**Extensões do Espaço dos Números
Racionais**

Antônio de Pádua Franco Filho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia**
Orientador: **Prof^a Dr^a Ofelia Teresa Alas**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, outubro de 1995

Extensões do Espaço dos Números Racionais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação
apresentada por Antônio de Pádua Franco Filho,
devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 1995.

Banca examinadora:

Prof^a Dr^a Ofelia Teresa Alas (orientadora)

IME-USP

Prof^a Dr^a Maria Stella Amorim Coutinho Castilla

IME-USP

Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiilh

IMECC-UNICAMP

Resumo

Nesta dissertação vamos estudar alguns espaços topológicos que são generalizações ou extensões do espaço dos números racionais Q . Vamos caracterizar alguns desses espaços, desde que eles sejam espaços metrizáveis, com dimensão por recobrimento nula, e mais algumas "boas propriedades topológicas" que nos permita obter tais caracterizações. Também estudaremos um pouco dos espaços diádicos; um tipo de extensão que preserva a pequena dimensão indutiva para espaços de Tychonoff com a pequena dimensão indutiva nula, e os espaços que contêm cópias dos racionais.

Abstract

In this dissertation we shall study some topological spaces which are enlargements and generalizations of the space of rational numbers Q . Most of these spaces which have "good and usable topological characterizations" are zerodimensional metrizable spaces. By a "good and usable topological characterizations" we shall mean assertions on the pattern of Sierpinski's theorem for the space of rational numbers. We also shall study a type of extension of a zerodimensional space which preserves the small inductive dimension: dyadic spaces and spaces which contain a copy of the rationals.

Agradecimentos

Aos **colegas, professores e funcionários**: amigos que muito ajudaram e incentivaram no decorrer do meu mestrado.

Aos meus familiares: por toda ajuda e incentivo.

À orientadora **Ofelia**: pela dedicação, estímulo, confiança e infinita paciência.

Conteúdo

Sumário	iii
1 Preliminares, definições e notações	1
1.1 Algumas funções cardinais	1
1.2 Dimensões ind, Ind, dim de X	3
1.3 Extensões de espaços regulares zero-dimensionais	4
1.4 Sistemas κ -diádicos	9
1.5 Espaços metrizáveis	11
1.6 Espaços σ -produtos	12
2 Os espaços metrizáveis	13
2.1 Sistemas S -ádicos completos	13
2.2 Os espaços racionais	16
2.3 O cubo ou espaço de Cantor , uma caracterização	18
2.4 Os espaços dos números irracionais P	19
2.5 O espaço de Baire de peso $\kappa > \aleph_0$	21
2.6 Métricas não-arquimedianas.	23
2.7 Os racionais generalizados $Q(\kappa)$	24
3 Os espaços não metrizáveis	27
3.1 Pseudo bases e pseudo bases locais	27
3.2 Em βN	28
3.3 Exemplos de alguns espaços regulares e enumeráveis não metrizáveis	28
3.4 Sobre o teorema de Hewitt-Marczewski-Pondczery	29
3.5 N^κ	31

3.6	Uma construção para $X \subset N^\kappa$	32
3.6.1	O subespaço $Y : X \subset Y \subset \beta X$	33
3.7	Os espaços diádicos	35
4	Os espaços que contém uma cópia dos racionais	40
4.1	Introdução	40
4.1.1	O axioma de Martin	41
4.1.2	Funções irreduzíveis	41
4.1.3	O cardinal b	43
4.2	Funções cujas fibras são subconjuntos raros	43
4.3	Cópias de Q em espaços produtos	46
5	Outras caracterizações	50
5.1	A classe $CAP(X)$	50
5.2	Extensões de bases e de homeomorfismos	51
5.3	Indução em $CAP(X)$	53
5.4	As caracterizações de $C \times Q$ e de $P \times Q$	56
5.4.1	A caracterização de $Q \times B(\kappa)$	59
	Bibliografia	60

Introdução

Extensões do Espaço dos Números Racionais

Nesta dissertação vamos estudar alguns espaços topológicos que são generalizações ou extensões do espaço dos números racionais Q . Vamos caracterizar alguns desses espaços, desde que eles sejam espaços metrizáveis, com dimensão por recobrimento nula, e mais algumas "boas propriedades topológicas" que nos permita obter tais caracterizações. Também estudaremos um pouco dos espaços diádicos; um tipo de extensão que preserva a pequena dimensão indutiva para espaços de Tychonoff com a pequena dimensão indutiva nula, e os espaços que contêm cópias dos racionais.

No capítulo 1, vamos relembrar algumas definições usuais em Topologia Geral, e vamos estabelecer uma noção de extensões para espaços regulares X com a pequena dimensão indutiva $ind(X) = 0$, o que resulta em um espaço regular Y que contém X como subespaço denso, e que ainda preserva $ind(Y) = 0$. Essa extensão é definida a partir de uma base de abertos fechados apropriada $\mathcal{B}$ e relativamente a esta base vamos obter tais $\mathcal{B}$ -extensões. Veremos que se a dimensão por recobrimentos $dim(X) = 0$ e a base tomada é constituída por todos os abertos fechados não triviais de X então a correspondente extensão resulta no compactificado de Čech-Stone.

No capítulo 2, vamos estabelecer as caracterizações dos seguintes espaços: Q o espaço dos números racionais, P o espaço dos números irracionais, C o conjunto triádico de Cantor, e também vamos ver as caracterizações de $Q(\kappa)$ e $B(\kappa)$ que generalizam Q e P no contexto dos espaços metrizáveis de peso $\kappa > \aleph_0$. Todos esses espaços são $\mathcal{B}$ -extensões de Q ou de $Q(\kappa)$, e a nossas demonstrações procuram explorar e deixar claro no texto esse fato.

No capítulo 3, estudamos um pouco dos espaços diádicos, isto é, espaços compactos

que são imagens contínuas do cubo de Cantor generalizado de peso κ . Abrimos esse capítulo com exemplos de espaços regulares enumeráveis que não são metrizáveis e vemos dois resultados de separabilidade em produtos de até $2^{\aleph_0}$ espaços.

No capítulo 4, estudamos os espaços regulares que podem conter cópias do espaço dos números racionais Q e quais as consequências de um produto de até $\kappa < 2^{\aleph_0}$ espaços que contém uma cópia fechada de Q onde usamos o axioma de Martin, para assegurar-nos de que pelo menos um dos espaços fatores do produto tem que conter uma cópia de Q .

