lambda_m z^{2k} (-z^2)^m$ apareçam apenas uma vez quando construímos os termos c_n . Como todas as convergências envolvidas são absolutas, podemos agregá-los. Mas eles se anulam quando $m+k$ é ímpar. Então $t(z^2)t(-z^2) = q(z)$ pode ser reescrita como $\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{4n} z^{4n}$. Similarmente

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A'_{4n} z^{4n}.$$

Defina $f(z) = i(z-1)^2 z^{-4} q(z)$, $g(z) = z^2(z+1)(z-1)^{-1}/q(z)$ em $\sqrt{A}$. Como $q \neq 0$ em $\sqrt{A}$, $f = 0$ se, e somente se, $z = 1$, o único zero de f , e tem ordem 2, e também o único pólo de g , e tem ordem 1. Temos $\phi_1 = f(1-g^2)/2 = i(z-1)^2 z^{-4} q(z)(1 - z^4(z+1)^2(z-1)^{-2}/q^2(z))/2 = i(z-1)^2 z^{-4} q(z) - (z+1)^2/q(z)$. Para $k = 0, 1, 2$, $4n+k \neq -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto o termo $1/z$ não ocorre no desenvolvimento de Laurent de ϕ_1 em $\sqrt{A}$, ou seja, ϕ_1 não tem períodos reais. O mesmo ocorre para ϕ_2 . Agora, $\phi_3 = i(z^2-1)/z^2 = i - 1/z^2$, $z = x+iy$ implica que $\text{Re} \int \phi_3 = -y + y/(x^2+y^2) + \text{cte}$, limitada em $\bar{A}$. Pelo Lema 2.1, temos uma imersão mínima $X: \sqrt{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (entre 2 planos paralelos). Seja $M = \sqrt{A}$ com a métrica induzida pela imersão. Por (I), $g(I(z)) = \frac{\frac{1}{z^2}(-\frac{1}{z}+1)}{(-\frac{1}{z}-1)} \bar{q}(z) = -\bar{q}(z)(\bar{z}-1)\bar{z}^{-2}/(\bar{z}+1) = I(g(z))$; $z^2 g^2(z) f(z) = z^2 z^4 (z+1)^2 (z-1)^{-2} \cdot q^{-2}(z) \cdot i$.

$$(z-1)^2 z^{-4} q(z) = iz^2(z+1)^2 \bar{q}(I(z)) = - \left(\frac{i(-\frac{1}{z} - 1)^2}{(\frac{1}{z})^4} q(I(z)) \right)^{-} = -\bar{f}(I(z)). \text{ Portanto, o Lema 2.3}$$

mostra que (M, X) é a superfície dupla de uma superfície mínima não-orientável S em $\mathbf{R}^3$, sendo esta uma imersão da faixa de Möbius. Então, S não é plana, pois é não-orientável.

M é completa : pelo Lema 2.1, $\lambda = |f|(1+|g|^2)/2 = |z-1|^2 \cdot |z|^{-4} \cdot |q(z)| \cdot (1+|z|^4 \cdot |z+1|^2 \cdot |z-1|^{-2} \cdot |q(z)|^{-2})/2 = |z-1|^2 \cdot |z|^{-4} \cdot |q(z)|/2 + |z+1|^2 \cdot |q(z)|^{-1}/2$. Se γ é um caminho divergente no conjunto $\sqrt{A}$, $|\gamma'| \equiv 1$, pode ocorrer:

(a) O comprimento Euclidiano de γ é ∞ : tome um compacto $K \subset \sqrt{A}$ com $\{-1, 1\} \subset \overset{\circ}{K}$. Então

$$|z-1|^2 \cdot |z|^{-4} \cdot |q(z)|/2 \geq c \text{ (cte)} > 0 \text{ e } |z+1|^2 \cdot |q(z)|^{-1}/2 \geq c > 0 \text{ em } M-K. \text{ Então } \ell(\gamma) = \int_0^\infty \lambda(t) dt = \infty.$$

(b) O comprimento Euclidiano de γ é finito : γ cruzará todos os $\sqrt{K_{2n}^2}(\sqrt{K_{2n-1}^2}, \sqrt{K_{2n-1}^1})$, ou $\sqrt{K_{2n}^1}$, para todo $n \geq m$. Considere o primeiro caso. Defina $J_p^i = \{\gamma\} \cap \sqrt{K_p^i}$ e $r_p^i =$

