Sobre as T-álgebras de posto 3
e questões correlatas

Raúl Benavides Gallardo

Tese apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a obtenção de grau de Doutor

em

Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Roberto Celso Fabricio Costa

São Paulo, Setembro de 1995

Sobre as T-álgebras de posto 3 e questões correlatas

Raúl Benavides Gallardo

Tese apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a obtenção de grau de Doutor

em

Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Roberto Celso Fabricio Costa

São Paulo, Setembro de 1995

Sobre as T-álgebras de posto 3 e questões correlatas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Raul Benavides e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 13 de novembro de 1995.

Banca Examinadora

• Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador)	IME-USP
• Prof. Dr. Luis Antonio Peresi	IME-USP
• Prof. Dr. Cristián Mallol Comandari	Montpellier III e UFRO
• Prof. Dr. Antonio José Engler	IMECC-UNICAMP
• Profa. Dra. Ires Dias	ICMSC-USP

*Á minha esposa Ticka
e as minhas filhas
Andrea e Loreto*

Abstract

This monograph concerns basically train algebras of rank 3 over a field of characteristic not 2 but some related questions are also treated. We study homotopy and quasi-isotopy of train algebras of rank 3 and the influence of an associative bilinear form on these algebras. Subsequently we study the influence of the fact that morphisms of Peirce are automorphisms. This imposes some conditions on the algebra. This is also one chapter devoted to train algebras of rank 3 over a field of characteristic 2.

Resumo

Esta tese trata basicamente de train álgebras de posto 3 sobre um corpo de característica diferente de 2. Estudamos homotopia e quasi-isotopia de train álgebras de posto 3 e a influência de uma forma bilinear associativa sobre estas álgebras. Em seguida, estudamos a influência do fato que morfismos de Peirce são automorfismos. Isto impõe algumas condições sobre a álgebra. Existe também um capítulo dedicado às train álgebras de posto 3 sobre um corpo de característica 2.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a meu orientador, Professor Roberto Costa, pela sugestão do assunto, pelo encorajamento, apoio constante e decidida orientação que dele recebi durante todo o programa de Doutorado. Foi uma etapa importante de minha vida, ter compartilhado com tão excelente pessoa e pesquisador.

A meus amigos, Abdón Catalán com quem compartilhei penas e alegrias durante os anos de nossos estudos de posgraduação. A Rodolfo Baeza, com quem trabalhamos e publicamos vários artigos de nossa área e pelas contínuas conversas desses e outros temas. A Cristián Mallol, por haver-me incentivado fortemente a continuar meu trabalho em muitos momentos difíceis. Pelas contínuas conversas e discussões de minha tese. Além disso, ele me sugeriu estudar os assuntos que aparecem no capítulo 5 deste trabalho. Por tudo isto eu o considero meu segundo orientador.

Não posso esquecer de agradecer em diversos sentidos a meus amigos César Burgueño, María Teresa Alcalde, Germán Alamos (que era Chefe do Departamento quando iniciei meus estudos no Brasil), Pedro Valenzuela, Hernán Burgos e em geral a todos os colegas do Departamento de Matemática da Universidad de La Frontera. A meus queridos amigos do IME, Henrique Guzzo, Luiz Gonzaga e Luiz Peresi (que também teve a paciência de escutar-me, sugerir e discutir vários problemas relativos a nossa área).

Deixei para o final meus mais sinceros agradecimentos para a CNPq, organismo que financiou meus estudos no Brasil e a todos aqueles que foram meus professores no IME.

Raúl Benavides Gallardo

Conteúdo

1	Preliminares	8
1.1	Introdução	8
1.2	Álgebras ponderadas	11
2	T-álgebras de posto 3 sobre corpos de característica 2	14
3	Formas bilineares associativas em algumas álgebras básicas	20
3.1	Formas associativas	20
3.2	Álgebras de Bernstein de ordem k	21
3.3	T-álgebras de posto 3	24
4	Alguns problemas na teoria das álgebras genéticas	28
4.1	Definições	28
4.2	Sobre os idempotentes em álgebras de Schafer	32
4.3	Imersões em T-álgebras	36
5	Morfismos de Peirce em T-álgebras de posto 3	40
5.1	Automorfismos	40
5.2	A álgebra de derivações $Der(\mathbf{A})$	47
6	Homótopas de T-álgebras de posto 3	54
6.1	Introdução	54
6.2	Homótopas de T-álgebras de posto 3	55
7	Quase-isotopia em T-álgebras de posto 3	62
7.1	Introdução	62

7.2	Quase-isotopia	63
8	Sobre as T-álgebras de posto 3 e tipo $(4, n-3)$	69
8.1	Introdução	69
8.2	T-álgebras de tipo $(4, n-3)$	71
	Bibliografia	80
	Índice de notações	82

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

A introdução de métodos algébricos em genética de populações ocorreu em 1939 com os artigos de I.M.H.Etherington (veja referência [6]). Ele definiu três tipos de álgebras não associativas, a saber : álgebras ponderadas, T-álgebras e T-álgebras especiais , que aparecem mais ou menos naturalmente a partir do simbolismo da genética.

As T-álgebras e as T-álgebras especiais são por definição álgebras ponderadas. Etherington demonstrou que a classe das T-álgebras inclui aquela das T-álgebras especiais e estudou algumas propriedades das T-álgebras (ver [6] e [7]).

O conceito de álgebra genética, que é intermediário entre T-álgebra e T-álgebra especial, foi introduzido por Schafer [20], em 1949. Esta definição, que é baseada na álgebra de multiplicações da álgebra básica, provou ser mais satisfatória que aquela de T-álgebra especial no sentido de que a classe das álgebras genéticas incluía a maioria das álgebras que descreviam os modelos genéticos estudados até então. No entanto, para uma álgebra dada era difícil, em geral, mostrar que ela era uma álgebra genética.

Durante as décadas de 50 e 60, quase nada se fez no assunto. Nos anos 70 Gonshor [10] obteve uma definição de álgebra genética essencialmente equivalente àquela dada por Schafer que permite trabalhar com este objeto algébrico, mesmo quando a dimensão da álgebra é grande. O conceito de T-álgebra introduzido por Etherington é hoje bem entendido e [6] é ainda o melhor referencial para o estudo das álgebras que provém de genética de populações.

Muitas álgebras provenientes de modelos genéticos concretos são T-álgebras, mas existem exemplos mostrando que a classe das T-álgebras não é suficientemente grande para abrigar todos os casos, veja a referência [6]. Nos trabalhos de Etherington já aparecem alguns resultados sobre T-álgebras de posto 2 e 3, inclusive no caso não comutativo. Os resultados mais importantes sobre T-álgebras em geral devem-se a Ph.Holgate, veja [13], [14] e [15]. Em 1976, V.M.Abraham [1], provou que toda T-álgebra de posto 3 é especial triangular. Sabe-se também que existe apenas uma (salvo isomorfismo) T-álgebra comutativa de posto 2 com uma dimensão dada, ela é a álgebra gamética de uma população diplóide multi-alélica.

Quanto às T-álgebras de posto 3, ou seja, aquelas que satisfazem uma equação do tipo $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$, para algum $\gamma \in \mathbf{K}$, pouco se sabia até recentemente, além do fato provado por Abraham, mencionado acima. O estudo destas álgebras, visando a sua classificação, iniciou-se com [4] e [5]. Em resumo, pode-se dizer que a classificação em baixas dimensões é possível graças a alguns invariantes. O invariante mais natural, após a dimensão, é o *tipo* da álgebra. Já são conhecidas as álgebras cujos tipos são relativamente simples. Em particular, é possível descrever todas as T-álgebras de posto 3 e dimensão não superior a 5. Em [4] e [5] pode-se encontrar a demonstração e os enunciados precisos destes resultados.

O objetivo desta tese é estudar alguns aspectos da teoria das T-álgebras de posto 3, tendo como objetivo maior a tentativa de classificação. Este trabalho divide-se em 8 capítulos, orientados em sua grande maioria, a estudar T-álgebras de posto 3.

Na seção 2 do capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados conhecidos em álgebras não associativas além de outros fatos novos e que serão usados nos capítulos posteriores, por exemplo, álgebras ponderadas e T-álgebras de posto 3. As álgebras de Bernstein serão definidas posteriormente.

No capítulo 2 definimos as álgebras constantes de ordem 1 e principalmente provamos que as train álgebras de posto 3 sobre um corpo $\mathbf{K}$, de característica 2, são uma subclasse das álgebras constantes de ordem 1. Além disso determinamos o grupo de automorfismos e derivações destas álgebras.

No capítulo 3 determinamos propriedades das álgebras de Bernstein de ordem k e das T-álgebras de posto 3, admitindo que elas possuem formas bilineares associativas não degeneradas. Os fatos mais importantes a provar são os seguintes :

- Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k e $\mathbf{b}$ uma forma bilinear associativa não degenerada em $\mathbf{A}$, então $\mathbf{A}$ é constante e possui um único elemento idempotente.
- Se $\mathbf{A}$ é uma T-álgebra de posto 3 com T-equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$; $\gamma \neq 0, 1$ e $\mathbf{b}$ uma forma bilinear associativa não degenerada em $\mathbf{A}$, então $\mathbf{A} = \mathbf{K}e$.

No capítulo 4, fazemos comentários a alguns resultados antigos da teoria, procurando dar demonstrações mais conceituais sobre o cálculo de idempotentes feito por H.Gonshor, no início dos anos 70.

No capítulo 5, motivados pelo artigo [2] de C.Mallol, estudamos a relação entre as transformações de Peirce e os automorfismos de uma T-álgebra de posto 3. Em geral os automorfismos comportam-se de uma maneira similar que os morfismos de Peirce. Porém estes em geral não são automorfismos de álgebras. Aqui determinamos condições para que os transformações de Peirce sejam automorfismos e além disso determinamos a álgebra $Der(\mathbf{A})$.

No capítulo 6, motivados pelo artigo de S. Gonzalez [7], estudamos o conceito de homotopia para uma T-álgebra de posto 3. Conseguimos caracterizar os elementos idempotentes da homótopa de uma T-álgebra de posto 3 e determinamos condições necessárias para que sua homótopa também seja uma T-álgebra de posto 3.

No capítulo 7, definimos o conceito de quasi-isotopia, que é mais fraco que o de isotopia. Este último conceito foi estudado pela primeira vez no contexto das álgebras genéticas em [12]. As álgebras $\mathbf{A}_o$ e $\mathbf{A}_*$ são chamadas *isótopas* se existem aplicações lineares inversíveis $P, Q, R : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ tais que $a \circ b = R[(P(a) * Q(b))]$ para todo $a, b \in \mathbf{A}$. O conceito de quasi-isotopia origina-se considerando tais operadores, mas não inversíveis. O caso mais interessante é considerar $R = id$ e $P = Q = L_e$, onde obtemos alguns resultados significativos.

No capítulo 8, tratamos o problema de classificação das T-álgebras de posto 3 e dimensão maior que 5. Todo isto, motivados pelos artigos [4] e [5], que analisam o problema em vários aspectos. Analisamos as álgebras de tipo $(4, n - 3)$ quanto à sua classificação. Este é um problema muito difícil a nosso entender e conseguimos solucioná-lo apenas parcialmente.

Os capítulos são independentes um do outro e porisso a ordem em que aparecem na tese não é importante.

1.2 Álgebras ponderadas

Nesta seção introduzimos os conceitos básicos das álgebras genéticas, além de alguns resultados necessários para a leitura deste trabalho. Algumas das demonstrações são encontradas nas referências.

Sejam $\mathbf{K}$ um corpo e $\mathbf{A}$ uma $\mathbf{K}$ -álgebra de dimensão finita, comutativa mas não necessariamente associativa. Se $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}$ é um homomorfismo não nulo, o par $(\mathbf{A}, \omega)$ será chamado uma *álgebra ponderada* ou *álgebra bária* e ω sua *função peso*. O núcleo de ω , que tem codimensão 1 em $\mathbf{A}$, é um ideal de $\mathbf{A}$. É possível decompor, como um espaço vetorial, $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \ker\omega$, onde e é um elemento de $\mathbf{A}$ com $\omega(e) = 1$. Em muitos casos de interesse, e será um elemento idempotente.

É fácil provar que se cada elemento de $\ker\omega$ tem alguma potência não associativa igual a zero (isto é, $\ker\omega$ é nil em algum sentido) então ω é unicamente determinado. Neste caso dizemos que $\ker\omega$ é o núcleo de $\mathbf{A}$.

Nem toda álgebra é ponderada. Por exemplo, a álgebra $\mathbf{A} = \langle x, y \rangle$ onde $x^2 = y$, $xy = 0$, $x = y^2$. Além disso, uma álgebra ponderada não possui necessariamente uma única ponderação. Por exemplo a álgebra $\mathbf{A} = \langle x, y \rangle$ definida por : $x^2 = x$, $xy = y$, $y^2 = y$, admite duas ponderações : $\omega(x) = \omega(y) = 1$ e $\omega'(x) = 1$, $\omega'(y) = 0$. Em geral, se $\dim \mathbf{A} = n$ então $\mathbf{A}$ possui no máximo n ponderações distintas.

Sendo $(\mathbf{A}, \omega)$ e $(\mathbf{A}', \omega')$ duas álgebras ponderadas, diremos que $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ é um homomorfismo ponderado se ϕ é um morfismo de álgebras e o diagrama seguinte comuta (isto é, $\omega' \circ \phi = \omega$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{A}' \\ & \searrow \swarrow & \\ & \omega & \omega' \\ & \mathbf{K} & \end{array}$$

Uma álgebra ponderada $(\mathbf{A}, \omega)$ é chamada uma *train álgebra*, ou simplesmente *T-álgebra*, se existem escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbf{K}$ tais que

$$x^r + \gamma_1 \omega(x) x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} \omega(x)^{r-1} x = 0 \quad \forall x \in \mathbf{A} \quad (1)$$

onde os elementos $x, \dots, x^r$ são definidos recursivamente por : $x^1 = x$, $x^k = x^{k-1}x$, $k \geq 2$ (potências principais de x). O menor r para o qual (1) é uma identidade em $\mathbf{A}$ é chamado o *posto* de $\mathbf{A}$ e (1) a *equação posto* ou *T-equação*. As raízes da equação algébrica

$x^r + \gamma_1 x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} x = 0$ em algum corpo, extensão de $\mathbf{K}$, são chamadas as *t-raízes* de $\mathbf{A}$. São consequências imediatas as afirmações seguintes :

- (a) $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{r-1} = 0$.
- (b) Todos os elementos de peso 1 satisfazem a mesma equação.
- (c) O núcleo $\mathbf{N} = \ker \omega$ é um ideal, satisfazendo a identidade $x^r = 0$ para todo $x \in \mathbf{N}$.
- (d) $\omega : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{K}$ é unicamente determinado.

Toda álgebra ponderada com um idempotente de peso 1 pode ser obtida da forma seguinte. Suponha $\mathbf{N}$ uma $\mathbf{K}$ -álgebra e $\tau : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ uma aplicação linear arbitrária. No espaço vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{N}$ definimos uma multiplicação por :

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \tau(\alpha a + \beta b)) ; \alpha, \beta \in \mathbf{K} \text{ e } a, b \in \mathbf{N} \quad (2)$$

Assim $\omega : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{K}$ dada por $\omega(\alpha, a) = \alpha$ é uma ponderação, $e = (1, 0)$ é um elemento idempotente de peso 1 e $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra ponderada com elemento idempotente .

Suponhamos $\text{carac } \mathbf{K} \neq 2$. Se a álgebra $\mathbf{N}$ satisfaz a identidade $a^3 = 0$, então $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ satisfaz a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \quad (3)$$

se e somente se são válidas as seguintes identidades para o operador τ :

$$2\tau(a)a + \tau(a^2) = (1 + \gamma)a^2 ; a \in \mathbf{N} \quad (4)$$

$$2\tau^2 - (1 + 2\gamma)\tau + \gamma id_{\mathbf{N}} = 0 \quad (5)$$

onde $id_{\mathbf{N}}$ é o operador identidade de $\mathbf{N}$.

Assumiremos que $\gamma \neq \frac{1}{2}$ na equação (3). Por (5), se temos uma T-álgebra de posto 3 construída como acima, os valores próprios de τ serão : $\frac{1}{2}$, γ . É consequência de resultados de Álgebra Linear elementar que $\mathbf{N} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ onde $\mathbf{U} = \ker(\tau - \frac{1}{2}id_{\mathbf{N}})$ e $\mathbf{V} = \ker(\tau - \gamma id_{\mathbf{N}})$.

A linearização de (4) tem como consequência que

$$\mathbf{U}^2 \subset \mathbf{V} \quad (6)$$

$$\mathbf{UV} \subset \mathbf{U} \quad (7)$$

$$\mathbf{V}^2 = 0 \quad (8)$$

De $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathbf{N}$, obtem-se as relações seguintes :

$$(x_1 x_2) x_2 = 0 \quad (9)$$

$$x_1 (x_1 x_2) = 0 \quad (10)$$

$$(x_1 x_2) y_2 = -(x_1 y_2) x_2 \text{ e } x_1 (y_1 x_2) = -y_1 (x_1 x_2) \quad (11)$$

para todo $x_1, y_1 \in \mathbf{U}$ e $x_2, y_2 \in \mathbf{V}$. A linearização completa da equação $x^3 = 0$ dá a identidade de Jacobi :

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \quad (12)$$

para todo $x, y, z \in \mathbf{N}$.

Os elementos idempotentes em $\mathbf{A}$ devem ter peso 1 pois $\mathbf{N}$ é nil. É conhecido que os elementos idempotentes em $\mathbf{A}$ têm a forma : $(1, u + (1 - 2\gamma)^{-1} u^2)$, $u \in \mathbf{U}$. O *tipo* de $\mathbf{A}$ é o par ordenado de inteiros não negativos $(1 + \dim \mathbf{U}, \dim \mathbf{V})$. Chama-se *invariante de estrutura* a todo resultado referente à álgebra $\mathbf{A}$ independente da escolha do idempotente. Notamos que $\dim \mathbf{U}$, $\dim \mathbf{V}$ e o *tipo* da álgebra são invariantes. Outros invariantes numéricos de T-álgebras de posto 3 são as dimensões dos ideais $\mathbf{N}^i$ de $\mathbf{A}$ e a dimensão do ideal $\mathbf{J} = \mathbf{UV} \oplus \mathbf{V}$ de $\mathbf{A}$ (ideal de Etherington). Todos estes resultados estão provados em [4].

Observação: É conhecido que as T-álgebras de posto 3, com $\gamma \neq \frac{1}{2}$, sempre possuem idempotentes que são da forma acima. Vamos dar uma demonstração diferente deste fato, construindo um idempotente a partir de um elemento de peso 1. Consideremos a equação (1) onde $\gamma \neq \frac{1}{2}$ e seja a equação $(xy)z + (xz)y + (yz)x = (1 + \gamma)\{\omega(x)yz + \omega(y)xz + \omega(z)xy\} - \gamma\{\omega(x)\omega(y)z + \omega(y)\omega(z)x + \omega(x)\omega(z)y\}$, que resulta da linearização de (1). Nesta equação fazendo $x = y = e$, $z = e^2$ com $\omega(e) = 1$, temos : $2e^4 + (e^2)^2 = (1 + \gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e)$. Como $e^3 = (1 + \gamma)e^2 - \gamma e$, $e^4 = (1 + \gamma)e^3 - \gamma e^2$, então $(e^2)^2 = (1 + 2\gamma)e^2 - 2\gamma e$. Daí podemos notar que os elementos e^n , definidos recursivamente por $e^1 = e$ e $e^k = e^{k-1}e$, e $e^{[n]}$, definidos recursivamente por $e^{[1]} = e$ e $e^{[k]} = e^{[k-1]}e^{[k-1]}$, pertencem ao subespaço gerado por e , e^2 . Desta forma o elemento idempotente na álgebra $\mathbf{A}$ deve ter a forma $\alpha e^2 + \beta e$. Calculemos os valores de α e β . Temos $(\alpha e^2 + \beta e)^2 = \alpha e^2 + \beta e \Leftrightarrow \alpha^2(1 + 2\gamma) + 2\alpha\beta(1 + \gamma) + \beta^2 = \alpha$, $-2\alpha^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma = \beta$. Donde obtemos $\alpha = \frac{1}{1-2\gamma}$ e $\beta = \frac{-2\gamma}{1-2\gamma}$ e assim o idempotente tem a forma $x = (1 - 2\gamma)^{-1}(e^2 - 2\gamma e)$. ■

Capítulo 2

T-álgebras de posto 3 sobre corpos de característica 2

Conforme já dissemos no capítulo 1, a teoria das T-álgebras sobre o corpo real ou complexo começou com Etherington em 1939. Contribuições importantes posteriores foram dadas por Ljubich, Abraham, Holgate, Gonshor, Reiersol, Heuch, etc. Mais recentemente, em [4] e [5], foi feita a classificação das T-álgebras de posto 3 sobre um corpo de característica distinta de 2, até dimensão 5, com a hipótese de que o escalar γ da equação (1) adiante é distinto de $\frac{1}{2}$. O caso $\gamma = \frac{1}{2}$, pouco estudado até o momento, é mais difícil pois não existe uma decomposição de Peirce para a álgebra e com isto desaparece o invariante *tipo*.

Neste capítulo, vamos responder à pergunta: como são as T-álgebras de posto 3 sobre um corpo de característica 2? Como acontece freqüentemente, a teoria em característica 2 é bastante diferente dos demais casos. Provaremos que as train álgebras de posto 3 sobre um corpo de característica 2 são todas constantes de ordem 1 (a seguir definidas).

Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma álgebra ponderada sobre o corpo $\mathbf{K}$ de característica arbitrária e suponhamos que existe um elemento e de $\mathbf{A}$ tal que $x^2 = \omega(x)^2 e$, para todo $x \in \mathbf{A}$. É claro que $\omega(e) \neq 0$, pois se $\omega(e) = 0$ então $\omega(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{A}$ o que contraria o fato de ser $\omega \neq 0$.

Proposição 2.1 *Sob as hipóteses acima, $e \in \mathbf{A}$ é idempotente e tem peso 1.*

Demonstração: Temos que $e^2 = \omega(e^2)e$, onde aplicando ω resulta $\omega(e)^2 = \omega(e)^3$ ou $\omega(e)^2(\omega(e) - 1) = 0$. Como $\omega(e) \neq 0$ então $\omega(e) = 1$ e assim $e^2 = e$. ■

Corolário 2.1 *Nas hipóteses acima, o elemento idempotente $e \in \mathbf{A}$ é único.*

Demonstração: Se $e' \in \mathbf{A}$ e $e'^2 = e'$ então $\omega(e') = 1$, donde $e' = e'^2 = \omega(e')^2 e = e$ e assim o conjunto dos idempotentes reduz-se a $\{e\}$. ■

Toda álgebra bária $(\mathbf{A}, \omega)$ tal que $x^2 = \omega(x)^2 e$ para todo $x \in \mathbf{A}$, chama-se *constante de ordem 1*. Analogamente, $(\mathbf{A}, \omega)$ é dita *constante de ordem k* se $x^{[k+1]} = \omega(x)^{2^k} e$, para algum idempotente e . Aqui $x^{[k+1]}$ é a $(k+1)$ -ésima potência plena de x , definida por $x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]}$, com $x^{[1]} = x$. Neste capítulo trataremos somente de álgebras constantes de ordem 1. No capítulo 3, aparecerão as de ordem k . Toda álgebra constante de ordem k possui uma única função peso pois cada elemento de $\ker \omega$ é nil: $x^{[k+1]} = 0$ se $x \in \ker \omega$.

Uma maneira de construir álgebras constantes de ordem 1 sobre um corpo $\mathbf{K}$ de característica 2 é indicado a seguir. Seja dada uma terna $(\mathbf{V}, g, \mathbf{b})$ onde $\mathbf{V}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$, $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é uma aplicação $\mathbf{K}$ -linear e $\mathbf{b} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ uma função bilinear simétrica tal que a função quadrática $q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}$ dada por $q(v) = \mathbf{b}(v, v)$ é identicamente nula. Consideremos o espaço vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{V}$, munido da forma linear $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}$ dada por $\omega(\alpha, v) = \alpha$ e da multiplicação (obviamente comutativa)

$$(\alpha, v)(\alpha', v') = (\alpha\alpha', \alpha g(v') + \alpha' g(v) + \mathbf{b}(v, v'))$$

para todo $\alpha, \alpha' \in \mathbf{K}$ e $v, v' \in \mathbf{V}$. O elemento $e = (1, 0)$ é claramente um idempotente de peso 1 e temos para todo $x = (\alpha, v) \in \mathbf{A}$, $x^2 = (\alpha^2, 2\alpha g(v) + \mathbf{b}(v, v)) = (\alpha^2, 0) = \alpha^2(1, 0) = \alpha^2 e = \omega(x)^2 e$, pois $\mathbf{K}$ tem característica 2 e $q(v) = 0$. Denotamos esta álgebra constante de ordem 1 por $[\mathbf{V}, g, \mathbf{b}]$.

Este processo de construção de álgebras constantes de ordem 1 recobre toda a classe dessas álgebras, pois se $(\mathbf{A}, \omega)$ é constante de ordem 1, podemos tomar $\mathbf{V} = \ker \omega$, $g(v) = ev$ e $\mathbf{b}(v, v') = vv'$ para todo $v, v' \in \mathbf{V}$. Assim $\mathbf{A} = [\ker \omega, g, \cdot]$ onde " $\cdot$ " indica o produto em $\ker \omega$.

Dada uma álgebra $\mathbf{A} = [\mathbf{V}, g, \mathbf{b}]$, constante de ordem 1, podemos estender g a $\mathbf{A}$ pondo $g(e) = ee = e$. Denotamos esta função também por g . Temos $g(x) = g(\lambda e + v) = \lambda g(e) + g(v) = \lambda e^2 + ev = e(\lambda e + v) = ex$, para todo $x \in \mathbf{A}$.

É claro que considerar o par (V, b) , é considerar uma nilálgebra. Temos neste caso, a seguinte equivalência de categorias:

Proposição 2.2 *Existe equivalência de categorias entre as álgebras constantes (A, ω) e os pares (N, g) , onde N é uma nilálgebra de índice 2 e $g \in \text{End}_{\mathbf{K}} N$.*

Demonstração: À álgebra constante (A, ω) le associamos $(\ker \omega, L_e)$ e reciprocamente à álgebra (N, g) le associamos (A, ω) onde $A = \mathbf{K} \times N$ com multiplicação dada da seguinte forma :

$$(\alpha, v)(\alpha', v') = (\alpha\alpha', \alpha g(v') + \alpha' g(v) + vv')$$

e ω definido por $\omega(\alpha, v) = \alpha$. Ponhamos $e = (1, 0)$ e identificando $(0, v)$ com v , temos $A = \mathbf{K}e \oplus N$ e além disso obtemos $ev = g(v)$, $v^2 = 0$. Agora se $x = \alpha e + v$ então $x^2 = \omega(x)^2 e$ e assim (A, ω) é constante. ■

No que segue, sejam $N = \ker \omega$, $\text{Aut}_e(N) = \{\phi \in \text{Aut}(N) / \phi \circ L_e = L_e \circ \phi\}$ e $\text{Der}_e(N) = \{d \in \text{Der}(N) / d \circ L_e = L_e \circ d\}$.

Proposição 2.3 $\text{Aut}(A) \simeq \text{Aut}_e(N)$ e $\text{Der}(A) \simeq \text{Der}_e(N)$.

Demonstração: A $\phi \in \text{Aut}(A)$ le associamos sua restrição $\phi|_N$. De fato, se $x \in N$ e $\phi(x) = \lambda e + y$, $y \in N$, então tem-se $0 = \phi(x^2) = \phi(x)^2 = \lambda^2 e$ donde $\lambda = 0$ e portanto $\phi(x) \in N$. Por outro lado, como ϕ é um automorfismo, então $\phi(e) = e$, donde $(\phi \circ L_e)(x) = \phi(ex) = \phi(e)\phi(x) = e\phi(x) = (L_e \circ \phi)(x)$.

Reciprocamente, se $\psi \in \text{Aut}_e(N)$ fazemos uma extensão à álgebra A por $\bar{\psi}$, da forma $\bar{\psi}(e) = e$ e $\bar{\psi}|_N = \psi$. É claro que $\bar{\psi} \in \text{Aut}(A)$.

