**Teoria de Nielsen de Coincidência
para Funções entre Variedades
com Fronteira**

Maria Beatriz do Amaral Assy Zerbini

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Algébrica**
Orientador: **Prof^a Dr^a Lucília Daruiz Borsari**

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, novembro de 1994

**Teoria de Nielsen de Coincidência
para Funções entre Variedades
com Fronteira**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação
apresentada por Maria Beatriz do Amaral Assy Zerbini,
devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, janeiro de 1995.

Banca examinadora:

Prof^a Dr^a Lucília Daruiz Borsari (orientadora)

IME-USP

Prof. Dr. Derek Hacon

PUC-RJ

Prof. Dr. Edson de Oliveira

UFSCar

Aos meus pais, Tufi e Gemma.

AGRADECIMENTOS

À Lucília , pela dedicação , estímulo e paciência.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves, pela leitura crítica deste trabalho e pelas diversas sugestões.

Ao Prof. Dr. Edgard Harle, também um agradecimento especial , por colaborar prontamente na tradução de alguns teoremas .

Ao Prof. Dr. Cláudio Possani , pela orientação na fase inicial do programa de pós graduação .

Aos professores do IME - USP.

Aos funcionários do IME - USP, especialmente `a Lilian .

Aos colegas dos cursos de pós graduação do IME - USP, em particular aos amigos (desde a graduação) : Anarosa , Cássio , Ivanildo e Leonardo.

Ao Luiz Fernando, pelo carinho e pela infinita paciência.

Ao Prof. Jorge Tadashi e à amiga Márcia Cristina Ito , pela colaboração na elaboração gráfica deste trabalho.

ABSTRACT

Let X and Y be compact, connected, oriented, n -dimensional manifolds with boundary, ∂X and ∂Y respectively. When $f, g: X \rightarrow Y$ are maps satisfying $g(\partial X) \subset \partial Y$ and $g(\text{int}X) \subset \text{int}Y$ we define a Lefschetz number $L_B(f,g)$, an coincidence index, and consequently a Nielsen number, $N_B(f,g)$.

The main theorem of this work is the "Minimum Theorem" which says that when X, Y, f and g are as above, and $n \geq 3$, then there exist maps $f', g': X \rightarrow Y$, homotopic to f and g , with exactly $N_B(f,g)$ coincidence points.

RESUMO

Sejam X e Y variedades de dimensão n , compactas, conexas, orientáveis e com fronteiras ∂X e ∂Y , respectivamente. Quando $f, g: X \rightarrow Y$ são aplicações contínuas tais que $g(\partial X) \subset \partial Y$ e $g(\text{int}X) \subset \text{int}Y$ definimos um número de Lefschetz $L_B(f,g)$, um índice de coincidência, e consequentemente um número de Nielsen, $N_B(f,g)$, de f e g .

O principal teorema deste trabalho é o teorema de Minimização que diz que quando X, Y, f e g estão nas condições acima, e $n \geq 3$, então existem aplicações $f', g': X \rightarrow Y$, homotópicas a f e g , tais que f' e g' têm exatamente $N_B(f,g)$ pontos de coincidência.

ÍNDICE

Introdução.....	01
------------------------	-----------

Capítulo I

Teoria de Nielsen para variedades sem fronteira

§1 Dualidades.....	04
§2 Número de Lefschetz.....	07
§3 Classes de Nielsen de Coincidência.....	13

Capítulo II

Teoria de Nielsen para variedades com fronteira

§1 Número de Lefschetz na categoria B.....	15
§2 O Índice de coincidência na categoria B.....	19
§3 Classes de Nielsen de Coincidência.....	22
§4 O número de Nielsen para a categoria B.....	25

Capítulo III

Teorema de minimização para coincidências na categoria B

§1 Teorema de minimização para coincidências na categoria B.....	34
§2 Teorema de minimização para coincidências em variedades fechadas.....	38

Apêndice I

§1 Demonstração do Lema III.2.3.....	52
§2 Construção da poligonal D.....	53

Apêndice II

Construção da função a	55
--------------------------------	----

Bibliografia	58
---------------------------	----

Introdução

Dadas funções $f, g : X \rightarrow Y$ uma coincidência de f e g é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Geometricamente, se $\text{Graf}(f)$ e $\text{Graf}(g)$ são os gráficos das respectivas funções em $X \times Y$, seus pontos de intersecção correspondem às coincidências. A teoria de coincidência é uma generalização da teoria de ponto fixo, quando g toma o lugar da função identidade.

A teoria de Nielsen de coincidência foi desenvolvida para funções entre variedades fechadas, conexas e orientáveis em [10] e [13].

Define-se um número de Nielsen $N(f,g)$ que é um limitante inferior para o número de coincidências de f' e g' para quaisquer $f', g' : X \rightarrow Y$ homotópicas a f e g respectivamente. E se $n \geq 3$, então existem $f' \cong f$ e $g' \cong g$ com exatamente $N(f,g)$ coincidências.

Iremos estender esta teoria de coincidência de Nielsen para o caso em que X e Y têm bordos não vazios como é feito em [2]. Entretanto, neste contexto, devemos colocar algumas restrições no tipo de homotopia entre as aplicações.

O problema que surge é ilustrado pelas aplicações $f, g : [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ onde $f(x) = 0$ e $g(x) = x$ para todo $x \in [-1,1]$. Desde que o gráfico de f e g se cruzem transversalmente no ponto $(0,0)$, a coincidência $x = 0$ deve ser certamente "essencial" em qualquer definição do termo; mas, uma homotopia irrestrita de g , levando-a para uma função constante diferente de f , eliminaria a coincidência. Observe que a aplicação g leva o bordo de $[-1,1]$ nele mesmo. Se restringirmos as homotopias de g exigindo alguma propriedade de preservação do bordo, então teremos superado este problema, porque qualquer aplicação homotópica a g através de tal homotopia obviamente deve ter uma coincidência com qualquer aplicação de $[-1,1]$ em $[-1,1]$.

Assim, trabalharemos na categoria B cujos objetos são pares ordenados (X,Y) de variedades de dimensão n , compactas, conexas, orientáveis e com fronteiras não vazias, ∂X e ∂Y , e cujos morfismos são pares ordenados $f, g : X \rightarrow Y$ de aplicações onde $g : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$ é uma aplicação de pares e $g(\text{int}X) \subset \text{int}Y$. Representamos um elemento de B como uma quádrupla ordenada (X,Y,f,g) . Para uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$, definimos $f_t : X \rightarrow Y$ para $t \in I$, por $f_t(x) = F(x,t)$. Dizemos que $(X,Y,f',g') \in B$ é B -homotópica a (X,Y,f,g) se existem homotopias $F : X \times I \rightarrow Y$, com $f_0 = f$ e $f_1 = f'$, e

$G : (X \times I, \partial X \times I) \rightarrow (Y, \partial Y)$, com $g_0 = g$ e $g_1 = g'$, tal que cada (X, Y, f_t, g_t) pertence a B e denominaremos (X, Y, F, G) uma B -homotopia.

Para aplicações $f, g: X \rightarrow Y$ entre variedades de dimensão n , orientáveis, compactas e sem bordo, Lefschetz [7] definiu um inteiro, o número de Lefschetz $L(f, g)$, e provou o teorema de coincidência de Lefschetz que afirma que se $L(f, g) \neq 0$ então existe uma coincidência de f' e g' para todo par de aplicações $f', g': X \rightarrow Y$, onde f' e g' são homotópicas a f e g , respectivamente.

Em [11] o índice de coincidência foi usado para definir número de Nielsen $N(f, g)$ e provar um teorema de minimização quando X e Y são variedades de dimensão n triangularizáveis, $n \geq 3$, que mostra que existem $f' \cong f$ e $g' \cong g$ tais que o número de coincidência de f' e g' é exatamente $N(f, g)$.

Uma importante consequência do teorema de minimização ocorre quando Y é simplesmente conexo, porque, então $L(f, g) = 0$ implica $N(f, g) = 0$, e portanto existem f' e g' homotópicas a f e g respectivamente que são livres de coincidência, isto é, a recíproca do teorema de coincidência de Lefschetz vale.

Em [9], Nakaoka estudou o número de coincidência de Lefschetz estendido para a categoria B .

Nós iremos apresentar um índice de coincidência e o usaremos para desenvolver uma teoria de coincidência de Nielsen para B . Isto significa que o B - número de Nielsen $N_B(f, g)$ é um limitante inferior para o número de coincidências para todas (X, Y, f', g') que são B - homotópicas a (X, Y, f, g) . Além disso, provamos um teorema de minimização, quando X e Y são variedades de dimensão n , triangularizáveis, $n \geq 3$, que produz (X, Y, f', g') com exatamente $N_B(f, g)$ coincidências.

Como um corolário, obtemos a recíproca do teorema de coincidência de Lefschetz - Nakaoka para B quando Y é um espaço de Jiang e, em particular, quando Y é um espaço simplesmente conexo.

Na teoria de ponto fixo, espaços de deformação, isto é, aplicações na classe de homotopia da aplicação identidade, têm propriedades particularmente atrativas. Para uma variedade triangularizada com ou sem bordo, existe sempre uma deformação com um único ponto fixo e se a característica de Euler da variedade é zero, então existe uma deformação livre de ponto fixo ([6] e [14]). Isto vale sem qualquer restrição também sobre a dimensão da variedade ou seu grupo fundamental. Este resultado foi obtido em [11] para coincidências, quando as variedades X e Y são triangularizáveis e sem bordo como segue. Seja $g: X \rightarrow Y$, qualquer aplicação, então existe uma deformação g' de g , isto é, uma aplicação $g': X \rightarrow Y$ homotópica a g , que tem uma única coincidência com g e se $L(g, g') = 0$, então pode ser escolhida para não ter coincidência com g . Aqui obtemos o resultado correspondente para variedades triangularizáveis com bordo.

Este trabalho foi dividido da seguinte maneira:

No capítulo 1 estão os principais resultados e ferramentas já conhecidos da teoria de coincidência para variedades sem bordo que serão essenciais para a compreensão dos demais capítulos.

O capítulo 2 é dedicado à apresentação da definição e das propriedades do índice de coincidência, de classe de coincidência e do número de Nielsen para a categoria B.

E finalmente, é no capítulo 3 que demonstramos o teorema de minimização quando X e Y são variedades triangularizáveis de dimensão n , $n \geq 3$.

Capítulo I

Teoria de Nielsen para variedades sem fronteira

Neste capítulo foram colocados alguns fatos conhecidos da teoria de homologia, cohomologia, índices e número de Lefschetz para variedades compactas e sem fronteira.

As aplicações envolvidas nesse trabalho serão supostas sempre contínuas. Homologia e cohomologia terão coeficientes inteiros a menos que se indique o contrário.

§1 Dualidades

Neste parágrafo nosso objetivo é retomar as dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz. Mas, para a melhor compreensão delas vamos recordar algumas definições importantes.

Sejam X uma variedade de dimensão n sem bordo e $T_p = H_n(X, X - p) \approx \mathbb{Z}$, para cada $p \in X$. Define-se o conjunto $\tau = \bigcup_{p \in X} T_p$.

Queremos introduzir uma topologia em τ .

Uma n -bola própria em X é um aberto $V \subseteq X$ tal que existe um homeomorfismo de B^n em $\bar{V}$ levando S^{n-1} em $\bar{V} - V$. A coleção de todas n -bolas próprias em X forma uma base para a topologia em X .

Além disso, $j_p^* : H_n(X, X - V) \rightarrow H_n(X, X - p)$ é um isomorfismo.

Tomamos o conjunto $U_{\alpha, V} = \{j_{p*}(\alpha) / p \in V\}$, para toda n -bola própria V e todo $\alpha \in H_n(X, X - V)$.

Esses conjuntos definem uma base para a topologia de τ . Seja $\pi : \tau \rightarrow X$ a projeção natural, então π é um homeomorfismo local e cada componente de τ é um espaço de recobrimento de X com uma ou duas "folhas". Em particular os geradores de todos os T_p formam ou um recobrimento duplo de X ou dois recobrimentos simples.

Dizemos que X é orientável se há dois recobrimentos distintos simples. Uma orientação em X é uma aplicação $s: X \rightarrow \tau$ contínua tal que $\pi \circ s = \text{id}_X$ e $s(p)$ é um gerador de $H_n(X, X - p)$, para cada $p \in X$. Se X é orientável, então existem duas possíveis orientações.

Definição I.1.1: Se X é uma variedade de dimensão n , compacta, conexa, com bordo, então X é orientável se existe uma aplicação contínua $s: X - \partial X \rightarrow \tau$ com $\pi \circ s = \text{id}_X$ e tal que $s(p)$ é um gerador de $H_n(X, X - p)$, para cada $p \in X - \partial X$. Tal aplicação s é chamada de orientação de X .

Teorema I.1.2: Se X é uma variedade de dimensão n , compacta, conexa, sem bordo e orientável, com orientação s , então existe uma única classe $z \in H_n(X)$ tal que para cada $p \in X$, $i_{p*}(z) = s(p)$, onde $i_{p*} : H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - p)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão.

Teorema I.1.3: Seja X é uma variedade de dimensão n , compacta, conexa, com bordo e orientável, com orientação s . Então existe uma única classe $z \in H_n(X, \partial X)$ tal que para cada $p \in X$, $i_{p*}(z) = s(p)$, onde $i_{p*} : H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - p)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão. Além disso, se $\Delta: H_n(X, \partial X) \rightarrow H_{n-1}(\partial X)$ é o homomorfismo de conexão, então $\Delta(z)$ é a classe fundamental de ∂X , isto é, $\Delta(z)$ se restringe à classe fundamental em cada componente conexa de ∂X . Em particular, ∂X é orientável.

Lema I.1.4 : Seja X uma variedade de dimensão n , compacta, conexa e sem bordo, orientada. Então

(i) $H_i(X \times X, X \times X - \Delta(X)) = 0$ para $i < n$;

(i) $H_n(X \times X, X \times X - \Delta(X)) \approx H_0(X)$ pelo homomorfismo que leva a 0-cadeia representada por $p \in X$ na classe representada por $l_{p*}(s(p))$ onde

$$l_{p*}: H_n(X, X - p) \rightarrow H_n(X \times X, X \times X - \Delta(X))$$

e pode ser decomposto por

$$k_{p*}: H_n(X, X - p) \rightarrow H_n(p \times X, p \times (X - p))$$

$$i_*: H_n(p \times X, p \times (X - p)) \rightarrow H_n(X \times X, X \times X - \Delta(X)).$$

Teorema I.1.5 (Isomorfismo de Thom): Seja X uma variedade de dimensão n , compacta, conexa e sem bordo, orientada.

Então existe uma classe de cohomologia $\mu = \mu_X$ em $H^n(X \times X, X \times X - \Delta(X))$ tal que o homomorfismo $\Phi^*: H^k(X) \rightarrow H^{n+k}(X \times X, X \times X - \Delta(X))$ dado por $\Phi^*(x) = \mu \cup \pi^*(x)$ é isomorfismo, para $0 \leq k \leq n$. Aqui $\pi: X \times X \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada.

Esta classe é chamada a classe de Thom de uma variedade topológica X .

Como $H_i(X \times X, X \times X - \Delta(X)) = 0$ para $i < n$, do teorema dos coeficientes universais tem-se que $H^i(X \times X, X \times X - \Delta(X)) = 0$ para $i < n$ e $H^i(X \times X, X \times X - \Delta(X)) \approx \text{Hom}(H_n(X \times X, X \times X - \Delta(X)), \mathbb{Z})$. Assim μ é a classe dual do gerador de $H_n(X \times X, X \times X - \Delta(X))$ dada no lema anterior.

Teorema I.1.6 (Dualidade de Poincaré): Para X uma variedade de dimensão n , compacta, conexa e sem bordo, com orientação $s: X \rightarrow \tau$ associada a uma classe fundamental z , o homomorfismo $D: H^k(X; G) \rightarrow H_{n-k}(X; G)$ dado por $D(x) = x \cap z$, é um isomorfismo para cada k .

Teorema I.1.6 (Dualidade de Poincaré-Lefschetz): Seja $(X, \partial X)$ uma variedade de dimensão n compacta, conexa, orientável com classe fundamental $z \in H_k(X, \partial X)$. Então, as aplicações dualidade $D_k(X): H^k(X, \partial X; G) \rightarrow H_{n-k}(X; G)$ e $D_k(X): H^k(X; G) \rightarrow H_{n-k}(X, \partial X; G)$ dadas pelo produto cap com z são ambos isomorfismos.