No capítulo 5, o último, voltamos a estudar caracterizações de espaços que são produtos de dois fatores $Q \times C, Q \times P, Q \times B(\kappa)$ e usamos um procedimento análogo ao usado no capítulo 2, mas nesses casos já não temos $\mathcal{B}$ -extensões de Q ou de $Q(\kappa)$. A analogia é que ainda usamos bases de abertos fechados que são σ -discretas, e cujas famílias discretas que as definem recobrem todo o espaço a ser caracterizado.

Capítulo 1

Preliminares, definições e notações

Neste capítulo relembramos alguns fatos clássicos em Topologia Geral, e uma forma de obter-se a partir de um espaço X com $ind(X) = 0$ um espaço Y que contém o espaço X como subespaço denso, preservando a pequena dimensão indutiva nula.

Em todo esse trabalho a palavra proposição é reservada para o autor, e as palavras Teorema e Lema indica que são outros os autores do fato enunciado. Do mesmo modo a palavra "prova" é reservada ao autor dessa dissertação.

1.1 Algumas funções cardinais

Vamos recordar as definições de algumas funções cardinais, que usamos nessa dissertação.

Dizemos que dois conjuntos A, B são equipotentes se existe uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$. Em caso afirmativo denotamos $|A| = |B|$.

Um número ordinal γ é um conjunto transitivo e bem ordenado pela relação $\in$, isto é

1) transitivo : $x \in y$ e $y \in \gamma \implies x \in \gamma$

2) bem ordenado : $\emptyset \neq A \subset \gamma \implies \exists \min_{\in}(A)$.

Usamos as seguintes notações : $D = \{0, 1\}$, N , ω para o espaço discreto de dois elementos, para o conjunto dos números naturais, e para o primeiro ordinal infinito, respectivamente, e "convencionamos" que $0 \in N$. Por ${}^A B$ denotamos as funções de A em B .

Um número cardinal κ é um número ordinal inicial, isto é, se $\alpha \in \kappa$ qualquer que seja

a função $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ ela não pode ser sobrejetora. Em outros termos α não é equipotente a κ . Dado um número cardinal κ dizemos que a cofinalidade de κ é o número cardinal λ se existe uma sequência $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \lambda\} \subset \kappa$ de números cardinais tal que $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha \in \lambda\} = \kappa$.

Definição 1.1 *Seja (X, τ) um espaço topológico.*

$\mathcal{B} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ é uma base de X se para todo aberto não vazio $G \subset \tau$ existe um subconjunto $\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}(G) = G$.

$\mathcal{B} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ é uma sub-base de X se o conjunto $\{\cap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{B} \text{ e } |\mathcal{F}| < \aleph_0\}$ é uma base de X .

O peso de X é o número cardinal

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base de } X\} + \aleph_0.$$

Definição 1.2 *Um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$ é uma família de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ de x em X com a seguinte propriedade :*

$$\forall W \in \tau \text{ tal que } x \in W, \text{ existe } V \in \mathcal{V}_x : V \subset W.$$

O carácter de um ponto $x \in X$ é o número cardinal

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ é um sistema fundamental de vizinhanças de } x \in X\} + \aleph_0.$$

O carácter do espaço X é $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$.

Definição 1.3 *A densidade do espaço X é o número cardinal*

$$d(X) = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \text{ é denso em } X\} + \aleph_0.$$

Definição 1.4 *Dizemos que o espaço X satisfaz : o primeiro axioma de enumerabilidade se $\chi(x, X) = \aleph_0, \forall x \in X$, o segundo axioma de enumerabilidade se $w(X) = \aleph_0$, o terceiro axioma de enumerabilidade ou que X é um espaço separável se $d(X) = \aleph_0$.*

Definição 1.5 *Dizemos que um subconjunto $\mathcal{C} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ é uma família celular se seus elementos são dois a dois disjuntos. Se $\bigcup \mathcal{C} = X$ dizemos que $\mathcal{C}$ é um recobrimento aberto discreto.*

A celularidade de X é o número cardinal

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ é uma família celular de } X\} + \aleph_0.$$

Definição 1.6 *O spread de X é o número cardinal*

$$s(X) = \sup\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ é discreto em } X\} + \aleph_0.$$

O *extend* de X é o número cardinal

$$e(X) = \sup\{|D| : D \text{ é discreto e fechado em } X\} + \aleph_0.$$

Definição 1.7 Um subconjunto $\mathcal{N}$ do conjunto das partes de X , denotado por 2^X , é um *network* se, $\forall W \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ existe $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N} : \bigcup \mathcal{N}_0 = W$.

O *net-peso* de X é o número cardinal

$$nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ é um network de } X\} + \aleph_0.$$

Definição 1.8 Dizemos que um espaço X é κ -Lindelof se todo recobrimento aberto $\mathcal{C}$ de X admite um subrecobrimento de cardinalidade menor ou igual a κ .

O grau de Lindelof de X é o menor dos números cardinais infinitos κ tal que X é κ -Lindelof. Notação $L(X)$.

Outras funções cardinais serão definidas segundo necessitemos no transcorrer deste estudo.

1.2 Dimensões ind, Ind, dim de X

Assumimos os termos espaços regulares, espaços normais, e espaços completamente regulares ou espaços de Tychonoff, para os espaços topológicos que satisfazem aos axiomas de separação T_1 mais T_3, T_4 , e $T_{3\frac{1}{2}}$, respectivamente.

Definição 1.9 Seja (X, τ) um espaço regular. Dizemos que a pequena dimensão indutiva de X é zero, e escrevemos $ind(X) = 0$, se X não é o vazio e dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ ao qual x não pertence existem subconjuntos abertos $U, V \in \tau$ tais que

$$x \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset, U \cup V = X.$$

Relembramos que um subconjunto $U \subset X$ de um espaço completamente regular é funcionalmente aberto ou um cozero-set se existe uma função contínua f de X em $I = [0, 1]$ tal que $U = f^{-1}(T)$ para algum aberto $T \subset [0, 1]$.

Definição 1.10 *Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Dizemos que a dimensão por recobrimentos de X é zero, e escrevemos $\dim(X) = 0$, se X não é o vazio e dado um recobrimento por dois conjuntos funcionalmente abertos $\mathcal{U} = \{U, V\}$ de X existe um recobrimento funcionalmente aberto e discreto $\mathcal{R} = \{W_0, W_1\}$ de X que refina $\mathcal{U}$.*

Definição 1.11 *Seja (X, τ) um espaço normal. Dizemos que a grande dimensão indutiva de X é zero, e escrevemos $\text{Ind}(X) = 0$, se X não é o vazio e dados dois subconjuntos fechados $F, G \subset X : F \cap G = \emptyset$ existem subconjuntos abertos $U, V \in \tau$ tais que*

$$F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset, U \cup V = X.$$

1.3 Extensões de espaços regulares zero-dimensionais

Seja (X, τ) um espaço regular com $\text{ind}(X) = 0$. Como X admite uma base de subconjuntos abertos-fechados, então X é um espaço de Tychonoff.