Em forma análoga prova-se a outra afirmação. ■

Observação: É conhecida a afirmação seguinte (ver [18]):

Se (A, ω) uma álgebra constante de ordem 1, então são equivalentes:

- a) A identidade de Jordan, $x^2(yx) = (x^2y)x$ é válida em A .
- b) Para todo $x, y \in A$, $x(ey) = e(xy)$.
- c) Para todo $x, y \in N$, $x(ey) = e(xy)$ e $ex = e(ex)$.

Proposição 2.4 *São equivalentes:*

- (a) A categoria das álgebras constantes de Jordan.
- (b) A categoria das nilálgebras N , de índice 2, tais que $N = F \oplus Z$; F e Z ideais de N .

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) À álgebra constante $(\mathbf{A}, \omega)$, le associamos $\mathbf{N} = \ker \omega$. Como $\mathbf{A}$ é de Jordan (observação anterior), temos que $e(ex) = ex$ ou $L_e^2 x = L_e x$, isto é, L_e é uma projeção.

Agora $\mathbf{F} = \{x \in \mathbf{N} / ex = x\}$, $\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{N} / ex = 0\}$ são ideais de $\mathbf{N}$, pois se consideramos $ex = \lambda x$ com $\lambda = 0, 1$, tem-se que $e(xy) = (ex)y = \lambda xy$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $\mathbf{A}$ a extensão de $\mathbf{N}$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ com estrutura multiplicativa definida por

$$e^2 = e, ef = f, ez = 0$$

(Como $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Z}$ são ideais de $\mathbf{N}$, então é obvio que $\mathbf{FZ} \subset \mathbf{F} \cap \mathbf{Z} = \{0\}$). Agora se consideramos $x = \alpha e + f + z$ então $x^2 = \omega(x)^2 e$ e se $y = \alpha' e + f' + z'$ então um cálculo simples mostra que $e(xy) = (ex)y$ para todo $x, y \in \mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{A}$ é uma álgebra constante de Jordan. ■

Consideremos agora uma T-álgebra $(\mathbf{A}, \omega)$ de posto 3, satisfazendo a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \quad (1)$$

Linearizando esta equação temos

$$x^2y = (1 + \gamma)\omega(y)x^2 - \gamma\omega(x)^2y \quad (2)$$

Agora fazendo em (2) $x = e$, $y = e^2$ conseguimos

$$e^2e^2 = (1 + \gamma)\omega(e^2)e^2 - \gamma\omega(e^2)e^2 = \omega(e^2)e^2 = e^2. \text{ Assim hemos provado}$$

Proposição 2.5 *Se $\mathbf{A}$ é uma T-álgebra de posto 3, então existe um elemento idempotente em $\mathbf{A}$.*

Proposição 2.6 *São equivalentes:*

a) $(\mathbf{A}, \omega)$ T-álgebra de posto 3.

b) $(\mathbf{A}, \omega)$ álgebra constante de ordem 1, tal que $ex = \gamma x$ para todo $x \in \ker \omega$, e elemento idempotente de $\mathbf{A}$.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ b) Fazendo em (2) $x = e$, $y \in \ker \omega$ obtemos $ey = (1 + \gamma)\omega(y)e - \gamma\omega(e)^2y = \gamma y$. Seja agora $y = x^2$ em (2), então $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein e assim por [18] $\mathbf{A}$ é constante de ordem 1.

b) $\Rightarrow$ a) Sejam (A, ω) constante de ordem 1 e $y = \lambda e + x$ com $\lambda \in K$ e $x \in \ker \omega$. Como $x^2 = 0$ para todo $x \in \ker \omega$ então trivialmente é satisfeita a equação (1) e assim A é uma T-álgebra de posto 3. ■

Proposição 2.7 *Seja A uma T-álgebra de posto 3. São equivalentes:*

a) A é de potência associativa.

b) $\gamma \in \{0, 1\}$.

c) A é de Jordan.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Sejam A de potência associativa e $x \in A$ tal que $x = e + z$, $z \in N$. Então temos $(e + z)^4 = [(e + z)^2]^2$, donde $[e(e + z)(e + z)] = e$ e assim $\gamma = 0, 1$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Se $\gamma = 1$, e é neutro multiplicativo e então $e(xy) = (ex)y$ para todo $x, y \in A$. Se $\gamma = 0$ a equação (1) reduz-se a $x^3 = \omega(x)x^2$ e A é uma álgebra de Bernstein-Jordan (ver [22]).

(c) $\Rightarrow$ (a) Se A é de Jordan, então desde [22] segue-se que A é de potência associativa. ■

Da proposição 2.3 e do fato que $L_e = \gamma \text{id}_A$, deduz-se o seguinte resultado.

Corolário 2.2 *Se A é uma T-álgebra de posto 3, então $\text{Aut}(A) = \text{Aut}(N)$ e $\text{Der}(A) = \text{Der}(N)$.*

Observação 1: Analisaremos agora um aspecto das álgebras A munidas de uma forma linear ω e que verificam a equação (1) e onde ω é apenas uma forma linear, isto é, não se admite que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. Veremos que no caso $\gamma = 0$ pode não haver idempotentes não nulos. Porém se $\gamma \neq 0$, a existência de elementos idempotentes não nulos está garantida. Veremos também que (como se espera) $\ker \omega$ não é necessariamente um ideal de A .

O estudo destas classes de álgebras é uma das direções em que a teoria das T-álgebras de posto 3 pode ser generalizada.

Supondo que $\gamma = 0$, a equação (1) fica na forma $x^3 = \omega(x)x^2$. Consideremos a álgebra $A = Ke \oplus Kx$, onde $ex = x$, $e^2 = x$, $x^2 = 0$, com a forma linear $\omega : A \rightarrow K$ dada por $\omega(e) = 1$ e $\omega(x) = 0$. Seja $y = \lambda e + \mu x \in A$, onde $\lambda, \mu \in K$. Então $y^2 = (\lambda e + \mu x)^2 = \lambda^2 x$ e $y^3 = \lambda^2 x(\lambda e + \mu x) = \lambda^3 x = \lambda(\lambda^2 x) = \omega(y)y^2$. Por outro lado, $(\lambda e + \mu x)^2 = \lambda e + \mu x$ acarreta $\lambda = \mu = 0$ e portanto A não possui idempotentes não nulos.

Seja agora $\gamma \neq 0$ na equação (1). Da linearização parcial desta equação temos que $x^2y = (1 + \gamma)\omega(y)x^2 - \gamma\omega(x)^2y$. Seja $e \in \mathbf{A}$ tal que $\omega(e) = 1$. Se $x = y = e$ temos

$$e^3 = (1 + \gamma)e^2 - \gamma e \quad (4)$$

Se tomamos $x = e$, $y = e^2$, obtemos

$$(e^2)^2 = [(1 + \gamma)\omega(e^2) - \gamma]e^2 \quad (5)$$

Considerando agora $x = e^2$, $y = e$, obtemos

$$(e^2)^2e = (1 + \gamma)(e^2)^2 - \gamma\omega(e^2)^2e \quad (6)$$

Multiplicando (5) por e temos $(e^2)^2e = [(1 + \gamma)\omega(e^2) - \gamma]e^3$, e assim de (4):

$$(e^2)^2e = (1 + \gamma)^2\omega(e^2)e^2 - \gamma(1 + \gamma)\omega(e^2)e - \gamma(1 + \gamma)e^2 + \gamma^2e \quad (7)$$

De (6) e (7), por comparação, obtemos a igualdade $[(\omega(e^2) + 1)(\omega(e^2) + \gamma)] = 0$. Assim $\omega(e^2) = 1$ ou γ (lembrar que a característica de $\mathbf{K}$ é 2), donde $e^2 \neq 0$. Se $\omega(e^2) = 1$, de (5) obtemos que e^2 é um idempotente não nulo de $\mathbf{A}$. Se $\omega(e^2) = \gamma$ também de (5) obtemos $(e^2)^2 = \gamma^2e^2$ logo $(\gamma^{-2}e^2)^2 = \gamma^{-4}(e^2)^2 = \gamma^{-2}e^2$ e desta forma também existe elemento idempotente não nulo em $\mathbf{A}$, a saber, $\gamma^{-2}e^2$.

Observação 2: Admitimos que $(\mathbf{A}, \omega)$ está nas mesmas hipóteses da Observação 1. Podemos notar que se $x \in \ker \omega$ então $x^2 \in \ker \omega$, apesar de $\ker \omega$ não ser necessariamente uma subálgebra de $\mathbf{A}$. De fato, sabemos que $ey = \gamma y$, $y \in \ker \omega$ e de (3), $ex^2 = (1 + \gamma)x^2$, $x \in \ker \omega$. Consideremos o elemento $x^2 = \lambda e + z$, $z \in \ker \omega$, logo $ex^2 = e(\lambda e + z) = \lambda e + \gamma z$ ou $(1 + \gamma)(\lambda e + z) = \lambda e + \gamma z$. Obtemos assim $\lambda\gamma = 0$ e $z = 0$. Mas $\gamma \neq 0$, logo $\lambda = 0$ e portanto $x^2 = 0$ ou $x^2 \in \ker \omega$.

Para mostrar que $\ker \omega$ pode não ser um ideal, consideramos o exemplo seguinte : $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{K}x \oplus \mathbf{K}y$ onde a tabela de multiplicação é: $e^2 = e$, $ex = x$, $ey = y$, $x^2 = y^2 = 0$ e $xy = e$ e a forma linear ω é definida por $\omega(x) = \omega(y) = 0$ e $\omega(e) = 1$. Se $z = \lambda e + x + y$ então $z^2 = \lambda^2e$ e $z^3 = \lambda^2z$. Por outro lado $(1 + \gamma)\omega(z)z^2 - \gamma\omega(z)^2z = 2\omega(z)z^2 + \omega(z)^2z = \lambda^2z = z^3$. Observemos que $\mathbf{A}$ satisfaz (1) mas $xy \notin \ker \omega$. ■

Capítulo 3

Formas bilineares associativas em algumas álgebras báricas

O objetivo principal deste capítulo é determinar propriedades de uma álgebra de Bernstein de ordem k e de uma train álgebra de posto 3, admitindo que exista nelas uma forma bilinear associativa não degenerada. Problema similar para álgebras de Bernstein havia sido estudado em [3].

3.1 Formas associativas

Definição 3.1 *Sejam $\mathbf{A}$ uma álgebra sobre o corpo $\mathbf{K}$ e $\mathbf{b} : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{K}$ uma forma bilinear. Então $\mathbf{b}$ é associativa quando é satisfeita a identidade $\mathbf{b}(xy, z) = \mathbf{b}(x, yz)$ para todo $x, y, z \in \mathbf{A}$. A forma $\mathbf{b}$ é simétrica se $\mathbf{b}(x, y) = \mathbf{b}(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbf{A}$. Dizemos que $\mathbf{b}$ é degenerada se existe $x \in \mathbf{A}$, $x \neq 0$, tal que $\mathbf{b}(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathbf{A}$ (ou então $\mathbf{b}(y, x) = 0$, para todo $y \in \mathbf{A}$). Caso contrário, $\mathbf{b}$ é não degenerada.*

Suporemos neste capítulo que $\mathbf{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra bárica comutativa sobre $\mathbf{K}$, com um elemento idempotente e de peso 1 e que $\mathbf{b} : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{K}$ é bilinear associativa não degenerada. Provaremos dois resultados:

1. Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k então $\mathbf{A}$ é constante e o elemento idempotente é único.
2. Se $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ é uma T-álgebra de posto 3, com T-equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 +$

$\gamma\omega(x)^2x = 0$, onde γ é distinto de 0 e 1, então $\mathbf{A} = \mathbf{K}e$.

Comecemos com uma situação um pouco mais geral. Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ uma álgebra bária comutativa, e um elemento idempotente tal que $\omega(e) = 1$, $\mathbf{N} = \ker \omega$ e $L_e : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ a multiplicação por e em $\mathbf{N}$, isto é, $L_e(x) = ex$, para todo $x \in \mathbf{N}$. Consideremos além disso o subespaço vetorial $\mathbf{U} = \{x \in \mathbf{N} / ex = \frac{1}{2}x\}$ e escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é um subespaço complementar de $\mathbf{U}$ em $\mathbf{N}$. Nos casos a tratar a seguir, em geral teremos $\mathbf{U} \neq 0$.

Usando a decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ obtemos as seguintes igualdades (supondo $\mathbf{b}$ associativa) onde $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{b}(e, n) = \mathbf{b}(e^2, n) = \mathbf{b}(e, en) = \mathbf{b}(en, e) = \mathbf{b}(n, e^2) = \mathbf{b}(n, e) \quad (1)$$

Também temos $\mathbf{b}(e, u) = \mathbf{b}(e^2, u) = \mathbf{b}(e, eu) = \mathbf{b}(e, \frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}\mathbf{b}(e, u)$, $u \in \mathbf{U}$. Assim $\mathbf{b}(e, u) = 0$ e portanto

$$\mathbf{b}(e, \mathbf{U}) = \mathbf{b}(\mathbf{U}, e) = 0 \quad (2)$$

De (1) e (2) nós obtemos a decomposição em blocos da matriz de $\mathbf{b}$ em relação à decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ como :

$$[\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \mathbf{b}(e, e) & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad (3)$$

Aqui $*$ indica que aparecerão certos escalares, dependendo de $\mathbf{b}$ e da álgebra $\mathbf{A}$. Não é possível obter informação sobre $\mathbf{b}(e, v)$, $v \in \mathbf{V}$, além do fato que $\mathbf{b}(e, v) = \mathbf{b}(v, e)$, provado em (1). Logo a seguir estudaremos com mais detalhes a matriz (3) para achar as álgebras de Bernstein de ordem k e as T-álgebras de posto 3 as quais têm uma forma bilinear associativa não degenerada.

3.2 Álgebras de Bernstein de ordem k

Sejam $\mathbf{K}$ um corpo de característica distinta de 2 e $(\mathbf{A}, \omega)$ uma álgebra bária sobre $\mathbf{K}$. Dizemos que $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k se vale a identidade

$$x^{[k+2]} = \omega(x)^{2^k} x^{[k+1]} \quad (4)$$

para todo $x \in \mathbf{A}$ e k o menor inteiro com esta propriedade. Observamos que a teoria das lgebras de Bernstein de ordem 0 trivial pois a equao (4) torna-se $x^2 = \omega(x)x$ e bem conhecido que existe uma e apenas uma (salvo isomorfismos) lgebra brica comutativa de uma dada dimenso satisfazendo esta equao. Trata-se da lgebra gamtica da herana Mendeliana simples. Ela possui uma base $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ tal que $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ e $c_i c_j = 0$ ($i, j \geq 1$). A teoria das lgebras de Bernstein de ordem 1 (equao $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$) altamente no trivial. Embora elas tenham sido estudadas por vrios autores, estamos ainda muito distantes de conhec-las bem. A teoria das lgebras de Bernstein de ordem k ($k \geq 2$) apenas comeou a ser desenvolvida recentemente. Vamos relacionar alguns fatos j conhecidos.

Proposio 3.1 ([18, Lema 1.1]) *Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma lgebra de Bernstein de ordem k . Os idempotentes de $\mathbf{A}$ so os elementos da forma $y^{[k+1]}$ onde $y \in \mathbf{A}$ e $\omega(y) = 1$.*

Proposio 3.2 ([18, Lema 1.2]) *Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma lgebra de Bernstein de ordem k . Ento ω o nico homomorfismo no nulo de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{K}$.*

Seja $e \in \mathbf{A}$ um idempotente de peso 1 e $L_e : \ker \omega \longrightarrow \ker \omega$ o operador linear definido por $L_e(x) = ex$. Ento $\ker \omega = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ onde $\mathbf{U} = \text{Im } L_e^k$ e $\mathbf{V} = \ker L_e^k$. Alm disso, $\mathbf{U}^2 \subseteq \mathbf{V}$. Se $\mathbf{W}$ um subespao complementar de $\mathbf{U}^2$ em $\mathbf{V}$ teremos $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^2 \oplus \mathbf{W}$. Veja referncias [11] e [18] para maiores detalhes sobre lgebras de Bernstein de ordem k .

Para qualquer forma bilinear associativa b em $\mathbf{A}$ temos o seguinte resultado:
 $b(e, v) = b(e^{k+1}, v) = b(e^k, L_e(v)) = b(e^{k-1}, L_e^2(v)) = \dots = b(e, L_e^k(v)) = b(e, 0) = 0$,
para todo $v \in \mathbf{V}$. Analogamente (ou por meio de (1)) $b(v, e) = 0$ para todo $v \in \mathbf{V}$ e portanto

$$b(e, \mathbf{V}) = b(\mathbf{V}, e) = 0 \quad (4)$$

Desta forma usando (2) temos $b(e, \mathbf{N}) = b(\mathbf{N}, e) = 0$. Agora para $u \in \mathbf{U}$ e $n \in \mathbf{N}$, ns temos $b(u, n) = 2b(\frac{1}{2}u, n) = 2b(eu, n) = 2b(e, un) = 0$ pois $un \in \mathbf{N}$. Da mesma forma $b(n, u) = 0$. Baseando-nos na identidade (2), obtemos

$$b(\mathbf{U}, \mathbf{A}) = b(\mathbf{A}, \mathbf{U}) = 0 \quad (5)$$

Para cada gerador $u_i u_j$ de U^2 e $n \in N$ nós temos $b(u_i u_j, n) = b(u_i, u_j n) = 0$ e do mesmo modo $b(n, u_i u_j) = 0$ por (5). Então

$$b(U^2, N) = b(N, U^2) = 0 \quad (6)$$

Assim a decomposição canônica em blocos de b é a seguinte, onde as linhas e colunas referem-se aos subespaços Ke , U , U^2 e W respectivamente :

$$[b] = \begin{pmatrix} b(e, e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad (7)$$

Esta forma matricial é válida para qualquer dimensão de A e tem as seguintes consequências.

Proposição 3.3 *Qualquer forma bilinear associativa b sobre uma álgebra de Bernstein A de ordem k é totalmente determinada por sua ação sobre o subespaço $Ke \oplus W$.*

Demonstração: Se $x = \alpha e + u + v_1 + v_2$, $y = \beta e + u' + v'_1 + v'_2$ com $\alpha, \beta \in K$; $u, u' \in U$; $v_1, v'_1 \in U^2$; $v_2, v'_2 \in W$, então $b(x, y) = \alpha\beta b(e, e) + b(v_2, v'_2)$. ■

Proposição 3.4 *Suponhamos K um corpo infinito de característica $\neq 2$. Se existe uma forma bilinear associativa não degenerada b sobre uma K -álgebra de Bernstein A de ordem k , então $x^{[k+1]} = w(x)^{2^k} e$, para todo $x \in A$ e o idempotente e é único.*

Demonstração: Se b é não degenerada, $U = 0$. Então o resultado segue do teorema a seguir, devido a C. Mallol, ver [18, Teorema 5.10]. ■

Teorema 3.1 *Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2 e (A, ω) uma álgebra bárica. As condições seguintes são equivalentes:*

- (a) A é uma álgebra constante de ordem k
- (b) A é uma álgebra de Bernstein de ordem k com $U = 0$
- (c) A é uma álgebra de Bernstein de ordem k com um único idempotente não nulo.

3.3 T-álgebras de posto 3

Consideremos agora (A, ω) uma T-álgebra de posto 3 satisfazendo a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0, \quad \gamma \in K \quad (8)$$

Proposição 3.5 *Se uma álgebra bária (A, ω) satisfaz a equação $\omega(x)[x^2 - \omega(x)x] = 0$ para todo $x \in A$, então necessariamente $x^2 - \omega(x)x = 0$ para todo $x \in A$.*

Demonstração: Observamos que se $x \notin \ker \omega$ nós temos $x^2 - \omega(x)x = 0$. Além disso, se $x \in \ker \omega$ com $x^2 - \omega(x)x \neq 0$, então $x^2 \neq 0$. Para qualquer $y \notin \ker \omega$ nós temos $\omega(x + \lambda y)[(x + \lambda y)^2 - \omega(x + \lambda y)(x + \lambda y)] = 0$ para todo $\lambda \in K$, mais ainda $\omega(y)x^2 = 0$, mas $\omega(y) \neq 0$, assim $x^2 = 0$. Este fato contradiz a hipótese. Portanto $x^2 - \omega(x)x = 0$ para todo $x \in A$. ■

Entre as infinitas classes de T-álgebras de posto 3 (uma para cada $\gamma \in K$), apenas 2 são formadas de álgebras de Jordan, conforme a proposição a seguir. Veja também [19, Teorema 2.3.2].

Proposição 3.6 *Seja (A, ω) uma T-álgebra satisfazendo (8). Então A é uma álgebra de Jordan se e somente se $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$, temos as T-equações $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ ou $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$. Então [19, Teorema 2.3.2] garante que A é Jordan.

($\Rightarrow$) Seja A uma álgebra de Jordan. Desde [19, Teorema 2.3.2], a equação posto é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ ou $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$. Suponhamos primeiramente que a equação é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Fazendo a diferença desta com a equação (8), temos : $\gamma\omega(x)[x^2 - \omega(x)x] = 0$. Se $\gamma \neq 0$ então $\omega(x)[x^2 - \omega(x)x] = 0$ para todo $x \in A$ e usando a proposição anterior nós obtemos que $x^2 - \omega(x)x = 0$. Isto contradiz o fato de o posto de A ser 3, logo $\gamma = 0$. Um argumento análogo mostra o segundo caso, isto é, quando a equação posto é $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ nós temos $\gamma = 1$. ■

Suponhamos agora que $\gamma \neq \frac{1}{2}$ na equação (8). Se e é um elemento idempotente de A tal que $\omega(e) = 1$ então podemos escrever $A = Ke \oplus N$ onde $N = \ker \omega$. Conforme vimos no capítulo 1, podemos decompor A na forma $A = Ke \oplus U \oplus V$ onde $U = \{n \in N / en = \frac{1}{2}n\}$

e $V = \{n \in N/en = \gamma n\}$. Fazemos notar que neste caso, a condição dada por (2) é satisfeita, isto é, $b(e, U) = b(U, e) = 0$, quando b é uma forma bilinear associativa em A . Usando a notação do [3, Lema], nós podemos escrever : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \gamma \neq \frac{1}{2}$, $N_1 = U$ e $N_2 = V$. Assim nós encontramos que $b(U, V) = b(V, U) = 0$ para $i = 1, j = 2$. Podemos concluir então que a decomposição canônica em blocos de uma matriz, correspondente à decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A é :

$$[b] = \begin{pmatrix} b(e, e) & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \quad (9)$$

Proposição 3.7 *Seja A uma T-álgebra de posto 3 satisfazendo (8), onde γ é distinto de 0 e 1. Se A possui uma forma bilinear associativa não degenerada então $A = Ke$.*

Demonstração: Seja (A, ω) uma T-álgebra de posto 3 de T-equação (8) e b uma forma bilinear associativa em A .

a) Suponhamos primeiramente $\gamma = \frac{1}{2}$. Desde a equação (5) do capítulo 1, isto é, $\gamma n + 2e(en) - (1 + 2\gamma)en = 0$, temos que $n = 4en - 4e(en)$, e assim para todo $n \in N$ a identidade $b(e, n) = b(e, 4en) - b(e, 4e(en)) = 4[b(e, en) - b(e^2, en)] = 0$ é válida, isto é, $b(e, N) = 0$. Além disso, para arbitrários $n_1, n_2 \in N$ temos: $b(n_1, n_2) = b(4en_1 - 4e(en_1), 4en_2 - 4e(en_2)) = 16[b(en_1, en_2) - b(en_1, e(en_2))] - b(e(en_1), en_2) + b(e(en_1), e(en_2)) = 0$. Isto decorre de b ser associativa e N ser uma subálgebra de A . Então podemos escrever

$$[b] = \begin{pmatrix} b(e, e) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em relação à decomposição $A = Ke \oplus N$. Mas como b é não degenerada, então $N = 0$, e daí $A = Ke$.

b) Se $\gamma \neq \frac{1}{2}$ nós já vimos que a forma matricial canônica em blocos de b é dada pela forma (9). Se γ é distinto de 0 e 1, e usando [3, Lema], nós achamos que a forma matricial de A é

$$[b] = \begin{pmatrix} b(e, e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isto é, a forma bilinear é degenerada exceto quando $N = 0$. Neste caso $A = Ke$. ■

Proposição 3.8 *A forma bilinear associativa $\mathbf{b}$ definida numa T -álgebra $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ de posto 3 é simétrica se e somente se sua restrição a $\mathbf{V}$ é simétrica.*

Demonstração: Se $\gamma \neq \frac{1}{2}$, notamos que se $v \in \mathbf{V}$ e $u_1, u_2 \in \mathbf{U}$, então temos as identidades seguintes :

$$\mathbf{b}(e, v) = \mathbf{b}(e^2, v) = \mathbf{b}(e, ev) = \mathbf{b}(ev, e) = \mathbf{b}(v, e^2) = \mathbf{b}(v, e)$$

$$\mathbf{b}(u_1, u_2) = 2\mathbf{b}(eu_1, u_2) = 2\mathbf{b}(e, u_1u_2) = 2\mathbf{b}(eu_2, u_1) = \mathbf{b}(u_2, u_1)$$

Assim a simetria de $\mathbf{b}$ em $\mathbf{A}$ só depende da simetria da restrição de $\mathbf{b}$ a $\mathbf{V}$. Quando $\gamma = \frac{1}{2}$ nós sabemos da demonstração da proposição 3.7 que $\mathbf{b}(x, y) \neq 0$ somente se $x = y = e$. ■

Proposição 3.9 *Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma T -álgebra de posto 3, com $\dim \mathbf{A} \geq 2$ e T -equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Então as formas bilineares associativas não degeneradas em $\mathbf{A}$ são dadas pelas formas bilineares associativas não degeneradas num subespaço vetorial complementar a $\mathbf{U}^2$ em $\mathbf{V}$.*

Demonstração: Neste caso, $\mathbf{A}$ é T -álgebra de posto 3 com $\gamma = 0$. Walcher [22] provou que neste caso $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan. Como $\mathbf{A}$ é de Bernstein, nós usamos o resultado estabelecido em [3] para completar a prova. ■

Proposição 3.10 *Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma T -álgebra de posto 3, com $\dim \mathbf{A} \geq 2$ e T -equação $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$. Então qualquer forma bilinear associativa é totalmente determinada por seus valores em (e, e) e $(e, \mathbf{V})$.*

Demonstração: Neste caso, $\mathbf{A}$ é T -álgebra de posto 3 com $\gamma = 1$. Seja $\mathbf{b}$ uma forma bilinear associativa em $\mathbf{A}$. Então a forma matricial canônica em blocos é dada por (9). Se $v_1, v_2 \in \mathbf{V}$, então $\mathbf{b}(v_1, v_2) = \mathbf{b}(v_1, ev_2) = \mathbf{b}(v_1v_2, e) = 0$, pois $\mathbf{V}^2 = 0$, logo $\mathbf{b}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0$. Adicionalmente, se $u_1, u_2 \in \mathbf{U}$ nós temos $\mathbf{b}(u_1, u_2) = 2\mathbf{b}(\frac{1}{2}u_1, u_2) = 2\mathbf{b}(e, u_1u_2)$. Em outras palavras, o valor de $\mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ está determinado pelos valores de $\mathbf{b}(e, \mathbf{V})$. ■

Proposição 3.11 *Seja $\mathbf{b}$ uma forma bilinear associativa definida numa T -álgebra $\mathbf{A}$ de posto 3. Então $\mathbf{b}(e_1, e_1) = \mathbf{b}(e, e)$, para quaisquer idempotentes $e, e_1 \in \mathbf{A}$.*

Demonstração: (i) Suponha que $\gamma = \frac{1}{2}$. Como $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$, $\mathbf{N} = \ker \omega$ e $\omega(e_1) = 1$, nós podemos escrever $e_1 = e + n_0$, donde obtemos $n_0 = 2en_0 + n_0^2$. Então $\mathbf{b}(n_0, n_0) =$

$4b(en_0, en_0) = 4b(e, n_0(en_0))$. Mas também pode-se escrever n como $n = 4en - 4e(en)$ onde $n \in \mathbf{N}$. Então $b(e, n) = 0$ e em consequência $b(n_0, n_0) = 0$ e assim obtemos facilmente a conclusão desejada.

(ii) Suponha que $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Conforme vimos no capítulo 1, existe $u \in \mathbf{U}$ tal que $e_1 = e + u + (1-2\gamma)^{-1}u^2$. Um cálculo direto mostra que $b(e_1, e_1) = b(e, e) + 4(1-\gamma)(1-2\gamma)^{-1}b(e, u^2)$. Se $\gamma = 1$ tem-se imediatamente o resultado. Se $\gamma \neq 1$, $b(e, u^2) = b(e^2, u^2) = b(e, eu^2) = \gamma b(e, u^2)$ donde $b(e, u^2) = 0$. ■

Observações:

(a) Com as hipóteses acima, se todo $u \in \mathbf{U}$ satisfaz $u^2 = 0$, então toda forma bilinear associativa em $\mathbf{A}$ é degenerada.