Para maiores detalhes sobre esses tópicos ver [13].

Número de Lefschetz

Definimos $\Theta^q(f, g): H^{n-q}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n-q}(X; \mathbb{Q})$, como a composição

onde D_q é a dualidade de Poincaré.

$$L(f,g) = \sum_{q=0}^n (-1)^{n-q} \operatorname{tr}[\Theta^q(f,g)], \text{ onde tr denota o traço.}$$

Definição 1.2.2: Dadas aplicações $f, g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são variedades de dimensão n , denotamos o conjunto de coincidências de f e g por

Suponha W um subconjunto aberto de X tal que $W \cap \text{Coin}(f, g)$ é um subconjunto compacto de W . Pela normalidade de X existe um conjunto V aberto de X tal que $W \cap \text{Coin}(f, g) \subset V \subset \overline{V} \subset W$. A inclusão $j: (W, W-V) \rightarrow (X, X-V)$ é uma excisão. Definimos $(f, g): X \times X \rightarrow Y \times Y$ por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ e $\Delta(Y)$ pela diagonal em $Y \times Y$.

Considere a composição

$$H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X, X-V) \xrightarrow{j_*^{-1}} H_n(W, W-V) \xrightarrow{(f,g)_*} H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y))$$

onde i_* é induzida pela inclusão.

O índice de coincidência de f e g em W , que nós denotamos por $I(W; f, g)$, é definido por

$$I(W; f, g) = \langle \mu, (f, g)_* j_*^{-1} i_*(z) \rangle \in \mathbb{Z}$$

onde $\mu \in H^n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y))$ é a classe de Thom, $z \in H_n(X)$ a classe fundamental de X e $\langle, \rangle$ denota o índice de Kronecker.

Como mostraremos, o índice está bem definido desde que haja independência de escolha do subconjunto V .

Suponha V' um outro aberto de X tal que $W \cap \text{Coin}(f, g) \subset V' \subset \bar{V}' \subset W$. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_n(X, X-V) & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W-V) & \xrightarrow{(f,g)_*} & \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
 H_n(X) & \rightarrow & H_n(X, X-V \cap V') & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W-V \cap V') & \rightarrow & H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y)) \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_n(X, X-V') & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W-V') & \xrightarrow{(f,g)_*} &
 \end{array}$$

Cada retângulo e cada triângulo no diagrama comutam. Assim, o cálculo do índice usando os abertos V ou V' corresponde ao cálculo usando o aberto $V \cap V'$. Logo $I(W, f, g)$ é independente da escolha de V .

Em seguida, listaremos as propriedades do índice.

Propriedade I.2.3 (localização): Sejam W' um outro aberto de X e f' e $g' : X \rightarrow Y$ aplicações tais que $f = f'$ e $g = g'$ em $W \cap W'$ e $\text{Coin}(f', g') \cap W'$ coincide com $\text{Coin}(f, g) \cap W$. Então $I(W; f, g) = I(W'; f', g')$.

demonstração:

Sejam V e V' abertos de X tais que $W \cap \text{Coin}(f, g) \subset V \subset \bar{V} \subset W$ e $W' \cap \text{Coin}(f, g') \subset V' \subset \bar{V}' \subset W'$.
 Como $\text{Coin}(f', g') \cap W' = \text{Coin}(f, g) \cap W$, temos que $W \cap \text{Coin}(f, g) \subset V \cap V' \subset \bar{V} \cap \bar{V}' \subset W \cap W'$.
 Além disso o diagrama abaixo comuta :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(W, W - V \cap V') & \xrightarrow{(f, g)_*} & \\
 & \nearrow & \uparrow & & \searrow \\
 H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - V \cap V') & \rightarrow & H_n(W \cap W', W \cap W' - V \cap V') & \longrightarrow & H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y)) \\
 & \searrow & \downarrow & & \nearrow \\
 & & H_n(W', W' - V \cap V') & \xrightarrow{(f', g')_*} &
 \end{array}$$

Logo $I(W; f, g) = I(W'; f', g')$. ♦

Além disso, não é difícil provar as seguintes propriedades para o índice de coincidência:

Propriedade I.2.4 (Existência de Coincidências): Se $I(W; f, g) \neq 0$, então $f(x) = g(x)$ para algum $x \in W$.

demonstração:

Mostraremos que se $\text{Coin}(f, g) = \emptyset$, então $I(W; f, g) = 0$. Para isto basta observar o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & (f, g)_* & \\
 & \nearrow & \\
 H_n(W, W - V) & \xrightarrow{(f, g)_*} & H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y)) \\
 & \searrow & \uparrow (i, i)_* \\
 & H_n(Y \times Y - \Delta(Y), Y \times Y - \Delta(Y)) & \approx 0
 \end{array}$$

Portanto, $(f, g)_*$ é um homomorfismo nulo.

Logo, se $I(W; f, g) \neq 0$, então $\text{Coin}(f, g) \neq \emptyset$. ♦

Propriedade I.2.5 (Aditividade): Se $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ é uma união disjunta de subconjuntos abertos de X tais que $W_j \cap \text{Coin}(f, g)$ é compacto para cada j , então $I(W; f, g) = \sum_j I(W_j; f, g)$.

demonstração:

Para cada j escolho um aberto V_j tal que

$\text{Coin}(f, g) \cap W_j = C_j \subset V_j \subset \bar{V}_j \subset W_j$ e $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$.

O resultado seguirá da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - V) & \begin{array}{l} \nearrow \approx \\ \rightarrow \approx \\ \searrow \approx \end{array} & \begin{array}{l} H_n(W, W - V) \\ H_n(\cup W_j, \cup (W_j - V_j)) \\ \sum H_n(W_j, W_j - V_j) \end{array} & \xrightarrow{\begin{array}{l} (f, g)_* \\ \\ \Sigma(f_j, g_j)_* \end{array}} & H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y))
 \end{array}$$

♦

Propriedade I.2.6 (Invariância homotópica): Suponha que $f_t, g_t : W \rightarrow Y$, para $t \in I$, são homotopias e denote por $C_t = \text{Coin}(f_t, g_t) \cap W$. Se $D = \cup_t C_t$ é subconjunto compacto de W , então $I(W; f_0, g_0) = I(W; f_1, g_1)$.

demonstração:

Seja V um aberto com $D \subset V \subset \bar{V} \subset W$.

Considero a seguinte homotopia de aplicações de pares:

$$(f_t, g_t) : (W, W - V) \rightarrow (Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y)) \quad \forall t \in I$$

portanto $(f_0, g_0)_* = (f_1, g_1)_*$, ou seja, $I(W; f_0, g_0) = I(W; f_1, g_1)$. ♦

Teorema I.2.7 (Normalização): $I(X, f, g) = L(f, g)$. [13]

Corolário I.2.8 : Dadas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ onde X e Y são variedades de dimensão n sem bordo tais que $L(f, g) \neq 0$, então $\text{Coin}(f, g) \neq \emptyset$.

Se $p \in \text{Coin}(f,g)$ é um ponto de coincidência isolado podemos encontrar W , um aberto de X , tal que $W \cap \text{Coin}(f,g) = \{p\}$. Definimos $I(p;f,g) = I(W;f,g)$. A definição é independente da escolha de W pela propriedade da localização.

Sejam X e Y variedades de dimensão n sem bordo, $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações com uma coincidência isolada p ($f(p) = g(p) = q$). Sejam $U \subseteq \text{int} X$ e $V \subseteq \text{int} Y$ vizinhanças de p e q respectivamente para as quais existem homeomorfismos preservando orientação $h: (\bar{U}, p) \rightarrow (B^n, 0)$ e $k: (\bar{V}, q) \rightarrow (B^n, 0)$ sobre a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, onde 0 denota a origem. Como p é uma coincidência isolada e f, g são contínuas, podemos escolher U e V tais que $U \cap \text{Coin}(f,g) = \{p\}$ e, $f(\bar{U}) \cup g(\bar{U})$ está contido em V .

Seja $\phi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ a composição :

$$S^{n-1} \xrightarrow{h^{-1}} \partial U \xrightarrow{(f,g)} \bar{V} \times \bar{V} - \Delta(V) \xrightarrow{k \times k} B^n \times B^n - \Delta(B^n) \xrightarrow{F} B^n - 0 \xrightarrow{\Pi} S^{n-1}$$

onde $F(x,y) = (y-x)/2$ e Π denota a projeção radial.

Como mostraremos a seguir, F é uma equivalência homotópica de pares $F: (B^n \times B^n, B^n \times B^n - \Delta(B^n)) \rightarrow (B^n, B^n - 0)$.

Definimos $J: B^n \rightarrow B^n \times B^n$ por $J(w) = (0, w)$.

A homotopia $h_t: B^n \rightarrow B^n$ dada por $h_t(w) = w / (1+t)$ tem $h_0(w) = w$, $h_1(w) = F \circ J(w)$, e $h_t(B^n - 0) \subseteq (B^n - 0)$, para $0 \leq t \leq 1$. Por outro lado, definimos

$g_t: B^n \times B^n \rightarrow B^n \times B^n$ por $g_t(x,y) = \left(\frac{(1-t)x}{(1+t)}, \frac{y-tx}{(1+t)} \right)$. Teremos $g_0(x,y) = (x,y)$, $g_1(x,y) = (0, (y-x)/2) = J \circ F(x,y)$ e $g_t(B^n \times B^n - \Delta(B^n)) \subseteq B^n \times B^n - \Delta(B^n)$, para $0 \leq t \leq 1$.

Assim, J é uma inversa homotópica para F .

Dada uma orientação em X , a escolha do gerador w para $H_n(S^{n-1})$ é dada pela imagem da classe fundamental z de X sobre a composição :

$$H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X, X-U) \approx H_n(\bar{U}, \partial U) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\bar{\partial U}) \xrightarrow{h_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

Analogamente, para uma orientação em Y , estará determinada uma escolha w' para $H_{n-1}(S^{n-1})$.

Com estas escolhas de orientação tem - se :

Proposição I.2.10: $I(W;f,g) = \text{grau } \phi$.

demonstração:

Considere os homomorfismos e abertos definidos acima.

Considere ainda o diagrama abaixo .

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X - U) & \xrightarrow{\approx} & H_n(W, W - U) & \xrightarrow{(f,g)_*} & H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y)) \\
 & & & & \downarrow \approx i_* & & \downarrow \approx i_* \\
 & & & & H_n(\bar{U}, \partial\bar{U}) & \xrightarrow{(f,g)_*} & H_n(\bar{V} \times \bar{V}, \bar{V} \times \bar{V} - \Delta(V)) \\
 & & & & \downarrow \partial & & \downarrow \approx (k,k)_* \\
 & & & & & & H_n(B^n \times B^n, B^n \times B^n - \Delta(B^n)) \\
 & & & & & & \downarrow \approx F_* \\
 & & & & & & H_n(B^n, B^n - 0) \\
 & & & & & & \downarrow \approx \partial \\
 & & & & & & H_{n-1}(B^n - 0) \xrightarrow{\approx} H_{n-1}(S^{n-1}) \\
 & & & & \downarrow h_*^{-1} & \nearrow [F \circ (k,k) \circ (f,g)]_* & \\
 H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{h_*^{-1}} & H_{n-1}(\partial\bar{U}) & & & &
 \end{array}$$

Dada a orientação $s: X \rightarrow \tau$ de Y fica determinado um gerador $l_{p*}(s(p))$ de $H_n(Y \times Y, Y \times Y - \Delta(Y))$, como no lema I.1.4.

Como a equivalência F colapsa no espaço vertical e k preserva a orientação, $l_{p*}(s(p))$ é levado pelas flechas verticais à direita do diagrama no gerador escolhido previamente de $H_{n-1}(S^{n-1})$ à direita.

Por outro lado , a classe fundamental $z \in H_n(X)$ será levada, via os isomorfismos verticais à esquerda do diagrama, no gerador escolhido previamente de $H_{n-1}(S^{n-1})$ da esquerda.

Assim, pela comutatividade do diagrama, segue o resultado. ◆

Para maiores detalhes sobre o assunto deste parágrafo ver [13] .

§3 Classes de Nielsen de coincidência

Para aplicações $f, g : X \rightarrow Y$, pontos x_0 e $x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são ditos Nielsen equivalentes, escrevemos $x_0 \sim x_1$ se existe um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ de x_0 a x_1 tal que $f\alpha$ é homotópico a $g\alpha$ em Y , relativamente aos pontos finais. Uma classe de equivalência é chamada uma classe de Nielsen de coincidência.

Proposição I.3.1: Toda classe de pontos de coincidência de $f, g : X \rightarrow Y$ é um subconjunto aberto de $\text{Coin}(f, g)$.

Demonstração:

Seja $x \in \text{Coin}(f, g)$. Como X e Y são variedades conexas, então são conexas por caminho. Deste modo existe uma vizinhança W de $f(x) = g(x) = y$ em Y tal que todo laço no ponto y em W é trivial em Y e existe uma vizinhança U de x , conexa por caminhos, tal que $f(U) \cup g(U) \subset W$.

Sejam $x' \in U \cap \text{Coin}(f, g)$ e λ um caminho em U de x a x' . Então $f \circ \lambda$ e $g \circ \lambda$ têm imagens em W , isto implica que $f \circ \lambda \cong g \circ \lambda$. Logo x e x' estão na mesma classe de pontos de coincidência.

Como $\text{Coin}(f, g)$ é compacto, temos o seguinte:

Corolário I.3.2: O número de classes de pontos de coincidência é finito.

Como uma classe de coincidência C é um subconjunto aberto de $\text{Coin}(f, g)$ existe $W \subset X$ tal que $C = W \cap \text{Coin}(f, g)$. Além disso, como C é um subconjunto compacto de W é possível calcular $I(W, f, g)$. Definimos o índice da classe C $I(C, f, g)$ como $I(W, f, g)$.

Definição I.3.3: Uma classe de coincidência C é essencial se $I(C, f, g) \neq 0$.

Se X e Y são variedades compactas sem bordo, então as classes de coincidência são conjuntos isolados de coincidência e mais, existe um número finito delas. Desta forma, faz sentido a definição abaixo.

Definição I.3.4: O número de classes de coincidência essenciais é chamado número de Nielsen $N(f,g)$.

Os resultados a seguir mostram que o número de Nielsen de coincidência é um invariante homotópico e um limitante inferior para $\#Coin(f',g')$, onde $f' \cong f$ e $g' \cong g$.

Proposição I.3.5: Se f' e g' são homotópicas a f e g respectivamente, então $N(f,g) = N(f',g')$.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [10].

Corolário I.3.6: Para todas as aplicações f' e g' homotópicas a f e g respectivamente, existem ao menos $N(f,g)$ pontos de coincidência de f' e g' .

Capítulo II

Teoria de Coincidência para variedades com fronteira

Neste capítulo iremos estender a teoria de coincidência de Nielsen para o caso que X e Y têm bordos não vazios. Entretanto, neste contexto, devemos colocar algumas restrições. Trabalharemos na categoria B cujos objetos são pares ordenados X, Y de variedades de dimensões n , compactas, conexas, orientáveis e com fronteiras não vazias, ∂X e ∂Y , e cujos morfismos são pares ordenados $f, g : X \rightarrow Y$ de aplicações contínuas, onde g leva fronteira em fronteira, isto é, $g : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$ é uma aplicação de pares e, além disso, $g(\text{int} X) \subset \text{int} Y$. Nós representamos um elemento de B como uma quádrupla ordenada (X, Y, f, g) . Para uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$, definimos $f_t : X \rightarrow Y$ para $t \in I$, por $f_t(x) = F(x, t)$. Dizemos que $(X, Y, f', g') \in B$ é B -homotópica a (X, Y, f, g) se existem homotopias $F : X \times I \rightarrow Y$, com $f_0 = f$ e $f_1 = f'$ e $G : (X \times I, \partial X \times I) \rightarrow (Y, \partial Y)$ com $g_0 = g$, $g_1 = g'$ e $G(\text{int} X \times I) \subset \text{int} Y$. Deste modo, cada (X, Y, f_t, g_t) pertence a B e denominaremos (X, Y, F, G) uma B -homotopia.