(raio externo - raio interno) de $\sqrt{K_p^i}$. Temos $\ell(\gamma) = \int_0^b \lambda(t) dt \geq \sum_{n \geq m} \int_{J_{2n}^2} \lambda(t) dt$, mas vimos que

$$|q| \geq e^{2\alpha_n - 2 - 4\varepsilon} \text{ e } |q|^{-1} \geq e^{-2\alpha_n - 2 - 4\varepsilon}, \text{ n ímpar em } \sqrt{K_{2n-1}^2} \cup \sqrt{K_{2n}^2}. \text{ Portanto } \lambda \geq L \cdot (e^{2\alpha_n} + e^{-2\alpha_n}) > L \cdot e^{2\alpha_n}, \text{ onde } L \text{ é uma constante. Então, } \ell(\gamma) \geq \sum_{\substack{n \text{ ímpar} \\ n \geq m}} L \cdot e^{2\alpha_n} \cdot r_{2n}^2, \text{ e se } \alpha_n = \max\{-0,5, \ln(r_{2n}^2),$$

$-0,5, \ln(r_{2n-1}^2)\}$, n ímpar, temos $\ell(\gamma) = \infty$. Analogamente, a escolha $\alpha_n = \max\{-0,5, \ln(r_{2n}^1), -0,5, \ln(r_{2n-1}^1)\}$, n par, nos dá $\ell(\gamma) = \infty$ nos outros casos. $\square$

Observação: as imagens da superfície dupla (M, X) e da não-orientável em $\mathbf{R}^3$ são iguais, de acordo com a demonstração do Teorema 1.6. No entanto, esta imagem, com a topologia induzida pela composição de X com as cartas de M , é não-orientável. Isto decorre do fato de que $X(M)$ não é necessariamente orientável se M o for. A grosso modo, $X: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ dá "duas voltas" pela imagem, enquanto isto ocorre apenas uma vez na imersão não-orientável.

CAPÍTULO VI

Extensões de Resultados, Análise Comparativa e Gráficos

1. Superfícies Mínimas Completas em $\mathbf{R}^4$ Limitadas por Dois pares de Hiperplanos

Um resultado imediato que se obtém do Teorema 2.1.3 é que podemos obter uma superfície mínima completa em $\mathbf{R}^4$ limitada, por exemplo, pelos hiperplanos $x_3 = x_4 = \pm 2$. Considere o Teorema 1.1.4 e a Proposição 1.1.5. Vamos escolher $g_1 = \sqrt{2} \cdot g = \sqrt{2} \cdot e^h$, onde h é a função do Teorema 2.1.3, e $f = 1/g$, $g_2 = z \cdot g$. Deste modo temos $\phi_3 \equiv \sqrt{2}$ e $\phi_4 = z$, portanto $x_3, x_4 : \text{Dom}(h) = D = B(0,1) \rightarrow \mathbf{R}$ são tais que $-2 \leq x_3, x_4 \leq 2$.

i) A superfície é completa.

A métrica induzida é $ds^2 = \frac{1}{4} [(1 + |g_1|^2 + g_2^2)|^2 + 2 \cdot (|g_1|^2 + |g_2|^2 - |g_1^2 + g_2^2|)] \cdot |f dz|^2 \geq \frac{1}{4} [1 + |2 + z^2| \cdot |g|^2] \cdot |f dz|^2$. Como em D temos $|2 + z^2| \geq 1$, $ds \geq \frac{1}{2} [|g| + 1/|g|] \cdot |dz|$.

Vimos que $[|g| + 1/|g|] \cdot |dz|$ é completa, logo ds é completa.

ii) A superfície é reversa.