(b) A maioria dos resultados apresentados neste capítulo apareceram publicados no artigo "Associative Bilinear forms in some Baric Algebras", Linear Algebra and its Applications 180 : 219-226 (1993), em co-autoria com o colega R. Baeza-Vega. ■

Capítulo 4

Alguns problemas na teoria das álgebras genéticas

4.1 Definições

Vamos expor alguns resultados ligados à teoria das álgebras genéticas, que respondem parcialmente a algumas questões. A resolução completa destas, que parece ser difícil, é assunto para o futuro. O leitor deve encarar este capítulo apenas como um “ensaio” para minhas atividades futuras de pesquisa.

Seja $\mathbf{K}$ um corpo de característica diferente de 2. Suponha que $\mathbf{N}$ é uma $\mathbf{K}$ -álgebra, comutativa mas não necessariamente associativa e de dimensão finita. Seja $\tau : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ uma aplicação linear arbitrária. Conforme já vimos no capítulo 1, podemos definir sobre o $\mathbf{K}$ -espaço vetorial $\mathbf{K} \oplus \mathbf{N}$ o seguinte produto:

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \tau(\alpha b + \beta a))$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{K} ; a, b \in \mathbf{N}$.

Assim, nós obtemos uma outra $\mathbf{K}$ -álgebra denotada por $\mathbf{N}_\tau$. É evidente que a função $\omega : \mathbf{N}_\tau \longrightarrow \mathbf{K}$ dada por $\omega : (\alpha, a) \mapsto \alpha$ é um homomorfismo não nulo de álgebras. Logo $(\mathbf{N}_\tau, \omega)$ é uma álgebra bária no sentido de Etherington [6]. O núcleo de ω é um ideal de codimensão 1 em $\mathbf{N}_\tau$ o qual é naturalmente isomorfo a $\mathbf{N}$. Dizemos que $\mathbf{N}_\tau$ é obtida de $\mathbf{N}$ por extensão segundo o operador τ , pela adjunção de um idempotente. Também dizemos, abusando um pouco na linguagem, que $\mathbf{N}$ é o núcleo de $\mathbf{N}_\tau$ em vez de dizer que $\mathbf{N}$ é o núcleo de ω .

Casos particulares desta construção são os seguintes. Quando $\tau = 0$, N_τ é o produto direto usual de K e N . Quando $\tau = id_N$, N_τ é a álgebra obtida de N agregando o elemento unidade $(1, 0)$.

Para qualquer τ , nós temos $(1, 0)^2 = (1, 0)$, assim N_τ possui um elemento idempotente $e = (1, 0)$ tal que $\omega(e) = 1$. É claro que para qualquer álgebra bária, todo elemento idempotente e satisfaz $\omega(e) = 0$ ou $\omega(e) = 1$. Também notamos que $(1, 0)(0, a) = (0, \tau(a))$ para qualquer $a \in N$. Assim a multiplicação de elementos de N por $(1, 0)$ corresponde à transformação linear τ agindo sobre N .

Nós observamos finalmente que toda álgebra bária A com idempotente e de peso 1 pode ser obtida desta maneira. Para isso, tomamos como N o núcleo de ω e como τ a transformação linear tal que $a \mapsto ea \in N$, $a \in N$.

Muitas álgebras báricas que aparecem no formalismo algébrico da genética têm uma única função peso, ver por exemplo [23], lemma 3.5 e lemma 9.3. Nós estudamos agora condições suficientes sobre N , de tal forma que N_τ tenha um único homomorfismo peso com valores em K . Suponha que $f : N \rightarrow K$ é um homomorfismo de álgebras. Como podemos construir uma extensão $\bar{f} : N_\tau \rightarrow K$ de f ?

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & N_\tau \\ f \searrow \swarrow & & \bar{f} \\ & K & \end{array}$$

Nós observamos que é suficiente definir $\bar{f}(1, 0)$, pois $\bar{f}(\alpha, a) = \bar{f}((\alpha, 0) + (0, a)) = \alpha \bar{f}(1, 0) + f(a)$, onde a é identificado com $(0, a)$. Chamamos $\bar{f}(1, 0) = b \in K$. Assim $(1, 0)^2 = (1, 0)$ implica $b^2 = b$ e então $b = 0$ ou $b = 1$. Mas também $(1, 0)(0, a) = (0, \tau(a))$ para todo $a \in N$ e daí $bf(a) = f(\tau(a))$ para todo $a \in N$. Suponha que $\tau(N) \subset \ker f$. Neste caso $b = 0$ é uma solução de $bf(a) = f(\tau(a))$ para todo $a \in N$. Nós podemos definir assim $\bar{f}(1, 0) = 0$ para obter uma extensão de f a N_τ . Ela é uma extensão trivial. O outro possível valor $b = 1$ requer $f = f\tau$. Neste caso a extensão é dada por $\bar{f}(1, 0) = 1$.

Suponhamos agora que N tem a propriedade : para todo elemento x de N existe uma potência não associativa de x a qual é zero. Desta hipótese segue que o único homomorfismo $f : N \rightarrow K$ é $f = 0$. Neste caso, este homomorfismo nulo tem exatamente duas extensões a N_τ , pois ambas condições $f = f\tau$ e $\tau(N) \subset \ker f$ são satisfeitas. Assim N_τ admite um único homomorfismo não nulo com valores em K , dado por $(1, 0) \mapsto 1$.

Observemos que ambos os Lemas 3.5 e 9.3 de [23] citados acima são casos particulares do que provamos agora.

Um problema a resolver agora é o seguinte : Quando duas transformações lineares $\tau, \rho : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ produzem álgebras báricas isomorfas? Isto faz que $\psi|_{\mathbf{N}} = id_{\mathbf{N}}$ e o diagrama seguinte deve comutar , onde ψ é um isomorfismo de $\mathbf{K}$ -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}_\tau & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{N}_\rho \\ & \searrow \swarrow & \\ & \mathbf{K} & \end{array}$$

Isto pode colocar-se de uma maneira mais geral : Dadas duas álgebras $\mathbf{A}$ e $\mathbf{N}$ sobre $\mathbf{K}$, transformações lineares $\tau : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, $\rho : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ como estender um homomorfismo $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{N}$ a um homomorfismo $\bar{f} : \mathbf{A}_\tau \longrightarrow \mathbf{N}_\rho$?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathbf{A} & \hookrightarrow & \mathbf{A}_\tau \\ & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ \mathbf{N} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{N} & \hookrightarrow & \mathbf{N}_\rho \end{array}$$

Novamente, devemos definir corretamente $\bar{f}(1,0)$. Consideramos $\bar{f}(1,0) = (1,b)$ para algum $b \in \mathbf{N}$, pois $\bar{f}$ deve comutar com w . Como $(1,0)$ é idempotente em $\mathbf{A}_\tau$ então $(1,b)$ deve ser idempotente em $\mathbf{N}_\rho$: $(1,b) = (1,b)^2 = (1,b^2 + 2\rho(b))$ implica $\rho(b) = \frac{1}{2}(b - b^2)$. Uma outra condição necessária é obtida da igualdade $(1,0)(0,a) = (0,\tau(a))$ para todo $a \in \mathbf{A}$. Isto implica que, como $\bar{f}$ coincide com f sobre $\mathbf{A}$, $(1,b)(0,f(a)) = (0,f\tau(a))$ ou $b f(a) + \rho(f(a)) = f(\tau(a))$ para todo $a \in \mathbf{A}$. Chamando L_b a aplicação linear em $\mathbf{N}$ dada por $L_b(x) = bx$, a condição acima é $L_b f = f\tau - \rho f$.

Reciprocamente, se escolhemos um elemento $b \in \mathbf{N}$ satisfazendo $\rho(b) = \frac{1}{2}(b - b^2)$ e $L_b f = f\tau - \rho f$, nós podemos estender f a $\bar{f} : \mathbf{A}_\tau \longrightarrow \mathbf{N}_\rho$, definida por $\bar{f}(1,0) = (1,b)$ e este será um homomorfismo de $\mathbf{K}$ -álgebras. Para qualquer $(\alpha,a) \in \mathbf{A}_\tau$ temos $\bar{f}(\alpha,a) = \bar{f}(\alpha(1,0) + (0,a)) = \alpha(1,b) + (0,f(a)) = (\alpha, \alpha b + f(a))$. A prova de que $\bar{f}$ é um homomorfismo é trivial agora. Se $(\alpha_1, a_1), (\alpha_2, a_2)$ são elementos arbitrários de $\mathbf{A}_\tau$, então temos que

$$\begin{aligned} \bar{f}((\alpha_1, a_1)(\alpha_2, a_2)) &= \bar{f}((\alpha_1 \alpha_2, a_1 a_2 + \tau(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1))) \\ &= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 b + f(a_1 a_2) + \tau(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1)) \\ &= (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 b + f(a_1) f(a_2) + f\tau(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1)) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\alpha_1, a_1)\bar{f}(\alpha_2, a_2) &= (\alpha_1, \alpha_1 b + f(a_1))(\alpha_2, \alpha_2 b + f(a_2)) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2, (\alpha_1 b + f(a_1))(\alpha_2 b + f(a_2)) + \rho(\alpha_1(\alpha_2 b + f(a_2)) + \alpha_2(\alpha_1 b + f(a_1))) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b f(a_2) + \alpha_2 b f(a_1) + f(a_1)f(a_2) + 2\alpha_1 \alpha_2 \rho(b) + \alpha_1 \rho f(a_2) + \alpha_2 \rho f(a_1)) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 (b^2 + 2\rho(b)) + f(a_1)f(a_2) + b f(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1) + \rho f(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1)) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 b + f(a_1)f(a_2) + (L_b f + \rho f)(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1)) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 b + f(a_1)f(a_2) + f\tau(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1))
\end{aligned}$$

e assim $\bar{f}$ é um homomorfismo de álgebras báricas.

Qual é o núcleo de $\bar{f}$? Nós temos que $\ker \bar{f} = \{(\alpha, a) \in \mathbf{A}_\tau / \alpha = 0, \alpha b + f(a) = 0\} = \ker f$. Como $\mathbf{A}$ é de dimensão finita e f injetora se e somente se $\bar{f}$ é injetora, então f isomorfismo implica $\bar{f}$ isomorfismo. Mostramos que cada solução b do sistema

$$\begin{cases} \rho(b) = \frac{1}{2}(b - b^2) \\ L_b f = f\tau - \rho f \end{cases}$$

pode ser usada para construir uma extensão de f a $\mathbf{A}_\tau$. Se tomamos $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, $f = id_{\mathbf{A}}$, as soluções do sistema

$$\begin{cases} \rho(b) = \frac{1}{2}(b - b^2) \\ L_b = \tau - \rho \end{cases}$$

definirão extensões da aplicação identidade $id_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Este sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} \rho(b) = \frac{1}{2}(b - b^2) \\ \rho = \tau - L_b \end{cases}$$

Nós temos assim uma fórmula para as extensões isomorfas. Se começamos com uma aplicação linear $\tau : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, todas as $\rho : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ tais que existe um $\mathbf{A}$ -isomorfismo $\psi : \mathbf{A}_\tau \rightarrow \mathbf{A}_\rho$, onde $\psi(1, 0) = (1, b)$ são obtidas resolvendo a equação $\tau(b) = \frac{1}{2}(b + b^2)$ e tomando $\rho = \tau - L_b$.

Vejamos agora o seguinte exemplo, mostrando que τ pode ser a única transformação linear obtida por este método (justamente com $b = 0$). Tomemos a álgebra $\mathbf{A}$ de dimensão n com uma base $\{c_1, \dots, c_n\}$ e tábuas de multiplicação

$$c_i^2 = c_n \ (1 \leq i \leq n-1), \ c_n^2 = 0 \text{ e todos os outros produtos zero}$$

Então se $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$, $b^2 = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2) c_n$. Tomamos $\tau : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ definida por $\tau(b) = \frac{1}{2}b$, para todo $b \in \mathbf{A}$. Então a equação $\tau(b) = \frac{1}{2}(b + b^2)$ implica $b^2 = 0$ ou $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 = 0$. Suponhamos agora $\mathbf{K}$ um corpo ordenado. Isto implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, assim $b = \alpha_n c_n$. Mas agora $L_b = \alpha_n L_{c_n} = 0$ donde $\rho = \tau - L_b = \tau$.

Analogamente tomemos $\mathbf{K}$ um corpo de característica 0 e a $\mathbf{K}$ -álgebra com base $\{c_1, c_2, c_3\}$ e tábua de multiplicação

$$c_1^2 = \frac{1}{5}c_2, \quad c_1 c_2 = \frac{1}{20}c_3, \quad \text{outros produtos são zero}$$

Um cálculo trivial mostra que as transformações lineares ρ obtidas de

$$\tau(c_1) = \frac{1}{2}c_1, \quad \tau(c_2) = \frac{1}{5}c_2, \quad \tau(c_3) = \frac{1}{20}c_3$$

pelas fórmulas acima, são dadas por

$$c_1 \mapsto \frac{1}{2}c_1 - \frac{m}{5}c_2 + \frac{m^2}{80}c_3, \quad c_2 \mapsto \frac{1}{5}c_2 - \frac{m}{20}c_3, \quad c_3 \mapsto \frac{1}{20}c_3$$

onde m é um elemento arbitrário de $\mathbf{K}$. Assim todas as tabelas

	c_0	c_1	c_2	c_3
c_0	c_0	$\frac{1}{2}c_1 - \frac{m}{5}c_2 + \frac{m^2}{80}c_3$	$\frac{1}{5}c_2 - \frac{m}{20}c_3$	$\frac{1}{20}c_3$
c_1		$\frac{1}{5}c_2$	$\frac{1}{20}c_3$	0
c_2			0	0
c_3				0

representam cópias isomorfas de $G(2,6)$, a álgebra gamética para hexaploides (ver [23, pág.9]). Um cálculo similar, porém mais complicado, pode ser feito para poliplóides.

4.2 Sobre os idempotentes em álgebras de Schafer

Em álgebra genética, o estudo de idempotentes é um problema central, pois eles representam populações em equilíbrio. Como nós vimos, idempotentes de $\mathbf{N}_\tau$ são os idempotentes de $\mathbf{N}$ ou elementos da forma $(1, b)$, $b \in \mathbf{N}$, tal que $2\tau(b) = b - b^2$. Assim

$(1, 0)$ é o único idempotente de peso 1 em N_τ se e somente se a equação $2\tau(b) = b - b^2$ tem como única solução a solução trivial em N .

Suponha que N é uma álgebra com uma cadeia de ideais $N = N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k \supset N_{k+1} = 0$, tal que $N_1 N_j \subset N_{j+1}$ ($j = 1, \dots, k$). Se $\tau : N \rightarrow N$ é um operador linear tal que $\tau(N_j) \subset N_j$ ($j = 1, \dots, k$) então N_τ é chamada uma *álgebra de Schafer* sobre N determinada por τ . Nós observamos que o conjunto de todos os operadores lineares $\tau : N \rightarrow N$ tal que $\tau(N_j) \subset N_j$ ($j = 1, \dots, k$) é uma subálgebra da álgebra de operadores lineares em N . É fácil calcular sua dimensão, como uma função de $\dim N_j$ ($j = 1, \dots, k$).

Proposição 4.1 *Sejam N e τ como acima. Se $\tau - \frac{1}{2}id_N$ é um operador inversível então $(1, 0)$ é o único idempotente de N_τ .*

Demonstração: Claramente N não pode ter idempotentes de peso zero. Agora seja σ o operador inverso de $\tau - \frac{1}{2}id_N$. Então $\sigma\tau - \frac{1}{2}\sigma = \tau\sigma - \frac{1}{2}\sigma = id_N$. Suponha que $a \neq 0$ é uma solução de $2\tau(a) = a - a^2$. Então $\sigma\tau(a) = \frac{1}{2}[\sigma(a) - \sigma(a^2)]$ ou $(id_N + \frac{1}{2}\sigma)(a) = \frac{1}{2}[\sigma(a) - \sigma(a^2)]$, assim $a = -\frac{1}{2}\sigma(a^2)$, $\sigma(a^2) + 2a = 0$. Seja j tal que $a \in N_j$ e $a \notin N_{j+1}$, então $a^2 \in N_{j+1}$ e assim $\sigma(a^2) \in N_{j+1}$, isto é, $a \in N_{j+1}$, contradição. Desta forma a equação $2\tau(a) = a - a^2$ tem somente a solução trivial. ■

Um caso particular de álgebras de Schafer é importante na teoria das álgebras genéticas. Suponhamos N de dimensão k e possuindo uma sequência de $k + 1$ ideais como anteriormente. Para todo $\tau : N \rightarrow N$ tal que $\tau(N_j) \subset N_j$ ($j = 1, \dots, k$) a K -álgebra N_τ é chamada *álgebra de Gonshor* sobre N , determinada pelo operador τ . Construamos uma base de N , digamos $\{c_1, \dots, c_k\}$, tal que $\{c_j, \dots, c_k\}$ é uma base para N_j ($j = 1, \dots, k$). Então a matriz de τ nesta base é triangular. Os elementos da diagonal são chamados de *train raízes* de N_τ ([23], p.46). Nós redemonstramos agora um resultado provado por Gonshor em 1971 [23, teo. 4.4]. Nossa demonstração tem uma vantagem sobre a de Gonshor: ela é mais intrínseca e possível de generalização.

Corolário 4.1 *Se todas as train raízes de N_τ são diferentes de $\frac{1}{2}$, então N_τ tem um único idempotente de peso 1.*

Damos agora outra prova do teorema 4.6, pag 67 de [23] e depois disso indicamos como tratar o caso geral.

Teorema 4.1 *Suponha $\dim \mathbf{N} = k$ e que $\mathbf{N}$ possui uma cadeia de ideais $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{N}_k \supset \mathbf{N}_{k+1} = 0$ tal que $\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_j \subset \mathbf{N}_{j+1}$ ($j = 1, \dots, k$). Suponha ainda que $\tau : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ satisfaz $\tau(\mathbf{N}_j) \subset \mathbf{N}_j$ ($j = 1, \dots, k$). Suponha também que*

a) Existe $c_1 \in \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2$ tal que $\tau(c_1) - \frac{1}{2}c_1 \in \mathbf{N}_2$.

b) Análogas condições não são válidas para $\mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_k$.

Então a equação $2\tau(b) = b - b^2$ tem uma família 1-paramétrica de soluções em $\mathbf{N}$ e assim $\mathbf{N}_\tau$ tem uma família 1-paramétrica de idempotentes de peso 1.

Demonstração: Construimos uma base de $\mathbf{N}$ levantando sucessivamente bases de $\mathbf{N}_k, \dots, \mathbf{N}_2$ e agregando finalmente o vetor c_1 . Esta base satisfaz :

$$\tau(c_1) - \frac{1}{2}c_1 \in \mathbf{N}_2 \text{ e } \tau(c_j) - \frac{1}{2}c_j \notin \mathbf{N}_{j+1} \text{ (} j = 2, \dots, k \text{)}$$

Seja $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ sua base dual. Nós provaremos agora que dado $\lambda_1 \in \mathbf{K}$ existe uma solução (e só uma) da equação $2\tau(b) = b - b^2$ da forma $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_k c_k$ para algum $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$. Para qualquer vetor $b = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k$, nós temos $b - \tau(b) = \lambda_1 [c_1 - 2\tau(c_1)] + \dots + \lambda_k [c_k - 2\tau(c_k)]$. Se queremos b como solução da equação acima devemos ter $b^2 = \lambda_1 [c_1 - 2\tau(c_1)] + \dots + \lambda_k [c_k - 2\tau(c_k)]$. Aplicando as formas lineares $\phi_1, \dots, \phi_k$ a esta igualdade, temos um sistema triangular, o qual é quadrático em $\lambda_1, \dots, \lambda_k$:

$$\begin{cases} \phi_1(b^2) = \lambda_1 \phi_1 [c_1 - 2\tau(c_1)] = 0 \\ \phi_2(b^2) = \lambda_1 \phi_2 [c_1 - 2\tau(c_1)] + \lambda_2 \phi_2 [c_2 - 2\tau(c_2)] \\ . \\ . \\ \phi_k(b^2) = \lambda_1 \phi_k [c_1 - 2\tau(c_1)] + \dots + \lambda_k \phi_k [c_k - 2\tau(c_k)] \end{cases}$$

Nestas equações os coeficientes $\phi_j [c_j - 2\tau(c_j)]$ ($j = 2, \dots, k$) são não nulos pois $c_j - 2\tau(c_j) \notin \mathbf{N}_{j+1}$. Assim nós podemos escrever λ_2 como uma função de λ_1 , $\phi_2(b^2)$, $\phi_2 [c_1 - 2\tau(c_1)]$ e $\phi_2 [c_2 - 2\tau(c_2)]$. Isto provém da segunda das equações acima. Porém substituindo na terceira equação, obtemos λ_3 como função de λ_1, λ_2 e alguns outros elementos relacionados com ϕ_2 e ϕ_3 , e assim sucessivamente. Neste sentido, a primeira coordenada λ_1 de uma solução determina todas as outras coordenadas. Como $\phi_j(b^2)$ pode ser obtido como uma função de $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}$ e constantes de estrutura da base $\{c_1, \dots, c_n\}$, nós temos de fato λ_j como uma função de λ_1 e algumas constantes de $\mathbf{N}$. Reciprocamente, dado um elemento $\lambda_1 \in \mathbf{K}$ como construímos uma solução de $2\tau(b) = b - b^2$ tendo λ_1 como primeira coordenada ? É suficiente tomar λ_2 como foi dado na segunda equação, onde $\phi_2(b^2)$

depende somente de algumas constantes de estrutura e λ_1 . Agora nós construímos λ_3 de acordo com a terceira equação e assim sucessivamente. ■

Nós apresentamos agora um argumento geral como alternativa dos teoremas 4.6, 4.8 e 4.9 de [23].

Seja N_τ uma álgebra de Gonshor arbitrária, definida como acima. Denotamos por $\tau(x_j) \equiv \frac{1}{2}x_j \pmod{N_{j+1}}$ o fato de que $\tau(x_j) - \frac{1}{2}x_j \in N_{j+1}$. Para um ideal dado N_j a congruência $\tau(x_j) \equiv \frac{1}{2}x_j \pmod{N_{j+1}}$ pode ter somente as soluções triviais, isto é, soluções pertencendo a N_{j+1} . Mas pode ter também soluções não triviais, isto é, elementos pertencentes a N_j , mas não a N_{j+1} .

Assim nós procedemos como a seguir : observamos cada congruência para $j = 1, \dots, k$. Se uma congruência dada tem soluções não triviais, tomamos uma destas. Fazemos isto para todas as congruências. Construímos a base de N , levantando bases de $N_k, N_{k-1}, \dots$, mas usando, em cada caso, uma solução não trivial, se ela existe. Finalmente nós temos uma base $\{c_1, \dots, c_k\}$ de N . Dedenotemos por $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ sua base dual. Se denotamos agora $c_j - 2\tau(c_j)$ por d_j , nós temos como no teorema 4.1, o sistema (quadrático mas bem comportado)

$$\begin{pmatrix} \phi_1(b^2) \\ \phi_2(b^2) \\ \vdots \\ \phi_k(b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(d_1) & & & \\ \phi_2(d_1) & \phi_2(d_2) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \phi_k(d_1) & \phi_k(d_2) & \dots & \phi_k(d_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Na diagonal da matriz quadrada, o elemento $\phi_j(d_j)$ é não nulo se e somente se a congruência $\tau(x) \equiv \frac{1}{2}x \pmod{N_j}$ tem somente soluções triviais. Nós podemos resolver este sistema por substituições sucessivas e assim descrever as soluções de $2\tau(b) = b - b^2$, tomando cuidado na compatibilidade das soluções. As congruências com soluções não triviais podem aparecer em toda posição da sequência $N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_k \supset N_{k+1} = 0$, e porisso nós temos, de fato, um grande número de possibilidades para o sistema acima. Precisamente, 2^k tipos de sistemas podem aparecer. Este método funciona, em princípio, em todos os casos. Porém a dificuldade cresce muito com a dimensão de N .

4.3 Imersões em T-álgebras

Como uma aplicação desta forma de olhar para álgebras básicas (isto é, como uma extensão por um operador), nós resolvemos o seguinte problema em um caso muito particular.

Problema da imersão de nilálgebras em train álgebras: Suponha dada uma álgebra comutativa N que satisfaz a equação $x^r = 0$ para algum r . Pode-se achar uma train álgebra A satisfazendo uma T-equação dada $x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1}\omega(x)x^{r-1}x = 0$ e tendo N como seu núcleo ?. Um exemplo deste problema aparece em [23], p.51, quando a autora estuda o problema de saber se todas as train álgebras são genéticas. O mesmo exemplo aparece em [1].

A título de exemplo, nós respondemos a pergunta acima por cálculo direto, no caso de uma álgebra N de dimensão 3 e com a seguinte tábua de multiplicação :

	c_1	c_2	c_3
c_1	c_3	0	0
c_2		c_3	0
c_3			0

Ela satisfaz a identidade $x^3 = 0$ e queremos imergir N numa T-álgebra de posto 3 satisfazendo $x^3 + \gamma_1\omega(x)x^2 + \gamma_2\omega^2(x)x = 0$, onde $1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Apesar de ser apenas um exemplo já se pode perceber a dificuldade de tratar o problema da imersão em toda a sua generalidade.

Esta T-álgebra deve ser da forma N_τ , para algum operador $\tau : N \rightarrow N$ satisfazendo as equações

$$\begin{cases} 2\tau(a)a + \tau(a^2) + \gamma_1 a^2 = 0, & a \in N \\ 2\tau^2 + (1 + 2\gamma_1)\tau + \gamma_2 id_N = 0 \end{cases}$$

Reciprocamente se o operador linear τ satisfaz estas condições então A_τ satisfará $x^3 + \gamma_1\omega(x)x^2 + \gamma_2\omega^2(x)x = 0$. Notamos que a primeira equação interrelaciona a multiplicação em N e a ação de τ , mas a segunda equação depende só de τ . Nós trataremos agora de determinar estes operadores lineares $\tau : N \rightarrow N$ que satisfazem o sistema de equações

acima. Chamamos

$$\tau = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

a matriz do operador τ em $\mathbf{N}$ em relação à base $\{c_1, c_2, c_3\}$. Se $a = \sum_{i=1}^3 \alpha_i c_i \in \mathbf{N}$ então

$$\tau(a) = (m_1\alpha_1 + n_1\alpha_2 + p_1\alpha_3)c_1 + (m_2\alpha_1 + n_2\alpha_2 + p_2\alpha_3)c_2 + (m_3\alpha_1 + n_3\alpha_2 + p_3\alpha_3)c_3$$

e assim $2\tau(a)a = 2[(m_1\alpha_1 + n_1\alpha_2 + p_1\alpha_3)\alpha_1 + (m_2\alpha_1 + n_2\alpha_2 + p_2\alpha_3)\alpha_2]c_3$.