Definição 1.12 *Dizemos que um espaço de Tychonoff Y é uma extensão de um espaço regular X se existe um subespaço denso $A \subset Y$ em Y e um homeomorfismo de X sobre A . Se $\dim(Y) = 0$ dizemos que Y é uma extensão zero-dimensional.*

Vamos descrever neste parágrafo um procedimento, que é inspirado nas extensões de Wallman, cuja finalidade é estender um espaço regular X com $\text{ind}(X) = 0$ a um espaço de Tychonoff αX com $\text{ind}(\alpha X) = 0$. Vamos estabelecer em que condições tais extensões resultam em espaços compactos e no compactificado de Čech-Stone, que denotamos, como é usual, por βX .

Seja X um espaço regular que admite uma base de abertos-fechados não triviais $\mathcal{B}$ com a seguinte propriedade

$$1) U, V \in \mathcal{B} \text{ e } U \cap V \neq \emptyset \implies U \cap V \in \mathcal{B}.$$

Definição 1.13 *Dizemos que uma família não vazia $p \subset \mathcal{B}$ é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$, se p satisfaz as seguintes condições*

$$(1) U, V \in p \implies U \cap V \in p$$

$$(2) U \in p \text{ e } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } U \subset V \implies V \in p$$

(3) se $q \subset \mathcal{B}$ e satisfaz (1) e (2) com $p \subset q$ então $p = q$.

Dizemos que um ultrafiltro p é livre ou não principal se $\cap p = \emptyset$.

Como exemplo, os sistemas de vizinhanças $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ são filtros máximos de $\mathcal{B}$, isto é, são ultrafiltros principais dessa base, previamente fixada. As condições que nós impusemos para as bases de X são indispensáveis. Observamos que se p é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$ então $\cap p$ ou é o vazio ou é um conjunto unitário. Com efeito, supondo que $x, y \in p$ com $x \neq y$ temos um aberto-fechado $U \in \mathcal{B} : x \in U, y \in X \setminus U$ e então temos $p \cup \{U\} \subset q$ onde q é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$ distinto de p , o que contradiz a condição (3).

Definição 1.14 Dizemos que o espaço X é $\mathcal{B}$ -completo se todo ultrafiltro em $\mathcal{B}$ é principal. Caso em contrário, denotamos por $I_{\mathcal{B}}(X)$ o conjunto dos ultrafiltros livres em $\mathcal{B}$ e definimos

$$\mathcal{B}^* = \{V^* : V \in \mathcal{B}\} \text{ onde } V^* = V \cup \{p \in I_{\mathcal{B}}(X) : V \in p\}, \forall V \in \mathcal{B}$$

Ao conjunto $\alpha_{\mathcal{B}}X = X \cup I_{\mathcal{B}}(X)$ damos uma topologia τ^* declarando por base de abertos o conjunto $\mathcal{B}^*$.

Fixados um espaço regular X com $\text{ind}(X) = 0$ e uma base $\mathcal{B}$ de abertos-fechados não triviais de X com a propriedade pedida para definir os ultrafiltros, simplificamos a notação para a extensão $\alpha_{\mathcal{B}}X = X \cup I_{\mathcal{B}}(X)$ na forma $\alpha X = X \cup I(X)$.

Proposição 1.1 A família de subconjuntos $\mathcal{B}^*$ de αX satisfaz aos axiomas de base de uma topologia τ^* sobre αX .

Prova. Primeiro, vamos mostrar que αX é aberto em τ^* . Dado um ultrafiltro $p \in I(X)$ temos $U \in p$ portanto $p \in U^* \in \mathcal{B}^*$ e dado $x \in X$ temos $x \in U \subset U^* \in \mathcal{B}^*$. Vamos agora mostrar que dados $U, V \in \mathcal{B}$ temos

$$U \cap V = \emptyset \iff U^* \cap V^* = \emptyset \text{ e}$$

$$U \cap V = W \iff U^* \cap V^* = W^* \text{ e então segue a tese.}$$

Temos $p \in W^*$ se e somente se $W \in p$ e então pela propriedade (2) segue a inclusão $W^* \subset U^* \cap V^*$. A outra inclusão é imediata da propriedade (1) na definição de p .

■

Proposição 1.2 *O espaço topológico $(\alpha X, \tau^*)$ é um espaço de Hausdorff.*

Prova. Dados $p, q \in \alpha X$ é preciso obter abertos básicos disjuntos U^*, V^* tais que $p \in U^*, q \in V^*$. Vamos supor que esses pontos p e q são ultrafiltros de $\alpha X \setminus X$. Existem $U \in p$ e $V \in q$ tais que $U \cap V = \emptyset$ portanto temos $U^* \cap V^* = \emptyset$ e $p \in U^*, q \in V^*$. Se $p, q \in X$ ou $p \in X$ mas $q \in \alpha X$ temos de modo análogo $U, V \in \mathcal{B}$ que separam esses pontos. ■

Proposição 1.3 *A base $\mathcal{B}^*$ é formada por abertos-fechados de αX .*

Prova. Dado $U^* \in \mathcal{B}^*$, se $p \in \alpha X \setminus U^*$ então existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \in p$, e V é tal que $U \cap V = \emptyset$. Assim $p \in V^* \subset \alpha X \setminus U^*$. A outra possibilidade é análoga. ■

Observamos que um ultrafiltro de $\mathcal{B}^*$ é um sistema de vizinhanças de um ponto de αX , portanto é principal.

Vamos supor que temos uma base de abertos-fechados $\mathcal{B}$ para um espaço regular (X, τ) com as seguintes propriedades

$U, V \in \mathcal{B}$ com $U \cap V \neq \emptyset \implies U \cap V \in \mathcal{B}$

$U \in \mathcal{B}$ com $X \setminus U = V \neq \emptyset \implies V \in \mathcal{B}$, e então nessas condições temos o seguinte fato.