Suponha que não. Deste modo, existe uma translação T e uma rotação R em $\mathbf{R}^4$ tais que $R \circ T \circ X = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$, onde $\tilde{x}_1 \equiv 0$. Mas $\tilde{x}_1 = k + \text{Re} \int A \cdot \phi$, onde $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, $A = (a, b, c, d)$ é um vetor não-nulo do $\mathbf{R}^4$ e k é uma constante real. Então $a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2 + c \cdot \phi_3 + d \cdot \phi_4 \equiv 0$ em D implica em $\frac{1}{2}(-a + bi)(2 + z^2) \cdot g^2 + (c + d \cdot z) \cdot g + \frac{1}{2}(a + bi) \equiv 0$, de onde concluímos que $|\frac{1}{2}(a + bi)| \geq |g| \cdot |\frac{1}{2}(-a + bi)(2 + z^2) \cdot g + (c + d \cdot z)| \geq |g|^2 \cdot (|p(z)| - |c + d \cdot z|/|g|)$, com $p(z) = \frac{1}{2}(-a + bi) \cdot (2 + z^2)$. Ao final da demonstração do Teorema 2.1.3, vimos que $|g| > e^{c_n - 1}$ em K_n , $c_n \rightarrow \infty$. Mas $|\frac{1}{2}(a + bi)|$ é constante, um absurdo a menos que $a = bi$ (logo $a = b = 0$). Mas isso também acarreta em um absurdo.

O fato de que $2 \cdot ds \geq [1 + |g|^2] \cdot |f \cdot dz|$ também generaliza os resultados de E. Toubiana e H. Rosemberg para o $\mathbf{R}^4$, ou seja, a superfície em $\mathbf{R}^4$ é parametrizada por um anel da forma $(0, 1/r, r)$, $r > 1$. Vejamos como isto ocorre: seja $F : (0, 1/r, r) \rightarrow \mathbf{C}$ a função do Teorema 2.2.1. Então escolha $g(z) = z \cdot e^{F(z)}$, $g_1 = \sqrt{1 + z^2} \cdot g$, $g_2 = iz \cdot g$ e $f = 1/(z \cdot g)$. Deste

modo $\phi_3 \equiv \sqrt{1+z^2}/z$ e $\phi_4 = i$, portanto limitadas no anel, sem períodos reais (lembre que $\sqrt{1+z^2} = 1 + z^2/2 + \dots$).

i) ϕ_1 e ϕ_2 não têm períodos reais.

$\phi_1 = 0,5.f.[1 - (g_1^2 + g_2^2)] = 0,5.f.[1 - g^2]$ e $\phi_2 = 0,5i.f.[1 + (g_1^2 + g_2^2)] = 0,5i.f.[1 + g^2]$, que são as mesmas do Teorema 2.2.1, portanto não têm períodos reais.

ii) A superfície é completa.

A métrica induzida é $ds^2 = \frac{1}{4}[(1 + |g_1^2 + g_2^2|)^2 + 2(|g_1^2| + |g_2^2| - |g_1^2 + g_2^2|)]$.
 $|f dz|^2 \geq \frac{1}{4}[1 + |g^2|]^2 \cdot |f dz|^2$. Então $ds \geq \frac{1}{2}[|g| + 1/|g|] \cdot |dz/z|$ que é completa.

iii) A superfície é reversa.

Prova-se como anteriormente, agora usando o fato de que $\text{Re}(F(z)) > -1 - \alpha + c_n$ em K_n , onde α é constante real positiva e $c_n \rightarrow \infty$ (vide demonstração do Teorema 2.2.1).

Podemos também obter uma equação explícita em $\mathbf{R}^4$. Considere $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot z^{n_j}$

uma série de potências com lacunas de Hadamard, nas hipóteses do Teorema 2.3.2. Escolha $g_1 = \sqrt{2} \cdot h'$, $g_2 = z \cdot h'$ e $f \equiv 1$. Temos $\phi_3 \equiv \sqrt{2}$ e $|x_4| = |\text{Re} \int \phi_4| \leq |\int \phi_4| \leq |\int z \cdot h' \cdot dz| = |z \cdot h - \int h \cdot dz| \leq |z \cdot h| + \int |h| \cdot |dz| \leq 2M$, pois a integral independe do caminho, então podemos sempre escolher um segmento de reta.

i) A superfície é completa.

A métrica induzida é $ds^2 = \frac{1}{4}[(1 + |g_1^2 + g_2^2|)^2 + 2(|g_1^2| + |g_2^2| - |g_1^2 + g_2^2|)]$.
 $|f dz|^2 = \frac{1}{4}[1 + |2 + z^2| \cdot |h'|^2] \cdot |dz|^2 \Rightarrow ds \geq \frac{1}{2}[1 + |h'|^2] \cdot |dz|$, e esta última é completa.

ii) A superfície é reversa.