§1 Número de Lefschetz na categoria B

Para $(X, Y, f, g) \in B$, considere as transformações lineares $\hat{\Theta}^q(f, g) : H^q(X, Q) \rightarrow H^q(X, Q)$ dadas pelas composições:

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(X; Q) & \xrightarrow{D_{n-q}^{-1}(X)} & H_{n-q}(X, \partial X; Q) & \xrightarrow{g^*} & H_{n-q}(Y, \partial Y; Q) & \xrightarrow{D_{n-q}^{-1}(Y)} & \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow{D_{n-q}^{-1}(Y)} & H^q(Y; Q) & \xrightarrow{f^*} & H^q(X; Q) & \end{array}$$

e o número de coincidência de Lefschetz, $L_B(f, g)$, na categoria B , é definido por

$$L_B(f,g) = \sum_{q=0}^n (-1)^{n-q} \text{tr}[\hat{\Theta}^q(f,g)]$$

Para $(X,Y,f,g) \in B$, seja X^- a variedade X com a orientação oposta. O dobro $2X$ de X é a variedade orientada sem bordo obtida de $X \cup X^-$ identificando cada $x \in \partial X$ com o correspondente ponto de X^- que nós denotamos por $-x$. Usaremos também a notação X_+ para a variedade orientada X .

Seja $r: 2X \rightarrow X$ a restrição definida por $r(x) = r(-x) = x$. Sendo $i: Y \rightarrow 2Y$ a inclusão de Y em seu dobro, definimos $\hat{f} = \text{ifr}: 2X \rightarrow 2Y$. Desde que g leva ∂X em ∂Y , podemos formar o dobro da aplicação $2g: 2X \rightarrow 2Y$, por $2g(x) = g(x)$ e $2g(-x) = -g(x)$.

Note que $\text{Coin}(f,g) = \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$, pois:

$$x \in \text{Coin}(f,g) \Rightarrow f(x) = g(x); x \in X_+ \Rightarrow f(x) = \text{ifr}(x) \text{ e } g(x) = 2g(x) \Rightarrow \hat{f}(x) = 2g(x);$$

ou seja, $x \in \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$;

$$x \in \text{Coin}(\hat{f}, 2g) \Rightarrow \hat{f}(x) = 2g(x) \Rightarrow \text{Como } \text{Im } \hat{f} \subset Y_+, \text{ então } 2g(x) \in Y_+. \text{ Além disso, } 2g(\text{int } X_+) \subset \text{int } Y_+, 2g(\text{int } X_-) \subset \text{int } Y_- \text{ e } 2g(\partial X) \subset \partial Y \Rightarrow x \in X_+ \Rightarrow \text{ifr}(x) = f(x) \text{ e } 2g(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x); \text{ ou seja, } x \in \text{Coin}(f,g).$$

Observe que a condição $g(\text{int } X) \subset \text{int } Y$ foi usada para podermos afirmar que $\text{Coin}(f,g) = \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$. Mas, dada uma aplicação qualquer de pares $g: (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$ é possível obter uma aplicação g_1, ε -homotópica a g , de forma que g_1 leve não apenas ∂X em ∂Y , mas também $\text{int } X$ em $\text{int } Y$, da seguinte maneira:

Seja V uma vizinhança de ∂Y em Y tal que V é homeomorfa a $\partial Y \times [0, \varepsilon]$ de tal maneira que ∂Y corresponde naturalmente a $\partial Y \times 0$. Se $x \in X$ tal que $g(x) \in V$, então poderemos escrever $g(x) = (\beta(x), t)$, para algum $t \in [0, \varepsilon]$.

Seja U uma vizinhança de ∂U em X tal que $\bar{U}$ é homeomorfo a $\partial X \times [0, \eta]$ de tal maneira que ∂X corresponde naturalmente a $\partial X \times 0$. Podemos supor $g(\bar{U}) \subset V$. Para $x \in U$, é possível escrever $x = (x', t)$, para algum $t \in [0, \eta]$.

Definimos g_1 como:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \notin \overline{V}; \\ (\beta(x), \varepsilon) & \text{se } g^1(V) - U; \\ (\beta(x), \frac{\varepsilon}{\eta} t) & \text{se } x = (x', t) \in \overline{U}; \end{cases}$$

Teorema II.1.1 ([9]) : $L_B(f, g) = L(\hat{f}, 2g)$

demonstração:

Considere o diagrama onde os grupos de cohomologia são considerados com coeficientes racionais:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(X) & \xrightarrow{r^*} & H^*(2X) & \xrightarrow{(2g)!} & H^*(2Y) \\ \downarrow & & \downarrow i^* & & \downarrow i'^* \\ \downarrow & \xrightarrow{\text{id}} & H^*(X) & \xrightarrow{g!} & H^*(Y) \end{array}, \quad \text{onde}$$

$$(2g)! = D_q^{-1}(2Y) 2g_* D_q(2X);$$

$$g! = D_q^{-1}(Y) g_* D_q(X);$$

$$D_q(2X): H^{n-q}(2X) \rightarrow H_q(2X);$$

Desde que $i'^*(2g)! = g!i^*$, como mostraremos abaixo, o diagrama comuta.

$$\text{Portanto, } L(\hat{f}, 2g) = L(i'fr, 2g) = \sum_{*=0}^n (-1)^* \text{tr}(r^* f^* i'^*(2g)!) =$$

$$\sum_{*=0}^n (-1)^* \text{tr}(f^* i'^*(2g)! r^*) = \sum_{*=0}^n (-1)^* \text{tr}(f^* g! i^* r^*) = \sum_{*=0}^n (-1)^* \text{tr}(f^* g!) = L(f, g).$$

Onde a terceira e quarta igualdade valem respectivamente, pois $\text{tr}AB = \text{tr}BA$ e pela comutatividade do diagrama acima.

Agora mostraremos que $i'^*(2g)! = g!i^*$:
o diagrama abaixo comuta por uma propriedade do produto "cap".

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & (g)^* & & & \\
\downarrow & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \downarrow & \\
H^*(Y) & \xleftarrow{i'^*} & H^*(2Y) & \xleftarrow{(2g)!} & H^*(2X) & \xrightarrow{i^*} & H^*(X) \\
\downarrow \cap [y] & & \downarrow \cap [2y] & & \downarrow \cap [2x] & & \downarrow \cap [x] \\
H_*(Y, \partial Y) & \xrightarrow{k'_*} & H_*(2Y, Y_-) & \xleftarrow{j_*} & H_*(2Y) & \xleftarrow{(2g)_*} & H_*(2X) \xrightarrow{i_*} H_*(2X, X_-) \xleftarrow{K_*} H_*(X, \partial X) \\
& & \uparrow & \xrightarrow{(2g)_*} & \uparrow & &
\end{array}$$

Onde i, k, j são inclusões ;

$[2x]$ é a classe fundamental e $\cap [2x] = D(2x)$ é a dualidade de Poincaré;

k_* é um isomorfismo (por excisão);

Considere o diagrama similar para Y e considere os homomorfismos entre os grupos correspondentes induzidos por g e $2g$ (que não estão em negrito). Então , para $\alpha \in H^*(2X, Q)$ temos (é só seguir o diagrama):

$$\begin{aligned}
k'_* ((i'^*(2g)!\alpha) \cap [y]) &= j'_* (((2g)!\alpha) \cap [2y]) = j'_* (2g)_*(\alpha \cap [2x]) = \\
&= (2g)_* j_*(\alpha \cap [2x]) = (2g)_* k_*((i^*\alpha) \cap [x]) = k'_* (g!(i^*\alpha) \cap [y])
\end{aligned}$$

Como k'_* e $\cap [y]$ são isomorfismos, temos que $i'^*(2g)! = g!i^*$. ◆

Corolário II.1.2 (teorema de Coincidência de Lefschetz - Nakaoka) : Se $(X, Y, f, g) \in B$ é tal que $L_B(f, g) \neq 0$, então f e g têm uma coincidência.

demonstração:

Se $L_B(f, g) \neq 0$, pelo teorema de coincidência de Lefschetz, $\hat{f}(x) = 2g(x)$ para algum $x \in X$, como $\text{Coin}(f, g) = \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$, então $f(x) = g(x)$. ◆

§2 O Índice de Coincidência na Categoria B.

Para $(X, Y, f, g) \in B$, suponha W um subconjunto aberto de X tal que o conjunto $W \cap \text{Coin}(f, g)$ é compacto. Definimos o índice de coincidência para B , escrevendo

$$i_B(W; f, g) = I(r^{-1}(W); \hat{f}, 2g)$$

O índice está bem definido desde que $\text{Coin}(\hat{f}, 2g) = \text{Coin}(f, g)$ e a independência de escolha do subconjunto W é provada de forma análoga ao que é feito para variedades sem bordo.

Esse índice tem as seguintes propriedades :

Propriedade II.2.1 (localização): Sejam W' um outro aberto de X e f' e $g' : X \rightarrow Y$ aplicações tais que $f = f'$ e $g = g'$ em $W \cap W'$ e $\text{Coin}(f', g') \cap W'$ é igual a $\text{Coin}(f, g) \cap W$. Então $i_B(W; f, g) = i_B(W'; f', g')$.

demonstração:

Sabemos que $r^{-1}(W)$ e $r^{-1}(W')$ são abertos de $2X$. Além disso, se $f = f'$ e $g = g'$ em $W \cap W'$ e $\text{Coin}(f', g') \cap W' = \text{Coin}(f, g) \cap W$, então $\hat{f} = \hat{f}'$ e $2g = 2g'$ em $r^{-1}(W) \cap r^{-1}(W')$ e $\text{Coin}(\hat{f}', 2g') \cap r^{-1}(W') = \text{Coin}(\hat{f}, 2g) \cap r^{-1}(W)$.

Desta forma, pela propriedade I.2.3(*), temos que

$$i_B(W; f, g) = I(r^{-1}(W); \hat{f}, 2g) \underset{*}{=} I(r^{-1}(W'); \hat{f}', 2g') = i_B(W'; f', g') \quad \blacklozenge$$

Propriedade II.2.2 (Existência de Coincidências) : Se $i_B(W; f, g) \neq 0$, então $f(x) = g(x)$ para algum $x \in W$.

demonstração:

Como $i_B(W; f, g) = I(r^{-1}(W); \hat{f}, 2g) \neq 0$, temos por I.2.4 que $\hat{f}(x) = 2g(x)$ para algum $x \in r^{-1}(W)$, e portanto, $f(x) = g(x)$ para algum $x \in W$. $\blacklozenge$

Propriedade II.2.3 (Aditividade) : Se $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ é uma união disjunta de subconjuntos abertos de X tais que $W_j \cap \text{Coin}(f, g)$ é compacto

para cada j , então $i_B(W; f, g) = \sum_j i_B(W_j; f, g)$

demonstração:

Como $r : 2X \rightarrow X$, então $r^{-1}(W_j)$ é aberto de $2X$ e $r^{-1}(W_1) \cup r^{-1}(W_2) \cup \dots \cup r^{-1}(W_n)$ é uma união disjunta de subconjuntos abertos de $2X$ tais que $r^{-1}(W_j) \cap \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$ é compacto para cada j .

$$\text{Portanto } i_B(W; f, g) = I(r^{-1}(W); \hat{f}, 2g) \underset{*}{=} \sum_j I(r^{-1}(W_j); \hat{f}, 2g) = \sum_j i_B(W_j; f, g)$$

* ver I.2.5

Propriedade II.2.4 (Invariância homotópica) : Se (X, Y, F, G) é uma B -homotopia tal que $[\cup_t \text{Coin}(f_t, g_t)] \cap W$ é compacto, então $i_B(W; f_0, g_0) = i_B(W; f_1, g_1)$.

demonstração:

Considere a seguinte homotopia de aplicações de pares:

$$(\hat{f}_t, 2g_t) : (r^{-1}(W), r^{-1}(W) - r^{-1}(V)) \rightarrow (2Y \times 2Y, 2Y \times 2Y - \Delta(2Y)) \quad \forall t \in I.$$

$$\text{Portanto } i_B(W; f_0, g_0) = I(r^{-1}(W); \hat{f}_0, 2g_0) \underset{*}{=} I(r^{-1}(W); \hat{f}_1, 2g_1) = i_B(W; f_1, g_1)$$

* ver I.2.6

Um subconjunto S de $\text{Coin}(f, g)$ é um conjunto isolado de coincidências se for compacto e também um aberto de $\text{Coin}(f, g)$. Neste caso, podemos encontrar W , um aberto de X tal que $W \cap \text{Coin}(f, g) = S$ e nós definimos $i_B(S; f, g) = i_B(W; f, g)$. A definição é independente da escolha de W pela propriedade localização.

No caso $S = \{p\}$ um único ponto de X , chamamos p uma coincidência isolada e denotamos o índice em p , por $i_B(p; f, g)$.

Teorema II.2.5 (eliminando coincidências) : Suponha $p \in \text{int}(X)$ uma coincidência isolada tal que $f(p) = g(p) = q \in \text{int}Y$. Se $i_B(p;f,g) = 0$, então p pode ser removido, isto é, existe uma vizinhança U de p com $U \cap \text{Coin}(f,g) = \{p\}$ e uma aplicação $f' : X \rightarrow Y$ homotópica a f relativa a $X - U$ tal que $U \cap \text{Coin}(f',g) = \emptyset$.

Demonstração

Sejam $U \subseteq \text{int}X$ e $V \subseteq \text{int}Y$ vizinhanças de p e q respectivamente para as quais existem homeomorfismos preservando orientação $h : (\bar{U}, p) \rightarrow (B^n, 0)$ e $k : (\bar{V}, q) \rightarrow (B^n, 0)$ sobre a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, onde 0 denota a origem.

Como p é uma coincidência isolada e f e g são contínuas, podemos escolher U e V tais que $U \cap \text{Coin}(f,g) = \{p\}$ e $f(\bar{U}) \cup g(\bar{U})$ está contido em V .

Defino $\phi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ como a composição

$$S^{n-1} \xrightarrow{h^{-1}} \partial \bar{U} \xrightarrow{(f,g)} \bar{V} \times \bar{V} - \Delta(V) \xrightarrow{k \times k} B^n \times B^n - \Delta(B^n) \xrightarrow{F} B^n - 0 \xrightarrow{\Pi} S^{n-1}$$

onde $F(x,y) = (y-x)/2$ e Π denota a projeção radial.

Pelo lema II.2.6 (abaixo), $i_B(p;f,g) = \text{grau}\phi$, desta forma ϕ é de grau zero e, portanto ϕ pode ser estendida para a aplicação $\Phi : B^n \rightarrow S^{n-1}$.

Identificando $\bar{U}$ e $\bar{V}$ com B^n via os homeomorfismos h e k , a aplicação ϕ fica da forma

$$\phi(x) = [g(x) - f(x)] / \|g(x) - f(x)\|$$

e definimos $f'(x) = g(x) - a(x) \Phi(x)$, onde $a : B^n \rightarrow (0, \infty)$ é contínua, $a(x) = \|g(x) - f(x)\|$, para $x \in \partial B^n$ e tem a propriedade que $a(x)$ é pequeno suficiente para que $f'(x) \in B^n$.

Logo $f \cong f'$ rel $X-U$ e $\text{Coin}(f',g) = \emptyset$.

A construção de $a(x)$ está no apêndice II. ◆

Lema II.2.6 : $i_B(p;f,g) = \text{grau}\phi$.

demonstração:

Sabemos que $I(p, \hat{f}, 2g) = \text{grau}\Phi$ (Proposição I.2.10) e, portanto $i_B(p; f, g) = \text{grau}\hat{\Phi}$ onde $\hat{\Phi}$ é a composição :

$$\begin{array}{c} S^{n-1} \xrightarrow{h^{-1}} \partial\tau^{-1}(U) \xrightarrow{(\hat{f}, 2g)} \overline{i^{-1}(V)} \times \overline{i^{-1}(V)} - \Delta(i^{-1}(V)) \xrightarrow{k \times k} B^n \times B^n - \Delta(B^n) \\ \xrightarrow{F} B^n - 0 \xrightarrow{\Pi} S^{n-1} ; \end{array}$$

Mas, $\hat{f}(x) = 2g(x)$ se, e somente se, $x \in X_+$, ou seja, as vizinhanças U, V estão em X_+ e Y_+ respectivamente. Portanto $\partial\tau^{-1}(U) = \partial U$ e $i^{-1}(V) = V$. Logo, $\hat{\Phi} = \Phi$. Isto é, $i_B(p; f, g) = \text{grau}\hat{\Phi} = \text{grau}\Phi$. ◆

O índice de coincidência e o número de Lefschetz de coincidência na categoria B se relacionam como se segue :

Teorema II.2.7(Normalização): $i_B(X; f, g) = L_B(f, g)$

Demonstração

$$i_B(X; f, g) = I(2X; \hat{f}, 2g) \underset{*}{=} L(\hat{f}, 2g) = L_B(f, g).$$

* Ver I.2.7 ◆

§3 Classes de Nielsen de Coincidência

Para aplicações $f, g: X \rightarrow Y$, pontos x_0 e $x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são ditos Nielsen equivalentes, escrevemos $x_0 \sim x_1$, se existe um caminho $\alpha: I \rightarrow X$ de x_0 a x_1 tal que $f \circ \alpha$ é homotópico a $g \circ \alpha$ em Y relativamente aos pontos finais. Uma classe de equivalência C é chamada uma classe de Nielsen de coincidência.