Como $\tau(a^2) = \tau((\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c_3) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3)$ a equação $2\tau(a)a + \tau(a^2) + \gamma_1 a^2 = 0$ implica que

$$\begin{cases} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p_1 = 0 \\ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p_2 = 0 \\ 2(m_1\alpha_1 + n_1\alpha_2 + p_1\alpha_3)\alpha_1 + 2(m_2\alpha_1 + n_2\alpha_2 + p_2\alpha_3)\alpha_2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p_3 + \gamma_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0 \end{cases}$$

para todo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{K}$. Assim $p_1 = p_2 = 0$ e $2(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 n_1)\alpha_1 + 2(m_2\alpha_1 + n_2\alpha_2)\alpha_2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p_3 + \gamma_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0$. Estas identidades transformam-se em

$$\begin{cases} 2m_1 + p_3 + \gamma_1 = 0 \\ 2n_2 + p_3 + \gamma_1 = 0 \\ n_1 + m_2 = 0 \end{cases}$$

e então

$$\tau = \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & 0 \\ m_2 & m_1 & 0 \\ m_3 & n_3 & -2m_1 - \gamma_1 \end{pmatrix} \text{ é a solução geral de } 2\tau(a)a + \tau(a^2) + \gamma_1 a^2 = 0.$$

Por outra parte

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 - m_2^2 & -2m_1n_2 & 0 \\ 2m_1m_2 & m_1^2 - m_2^2 & 0 \\ -m_1m_3 + n_3m_2 - \gamma_1m_3 & -(m_2m_3 + n_3m_1 + n_3\gamma_1) & (2m_1 + \gamma_1)^2 \end{pmatrix}$$

Depois de algumas simplificações das equações derivadas de $2\tau^2 + (1 + 2\gamma_1)\tau + \gamma_2 id_{\mathbf{N}} = 0$, temos

$$\begin{cases} 2m_1m_3 - 2m_2n_3 + 2\gamma_1m_3 - (1 + 2\gamma_1)m_3 = 0 \\ 4m_1m_2 + (1 + 2\gamma_1)m_2 = 0 \\ 2(m_1^2 - m_2^2) + (1 + 2\gamma_1)m_1 + \gamma_2 = 0 \\ 2m_2m_3 + 2n_3m_1 + 2n_3\gamma_1 - (1 + 2\gamma_1)n_3 = 0 \\ 2(2m_1 + \gamma_1)^2 - (1 + 2\gamma_1)(2m_1 + \gamma_1) + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Analisemos uma solução com $m_2 = 0$. O sistema reduz-se a

$$\begin{cases} 2m_1m_3 + 2\gamma_1m_3 - (1 + 2\gamma_1)m_3 = 0 \\ 2m_1^2 + (1 + 2\gamma_1)m_1 + \gamma_2 = 0 \\ 2n_3m_1 + 2n_3\gamma_1 - (1 + 2\gamma_1)n_3 = 0 \\ 2(2m_1 + \gamma_1)^2 - (1 + 2\gamma_1)(2m_1 + \gamma_1) + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

e nós observamos que $m_1 = \frac{1}{2}$ é uma solução da segunda e quarta equação anterior. Este valor de m_1 reduz as duas equações restantes a identidades. Assim podemos tomar como uma solução

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ m_3 & n_3 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

onde m_3 e n_3 são elementos arbitrários do corpo $\mathbf{K}$. Podemos escrever uma tábua de multiplicação de $\mathbf{N}_\tau$, mas preferimos uma mudança de base de $\mathbf{N}$. Vemos que os valores próprios de τ são $\frac{1}{2}$ (duplo) e γ_2 . Suponha primeiro que $\gamma_2 \neq \frac{1}{2}$. O vetor c_3 satisfaz $\tau(c_3) = \gamma_2 c_3$. Quais são agora os vetores próprios correspondentes a $\frac{1}{2}$? Um simples cálculo produz os vetores próprios linearmente independentes (onde devemos supor $3 + 2\gamma_1 \neq 0$)

$$x_1 = c_1 + \frac{2m_3}{3 + 2\gamma_1}c_3, \quad x_2 = c_2 + \frac{2n_3}{3 + 2\gamma_1}c_3$$

Chamando de $c_3 = x_3$ temos uma nova base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de $\mathbf{N}$, tal que $x_1^2 = x_2^2 = x_3$, e todos os outros produtos são zero. Então a tabela de $\mathbf{N}_\tau$ é

	c_0	x_1	x_2	x_3
c_0	c_0	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	$\gamma_2 x_3$
x_1		x_3	0	0
x_2			x_3	0
x_3				0

Esta é uma álgebra de Gonshor com train raízes $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \gamma_2$. Como T-álgebra seu tipo é $(3, 1)$. Assim diferentes valores de γ_2 (= diferentes train equações) dão álgebras não isomorfas.

Estes cálculos mostram que nossa álgebra pode ser imersa em uma única train álgebra de posto 3 com T-equação $x^3 + \gamma_1 \omega(x)x^2 + \gamma_2 \omega^2(x)x = 0$, se $\gamma_2 \neq \frac{1}{2}$.

O caso $\gamma_2 = \frac{1}{2}$, isto é, a T-equação é $x^3 - \frac{3}{2}\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}\omega^2(x)x = 0$ é analisada agora. Nós temos a tabela seguinte

	c_0	c_1	c_2	c_3
c_0	c_0	$\frac{1}{2}c_1 + m_3 c_3$	$\frac{1}{2}c_2 + n_3 c_3$	$\frac{1}{2}c_3$
c_1		c_3	0	0
c_2			c_3	0
c_3				0

e verificamos que de fato, para qualquer escolha de m_3 e n_3 , a equação acima é satisfeita. Consideremos elementos x tais que $\omega(x) = 1$. Se $x = c_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i c_i$ então $x^2 = x + k$ onde $k = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 m_3 + 2\alpha_2 n_3)c_3$. Assim $x^3 = x^2 x = (x + k)x = x^2 + kx = x + k + kx$. Mas $xk = \frac{1}{2}k$ e então $x^3 = x + \frac{3}{2}k$. Segue-se que $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$. Assim provamos que existe uma família a dois parâmetros de álgebras satisfazendo $x^3 - \frac{3}{2}\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}\omega^2(x)x = 0$ e tendo $\mathbf{N}$ como seu núcleo. Nós não podemos em geral determinar os coeficientes m_3 e n_3 .

O problema de imersão de nilálgebras em T-álgebras continua sendo um dos mais difíceis na teoria das T-álgebras. Recentemente, em sua tese de doutorado, H. Guzzo Jr estudou um caso de imersão de nilálgebras em T-álgebras.

Capítulo 5

Morfismos de Peirce em T-álgebras de posto 3

5.1 Automorfismos

Neste capítulo estudamos as relações entre as transformações de Peirce e os automorfismos de uma T-álgebra $\mathbf{A}$ de posto 3. As transformações de Peirce permitem descrever a passagem entre duas decomposições de Peirce correspondentes a dois idempotentes. Elas transformam escrituras e os automorfismos de Peirce transformam estruturas. Assumiremos que o leitor conhece a terminologia básica de grupos e de álgebras de Lie.

No capítulo 1 foi estabelecido que todo elemento idempotente $e \in I(\mathbf{A})$ induz a decomposição de Peirce $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$, onde $\mathbf{U}^2 \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{UV} \subseteq \mathbf{U}$, $\mathbf{V}^2 = 0$ e para todo $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ temos $eu = \frac{1}{2}u$, $ev = \gamma v$ ($\gamma \neq \frac{1}{2}$). Além disso obtivemos o conjunto dos elementos idempotentes não nulos de $\mathbf{A}$ como $I(\mathbf{A}) = \{e_w := e + w + \alpha w^2 \mid w \in \mathbf{U}\}$ onde $\alpha = (1 - 2\gamma)^{-1}$. Neste capítulo, α sempre indicará o escalar $(1 - 2\gamma)^{-1}$ e consideraremos $\mathbf{K}$ corpo de característica diferente de 2 e 3.

Os espaços $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ dependem do idempotente escolhido e por isso denotaremos por $\mathbf{K}e_w \oplus \mathbf{U}_w \oplus \mathbf{V}_w$ a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ em relação a e_w .

Proposição 5.1 *Se $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ é uma T-álgebra de posto 3, então a aplicação $\phi: \mathbf{U} \rightarrow I(\mathbf{A})$ tal que $w \mapsto e + w + \alpha w^2$, é bijetora.*

Demonstração: Seja $x = \lambda e + u + v \in I(\mathbf{A})$, isto é, $(\lambda e + u + v)^2 = \lambda e + u + v$, e assim

$\lambda^2 e + \lambda u + 2uv + u^2 + 2\lambda\gamma v = \lambda e + u + v$ donde $\lambda^2 = \lambda$, $\lambda u + 2uv = u$, $u^2 + 2\lambda\gamma v = v$. Se $\lambda = 0$ temos $x = 0$, pois $\ker w = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Se $\lambda = 1$ então $uv = 0$, $u^2 = (1 - 2\gamma)v$, logo $v = (1 - 2\gamma)^{-1}u^2 = \alpha u^2$ e $x = e + u + \alpha u^2$, assim ϕ é sobrejetora. Que ϕ injetora é imediato. ■

O resultado seguinte explica a relação entre duas decomposições de Peirce.

Proposição 5.2 *Se $\mathbf{A} = \mathbf{K}e_w \oplus \mathbf{U}_w \oplus \mathbf{V}_w$, então $\mathbf{U}_w = \{u_w := u + 2\alpha wu/u \in \mathbf{U}\}$ e $\mathbf{V}_w = \{v_w := v - 2\alpha wv/v \in \mathbf{V}\}$.*

Demonstração: Seja $x \in \ker w$ tal que $x = u + v$ onde $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$. Se $x \in \mathbf{U}_w$ então $e_w x = \frac{1}{2}x$, logo $(e + w + \alpha w^2)(u + v) = \frac{1}{2}(u + v)$. Assim $wv + \alpha w^2 u = 0$ e $(\gamma - \frac{1}{2})v + wu = 0$. Donde $v = 2\alpha wu$ e então $\mathbf{U}_w = \{u + 2\alpha wu/u \in \mathbf{U}\}$. Em forma análoga, se $x \in \mathbf{V}_w$ então $e_w x = \gamma x$ ou $(e + w + \alpha w^2)(u + v) = \gamma(u + v)$, logo $(\frac{1}{2} - \gamma)u + wv + \alpha w^2 u = 0$ e $uw = 0$; mas $w(wu) = -\frac{1}{2}w^2 u$, então $w^2 u = 0$ e $u = -2\alpha wv$, assim $\mathbf{V}_w = \{v - 2\alpha wv/v \in \mathbf{V}\}$. ■

As transformações de Peirce, associadas ao elemento idempotente e , são as aplicações lineares bijetoras $T_w : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ definidas por $T_w(\lambda e + u + v) = \lambda e_w + u_w + v_w$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Elas transportam a decomposição de Peirce relativa a e naquela relativa a e_w , o que justifica o nome de transformações de Peirce associadas ao idempotente e . Para simplificar a escritura, notaremos $T_w(x) = x_w$ para $x \in \mathbf{A}$. Notamos por P_w o conjunto de todas as transformações de Peirce que são produzidas da decomposição determinada por e_w , isto é, $P_w = \{T_{u_w}/u \in \mathbf{U}\}$. Convencionamos que $e_0 = e$, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$ e $P_0 = P$.

Corolário 5.1 *T_w é multiplicativa sobre $\mathbf{U}$.*

Demonstração: Consideremos $u, u' \in \mathbf{U} : T_w(uu') = uu' - 2\alpha w(uu')$. Mas $T_w(u) = u_w = u + 2\alpha(wu)$ e $T_w(u') = u'_w = u' + 2\alpha(wu')$. Assim temos $T_w(u)T_w(u') = uu' + 2\alpha u(wu') + 2\alpha u'(wu) + 4\alpha^2(wu)(wu')$. Por outro lado $(wu)(wu') = 0$ e $u(wu') + w(uu') + u'(wu) = 0$ (identidade de Jacobi). Donde $T_w(u)T_w(u') = uu' - 2\alpha w(uu')$ e então $T_w(u)T_w(u') = T_w(uu')$. ■

O dicionário de passagem de uma escritura a outra está dado na proposição seguinte.

Proposição 5.3 *Seja $w \in \mathbf{U}$, então para todo $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ tem-se*

a) $c = e_w - w_w + \alpha w_w^2$.

b) $u = (u + 2\alpha^2 w^2 u)_w - 2\alpha(wu)_w.$

c) $v = v_w + 2\alpha(wv)_w.$

Demonstração: a) Seja $u \in \mathbf{U}$: $e_w = e + w + \alpha w^2$. Logo $e = e_w - w - \alpha w^2$. Mas $w_w = w + 2\alpha w^2$, $w_w^2 = w^2 - 2\alpha w^3 = w^2$. Então $w = w_w - 2\alpha w_w^2$ e $e = e_w - w_w + \alpha w_w^2$.

b) Por outra parte, temos $u_w = u + 2\alpha wu$ ou $u = u_w - 2\alpha wu$. Mas $(wu)_w = wu - 2\alpha w(wu) = wu + \alpha w^2 u$ e $(w^2 u)_w = w^2 u + 2\alpha w(w^2 u) = w^2 u$, portanto $u = (u + 2\alpha^2 w^2 u)_w - 2\alpha(wu)_w.$

c) Finalmente, $v = v_w + 2\alpha wv$, $v \in \mathbf{V}$ e $(vw)_w = wv + 2\alpha(w(wv)) = wv$, logo $v = v_w + 2\alpha(wv)_w.$ ■

Proposição 5.4 $T_w(I(\mathbf{A})) = I(\mathbf{A})$ para todo $T_w \in P$.

Demonstração: Para todo $u \in \mathbf{U}$ temos $T_w(e_u) = T_w(e + u + \alpha u^2) = e + w + \alpha w^2 + u + 2\alpha uw + \alpha(u^2 - 2\alpha u^2 w)$. Daí $T_w(e_u) = e + u + w - 2\alpha^2 u^2 w + \alpha(u + w)^2$. Chamemos de $r = u + w - 2\alpha u^2 w$, então $r^2 = u^2 + w^2 + 2uw = (u + w)^2$. Desta forma temos então que $T_w(e_u) = e + r + \alpha r^2 = e_r$, isto é, $T_w(I(\mathbf{A})) \subseteq I(\mathbf{A})$. Por outra parte, seja $x \in I(\mathbf{A})$ tal que $x = e + u + \alpha u^2$. Então $x = e_w - w_w + \alpha w_w^2 + (u + 2\alpha^2 w^2 u)_w - 2\alpha(uw)_w + \alpha[u_w^2 + 2\alpha(wu^2)_w] = e_w + u_w - w_w + 2\alpha^2[(w^2 u)_w + (wu^2)_w] + \alpha(u_w^2 - 2u_w w_w + w_w^2) = e_w + [u - w + 2\alpha^2(w^2 u + u^2 w)]_w + \alpha((u - w)_w^2)$. Se $z = u - w + 2\alpha^2(w^2 u + u^2 w)$, $z^2 = (u - w)^2$ então $x = e_u = T_w(e_z) \in T_w(I(\mathbf{A}))$ mostrando assim que $I(\mathbf{A}) \subseteq T_w(I(\mathbf{A}))$. ■

Proposição 5.5 *Seja $T \in \text{Aut}(\mathbf{A})$, então existe $w \in \mathbf{U}$ tal que $T(e) = e_w \in I(\mathbf{A})$, $T(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_w$ e $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}_w$.*

Demonstração: Temos $T(e)^2 = T(e^2) = T(e)$ logo $T(e) \in I(\mathbf{A})$. Assim existe $w \in \mathbf{U}$ tal que $T(e) = e_w$. Seja $u' \in \mathbf{U}$ e suponhamos $T(u') = \lambda e + u + v$, então temos $\frac{1}{2}T(u') = T(\frac{1}{2}u') = T(eu') = T(e)T(u') = e_w T(u')$. Logo $\frac{1}{2}(\lambda e + u + v) = (e + w + \alpha w^2)(\lambda e + u + v)$. Assim de forma análoga como foi provado na proposição 5.2, tem-se $T(u') = u' + 2\alpha wu'$ donde $T(\mathbf{U}) = \mathbf{U}_w$. Da mesma forma, prova-se que se $v' \in \mathbf{V}$ e $T(v') = \lambda e + u + v$, então $\gamma T(v') = T(\gamma v') = T(ev') = T(e)T(v') = e_w T(v')$ portanto $T(v') = v' - 2\alpha wv'$, isto é, $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}_w$. ■

Observação: Podemos mencionar, em relação à proposição anterior, que os automorfismos comportam-se de uma maneira similar aos morfismos de Peirce. No entanto os

morfismos de Peirce em geral não são automorfismos de álgebras.

Daqui para frente estudaremos condições para que as transformações de Peirce sejam automorfismos de álgebras. Nesta direção, temos:

Proposição 5.6 $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$ se e somente se $U^2(UV) = 0$.

Demonstração: Seja $x = u + v \in \ker \omega$ com $u \in U$, $v \in V$. Daí $x^2 = u^2 + 2uv$ e $T_w(x^2) = 2uv - 2\alpha u^2 w + u^2 + 4\alpha w(uv)$. Por outro lado $T_w(x)^2 = (u + 2\alpha uw - 2\alpha wv + v)^2 = 2uv + 4\alpha u(uw) - 8\alpha^2(uw)(wv) - 4\alpha u(wv) + u^2$. Desta forma então temos que $T_w(x^2) = T_w(x)^2$ se e somente se $(uw)(wv) = 0$ ou $w^2(uv) = 0$ para todo $u, w \in U$ e $v \in V$, assim $U^2(UV) = 0$. ■

Observação: Suponhamos as condições da proposição 5.6. Se T é um automorfismo de $\mathbf{A}$ então existe $f \in \text{Aut}(\mathbf{A})$ com $f(e) = e$ e $T_w \in P$ tal que T pode-se escrever de maneira única como $T = T_w \circ f$. Denotamos por $F = \{f \in \text{Aut}(\mathbf{A}) / f(e) = e\}$.

No que segue precisamos do resultado:

Proposição 5.7 $f \circ T_w \circ f^{-1} = T_{f(w)}$ para todo $f \in F$ e $T_w \in P$.

Demonstração: Consideremos $f \in F$, $u \in U$ e $v \in V$. Temos que $f^{-1} \in F$, $f^{-1}(e) = e$, $f^{-1}(u) \in U$ e $f^{-1}(v) \in V$. Assim então se depreende que $(f \circ T_w \circ f^{-1})(e) = f(T_w(f^{-1}(e))) = f(T_w(e)) = f(e + w + \alpha w^2) = e + f(w) + \alpha f(w)^2 = e_{f(w)} = T_{f(w)}(e)$. Também $(f \circ T_w \circ f^{-1})(u) = f(T_w(f^{-1}(u))) = f(f^{-1}(u)_w) = f[f^{-1}(u) + 2\alpha w f^{-1}(u)] = u + 2\alpha f(w)u = u_{f(w)} = T_{f(w)}(u)$. Da mesma forma temos $(f \circ T_w \circ f^{-1})(v) = f(f^{-1}(v)_w) = f[f^{-1}(v) - 2\alpha w f^{-1}(v)] = v - 2\alpha f(w)v = v_{f(w)} = T_{f(w)}(v)$. ■

O conjunto P não é em geral fechado baixo a composição de aplicações. O resultado seguinte mostra que neste caso, $(P, \circ)$ é isomorfo a $(U, +)$.

Proposição 5.8 São equivalentes as relações seguintes:

- a) $P_w = P$ para todo $w \in U$.
- b) $U^3 = 0 = U(UV)$
- c) $(P, \circ)$ é grupo.

d) $(\mathbf{U}, +) \simeq (P, \circ)$

e) P é um subgrupo normal de $\text{Aut}(\mathbf{A})$.

Demonstração: Consideremos os elementos $s, t \in \mathbf{U}$. Então para todo $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ temos as seguintes igualdades:

$$(1) T_{s+t}(e) = e_{s+t} = e + (s+t) + \alpha(s+t)^2$$

$$(2) T_{s+t}(u) = u_{s+t} = u + 2\alpha u(s+t)$$

$$(3) T_{s+t}(v) = v_{s+t} = v - 2\alpha v(s+t)$$

$$(4) (T_s \circ T_t)(e) = e + (s+t - 2\alpha^2 st^2) + \alpha(s+t)^2$$

$$(5) (T_s \circ T_t)(u) = [u - 4\alpha^2 s(ut)] + 2\alpha u(s+t)$$

$$(6) (T_s \circ T_t)(v) = -2\alpha v(s+t) + [v - 4\alpha^2 s(vt)]$$

$$(7) (T_{t_s} \circ T_s)(e) = e + s + t - 2\alpha^2 st^2 + \alpha(s+t)^2$$

$$(8) (T_{t_s} \circ T_s)(u) = [u + 4\alpha^2 u(st) + 4\alpha^2 t(us)] + 2\alpha u(s+t)$$

$$(9) (T_{t_s} \circ T_s)(v) = -2\alpha[(s+t)v + 4\alpha^2(vs)(ts)] + [v + 4\alpha^2 t(vs)]$$

Vamos agora provar a equivalência das condições do teorema.

a) $\Rightarrow$ b) Se para todo $\sigma \in \mathbf{U}$ tem-se $P_\sigma = P$, então para todo $\theta \in \mathbf{U}$ existe $\rho \in \mathbf{U}$ tal que $T_{\theta_\sigma} = T_\rho$, assim $T_{\theta_\sigma} \circ T_\sigma = T_\rho \circ T_\sigma$. Pondo em (4), (5) e (6), $s = \rho$, $t = \sigma$ e $t = \theta$, $s = \sigma$ em (7), (8) e (9). Se escolhermos $u = \sigma$, então da comparação de termos de $\mathbf{U}$ em (5) e (8) (respectivamente em $\mathbf{V}$) teremos :

$$2\sigma(\sigma\rho) + \sigma(\sigma\theta) = 0$$

e

$$(\rho + \sigma)\sigma - (\sigma + \theta)\sigma = 0$$

logo $\sigma\rho = \sigma\theta$. Donde decorre que $3\sigma(\sigma\theta) = 0$ e como $\text{car}\mathbf{K} \neq 3$ então $\mathbf{U}^3 = 0$. Com as mesmas substituições anteriores e comparando os termos de (4) e (7) em $\mathbf{U}$, temos $\rho = \theta$. Agora identificando os termos de $\mathbf{V}$ em (6) e (9) temos $4s(vt) + 4t(vs) = 0$ ou $4\rho(\sigma v) + 4\theta(\sigma v) = 0$, mas $\rho = \theta$ e assim $\theta(\sigma v) = 0$ para todo θ , $\sigma \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$, logo $\mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$.

b) $\Rightarrow$ c) Se $u, \sigma, \theta \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ então temos $\theta(\theta\sigma)$, $\sigma(\theta u) \in \mathbf{U}^3 = 0$, $\sigma(\theta v) \in \mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$. Pondo $s = \sigma$, $t = \theta$ em (1) até (6) concluimos que $T_\sigma \circ T_\theta = T_{\sigma+\theta}$ e então $(P, \circ)$ é grupo.

c) $\Rightarrow$ d) Sejam $\sigma, \theta, \rho \in \mathbf{U}$ tal que $T_\sigma \circ T_\theta = T_\rho$. Pondo $s = \sigma$ e $t = \theta$ em (4), (5) e (6). Se escolhermos $u = \theta$ então a comparação de termos de $T_\rho(\theta)$ e (5) em $\mathbf{U}$, dá como resultado

$\sigma\theta^2 = 0$. De fato :

$$T_\rho(\theta) = \theta + 2\alpha\theta\rho$$

e

$$(T_\sigma \circ T_\theta)(\theta) = \theta - 4\alpha^2\sigma\theta^2$$

Donde obtemos nosso resultado. Além disso $T_\rho(e) = e + \rho + \alpha\rho^2$ e de (4), $(T_\sigma \circ T_\theta)(e) = e + \sigma + \theta + \alpha\sigma^2 + 2\alpha\sigma\theta + \alpha\theta^2 - 2\alpha^2\sigma\theta^2$, donde comparando os termos em $\mathbf{U}$ temos $\rho = \sigma + \theta$. Desta forma podemos definir a aplicação $\Phi : (\mathbf{U}, +) \longrightarrow (P, \circ)$ tal que $\Phi(\sigma) = T_\sigma$ e ela é um isomorfismo.

d) $\Rightarrow$ e) Por hipótese $T_\sigma \circ T_\theta = T_\rho$ para todo $\sigma, \theta \in \mathbf{U}$. Pondo $s = \sigma$, $t = \theta$ em (1) até (6). Identificando os termos de $\mathbf{U}$ em (1) e (4), achamos

$$\sigma + \theta = \sigma + \theta - 2\alpha^2\sigma\theta^2$$

logo $\sigma\theta^2 = 0$ e assim $\mathbf{U}^3 = 0$. Agora como $\mathbf{U}^2(\mathbf{UV}) \subset \mathbf{U}^3$ tem-se que $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$ (proposição 5.6). Afirmamos que P é abeliano e para isto consideramos $T_s, T_t \in P$. Então

$$(T_t \circ T_s)(e) = e + (s + t - 2\alpha^2s^2t) + \alpha(s + t)^2$$

$$(T_t \circ T_s)(u) = u - 4\alpha^2t(su) + 2\alpha u(s + t)$$

$$(T_t \circ T_s)(v) = -2\alpha v(s + t) + v - 4\alpha^2t(sv)$$

Mas $\mathbf{U}^3 = 0$, logo $(T_s \circ T_t)(x) = (T_t \circ T_s)(x)$, para todo $x \in \mathbf{A}$ donde $T_s \circ T_t = T_t \circ T_s$.

Agora para todo $\sigma \in \mathbf{U}$ temos $T_\sigma \circ T_{-\sigma} = \text{id}$ portanto $T_\sigma^{-1} = T_{-\sigma}$ e assim P é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbf{A})$. Falta ainda provar que P é invariante em $\text{Aut}(\mathbf{A})$. De fato, da observação anterior temos que se $T \in \text{Aut}(\mathbf{A})$ existe $\sigma \in \mathbf{U}$ tal que $T = T_\sigma \circ f$, $f \in F$. Agora da proposição 5.7, para todo $\rho \in \mathbf{U}$ temos $T \circ T_\rho = T_\sigma \circ f \circ T_\rho = T_\sigma \circ T_{f(\rho)} \circ f = T_{f(\rho)} \circ T_\sigma \circ f = T_{f(\rho)} \circ T$. Logo $T \circ T_\rho \circ T^{-1} = T_{f(\rho)} \in \text{Aut}(\mathbf{A})$, isto é, $P \triangleleft \text{Aut}(\mathbf{A})$.

e) $\Rightarrow$ a) É claro que (e) implica (c), isto nos permite supor (d) e portanto $\mathbf{U}^3 = 0$. Além disso, da identificação de termos de $\mathbf{V}$ em (3) e (6) obtemos $T_{s+t}(v) = -2\alpha v(s + t) + v$ e $(T_s \circ T_t)(v) = -2\alpha v(s + t) + v - 4\alpha^2s(tv)$, logo $s(tv) = 0$ para todo $s, t \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$, donde $\mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$. Por outro lado, se $u, \sigma, \theta \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ resulta que $\sigma\theta^2, \theta\sigma^2, \theta(\sigma u), u(\theta\sigma), (\sigma\theta)(\sigma v) \in \mathbf{U}^3 = 0$, $\theta(\sigma v) \in \mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$. Pondo $s = \theta$, $t = \sigma$ em (4), (5) e (6) e da mesma forma fazemos $s = \sigma, t = \theta$ em (7), (8) e (9), assim conseguimos

$$T_{\theta\sigma}(x_\sigma) = (T_{\theta\sigma} \circ T_\sigma)(x) = (T_\theta \circ T_\sigma)(x) = T_\theta(x_\sigma)$$

logo $T_{\theta\sigma} = T_\theta$ para todo $\theta \in \mathbf{U}$ e então $P_\sigma = P$. ■

No que segue suporemos válidas as condições da proposição 5.8, isto é, $P < \text{Aut}(\mathbf{A})$. Podemos definir em forma mais geral o conjunto $F_w = \{f \in \text{Aut}(\mathbf{A}) / f(e_w) = e_w\}$. Esta é uma família de subgrupos de $\text{Aut}(\mathbf{A})$, com $F_0 = F$. Além disso, como $T_w(e) = e_w$ então $F \cap P = \{id\}$. Se $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$, então todo automorfismo T se escreve de uma única maneira como $T = T_w \circ f$ com $f \in F$ e $T(e) = e_w$. Pois se $T_w \circ f = T_{w'} \circ g$ então $T_w(f(e)) = T_{w'}(g(e))$ e isto implica que $w = w'$ e assim $f = g$.

Proposição 5.9 *São satisfeitas as condições seguintes:*

- (a) $F \simeq \text{Aut}(\mathbf{A})/P$.
- (b) $\text{Aut}(\mathbf{A})$ é isomorfo ao produto semidireto de $\mathbf{U}$ e F .

Demonstração: (a) Definamos a aplicação seguinte

$$\pi : \text{Aut}(\mathbf{A}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{A})/P \text{ com } T \mapsto T \circ P$$

o epimorfismo canônico. Sabemos que dado $T \in \text{Aut}(\mathbf{A})$ existe $w \in \mathbf{U}$ tal que $T = T_w \circ f$. Mas $T \circ f^{-1} = T_w \in P$, portanto $\pi(T) = \pi(f)$ donde $\pi(F) = \text{Aut}(\mathbf{A})/P$. Como $\ker \pi = P$ então $\ker(\pi|_F) = F \cap P = \{id\}$ e assim $\pi|_F$ é injetora. Logo os grupos são isomorfos.