Demonstra-se analogamente ao caso anterior, mas agora usando o fato de que $4e \cdot |h'(z)| \geq |a_k| \cdot n_k$ nos anéis R_k (vide o final da demonstração do Teorema 2.3.2). A hipótese (b) deste teorema implica em $|a_k| \cdot n_k \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow \infty$.

Vejamos agora como ficam as superfícies de C. J. Costa e P. A. Q. Simões em $\mathbf{R}^4$.

Considere o Lema 3.6.2, com $g = \frac{\lambda}{f} \Pi^* h'(z/\delta)$ e $\eta = f \Pi^* dz$. As funções $g_1 = g \cdot \Pi^* \sqrt{1 + (\frac{z}{2\delta})^2}$ e $g_2 = g \cdot \Pi^* (0,5iz/\delta)$ são meromorfas em $M_S - V(\delta)$ e $g_1^2 + g_2^2 = g^2$, de modo que ϕ_1 e ϕ_2 são as mesmas, portanto não têm períodos reais.

i) x_3 e x_4 são limitadas.

$$\phi_3 = g_1 \cdot \eta = \lambda \cdot \Pi^* \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{2\delta}\right)^2} \cdot h'(z/\delta) \cdot dz \right) \Rightarrow |x_3(p)| \leq \left| \lambda \delta \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z}{2\delta}\right)^2} \cdot h(z/\delta) \right|_{\Pi(p_0)}^{\Pi(p)} - \frac{1}{8\delta^2} \int_{\Pi(p_0)}^{\Pi(p)} \frac{h(z/\delta) \cdot z \cdot dz}{\sqrt{4\delta^2 + z^2}} \quad |. \text{ Como } |4\delta^2 + z^2| \geq 3\delta^2, |z| \leq \delta, \text{ então } |x_3(p)| \leq L, \text{ para todo } p \text{ em } M_S - V(\delta).$$

Note que ϕ_3 não tem períodos reais. Analogamente, ϕ_4 não tem períodos reais e x_4 é limitada.

ii) A superfície é completa e reversa.

Prova-se do mesmo modo que nos casos anteriores. Apenas lembramos que a função algébrica f é limitada em $M_S - V(\delta)$, e que seus únicos zeros são os pontos de ramificação de Π . Aliás, vale ressaltar que a relação entre pólos e zeros de g_1, g_2 e η é mantida, pois em g_2 temos dois zeros para $z = 0$ que são os pontos de $\Pi^{-1}(0)$. Mas estes não coincidem com os pólos de f .

No caso das superfícies não-orientadas de F. J. López, o Corolário 5.2.2 traz uma pequena dificuldade quanto à uma generalização em $\mathbf{R}^4$, já que a sua demonstração utiliza-se da Aplicação de Gauss em $\mathbf{R}^3$.

Observação: Não necessitamos nos restringir ao $\mathbf{R}^4$. Por exemplo, para estender os resultados de Jorge e Xavier em $\mathbf{R}^{n+2}$, escolha $g_1 = \sqrt{n} \cdot g = \sqrt{n} \cdot e^h$, $g_2 = z \cdot g$, ..., $g_n = z^{n-1} \cdot g$ e $f = 1/g$. Temos a métrica $ds \geq \frac{1}{2} [1 + |g^2|] \cdot |f \cdot dz|$. Portanto, conseguimos uma limitação por n pares de hiperplanos.

2. Comparação entre os Métodos

Com exceção de F. F. Brito, C. J. Costa e P. A. Simões, a técnica utilizada reside basicamente no Teorema de Runge, de onde obtém-se funções analíticas cuja parte real aproxima-se de $+\infty$ em uma seqüência de compactos que convergem para a fronteira. Esta aproximação é de tal forma que o todo caminho divergente tem comprimento infinito na métrica induzida.

Observamos que a parte imaginária destas funções, nos casos aqui estudados, têm uma variação limitada nestes compactos (a função h do Teorema 2.1.3 é tal que $-1 \leq \text{Im } h \leq 1$). Na verdade, este fato não é necessário para a obtenção dos resultados. Ou seja, temos uma enorme diversidade dessas superfícies mínimas. Infelizmente, em nenhum caso fica explícita a equação para que possamos obter um gráfico aproximado.