Dada uma homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$, a aplicação $\mathbf{F}: X \times I \rightarrow Y \times I$ será definida por $\mathbf{F}(x,t) = (F(x,t),t)$. Se $A \subset X \times I$ é qualquer conjunto, então para cada $t \in I$, nós definimos

$$A_t = \{x \in X / (x,t) \in A\}.$$

Lema II.3.1 : Sejam $F, G: X \times I \rightarrow Y$ homotopias e seja C uma classe de coincidência de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$. Então para cada $t \in I$, ou $C_t = \emptyset$ ou C_t é uma classe de coincidência de f_t e g_t .

Demonstração

Por conveniência, escreveremos $C \underset{X}{\sim} D$ para indicar que C e D são caminhos homotópicos em X com pontos finais fixos.

Para provar o lema, é suficiente mostrar que dois pontos quaisquer (x,t) e $(y,t) \in X \times I$ são $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ equivalentes se, e somente se, x e y forem f_t e g_t equivalentes. Para cada $t \in I$.

($\Rightarrow$) Se (x,t) e (y,t) são $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ equivalentes, então existe um caminho $\alpha': I \rightarrow X \times I$ tal que $\alpha'(0) = (x,t)$ e $\alpha'(1) = (y,t)$ e $\mathbf{F}\alpha' \underset{Y \times I}{\sim} \mathbf{G}\alpha'$, escrevemos $\alpha'(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e seja $\alpha(t) = (\alpha_1(t), t)$. Claramente $\alpha' \underset{X \times I}{\sim} \alpha$. Logo, $\mathbf{F}\alpha \underset{Y \times I}{\sim} \mathbf{G}\alpha$. Isto segue que $f_t(\alpha_1) \underset{I}{\sim} g_t(\alpha_1)$ e como $\alpha_1(0) = x$ e $\alpha_1(1) = y$, x e y serão f_t e g_t equivalentes.

($\Leftarrow$) Se x e y são f_t e g_t equivalentes, então existe um caminho $\gamma: I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $f_t(\gamma) \underset{I}{\sim} g_t(\gamma)$.

Agora defino $\gamma': I \rightarrow Y \times I$ por $\gamma'(t) = (\gamma(t), t)$. Claramente $\mathbf{F}\gamma' \underset{Y \times I}{\sim} \mathbf{G}\gamma'$. Portanto (x,t) e (y,t) serão $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ equivalentes. ◆

Lema II.3.2 : Sejam $F, G: X \times I \rightarrow Y$ homotopias e suponha para algum $t \in I$ que $C^{(t)}$ é uma classe de coincidência de f_t e g_t , então existe uma única classe de coincidência de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ tal que $C_t = C^{(t)}$.

Demonstração

Se $x \in C^{(t)}$, então $(x,t) \in \text{Coin}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Seja C a única classe de coincidência de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ contendo (x,t) . Então, $C^{(t)} = C_t$ pelo lema II.3.1. $\blacklozenge$

Um espaço Y é um espaço de Jiang se dado qualquer laço w em Y com $w(0) = w(1) = y_0$, existe uma homotopia $\Lambda : Y \times I \rightarrow Y$ tal que λ_0 e λ_1 são aplicações identidade de Y e $\Lambda(y_0, t) = w(t)$ qualquer $t \in I$.

Lema II.3.3 : Suponha $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações, onde Y é um espaço de Jiang. Dados x_0 e $x_1 \in \text{Coin}(f,g)$, existem B -homotopias $F, G : X \times I \rightarrow Y$ com $f_0 = f_1 = f$ e $g_1 = g_0 = g$ tal que $(x_0, 0)$ e $(x_1, 1)$ estão na mesma classe de coincidência de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$.

Demonstração

Seja α qualquer caminho de x_0 a x_1 e seja ρ um laço em Y em $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ definido por

$$\rho(t) = \begin{cases} g(\alpha(2t)) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(\alpha(2-2t)) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Desde que Y é um espaço de Jiang, existe uma homotopia $\Lambda : Y \times I \rightarrow Y$ tal que λ_0 e λ_1 são aplicações identidade de Y e $\Lambda(y_0, t) = \rho(t)$, qualquer $t \in I$.

Defino $F, G : X \times I \rightarrow Y$ como

$$F(x,t) = \begin{cases} \Lambda(f(x), 2t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(x) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$G(x,t) = g(x) \text{ qualquer } t \in I.$$

Seja $\alpha^* : I \rightarrow X \times I$ um caminho definido por

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} (x_0, t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\alpha(2t-1), t) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

O caminho $G\alpha^*: I \rightarrow Y \times I$ é dado por $G\alpha^*(t) = (g\alpha(t), t)$
O caminho $F\alpha^*: I \rightarrow Y \times I$ é dado por

$$F\alpha^*(t) = (F\alpha^*(t), t) = \begin{cases} (\rho(t), t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (f\alpha(2t-1), t) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (g\alpha(2t), t) = (G\alpha^*(t), t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (f\alpha(2t-1), t) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Os caminhos $F\alpha^*$ e $G\alpha^*$ são homotópicos em $Y \times I$ relativo a pontos finais $(y_0, 0) = F(x_0, 0) = G(x_0, 0)$ e $(y_1, 1) = F(x_1, 1) = G(x_1, 1)$. ♦

§4 O número de Nielsen para a categoria B.

Seja $(X, Y, f, g) \in B$. Já observamos que $\text{Coin}(\hat{f}, 2g) = \text{Coin}(f, g)$. Veremos a seguir que os conjuntos de coincidência têm o mesmo comportamento em relação a equivalência de Nielsen.

Lema II.4.1: As classes de coincidência de $\text{Coin}(f, g)$ são idênticas àsquelas de $\text{Coin}(\hat{f}, 2g)$.

Demonstração

Se x_0 e $x_1 \in \text{Coin}(f, g) = \text{Coin}(\hat{f}, 2g)$ são Nielsen equivalentes como pontos de coincidência de f e g , então eles são certamente Nielsen equivalentes como pontos de $\hat{f}$ e $2g$. De fato se existe $c: I \rightarrow X_+$ tal que $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ e $fc \cong gc$, então $\hat{f} \circ c \cong (2g) \circ c$. Pois, $\text{Im } c \subset X_+$, e neste caso teremos $\hat{f} \circ c = f \circ c$ e $(2g) \circ c = g \circ c$.

Assim resta provar a recíproca.

Vamos supor que existam um caminho $\alpha : I \rightarrow 2X$ de x_0 a x_1 e uma homotopia $H: I \times I \rightarrow 2Y$ tais que $h_0 = \hat{f} \circ \alpha$, $h_1 = (2g) \circ \alpha$, $h_t(0) = x_0$ e $h_t(1) = x_1$.

Dadas as seguintes retrações $r: 2X \rightarrow X$ e $r': 2Y \rightarrow Y$, é importante notar que pela definição de $2g$ vale que

$$r' \circ (2g) = g \circ r. \text{ Pois } r' \circ (2g)(-x) = r' \circ (-g(x)) = g(x) = g \circ r(-x).$$

Consideraremos a homotopia $\Xi = r' \circ H : I \times I \rightarrow Y$.

Observe que $\xi_0 = r' \circ h_0 = r' \circ \hat{f}(\alpha) = r' \circ i \circ f(r(\alpha)) = f(r(\alpha))$,

$$\xi_1 = r' \circ (2g)\alpha = g(r(\alpha)) \text{ e,}$$

como $\xi_t(0) = x_0$ e $\xi_t(1) = x_1$, nós podemos usar o caminho $r \circ \alpha: I \rightarrow X$ para concluir que x_0 e x_1 são Nielsen equivalentes como pontos de coincidência de f e g . ◆

Observação: Como mostramos no capítulo I (I.3.2), se X e Y são variedades compactas, com ou sem bordo, então as classes de coincidência são conjuntos isolados de coincidência, logo deve existir apenas um número finito delas.

Além disso, definimos o número de coincidência de Nielsen $N(\hat{f}, 2g)$ para aplicações $\hat{f}, 2g : 2X \rightarrow 2Y$ como o número de classes essenciais.

Definição II.4.2 : Para $(X, Y, f, g) \in B$, $N_B(f, g)$ denota o número de classes de coincidências essenciais de f e g , isto é, o número de classes com $i_B(C, f, g) \neq 0$.

Seja W um aberto de X , $W \cap \text{Coin}(f, g) = C$, então $r^{-1}(W) \cap \text{Coin}(\hat{f}, 2g) = C$ e portanto, por definição $i_B(C, f, g) = i_B(W, f, g) = I(r^{-1}(W), \hat{f}, 2g) = I(C, \hat{f}, 2g)$.

Logo do lema III.4.1 teremos:

Teorema II.4.3 : Se $(X, Y, f, g) \in B$, então $N_B(f, g) = N(\hat{f}, 2g)$.

Teorema II.4.4 : Se (X, Y, F, G) é uma B - homotopia, então $N_B(f_0, g_0) = N_B(f_1, g_1)$.

Demonstração

Por hipótese nos são dadas homotopias $G : (X \times I, \partial X \times I) \rightarrow (Y, \partial Y)$ e $F : X \times I \rightarrow Y$. A existência das homotopias $\hat{F}, 2G : 2X \times I \rightarrow 2Y$ dadas por $\hat{f}_t = if_{tr} : 2X \rightarrow 2Y$ e $(2g)_t : 2X \rightarrow 2Y$ implica que $N(\hat{f}_0, 2g_0) = N(\hat{f}_1, 2g_1)$. O resultado é imediato por II.4.3. $\blacklozenge$

Corolário II.4.5 : Para toda (X, Y, f', g') que é B-homotópica a (X, Y, f, g) existem ao menos $N_B(f, g)$ pontos $x \in X$ para os quais $f'(x) = g'(x)$.

Teorema II.4.6 : Se $(X, Y, f, g) \in B$, onde Y é simplesmente conexo ou $f, g : X \rightarrow Y$ são aplicações homotópicas, então

$$N_B(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{se } L_B(f, g) = 0 \\ 1 & \text{se } L_B(f, g) \neq 0 \end{cases}$$

Demonstração

Sendo Y é simplesmente conexo ou f e g homotópicos, existe apenas uma classe de coincidência e seu índice é $L_B(f, g)$ pelo teorema II.2.7. $\blacklozenge$

Lema II.4.7 : Seja (X, Y, F, G) uma B - homotopia e seja C uma classe de coincidência de $F, G : X \times I \rightarrow Y \times I$, então $i_B(C_0, f_0, g_0) = i_B(C_1, f_1, g_1)$.

Demonstração

Seja C uma classe de coincidência de F e G . É suficiente mostrar que para cada $r \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $s \in I$ e $|s - r| < \varepsilon$, então $i_B(C_r, f_r, g_r) = i_B(C_s, f_s, g_s)$, onde C_r é a classe de coincidência de f_r e g_r . Daí, usando o fato de que I é conexo, obtemos o resultado desejado.

Sejam $p : X \times I \rightarrow X$ a projeção e d uma métrica em Y . Tomamos $U \subset X \times I$ aberto tal que $U \cap \text{Coin}(F, G) = C$. Então é fácil ver que, $C_r = U_r \cap \text{Coin}(f_r, g_r)$, logo $i_B(U_r, f_r, g_r) = i_B(C_r)$.

O compacto $K = p(C) - U_r$ não contém pontos de $\text{Coin}(f_r, g_r)$. Desta forma, existe $\delta > 0$ tal que $d(g_r(x), f_r(x)) > \delta$, para todo $x \in K$. Como K é compacto, então F e G são uniformemente contínuas em $K \times I$.

Isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in K$:

$$\text{se } |s - r| < \varepsilon, \text{ então } d(F(x, r), F(x, s)) < \delta / 2 \text{ e } d(G(x, r), G(x, s)) < \delta / 2.$$

Portanto para $|s - r| < \varepsilon$, teremos

$$d(F(x,s), G(x,s)) \geq d(F(x,r), G(x,r)) - d(F(x,r), F(x,s)) - d(G(x,r), G(x,s)) > \delta - \delta/2 - \delta/2 = 0.$$

Logo $d(F(x,s), G(x,s)) > 0$, ou seja, $\text{Coin}(F(x,s), G(x,s)) = \emptyset$ em K .

Como $C_s \subset p(C)$, então $C_s \subset U_r$ e $\overline{U_r} \cap \text{Coin}(f_s, g_s) = C_s$, pois U é aberto e $U \cap \text{Coin}(f, g) = C$. Assim $i_B(C_s) = i_B(U_r, f_s, g_s)$.

Como $F(x,r)$ e $G(x,r)$, e $G(x,s)$ e $F(x,s)$ não contém pontos de coincidência em ∂U_r , concluímos que $i_B(U_r, f_r, g_r) = i_B(U_r, f_s, g_s)$ pela propriedade de invariância homotópica (propriedade II.2.4).

Portanto $i_B(C_r) = i_B(C_s)$. ◆

Nós notamos que lema II.4.7 pode ser usado para dar uma alternativa para a demonstração do teorema II.4.4.

Lema II.4.7 e lema II.3.3 juntos implicam que se Y é um espaço de Jiang, então todas as classes de coincidência de f e g têm o mesmo índice, e além disso:

Teorema II.4.8 : Suponha $(X, Y, f, g) \in B$, onde Y é um espaço de Jiang. Se $L_B(f, g) = 0$, então $N_B(f, g) = 0$.

Demonstração

Se $\text{Coin}(f, g) = \emptyset$, então não há nada a fazer.

Sejam C_j classes de coincidência de f e g . Como $i_B(C_0, f, g) = i_B(C_j, f, g)$ para todo j , então

$$0 = L_B(f, g) = \sum_{j=0}^m i_B(C_j, f, g) = (m + 1) i_B(C_0, f, g).$$

Portanto, $N_B(f, g) = 0$. ◆

Seja $\Pi_1(Y, y_0)$ o grupo fundamental de Y com ponto base y_0 .

Lema II.4.9 : Se Y é um espaço de Jiang, então $\Pi_1(Y, y_0)$ é abeliano.

Demonstração

Seja $\alpha, \beta \in \Pi_1(Y, y_0)$.

Como Y é um espaço de Jiang dado o laço α em Y com $\alpha(0) = \alpha(1) = y_0$, existe uma homotopia $\Lambda: Y \times I \rightarrow Y$ tal que $\Lambda(y, 0) = \Lambda(y, 1) = y$ e $\Lambda(y_0, t) = \alpha(t)$ qualquer $t \in I$.

Para a homotopia $H: I \times I \rightarrow Y$ dada por $H(s, t) = \Lambda(\beta(s), t)$ vale que

$$H(s, 0) = \Lambda(\beta(s), 0) = \beta(s);$$

$$H(s, 1) = \Lambda(\beta(s), 1) = \beta(s);$$

$$H(0, t) = H(1, t) = \Lambda(y_0, t) = \alpha(t) \text{ qualquer } t \in I.$$

Logo, $H(\partial(I \times I)) = \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$ e, portanto $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$ representa a identidade em $\Pi_1(Y, y_0)$. ◆

Definição II.4.10 : Sejam G_1 e G_2 grupos e $h, k : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfismos. Dois elementos α e β de G_2 são h, k -equivalentes se existe $\gamma \in G_1$ tal que $\alpha = k(\gamma) \beta h(\gamma^{-1})$.

O número de Reidemeister, $R(h, k)$, de h e k é definido pela cardinalidade do conjunto de classes de equivalência de G_2 sobre a h, k -equivalência.