Proposição 1.4 *A extensão $(\alpha X, \tau^*)$ de X é um espaço compacto de Hausdorff com $\text{ind}(\alpha X) = 0$.*

Prova. Seja $\{F_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos fechados de αX com a propriedade da interseção finita. Para cada $i \in I$ se F_i for aberto, seja $U_i = F_i$ e caso contrário, podemos escolher para cada ponto $p \in \alpha X \setminus F_i$ uma vizinhança básica $V^*(p, i) \subset \alpha X \setminus F_i$ de modo que tenhamos

$$\alpha X \setminus F_i = \bigcup \{V^*(p, i) : p \in V^*(p, i) \subset \alpha X \setminus F_i\}.$$

Por hipótese sobre a base canônica de αX temos para $U(p, i) = X \setminus V(p, i) \in \mathcal{B}$, que $\alpha X \setminus V^*(p, i) = U^*(p, i)$ e assim a família

$$\mathcal{A} = \{U(p, i) : i \in I \text{ e } p \in \alpha X \setminus F_i\} \subset \mathcal{B}$$

de abertos básicos, tem a propriedade da interseção finita, e satisfaz

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \bigcap \{U^*(p, i) : p \in \alpha X \setminus F_i\} = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Supondo que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ então $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ e portanto existe um ultrafiltro $p \in \alpha X \setminus X$ tal

que $\mathcal{A} \subset p \subset \mathcal{B}$, e segue que $p \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Absurdo. Logo αX é um espaço compacto. ■

Fixamos a seguir a base $\mathcal{D}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ de todos os abertos-fechados não triviais de X , onde sempre supomos que X é um espaço regular com $\text{ind}(X) = 0$. Da proposição 1.4, a extensão relativa a essa base é um espaço compacto. Também a proposição 1.3 diz-nos que $\text{ind}(\alpha_B X) = 0$. Veremos a seguir que essa extensão é o compactificado de Čech-Stone se e somente se $\text{dim}(X) = 0$.

Recordamos que $F, G \subset X$ são subconjuntos completamente separados, em um espaço de Tychonoff X , se existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[F] \subset \{0\}$ e $f[G] \subset \{1\}$.

Proposição 1.5 *Seja X um espaço de Tychonoff. São equivalentes as seguintes condições*

- (i) $\text{dim}(X) = 0$
- (ii) *se F, G são subconjuntos completamente separados, existem abertos $U, V \subset X$ tais que*
 $F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$.

Prova. Suponhamos que $\text{dim}(X) = 0$ e sejam F, G subconjuntos não vazios completamente separados de X . Tomamos uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[F] \subset \{0\}$ e $f[G] \subset \{1\}$. Seja $\{f^{-1}([0, 1[), f^{-1}(]0, 1])\}$ o recobrimento funcionalmente aberto de X associado a essa função. Como $\text{dim}(X) = 0$ existe um recobrimento aberto discreto, $\{U, V\}$ de X tal que

$U \subset f^{-1}([0, 1[), V \subset f^{-1}(]0, 1])$ e $U \cup V = X$, portanto $F \subset U$ e $G \subset V$.

Seja $\{W_0, W_1\}$ um recobrimento funcionalmente aberto de X . Existem funções contínuas g, h de X em $[0, 1]$ tais que

$$W_0 = X \setminus g^{-1}[0] \text{ e } W_1 = X \setminus h^{-1}[0].$$

Podemos definir a função contínua $f(x) = \frac{g(x)}{g(x)+h(x)}$ para todo $x \in X$ pois como $W_0 \cup W_1 = X$ temos $g(x) + h(x) \neq 0$. Tomamos $F = X \setminus W_0, G = X \setminus W_1$ e por hipótese existem abertos $U, V \subset X$ tais que

$F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$. Segue imediatamente $\text{dim}(X) = 0$, pois $U \subset W_1$ e $V \subset W_0$. ■

Proposição 1.6 *Seja X um espaço regular com $\text{ind}(X) = 0$. A extensão $\alpha_B(X) = X \cup I_B(X)$ de X , onde B denota conjunto de todos os abertos fechados não triviais de X ,*

é o compactificado de Čech-Stone βX de X , se e somente se $\dim(X) = 0$.

Prova. Se $\dim(X) = 0$ então para todo par de subconjuntos F, G completamente separados, temos um par de abertos fechados complementares $U, V \in \mathcal{B}$ que os separam, pela proposição 1.5, portanto de $F \subset U \subset U^*$, $G \subset V \subset V^*$ segue que $\alpha_{\mathcal{B}}(X) = X \cup I_{\mathcal{B}}(X)$ é um compactificado de Čech-Stone de X .

Reciprocamente, se $\alpha_{\mathcal{B}}(X) = X \cup I_{\mathcal{B}}(X)$ é um compactificado de Čech-Stone de X , e temos os subconjuntos completamente separados $F, G \subset X$, então existem abertos fechados complementares U^*, V^* no compactificado, que os separam, então, $F \subset U$ e $G \subset V$ portanto, da proposição 1.5 segue que $\dim(X) = 0$.

■

Proposição 1.7 *Sejam X, Y espaços regulares, com a pequena dimensão indutiva nula para ambos, e suponhamos que $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo. Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos fechados de X , com as propriedades necessárias para definir uma $\mathcal{B}$ -extensão $\alpha_{\mathcal{B}}X$ de X , e seja a base $\{h[T] : T \in \mathcal{B}\} = \mathcal{C}$ de Y . Então podemos estabelecer uma $\mathcal{C}$ -extensão de Y , e um homeomorfismo $H : \alpha_{\mathcal{B}}(X) \rightarrow \alpha_{\mathcal{C}}(Y)$ que estende h , e é definido por $H(x) = h(x)$ se $x \in X$ e $H(p) = \{h[T] : T \in p\}$ se $p \in \alpha_{\mathcal{B}}(X) \setminus X$.*

■

Teorema 1.1 *Para todo espaço de Tychonoff X existe uma única compactificação de Hausdorff βX que satisfaz as seguintes condições:*

- 1) X é C^* imersível em βX .
- 2) Toda função contínua de X em um espaço compacto- T_2 estende-se de modo único a βX .
- 3) Todo ponto de βX é o limite de um único z -ultrafiltro em X .
- 4) Se Z_1 e Z_2 são conjuntos funcionalmente fechados em X então a aderência da interseção $Z_1 \cap Z_2$ em βX é a interseção das aderências deles em βX .
- 5) Conjuntos funcionalmente fechados disjuntos em X têm aderências disjuntas em βX .
- 6) Conjuntos completamente separados em X têm aderências disjuntas em βX .
- 7) βX é maximal na ordem parcial no conjunto das compactificações de X .

Este teorema resume, um conjunto de proposições que podem ser encontradas no livro do Walker, nossa referência [15], bem como as definições dos termos a ele pertinentes, e

vamos ver um pequeno resumo da História dessas compactificações:

Čech 1937, condições 1), 6), e 7) ;

M H Stone 1937, condições 1), 2) e 7) ;

Wallman 1938, e Samuel 1948 relacionou ultrafiltros e compactificações, Gillman e Jericson 1960 apresentaram uma excelente síntese desses resultados, e O. Frink 1964 caracteriza os espaços completamente regulares com a noção de base normal de fechados, obtendo a condição 3) acima, como extensão de Wallman.