Nas séries com lacunas de Hadamard, isto é possível. No entanto, devemos tomar vários cuidados na escolha de uma aproximação. Pela hipótese (b) do Teorema 2.3.2, devemos ter $\lim_{j \rightarrow \infty} (|a_j| \min\{\frac{n_j}{n_{j-1}}, \frac{n_{j+1}}{n_j}\}) = \infty$, ou seja, $|a_j|.n_j/n_{j-1} \rightarrow \infty$. Como $a_j \rightarrow 0$ pela hipótese

(a), os valores n_j devem ter um crescimento rápido. Por outro lado, seja $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot z^{n_j}$ nas

condições do teorema e $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f \equiv 1$, $g = h'$. Então $2.x_1 = \text{Re} \int (1-g^2).dz$, e portanto

$H = \int h'.h' = \sum_{i,j} A_{ij} \cdot z^{N_{ij}}$, onde $A_{ij} = a_i \cdot n_i \cdot a_j \cdot n_j / (n_i + n_j - 1)$ e $N_{ij} = n_i + n_j - 1$. Para $i = j$ vemos que

$(|a_j|.n_j)^2 / (2.n_j - 1) \geq 0.5 \cdot |a_j|^2 \cdot n_j$, e a hipótese (c) do Teorema 2.4.2 $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j = \infty$. Se os

coeficientes a_j são todos reais positivos, $z \rightarrow 1 \Rightarrow x_1 \rightarrow -\infty$. A propósito, o comportamento da superfície para $|z| \rightarrow 1$ é de especial interesse, mas a sua visualização gráfica tem os seguintes problemas:

1) quanto maiores os valores de n_i, n_j , mais $|z|$ tem de estar próximo de 1 para que $A_{ij} \cdot z^{N_{ij}}$ tenha contribuição significativa no cálculo de $H(z)$. Se acaso n_j cresce muito rapidamente, o comportamento final da superfície fica restrito a um anel demasiadamente próximo de ∂D . Para minimizar este problema, devemos escolher uma sequência $|a_j|.n_j/n_{j-1}$ que divirja lentamente para ∞ . Por exemplo, $|a_j|.n_j/n_{j-1} = j^{0.1}$ ou $\ln(j)$ ou $\ln(\ln(j))$.

2) se o software utilizado aproxima o gráfico por uma partição do retângulo $Q = \text{domínio dos parâmetros } (u,v)$ da superfície, então esta partição deve ter uma densidade de pontos bem maior nas regiões de Q onde $|z(u,v)| \cong 1$. Do contrário, a figura resultante terá muitas quebras. Vamos dar um exemplo em que este problema é contornável : suponha $z = u \cdot e^{iv}$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Para aumentar a densidade de pontos com $u \geq 0,9$, podemos fazer $u \rightarrow (u-1)^3 + 1$ e $z = [(u-1)^3 + 1] \cdot e^{iv}$.

3. Cálculo de Erros

Veamos o seguinte exemplo: a série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,1}}$ é convergente, sendo que $S \geq$

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1,1}} = 10. \text{ No entanto, uma calculadora programável nos dá } \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^{1,1}} \cong 5,5728 < 5,573.$$

Isto mostra a importância da estimativa do erro cometido em aproximações.

No caso $a_j = 1/j^{1,9}$ e $n_j = (j!)^2$ ($\therefore |a_j| \cdot n_j / n_{j-1} = j^{0,1}$), seja R_n o erro cometido ao truncarmos a série $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot z^{n_j}$ em n termos. Fixe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Temos

$$|R_n(x_3)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/j^{1,9} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{1,9}} = 10 \cdot n^{-0,9}/9; \text{ e } |z| \leq \left(\frac{p^{-n}}{n!^2} \right)^{1/(n!^2-1)} \Rightarrow |z| \leq \left(\frac{j^{1,9}}{p^j \cdot j!^2} \right)^{1/(j!^2-1)}, \forall j \geq n,$$

ou seja, $(a_j \cdot n_j \cdot |z|^{n_j-1}) \leq p^{-j}$, $\forall j \geq n$. Então, lembrando que podemos integrar em um segmento de reta,