(b) Temos por definição que $(w, f) \bowtie (t, g) = [w + f(t), f \circ g]$. Por outro lado $(T_w \circ f) \circ (T_t \circ g) = T_w(f \circ T_t \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = T_w \circ T_{f(t)} \circ f \circ g = T_{w+f(t)} \circ (f \circ g)$. Isto mostra que a aplicação $\Psi : \mathbf{U} \bowtie F \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{A})$ definida por $(w, f) \mapsto T_w \circ f$ é um isomorfismo. ■

Agora se $T_w \in P$ nós denotamos por int_w o automorfismo interno induzido por T_w , isto é, $\text{int}_w(f) = T_w \circ f \circ T_w^{-1}$.

Da proposição 5.8 observamos que $P_w = P$, mas não se tem $F_w = F$.

Proposição 5.10 *Se $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$, então para todo $w \in \mathbf{U}$, $\text{int}_w(F) = F_w$.*

Demonstração: Seja $f \in F$ então $(T_w \circ f \circ T_w^{-1})(e_w) = T_w(f(T_w^{-1}(e_w))) = T_w(f(e)) = T_w(e) = e_w$, portanto $T_w \circ f \circ T_w^{-1} \in F_w$ ou $\text{int}_w(F) \subseteq F_w$. Da mesma forma prova-se que $\text{int}_w^{-1}(F_w) \subseteq F$, donde $F_w \subseteq \text{int}_w(F)$. ■

Proposição 5.11 *Nas condições do teorema 5.8, são equivalentes:*

- a) $\forall f \in F : f|_{\mathbf{U}} = id.$
- b) $\forall f \in F : f|_{I(\mathbf{A})} = id.$
- c) $\forall w \in \mathbf{U} : int_w|_{Aut(\mathbf{A})} = id.$
- d) $\forall w \in \mathbf{U} : F_w = F.$
- e) F é um subgrupo normal de $Aut(\mathbf{A})$.

Demonstração: a) $\Leftrightarrow$ b) Para todo $w \in \mathbf{U}$ temos $e_w - f(e_w) = e + w + \alpha w^2 - f(e) - f(w) - \alpha f(w)^2$. Mas $f(e) = e$ e então $e_w - f(e_w) = w - f(w) + \alpha(w^2 - f(w)^2)$ donde $e_w = f(e_w) \Leftrightarrow w = f(w)$.

a) $\Rightarrow$ c) Desde a proposição 5.7, temos que se $f \in F : int_w(f) = T_w \circ f \circ T_{-w} = (f \circ T_{f(w)}) \circ T_{-w} = f \circ T_w \circ T_{-w} = f$, logo $int_w(f) = f$.

c) $\Rightarrow$ d) Isto provém da proposição 5.10.

d) $\Rightarrow$ e) Seja $T \in Aut(\mathbf{A})$ tal que $T = T_s \circ g$ com $s \in \mathbf{U}$ e $g \in F$. Então para todo $f \in F$ temos o seguinte: $T \circ f \circ T^{-1} = T_s \circ (g \circ f \circ g^{-1}) \circ T_s^{-1} \in int_s(F) = F_s = F$. Logo $T \circ f \circ T^{-1} \in F$ e assim $F \triangleleft Aut(\mathbf{A})$.

e) $\Rightarrow$ a) Para todo $f \in F$ e $w \in \mathbf{U}$ temos que $(T_w \circ f \circ T_{-w})(e) = e_{w-f(w)}$. Mas como $F \triangleleft Aut(\mathbf{A})$ então $T_w \circ f \circ T_{-w} \in F$ e $(T_w \circ f \circ T_{-w})(e) = e$, donde $e_{w-f(w)} = e = e_0$ e assim $w = f(w)$. ■

5.2 A álgebra de derivações $Der(\mathbf{A})$

Fixemos uma T-álgebra $\mathbf{A}$ de posto 3 satisfazendo a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \text{ onde } \gamma \neq \frac{1}{2}$$

Sejam $e \in I(\mathbf{A})$ e $\mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa ao elemento idempotente e . Denotamos por $Der(\mathbf{A})$ a álgebra de Lie das derivações da T-álgebra $\mathbf{A}$.

Proposição 5.12 *Se $d \in Der(\mathbf{A})$, então $d(e) \in \mathbf{U}$. Além disso, se $d(e) = 0$ temos $d(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$ e $d(\mathbf{V}) \subset \mathbf{V}$.*

Demonstração: Seja $d(e) = \lambda e + x + y$ com $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in \mathbf{U}$ e $y \in \mathbf{V}$. Como $e = e^2$ então $d(e) = 2ed(e)$ donde $\lambda = 0$ e $y = 0$, pois $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Assim $d(e) = x \in \mathbf{U}$. Por outra parte seja $d(e) = 0$ e consideremos um elemento $x \in \mathbf{U}$, então $ex = \frac{1}{2}x$, logo $d(e)x + ed(x) = \frac{1}{2}d(x)$

ou $ed(x) = \frac{1}{2}d(x)$ donde $d(x) \in \mathbf{U}$. De forma análoga se consideramos um elemento $x \in \mathbf{V}$, isto é, $ex = \gamma x$ donde $ed(x) = \gamma d(x)$ e assim $d(x) \in \mathbf{V}$. ■

Define-se a aplicação linear $\partial T_w = T_w - id - 2\alpha L_w^2$ onde $T_w \in P$ é o morfismo de Peirce associado a w e L_w o produto por w , isto é, $L_w(a) = wa$, onde $a \in \mathbf{A}$ e o conjunto $DP = \{\partial T_w/w \in \mathbf{U}\}$. É fácil ver que se $T_0 = id$ então $\partial T_0 = 0$. Seja $w \in \mathbf{U}$ fixo e $\mathbf{K}(\mathbf{V}, w)$ o subespaço gerado pelo conjunto $\{\lambda e + v/\lambda \in \mathbf{K}^*, v \in \mathbf{V}, \lambda w = -2\alpha wv\}$. Notamos que $\mathbf{K}(\mathbf{V}, 0) = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{V}$. Agora como $\lambda w = -2\alpha wv$ então $\lambda w^2 = -2\alpha w(wv) = 0$ e $\lambda \neq 0$. Se $w^2 \neq 0$ então $\mathbf{K}(\mathbf{V}, w) = 0$.

Proposição 5.13 *Se $w \in \mathbf{U}$, então temos:*

- a) $\partial T_w(e) = w$
- b) $\forall u \in \mathbf{U}, \partial T_w(u) = \alpha(2uw + uw^2)$
- c) $\forall v \in \mathbf{V}, \partial T_w(v) = -2\alpha wv$
- d) $\ker \partial T_w = \mathbf{K}(\mathbf{V}, w) \oplus (\mathbf{U} \cap \mathbf{U}_w) \oplus (\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_w)$.

Demonstração: a) $\partial T_w(e) = T_w(e) - id(e) - 2\alpha w(we) = e + w + \alpha w^2 - e - \alpha w^2 = w$.
b) $\partial T_w(u) = T_w(u) - id(u) - 2\alpha w(wu) = u + 2\alpha wu - u + \alpha w^2 u = \alpha(2wu + w^2 u)$.
c) $\partial T_w(v) = T_w(v) - id(v) - 2\alpha w(wv) = v - 2\alpha wv - v = -2\alpha wv$.
d) Consideremos o elemento $\lambda e + u + v \in \ker \partial T_w$, então $\partial T_w(\lambda e + u + v) = 0$ donde temos as equações seguintes, como resultado dos cálculos feitos acima

$$\lambda w + \alpha w^2 u - 2\alpha wv = 0 \quad (1)$$

$$wu = 0 \quad (2)$$

De (2) temos que $u \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}_w$. Por outro lado, de (1) temos $\lambda w^2 = 0$. Se $\lambda = 0$ então $\alpha w^2 - 2\alpha wv = 0$ donde $wv = 0$ e assim $v \in \mathbf{V} \cap \mathbf{V}_w$. Se $\lambda \neq 0$, de (1) $\lambda w^2 = 0$ então $w^2 = 0$ e daí $\lambda w = -2\alpha wv$, isto é, $\lambda e + v \in \mathbf{K}(\mathbf{V}, w)$. Logo segue que $\ker \partial T_w \subset \mathbf{K}(\mathbf{V}, w) \oplus (\mathbf{U} \cap \mathbf{U}_w) \oplus (\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_w)$. De (1) e (2) temos que $\mathbf{K}(\mathbf{V}, w) \oplus (\mathbf{U} \cap \mathbf{U}_w)$ e $(\mathbf{U} \cap \mathbf{U}_w) \oplus (\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_w)$ estão contidos em $\ker \partial T_w$ e assim também a soma desses subespaços. ■

Corolário 5.2 *Se $s, w \in \mathbf{U}$ então $\partial T_w(e_s) = 0$ se e somente se $w = 0$.*

Demonstração: Temos que $\partial T_w(e_s) = \partial T_w(e + s + \alpha s^2) = w + 2\gamma\alpha w^2 + 2\alpha ws + w^2s - 2\alpha^2ws^2$. Assim então

$$\partial T_w(e_s) = 0 \Leftrightarrow w + w^2s - 2\alpha^2ws^2 = 0 \text{ e } w^2 + 2ws = 0$$

Da primeira destas equações temos $w^2 = 0$ e assim da segunda $ws = 0$, logo $w = 0$. Donde nosso resultado. ■

Para cada $w \in \mathbf{U}$ definamos Δ_w como o conjunto das derivações de $\mathbf{A}$ que se anulam em e_w e que denotamos por : $\Delta_w := \{\delta \in \text{Der}(\mathbf{A}) / \delta(e_w) = 0\}$ e $\Delta := \Delta_0$.

Proposição 5.14 *Sob as hipóteses acima, Δ_w é uma subálgebra (de Lie) de $\text{Der}(\mathbf{A})$ e $\Delta_w \cap DP = 0$.*

Demonstração: É imediato que $[\Delta_w, \Delta_w] \subseteq \Delta_w$, pois se $\delta, \delta' \in \Delta_w$, então $[\delta, \delta'](e_w) = \delta(\delta'(e_w)) - \delta'(\delta(e_w)) = 0$. Seja $\partial T_x \in \Delta_w \cap DP$, então $\partial T_x(e_w) = 0$ donde por corolário anterior temos $x = 0$ e assim $\partial T_x = 0$, isto é, $\Delta_w \cap DP = 0$. ■

Proposição 5.15 *$DP \subseteq \text{Der}(\mathbf{A})$ se e somente se $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$.*

Demonstração: Seja $\partial T_w \in DP$ e $u \in \mathbf{U}$, então $\partial T_w(eu) = \frac{1}{2}\partial T_w(u) = \alpha(wu + \frac{1}{2}w^2u)$. Além disso $e\partial T_w(u) + u\partial T_w(e) = \alpha(2\gamma wu + \frac{1}{2}w^2u) + wu$ e portanto $\partial T_w(eu) = e\partial T_w(u) + u\partial T_w(e)$. Por outro lado $\partial T_w(u^2) = T_w(u^2) - id(u^2) - 2\alpha w(wu^2) = -2\alpha wu^2$ e $2u\partial T_w(u) = 2\alpha u(2wu + w^2u) = -2\alpha wu^2$. Assim temos $\partial T_w(u^2) = 2u\partial T_w(u)$. Consideremos agora $\partial T_w(ev) = \gamma\partial T_w(v) = -2\gamma\alpha wv$ e $e\partial T_w(v) + v\partial T_w(e) = -\alpha wv + wv = -2\gamma\alpha wv$, portanto $\partial T_w(ev) = e\partial T_w(v) + v\partial T_w(e)$. Trivialmente tem-se $\partial T_w(v^2) = 0 = 2v\partial T_w(v)$. Finalmente $\partial T_w(uv) = T_w(u)T_w(v) - id(uv) - 2\alpha w(w(uv)) = (u + 2\alpha wu)(v - 2\alpha wv) - uv + \alpha w^2(uv) = -2\alpha u(wv) - 2\alpha^2w^2(uv) + \alpha w^2(uv)$. Por outro lado $u\partial T_w(v) + v\partial T_w(u) = u(-2\alpha wv) + v[\alpha(2wu + w^2u)] = -2\alpha u(wv) - \alpha w^2(uv)$. Assim $\partial T_w(uv) = u\partial T_w(v) + v\partial T_w(u)$ se e somente se $w^2(uv) = 0$ ou $\mathbf{U}^2(\mathbf{UV}) = 0$. Pela proposição 5.6 sabemos que esta igualdade $\mathbf{U}^2(\mathbf{UV}) = 0$ equivale a dizer que $P \subseteq \text{Aut}(\mathbf{A})$. ■

Em geral não é verdade que a soma de dois elementos de DP pertença a DP .

Proposição 5.16 *DP é um espaço vectorial se e somente se $\mathbf{U}^3 = 0$. Neste caso, temos $\text{Der}(\mathbf{A}) = DP \oplus \Delta$ e $[DP, DP] \subseteq \Delta$.*

Demonstração: Sejam $w, w' \in \mathbf{U}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ tais que $\lambda \partial T_w = \partial T_{w'}$, então temos $0 = \partial T_{w'}(e) - \lambda \partial T_w(e) = w' - \lambda w$ donde temos que para todo $u \in \mathbf{U}$

$$0 = \partial T_{w'}(u) - \lambda \partial T_w(u) = \partial T_{\lambda w}(u) - \lambda \partial T_w(u) = \lambda(1 - \lambda)w^2u$$

isto prova que $\mathbf{K}\partial T_w \in DP$ para todo $w \in \mathbf{U}$ se e somente se $\mathbf{U}^3 = 0$. Agora consideremos e elemento idempotente de $\mathbf{A}$, $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$. Temos $(\partial T_w + \partial T_{w'})(e) = \partial T_w(e) + \partial T_{w'}(e) = w + w' = \partial T_{w+w'}(e)$, $(\partial T_w + \partial T_{w'})(u) = \partial T_w(u) + \partial T_{w'}(u) = \alpha(2uw + uw^2 + 2uw' + uw'^2) = \alpha[2u(w + w') + u(w + w')^2] = \partial T_{w+w'}(u)$ e $(\partial T_w + \partial T_{w'})(v) = \partial T_w(v) + \partial T_{w'}(v) = -2\alpha v(w + w') = \partial T_{w+w'}(v)$, isto é, $\partial T_w + \partial T_{w'} = \partial T_{w+w'}$. Então DP é um subespaço de $Der(\mathbf{A})$. Por outro lado, pela proposição 5.15, $DP \subseteq Der(\mathbf{A})$. Seja $d \in Der(\mathbf{A})$ e ponhamos $\delta = d - \partial T_{d(e)} \in Der(\mathbf{A})$, logo $\delta(e) = d(e) - \partial T_{d(e)}(e) = 0$ e então $\delta \in \Delta$. Desta forma $Der(\mathbf{A}) = DP + \Delta$. Pela proposição anterior $DP \cap \Delta = 0$, logo $Der(\mathbf{A}) = DP \oplus \Delta$. Finalmente, $[\partial T_w, \partial T_{w'}](e) = \partial T_w(\partial T_{w'}(e)) - \partial T_{w'}(\partial T_w(e)) = T_w(w') - T_{w'}(w) = \alpha(w^2w' - w'^2w) = 0$, pois $\mathbf{U}^3 = 0$. Logo $[\partial T_w, \partial T_{w'}] \in \Delta$. ■

Teorema 5.1 *São equivalentes as afirmações seguintes:*

- a) $P < Aut(\mathbf{A})$
- b) $DP_w = DP$, para todo $w \in \mathbf{U}$.
- c) DP é uma subálgebra de Lie de $Der(\mathbf{A})$.
- d) DP é um ideal de $Der(\mathbf{A})$.

Nestas condições acontece que $Der(\mathbf{A})$ é isomorfo (como álgebras de Lie) a $\mathbf{U} \times \Delta$, onde $\mathbf{U} \times \Delta$ está provido do produto seguinte : $[(w, \delta), (w', \delta')] = (\delta(w') - \delta'(w), [\delta, \delta'])$.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ b) Sabemos que $P < Aut(\mathbf{A})$ se e somente se $P_w = P$ para todo $w \in \mathbf{U}$ (proposição 5.8). Então temos $T_{w_{w'}} = T_w$ para $w, w' \in \mathbf{U}$. Além disso, como $\mathbf{U}^3 = 0$ então $L(w_{w'})^2 = L(w)^2$ e assim $\partial T_{w_{w'}} = \partial T_w$.

b) $\Rightarrow$ c) Sejam $w, w' \in \mathbf{U}$. Po hipótese existe $\rho \in \mathbf{U}$ tal que $\partial T_{w_{w'}} = \partial T_\rho$ donde $\partial T_{w_{w'}} \circ T_{w'} = \partial T_\rho \circ T_{w'}$. Consideremos as relações seguintes :

- (1) $[\partial T_{w'}, \partial T_w](e) = \alpha(w'^2w - w^2w')$.
- (2) $[\partial T_{w'}, \partial T_w](u) = 2\alpha^2[w'^2(w^2u) + 2w(w'u) - 2w'(wu) + w'(w^2u) - w(w'^2u)]$.
- (3) $[\partial T_{w'}, \partial T_w](v) = 2\alpha^2[v(w'^2w) - v(w^2w') + 4w(w'v)]$.
- (4) $(\partial T_\rho \circ T_{w'})(e) = \rho + \alpha\rho^2w' - 2\alpha^2w'^2\rho + 2\alpha w'\rho$.
- (5) $(\partial T_\rho \circ T_{w'})(u) = \alpha\rho^2u - 4\alpha^2\rho(w'u) + 2\alpha\rho u$.

$$(6) (\partial T_\rho \circ T_{w'})(v) = -2\alpha\rho v - 2\alpha^2\rho^2(w'v) - 4\alpha^2\rho(w'v).$$

$$(7) (\partial T_{w_{w'}} \circ T_{w'})(e) = w + 2\alpha ww'.$$

$$(8) (\partial T_{w_{w'}} \circ T_{w'})(u) = \alpha uw^2 - 4\alpha^2 w'(uw) + 2\alpha^3 w'^2(w^2u) + 2\alpha uw - 2\alpha^2 u(w'w^2).$$

$$(9) (\partial T_{w_{w'}} \circ T_{w'})(v) = -2\alpha wv + 4\alpha^3 w'^2(wv) + 4\alpha^2 w(w'v).$$

A comparação de termos de $\mathbf{V}$ em (4) e (7) dá $w'w = w'\rho$.

Pondo $u = w$ e fazendo a identificação dos termos de $\mathbf{V}$ (resp. em $\mathbf{U}$) em (5) e (8) temos $\rho w = w^2$, respectivamente temos $-4\alpha^2 w'w^2 = \alpha\rho^2 w - 4\alpha^2 \rho(ww')$ ou $w'w^2 = -\frac{1}{4\alpha}\rho^2 w + \rho ww'$. Agora $\rho^2 w = -2\rho(\rho w) = -2\rho w^2 = 4w(\rho w) = 4w^3 = 0$. Por outro lado $w'w^2 = \rho(ww') = \rho(\rho w') = -\frac{1}{2}w'\rho^2$. Mas substituindo u por ρ em (5) e (8) e comparando os termos de $\mathbf{V}$, temos $\rho^2 = \rho w = w^2$, logo $w'w^2 = -\frac{1}{2}w'w^2$ ou $3w'w^2 = 0$, mas como $\text{caracK} \neq 3$ então $w'w^2 = 0$ e daí $\rho(ww') = 0$ e donde $\mathbf{U}^3 = 0$. Da comparação de termos de $\mathbf{U}$ em (4) e (7), obtemos $\rho = w$. Finalmente identificando os termos de $\mathbf{V}$ em (6) e (9) obtemos $w(w'v) = 0$ para todo $v \in \mathbf{V}$. Assim $\mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$. Desta forma temos provado $\mathbf{U}^3 = 0 = \mathbf{U}(\mathbf{UV})$ e daí substituindo em (1), (2) e (3) tem-se $[\partial T_w, \partial T_{w'}] = 0$ para todo $w, w' \in \mathbf{U}$, donde nosso resultado.

c) $\Rightarrow$ d) Por proposição 5.15 sabemos que $DP \subseteq \text{Der}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{U}^3 = 0$. Agora seja $\delta \in \Delta$ então $[\delta, \partial T_w](e) = \delta(\partial T_w(e)) - \partial T_w(\delta(e)) = \delta(w) = \partial T_{\delta(w)}(e)$, logo $[\delta, \partial T_w] = \partial T_{\delta(w)}$ e então $[\Delta, DP] \subseteq DP$, donde DP é um ideal de $\text{Der}(\mathbf{A})$.

d) $\Rightarrow$ a) Por proposição 5.16 sabemos que $\mathbf{U}^3 = 0$ e $[DP, DP] \subseteq \Delta$. Agora da proposição 5.14, $DP \cap \Delta = 0$ e DP é um ideal de $\text{Der}(\mathbf{A})$, então $[DP, DP] = 0$. Deste fato, os termos de $\mathbf{V}$ em (3) mostram que $w(w'v) = 0$ para todo $w, w' \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$, assim $\mathbf{U}(\mathbf{UV}) = 0$. Logo da proposição 5.8, temos nosso resultado.

Por outra parte, sabemos que $[DP, DP] = 0$ e $[\delta, \partial T_w] = \partial T_{\delta(w)}$ para todo $\delta \in \Delta$ e $w \in \mathbf{U}$. Temos então $[\partial T_w + \delta, \partial T_{w'} + \delta'] = [\partial T_w, \partial T_{w'}] + [\delta, \partial T_{w'}] + [\partial T_w, \delta'] + [\delta, \delta'] = \partial T_{\delta(w')} - \partial T_{\delta'(w)} + [\delta, \delta'] = \partial T_{\delta(w') - \delta'(w)} + [\delta, \delta']$ para $w, w' \in \mathbf{U}$ e $\delta, \delta' \in \Delta$. Então a aplicação $\Phi : \mathbf{U} \times \Delta \longrightarrow \text{Der}(\mathbf{A}) = DP \oplus \Delta$ definida por $(w, \delta) \mapsto \partial T_w + \delta$ é um isomorfismo de álgebras. Vejamos, por exemplo, que Φ é injetora. Para isto sejam $(w, \delta), (w', \delta') \in \mathbf{U} \times \Delta$ e consideremos $\Phi(w, \delta) = \Phi(w', \delta')$, então $\partial T_w + \delta = \partial T_{w'} + \delta'$ ou $\partial T_{w'} - \partial T_w = \delta - \delta' \in DP \cap \Delta = 0$ donde $\delta = \delta'$ e $\partial T_w = \partial T_{w'}$ e portanto $w = w'$. ■

Notamos desta proposição que se F é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbf{A})$, então Δ é uma álgebra. Agora se F é um subgrupo normal, então Δ é um ideal de $\text{Der}(\mathbf{A})$.

É conhecido que o grupo $Aut(\mathbf{A})$ atua sobre $Der(\mathbf{A})$ por $d \mapsto T \circ d \circ T^{-1}$. Se $w \in \mathbf{U}$ definimos por int_w o automorfismo associado à transformação de Peirce T_w .

Notamos por ad_w a derivação definida sobre $Der(\mathbf{A})$, como $ad_w(d) = [\partial T_w, d]$ para todo $d \in Der(\mathbf{A})$ e $Inv(int_w)$ o subespaço dos pontos fixos.

No que segue usaremos os resultados do teorema anterior.

Proposição 5.17 *Para todo $w \in \mathbf{U}$ temos*

- a) $\Delta_w = int_w(\Delta)$
- b) $int_w|_{Der(\mathbf{A})} = id + ad_w$
- c) $\Delta \cap \Delta_w = \{\delta \in \Delta / \delta(w) = 0\}$
- d) $Inv(int_w) = (\Delta \cap \Delta_w) \oplus DP$.

Demonstração: a) Seja $T_w \in Aut(\mathbf{A})$ então $int_w(\Delta) \subseteq Der(\mathbf{A})$. Agora de $T_w(e) = e_w$ e $T_w^{-1}(e_w) = e$ resulta que para todo $\delta \in \Delta$ e $\delta_w \in \Delta_w$ temos:

$$(T_w \circ \delta \circ T_w^{-1})(e_w) = (T_w \circ \delta)(e) = 0$$

$$(T_w^{-1} \circ \delta_w \circ T_w)(e) = (T_w^{-1} \circ \delta_w)(e_w) = 0$$

Assim $int_w(\Delta) \subseteq \Delta_w$ e $int_w^{-1}(\Delta_w) \subseteq \Delta$ e daí o resultado.

b) Temos que $\mathbf{U}^3 = 0$, então $L_t^2 = L_{t_w}^2$ para todo $w, t \in \mathbf{U}$. Além disso, para $x \in \mathbf{A}$, resulta que

$$(T_w \circ L_t^2)(x) = T_w(t(t(x))) = T_w(t)[T_w(t)T_w(x)] = L_{t_w}^2(x_w) = (L_t^2 \circ T_w)(x)$$

donde $int_w(\partial T_t) = T_w \circ [T_t - id - 2\alpha L_t^2] \circ T_w^{-1} = T_t - id - 2\alpha L_t^2 = \partial T_t$. Como $ad_w|_{DP} = 0$ então a afirmação é verdadeira para $int_w|_{DP}$. Por outro lado, se $\delta \in \Delta$ então $ad_w(\delta) + \delta = [\partial T_w, \delta] + \delta = \delta - [\delta, \partial T_w] = \delta - \partial T_{\delta(w)}$. Se consideramos $\delta \in \Delta$, provaremos que $int_w(\delta)$ e $id + ad_w(\delta)$ coincidem sobre e, u e v . De fato, $int_w(\delta)(u) = T_w(\delta(T_w^{-1}(u))) = T_w(\delta(T_{-w}(u))) = T_w(\delta(u - 2\alpha uw)) = T_w[\delta(u) - 2\alpha u\delta(w) - 2\alpha w\delta(u)] = \delta(u) + 2\alpha w\delta(u) - 2\alpha[u\delta(w) - 2\alpha w(\delta(w))] - 2\alpha[w\delta(u) - 2\alpha w(w\delta(u))] = \delta(u) - 2\alpha u\delta(w)$. Por outra parte, $(\delta + ad_w\delta)(u) = \delta(u) + [\partial T_w, \delta](u) = \delta(u) + \partial T_w(\delta(u)) - \delta(\partial T_w(u)) = \delta(u) + \alpha[2w\delta(u) + \delta(u)w^2] - \delta[\alpha(2uw + uw^2)] = \delta(u) + 2\alpha w\delta(u) - 2\alpha u\delta(w) - 2\alpha w\delta(u) - \alpha[2uw\delta(w) + w^2\delta(u)] = \delta(u) - 2\alpha u\delta(w)$, donde $int_w(\delta)(u) = (\delta + ad_w\delta)(u)$. Da mesma forma provam-se as outras relações.

c) Para todo $\delta \in \Delta$ temos $\delta(e_w) = \delta(e) + \delta(w) + \alpha\delta(w^2) = \delta(w) + 2\alpha w\delta(w)$ e assim então

$$\delta \in \Delta_w \Leftrightarrow \delta(e_w) = 0 \Leftrightarrow \delta(w) = 0.$$

d) Seja $d = \partial T_t + \delta \in \text{Der}(\mathbf{A})$ com $t \in \mathbf{U}$ e $\delta \in \Delta$. De (b) temos que $\text{int}_w(d) = d + \text{ad}_w(d) = \partial T_t + \delta + [\partial T_w, \partial T_t + \delta] = \partial T_t + \delta + [\partial T_w, \delta] = \partial T_t - \partial T_{\delta(w)} + \delta$, donde $\text{int}_w(d) = d \Leftrightarrow \partial T_{\delta(w)} = 0 \Leftrightarrow \delta(w) = 0$ (por corolário 5.2) e assim (c) mostra o resultado. ■

Observação: Os resultados (a) e (b) da proposição 5.17, mostram que na soma $\Delta \oplus DP$ os elementos de Δ_w são da forma $\delta + \partial T_{-\delta(w)}$ com $\delta \in \Delta$.

Proposição 5.18 *Sob as mesmas hipóteses, são equivalentes as afirmações seguintes:*

- a) $\forall \delta \in \Delta : \delta(\mathbf{U}) = 0$.
- b) $\forall \delta \in \Delta : \delta(I(\mathbf{A})) = 0$.
- c) $\forall w \in \mathbf{U} : \text{int}_w|_{\text{Der}(\mathbf{A})} = \text{id}$.
- d) $\forall w \in \mathbf{U} : \Delta = \Delta_w$.
- e) Δ é um ideal de $\text{Der}(\mathbf{A})$. Neste caso $DP \simeq \text{Der}(\mathbf{A})/\Delta$.