Teorema II.4.11 : Se G_2 é um grupo abeliano e $h, k : G_1 \rightarrow G_2$ são homomorfismos, então $R(h, k)$ é a ordem do cokernel de $k - h$.

Demonstração

Os elementos α e β de G_2 são h, k -equivalentes se, e só se, existe $\gamma \in G_1$ tal que $\alpha = k(\gamma) + \beta - h(\gamma)$ (estamos considerando a operação do grupo abeliano como adição). Portanto, $\alpha - \beta = k(\gamma) - h(\gamma) \in (h-k)(G_1)$. Assim, as h, k -classes equivalentes são elementos de $G_2 / (h-k)(G_1) = \text{coker}(h-k)$. ◆

Para $(X, Y, f, g) \in B$, definiremos $R_B(f, g)$ como o número de Reidemeister dos homomorfismos induzidos $f_{\pi}, g_{\pi}: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$. Sejam $\Pi'_1(Y, y_0)$ o

conjunto de classes de f_π, g_π -equivalência de $\Pi_1(Y, y_0)$ e $\text{Coin}'(f, g)$ o conjunto de classes de Nielsen de coincidência de f e g .

Teorema II.4.12 : Existe uma função injetora $\varphi: \text{Coin}'(f, g) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$.
Portanto $N_B(f, g) \leq R_B(f, g)$.

Demonstração

Sejam C uma classe de coincidência, $x \in C$ e λ um caminho de x_0 a x . Assim, $g\lambda(f\lambda)^{-1}$ é um laço em Y com ponto base y_0 , ou seja, representa um elemento $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$.

Defino $\varphi(C) = [\alpha]$ (classe de equivalência que contém α).

Afirmarções:

1) φ está bem definida.

Sejam $x' \in C$ e λ' um caminho de x_0 a x' .

Defino $\beta = \{g\lambda'(f\lambda')^{-1}\} \in \Pi_1(Y, y_0)$.

Como x e x' são f, g - equivalentes, existe D um caminho de x a x' tal que $gD \cong fD$ (*).

Considere $\lambda D \lambda'^{-1}$ um laço com base em x_0 e $\gamma = \{\lambda D \lambda'^{-1}\} \in \Pi_1(Y, y_0)$, então

$$\begin{aligned} \alpha &= \{g\lambda(f\lambda)^{-1}\} = \{g(\lambda D \lambda'^{-1} \lambda')(f\lambda')^{-1}(f\lambda')(gD^{-1})\lambda(f\lambda)^{-1}\} \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{g(\lambda D \lambda'^{-1})\} \{g\lambda'(f\lambda')^{-1}\} \{(f\lambda')(fD^{-1})(f\lambda)^{-1}\} = g_\pi(\gamma) \beta f_\pi(\gamma^{-1}). \end{aligned}$$

Assim, α e β são f_π, g_π -equivalentes, logo φ é independente da escolha do ponto de coincidência usado para representar a sua classe e também do caminho do ponto de base a este ponto.

2) φ é injetora.

Sejam C e $C' \in \text{Coin}'(f, g)$, tais que $\varphi(C) = \varphi(C')$.

Tome $x \in C$ e $x' \in C'$.

Como $\varphi(C) = \varphi(C')$, então existem caminhos D e D' de x_0 a x e de x_0 a x' , respectivamente, e um laço γ em x_0 tais que

$$\{gD(fD)^{-1}\} = \{g\gamma\} \{gD'(fD')^{-1}\} \{(f\gamma)^{-1}\} (**).$$

Seja $E = D'^{-1}\gamma^{-1}D$ de x' a x , então

$$\{gE(fE)^{-1}\} = \{g(D')^{-1}g(\gamma)^{-1}g(D)(fD)^{-1}(f\gamma)fD'\} \stackrel{(**)}{=}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \{g(D')^{-1}g(\gamma)^{-1}g\gamma gD'(fD')^{-1}(f\gamma)^{-1}(f\gamma)fD'\} \text{ que é o elemento neutro de } \Pi_1(Y, y_0).$$

Logo x e x' são f, g -equivalentes, ou seja, $C = C'$. ◆

Lema II.4.13 : Se Y é um espaço de Jiang e $L_B(f, g) \neq 0$ então a função $\varphi : \text{Coin}'(f, g) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ definida acima é sobrejetora. Portanto $N_B(f, g) \geq R_B(f, g)$.

Demonstração

Seja $w \in \Pi_1(Y, y_0)$, queremos mostrar que existe uma classe essencial C de f e g , tal que $\varphi(C) = [w]$.

Como Y é um espaço de Jiang dado o laço w em Y , com $w(0) = w(1) = y_0$, existe uma homotopia $\Lambda : Y \times I \rightarrow Y$ tal que $\Lambda(y, 0) = \Lambda(y, 1) = y$ e $\Lambda(y_0, t) = w(t)$ para qualquer $t \in I$.

Defina as homotopias $F, G : X \times I \rightarrow Y$ como $F(x, t) = \Lambda(f(x), t)$ e $G(x, t) = g(x)$. Seja C a classe de Nielsen de coincidência de $F(x, t) = (F(x, t), t)$ e $G(x, t) = (G(x, t), t)$ tal que C_0 é a classe de Nielsen de coincidência de f e g que contém x_0 .

Tomo $x_1 \in C_1$, então $(x_0, 0)$ e $(x_1, 1)$ são F, G - equivalentes. Portanto existe um caminho γ , que podemos supor da forma $\gamma(t) = (\lambda(t), t)$ tal que $F\gamma \cong G\gamma$. Logo $F\gamma \cong G\gamma$.

Observe que $\gamma \cong \eta \mu$, onde $\eta(t) = (x_0, t)$ e $\mu(t) = (\lambda(t), 1)$, através da homotopia $L(t, s) = (\lambda(ts), s)$ para $t, s \in I$.

Desta forma,

$$F\gamma \cong w f\lambda \text{ e portanto, } g\lambda \cong G\gamma \cong F\gamma \cong w f\lambda. \text{ Ou melhor, } g\lambda (f\lambda)^{-1} \cong w.$$

Pela definição de φ , temos que $\varphi(C_1) = [w]$. ◆

Considere o seguinte diagrama, onde θ_1 e θ_2 são homomorfismos de Hurewicz

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\pi - g_\pi} & \Pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow \theta_1 & & \downarrow \theta_2 \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_* - g_*} & H_1(Y) \end{array}$$

Se Y for um espaço de Jiang, então $\Pi_1(Y, y_0)$ será abeliano e θ_2 será um isomorfismo.

Como θ_1 é um homomorfismo sobrejetor, teremos que $\Pi_1(Y, y_0)/\text{Im}(f_\pi - g_\pi)$ será igual a $\Pi_1(Y, y_0)/\text{Im}(f_* - g_*)$.

Pela observação acima e a partir do teorema II.4.12 e do lema II.4.13 é possível calcular $N_B(f, g)$ para aplicações em espaços de Jiang onde $L_B(f, g) \neq 0$, como segue:

Teorema II.4.14 : Suponha $(X, Y, f, g) \in B$, onde Y é um espaço de Jiang. Se $L_B(f, g) \neq 0$, então $N_B(f, g)$ é a ordem do cokernel de $f_* - g_* : H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$.

Exemplos

I) Sejam $X = Y = B^n$, $g, f : B^n \rightarrow B^n$ tais que $g(x) = x$ e f uma aplicação qualquer.

Como $H_q(B^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \end{cases}$, então $L_B(f, \text{id}) = 1$. Portanto, $L(\hat{f}, \text{id}) = 1$, onde $\hat{f} : S^n \rightarrow S^n$. Como S^n é simplesmente conexo teremos que

$$N(\hat{f}, \text{id}) = \begin{cases} 0 & \text{se } L(\hat{f}, \text{id}) = 0 \\ 1 & \text{se } L(\hat{f}, \text{id}) \neq 0 \end{cases}. \text{ Assim, } N_B(f, \text{id}) = 1$$

II) Sejam $X = Y = B^2 - B_\epsilon^2$.

Como $B^2 - B_\epsilon^2$ é isomorfo a $S^1 \times I$, considere $g, f : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$ tais que $g(z, t) = (z, t)$ e $f(z, t) = (z^n, 1-t)$, para $n \neq 1$.

$$(z,t) = g(z,t) = f(z,t) = (z^n, 1-t) \Leftrightarrow z = z^n \text{ e } t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \text{Coin}(f, \text{id}) = \{ (w, \frac{1}{2}) / w^{n-1} = 1 \}.$$

$$L_B(f,g) = 1-n, \text{ pois } H_q(S^1 \times I) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 1; \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \text{ ou } 1; \end{cases}$$

Como $S^1 \times I$ é um espaço de Jiang e $L_B(f,g) \neq 0$, então $N_B(f,g)$ é a ordem do cokernel de $f_* - \text{id}_* : H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$, ou seja, $N_B(f,g) = n - 1$.

Desta forma, temos $n - 1$ pontos de coincidência e $n-1$ classes de Nielsen, ou seja, cada ponto pertence a uma classe de Nielsen diferente. Assim, o índice de cada ponto de coincidência p é diferente de zero. Além disso, como $\sum i_B(p, f, \text{id}) = L_B(f,g) = 1-n$, podemos afirmar que $i_B(p, f, \text{id}) = -1$.

III) Considere $g, f : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$ tais que $g(z,t) = (z,t)$ e $f(z,t) = (z^n, \eta(t))$, onde $n \neq 1$ e $\eta : I \rightarrow I$ é uma aplicação contínua.

$$(z,t) = g(z,t) = f(z,t) = (z^n, \eta(t)) \Leftrightarrow z = z^n \text{ e } \eta(t) = t.$$

$$\text{Portanto, } \text{Coin}(f, \text{id}) = \{ (w,t) / w^{n-1} = 1 \text{ e } \eta(t) = t \}.$$

Como $\eta : I \rightarrow I$ é uma aplicação contínua, sabemos que $\#\{t / \eta(t) = t\} \geq 1$. Vamos supor que (w_0, t') e $(w_0, t'') \in \text{Coin}(f, \text{id})$, então (w_0, t') e (w_0, t'') serão Nielsen equivalentes. Basta tomar o caminho $\lambda(r) = (w_0, (1-r)t' + rt'')$ e é fácil ver que

$$f(\lambda(r)) = (w_0^n, \eta((1-r)t' + rt'')) \cong (w_0^n, (1-r)t' + rt'') = (w_0, (1-r)t' + rt'').$$

Observe que pela mesma razão do exemplo acima, valem:

$$L_B(f,g) = 1-n \text{ e } N_B(f,g) = n - 1.$$

Desta forma, temos pelo menos $n - 1$ pontos de coincidência e $n - 1$ classes de Nielsen, ou seja, agora podemos ter mais de um ponto pertencendo a uma mesma classe de Nielsen.

Capítulo III

Teorema de minimização para coincidências na categoria B

§1 Teorema de minimização para coincidências na categoria B

No capítulo anterior mostramos que o número de Nielsen $N_B(f, g)$ é um limitante inferior para o número de coincidências de f' e g' para quaisquer $f', g': X \rightarrow Y$ homotópicas a f e g , respectivamente. Neste capítulo nosso objetivo é mostrar que se a dimensão de X e Y é $n \geq 3$, então existem tais $f' \cong f$ e $g' \cong g$ com exatamente $N_B(f, g)$ coincidências.

Assumiremos a partir de agora que as variedades são triangularizáveis. Denotaremos por ρ a métrica baricêntrica em Y .

As aplicações $f, f': X \rightarrow Y$ são ε -homotópicas se são homotópicas e se $\rho(f(x), f'(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Pares de aplicações (f, g) e (f', g') são ε -homotópicos se f e g são ε -homotópicas a f' e a g' , respectivamente.

Dado $\varepsilon > 0$ chamaremos de ε -homotopia a toda homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$, tal que $\rho(f_t(x), f_{t'}(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$ e todo $t, t' \in I$.

Teorema III.1. 1: Dados $(X, Y, f, g) \in B$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma aplicação $f': X \rightarrow Y$, ε -homotópica a f tal que $\text{Coin}(f', g)$ é finito.

demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe uma vizinhança V de ∂Y em Y tal que $\bar{V}$ é homeomorfa a $\partial Y \times [0, \varepsilon/2]$ de tal maneira que ∂Y corresponde naturalmente a $\partial Y \times 0$. Seja $x \in X$ tal que $f(x) \in V$, então poderemos escrever $f(x) = (\alpha(x), t)$, para algum $t \in [0, \varepsilon/2]$.

Definimos uma aplicação contínua f_1 , $\varepsilon/2$ - homotópica a f , tal que f_1 leva X no $\text{int}Y$, da seguinte forma:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \notin V; \\ (\alpha(x), \varepsilon/2) & \text{se } f(x) \in \bar{V}; \end{cases}$$

Tomamos ε^* , $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon$, suficientemente pequeno tal que, para todo $x \in X$, $\rho(f_1(x), \partial Y) \geq \varepsilon^*$. Com isso $\text{Coin}(f_1, g) \subset \text{int}X$.

Seja $f_2: 2X - \text{int}X_+ \rightarrow 2Y$ tal que $f_2(x) = \hat{f}_1(x)$, para todo $x \in 2X - X_+$. Note que $f_2(x) \neq 2g(x)$, para todo $x \in 2X - \text{int}X_+$.

Usando a mesma técnica da proposição III.2.4 (no próximo parágrafo), para $A = X_+ \subset 2X$ e para as funções f_2 e $2g$, sabemos que existe uma aplicação $f_3: 2X \rightarrow 2Y$, $\varepsilon^*/2$ - homotópica a $\hat{f}_1$, tal que f_3 e $2g$ têm apenas coincidências isoladas todas contidas no interior de simplexos maximais de K (uma triangularização conveniente de X_+).

Ou seja, $\text{Coin}(f_3, 2g) \subset \text{int}X_+$ e é finito.

Mostraremos que $f' = f_3|_X$ é a função desejada:

1) f_3 é homotópica a $\hat{f}$: observe que $\hat{f}_1 = i.f_1.r$ e $f \underset{H}{\approx} f_1$.

Considere $H'(x, t) = iH(r(x), t)$, então $\hat{f} \underset{H'}{\approx} \hat{f}_1$, como $\hat{f}_1 \underset{G}{\approx} f_3$, então $\hat{f} \underset{G \circ H'}{\approx} f_3$.

2) $f_3|_X: X \rightarrow \text{int}Y$: $\text{Im } \hat{f}_1 = \text{Im } i.f_1.r \subset \text{int}Y$, e $\rho(f_1(x), \partial Y) \geq \varepsilon^*$, então $\rho(f_3(x), \partial Y) \geq \varepsilon^*/2 > 0$, para todo $x \in X$.

3) $f_3|_X \cong f$: seja $G : 2X \times I \rightarrow 2Y$ contínua tal que $G(x,0) = \hat{f}_1$ e $G(x,1) = f_3$.

Pela construção de f_3 na proposição III.2.4, temos que $G(x,t) \in \text{int}Y$, para todo $x \in X$ e $t \in I$.

Vamos considerar $G|_{X \times I} = G'(x,t)$, então $G'(x,0) = f_1(x)$ e $G'(x,1) = f_3(x)$.

Logo $f_3|_X \cong_{G'} f_1$, portanto $f_3|_X \cong_{H^{-1}G'} f$.

4) $\text{Coin}(f_3|_X, g)$ é finito: se $x \in \text{Coin}(f_3|_X, g) \Rightarrow f_3|_X(x) = g(x)$, para $x \in X_+ \subset 2X$,

logo $f_3|_X(x) = f_3(x)$ e $g(x) = 2g(x) \Rightarrow x \in \text{Coin}(f_3, 2g)$. $\blacklozenge$

Teorema III.1.2 : Sejam X e Y variedades de dimensão $n \geq 2$, orientáveis, compactas, conexas e com fronteira não vazia e $g : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$. Então, existe $f : X \rightarrow Y$ homotópica a g tal que $\text{Coin}(f, g)$ é um único ponto. Se $L_B(g, g) = 0$, então f pode ser construída de maneira que $\text{Coin}(f, g)$ seja vazio.

demonstração:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $f' : X \rightarrow Y$ ε -homotópica a g , definida como na demonstração do teorema anterior, tal que f' leva X no $\text{int}Y$.