$$|R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq \frac{1}{2} \left| 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot n_j \cdot z^{n_j-1} \right) \cdot \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \cdot n_j \cdot z^{n_j-1} \right) + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \cdot n_j \cdot z^{n_j-1} \right)^2 \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot n_j \cdot Z^{n_j-1} \right) \cdot p^{-n}.$$

$$(p-1) + \frac{1}{2}(p-1)^2 \cdot p^{-2n} / 2, \text{ onde } Z = Z(n,p) = \left(\frac{p^{-n}}{n!^2} \right)^{1/(n!^2-1)}. \text{ Neste caso, temos uma estimativa}$$

$$\text{ainda melhor para a terceira variável: } |R_n(x_3)| \leq |Z|^{n+1} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/j^{1,9} \leq |Z|^{n+1} \cdot 10 \cdot n^{-0,9}/9$$

Por exemplo, $p = 2$ e $n = 5$ nos garante que $|z| \leq \left(\frac{2^{-n}}{n!^2}\right)^{1/(n!^2-1)} = 0,999 \Rightarrow$

$|R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 0,464$ e $|R_n(x_3)| \cong 0$; mas $p = 2$ e $n = 7 \Rightarrow |z| \leq 0,999999 \Rightarrow$
 $|R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 91,67$ e $|R_n(x_3)| \leq 0,115$. Então fazemos $p = 10$, $n = 7 \Rightarrow |z| \leq 0,999998 \Rightarrow$
 $|R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 0,009$ e $|R_n(x_3)| \cong 0$.

Observe que não estamos trabalhando com erro relativo, pois precisaríamos de uma boa estimativa minorante de $\sum_{j=1}^n a_j n_j z^{n_j-1}$, isto é, $|\sum_{j=1}^n a_j n_j z^{n_j-1}| \geq m(z, n)$, o que não é muito simples. No entanto, podemos diminuir bem o erro absoluto. No exemplo anterior, para $n = 7$ a mudança de $p = 2$ para $p = 10$ alterou muito pouco o limitante superior de $|z|$ e diminuiu consideravelmente $|R_n(x_1)|$ e $|R_n(x_2)|$.

4. Gráficos

Estamos agora preparados para traçar alguns gráficos que nos darão uma primeira idéia do comportamento de uma superfície mínima completa limitada por dois planos paralelos em $\mathbb{R}^3$. Os gráficos foram traçados pelo software Mathematica 2.2, que obedece à seguinte característica: as auto-intersecções não são indicadas, por exemplo, por linhas pontilhadas. No entanto, as diferentes cores nos permitem a sua visualização.

Ao final do item 2, mostramos um modo de aumentar a densidade de pontos nas regiões finais da superfície. Faremos $z = u \cdot e^{iv}$, $u \rightarrow \{ [(1 + \sqrt[M]{1-Z}) \cdot u - 1]^M + 1 \} / (2-Z)$ aqui, onde M é um natural ímpar e $Z = Z(n, p)$. O motivo disto é que os valores $|z| > Z$ estão fora do nosso cálculo de erros, e não serão atingidos pelos limites requisitados na entrada. No entanto, a aproximação anterior, que é do tipo $u \rightarrow (u - 1)^M + 1$, possui uma desvantagem. Por exemplo, se $(u - 1)^M + 1 \leq Z$, então $u \leq 1 - \sqrt[M]{1-Z}$. Se $Z = 0,99999$, $M = 11$, temos $u \leq 0,65$. Então, de 0,65 a 1 existe uma grande densidade de pontos que não podem ser utilizados. Por outro lado, a transformação aqui adotada tem um aspecto como mostra a figura seguinte:

PROGRAMA DE ENTRADA

```
P=10
n=5
M=5
Z=.995
U=(1+(-1+(1+Power[1-Z,1/M])*u)^M)/(2-Z)
z=U*Exp[I*v]
ai=i^-1.9
aj=j^-1.9
ni=(i!)^2
nj=(j!)^2
H=Sum[ai*aj*ni*nj*z^(ni+nj-1)/(ni+nj-1),{i,1,n},{j,1,n}]
h=Sum[aj*z^nj,{j,1,n}]
x1=Re[z-H]/2
x2=Re[I*(z+H)]/2
x3=Re[h]
L=1-Power[1-Z,1/M]
ParametricPlot3D[{x2,x3,x1}
//Evaluate,
{u,0,L},{v,0,2Pi},
ViewPoint->{1.300,-2.400,2.000}];
```