Demonstração: a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ d) Isto deriva da proposição anterior e da equivalência seguinte:

$$\delta \in \Delta_w \Leftrightarrow \delta(e_w) = 0 \Leftrightarrow \delta(w) = 0$$

d) $\Rightarrow$ c) Como $\Delta = \Delta_w$, desde a proposição anterior, parte (d) tem-se $\text{Inv}(\text{int}_w) = \text{Der}(\mathbf{A})$ e assim $\text{int}_w = \text{id}$.

c) $\Rightarrow$ e) Desde a mesma proposição anterior, parte (b), temos que $\text{int}_w = \text{id}$ ou $\text{ad}_w = 0$ logo $[\Delta, DP] = 0$ e portanto Δ é um ideal de $\text{Der}(\mathbf{A})$.

e) $\Rightarrow$ a) Por proposição 5.14, $[\Delta, DP] = 0$ e como $[\delta, \partial T_w] = \partial T_{\delta(w)}$, então $\partial T_{\delta(w)} = 0$ para todo $\delta \in \Delta$ e $w \in \mathbf{U}$, donde pelo corolário 5.2, $\delta(w) = 0$. ■

A afirmação (e) desta proposição, mostra que $\text{Der}(\mathbf{A})$ é o produto direto dos ideais Δ e DP , donde temos nosso isomorfismo requerido.

Os resultados deste capítulo ajudam a compreender melhor o grupo dos automorfismos e a álgebra de derivação de algumas T-álgebras de posto 3. Em geral, a questão continua sendo muito difícil.

Capítulo 6

Homótopas de T-álgebras de posto 3

6.1 Introdução

Existem vários métodos para modificar uma estrutura de álgebra, porém mantendo-se a parte linear inalterada. Uma delas foi introduzida em [21] e chama-se *homótopa* da álgebra inicial. Dada uma álgebra $\mathbf{A}$ sobre um corpo $\mathbf{K}$ de característica diferente de 2 e um elemento fixo $a \in \mathbf{A}$, construímos a álgebra homótopa $\mathbf{A}^{(a)}$ mantendo a mesma estrutura linear de $\mathbf{A}$, mas com a nova multiplicação

$$x \cdot_a y = (xa)y + x(ay) - a(xy) \quad (1)$$

O que se espera do estudo da homótopa $\mathbf{A}^{(a)}$ é, basicamente, verificar como as propriedades de $\mathbf{A}$ se refletem em $\mathbf{A}^{(a)}$. Por exemplo, é óbvio que a comutatividade de $\mathbf{A}$ implica a comutatividade de $\mathbf{A}^{(a)}$. Queremos investigar neste capítulo propriedades das homótopas de train álgebras de posto 3.

Se $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra bária, $a \in \mathbf{A}$ um elemento de peso 1 então $\mathbf{A}^{(a)}$ é uma álgebra bária com respeito ao mesmo homomorfismo peso, pois $\omega(x \cdot_a y) = [\omega(x)\omega(a)]\omega(y) + \omega(x)[\omega(a)\omega(y)] - \omega(a)[\omega(x)\omega(y)] = \omega(x)\omega(y)$. Mais geralmente, se $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra ponderada e $a \in \mathbf{A}$ é de peso $k \neq 0$, podemos definir a função $\omega' : \mathbf{A}^{(a)} \rightarrow \mathbf{K}$ tal que $\omega'(x) = k\omega(x)$. Como $\omega'(x \cdot_a y) = k\omega(x \cdot_a y) = k\omega(x)\omega(a)\omega(y) = k\omega(x)k\omega(y) = \omega'(x)\omega'(y)$ tem-se que $(\mathbf{A}^{(a)}, \omega')$ é também uma álgebra ponderada. Mais ainda, $\ker \omega = \ker \omega'$. Para o elemento $b = k^{-1}a$ de peso 1, consideremos a álgebra ponderada $(\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$ e a bijeção $\psi : (\mathbf{A}^{(a)}, \omega') \rightarrow (\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$ dada por $\psi(x) = kx$. Segue que $\omega(\psi(x)) = \omega(kx) = k\omega(x) = \omega'(x)$, $x \in \mathbf{A}$. Além disso, $\psi(x \cdot_a y) = k(x \cdot_a y) = k((xa)y + x(ay) - a(xy)) = k^2(x \cdot_b y) =$

$(kx) \cdot_a (ky) = \psi(x) \cdot_a \psi(y)$, logo que $(\mathbf{A}^{(a)}, \omega')$ é isomorfa a $(\mathbf{A}^{(b)}, \omega)$. Em resumo, podemos assumir sempre que $\omega(a) = 1$.

Notamos que as homótopas de uma dada álgebra bária produzidas por diferentes elementos de peso 1 não são necessariamente isomorfas. Segue-se um exemplo.

Exemplo: Seja $\mathbf{A}$ a álgebra $\mathbf{K}c_0 \oplus \mathbf{K}c_1$, sobre o corpo $\mathbf{K}$, com produto dado por $c_0^2 = c_0 + c_1$, $c_0c_1 = c_1c_0 = 3c_1$ e $c_1^2 = c_1$. $\mathbf{A}$ é uma álgebra ponderada com homomorfismo peso $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}$ dado por $\omega(c_0) = 1$ e $\omega(c_1) = 0$. Um cálculo simples mostra que os únicos idempotentes não nulos de $\mathbf{A}^{(c_0)}$ são $c_0 - c_1$ e $c_0 - \frac{4}{3}c_1$. Porém $\mathbf{A}^{(c_0+c_1)}$ não tem idempotentes não nulos. Por esta razão $\mathbf{A}^{(c_0)}$ e $\mathbf{A}^{(c_0+c_1)}$ não são isomorfas.

A partir de agora consideraremos somente as homótopas $\mathbf{A}^{(a)}$ produzidas por elementos a de peso 1.

Observação: Se $a \in I(\mathbf{A})$ então $a \in I(\mathbf{A}^{(a)})$. De fato, se $a^2 = a$ então temos $a \cdot_a a = 2(aa)a - a(aa) = a$, isto é, $a \cdot^2 = a$.

6.2 Homótopas de T-álgebras de posto 3

Nesta seção caracterizamos os elementos idempotentes da homótopa $\mathbf{A}^{(a)}$ de uma T-álgebra $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ de posto 3 e damos algumas condições para que sua homótopa também seja de posto 3. Este resultado mostra que a classe das álgebras que satisfazem uma dada T-equação de grau 3 não é fechada para a operação "homotopia", com excessão das álgebras de tipo $(1, s)$, que são consideradas como triviais.

Consideramos um corpo $\mathbf{K}$ de característica $\neq 2$ e uma T-álgebra $\mathbf{A}$ de posto 3, de dimensão finita com T-equação (onde $\gamma \neq \frac{1}{2}$)

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \quad (2)$$

Também suporemos que $e \in \mathbf{A}$ é um idempotente de peso 1 e escreveremos $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$, a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa a e , onde os subespaços $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são definidos como no capítulo 1, $\ker \omega = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ e

$$\mathbf{U}^2 \subseteq \mathbf{V}, \mathbf{UV} \subseteq \mathbf{U} \text{ e } \mathbf{V}^2 = 0 \quad (3)$$

Consideremos a homótopa $\mathbf{A}^{(e)}$ e denotaremos o produto $a \cdot_e b$ simplesmente por $a \cdot b$.

Sabemos já que $e \in I(\mathbf{A}^{(e)})$. Seja $x = u + v \in \ker \omega$ com $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$ e consideremos os produtos seguintes em $\mathbf{A}^{(e)}$:

$$\begin{aligned} x \cdot x &= (xe)x + x(ex) - ex^2 \\ &= 2((u+v)e)(u+v) - e(u+v)^2 \\ &= 2(\tfrac{1}{2}u + \gamma v)(u+v) - e(u^2 + 2uv) \\ &= (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \cdot x &= (ee)x + e(ex) - e(ex) \\ &= ex = \tfrac{1}{2}u + \gamma v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(e \cdot x) \cdot x &= 2(\tfrac{1}{2}u + \gamma v) \cdot (u+v) \\ &= (u + 2\gamma v) \cdot (u+v) \\ &= ((u + 2\gamma v)e)(u+v) + (u + 2\gamma v)(e(u+v)) - e((u + 2\gamma v)(u+v)) \\ &= (1 - \gamma)u^2 + (2\gamma^2 + \gamma)uv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \cdot (x \cdot x) &= e \cdot ((1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv) \\ &= (\gamma - \gamma^2)u^2 + \gamma uv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e \cdot (e \cdot x) &= 2e \cdot (\tfrac{1}{2}u + \gamma v) \\ &= e \cdot u + 2\gamma e \cdot v \\ &= eu + 2\gamma ev \\ &= \tfrac{1}{2}u + 2\gamma^2 v \end{aligned}$$

Segue daí que:

$$\begin{aligned} 2(e \cdot x) \cdot x + e \cdot (x \cdot x) &= (1 - \gamma)u^2 + (2\gamma^2 + \gamma)uv + (\gamma - \gamma^2)u^2 + \gamma uv \\ &= (1 - \gamma^2)u^2 + 2(\gamma^2 + \gamma)uv = (1 + \gamma)[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv] = (1 + \gamma)x \cdot x \end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned} 2e \cdot (e \cdot x) - (1 + 2\gamma)e \cdot x + \gamma x &= \\ &= \tfrac{1}{2}u + 2\gamma^2 v - (1 + 2\gamma)(\tfrac{1}{2}u + \gamma v) + \gamma(u + v) = 0 \end{aligned}$$

Assim das equações (4) e (5) do capítulo 1 temos que $\mathbf{A}^{(e)}$ é uma train álgebra de posto 3. Mais ainda, como $e \cdot u = eu$ e $e \cdot v = ev$ se $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$, então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(e)}$ têm o mesmo tipo. Observemos que $u_1 \cdot u_2 = (1 - \gamma)u_1 u_2$, $u \cdot v = \gamma uv$ e $v_1 \cdot v_2 = 0$ de modo que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(e)}$ não são isomorfas, pelo menos em princípio.

Proposição 6.1 *Seja $\mathbf{A}$ uma train álgebra de posto 3 satisfazendo (2). Se f é um idempotente em $\mathbf{A}^{(e)}$, decomposto na forma $f = e + u + v$, $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$, então as componentes u e v satisfazem as equações $2\gamma uv = 0$ e $(1 - \gamma)u^2 = (1 - 2\gamma)v$.*

Demonstração: Se $f = e + u + v$ então $f \cdot f = e + u + 2\gamma v + (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv$. Logo $f \cdot f = f$ se e somente se $u = u + 2\gamma uv$ e $v = 2\gamma v + (1 - \gamma)u^2$ e daí vêm os resultados. ■

O leitor poderá agora provar o

Corolário 6.1 *Se $\gamma = 0$ em (2) então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(e)}$ possuem os mesmos idempotentes e se $\gamma \neq 0$ (sempre com $\gamma \neq \frac{1}{2}$) então e é o único idempotente comum a $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(e)}$.*

Vamos analisar agora uma situação mais geral em relação à homótopa de uma T -álgebra de posto 3, definida por um elemento fixo a de peso 1. Para isso consideremos o elemento fixo $a = e + \bar{u} + \bar{v}$ com $\bar{u} \in \mathbf{U}$ e $\bar{v} \in \mathbf{V}$, e f um elemento idempotente em $\mathbf{A}^{(a)}$. Vejamos primeiramente qual é o peso de um tal elemento idempotente.

Proposição 6.2 *Seja $(\mathbf{A}, \omega)$ uma T -álgebra de posto 3 e $a \in \mathbf{A}$ com $\omega(a) = 1$. Se $f \in I(\mathbf{A}^{(a)})$, então $\omega(f) = 1$.*

Demonstração: Dado que $f \cdot_a f = f$, sabemos que $\omega(f)^2 = \omega(f)$ e em consequência $\omega(f) = 0$ ou $\omega(f) = 1$. Se $\omega(f) = 0$, podemos escrever $f = u + v$; $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$. Por outro lado, seja $a = e + \bar{u} + \bar{v}$, com $\bar{u} \in \mathbf{U}$ e $\bar{v} \in \mathbf{V}$. Assim então $f \cdot_a f = 2(fa)f - af^2 = 2[(u + v)(e + \bar{u} + \bar{v})](u + v) - (e + \bar{u} + \bar{v})(u + v)^2 = 2(\frac{1}{2}u + u\bar{u} + u\bar{v} + \gamma v + \bar{u}v)(u + v) - [\gamma u^2 + u^2\bar{u} + uv + 2\bar{u}(uv) + 2\bar{v}(uv)] = (1 - \gamma)u^2 - 2u(\bar{u}u) - u^2\bar{u} + 2\gamma uv = (1 - \gamma)u^2 - 2u^2\bar{u} + 2\gamma uv + 4u(\bar{u}v) + 4v(u\bar{v})$. Da relação $f \cdot_a f = f$ obtemos as duas igualdades seguintes

$$u = -2u^2\bar{u} + 2\gamma uv + 4v(u\bar{v}) \quad (4)$$

$$v = (1 - \gamma)u^2 + 4u(\bar{u}v) \quad (5)$$

Multiplicando a equação (4) por v e (5) por u , obtemos respectivamente $uv = -2(u^2\bar{u})v = 2u^2(\bar{u}v)$ e $uv = 4u(u(\bar{u}v))$. Mas da identidade de Jacobi temos $2u(u(\bar{u}v)) = -u^2(\bar{u}v)$. Assim então $uv = 0$ e $v = (1 - \gamma)u^2$. Mas, como $u = -2u^2\bar{u}$ então $u^2 = 0$ e $u = v = 0$, isto é, $f = 0$. Assim concluímos que $\omega(f) = 1$ para todo elemento idempotente não nulo de $\mathbf{A}^{(a)}$. ■

Teorema 6.1 *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ uma T -álgebra satisfazendo (2) com $\gamma \neq 1$ e $a = e + \bar{u} + \bar{v} \in \mathbf{A}$. Então $I(\mathbf{A}^{(a)}) = \{e + u + [-\gamma\bar{v} + (1-\gamma)(1-2\gamma)^{-1}u^2 + 2\gamma(1-2\gamma)^{-1}u\bar{u}], u \in \mathbf{U}\}$.*

Demonstração: Seja f um idempotente não nulo em $\mathbf{A}^{(a)}$. Pela proposição 6.1, existem $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$ tais que $f = e + u + v$. Da relação $f \cdot_a f = f$, obtemos $e + u + 2(1-\gamma)\bar{u}v + 2\gamma u\bar{v} + 2\gamma uv + 4v(u\bar{v}) - u^2\bar{u} + 2u(u\bar{u}) + 2\gamma v + \gamma(2\gamma-1)\bar{v} + (1-\gamma)u^2 + 2\gamma u\bar{u} + 4u(\bar{u}v) = e + u + v$. Assim vemos que as duas igualdades seguintes são satisfeitas:

$$(1-\gamma)\bar{u}v + \gamma u\bar{v} + \gamma uv + 2v(u\bar{v}) - u^2\bar{u} = 0 \quad (6)$$

$$\gamma(2\gamma-1)\bar{v} + (1-\gamma)u^2 + 2\gamma u\bar{u} + 4u(\bar{u}v) = (1-2\gamma)v \quad (7)$$

Multiplicando a igualdade (6) por u e usando o fato de que $\gamma \neq 1$ temos $u(\bar{u}v) = 0$. Substituindo este valor em (7) temos $v = -\gamma\bar{v} + (1-\gamma)(1-2\gamma)^{-1}u^2 + 2\gamma(1-2\gamma)^{-1}u\bar{u}$. ■

Corolário 6.2 *Se a T -equação de $\mathbf{A}$ é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ (isto é, $\mathbf{A}$ é Bernstein-Jordan), então $I(\mathbf{A}^{(a)}) = I(\mathbf{A})$, para todo $a \in \mathbf{A}$ de peso 1.*

Demonstração: Neste caso tem-se $\gamma = 0$ e aplicando a proposição 6.1 obtemos que $I(\mathbf{A}^{(a)}) = \{e + u + u^2/u \in \mathbf{U}\}$. Vários autores mostraram que se a T -equação de $\mathbf{A}$ é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, então $\mathbf{A}$ é de Bernstein-Jordan (por exemplo Walcher [22]). Mas, é conhecido que os idempotentes das álgebras de Bernstein são exatamente os elementos da forma $e + u + u^2$, com $u \in \mathbf{U}$. ■

Em geral os conjuntos $I(\mathbf{A})$ e $I(\mathbf{A}^{(a)})$ não podem ser comparados por inclusão e isto está mostrado na seguinte proposição.

Proposição 6.3 *Dados os inteiros $r, s \geq 1$, existe uma T -álgebra de posto 3 e de tipo $(1+r, s)$ satisfazendo $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e $a \in \mathbf{A}$ de peso 1, tais que os conjuntos de idempotentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(a)}$ não são comparáveis por inclusão.*

Demonstração: Consideremos a álgebra $\mathbf{A} = \langle e, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle$ onde $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, $ev_i = v_i$ e todos os outros produtos restantes nulos. Verifica-se que $\mathbf{A}$ é uma T -álgebra de posto 3 (com $\gamma = 1$). Seja $f = e - u_1$ e $a = e + v_1$, então: $f \cdot_a f = 2f(fa) - af^2 = 2(e - v_1)[(e - v_1)(e + v_1)] - (e + v_1)(e - v_1)^2 = 2e(e - v_1) - (e + v_1)(e - 2v_1) = e - v_1$, logo $f \cdot_a f = f$. Mas $f^2 = ff = (e - v_1)^2 = e - 2v_1 \neq f$. Assim f é um idempotente

em $\mathbf{A}^{(a)}$ mas não em $\mathbf{A}$. Por outro lado se nós consideramos o elemento $e + u_1$, temos que $(e + u_1)(e + u_1) = e + u_1$, isto é, $e + u_1$ é idempotente em $\mathbf{A}$, mas $e + u_1$ não é idempotente em $\mathbf{A}^{(a)}$, pois $(e + u_1) \cdot_a (e + u_1) = 2(e + u_1)[(e + u_1)a] - a(e + u_1)^2 = 2(e + u_1)[(e + u_1)(e + v_1)] - (e + v_1)(e + u_1)^2 = e + u_1 + v_1 \neq e + u_1$. ■

O próximo lema estabelece relações que serão usadas a seguir.

Lema 6.1 *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ uma T -álgebra de posto 3. Então se $u, \bar{u} \in \mathbf{U}$ e $v, \bar{v} \in \mathbf{V}$, são válidas as seguintes igualdades :*

- (a) $u(\bar{v}(uv)) = 0$
- (b) $u(\bar{u}(uv)) = -(u\bar{u})(uv)$
- (c) $\bar{u}(u(u\bar{u})) = 0$
- (d) $u(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = 0$
- (e) $v(\bar{u}(\bar{u}(uv))) = 0$
- (f) $v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$
- (g) $u(\bar{u}(\bar{v}(uv))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$
- (h) $(u\bar{u})(\bar{v}(uv)) = \bar{v}(v(u(u\bar{u})))$
- (i) $\bar{v}(u(\bar{u}(uv))) = -u(\bar{u}(\bar{v}(uv)))$.

Demonstração: (a) $u(\bar{v}(uv)) = -(uv)(u\bar{v})$, e por outra parte $u(\bar{v}(uv)) = -u(v(u\bar{v})) = (uv)(u\bar{v})$. Logo $u(\bar{v}(uv)) = 0$.

(b) $u(\bar{u}(uv)) + \bar{u}(u(uv)) + (u\bar{u})(uv) = 0$, mas $u(uv) = 0$, então $u(\bar{u}(uv)) = -(u\bar{u})(uv)$.

(c) $\bar{u}(u(u\bar{u})) = \bar{u}(-\frac{1}{2}u^2\bar{u}) = -\frac{1}{2}\bar{u}(\bar{u}u^2) = 0$, pois $\bar{u} \in U$ e $u^2 \in V$.

(d) $u(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = -(u\bar{v})(u(u\bar{u})) = (u\bar{v})(\frac{1}{2}u^2\bar{u}) = -\frac{1}{2}\bar{u}(u^2(u\bar{v})) = \frac{1}{2}(\bar{u}(\bar{v}(u^2u))) = 0$.

(e) $v(\bar{u}(\bar{u}(uv))) = -\frac{1}{2}v(\bar{u}^2(uv)) = \frac{1}{2}\bar{u}^2(v(uv)) = 0$.

(f) $v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = -\bar{v}(v((u(u\bar{u})))) = \bar{v}((u\bar{u})(uv)) = -\bar{v}(u(\bar{u}(uv)))$ por (b). Logo

$$v(\bar{v}(u(u\bar{u}))) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv)).$$

(g) $u(\bar{u}(\bar{v}(uv))) = -u(\bar{u}(v(u\bar{v}))) = u((u\bar{v})(\bar{u}v)) = -(u(\bar{u}v))(u\bar{v}) = (u\bar{v})(\bar{u}(uv))$.

(h) $(u\bar{u})(\bar{v}(uv)) = -\bar{v}((uv)(u\bar{u})) = \bar{v}(v(u(u\bar{u})))$.

(i) $\bar{v}(u(\bar{u}(uv))) = -(u\bar{v})(\bar{u}(uv)) = -u(\bar{u}(\bar{v}(uv)))$ por (f). ■

Proposição 6.4 *Seja $\mathbf{A}$ uma T -álgebra de posto 3, $a \in \mathbf{A}$ de peso 1 e $\mathbf{A}^{(a)}$ sua álgebra homótopa. Então $x^{\cdot 3} = (x \cdot_a x) \cdot_a x = 0$ para todo $x \in \ker \omega$.*

Demonstração: Sejam $a = e + \bar{u} + \bar{v}$ e $x = u + v \in \ker \omega$, com $u, \bar{u} \in \mathbf{U}$ e $v, \bar{v} \in \mathbf{V}$.

Assim sucessivamente :

$$\begin{aligned} x^2 &= x \cdot_a x = 2(ax)x - ax^2 = (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u} \\ x^3 &= \{[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}](e + \bar{u} + \bar{v})\}(u + v) + \\ &\quad \{(u + v)(e + \bar{u} + \bar{v})\}[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}] - \\ &\quad (e + \bar{u} + \bar{v})\{[(1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4(uv)\bar{v} - 4(uv)\bar{u}](u + v)\}. \end{aligned}$$

No desenvolvimento do segundo membro usamos as relações entre os subespaços $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ e resultados do lema 6.1 anterior, obtendo o resultado, isto é, $x^3 = 0$. ■

Proposição 6.5 *Seja $\mathbf{A}$ uma T -álgebra de posto 3, então verifica-se a equação (4) do capítulo 1, isto é, $2(e \cdot_a x) \cdot_a x + e \cdot_a (x \cdot_a x) = (1 + \gamma)x \cdot_a x$ para todo $x \in \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.*

Demonstração: Consideremos um elemento $x = u + v$ e $a = e + \bar{u} + \bar{v}$ com $u, \bar{u} \in \mathbf{U}$ e $v, \bar{v} \in \mathbf{V}$. Temos:

$$\begin{aligned} x \cdot_a x &= 2(xa)x - ax^2 = (1 - \gamma)u^2 + 2\gamma uv + 4u(u\bar{u}) - 4\bar{u}(uv) - 4\bar{v}(uv) \\ e \cdot_a x &= \frac{1}{2}u + \gamma(v + u\bar{u}) + (1 - \gamma)\bar{u}v + \gamma u\bar{v} \end{aligned}$$

Assim então:

$$\begin{aligned} 2(e \cdot_a x) \cdot_a x + e \cdot_a (x \cdot_a x) &= (1 - \gamma^2)u^2 + 2\gamma(1 + \gamma)uv + 4(1 + \gamma)u(u\bar{u}) - 4(1 + \gamma)\bar{u}(uv) - \\ &4(1 + \gamma)\bar{v}(uv) + 2\gamma u(\bar{u}(u\bar{u})) + 2\gamma v(\bar{u}(u\bar{u})) + 2(1 - \gamma)u(\bar{v}(\bar{u}v)) + 2(1 - \gamma)v(\bar{v}(\bar{u}v)) + \\ &2\gamma u(\bar{u}(uv)) + 2\gamma v(\bar{u}(uv)) + 2\gamma(u\bar{u})(u\bar{v}) + 2\gamma(u\bar{u})(\bar{u}v) + 2(1 - \gamma)(\bar{u}v)(u\bar{u}) + 2(1 - \gamma)(\bar{u}v)(u\bar{v}) + \\ &2(1 - \gamma)(\bar{u}v)(\bar{u}v) + 2\gamma(u\bar{v})(u\bar{u}) + 2\gamma(u\bar{v})(u\bar{v}) + 2\gamma(u\bar{v})(\bar{u}v) - 2\gamma\bar{u}(u(u\bar{u})) - 2(1 - \gamma)\bar{u}(u(\bar{u}v)) - \\ &2\gamma(\bar{u}(v(u\bar{v})) - 2\gamma v(u(u\bar{u})) - 2(1 - \gamma)\bar{v}(u(\bar{u}v)) + 2\bar{u}(u(u\bar{u})) - 2\bar{u}(\bar{u}(uv)) - 2\bar{u}(\bar{v}(uv)) + \\ &4\gamma\bar{v}(u(u\bar{u})) - 4\gamma\bar{v}(\bar{u}(uv)) + 4\gamma\bar{u}(u(u\bar{u})) - 2\bar{u}(\bar{u}(uv)) - 4\gamma\bar{u}(\bar{v}(uv)) + 2\bar{v}(u(u\bar{u})) - 2\bar{u}(u(u\bar{u})) + \\ &4\gamma\bar{u}(\bar{u}(uv)) + 2\bar{u}(\bar{v}(uv)) - 2\bar{v}(u(u\bar{u})) + 4\gamma\bar{v}(\bar{u}(uv))). \end{aligned}$$

Usando as propriedades do lema 1 vemos que $2(e \cdot_a x) \cdot_a x + e \cdot_a (x \cdot_a x) = (1 + \gamma)x \cdot_a x$, para todo $x \in \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. ■

Proposição 6.6 *Seja $\mathbf{A}$ uma T -álgebra de posto 3 e $a = e + \bar{u} + \bar{v} \in \mathbf{A}$ um elemento de peso 1. Se $(1 - 2\gamma)\bar{v} + (\gamma - 1)\bar{u}^2 \in \text{Ann}_{\mathbf{V}}\mathbf{U}$, então $\mathbf{A}^{(a)}$ também é uma T -álgebra de posto 3.*

Demonstração: Já sabemos que a equação (4) do capítulo 1 é satisfeita. Só falta verificar a relação (5) do capítulo 1, com as condições dadas inicialmente. De fato,

$$\begin{aligned}
2e \cdot_a (e \cdot_a x) - (1 + 2\gamma)e \cdot_a x + \gamma x &= \frac{1}{2}u + (1 - \gamma)\bar{u}v + \gamma u\bar{v} + 2\gamma^2 u\bar{u} + 2\gamma^2 v + \frac{1}{2}u\bar{u} + \gamma\bar{u}(u\bar{v}) + \\
&\gamma\bar{u}(u\bar{u}) + \gamma\bar{u}v + \gamma u\bar{v} + 2\gamma(1 - \gamma)\bar{v}(\bar{u}v) + \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\bar{u}v + \frac{1}{2}\gamma u\bar{v} + 2\gamma^3 u\bar{u} + 2\gamma^3 v + \gamma u\bar{u} + \\
&2\gamma^2 \bar{u}(u\bar{v}) + \gamma\bar{u}(u\bar{u}) + \gamma\bar{u}v + \frac{1}{2}u\bar{v} + (1 - \gamma)\bar{v}(\bar{u}v) - \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\bar{u}v - \frac{1}{2}\gamma u\bar{v} - 2\gamma^3 u\bar{u} - 2\gamma^3 v - \\
&\frac{1}{2}u\bar{u} - \gamma\bar{u}(u\bar{v}) - 2\gamma^2 \bar{u}(u\bar{u}) - 2\gamma^2 \bar{u}v - \frac{1}{2}u\bar{v} - (1 - \gamma)\bar{v}(\bar{u}v) - \frac{1}{2}(1 + 2\gamma)u - (1 + 2\gamma)(1 - \gamma)\bar{u}v - \gamma(1 + \\
&2\gamma)(u\bar{v} + u\bar{u} + v) + \gamma(u + v) = \gamma(1 - 2\gamma)u\bar{v} + 2\gamma(1 - \gamma)\bar{u}(u\bar{u}) + 2\gamma(1 - \gamma)\bar{v}(\bar{u}v) + 2\gamma^2 \bar{u}(u\bar{v}) = 0.
\end{aligned}$$

Desta forma $\mathbf{A}^{(a)}$ é uma T-álgebra de posto 3. ■

Capítulo 7

Quase-isotopia em T-álgebras de posto 3

7.1 Introdução

Dadas duas estruturas de álgebra $A_\circ$ e A_* , definidas sobre o mesmo espaço vetorial A (produtos indicados por " $\circ$ ", " $*$ " respectivamente), dizemos que elas são isótopas, se existem aplicações lineares inversíveis P, Q e R de A em A tais que para todo $a, b \in A$

$$a * b = R[P(a) \circ Q(b)]$$

Isto equivale a dizer que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{*} & A \\ P \times Q \downarrow & & \uparrow R \\ A \times A & \xrightarrow{\circ} & A \end{array}$$

é comutativo. Trata-se de uma relação de equivalência chamada *isotopia*. Esta relação é mais fraca do que a relação de isomorfismo. Em geral, as classes de isotopia são muito maiores do que as classes de isomorfismo. Em estruturas algébricas não associativas (álgebras, quase-grupos, etc) o conceito de isotopia é importante.