Observando esses fatos concluímos que no caso em que $\dim(X) = 0$ podíamos substituir os ultrafiltros de conjuntos funcionalmente fechados por ultrafiltros de conjuntos abertos fechados, e que para obter extensões de X com $\text{ind}(\alpha X) = 0$ podíamos pedir muito menos, uma base de abertos fechados, fechada para interseções finitas não vazias, como acima fizemos, era suficiente. Esse procedimento também é semelhante a usar uniformidades para completar topologicamente espaços de Tychonoff.

Definição 1.15 *Seja X um espaço topológico- T_1 . Uma família de subconjuntos fechados $\mathcal{F}$ é uma base normal de fechados para X se satisfaz as seguintes propriedades*

- 1) $\mathcal{F}$ é um anel de conjuntos,
- 2) $\mathcal{F}$ é disjuntiva, isto é, dados $x \in X$ um fechado $F \subset X$ ao qual x não pertence, existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $x \in G$ e $G \cap F = \emptyset$,
- 3) $\mathcal{F}$ é base de fechados em X , isto é, todo fechado em X é a interseção de elementos de $\mathcal{F}$,
- 4) $\mathcal{F}$ é normal, isto é, elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ estão contidos em complementares disjuntos de elementos de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.2 (O. Frink, 1964) *Um espaço topológico- T_1 é completamente regular se e somente se admite uma base normal de subconjuntos fechados.*

■

1.4 Sistemas κ -diádicos

Vamos definir uma noção que foi introduzida por Šapirowskii por volta de 1972, que se mostrou uma forte ferramenta na solução dos mais variados problemas em Topologia

Geral. Enunciaremos um Teorema, o principal deles, cujo exame da demonstração e de suas aplicações, motivaram as demonstrações das caracterizações que desenvolveremos nos capítulos 2 e 5. Para obtermos imersões densas em certos espaços produtos, uma generalização dessa idéia foi eficiente, e permitiu tais caracterizações.

Definição 1.16 *Seja X um espaço topológico. Um sistema κ -diádico para X é uma família $\{(F_\alpha(0), F_\alpha(1)) : \alpha \in \kappa\}$ de pares ordenados de subconjuntos fechados de X tais que*

- 1) $F_\alpha(0) \cap F_\alpha(1) = \emptyset$ para todo $\alpha \in \kappa$,
- 2) $F(s) = \bigcap_{\alpha \in D} F_\alpha(s(\alpha)) \neq \emptyset$ para todo $D \subset \kappa$ tal que $|D| < \aleph_0$ e toda função $s \in {}^\kappa 2$.

Teorema 1.3 (*Šapirowskii, 1972*) *Para todo espaço compacto de Hausdorff X , são equivalentes*

- 1) X pode ser continuamente levado sobre o cubo de Tychonoff $[0, 1]^\kappa$,
- 2) existe um subconjunto fechado F em X que pode ser continuamente levado sobre o cubo de Cantor $\{0, 1\}^\kappa$,
- 3) existe um subespaço fechado $F \subset X$ com π -carácter $\pi\chi(x, F) \geq \kappa$ para todo ponto $x \in F$,
- 4) existe um sistema κ -diádico para X .

■

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7, pgs 63 a 71]. Esse resultado é uma generalização do Teorema de Čech e Pospíšil, 1937, cuja versão mais particularizada vamos apresentar logo abaixo. Para a definição da função cardinal π -carácter, o leitor pode recorrer à página 27 desta dissertação.

Proposição 1.8 *Seja X um espaço compacto- T_2 , com $\dim(X) = 0$, tal que $\chi(x, X) = \kappa$ para todo $x \in X$. Então $|X| \geq 2^\kappa$.*

Prova. Primeiro, se K é um espaço compacto de Hausdorff, podemos tomar um par de subconjuntos fechados disjuntos K_0, K_1 , e se $\dim(K) = 0$ com $|K| > 1$ podemos supor que $K_i : i = 0, 1$ são complementares e não triviais.

Supondo que $\Gamma \in \kappa$ é um ordinal, e que para todo $s \in {}^\Gamma 2$ obtivemos subconjuntos G_Γ sets, (isto é, interseção de até Γ subconjuntos abertos), compactos não vazios dois a

dois disjuntos, cuja reunião é todo o espaço X , denotamos por, $\{K(s) \subset X : s \in {}^\Gamma 2\}$, a partição de X resultante, onde temos por hipótese sobre X , que $\chi(x, K(s)) = \kappa, \forall s \in {}^\Gamma 2$. Podemos quebrar diadicamente cada $K(s)$ em fechados complementares, não triviais, na forma abaixo:

$$1) K(s) = K_0(s) \cup K_1(s)$$

Se $\Gamma \in \kappa$ é um ordinal limite, e já definimos para todo $\beta \in \Gamma$ as partições $\{K(t) : t \in {}^\beta 2\}$, então seja:

$$K(s) = \bigcap_{\beta \in \Gamma} K(s \upharpoonright \beta).$$

Terminada a indução sobre o conjunto dos ordinais de κ , temos a partição de X determinada por $K(s) = \bigcap_{\Gamma \in \kappa} K(s \upharpoonright \Gamma)$. A função definida por $\varphi(x) = s$ se $x \in K(s)$ de X em ${}^\kappa 2$ é sobrejetora, portanto, $|X| \geq 2^\kappa$.

■

Nas mesmas condições do Teorema de Šapirowskii, acrescentando a hipótese $\dim(X) = 0$ podemos obter um sistema κ -diádico por abertos fechados complementares, e se $U(\alpha, i) : i = 0, 1$ para cada $\alpha \in \kappa$ denotam esses subconjuntos, temos $K(s) = \bigcap_{\alpha \in \kappa} U(\alpha, s(\alpha))$ e a função definida na proposição acima φ é contínua.

1.5 Espaços metrizáveis

Vamos recordar tres resultados clássicos cujas demonstrações podem ser encontrada em ([5], cap 4). Também recordamos a definição de *diam* e *mesh* logo a seguir, que usaremos em 2.3 e em outras ocasiões.

Definição 1.17 *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dado um subconjunto $A \subset X$ por diâmetro de A entendemos o número real :*

$$\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Dada uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X a malha dessa família indicamos por:

$$\text{mesh}(\mathcal{F}) = \sup\{\text{diam}(A) : A \in \mathcal{F}\}.$$

Dizemos que o espaço métrico X é completo se toda sequência de Cauchy em X é convergente.