Para obter-se uma sequência de figuras que mostram a superfície sendo expandida, os valores p, n, Z e M da entrada foram modificados da seguinte maneira:

fig 1 $\rightarrow p = 10, n = 5, M = 5, Z = 0,995 \quad \therefore |R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 0,003$ e $|R_n(x_3)| \cong 0$

fig 2 $\rightarrow p = 10, n = 6, M = 21, Z = 0,9997 \quad \therefore |R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 0,003$ e $|R_n(x_3)| \cong 0$

fig 3 $\rightarrow p = 10, n = 7, M = 31, Z = 0,9999 \quad \therefore |R_n(x_1)|, |R_n(x_2)| \leq 0,009$ e $|R_n(x_3)| \cong 0$

fig 4 $\rightarrow p = 10, n = 7, M = 45, Z = 0,99993$

fig 5 $\rightarrow p = 10, n = 7, M = 51, Z = 0,99995$

Note que o eixo x_3 é o do canto inferior direito.

Em seguida, a figura 3 foi rotacionada para a esquerda de modo que o eixo x_2 fosse perpendicular à superfície do papel (figura 6), e depois novamente para a esquerda de forma a visualizarmos a "parte de trás" (figura 7).

Tomando a figura 7, fazemos uma rotação lateral de forma a chegarmos na "parte de baixo" (figuras 8 e 9). A "parte de cima" é vista na figura 10.

Faz-se necessário gastarmos alguns minutos e usarmos um pouco da nossa imaginação para que possamos entender as figuras, devido à sua complexidade. À primeira vista, parece que ocorrem algumas dobras abruptas e que a superfície se fecha em certos trechos, mas isto não é verdade. As grandes linhas retas que vão surgindo são regiões que se aproximam de planos. Também vale ressaltar que as figuras de 1 a 5 estão uma contida na outra, mas com diminuição de escala. Um fato interessante: na figura 1 existe um trecho do bordo que parece ficar sem expansão até a figura 5 (vide a face x_1, x_2 na linha $x_1 = 0$), um pouco contrário à ideia de completividade. No entanto, este trecho faz um contorno por baixo e intercepta a região plana em azul, projetando-se para cima como vemos na última figura.

TABELA DE SÍMBOLOS

		pp
$D(0,1)$	$\{z \in \mathbb{C}: z < 1\}$ (usado no Capítulo IV)	53
D	$\{z \in \mathbb{C}: z < 1\}$, ou divisor (no Capítulo IV)	17,47
$B(a,r), B_r(a)$	$\{z \in \mathbb{C}: z-a < r\}$	16
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ = Esfera de Riemann (vide [Forster] - pag 3)	07
(a,b,c)	$\{z \in \mathbb{C}: b < z-a < c\}$ (anel)	16
$\text{Dom}(x)$	Domínio da função x	19
$A^-, \bar{A}$	Fecho do conjunto A , ou conjugado de $A \in \mathbb{C}$	17,21
$f _A, f _A$	Restrição de $f: X \rightarrow Y$ ao subconjunto $A \subset X$	32
$[f]_a, [\omega]_a$	Gérmens da função f e da 1-forma meromorfa ω , respectivamente	33
$[f], [f]_0, [f]_\infty$	Divisores da função meromorfa f	47
$[\omega], [\omega]_0, [\omega]_\infty$	Divisores da 1-forma meromorfa ω	47
$\dot{\cup}$	União disjunta	06
$\square$	Final de demonstração explícita	05
$\oplus$	Soma direta	30
$*$	Símbolo de vizinhança perfurada (para conjuntos), ou induzida de uma aplicação (ex. $f^*h = h \circ f$), ou divisor inteiro (a diferença será pelo contexto)	45 40 52
$\Sigma(M)$	Conjunto das cartas da superfície de Riemann M	01
$\#X$	Cardinalidade do conjunto X	30
$A \# B$	Soma conexa de A e B	33
$d(A,B)$	Distância entre conjuntos A e B (vide [Conway] - pag 27)	17
$\text{ord}_p(f), \text{ord}(p;f)$	Ordem da função f no ponto p	08
cte, pto	Abreviações de "constante" e "ponto"	39,67
$\mathcal{C}(A,B)$	Conjunto das funções contínuas de A em B	66
$\{\gamma\}$	Traço de uma curva (no caso, a curva γ)	03
$\pi_1(X), \pi_1(X,p)$	Primeiro Grupo Fundamental	28
H_p	p -ésimo grupo de homologia	31