O conceito de isotopia, pelo fato de depender das 3 aplicações lineares P, Q e R , é muito geral e portanto não se podem obter resultados muito profundos sobre ele. Os melhores resultados exigem alguma particularidade desses operadores. Para um exemplo

interessante no contexto das álgebras genéticas, ver o artigo [12], onde o autor dá também uma interpretação biológica para o conceito de isotopia.

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades das álgebras que resultam de uma modificação no produto em uma T-álgebra de posto 3, de acordo com a fórmula acima, com $R =$ operador identidade de $\mathbf{A}$. Porém não se trata em geral de isotopia pois os operadores que usamos no lugar de P e Q são operadores L_x , $x \in \mathbf{A}$, que não são inversíveis, salvo no caso $\gamma \neq 0$ e $x = e$. Vamos chamar de *quase-isótota* a álgebra obtida neste caso. A quase-isotopia não é uma relação de equivalência.

7.2 Quase-isotopia

Consideremos um corpo $\mathbf{K}$ de característica diferente de 2 e $\mathbf{A}$ uma T-álgebra sobre $\mathbf{K}$ (com produto indicado por ab) de posto 3, com T-equação ($\gamma \neq \frac{1}{2}$)

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \quad (1)$$

e decomposição de Peirce $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$, relativa a um idempotente e , fixado ao longo do capítulo. Denotamos o produto na quasi-isótota por $a * b$ e potências principais de x por x_*^k .

Começemos observando que uma quase-isótota de uma T-álgebra de posto 3 pode ser uma álgebra trivial, isto é, $a * b = 0$, para todo $a, b \in \mathbf{A}$. Sejam $P = Q = L_v$, onde $v \in \mathbf{V}$ e portanto $a * b = (va)(vb)$, para todo $a, b \in \mathbf{A}$. Agora considerando os elementos $u \in \mathbf{U}$ e $v' \in \mathbf{V}$, temos :

$$\begin{aligned} e * e &= (ve)(ve) = (\gamma v)(\gamma v) = \gamma^2 v^2 = 0 \\ e * u &= (ve)(vu) = \gamma v(vu) = 0 \\ e * v' &= (ve)(vv') = (\gamma v)(vv') = 0 \\ u * u &= (vu)(vu) = -(v(vu))u = 0 \\ u * v' &= (vu)(vv') = -(v(vv'))u = 0 \\ v' * v' &= (vv')(vv') = 0 \end{aligned}$$

Aqui usamos as relações (8) a (11) do capítulo 1. Logo, se $a, b \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} a * b &= (\omega(a)e + u' + v') * (\omega(b)e + u'' + v'') \\ &= [v(\omega(a)e + u' + v')][v(\omega(b)e + u'' + v'')] = 0, \end{aligned}$$

pelas igualdades acima e portanto $\mathbf{A}$ tem produto trivial.

Vejamos agora que a quase-isótopa torna-se uma nil álgebra de índice 3. Sejam $P = Q = L_u$, onde $u \in \mathbf{U}$, logo $a * b = (ua)(ub)$. Tomando elementos arbitrários $u' \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$, temos

$$\begin{aligned} e * e &= (ue)(ue) = \frac{1}{4}u^2 \\ e * u' &= (ue)(uu') = \frac{1}{2}u(uu') = -\frac{1}{4}u^2u' \\ e * v &= (ue)(uv) = \frac{1}{2}u(uv) = 0 \\ u' * u' &= (uu')(uu') = 0 \\ u' * v &= (uu')(uv) \\ v * v &= (uv)(uv) = -u((uv)v) = 0 \end{aligned}$$

Aqui também usamos as relações (8) a (11) mencionadas anteriormente. Se $x = \omega(x)e + u' + v' \in \mathbf{A}$, então $x_*^2 = x * x = [u(\omega(x)e + u' + v')]^2 = \frac{\omega(x)^2}{4}u^2 - \frac{\omega(x)}{2}u^2u' - u^2(u'v')$ e daí obtemos $x_*^3 = x_*^2 * x = (ux_*^2)(ux) = 0$.

Neste exemplo, como no primeiro, a quase-isótopa não é nem uma álgebra ponderada já que nenhuma nilálgebra pode admitir uma ponderação.

O caso mais interessante de quase-isotopia de T-álgebras de posto 3, estudado até agora, é descrito a seguir.

Dedenotemos por $\mathbf{A}_*$ a quase-isótopa de $\mathbf{A}$ cujo produto é $a * b = (ea)(eb)$ com $a, b \in \mathbf{A}$, onde e é um idempotente fixado.

Proposição 7.1 *Nas hipóteses acima, temos :*

- a) $(\mathbf{A}_*, \omega)$ é uma álgebra ponderada.
- b) $I(\mathbf{A}_*) = \{e + v, v \in \mathbf{V}\}$ se $\gamma^2 = \frac{1}{2}$ e $I(\mathbf{A}_*) = \{e\}$ se $\gamma^2 \neq \frac{1}{2}$.
- c) Para todo $a \in \ker \omega$, temos $a_*^3 = (a * a) * a = 0$.
- d) O operador linear $L_e : \ker \omega \rightarrow \ker \omega$ dado por $L_e(b) = e * b$, $b \in \ker \omega$, anula o polinômio $4x^2 - (1 + 4\gamma^2)x + \gamma^2 = (4x - 1)(x - \gamma^2)$.
- e) $\ker \omega = \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_{\gamma^2}$ onde $\mathbf{N}_k = \{b \in \mathbf{N} / e * b = kb\}$, com $k = \frac{1}{4}$ ou $k = \gamma^2$.
- f) $\mathbf{A}_* = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_{\gamma^2}$.
- g) $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} * \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \subseteq \mathbf{N}_{\gamma^2}$, $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} * \mathbf{N}_{\gamma^2} \subseteq \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $\mathbf{N}_{\gamma^2} * \mathbf{N}_{\gamma^2} = 0$.
- h) Se $x \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $y \in \mathbf{N}_{\gamma^2}$ então $x * (x * y) = y * (x * y) = 0$.

Demonstração: a) Isto é imediato pois $\omega(ea) = \omega(a)$, $a \in \mathbf{A}$.

b) Consideremos um elemento $x \in \mathbf{A}$ tal que $x = \lambda e + u + v$ com $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$. Então $x * x = x$ é equivalente a $\lambda^2 e + \frac{\lambda}{2}u + \gamma uv + \frac{1}{4}u^2 + 2\lambda\gamma^2 v = \lambda e + u + v$. Assim temos $\lambda^2 = \lambda$, $\frac{\lambda}{2}u + \gamma uv = u$ e $\frac{1}{4}u^2 + 2\lambda\gamma^2 v = v$. Se $\lambda^2 = \lambda$ então $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$. Se $\lambda = 0$ temos $\gamma uv = u$, $v = \frac{1}{4}u^2$ logo $u^2 = 0$, $v = 0$ $uv = 0$ e $u = 0$, donde $x = 0$. Se $\lambda = 1$ temos $2\gamma uv = u$ e $\frac{1}{4}u^2 = (1 - 2\gamma^2)v$. De la primeira equação (multiplicando por v) temos $u = 0$, e o resultado segue da segunda equação.

c) Tomemos um elemento $x \in \ker \omega$ tal que $x = u + v$, $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{V}$. Então

$$x_*^2 = x * x = (ex)(ex) = (\frac{1}{2}u + \gamma v)^2 = \frac{1}{4}u^2 + \gamma uv$$

$$\begin{aligned} x_*^3 &= x_*^2 * x \\ &= (\frac{1}{4}u^2 + \gamma uv) * (u + v) \\ &= [e(\frac{1}{4}u^2 + \gamma uv)][e(u + v)] \\ &= (\frac{\gamma}{4}u^2 + \frac{\gamma}{2}uv)(\frac{1}{2}u + \gamma v) \\ &= \frac{\gamma}{8}u^3 + \frac{\gamma}{4}u^2v + \frac{\gamma}{4}u(uv) + \frac{\gamma}{2}(uv)v = 0 \end{aligned}$$

devido às equações (9) até (11) do capítulo 1.

d) Consideremos agora o operador linear L_e agindo em $\mathbf{N} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ por $L_e x = e * x$. Sabemos que $e * x = e(ex) = \frac{1}{4}u + \gamma^2 v$ e $e * (e * x) = e * (\frac{u}{4} + \gamma^2 v) = (ee)(e(\frac{u}{4} + \gamma^2 v)) = e(e(\frac{u}{4} + \gamma^2 v)) = e(\frac{u}{8} + \gamma^3 v) = \frac{1}{16}u + \gamma^4 v$. Logo temos $4e * (e * x) - (1 + 4\gamma^2)(e * x) + \gamma^2 x = 0$. De onde segue que o operador $L_e : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é raiz do polinômio $4x^2 - (1 + 4\gamma^2)x + \gamma^2 = (4x - 1)(x - \gamma^2)$ numa indeterminada x .

e) Seja $x \in \ker \omega$ tal que $x = u + v$ com $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$. Então $e * x = e(ex) = \frac{1}{4}u + \gamma^2 v$ donde $(e * x - \frac{1}{4}x) = (\gamma^2 - \frac{1}{4})v$ ou $v = (\gamma^2 - \frac{1}{4})^{-1}(e * x - \frac{1}{4}x)$. Além disso $v \in \mathbf{N}_{\gamma^2}$ pois $e * v = (\gamma^2 - \frac{1}{4})^{-1}e * (e * x - \frac{1}{4}x) = (\gamma^2 - \frac{1}{4})^{-1}[\frac{1}{16}u + \gamma^4 v - \frac{1}{4}(\frac{1}{4}u + \gamma^2 v)] = \gamma^2 v$. Por outro lado $\gamma^2 x - e * x = (\gamma^2 - \frac{1}{4})u$ ou $u = (\gamma^2 - \frac{1}{4})^{-1}(\gamma^2 x - e * x)$. Da mesma forma que no caso anterior, prova-se que $u \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$.

f) É consequência direta de d) e e).

g) Sejam dados os elementos $u, u' \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $v, v' \in \mathbf{N}_{\gamma^2}$. Temos $u * u' = \frac{1}{4}uu'$, $e * (u * u') = \frac{1}{4}e(e(uu')) = \frac{\gamma^2}{4}(uu') = \gamma^2(u * u')$. Portanto $u * u' \in \mathbf{N}_{\gamma^2}$ e daí $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}}^2 \subseteq \mathbf{N}_{\gamma^2}$.

Além disso $u * v = (eu)(ev) = \frac{\gamma}{2}uv$ e $e * (u * v) = \frac{\gamma}{2}e(e(uv)) = \frac{1}{4}(u * v)$. Logo $u * v \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} * \mathbf{N}_{\gamma^2} \subseteq \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$. Finalmente $v * v' = (ev)(ev') = \gamma^2 vv' = 0$, então $\mathbf{N}_{\gamma^2}^2 = 0$.

h) Como $x \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $y \in \mathbf{N}_{\gamma^2}$ então temos $ex = \frac{1}{4}x$, $ey = \gamma^2 y$ e $x * (x * y) = \frac{1}{4}x(\frac{1}{16}\gamma^2 xy) =$

$\frac{\gamma^2}{64}x(xy) = 0$. Da mesma forma $y * (x * y) = 0$. ■

Motivado pelos fatos acima, introduzimos uma nova classe de álgebras com propriedades similares a estas quase-isótopas.

Definição 7.1 *Seja $\delta \in \mathbf{K}$ e $\mathbf{A}_\delta$ a álgebra com idempotente e admitindo uma decomposição $\mathbf{A}_\delta = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_\delta$ satisfazendo as relações seguintes:*

- (i) $ex = \frac{1}{4}x$, para todo $x \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$
- (ii) $ey = \delta y$ para todo $y \in \mathbf{N}_\delta$.
- (iii) $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}}^2 \subseteq \mathbf{N}_\delta$, $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{N}_\delta \subseteq \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$ e $\mathbf{N}_\delta^2 = 0$.
- (iv) $x(xy) = y(xy) = 0$ para todo $x \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}}$, $y \in \mathbf{N}_\delta$.

Chamamos de $C_{\mathbf{K}}$ à classe das álgebras $\mathbf{A}_\delta$ com as propriedades anteriores.

Proposição 7.2 $\mathbf{A}_\delta$ é unicamente ponderada.

Demonstração: De fato, segue-se de (i) e (ii) que $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_\delta$ é um ideal de $\mathbf{A}_\delta$ e $\mathbf{A}_\delta^2$ não está contida em $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_\delta$, pois $e = e^2 \notin \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_\delta$. Basta então definir a forma linear $\omega : \mathbf{A}_\delta \rightarrow \mathbf{K}$ por $\omega(\lambda e + x) = \lambda$, onde $x \in \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \oplus \mathbf{N}_\delta$ e $\lambda \in \mathbf{K}$. Se ω' é uma outra ponderação, necessariamente $\omega'(e) = 1$ e da definição anterior segue-se que $\ker \omega \subset \ker \omega'$. ■

Uma álgebra $\mathbf{A}_\delta$ em geral não é uma T-álgebra de posto 3. De fato, tem-se:

Proposição 7.3 $\mathbf{A}_\delta$ é uma T-álgebra de posto 3 se e somente se $\delta = \frac{1}{2}$ e $\ker \omega$ é uma zero álgebra.

Em tais condições a T-equação de $\mathbf{A}_\delta$ é $x^3 - \frac{5}{4}\omega(x)x^2 + \frac{1}{4}\omega(x)^2x = 0$ (*)

Demonstração: ($\Leftarrow$) Isto é imediato.

($\Rightarrow$) Se $\mathbf{A}_\delta$ é uma T-álgebra necessariamente $\delta = \frac{1}{2}$. Além disso, desde as identidades (6), (7) e (8) do capítulo 1, e parte (iii) da definição 7.1 segue-se $\mathbf{N}_{\frac{1}{4}}^2 = \mathbf{N}_{\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{N}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{N}_{\frac{1}{2}}^2 = 0$. Como $\ker \omega$ é uma zero álgebra um cálculo simples mostra que $\mathbf{A}_\delta$ é uma T-álgebra de equação (*).

Proposição 7.4 A classe das quase-isótopas de T-álgebras de posto 3 satisfazendo (1), correspondentes a $P = Q = L_e$, está imersa na classe $C_{\mathbf{K}}$. Se o corpo $\mathbf{K}$ contém todas suas raízes quadradas então estas classes coincidem.

Demonstração: Definimos para tal efeito a aplicação $A \mapsto A_*$. A proposição 7.1 garante que $A_* \in C_K$. Por outro lado, se em K existem raízes quadradas então esta correspondência pode ser invertida. Para isto, definimos em $A_* = Ke \oplus N_{\frac{1}{4}} \oplus N_{\gamma^2} \in C_\delta = C_{\gamma^2}$ a operação

$$e \cdot e = e, e \cdot x = 2ex, e \cdot y = \frac{1}{\sqrt{\delta}}ey, x \cdot x = 4x^2, x \cdot y = \frac{2}{\sqrt{\delta}}xy, y \cdot y = 0$$

Se tomamos $z = \omega(z)e + x + y$, então vemos que se verifica a equação $z^3 - (1 + \delta)\omega(z)z^2 + \delta\omega(z)^2z = 0$ onde $z^2 = z \cdot z$ e $z^3 = (z \cdot z) \cdot z$ e assim A é uma T-álgebra de posto 3. ■

Teorema 7.1 *Se $\delta \neq \frac{1}{2}$ e $\delta \neq \frac{1}{4}$, a classe de álgebras C_K está contida na classe das T-álgebras de posto 4 que satisfazem a seguinte T-equação:*

$$x^4 - \frac{(5 + 4\delta)}{4}\omega(x)x^3 + \frac{(1 + 5\delta)}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{\delta}{4}\omega(x)^3x = 0$$

Demonstração: Seja $N \in C_K$ e consideremos um elemento $x \in N$ tal que $x = \lambda e + u + v$ com $\lambda \in K$, $u \in N_{\frac{1}{4}}$ e $v \in N_\delta$. Temos sucessivamente :

$$x^2 = \lambda^2 e + \frac{\lambda}{2}u + 2uv + u^2 + 2\lambda\delta v$$

$$x^3 = \lambda^3 e + \frac{3}{8}\lambda^2 u + \lambda(1 + 2\delta)uv + \frac{\lambda}{2}(1 + 2\delta)u^2 + \lambda^2\delta(1 + 2\delta)v$$

$$x^4 = \lambda^4 e + \frac{11}{32}\lambda^3 u + \left\{\frac{3\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2}{4}(1 + 2\delta)(1 + 4\delta)\right\}uv + \left\{\frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{\lambda^2\delta}{2}(1 + 2\delta)\right\}u^2 + \lambda^3\delta\{1 + \delta(1 + 2\delta)\}v$$

Queremos determinar elementos $a, b, c \in K$ tais que $x^4 = a\lambda x^3 + b\lambda^2 x^2 + c\lambda^3 x$ para todo $x \in A$. Desta expressão, obtem-se as três relações seguintes:

$$\lambda^4(a + b + c) = \lambda^4$$

$$\left(\frac{3}{8}\lambda^3 a + \frac{b\lambda^3}{2} + c\lambda^3\right)u + \{\lambda^2(1 + 2\delta)a + 2\lambda^2 b\}uv = \frac{11}{32}\lambda^3 u + \left\{3\frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2}{4}(1 + 2\delta)(1 + 4\delta)\right\}uv$$

$$\left\{\frac{a\lambda^2}{2}(1 + 2\delta) + b\lambda^2\right\}u^2 + \{a\lambda^3\delta(1 + 2\delta) + 2b\delta\lambda^3 + c\lambda^3\}v = \left\{\frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{\lambda^2\delta}{2}(1 + 2\delta)\right\}u^2 + \lambda^3\delta\{1 + \delta(1 + 2\delta)\}v$$

Sendo u, v e λ genéricos, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 12a + 16b + 32c = 11 \\ a\delta(1 + 2\delta) + 2b\delta + c = \delta + \delta^2(1 + 2\delta) \end{cases}$$

Donde temos

$$\begin{cases} 20a + 16b = 21 \\ (2\delta^2 + \delta - 1)a + b(2\delta - 1) = 2\delta^3 + \delta^2 + \delta - 1 \end{cases}$$

e daí obtemos $4(2\delta - 1)(4\delta - 1)a = (2\delta - 1)(4\delta - 1)(4\delta + 5)$. Como $\delta \neq \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, então $a = \frac{5+4\delta}{4}$, $b = -\frac{1+5\delta}{4}$ e $c = \frac{\delta}{4}$. Assim temos nosso resultado. ■

É fato bem conhecido que as T-álgebras de posto 3 satisfazendo a equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ são de Bernstein e também satisfazem a identidade de Jordan. Vale também a recíproca. Neste caso, $\gamma = 0$ o que acarreta $\delta = \gamma^2 = 0$ e daí $c = 0$, $b = -\frac{1}{4}$ e $a = \frac{5}{4}$. Assim temos o seguinte corolário:

Corolário 7.1 *As quase-isótopas de álgebras de Bernstein-Jordan, correspondentes aos operadores $P = Q = L_e$ são train álgebras satisfazendo a T-equação, de grau 4, $x^4 - \frac{5}{4}\omega(x)x^3 + \frac{1}{4}\omega(x)^2x^2 = 0$.*

Capítulo 8

Sobre as T-álgebras de posto 3 e tipo $(4, n-3)$

8.1 Introdução

Desde a publicação de [4] e [5] é conhecida a classificação das T-álgebras satisfazendo a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x = 0 \quad (1)$$

com $\gamma \neq \frac{1}{2}$, e com certos tipos, tais como $(1, n)$, $(n+1, 0)$, $(2, n-1)$, $(n, 1)$ e $(3, n-2)$.

Na seção 8.1 deste capítulo daremos alguns resultados para T-álgebras de posto 3 e tipo $(1+r, n-r)$. Em forma especial na seção 8.2, estudaremos as álgebras de tipo $(4, n-3)$, quanto à sua classificação. O propósito inicial era classificar todas as T-álgebras de posto 3 e tipo $(4, n-3)$. Porém dificuldades enormes de cálculo ocorreram e por isso não foi possível chegar ao objetivo proposto.

As notações utilizadas neste capítulo são as mesmas destes dois artigos citados acima. Em particular, $\mathbf{J}$ é o ideal de $\mathbf{A}$ gerado pelos elementos $a^2 - \omega(a)a$, $a \in \mathbf{A}$. Lembramos que $\mathbf{J} = \mathbf{UV} \oplus \mathbf{V}$, sendo $\mathbf{A} = \mathbf{Ke} \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$. Portanto $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{J} \leq \dim \mathbf{N}$, onde $\mathbf{N} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Em particular, para álgebras de tipo $(4, n-3)$ temos $n-3 \leq \dim \mathbf{J} \leq n-1$. De fato, temos sempre $\dim \mathbf{J} < \dim \mathbf{N}$, como foi provado em [4].

Uma das questões importantes na classificação das T-álgebras de posto 3 é estudar propriedades deste ideal $\mathbf{J}$. Em especial, é importante estimar as possíveis dimensões de

$\mathbf{J}$ em função da dimensão de $\mathbf{A}$. Isto aparece na proposição 3 a seguir para álgebras de tipo $(n-1, 2)$ e $(n-2, 3)$. Não conseguimos estender estas limitações superiores para um tipo arbitrário $(n-s, s+1)$, pois os cálculos tornaram-se muito complexos.

O caso $\dim \mathbf{J} = n-3$ corresponde ao caso $\mathbf{J}$ mínimo e foi estudado em toda generalidade em [4]. Neste caso, a classificação das T -álgebras recai em um problema de classificação de funções bilineares, veja a proposição 3 do referido artigo. Nós estudamos aqui o caso $\dim \mathbf{J} = n-2$. As proposições 1 e 2 a seguir generalizam [4, Prop. 5].

Proposição 8.1 *Para toda T -álgebra $\mathbf{A}$ de posto 3 satisfazendo (1), $\mathbf{J}^r$ (r inteiro positivo) é um ideal de $\mathbf{A}$, onde $\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{V} \oplus \mathbf{V}$ é o ideal de Etherington de $\mathbf{A}$.*

Demonstração: Mostraremos primeiramente por indução sobre r que $\mathbf{J}^r$ é um ideal de $\mathbf{N}$, onde $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}$, $\mathbf{J}^r = \mathbf{J}^{r-1}\mathbf{J}$, se $r \geq 2$. Sejam $x \in \mathbf{J}^{r-1}$, $y \in \mathbf{J}$ e $n \in \mathbf{N}$; então pela identidade de Jacobi, temos $n(xy) + x(ny) + y(nx) = 0$. Mas $ny \in \mathbf{J}$, $xy \in \mathbf{J}^r$ e $nx \in \mathbf{J}^{r-1}$; daí $n(xy) \in \mathbf{J}^r$, de onde $\mathbf{J}^r$ é um ideal de $\mathbf{N}$. Por outro lado desde (4) do capítulo 1, sabe-se que $\mathbf{J}^r$ é invariante segundo τ e então $\mathbf{J}^r$ é ideal de $\mathbf{A}$. ■

Proposição 8.2 *Seja $\mathbf{A}$ uma T -álgebra de posto 3 e de tipo $(1+r, n-r)$, $r \geq 2$. Se $\dim \mathbf{J} = n-r$ ou $n-(r-1)$, então $\mathbf{J}^2 = 0$.*

Demonstração: Se $\dim \mathbf{J} = n-r$, então $\mathbf{J} = \mathbf{V}$ e assim $\mathbf{J}^2 = \mathbf{V}^2 = 0$. Suponha que $\dim \mathbf{J} = n-(r-1)$ e $\mathbf{U} = \langle c_1, \dots, c_r \rangle$, $\mathbf{V} = \langle c_{r+1}, \dots, c_n \rangle$. Então o ideal $\mathbf{J}$ é gerado como espaço vetorial por $c_{r+1}, \dots, c_n$ e os produtos $c_i c_j$, onde um dos $c_i c_j$ é diferente de zero e os outros são múltiplos escalares dele. Por simetria, suponhamos que $c_1 c_{r+1} \neq 0$ e assim $c_i c_j = \lambda_{ij} c_1 c_{r+1}$ ($\lambda_{1,r+1} = 1$), para $i = 1, \dots, r$; $j = r+1, \dots, n$. Deste modo $\mathbf{J} = \langle c_{r+1}, \dots, c_n, c_1 c_{r+1} \rangle$ e como valem as identidades $x_1(x_1 x_2) = 0$, $x_2(x_2 x_1) = 0$ para todo $x_1 \in \mathbf{U}$, $x_2 \in \mathbf{V}$, então obtém-se facilmente que $\mathbf{J}^2 = 0$. ■

Proposição 8.3 *Se $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ é uma T -álgebra de posto 3 e tipo $(n-1, 2)$ (resp. $(n-2, 3)$), então $\dim \mathbf{J} \leq \frac{2}{7}(2n+3)$ (resp. $\dim \mathbf{J} \leq \frac{3}{4}(n+1)$).*

Demonstração: Sejam $\mathbf{U} = \langle c_1, \dots, c_{n-2} \rangle$, $\mathbf{V} = \langle c_{n-1}, c_n \rangle$, então $\mathbf{J}$ é gerado por $\{c_1 c_{n-1}, \dots, c_{n-2} c_{n-1}, c_1 c_n, \dots, c_{n-2} c_n, c_{n-1} c_n\}$. Se $\dim \mathbf{J} = 2+k$ ($k \geq 0$) existem k vetores linearmente independentes no conjunto $\{c_1 c_{n-1}, \dots, c_{n-2} c_{n-1}, c_1 c_n, \dots, c_{n-2} c_n\}$ e sejam eles $\{c_{i,1} c_{n-1}, \dots, c_{i,r+1} c_{n-1}, c_{i,r} c_n, \dots, c_{i,k} c_n\}$. O conjunto

$$\{c_{i,1} c_{n-1}, \dots, c_{i,r} c_{n-1}, c_{i,r+1} c_n, \dots, c_{i,k} c_n, c_1, \dots, c_n\}$$

o qual gera N , deve conter uma base da forma

$$\{c_{i,1}c_{n-1}, \dots, c_{i,r}c_{n-1}, c_{i,r+1}c_n, \dots, c_{i,k}c_n, c_{j,1}, \dots, c_{j,n-k-2}, c_{n-1}, c_n\}$$

Estes vetores dão um novo sistema de geradores para J :

$$J = \langle c_{j,1}c_{n-1}, \dots, c_{j,n-k-2}c_{n-1}, c_{j,1}c_n, \dots, c_{j,n-k-2}c_n, c_{n-1}c_n, (c_{i,1}c_{n-1})c_n, \dots, (c_{i,r}c_{n-1})c_n, (c_{i,r+1}c_n)c_{n-1}, \dots, (c_{i,k}c_n)c_{n-1} \rangle. \text{ Mas } (c_{i,s}c_{n-1})c_n = -(c_{i,s}c_n)c_{n-1} \text{ e portanto}$$

$$J = \langle c_{j,1}c_{n-1}, \dots, c_{j,n-k-2}c_{n-1}, c_{j,1}c_n, \dots, c_{j,n-k-2}c_n, c_{n-1}c_n, (c_{i,1}c_{n-1})c_n, \dots, (c_{i,r}c_{n-1})c_n, (c_{i,r+1}c_{n-1})c_n, \dots, (c_{i,k}c_{n-1})c_n \rangle.$$

Consideremos agora os dois operadores lineares $L_{c_{n-1}}$ e L_{c_n} , definidos no subespaço $B_1 = \langle c_{j,1}, \dots, c_{j,n-k-1} \rangle$. Temos $L_{c_{n-1}}^2 = L_{c_n}^2 = 0$, então $Im L_{c_{n-1}} \subset ker L_{c_{n-1}}$ e $Im L_{c_n} \subset ker L_{c_n}$. Assim $dim Im L_{c_{n-1}} \leq \frac{1}{2}dim U$. Por outro lado, seja $B_2 = \langle c_{i,1}, \dots, c_{i,k} \rangle$. Consideremos os operadores $L_{c_{n-1}}$ e L_{c_n} definidos respectivamente em B_2 e B_2c_{n-1} , com valores em U . Temos $dim(B_2c_{n-1})c_n \leq \frac{1}{2}dim(B_2c_{n-1}) \leq \frac{1}{4}dim B_2 = \frac{1}{4}k$. Logo $dim J \leq dim[B_2 + B_1c_n + B_1c_{n-1} + (B_2c_{n-1})c_n]$, ou seja $dim J < 2 + (n-k-2) + \frac{1}{4}k = n - \frac{3}{4}(k+2) + \frac{3}{2}$ e assim temos $dim J \leq \frac{2}{7}(2n+3)$.