Teorema 1.4 ([5]) *Sejam X um espaço metrizável infinito, $\kappa \geq \aleph_0$ um número cardinal. São equivalentes as seguintes condições :*

$$1)w(X) \leq \kappa \ 2)nw(X) \leq \kappa \ 3)L(X) \leq \kappa \ 4)e(X) \leq \kappa \ 5)s(X) \leq \kappa \ 6)c(X) \leq \kappa \ 7)d(X) \leq \kappa$$

■

Uma base que é uma reunião enumerável de famílias celulares de um espaço X será chamada de base σ -discreta.

Teorema 1.5 (*Bing*) *Todo espaço regular que admite uma base σ -discreta é metrizável.*

Teorema 1.6 (*A.H. Stone*) *Todo espaço metrizável X admite uma base σ -discreta.*

1.6 Espaços σ -produtos

Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços não vazios. Indicamos por $(x_i)_{i \in I}$ os pontos do espaço produto $X = \prod_{i \in I} X_i$. Seja $a \in X$ um ponto fixado.

Definição 1.18 *Chamamos de um σ -produto da família $\{X_i : i \in I\}$ ao subespaço $\Sigma_{<\aleph_0}(a)$ do espaço produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ definido por :*

$$\Sigma_{<\aleph_0}(a) = \{x \in X : S(x) \text{ é finito} \}$$

onde $S(x) = \{i \in I : x_i \neq a_i\}$.

Alguns espaços que estudaremos nos próximos capítulos são espaços σ -produtos de espaços discretos, e em geral, a família considerada é enumerável, e o espaço resultante é metrizável.

O σ -produto $\Sigma_{<\aleph_0}(a)$ de $\kappa \geq \aleph_0$ cópias do espaço discreto N , com o ponto $(a_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ é um espaço de Lindelof, $L(\Sigma_{<\aleph_0}(a)) = \aleph_0$.

Capítulo 2

Os espaços metrizáveis

Vamos estudar neste capítulo, os teoremas clássicos de caracterização dos seguintes subespaços da reta real R :

- (1) o conjunto dos números racionais Q (1920),
- (2) o conjunto dos números irracionais P (1928),
- (3) o conjunto triádico de Cantor K (1910).

Dois resultados, que generalizam os teoremas de caracterização de P e de Q serão estudados, e em todos esses resultados usaremos uma mesma técnica, que é tomar uma cópia densa de tais espaços em um espaço produto de $\aleph_0$ cópias de um espaço discreto, cuja potência é igual ao peso do espaço. Para tal fim, generalizamos a noção de sistemas κ -diádicos introduzida por Šapirowski.

2.1 Sistemas S -ádicos completos

Definição 2.1 *Seja (X, τ) um espaço regular, S um espaço discreto. Uma família de abertos não vazios $\mathcal{G}$ onde :*

$$\mathcal{G} = \{W(\alpha, s) : \alpha \in \kappa \text{ e } s \in S\} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

- (i) $\{W(\alpha, s) : s \in S\}$ é uma família celular que recobre X , $\forall \alpha \in \kappa$.
- (ii) $\bigcap_{j=1}^n W(\alpha_j, s_j) = \emptyset \iff$ existe um par $1 \leq j, l \leq n$ de índices tais que $\alpha_j = \alpha_l$ com

$s_j \neq s_l$.

(iii) $\bigcap_{\alpha \in \kappa} W(\alpha, s_\alpha(x)) = \{x\}$ para todo x em X , onde para cada α em κ existe um e somente um elemento s em S tal que x pertence a $W(\alpha, s)$, será chamada de um sistema S -ádico completo de X .

Usaremos tais sistemas com a propriedade adicional de serem sub-bases da topologia de X , o que permite definir uma imersão

$$f(x) = (s_\alpha(x))_{\alpha \in \kappa}$$

de X no espaço produto S^κ , cuja imagem é um subespaço denso no produto.

Proposição 2.1 *Seja S^κ o produto topológico de κ cópias do espaço discreto S onde $S = \{0, 1\}$ ou $|S| \geq \aleph_0$. A família de abertos elementares*

$$\mathcal{G} = \{W(\alpha, s) : \alpha \in \kappa \text{ e } s \in S\}$$

onde

$$W(\alpha, s) = \prod_{\beta \in \kappa} Y_\beta$$

é tal que $Y_\beta = S$ sempre que $\beta \neq \alpha$ e $Y_\alpha = \{s\}$ é uma sub-base da topologia produto e forma um sistema S -ádico completo de S^κ .

■

Proposição 2.2 *Seja X um espaço regular que admite uma sub-base*

$$\mathcal{D} = \{V(\alpha, s) : \alpha \in \kappa \text{ e } s \in S\}$$

(i) $\{V(\alpha, s) : s \in S\}$ é uma família celular que recobre X , $\forall \alpha \in \kappa$.

(ii) $\bigcap_{j=1}^n V(\alpha_j, s_j) = \emptyset \iff$ existe um par $1 \leq j, l \leq n$ de índices tais que $\alpha_j = \alpha_l$ com $s_j \neq s_l$.

(iii) $\bigcap_{\alpha \in \kappa} V(\alpha, s_\alpha(x)) = \{x\}$ para todo x em X , satisfazendo as condições de um sistema S -ádico completo para X . Então a função

$$f(x) = (s_\alpha(x))_{\alpha \in \kappa}$$

é um homeomorfismo de X sobre sua imagem $f[X]$ que é um subespaço denso em S^κ .

Prova. Por (i) f é bem definida e por (iii) é injetora. Com efeito, dados x em X e $\alpha \in \kappa$ existe um e somente um $s_\alpha(x)$ tal que $x \in V(\alpha, s_\alpha(x))$.

Por (ii) se

$$W = \bigcap_{i=1}^n W(\alpha_i, s_i)$$

é um aberto elementar não vazio no produto S^κ então

$$V = \bigcap_{i=1}^n V(\alpha_i, s_i)$$

é também um aberto não vazio em X e $f[V] \subset f[X] \cap W$ portanto $f[X]$ é denso em S^κ e por (i) e a inclusão

$$f[V(\alpha, s)] \subset W(\alpha, s) \cap f[X]$$

segue a igualdade destes conjuntos. Com efeito, dado $p \in W(\alpha, s) \cap f[X]$ existe um único ponto $x \in X$ tal que $f(x) = p$, mas então $x \in V(\alpha, s)$ para o único $s = s_\alpha(x) \in S$, e então temos $p = f(x) \in f[V(\alpha, s)]$. Assim, f é um homeomorfismo de X sobre o subespaço denso $f[X]$ de S^κ .