$f \cong g$	f e g são funções homotópicas	28
$A \cong B$	A e B têm o mesmo tipo homotópico	28
$A \approx B$	A e B são homeomorfos, como espaços topológicos, ou isomorfos, como grupos (a diferença será pelo contexto)	34 29
$\alpha \sim \beta$	As curvas α e β são (livremente) homotópicas	10,27
Arg	Função argumento principal	42
$\text{Res}(a, f)$	Resíduo de f em a (vide [Forster] - pag 57)	42
$\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(M), \mathcal{G}(M), \mathcal{H}(M)$	Conjunto das funções diferenciáveis reais, diferenciáveis complexas, holomorfas e meromorfas em uma 2-variedade C^∞ M , respectivamente	1,7
$\mathcal{F}^{(1)}(M), \Omega(M), \mathcal{H}^{(1)}(M)$	Conjunto das 1-formas diferenciáveis complexas, holomorfas e meromorfas em uma superfície de Riemann M , respectivamente	07
$\mathcal{F}^{(2)}(M)$	Conjunto das 2-formas diferenciáveis complexas em uma superfície de Riemann M	09

BIBLIOGRAFIA

- Ahlfors, L. V., *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, New York, McGraw-Hill, 1973.
- Brito, F. F., *Power series with Hadamard gaps and hyperbolic complete minimal surfaces*, Duke Math. Journal 68, 297-300 (1993).
- Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA. 1988 (2. ed).
- Conway, J. B., *Functions of one complex variable*, New York, Springer-Verlag, 1978.
- Costa, C. J., *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas*, Rio de Janeiro, IMPA, s.d.
- Costa, C. J., and Simões, P. A. Q., *Complete minimal surfaces of arbitrary genus in slab of $\mathbb{R}^3$* , Ann. Inst. Fourier, Grenoble 46, 2 (1996), 1-12.
- Farkas, H. M., Kra, I., *Riemann surfaces*, New York, Springer-Verlag, 1980.
- Forster, O., *Riemannsche Flächen*, Berlin, Springer-Verlag, 1977.
- Góes, C. C., *As normais às superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$* , Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1975.
- Gray, A., *Modern differential geometry of curves and surfaces*, Boca Raton, CRC, c1993.
- Hicks, J. N., *Notes on differential geometry*, New York, Van Nostrand, 1965.

- Hoffman, D. A., Osserman, R., *The geometry of the generalized gauss map*, Providence, AMS, 1980. (Memoirs of the American Mathematical Society, 236)
- Jones, G. A., Singerman, D., *Complex functions - an algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge, 1991.
- Jorge, L. P. M., and Xavier, F., *A complete minimal surface in R^3 between two parallel planes*, Ann. Math., 112 (1980), 203-206.
- Lima, E. L., *Espaços métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, 1975.
- Lopez, F. J., *A nonorientable complete minimal surface in R^3 between two parallel planes*, Proc. Am. Math. Soc., 103 (1988), 913-917.
- Lopez, F. J., *Hyperbolic complete minimal surfaces with arbitrary conformal type*, preprint.
- Lawson, B., *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math., 92 (1970), 335-374
- Massey, W., *Algebraic topology: an introduction*, New York. Harcourt, 1967.
- Miranda, M., *Frontiere minimale con ostacoli*, Annali Dell Università di Ferrara, Vol. XVI, N° 2 (1971), 29-37
- Oliveira, M. E. G., *Superfícies mínimas não-orientáveis no R^n* , Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1984.
- Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*, New York, Van Nostrand, 1969.
- Rudin, W., *Princípios de Análise Matemática*, Rio de Janeiro, Livro Técnico, 1971.
- Rosemberg, H., Toubiana, E., *A cylindrical type complete minimal surface in a slab of R^3* , Bull. Sc. Math., 111 (1987), 241-245.

Veech, W. A., *A second course in complex analysis*, New York, Benjamin, 1967.

Vick, J. W., *Homology theory*, New York, Academic Press, c1973.