Assim, $\rho(f'(x), g(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in \partial X$ e $\text{Coin}(f', g) \subset \text{int}X$. Usando a mesma técnica da proposição III.2.6 (no parágrafo seguinte), para $A = X$, podemos construir f homotópica a f' de tal modo que $\text{Coin}(f, g)$ tenha no máximo um ponto.

Se $L_B(g, g) = 0$ e $\text{Coin}(f, g) = \{p\}$, como f é homotópica a g , teremos que $L_B(f, g) = 0$. Pelo teorema II.2.7, $i_B(p; f, g) = 0$.

Finalmente, pelo teorema II.2.5, podemos modificar f de maneira que $\text{Coin}(f, g)$ seja vazio. $\blacklozenge$

Teorema III.1.3: Suponha $(X, Y, f, g) \in B$ onde X e Y são de dimensão $n \geq 3$. Então existe $(X, Y, f', g') \in B$ que é B - homotópica a (X, Y, f, g) tal que $\text{Coin}(f', g')$ contém exatamente $N_B(f, g)$ pontos.

Demonstração

Usando um colarinho de ∂Y em Y podemos assumir que f leva X no $\text{int}Y$ (definida como f_1 na demonstração do teorema III.1.1).

Como g leva não apenas ∂X em ∂Y , mas também $\text{int}X$ em $\text{int}Y$, temos que $\text{Coin}(f, g) \subset \text{int}X$.

Além disso, pelo teorema III.1.1 podemos assumir f e g têm apenas um número finito de coincidências, cada uma delas no interior de um simplexo maximal de K .

Sejam x_1 e x_2 pertencentes a mesma classe de Nielsen. Então, existe $c: I \rightarrow \text{int}X$ tal que fc é homotópico a gc relativamente aos pontos finais. Além disso, $fc, gc: I \rightarrow \text{int}Y$, e assim, podemos usar as mesmas técnicas utilizadas no parágrafo seguinte para "unir" esses pontos a uma só coincidência.

Portanto, obtemos um par de funções homotópico a (f, g) tal que cada classe de coincidência contém um único ponto.

Aplicando o teorema II.2.5 para as classes inessenciais completamos a construção de f' e g' . ◆

Como consequência do teorema acima, obtemos a recíproca do teorema de coincidência de Lefschetz - Nakaoka (II.1.2):

Corolário III.1.4 : Suponha $(X, Y, f, g) \in B$ onde X e Y são de dimensão $n \geq 3$ e ou Y é um espaço de Jiang ou f e g são homotópicas. Se $L_B(f, g) = 0$, então existe $(X, Y, f', g') \in B$, B - homotópica a (X, Y, f, g) tal que $\text{Coin}(f', g') = \emptyset$.

Demonstração

Se Y é um espaço de Jiang, então $N_B(f, g) = 0$ pelo teorema II.4.8 enquanto que se f e g são homotópicas, obtemos a mesma conclusão do teorema II.4.6. Assim, em qualquer um dos casos $N_B(f, g) = 0$. O resultado segue agora do teorema anterior. ◆

§2 Teorema de minimização para coincidências em variedades fechadas

Neste parágrafo nosso objetivo é apresentar as técnicas utilizadas na demonstração do teorema de minimização para coincidências em variedades fechadas, para maiores detalhes veja [11].

Sejam X e Y variedades de dimensão n , orientáveis, compactas, conexas, sem bordo e triangularizáveis. Sejam K e L triangularizações de X e Y , respectivamente.

Denotaremos por σ^d um d -simplexo aberto de K , por $\bar{\sigma}^d$ o seu fecho, e por $\partial\sigma^d$ sua fronteira.

Dizemos que $A \subset K$ um subcomplexo de dimensão n , é homogêneo, se todo simplexo maximal de A for de dimensão n .

Seja ρ a métrica baricêntrica em K : se $x = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ e $y = \sum_{i=1}^n r'_i v_i$, então definimos $\rho(x, y) = [\sum_{i=1}^n (r_i - r'_i)^2]^{1/2}$.

Dado um subconjunto U de X , denotaremos por $\bar{U}$ seu fecho, ∂U sua fronteira e $d(U)$ seu diâmetro.

Para cada ponto y da variedade Y , existe uma vizinhança fechada $\bar{V}$ e um homeomorfismo que leva esta vizinhança em uma bola $B_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ do $\mathbb{R}^n$.

Como Y é compacta, existe uma subcobertura $V_1', \dots, V_r'$ de Y , $\bar{V}_i' \subset V_i \subset Y$, $\varphi_i(\bar{V}_i') = B_{1/2}^n(0)$, onde $\varphi_i: \bar{V}_i' \rightarrow B_{1/2}^n(0)$ é um homeomorfismo.

Sabemos que existe um número $\tau > 0$ (número de Lebesgue associado a cobertura $\{V_i'\}$) tal que para todo $V \subset Y$ com $d(V) < \tau$, vale que $V \subset V_i'$, para algum i .

Construiremos a seguir uma seqüência de ε 's e δ 's à qual nos referiremos até o final desse capítulo. Usaremos a continuidade uniforme de φ_i e de sua inversa.

Seja $\varepsilon_{n+1} = \tau/4$.

Então, existe $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}(\varepsilon_{n+1}) > 0$, $\delta_{n+1} < 1/2$ tal que

se $\rho(\varphi_i x, \varphi_i y) < \delta_{n+1}$, então $\rho(x,y) < \varepsilon_{n+1}$; para $i = 1,2,\dots,r$.

Existe $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}(\delta_{n+1}) > 0$ tal que
se $\rho(x,y) < \gamma_{n+1}$, então $\rho(\varphi_i x, \varphi_i y) < \delta_{n+1}$ para $i = 1,2,\dots,r$.

Considere $\varepsilon_n = \text{Min}\{\varepsilon_{n+1}, \gamma_{n+1}\}$.

Então, existe $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n) > 0$, $\delta_n < 1/2$ tal que
se $\rho(\varphi_i x, \varphi_i y) < \delta_n$, então $\rho(x,y) < \varepsilon_n$; para $i = 1,2,\dots,r$.

Existe $\gamma_n = \gamma_n(\delta_n) > 0$ tal que
se $\rho(x,y) < \gamma_n$, então $\rho(\varphi_i x, \varphi_i y) < \delta_n$ para $i = 1,2,\dots,r$.

Considere $\varepsilon_{n-1} = \text{Min}\{\varepsilon_n, \gamma_n\}$.

Procedendo assim, obteremos uma seqüência

$$0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \dots \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+1} = \tau/4.$$

Nosso objetivo a seguir (proposição III.2.5) será construir uma aplicação f' ε - homotópica a f tal que cada ponto de $\text{Coin}(f', g)$ seja uma coincidência isolada e esteja no interior de um simplexo maximal de X .

Lema III.2.1: Sejam $g : X \rightarrow Y$ e K uma triangularização de X tais que

(1) $d(g(\sigma^n)) < 1/4\tau$, para todo $\sigma^n \in K$.

Seja f definida em $\partial\sigma^d$, $0 < d < n$, tal que para todo $x \in \partial\sigma^d$

(2) $f(x) \neq g(x)$

(3_{d-1}) $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon_{d-1}$

Então , existe uma extensão contínua de f em $\bar{\sigma}^d$ satisfazendo (2) e (3_d).

demonstração:

De (1) e (3_{d-1}) vem que $d(g(\bar{\sigma}^d) \cup f(\partial\sigma^d)) < \tau$. Logo $g(\bar{\sigma}^d) \cup f(\partial\sigma^d) \subset V_i'$, para algum i .

Seja $h: \partial\sigma^d \rightarrow S^{n-1}$ definida por $h(x) = \overrightarrow{\varphi_i g(x) \varphi_i f(x)} / |\overrightarrow{\varphi_i g(x) \varphi_i f(x)}|$. Como $d < n$, h será homotópica à constante e portanto se estenderá continuamente para $\bar{\sigma}^d$.

Como $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon_{d-1}$, para todo $x \in \partial\sigma^d$, então $\rho(\varphi_i f(x), \varphi_i g(x)) < \delta_d$.

Seja 0 a origem de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \partial\sigma^d$, definiremos

$$\lambda(x) = \overrightarrow{|\varphi_i g(x) \varphi_i f(x)|}, \quad 0 < \lambda(x) < \delta_d.$$

Podemos estender λ (como no Apêndice II) continuamente em $\bar{\sigma}^d$ para uma função $a: \bar{\sigma}^d \rightarrow (0, \delta_d)$, e definir $\overrightarrow{0\varphi_i f'(x)} = \varphi_i g(x) - \lambda(x)\overrightarrow{0h(x)}$ satisfazendo $0 \leq |\overrightarrow{0\varphi_i f'(x)}| < \delta_d$.

Desta forma, f' está definida em todo x em $\bar{\sigma}^d$, é uma extensão contínua de f e vale (2). Além disso, como $\delta_d < 1/2$, então $f'(x) \in V_i'$ e $\rho(\varphi_i f'(x), \varphi_i g(x)) < \delta_d$, para todo x em $\bar{\sigma}^d$, implica que $\rho(f'(x), g(x)) < \varepsilon_d$ (3d). ♦

O lema seguinte estende f quando $d = n$:

Lema III.2.2: Sejam $g: X \rightarrow Y$ e K uma triangularização de X tais que

(1) $d(g(\sigma^n)) < 1/4 \tau$, para todo $\sigma^n \in K$.

Seja f definida em $\partial\sigma^n$ tal que para todo $x \in \partial\sigma^n$

(2) $f(x) \neq g(x)$

(3_{n-1}) $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon_{n-1}$

Então, existe uma extensão contínua de f em σ^n satisfazendo (3_n). Além disso, ou f e g não têm pontos de coincidência, ou têm exatamente uma coincidência em σ^n .

demonstração:

Temos que $g(\bar{\sigma}^n) \cup f(\partial\sigma^n) \subset V_i'$, para algum i .

Seja p em σ^n , x_0 em $\partial\sigma^n$ e $x = tx_0 + (1-t)p$, para $0 \leq t \leq 1$. Definimos o

vetor $v(x_0) = \overrightarrow{\varphi_i g(x_0) \varphi_i f(x_0)}$ em $\mathbb{R}^n$.

Por (2) e (3_{n-1}) temos que $0 < |v(x_0)| < \delta_n$.

Definiremos f da seguinte forma:

$\overrightarrow{0\varphi_i f(x)} = \varphi_i g(x) + tv(x_0)$, onde 0 é a origem de $\mathbb{R}^n$.

Então f é contínua, vale (2) para $x \neq p$ e (3_n). ♦

Lema III.2.3. Dado Y , existe um número $\alpha > 0$ tal que dadas as aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ com $\rho(f(x), g(x)) < \alpha$, então f e g serão homotópicas.

demonstração:

Ver apêndice A.I..1

♦

Assumiremos até o final deste capítulo que $\tau/2 < \alpha$.

Proposição III.2.4 : Sejam $f, g : X \rightarrow Y$, K uma triangularização de X e $A \subseteq K$ um n -subcomplexo homogêneo tal que $f \neq g$ em ∂A . Então existe $f' : A \rightarrow Y$, tal que $f' = f$ em ∂A , $\rho(f(x), f'(x)) < \tau/2$ e f' e g têm apenas coincidências isoladas que estão no interior de n -simplexos de A .

demonstração:

Podemos retriangularizar A de tal forma que $d(f(\sigma^n)) < \varepsilon_0/2$ e $d(g(\sigma^n)) < \varepsilon_0/2$, para todo $\sigma^n \in A$.

Seja B o conjunto de todos n -simplexos fechados de A com pelo menos uma coincidência de f e g .

Em B , $\rho(f, g) < \varepsilon_0$, pois para $y \in \bar{\sigma}^n \subset B$, existe $x \in \bar{\sigma}^n$ com $f(x) = g(x)$. Logo $\rho(f(y), g(y)) < \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), g(y)) < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0$.

Em $A - B$, faremos $f = f'$ e em B , definiremos f' como segue.

Em todos $\sigma^0 \in B$, f' será escolhido de forma que $0 < \rho(f', g) < \varepsilon_0$. Daí, f' será passo a passo definida como no lema III.2.1 em todos $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1} \in B$, de modo que f' e g não têm coincidências. Por fim, pelo lema III.2.2, f' será estendida a todo $\bar{\sigma}^n$, de forma a conter no máximo uma coincidência em σ^n .

Construímos assim, f' satisfazendo : f' e g têm apenas coincidências isoladas que estão no interior de n -simplexos de A . Observe que em ∂B , $f \neq g$, pela construção de B e $f' = f$ em ∂A .

Além disso, como $\rho(f, g) < \varepsilon_0 < \tau/4$, $\rho(f', g) < \tau/4$ em B e $f = f'$ em $A - B$, então $\rho(f', f) < \tau/2$. Como escolhemos $\tau < 2\alpha$, teremos pelo lema III.2.3, que f será homotópica a f' em A .

♦

Para $A = K$ (∂A é vazio) e $\tau/2 < \varepsilon$:

Proposição III.2.5 (Teorema de aproximação): Para cada par de aplicações (f, g) de X em Y e cada $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação f' , ε -homotópica a f , tal que f' e g têm apenas coincidências isoladas contidas no interior de simplexes maximais de K .

Proposição III.2.6. Seja $A \subset K$ um subcomplexo de dimensão n , $n \geq 2$, conexo e homogêneo. Seja g uma aplicação arbitrária de A em Y e f definida em ∂A de modo que $0 < \rho(f, g) < \varepsilon$. Então, respeitada a condição $\rho(f, g) < \tau/4$, f pode ser estendida sobre A , de tal modo que se forme no máximo um ponto de coincidência com g .

demonstração:

Refinamos a triangularização de A o suficiente para que $d(g(\sigma^n)) < \varepsilon_0/2$, para todo $\sigma^n \in A$.

Segundo o lema III.2.1, f pode ser construída sobre todos $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-2} \in A$, mantendo a condição $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_i$.

De acordo com [1] os n -simplexos de A podem ser ordenados $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \dots, \sigma_r^n$ de tal maneira que todo σ_i^n , com $i < r$, possui uma face σ_i^{n-1} a qual também é face de um σ_j^n , com $j > i$.

Construiremos f livre de pontos de coincidência sobre $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \dots, \sigma_{r-1}^n$.

Em todos $\sigma^0 \in A$, f será escolhido de forma que $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_0$. Daí, f será passo a passo definida como no lema III.2.1 em todos $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-2} \in A$.

Em σ_1^n , pelo lema III.2.1, podemos estender f sobre todos aqueles $(n-1)$ -simplexos de $\partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1}$, sobre os quais a aplicação ainda não está definida, com a condição $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_{n-1}$.

Um ponto $p \notin \sigma_1^{n-1}$ pode ser escolhido de tal maneira que, deste ponto, os pontos de σ_1^n são projetados univocamente sobre todos os pontos de $\partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1}$.

Sejam x_0 em $\partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1}$ e x_1 o ponto de encontro de $\overrightarrow{px_0}$ com σ_1^{n-1} e $x_t = (1-t)x_0 + (1-t)x_1$, para algum t , $0 \leq t \leq 1$.

Como $d(g(\bar{\sigma}_1^n) \cup f(\partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1})) < \tau$, então $g(\bar{\sigma}_1^n) \cup f(\partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1}) \subset V_i' \subset V_i$, para algum i .

Em $\mathbb{R}^n$ vale que $\rho(\varphi_i f(x_0), \varphi_i g(x_0)) < \delta_n$, para todo $x_0 \in \partial\sigma_1^n - \bar{\sigma}_1^{n-1}$ e $\rho(\varphi_i f(x_1), \varphi_i g(x_1)) < \delta_{n-1}$, para todo $x_1 \in \bar{\sigma}_1^{n-1}$.

A todo $x_1 \in \sigma_1^{n-1}$ fica associado, de maneira contínua, um comprimento $\lambda(x_1)$, com $0 < \lambda(x_1) < \delta_{n-1}$ e $\lambda(x_1) = |\overrightarrow{\varphi_i g(x_1) \varphi_i f(x_1)}|$, para $x_1 \in \bar{\sigma}_1^{n-1}$.