■

Definição 2.2 Um ponto $p \in S^{j+1}$ é uma $(j+1)$ -upla $p = (p(0), p(1), \dots, p(j))$ e dado $s \in S$ definimos $p * s = q \in S^{j+1} \times S$ tal que $q(\alpha) = p(\alpha)$ se $\alpha \leq j$ e $q(j+1) = s$.

Proposição 2.3 Seja X um espaço regular que admite uma base σ -discreta

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j \text{ tal que } \mathcal{A}_j = \{V(p) : p \in S^{j+1}\}$$

com as seguintes propriedades

- (1) $\bigcup_{p \in S^{j+1}} V(p) = X$ com $V(p) \cap V(q) = \emptyset$ sempre que $p \neq q : p, q \in S^{j+1}$
- (2) $\mathcal{A}_j \prec \mathcal{A}_{j+1}$, isto é, para cada $V(p) \in \mathcal{A}_j$ o conjunto

$$\mathcal{A}(V(p)) = \{U \in \mathcal{A}_{j+1} : U \subset V(p)\} = \{V(p * s) : s \in S\}$$

é um recobrimento aberto discreto de $V(p)$ que tem potência $|S|$.

Podemos obter uma sub-base

$$\mathcal{D} = \{V(\alpha, s) : \alpha \in \omega \text{ e } s \in S\}$$

para o espaço X que é um sistema S -ádico completo, e uma correspondente imersão de X em $S^{\aleph_0}$ tomando: $f(x) = (s_\alpha(x))_{\alpha \in \omega}$.

Prova. Definimos

$$V(\alpha, s) = \bigcup_{p \in S^\alpha} V(p * s) \text{ para todos } \alpha \in \omega \text{ e } s \in S.$$

Assim cada família $\mathcal{D}_\alpha = \{V(\alpha, s) : s \in S\}$ é um recobrimento aberto discreto de X pois temos :

$$V(p) = \bigcap_{\alpha=0}^j V(\alpha, p(\alpha)) = \bigcap_{\alpha=0}^j \bigcup_{q \in S^\alpha} V(q * p(\alpha))$$

onde $p = (p(0), p(1), \dots, p(j))$, $p * s = (p(0), p(1), \dots, p(j), s)$. Portanto

$$x \in \bigcap_{\alpha=0}^j V(\alpha, p(\alpha)) \iff x \in V(p \upharpoonright n), \forall n = 0, 1, \dots, j.$$

Além disso para s diferente t em S vamos ter :

$$V(\alpha, s) \cap V(\alpha, t) = \emptyset$$

para todo $\alpha \in \omega$, por causa das condições (1) e (2) acima, gerando assim a base $\mathcal{B}$ por interseção de subconjuntos finitos de $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \in \omega} \mathcal{D}_\alpha$. Também as demais propriedades dos sistemas S -ádicos completos são satisfeitas.

■

2.2 Os espaços racionais

Definição 2.3 *Um espaço homeomorfo ao espaço dos números racionais $\mathbb{Q}$ será chamado de um espaço racional.*

Relembramos que todo espaço regular e enumerável é normal e a dimensão Ind é nula. Para os teoremas de caracterizações vamos por o nome do autor e a data da publicação do fato, como segue.

Teorema 2.1 ([12] Sierpinski 1920) *Todo espaço regular e enumerável, denso em si mesmo que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade é homeomorfo ao espaço dos números racionais.*

Prova. Enumeramos $X = \{x_\alpha : \alpha \in \omega\}$ e para cada $x \in X$ denotamos por $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas-fechadas não triviais

$$\mathcal{V}_x = \{U(x, n) : n \in N\}$$

tais que

$$U(x, n+1) \subset U(x, n) \text{ e } U(x, n) \setminus U(x, n+1) \neq \emptyset, \forall n \in N.$$

Vamos, por indução em $n \in N$ escolher uma sequência $\{X_n : n \in N\}$ de subconjuntos finitos de X , tais que

$$X = \bigcup_{n \in N} X_n \text{ com } X_n = \{x(p) : p \in D^{n+1}\}$$

com $X_n \subset X_{n+1}$. Ao mesmo tempo que definimos $X_n = \{x(p) : p \in D^{n+1}\}$ escolhemos os sistemas fundamentais de vizinhanças abertas-fechadas $\mathcal{V}_{x(p)}$ para cada $p \in D^{n+1}$ e $n \in N$ como segue.

Escolhemos $X_0 = \{x(0), x(1)\}$ com $x(0) = x_0$ e $x(1) = x_\beta$ para $\beta = \min\{\alpha \in \omega : x_\alpha \in X \setminus U(x(0), 0)\}$.

$\mathcal{V}_{x(0)} = \{U(x(0), k) : k \in N\}$ e $\mathcal{V}_{x(1)} = \{U(x(1), k) : k \in N\}$ com $U(x(1), 0) = X \setminus U(x(0), 0)$.

Supomos que já definimos X_n para $n = 0, 1, \dots, j$, com os respectivos sistemas fundamentais $\mathcal{V}_{x(p)} = \{U(x(p), k) : k \in N\}$ para todos os pontos de $X_n = \{x(p) : p \in D^{n+1}\}$, onde $x(p*0) = x(p)$, é preciso definir $X_{j+1} = \{x(q) : q \in D^{j+1} \times D\}$. Seja $U(x(p*1), j+1) = U(x(p), j) \setminus U(x(p), j+1)$ e para definir o subconjunto $\{x(p*i) : i = 0, 1\}$ tomamos $x(p*0) = x(p)$ e $x(p*1) = x_\beta$

$$(**)\beta = \min\{\alpha \in \omega : x_\alpha \in U(x(p), j) \setminus U(x(p), j+1)\}$$

Temos assim X_{j+1} definido, e escolhemos $\mathcal{V}_{x(p*1)} = \{U(x(p*1), n) : n \in N\}$ tal que $U(x(p*1), k) = U(x(p), k)$ para todo $k \leq j$

$$U(x(p * 1), j) = U(x(p), j) \setminus U(x(p), j + 1)$$

É preciso mostrar que $X = \bigcup_{j \in N} X_j$. Por absurdo, suponhamos que existe $y \in X \setminus \bigcup_{j \in N} X_j$ e então temos $y = x_\alpha$ para um único $\alpha \in \omega$ e como o conjunto dos predecessores de α é finito temos $p \in D^{j+1}$ tal que $x(p) = x_\beta$ com $\beta + 1 = \alpha$ e $y \in U(x(p), j)$. Como $\bigcap \mathcal{V}_{x(p)} = \{x(p)\}$ temos $k \geq j$ tal que $y \in U(x(p), k) \setminus U(x(p), k + 1)$ mas então segue por (**) que $y = x_\beta : \beta = \min\{\alpha \in \omega : x_\alpha \in U(x(p), k) \setminus U(x(p), k + 1)\}$ portanto $y \in X_{k+1}$. Absurdo. Mas então vale a igualdade.