De maneira análoga prova-se que se A é uma T-álgebra de posto 3 e tipo $(n-2, 3)$, então $dim J \leq \frac{3}{4}(n+1)$. ■

Observação: A extensão da proposição 3 para os demais tipos é um instrumento crucial no problema da classificação das T-álgebras de posto 3. A dimensão de J parece ser o invariante mais natural para tentar distinguir train álgebras com o mesmo tipo.

8.2 T-álgebras de tipo $(4, n-3)$

Seja A uma T-álgebra de posto 3 e tipo $(4, n-3)$, isto é, $dim U = 3$ e $dim V = n-3$. Sabemos que, neste caso, $n-3 \leq dim J \leq n-1$. O caso em que $dim J = n-3$ é já conhecido, ver [4, Prop.3]. Vamos estudar o caso $dim J = n-2$. Se $U = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ e $V = \langle c_4, \dots, c_n \rangle$ então como J é gerado por $c_4, \dots, c_n$ e os produtos $c_i c_j$ ($i = 1, 2, 3; j = 4, \dots, n$), devemos ter que um desses produtos é não nulo e os outros são múltiplos escalares dele. Podemos supor $c_1 c_4 \neq 0$ e assim $c_i c_j = \lambda_{ij} c_1 c_4$ ($i = 1, 2, 3; j = 4, \dots, n$); $\lambda_{14} = 1$. O conjunto $\{c_1 c_4, c_4, \dots, c_n\}$ pode ser completado a uma base $\{c_1 c_4, -, -, c_4, \dots, c_n\}$ de

$\mathbf{N}$, onde os dois vetores faltantes devem ser escolhidos entre c_1, c_2, c_3 . Existem então 3 possíveis escolhas.

Seja $\{c_1 c_4, c_1, c_2, c_4, \dots, c_n\}$ é uma base de $\mathbf{N}$. A tábua de multiplicação é

	$c_1 c_4$	c_1	c_2	c_4	c_5	$\dots$	c_n
$c_1 c_4$	0	0	0	0	0	$\dots$	0
c_1		c_1^2	$c_1 c_2$	$c_1 c_4$	$\lambda_{15} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1n} c_1 c_4$
c_2			c_2^2	$\lambda_{24} c_1 c_4$	$\lambda_{25} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2n} c_1 c_4$
c_4				0	0	$\dots$	0
c_5					0	$\dots$	0
$\vdots$						$\ddots$	$\vdots$
c_n							0

A primeira linha é zero, pois desde as relações (8) a (11) do capítulo 1, temos:

$$(c_1 c_4)(c_1 c_4) = -c_1[c_4(c_1 c_4)] = 0, \quad c_1(c_1 c_4) = 0, \quad c_2(c_1 c_4) = 0 \text{ e } c_j(c_1 c_4) = 0; \quad j = 4, \dots, n.$$

Além disso, da tábua vemos que $1 \leq \dim \mathbf{N}^2 \leq 4$. Vamos analisar somente os casos $\dim \mathbf{N}^2 = 1, 2$.

(a) $\dim \mathbf{N}^2 = 1$. Neste caso, necessariamente $c_1^2 = c_1 c_2 = c_2^2 = 0$. Chamando de $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_4, x_4 = c_5, \dots, x_{n-1} = c_n, x_n = c_1 c_4$, devemos ter a seguinte tábua de multiplicação de $\mathbf{A}$:

	c_0	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
c_0	c_0	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	γx_3	$\dots$	γx_{n-1}	$\frac{1}{2}x_n$
x_1		0	0	x_n	$\dots$	$\lambda_{1n} x_n$	0
x_2			0	$\lambda_{24} x_n$	$\dots$	$\lambda_{2n} x_n$	0
x_3				0	$\dots$	0	0
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}						0	0
x_n							0

Alguns cálculos da tábua são originados da seguinte forma :

$x_1x_1 = c_1^2 = 0$, $x_1x_2 = c_1c_2 = 0$, $x_1x_3 = c_1c_4 = x_n, \dots, x_1x_{n-1} = c_1c_n = \lambda_{1n}c_1c_4 = \lambda_{1n}x_n$
e $x_1x_n = c_1(c_1c_4) = 0$.

Esta situação pode representar-se da seguinte forma mais intrínseca. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{K}$ tal que $\dim \mathbf{V} = n - 3$ e $\psi_1, \psi_2 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{K}$ formas lineares com $\psi_1 \neq 0$. Consideremos o espaço vetorial $\mathbf{N}$, definido por $\mathbf{N} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} \oplus \mathbf{V} \oplus \mathbf{K}$, munido da seguinte multiplicação :

$$(\lambda_1, \lambda_2, v, \lambda_3)(\lambda'_1, \lambda'_2, v', \lambda'_3) = (0, 0, 0, \psi_1(\lambda_1v' + \lambda'_1v) + \psi_2(\lambda_2v' + \lambda'_2v)) \quad (2)$$

para $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{K}$ e $v, v' \in \mathbf{V}$.

Em particular temos que $x^2 = (0, 0, 0, \psi_1(2\lambda_1v) + \psi_2(2\lambda_2v))$ e portanto $x^3 = 0$ para todo $x = (\lambda_1, \lambda_2, v, \lambda_3) \in \mathbf{N}$. A prova é imediata. Seja $\tau : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ definida por $\tau(\lambda_1, \lambda_2, v, \lambda_3) = (\frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2, \gamma v, \frac{1}{2}\lambda_3)$, onde $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Verifica-se facilmente que τ satisfaz as equações (4) e (5) do capítulo 1, isto é,

$$2\tau(a)a + \tau(a)^2 = (1 + \gamma)a^2, \quad a \in \mathbf{N}$$

e

$$2\tau^2 - (1 + 2\gamma)\tau + \gamma id_{\mathbf{N}} = 0$$

e assim a álgebra ponderada $\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{N}$ satisfaz a T-equação

$$x^3 - (1 + \gamma)w(x)x^2 + \gamma w(x)^2x = 0$$

isto é, $\mathbf{A}$ é uma T-álgebra de posto 3 e tipo $(4, n - 3)$. Além disso, $\mathbf{J} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{K}$, $\dim \mathbf{J} = n - 2$ e $\dim \mathbf{N}^2 = 1$, pois $\mathbf{N}^2 = \mathbf{UV} \oplus \mathbf{U}^2$. Denotamos por $[\mathbf{V}; \psi_1, \psi_2]$ a T-álgebra $\mathbf{A}$ assim construída. Completando uma base ordenada $\{x_3, \dots, x_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}$ a uma base ordenada $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbf{N}$, com $x_1 = (1, 0, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $x_n = (0, 0, 0, 1)$, obtemos a seguinte tábua de multiplicação :

$$\begin{cases} c_0^2 = c_0, \quad c_0x_1 = \frac{1}{2}x_1, \quad c_0x_2 = \frac{1}{2}x_2, \quad c_0x_n = \frac{1}{2}x_n \\ c_0x_j = \gamma x_j, \quad x_1x_j = \psi_1(x_j)x_n, \quad x_2x_j = \psi_2(x_j)x_n; \quad j = 3, \dots, n-1 \\ \text{os outros produtos são zero} \end{cases} \quad (1)$$

Observação : A construção acima de T-álgebras de posto 3 e tipo $(4, n - 3)$, dada pela fórmula (1), pode ser estendida a álgebras de tipo $(1 + r, n - r)$. Para isto, consideremos

um espaço vetorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbf{K}$ tal que $\dim \mathbf{V} = n - r$ ($r \geq 2$) e sejam as formas lineares $\psi_1, \dots, \psi_{r-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}$ com $\psi_1 \neq 0$. O espaço vetorial $\mathbf{N} = \mathbf{K} \oplus \dots \oplus \mathbf{K} \oplus \mathbf{V} \oplus \mathbf{K}$ é munido da multiplicação

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, v, \lambda_r)(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{r-1}, v', \lambda'_r) = \\ (0, \dots, 0, \psi_1(\lambda_1 v' + \lambda'_1 v) + \dots + \psi_{r-1}(\lambda_{r-1} v' + \lambda'_{r-1} v))$$

para $v, v' \in \mathbf{V}$ e $\lambda_1, \lambda'_1, \dots, \lambda_r, \lambda'_r \in \mathbf{K}$.

É fácil ver que $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathbf{N}$. Seja $\tau : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida por $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, v, \lambda_r) = (\frac{1}{2}\lambda_1, \dots, \frac{1}{2}\lambda_{r-1}, \gamma v, \frac{1}{2}\lambda_r)$, onde $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Verifica-se facilmente que τ satisfaz (4) e (5) do capítulo 1, assim a álgebra ponderada $\mathbf{A}$, obtida pela adjunção do idempotente, é uma T-álgebra de posto 3. Seu ideal $\mathbf{J} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{K}$, $\dim \mathbf{J} = n - (r - 1)$ e $\dim \mathbf{N}^2 = 1$, pois $\mathbf{N}^2 = \mathbf{UV} \oplus \mathbf{U}^2$. Denotamos por $[\mathbf{V}; \psi_1, \dots, \psi_{r-1}]$ a álgebra assim construída. Completando uma base ordenada $\{x_r, \dots, x_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}$ a uma base ordenada $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbf{N}$, com $x_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x_{r-1} = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, (1 na posição $(r-1)$ -ésima) e $x_n = (0, \dots, 0, 1)$, obtemos a tabela de multiplicação de $\mathbf{A}$ seguinte

$$\begin{cases} c_0^2 = c_0, c_0 x_1 = \frac{1}{2}x_1, \dots, c_0 x_{r-1} = \frac{1}{2}x_{r-1}, c_0 x_n = \frac{1}{2}x_n, c_0 x_j = \gamma x_j; j = r, \dots, n-1 \\ x_1 x_j = \psi_1(x_j)x_n, \dots, x_{r-1} x_j = \psi_{r-1}(x_j)x_n; j = r, \dots, n-1 \\ \text{e os outros produtos são zero} \end{cases} \quad [1]$$

Desta maneira temos um método para construir T-álgebras de posto 3 com tipo $(1 + r, n - r)$, tais que $\dim \mathbf{J} = n - (r - 1)$ e $\dim \mathbf{N}^2 = 1$.

(b) $\dim \mathbf{N}^2 = 2$. Neste caso, $c_1^2, c_1 c_2$ e c_2^2 geram um subespaço de $\mathbf{V}$ de dimensão 1. Devemos analisar então 3 sub-casos, a saber $c_1^2 \neq 0$ ou $c_1 c_2 \neq 0$ ou $c_2^2 \neq 0$.

Supondo primeiro que $c_1^2 \neq 0$, então $c_1 c_2 = k c_1^2$ e $c_2^2 = l c_1^2$; $k, l \in \mathbf{K}$. Como $c_1^2 \neq 0$, podemos substituir algum c_j ($4 \leq j \leq n$) por c_1^2 tendo assim uma nova base de $\mathbf{N}$ $\{c_1 c_4, c_1, c_2, c_4, \dots, c_{j-1}, c_1^2, c_{j+1}, \dots, c_n\}$. A tábua de multiplicação de $\mathbf{N}$ é agora :

	$c_1 c_4$	c_1	c_2	c_4	$\dots$	c_{j-1}	c_1^2	c_{j+1}	$\dots$	c_n
$c_1 c_4$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
c_1		c_1^2	$k c_1^2$	$c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{1j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1n} c_1 c_4$
c_2			$l c_1^2$	$\lambda_{24} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{2j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2n} c_1 c_4$
c_4				0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		0
c_n						0	0	0	$\dots$	0

O cálculo desta tabela é similar aquele feito na tabela anterior e por isso os detalhes serão omitidos.

Temos $c_1^2 c_2 = -2(c_1 c_2) c_1 = -2k c_1^2 c_1 = -2k c_1^3 = 0$, mais ainda para todo $\alpha c_1 + \beta c_2$: $(\alpha c_1 + \beta c_2)^3 = (\alpha c_1 + \beta c_2)^2 (\alpha c_1 + \beta c_2) = (\alpha^2 + \beta^2 l + 2\alpha\beta k) c_1^2 (\alpha c_1 + \beta c_2) = \beta(\alpha^2 + \beta^2 l + 2\alpha\beta k) c_1^2 c_2 = 0$. Assim todo valor dos parâmetros k e l é possível.

Chamamos agora : $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_1^2$, $x_4 = c_4, \dots, x_{j-1} = c_{j-1}$, $x_j = c_{j+1}, \dots, x_{n-1} = c_n$, $x_n = c_1 c_4$. Conseguimos então a tabela seguinte para a álgebra **A** :

	c_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_{n-1}	x_n
c_0	c_0	$\frac{1}{2} x_1$	$\frac{1}{2} x_2$	γx_3	γx_4	$\dots$	γx_{n-1}	$\frac{1}{2} x_n$
x_1		x_3	$k x_3$	0	x_n	$\dots$	$\lambda_{1n} x_n$	0
x_2			$l x_3$	0	$\lambda_{24} x_n$	$\dots$	$\lambda_{2n} x_n$	0
x_3				0	0	$\dots$	0	0
x_4					0	$\dots$	0	0
$\vdots$						$\ddots$		$\vdots$
x_n								0

Supondo agora que $c_1^2 = 0$, então $c_2^2 \neq 0$ ou $c_1 c_2 \neq 0$. Seja primeiramente que $c_1 c_2 \neq 0$, assim $c_2^2 = \alpha c_1 c_2$. Substituímos algum c_j ($4 \leq j \leq n$) por $c_1 c_2$, conseguindo uma nova base $\{c_1 c_4, c_1, c_2, c_4, \dots, c_{j-1}, c_1 c_2, c_{j+1}, \dots, c_n\}$ de **N**. A tabela é :

	$c_1 c_4$	c_1	c_2	c_4	$\dots$	c_{j-1}	$c_1 c_2$	c_{j+1}	$\dots$	c_n
$c_1 c_4$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
c_1		0	$c_1 c_2$	$c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{1j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1n} c_1 c_4$
c_2			$\alpha c_1 c_2$	$\lambda_{24} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{2j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2n} c_1 c_4$
c_4				0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$					$\ddots$	0	0	0	$\dots$	0
c_{j-1}						$\ddots$	0	0	$\dots$	0
c_j							$\ddots$	0	$\dots$	0
$\vdots$								$\ddots$		$\vdots$
c_n									$\ddots$	0

Chamando de $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_1 c_2$, $x_4 = c_4$, $\dots$, $x_{j-1} = c_{j-1}$, $x_j = c_{j+1}$, $\dots$, $x_{n-1} = c_n$, $x_n = c_1 c_4$, a tabela de multiplicação de $\mathbf{A}$ é:

	c_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_{n-1}	x_n
c_0	c_0	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	γx_3	γx_4	$\dots$	γx_{n-1}	$\frac{1}{2}x_n$
x_1		0	x_3	0	x_n	$\dots$	$\lambda_{1n} x_n$	0
x_2			αx_3	0	$\lambda_{24} x_n$	$\dots$	$\lambda_{2n} x_n$	0
x_3				0	0	$\dots$	0	0
x_4					0	$\dots$	0	0
$\vdots$						$\ddots$		$\vdots$
x_n								0

Suponha agora que $c_1^2 = 0$, $c_1 c_2 = 0$ então necessariamente $c_2^2 \neq 0$. Substituímos algum c_j ($4 \leq j \leq n$) por c_2^2 conseguindo a base $\{c_1 c_4, c_1, c_2, c_4, \dots, c_{j-1}, c_2^2, c_{j+1}, \dots, c_n\}$, em relação à qual a tábua de multiplicação é:

	$c_1 c_4$	c_1	c_2	c_4	$\dots$	c_{j-1}	c_2^2	c_{j+1}	$\dots$	c_n
$c_1 c_4$	0	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
c_1		0	0	$c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{1j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{1n} c_1 c_4$
c_2			c_2^2	$\lambda_{24} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2j-1} c_1 c_4$	0	$\lambda_{2j+1} c_1 c_4$	$\dots$	$\lambda_{2n} c_1 c_4$
c_4				0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$					$\ddots$	0	0	0	$\dots$	0
c_{j-1}						$\ddots$	0	0	$\dots$	0
c_j							$\ddots$	0	$\dots$	0
$\vdots$								$\ddots$		$\vdots$
c_n									$\ddots$	0

Chamando de $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_2^2$, $x_4 = c_4$, $\dots$, $x_{j-1} = c_{j-1}$, $x_j = c_{j+1}$, $\dots$, $x_{n-1} = c_n$ e $x_n = c_1 c_4$, temos a seguinte tábua de $\mathbf{A}$:

	c_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_{n-1}	x_n
c_0	c_0	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	γx_3	γx_4	$\dots$	γx_{n-1}	$\frac{1}{2}x_n$
x_1		0	0	0	x_n	$\dots$	$\lambda_{1n} x_n$	0
x_2			x_3	0	$\lambda_{24} x_n$	$\dots$	$\lambda_{2n} x_n$	0
x_3				0	0	$\dots$	0	0
x_4					0	$\dots$	0	0
$\vdots$						$\ddots$		$\vdots$
x_n								0

Isto acaba o caso $\dim \mathbf{N}^2 = 2$. Notamos que nos 3 casos $\mathbf{N}^2$ é gerado por x_3 e x_n , os quais são divisores absolutos de zero, assim $\mathbf{N}^3 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^2 = 0$.

Em qualquer caso $\mathbf{J}$ é gerado por $x_3, x_4, \dots, x_n$ e assim $\mathbf{J}^2 = 0$. Mais ainda, de qualquer forma, c_0, x_1, x_2, x_3 geram uma subálgebra de $\mathbf{A}$. Portanto, nós podemos olhar nossas álgebras como certas extensões desta subálgebra.

Toda esta análise pode-se representar na tábua seguinte e que reflete o caso estudado anteriormente:

<i>TIPO</i>	c_0^2	c_0x_1	c_0x_2	c_0x_3	c_0x_n	c_0x_j	x_1^2	x_1x_2	x_2^2	x_1x_j	x_2x_j	A_i
							x_3	kx_3	lx_3			A_1
$(4, n-3)$	c_0	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	γx_3	$\frac{1}{2}x_n$	γx_j	0	x_3	αx_3			A_2
							0	0	x_3			A_3

$j = 4, \dots, n-1$ e os outros produtos são zero.

Estas classes de T-álgebras de posto 3 e tipo $(4, n-3)$ aparecem da seguinte forma. Seja $\mathbf{X}$ um espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$ de dimensão $n-4$ e $\psi_1, \psi_2 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{K}$ formas lineares tais que $\psi_1 \neq 0$. Seja $\mathbf{C}$ uma álgebra de tal forma que

$$\mathbf{C} = C_1 \oplus C_1^2, C_1 = \langle x_1, x_2 \rangle, C_1^2 = \langle x_3 \rangle \text{ e } C_1^3 = 0$$

Consideremos o espaço vetorial $\mathbf{N} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{X} \oplus \mathbf{K}$, com o seguinte produto:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, u, \lambda)(\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3, u', \lambda') = \\ &((\lambda_1 \lambda'_1 + \lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1 + \lambda_2 \lambda'_2) x_3, 0, \psi_1(\lambda_1 u' + \lambda'_1 u) + \psi_2(\lambda_2 u' + \lambda'_2 u)), \\ &\text{para } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3 \in \mathbf{K} \text{ e } u, u' \in \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Notamos que $\mathbf{N}$ satisfaz a identidade $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathbf{N}$. A aplicação $\tau : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida por $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, u, \lambda) = (\frac{1}{2}\lambda_1 x_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 x_2 + \gamma\lambda_3 x_3, \gamma u, \frac{1}{2}\lambda)$ onde $\gamma \neq \frac{1}{2}$, satisfaz as equações (4) e (5) do capítulo 1, assim $\mathbf{A}$, obtida pela adjunção de idempotente, é uma T-álgebra de posto 3.

Consideremos $\mathbf{U} = \langle x_1, x_2 \rangle \oplus \mathbf{K}$ e $\mathbf{V} = \langle x_3 \rangle \oplus \mathbf{X}$, então $\mathbf{J} = \mathbf{K} \oplus \langle x_3 \rangle \oplus \mathbf{X}$, $\dim \mathbf{J} = n-2$ e $\dim \mathbf{N}^2 = 2$. Se $\mathbf{X} = \langle x_4, \dots, x_{n-1} \rangle$, uma base ordenada de $\mathbf{N}$ é $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, onde $x_n = (0, 0, 1)$ e a tabela da multiplicação de $\mathbf{A}$ é

$$\begin{cases} c_0^2 = c_0, c_0x_1 = \frac{1}{2}x_1, c_0x_2 = \frac{1}{2}x_2, c_0x_3 = \gamma x_3, c_0x_n = \frac{1}{2}x_n \\ c_0x_j = \gamma x_j \ (j = 4, \dots, n-1); x_1x_1, x_1x_2, x_2x_2 \in \langle x_3 \rangle \\ x_1x_j = \psi_1(x_j)x_n, x_2x_j = \psi_2(x_j)x_n; j = 4, \dots, n-1 \\ \text{os outros produtos são zero} \end{cases} \quad [2]$$

Se agora consideramos as bases de $\mathbf{N}$, $\{c_1c_4, c_1, c_3, c_4, \dots, c_n\}$ e $\{c_1c_4, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n\}$, temos as mesmas tabelas que no caso inicial e, portanto, as mesmas classes de álgebras [1] e [2].

Terminamos este capítulo enunciando uma conjectura.

Conjectura: Toda T-álgebra A de posto 3 e tipo $(1+r, n-r)$ tal que $\dim J = n-2$, é isomorfa a alguma $[V; \psi_1, \psi_2]$ ou $[X; \psi_1, \psi_2]$ dependendo de $\dim N^2$ ser 1 ou 2.

Bibliografia

- [1] Abraham V.M., *A note on train algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **20**, 53-58 (1976).
- [2] Alcalde M.T., Burgueño C., Mallol C., Varro R., *Derivations dans les algèbres de Bernstein*. Preprint.
- [3] Baeza R., Catalán A., Costa R., *Bernstein algebras with associative bilinear forms*, Arch. Math. **58**, 234-238(1992)
- [4] Costa R., *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* , Proc. Edinb. Math. Soc. **33**, 61-70 (1990)
- [5] Costa R., *On train algebras of rank 3*, Linear Algebra and its Applications **148**, 1-12 (1991)
- [6] Etherington I.M.H., *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59**, 242-258 (1939)
- [7] Etherington I.M.H., *Commutative train algebras of rank 2 and 3*, J. London Math. Soc. **15**, 136-149 (1940) Corrigendum ibid **20**, 238 (1945)
- [8] González S., *Homotope algebra of a Bernstein algebra* (Preprint)
- [9] González S., Martínez C., *Genetic isotope of a Bernstein algebra* (Preprint)
- [10] Gonshor H., *Contributions to genetic algebra*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **17**, 289-298 (1971)
- [11] Holgate Ph., Hentzel I., Peresi L., *On k^{th} order Bernstein algebras and stability at the $k+1$ generation in polyploids*, J. Math. Appl. Bio. **7**, 33-40 (1990)

- [12] Holgate Ph., *Algebraic Isotopy in Genetics*, IMA J. Math. Appl. Medicine and Biology **4**, 215-222 (1987)
- [13] Holgate Ph., *Characterisations of genetic algebras*, J. London Math. Soc. (2)**6**, 169-174 (1972)
- [14] Holgate Ph., *Some train algebras that are special triangular*, The Math. Student, **55** (2-4), 135-139 (1987)
- [15] Holgate Ph., *A train algebra that is not special triangular*, Arch. Math. **50**, 122-124 (1988)
- [16] Holgate Ph., *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*, J. London Math. Soc.(2),**9**,(1975) 613-623.
- [17] Ljubich Ju., *Mathematical Structures in Population Genetics* , Springer-Verlag, **1993**.
- [18] Mallol C., *A propos des algèbres de Bernstein*, Thèse de Doctorat d'État, U.S.T.L., Montpellier (1989).
- [19] Ouattara M., *Algèbres de la génétique de populations*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Ouagadougou (1992)
- [20] Schafer R.D., *Structure of genetic algebras*, Amer. J. Math. **71**, 121-153 (1949)
- [21] Thedy A., *Mutationen und polarisierte Fundamentalformel*, Math. Annalen **177**, 235-246 (1968)
- [22] Walcher S., *Bernstein algebras which are Jordan algebras*, Arch. Math. **50**, 218-222 (1988)
- [23] Worz-Busekros A., *Algebras in genetics*, Lecture Notes in Biomathematics Vol 36, 1980. Springer.

Índice de notações

$\mathbf{K}$	Corpo $\mathbf{K}$.
$\ker \omega$	Núcleo do homomorfismo ω .
e	Elemento idempotente em $\mathbf{A}$.
$(\mathbf{A}, \omega)$	Álgebra ponderada.
x^k	Potências principais de x .
$x^{[k]}$	Potências plenas de x .
$\mathbf{A} = \mathbf{K}e \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$	Decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa ao idempotente e .
$\text{Carac} \mathbf{K}$	Característica do corpo $\mathbf{K}$.
$\dim \mathbf{U}, \dim \mathbf{V}$	Dimensões dos subespaços $\mathbf{U}, \mathbf{V}$.
$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{V} \oplus \mathbf{V}$	Ideal de Etherington de $\mathbf{A}$.
$\text{Aut}(\mathbf{A})$	Grupo dos automorfismos de $\mathbf{A}$.
$GL(\mathbf{V})$	Grupo linear de $\mathbf{V}$.
$\mathbf{A} = [\mathbf{V}, f, b]$	Álgebra constante de ordem 1.
$\text{Im} L_e^k$	Imagem do homomorfismo L_e^k .
L_e^k	$L_e \circ \cdots \circ L_e$.
$\mathbf{N}_\tau$	$\mathbf{K}$ – álgebra obtida por extensão do operador τ .
id	Função identidade.
$I(\mathbf{A})$	Conjunto dos idempotentes não nulos de $\mathbf{A}$.
P_w	Conjunto das transformações de Peirce associadas a e_w .
T_w	Transformação de Peirce associada a w .
$P \triangleleft \text{Aut}(\mathbf{A})$	P é subgrupo normal de $\text{Aut}(\mathbf{A})$.
$\text{End}(\mathbf{A})$	Conjunto dos endomorfismos de $\mathbf{A}$.

int_w	Conjunto dos automorfismos internos de $End(\mathbf{A})$.
$F < Aut(\mathbf{A})$	F é subgrupo de $Aut(\mathbf{A})$.
$U \bowtie P$	Produto semidireto de U e P .
$Aut(\mathbf{A})/P$	Grupo quociente de $Aut(\mathbf{A})$ por P .
$F \simeq Aut(\mathbf{A})/P$	F isomorfo a $Aut(\mathbf{A})/P$.
$Der(\mathbf{A})$	Álgebra de Lie das derivações de $\mathbf{A}$.
DP	Conjunto das derivações dos morfismos de Peirce.
∂T_w	Derivação do morfismo T_w .
Δ_w	Conjunto das derivações de $\mathbf{A}$ que anulam e_w .
$ad_w = [\partial T_w, \]$	Morfismo definido sobre $Der(\mathbf{A})$.
$\mathbf{A}^{(a)}$	Álgebra homótopa de $\mathbf{A}$.
$x \cdot_a y$	Produto definido na álgebra homótopa.
$a * b$	Produto definido na álgebra quase-isótopa.
x_*^k	Potências principais de x na álgebra quase-isótopa.
$\mathbf{K}e \oplus \mathbf{K}x$	Espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$ de base $\{e, x\}$.