Sendo $\lambda(x_0) = |\overrightarrow{\varphi_i g(x_0) \varphi_i f(x_0)}|$, para todo $x_0 \in \partial\sigma_1^n - \sigma_1^{n-1}$. Define-se $f(x_t)$, $0 \leq t \leq 1$, por

$$\overrightarrow{0\varphi_i f(x_t)} = \overrightarrow{0\varphi_i g(x_t)} + [1 + t(\frac{\lambda(x_1)}{\lambda(x_0)} - 1)] \overrightarrow{\varphi_i g(x_0) \varphi_i f(x_0)}.$$

Como $\delta_n < 1/2$ e $\delta_{n-1} < 1/2$, então

$$|\overrightarrow{0\varphi_i f(x_t)}| \leq |\overrightarrow{0\varphi_i g(x_t)}| + |t \lambda(x_1)| + |(1-t)| \overrightarrow{\varphi_i g(x_0) \varphi_i f(x_0)}| \leq 1, \text{ ou seja,}$$

para todo x_t , $0 \leq t \leq 1$, o vetor $\overrightarrow{0\varphi_i f(x_t)}$ está inteiramente contido em $B_1^n(0)$. Com isso f está estendida continuamente em $\bar{\sigma}_1^n$, com $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_n$ e em σ_1^{n-1} com $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_{n-1}$.

De modo análogo, seguindo a sequência, a aplicação f fica determinada sobre $\sigma_2^n, \dots, \sigma_{r-1}^n$.

Por enquanto, sobre $\partial\sigma_r^n$ a aplicação f satisfaz $0 < \rho(f, g) < \varepsilon_{n-1}$.

Pelo lema III.2.2 estendemos f em σ_r^n de maneira que as afirmações da proposição III.2.6 estejam verificadas. Como $\tau/4 < \alpha$, teremos pelo lema III.2.3 que f será homotópica a g em A . $\blacklozenge$

Quando $A = K$, ou seja, ∂A é vazio, e $\tau/2 < \varepsilon$, teremos:

Proposição III.2.7 (teorema de aproximação) : Para cada aplicação g de X em Y (com dimensão de X e Y no mínimo 2) e todo $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação f , ε -homotópica a g , tal que f e g têm no máximo um ponto de coincidência.

No decorrer da construção abaixo, a partir de um par de aplicações com coincidências isoladas será feita a união de dois pontos de coincidência, sempre que estes surgirem e estiverem na mesma classe de coincidência. Para este fim deve ser **admitido que a dimensão da variedade é $n \geq 3$** .

Seja (f_1, f_2) um par de aplicações construído segundo a proposição III.2.5, ou seja, têm apenas coincidências isoladas contidas no interior de simplexes maximais de K .

Sejam p e q dois pontos pertencentes a mesma classe de coincidência. Existe assim um caminho C de p a q para o qual $f_1 C \cong f_2 C$. Esse caminho pode ser escolhido de maneira que, a exceção dos pontos p e q , não haja pontos de coincidência. Seja $C(\xi)$, $0 \leq \xi \leq 1$, uma representação paramétrica de C .

Proposição III.2.8 : Existem duas aplicações $h_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$, do quadrado unitário $E = \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ em Y (com dimensão $n \geq 3$) satisfazendo

$$\begin{aligned} h_i(\xi, 1) &= f_i(C(\xi)); 0 \leq \xi \leq 1; i = 1, 2. \\ h_1(\xi, 0) &= h_2(\xi, 0); 0 \leq \xi \leq 1; i = 1, 2. \\ h_1(0, \eta) &= h_2(0, \eta) = f_1(p); 0 \leq \eta \leq 1. \\ h_1(1, \eta) &= h_2(1, \eta) = f_1(q); 0 \leq \eta \leq 1. \\ (4) \quad h_1(\xi, \eta) &\neq h_2(\xi, \eta); 0 < \xi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1. \end{aligned}$$

demonstração:

Seja $C' = \{c'(\xi), 0 \leq \xi \leq 1\}$ uma curva de $f_1(p)$ a $f_1(q)$ para a qual existem homotopias $h_i : I \times I \rightarrow X$, $i = 1, 2$, tais que $C' \xrightarrow{h_1} f_1 C$, $C' \xrightarrow{h_2} f_2 C$.

Portanto, $h_i(\xi, 0) = c'(\xi)$ ($i = 1, 2$). Então, certamente as aplicações $h_i(\xi, \eta)$ satisfazem às condições acima, exceto (4).

Seja B o conjunto de todos pontos de E com $\xi = 0$, $\xi = 1$ ou $\eta = 0$.

Decomponha E simplicialmente de maneira que $d(h_i(\sigma^2)) < \varepsilon_0/2$, para todo $\sigma^2 \in E$ e tal que todo 1-simplexo, quando não inteiramente contido em ∂E , não tenha mais de um vértice em comum com ∂E . Consequentemente, nenhum 2-simplexo tem mais que uma aresta em comum com ∂E .

Seja A o conjunto de todos 2-simplexos fechados de E , que contém pelo menos um ponto de coincidência de h_1 e h_2 . Sobre $\text{int } A$, h_1 será modificada para h_1' de maneira que h_1' e h_2 satisfaçam todas as condições acima.

Em A vale que $\rho(h_1, h_2) < \varepsilon_0$, isto pode ser mostrado de modo análogo àquele na prova da proposição III.2.4.

Construiremos h_1' tal que, exceto para os pontos de B , sobre A valerá $h_1' \neq h_2$.

Sobre todos os $\sigma^0 \in A$, h_1' será escolhida de forma que $0 < \rho(h_1', h_2) < \varepsilon_0$. Daí, h_1' será passo a passo definida como no lema III.2.1 em todos $\sigma^1 \in A$, para os quais vale $\partial\sigma^1 \cap B = \emptyset$, podemos ainda supor $0 < \rho(h_1', h_2) < \varepsilon_1$.

No caso $\sigma^1 \in A$ e $\partial\sigma^1 \cap B \neq \emptyset$, temos que $\partial\sigma^1 \cap B$ é constituído por um vértice σ_1^0 e seja σ_2^0 o segundo vértice de σ^1 .

Em σ_2^0 a aplicação h_1' já está definida de modo a não coincidir com g e valendo $\rho(h_1', h_2) < \varepsilon_0$.

Como $d(h_1'(\sigma_2^0) \cup h_2(\bar{\sigma}^1)) < \tau$, então $h_1'(\sigma_2^0) \cup h_2(\bar{\sigma}^1) \subset V_i'$, para algum i . Seja O a origem de $\mathbb{R}^n$.

Para $x \in \sigma^1$, existe t , $0 \leq t \leq 1$, tal que $x = t\sigma_2^0 + (1 - t)\sigma_1^0$.

Define-se h_1' por

$$\overrightarrow{O\varphi_1 h_1'(x)} = \overrightarrow{O\varphi_1 h_2(x)} + t \overrightarrow{\varphi_1 h_2(\sigma_2^0) \varphi_1 h_1'(\sigma_2^0)}$$

Como $\|\varphi_1 h_2(\sigma_2^0) - \varphi_1 h_1'(\sigma_2^0)\| < \delta_1 < 1/2$, então todos esses pontos $\varphi_1 h_1'(x)$ estão em $B_1^n(0)$.

Então, h_1' é contínua sobre $\bar{\sigma}^1$ e livre de pontos de coincidência, com exceção de σ_1^0 . Assim a aplicação h_1' já está definida em todo $\sigma^1 \in A$.

Se $\sigma^2 \in A$ e $\partial\sigma^2 \cap B = \emptyset$, h_1' será estendida continuamente, como no lema III.2.1 (já que $n \geq 3$), sobre todos σ^2 satisfazendo ainda $0 < \rho(h_1', h_2) < \varepsilon_2$.

No caso $\sigma^2 \in A$ e $\partial\sigma^2 \cap B \neq \emptyset$, temos que $\partial\sigma^2 \cap B$ é constituído por um vértice σ_1^0 ou por uma aresta σ_0^1 .

No primeiro caso, seja $p = \sigma_1^0$ e no segundo, p um ponto arbitrário, interior a σ_0^1 .

No segundo caso, σ^2 é representado por um disco através de um homeomorfismo φ , no primeiro caso, seja φ a identidade.

Seja $x_0 \in \partial\sigma^2$ e x_t um ponto de $\overrightarrow{\varphi x_0 \varphi p}$ com $\varphi x_t = t\varphi x_0 + (1-t)\varphi p$, então

através de
$$\overrightarrow{0\varphi_1 h_1'(x_t)} = \overrightarrow{0\varphi_1 h_2(x_t)} + t\overrightarrow{\varphi_1 h_2(x_0)\varphi_1 h_1'(x_0)}$$

h_1' fica definida de modo que (h_1', h_2) é contínuo sobre σ^2 e livre de pontos de coincidência com a exceção de $\partial\sigma^2 \cap B$. ♦

Proposição III.2.9 : Existe um caminho D de p a q homotópico a C que admite uma vizinhança fechada $\overline{U}(D)$ de D em X , a qual, a menos de p e q , não possui coincidências, e pode ser representada, através de um homeomorfismo φ , sobre a ε -vizinhança $U(I, \varepsilon)$ de um segmento I de $\mathbb{R}^n$, com $\varphi(D) = I$.

demonstração:

Sejam p e $q \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ pertencentes a mesma classe de equivalência. Logo existe um caminho C de p a q tal que $f_1(C) \cong f_2(C)$. Além disso, existem σ_1^n e σ^n simplexos maximais de K tais que $p \in \sigma_1^n$ e $q \in \sigma^n$.

Considere um caminho D de p a q consistindo de união de segmentos tal que o interior de cada segmento está na realização geométrica de um simplexo maximal de K , cada ponto final dos segmentos está na realização geométrica de um simplexo de K de dimensão $n-1$. Além disso, $D \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = \{p, q\}$ e $D \cong C$.

A construção do caminho D encontra-se no apêndice.

Não é difícil ver que D possui uma vizinhança nas condições desejadas.

Como $D \cong C$, temos $f_1(D) \cong f_1(C) \cong f_2(C) \cong f_2(D)$.

Portanto a propriedade de p e q de através de C pertencerem à mesma classe de coincidência, valerá também através de D . ♦

Denotaremos D novamente por C .

Para todo $z \in \partial \bar{U}(C)$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, define-se uma função contínua $s(z, \lambda)$ a valores em $\bar{U}(C)$ da seguinte maneira :

De acordo com o proposição III.2.9, temos uma aplicação topológica φ de $\bar{U}(C)$ sobre $\bar{U}(I, \varepsilon)$, $\varphi(C) = I$. Para cada $z \in \partial \bar{U}(C)$ fica univocamente determinado um ponto $z' \in C$, tal que $\rho(\varphi z, \varphi z')$ seja mínima; seja então $s(z, \lambda) \in \bar{U}(C)$ tal que $\varphi(s(z, \lambda)) = \lambda \varphi z + (1 - \lambda) \varphi z' \in \overrightarrow{\varphi z \varphi z'}$.

Para $x \in C$ teremos $x = s(z, 0)$, para algum $z \in \partial U(C)$. Definimos $\xi(x)$ tal que $s(z, 0) = C(\xi(x))$.

Proposição III.2.10 : Existe um par de aplicações (g_1, g_2) homotópico ao par (f_1, f_2) e um conjunto conexo $\mathcal{G} \subset U(C)$, com

$$(5) \quad \begin{aligned} &g_1 \neq g_2, U(C) - \mathcal{G}; \\ &\rho(g_1(x), g_2(x)) < \varepsilon_0, \text{ para } x \in \mathcal{G}; \end{aligned}$$

demonstração:

Definiremos primeiro (g_1, g_2) e depois $\mathcal{G} \subset U(C)$. Verificaremos então que as condições acima são satisfeitas.

1. Definição de (g_1, g_2) :

Seja $U_{1/2}(C)$ o conjunto dos pontos $x = s(z, \lambda) \in U(C)$ com $0 \leq \lambda \leq 1/2$ e sejam

$$(6) \quad g_i(x) = \begin{cases} h_i(\xi(x), 2\lambda) & \text{para } x \in \bar{U}_{1/2}(C); \\ f_i(s(z, 2\lambda - 1)) & \text{para } x \in \bar{U}(C) - U_{1/2}(C); \\ f_i(x) & \text{para } x \in X - U(C); \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Nessas condições as g_i são contínuas em todo X .

2. Definição 9 :

Uma vez que para $\xi = 0$, $\xi = 1$ ou $\eta = 0$ vale que $\rho(h_1(\xi, \eta), h_2(\xi, \eta)) = 0$. Existe δ , $0 < \delta < 1/2$, tal que

$$(7) \quad \rho(h_1(\xi, \eta), h_2(\xi, \eta)) < \varepsilon_0/3 \quad \text{para } \xi < \delta, \xi > 1-\delta \text{ ou } \eta < \delta.$$

Em vista da continuidade uniforme de (f_1, f_2) em X , existe um $\gamma > 0$, de maneira que

$$(8) \quad \rho(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon_0/3 \quad \text{para todos } x, y \in X, \text{ com } \rho(x, y) < \gamma, \quad i = 1, 2.$$

Além disso, podemos assumir, diminuindo $U(C)$ se necessário, que para $x, y \notin C$, dados por $x = s(z_x, \lambda_x)$ e $y = s(z_y, \lambda_y)$ com $z_x = z_y$ tem-se

$$(9) \quad \rho(x, y) < \gamma.$$

Então $\mathfrak{V} = \{x \in U(C) / \xi(x) < \delta \text{ ou } \xi(x) > 1-\delta \text{ ou } 0 \leq \lambda < \delta/2\}$.

Por construção $\mathfrak{V}$ é conexo.

3. As aplicações g_i são, respectivamente homotópicas às f_i , $i = 1, 2$:

Para $x \notin C$, $x = s(z, \lambda)$ e $0 \leq \omega \leq 1/2$ defina

$$g_i(x, \omega) = \begin{cases} h_i(\xi(x), 2\lambda + 2(1-2\lambda)\omega) & \text{para } x \in U_{1/2}(C); \\ g_i(x) & \text{para } x \in X - U_{1/2}(C); \end{cases}$$

Para $\omega = 1/2$:

Por (6) podemos escrever $g_i(x, 1/2)$, reparametrizada por $\theta = \theta(x)$, $0 \leq \theta \leq 1$

$$g_i(x, 1/2) = \begin{cases} h_i(s(z, \theta)) & \text{para } x \in U(C); \\ g_i(x) & \text{para } x \in X - U(C); \end{cases}$$

Para $1/2 \leq \omega \leq 1$ seja

$$g_i(x, \omega) = \begin{cases} f_i(s(z, \theta + 2(\omega - 1/2)(\lambda - \theta))) & \text{para } x \in U(C); \\ f_i(x) & \text{para } x \in X - U(C); \end{cases}$$

isto nos dá a transição contínua de $g_i(x, 1/2)$ para $g_i(x, 1) = f_i(x)$.

Para $x \in C$, temos

$$g_i(x, \omega) = \begin{cases} h_i(\xi(x), 2\omega) & \text{para } 0 \leq \omega \leq 1/2; \\ h_i(\xi(x), 1) & \text{para } 1/2 \leq \omega \leq 1; \end{cases} \quad \text{a já definida homotopia.}$$

4. Em $U(C) - \mathcal{G}$, $g_1 \neq g_2$:

Em $U(C) - \mathcal{G}$, $\delta \leq \xi \leq 1-\delta$ e $\delta/2 \leq \lambda \leq 1$.

Para $\delta/2 \leq \lambda \leq 1/2$, $g_1(x) = h_1(\xi, 2\lambda)$ e $g_2 = h_2(\xi, 2\lambda)$. Assim, por (4) tem-se $g_1 \neq g_2$.

Para $1/2 \leq \lambda \leq 1$, $g_i = f_i(s(z, 2\lambda-1))$, logo $g_1 \neq g_2$.

5. Em $\mathcal{G}$ vale $\rho(g_1, g_2) < \varepsilon_0$.

Isto resulta da seguinte maneira:

a) Seja $\xi < \delta$ ou $\xi > 1-\delta$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Então, para $0 \leq \lambda \leq 1/2$ vem de (6) e (7) que $\rho(g_1, g_2) < \varepsilon_0$.

Para $1/2 \leq \lambda \leq 1$ por (7), (8) e (9) vem que:

$$\begin{aligned} \rho(g_1(x), g_2(x)) &\leq \rho(f_1(s(z, 2\lambda-1)), f_1(s(z, 0))) + \rho(f_1(s(z, 0)), f_2(s(z, 0))) \\ &\quad + \rho(f_2(s(z, 0)), f_1(s(z, 2\lambda-1))) < \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0/3 = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

b) Seja $\delta \leq \xi \leq 1-\delta$ e $0 \leq \lambda \leq \delta/2$. Então $g_i(x) = h_i(\xi, 2\lambda)$, de (7), já que $2\lambda < \delta$, temos que $\rho(g_1(x), g_2(x)) \leq \varepsilon_0/3$. ♦

Lema III.2.11 : Existe um par de aplicações (f'_1, f'_2) homotópico ao par (f_1, f_2) relativamente ao conjunto $U(C)$ tal que f'_1 e f'_2 têm no máximo um ponto de coincidência em $U(C)$.

demonstração:

Considero (g_1, g_2) o par homotópico a (f_1, f_2) obtido na proposição III.2.10.

Seja $\mathfrak{R}$ um subconjunto conexo de $\mathfrak{G}$ que contém todos pontos de coincidência de g_1 e g_2 em $\mathfrak{G} \subset U(C)$. A distância de $\mathfrak{R}$ ao fechado $X - \mathfrak{G}$ é $\mu > 0$.

Seja K_μ uma retriangularização de X tal que $d(\sigma^n) < \mu$, para todo $\sigma^n \in K_\mu$.

Seja A o conjunto de todos os n -simplexos fechados de K_μ que têm pelo menos um ponto em comum com $\mathfrak{R}$.

Então, $A \subset \mathfrak{G}$ e A satisfaz as condições da proposição III.2.6 : A é homogêneo, em ∂A vale que $0 < \rho(g_1, g_2) < \varepsilon_0/2$, $\partial A \subset \mathfrak{G}$; e ∂A é disjunto de $\mathfrak{R}$.

Para comprovar que A é conexo, é suficiente mostrar que $\text{int}A$ é conexo. Uma vez que todo n simplexo fechado de A tem pelo menos um ponto em comum com o conjunto conexo $\mathfrak{R} \subset \text{int} A$, então $\text{int}A$ será conexo.

Seja agora $f'_2 = g_2$ em X e também $f'_1 = g_1$ em $X - A$. Então f'_1 e f'_2 são livres de pontos de coincidência em $U(C) - A$ e pela Proposição III.2.6, f'_1 pode ser estendida sobre A de tal sorte que aí surja no máximo um ponto de coincidência.

Da proposição III.2.6 segue que sobre A vale $\rho(f'_1, g_2) < \tau/4$, de (5) segue que $\rho(g_1, g_2) < \tau/4$, portanto temos que $0 < \rho(g_1, f'_1) < \tau/2$. Uma vez que foi feita a escolha $\tau/2 < \alpha$ e $f'_1 = g_1$ em $X - A$, vale que $\rho(g_1, f'_1) < \alpha$ em todo X . Daí, pelo lema III.2.3, g_1 é homotópica a f'_1 . ♦

Do lema III.2.11 e do teorema II.2.5 segue :

Teorema III.2.12 (Número mínimo de pontos de coincidência) : Dadas X e Y variedades de dimensão $n \geq 3$, orientáveis, compactas, conexas e sem bordo e aplicações $f, g : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$. Então, existem $f', g' : X \rightarrow Y$ homotópicas a f e a g , respectivamente, tais que $\text{Coin}(f', g')$ contém exatamente $N(f, g)$ pontos.

APÊNDICE I

§1 Demonstração do Lema III.2.3.

Denotamos por $\overline{\sigma}$ o simplexo fechado, σ o seu interior e $\partial\sigma$ o seu fecho.

O menor simplexo fechado que contém x será denotado por $\text{Car } x$ e o seu interior por $\text{car } x$.

$\text{St}(\overline{\sigma})$ é o conjunto de simplexos $\tau \in K$ cujo fecho contém σ . Sua realização geométrica $|\text{St}(\overline{\sigma})| = \bigcup \{|\tau| \mid \tau \in \text{St}(\overline{\sigma})\}$ é aberto de K .

Seja X um espaço topológico e K um complexo simplicial. Considere aplicações $f, g : X \rightarrow |K|$.

Se $\text{Car } f(x) \cap \text{Car } g(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, então dizemos que f e g possuem a propriedade S em X (propriedade "Short" homotopy).

Teorema A.I.1 : Seja K um complexo simplicial finito e conexo. Definimos $M = \{(x,y) \in |K| \times |K| \mid \text{Car } x \cap \text{Car } y \neq \emptyset\}$. Então M é um aberto de $|K| \times |K|$ e existe uma aplicação (α -deformação) $\alpha : M \times I \rightarrow |K|$ com as seguintes propriedades:

- (1) $\alpha(x,y,0) = x$ e $\alpha(x,y,1) = y$;
- (2) $\alpha(x,x,t) = x$, para todo $t \in I$;
- (3) $\alpha(x,y,t) \neq x$, se $x \neq y$ e $t \neq 0$;
- (4) $\text{Car } x \cap \text{Car } \alpha(x,y,t) \neq \emptyset$;
- (5) Para qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $(x,y) \in M$ e $\rho(x, \alpha(x,y,t)) < \varepsilon$, quando $t \in I$.

Lema III.2.3. Sejam X um espaço topológico e K um complexo simplicial então, existe um número $\alpha > 0$ tal que se $f, g : X \rightarrow |K|$ satisfazem $\rho(f(x), g(x)) < \alpha$, então f e g são homotópicas.

demonstração

Os open Stars $|St(v)|$, para todo $v \in K$, formam uma cobertura aberta de $|K|$. Seja $\alpha > 0$ o número de Lebesgue associado a esta cobertura.

Assim, vale que se $\rho(f(x), g(x)) < \alpha$, então $f(x), g(x) \in |St(v)|$, para algum $v \in K$, ou seja, $(f(x), g(x)) \in M$.

Defino $H: X \times I \rightarrow |K|$, por $H(x, t) = \alpha(f(x), g(x), t)$. Pelo teorema A.I.1 H é contínua, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$.

Logo $f \cong g$.

Além disso, se $f(x) = g(x)$, então $H(x, t) = f(x)$ para todo $t \in I$. ◆

Para maiores detalhes sobre esse assunto ver [4] e [6].

§2 Construção do caminho D .

Sejam p e $q \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ pertencentes a mesma classe de equivalência. Assim existe um caminho C de p a q tal que $f_1(C) \cong f_2(C)$. Além disso, existem σ_1^n e σ^n simplexos maximais de K tais que $p \in \sigma_1^n$ e $q \in \sigma^n$.

Nosso objetivo agora é construir um caminho D de p a q consistindo da união de segmentos tal que o interior de cada segmento está na realização geométrica de um simplexo maximal de K , cada ponto final dos segmentos está na realização geométrica de um simplexo de K de dimensão $n - 1$.

Além disso, $D \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = \{p, q\}$ e $D \cong C$.

Seja $t_1 > 0$ tal que $C_1 = \{ C(t) / 0 \leq t \leq t_1 \}$ está no fecho do simplexo maximal σ_1^n de K cuja realização geométrica contém p e $C(t_1) \in \partial\sigma_1^n$. Considere um segmento de reta $D_1(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, começando em p tal que $D_1 \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = p$, $D_1(t) \in \sigma_1^n$ para todo $0 \leq t < t_1$, $\text{Car} D_1(t_1)$ é de dimensão $n - 1$, e o fecho de sua realização geométrica contém $C(t_1)$.

Sejam $t_2 > t_1$, e um simplexo maximal $\sigma_2^n \in K$ tais que

$$C_2 = \{ C(t) / t_1 \leq t \leq t_2 \} \subseteq \overline{\sigma}_2^n \text{ e } C(t_2) \in \partial \sigma_2^n.$$

Se $D_1(t_1) \in \overline{\sigma}_2^n$, então existe um segmento de reta $D_2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, começando em $D_1(t_1)$ tal que $D_2 \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = \emptyset$, $D_2(t) \in \sigma_2^n$ para todo $t_1 < t < t_2$, onde $\text{Car} D_2(t_2)$ é de dimensão $n - 1$, e o fecho de sua realização geométrica contém $C(t_2)$.

Entretanto, se $\text{Car} C(t_1)$ for um vértice de K , então não será necessariamente verdade que $D_1(t_1) \in \overline{\sigma}_2^n$. Mas, como $|K|$ é a realização geométrica de uma variedade, logo existem simplexos maximais $\sigma_{21}^n, \dots, \sigma_{2r}^n$ de K em $\text{StCar} C(t_1)$

com $D_1(t_1) \in \overline{\sigma}_{21}^n$ e $\overline{\sigma}_{2j}^n \cap \overline{\sigma}_{2j+1}^n$ de dimensão $n - 1$, para $j = 1, \dots, r - 1$ e

$$\overline{\sigma}_{2r}^n = \overline{\sigma}_2^n.$$

Portanto podemos nesse caso, encontrar um caminho $D_2(t)$, $t_1 < t < t_2$, começando em $D_1(t_1)$, construído por segmentos de reta que (exceto pelos pontos finais) cada ponto está numa realização geométrica de um simplexo maximal de K , e os pontos finais dos segmentos estão em realizações geométricas de simplexos maximais de dimensão $n - 1$.

Além disso, $D_2 \cap \text{Coin}(f_1, f_2) = \emptyset$, e o fecho de $\text{Car} D_2(t_2)$ contém $C(t_2)$.

Continuando desta maneira, obtemos o caminho requerido

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k.$$

D e C são homotópicos por uma homotopia de segmentos.

APÊNDICE II

Construção da função a

Suponha $p \in \text{int} X$ uma coincidência isolada tal que $f(p) = g(p) = q \in \text{int} Y$ e $i_B(p; f, g) = 0$. Sejam $U \subseteq \text{int} X$ e $V \subseteq \text{int} Y$ vizinhanças de p e q respectivamente para as quais existem homeomorfismos preservando orientação $h : (\bar{U}, p) \rightarrow (B^n, 0)$ e $k : (\bar{V}, q) \rightarrow (B^n, 0)$ sobre a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, onde 0 denota a origem. Como p é uma coincidência isolada, podemos escolher U e V tais que $U \cap \text{Coin}(f, g) = \{p\}$ e, como f, g são contínuas, $f(\bar{U}) \cup g(\bar{U}) \subset V$. Identificando $\bar{U}$ e $\bar{V}$ com B^n via os homeomorfismos h e k , as aplicações podem ser vistas como $f, g : B^n \rightarrow B^n$ tais que $f(0) = g(0) = 0$ e $B^n \cap \text{Coin}(f, g) = \{0\}$.

Seja $\phi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ tal que $\phi(x) = \frac{[g(x) - f(x)]}{\|g(x) - f(x)\|}$, pelo lema II.2.6 $i_B(p; f, g) = \text{grau} \phi$, desta forma ϕ é de grau zero e, portanto ϕ pode ser estendida para a aplicação $\Phi : B^n \rightarrow S^{n-1}$ (lema II.2.6).

Definimos $f'(x) = g(x) - a(x) \Phi(x)$, onde $a : B^n \rightarrow (0, \infty)$ é contínua, $a(x) = \|g(x) - f(x)\|$, para $x \in S^{n-1}$ e tem a propriedade que $a(x)$ é pequeno suficiente para que $f'(x) \in B^n$.

Nessas condições, temos que $H(x, t) = tf(x) + (1-t)f'(x)$ define uma homotopia entre f' e f rel S^{n-1} .

Nosso objetivo agora é construir tal aplicação $a : B^n \rightarrow (0, +\infty)$.

Para cada $x \in B^n$, seja $k(x)$ tal que $\|g(x) - k(x)\Phi(x)\| = 1$

$$\langle g(x) - k(x)\Phi(x), g(x) - k(x)\Phi(x) \rangle = 1$$

$$\|g(x)\|^2 - 2k(x)\langle g(x), \Phi(x) \rangle + (k(x))^2\|\Phi(x)\|^2 = 1$$

Vamos considerar $k = k(x)$

$$k^2 - 2k \langle g(x), \Phi(x) \rangle + \|g(x)\|^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 [\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 - \|g(x)\|^2 + 1]$$

$$\text{Como } \|g(x)\|^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - \|g(x)\|^2 \geq 0 \therefore \Delta \geq 0.$$

$$\text{Assim } k(x) = \frac{2 \langle g(x), \Phi(x) \rangle \pm 2\sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 - \|g(x)\|^2 + 1}}{2}$$

$$\text{Ou melhor, } k(x) = \langle g(x), \Phi(x) \rangle \pm \sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 - \|g(x)\|^2 + 1}$$

$$\text{Observe que } \langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 \leq \langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 + 1 - \|g(x)\|^2$$

$$-\sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 - \|g(x)\|^2 + 1} \leq \langle g(x), \Phi(x) \rangle \leq \sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 + 1 - \|g(x)\|^2}$$

Logo $k(x) = \langle g(x), \Phi(x) \rangle + \sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 + 1 - \|g(x)\|^2}$,
além de contínua é sempre positiva.

Observe que $k(0) = 1$.

Seja $\lambda(x) = \|f(x) - g(x)\| \geq 0$. Vamos supor $x \in S^{n-1}$.

$$\text{Então, } \phi(x) = \frac{[g(x) - f(x)]}{\|g(x) - f(x)\|} \text{ e } \|g(x) - \lambda(x) \frac{[g(x) - f(x)]}{\|g(x) - f(x)\|}\| = \|f(x)\| < 1.$$

Assim pelo estudo da parábola, $\lambda(x) \leq k(x)$, para todo $x \in S^{n-1}$

Desta forma obtivemos $k : B^n \rightarrow [0, \infty)$ contínua com
 $k(0) = 1$;

$$k(x) = \langle g(x), \Phi(x) \rangle + \sqrt{\langle g(x), \Phi(x) \rangle^2 + 1 - \|g(x)\|^2};$$

$$\|g(x) - k(x)\Phi(x)\| = 1, \forall x \in B^n;$$

$$\lambda(x) = \|g(x) - f(x)\| \leq k(x), \forall x \in S^{n-1}.$$

Considere as aplicações

$$q : B^n - B_\varepsilon \rightarrow (0, \infty) \text{ tal que } q(x) = \lambda(x/\|x\|),$$

onde B_ε é a bola de centro 0 e raio ε

$$q' : B^n - B_\varepsilon \rightarrow [0, \infty) \text{ tal que } q'(x) = \min\{q(x), k(x)\}$$

Seja $s : B^n \rightarrow [0,1]$ contínua tal que $s|_{B_\varepsilon} \equiv 0$ e $s|_{S^{n-1}} = 1$.

$$\text{Defina } a(x) = \begin{cases} s(x)q'(x) + (1-s(x))k(x) & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Observe que

1) a é contínua, pois $a(x) = k(x)$, $\forall x \in B_\varepsilon - \{0\}$ e $k(0) = 1$.

2) $a(x) \leq k(x)$, $\forall x \in B^n$ e $a(x) = \lambda(x)$, $\forall x \in S^{n-1}$ e $\|g(x) - a(x)\Phi(x)\| < 1$. ♦

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Alexandoff, H. Hopf, Topologie I, Springer, Berlin, 1935.
- [2] R. F. Brown, H. Schirmer, Nielsen Coincidence Theory and Coincidence-Producing Maps for Manifolds with Boundary - Topology - Applications 46 (1992), 65-79.
- [3] R. F. Brown, On The Nielsen fixed Point Theorem for Compact Maps, Duke Math. J. 36 (1969), 699 - 708.
- [4] _____, The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott-Foresman, 1971.
- [5] D. L. Gonçalves, J. C. S. Kiihl, Teoria do Índice, 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1983.
- [6] T-H. Kiang, The Theory of Fixed Point Classes, Science Press, Spring - Verlag, 1979.
- [7] S. Lefschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc., Colloquium Vol. 27, 1942.
- [8] W. S. Massey, Singular Homology Theory, Spring - Verlag, 1980.
- [9] M. Nakaoka, Coincidence Lefschetz Numbers for a Pair of Fiber Preserving Maps, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 751 -779.
- [10] E. Oliveira, Teoria de Nielsen para Coincidência e Algumas Aplicações. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

- [11] H. Schirmer , Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten , J. Reine und Angew. Mathematik **194** (1955) , 21 - 39.
- [12] U. Scholz , The Nielsen Fixed Point Theory for Noncompact Spaces , Rocky Mt. J. Math. **4** (1974) , 81 - 87.
- [13] J. Vick , Homology Theory , Academic Press , New York, 1973.
- [14] F. Wecken , Koinzidenzpunkten.III, Math. Ann.**188** (1942), 544-577.