Seja $\mathcal{B} = \bigcup_{x(p) \in X} \mathcal{V}_{x(p)}$ a base resultante desse procedimento indutivo.

Podemos reescrever a base acima obtida na forma :

$\mathcal{B} = \bigcup_{j \in N} \mathcal{A}_j$ com $\mathcal{A}_j = \{V(p) : p \in D^{j+1}\}$ para $V(p) = U(x(p), j)$ e $p \in D^{j+1}$. Esta base está nas condições da proposição 2.3 e assim tomamos :

$\mathcal{D} = \{V(\alpha, s) : \alpha \in \omega \text{ e } s \in D\}$ e temos um sistema diádico completo, cuja função $f(x) = (s_\alpha(x))_{\alpha \in \omega}$ de X no cubo de Cantor tem por imagem o subespaço:

$$Z = \{(z(n))_{n \in \omega} : \{n \in \omega : z(n) = 1\} \text{ é finito}\}.$$

Com efeito, dado $x \in X$ existe um menor $j \in N$ tal que $x \in X_j$ e assim temos, $x = x(p)$ para $p \in D^{j+1}$, e então $x \in V(\alpha, s(\alpha))$ onde $s(\alpha) = 0, \forall \alpha > j$, e $s \upharpoonright j = p$.

■

Teorema 2.2 (*Fréchet, 1910*) *Todo espaço regular e enumerável X que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade é homeomorfo a um subespaço fechado do conjunto dos números racionais Q .*

Prova. É suficiente observar que $Q \times X$ é homeomorfo a Q e portanto $\{0\} \times X$ é homeomorfo a um subconjunto fechado de Q .

■

2.3 O cubo ou espaço de Cantor , uma caracterização

Teorema 2.3 (*Brouwer, 1910*). *Todo espaço métrico compacto (X, ρ) , denso em si mesmo e zero-dimensional é homeomorfo ao cubo de Cantor $D^{\aleph_0}$, onde $D = \{0, 1\}$.*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ podemos obter um recobrimento aberto discreto finito $\mathcal{C} = \{U(n) : n \leq k\}$ de X , pois X é compacto e $\text{Ind}(X) = 0$ e se necessário, "dividir" alguns de seus abertos-fechados até obter $k = 2^{j+1}$ para algum $j \in N$, satisfazendo ainda a seguinte condição: $\text{mesh}(\mathcal{C}) < \varepsilon$. (Ver definição 1.17)

Podemos obter dessa forma uma família de recobrimentos abertos discretos $\{\mathcal{A}_j : j \in N\}$ com as seguintes propriedades:

- (1) $\mathcal{A}_j = \{V(p) : p \in D^{j+1}\}$,
- (2) $\forall p \in D^{j+1}$ temos $V(p) = V(p * 0) \cup V(p * 1)$,
- (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists j_0 \in N : \text{mesh}(\mathcal{A}_j) < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$.

Temos então uma base $\mathcal{B} = \bigcup_{j \in N} \mathcal{A}_j$, nas mesmas condições pedidas na proposição 2.3, e então podemos tomar a imersão $f : X \longrightarrow D^{\aleph_0}$ cuja imagem é uma cópia densa do compacto X , portanto $f[X] = D^{\aleph_0}$.

■

Uma generalização do cubo de Cantor é o espaço produto $\{0, 1\}^\kappa$, para cada cardinal $\kappa \geq \aleph_0$, a partir deles é possível definir uma classe de espaços compactos, os chamados espaços diádicos, que são imagens contínuas de algum cubo de Cantor. Os estudá-lo-emos no capítulo 3.

2.4 Os espaços dos números irracionais P

O subespaço $P \subset R$ dos números irracionais é completamente metrizável, isto é, existe uma métrica ρ compactível com a topologia de $P \subset R$ que faz de (P, ρ) um espaço métrico completo. (Def. 1.17).

FATO 1 ([5]) *Seja (M, d) um espaço métrico completo, e seja $A \subset M$ um conjunto G_δ não vazio. Então o subespaço A é completamente metrizável.*

Em particular o conjunto dos números irracionais, por ser um conjunto G_δ da reta real R , é completamente metrizável.

Teorema 2.4 (Cantor) *Seja X um espaço métrico. Uma condição necessária e suficiente para que X seja completo, é que toda sequência de subconjuntos fechados não vazios, $\mathcal{F} = \{F_n : n \in N\}$ tal que $\forall n \in N : F_{n+1} \subset F_n$ com $\text{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ satisfaça $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

■

Teorema 2.5 (*Alexandroff e Urysohn, 1928*) Seja X um espaço métrico completo, denso em si mesmo, com $Ind(X) = 0$ de peso $w(X) = \aleph_0$. Se X não contém compactos abertos (exceto o vazio) então X é homeomorfo ao espaço dos números irracionais P .

Prova. Dados um aberto-fechado $U \subset X$ e $\varepsilon > 0$ podemos tomar um recobrimento aberto discreto $\mathcal{A}(U) = \{V(n) : n \in N\}$ de U por abertos em X , tal que $mesh(\mathcal{A}(U)) < \varepsilon$. Com efeito, como $w(X) = \aleph_0$ podemos supor que temos $\mathcal{C} = \{T_n : n \in N\}$ um recobrimento de U que é enumerável e por U não ser compacto supor que é infinito que não admite sub-recobrimentos finitos de U , como $Ind(X) = 0$ podemos ainda supor que seus elementos são abertos-fechados em X com $diam(V) < \varepsilon : \forall V \in \mathcal{C}$. O refinamento

$$W_i = T_i \setminus \bigcap_{j < i} T_j : i \in N$$

recobre U , e podemos afirmar que $\{n \in N : W_n \neq \emptyset\}$ é infinito. Reenumeramos esse recobrimento na forma acima pedida. Assim indutivamente, para $n \in N$ podemos tomar uma sequência de recobrimentos abertos discretos $\mathcal{A}_n$ de X satisfazendo as seguintes condições

$$(1) \mathcal{A}_n = \{V(p) : p \in N^{n+1}\} \text{ e } mesh(\mathcal{A}_n) < 2^{-n}$$

$$(2) \forall U \in \mathcal{A}_n \text{ o recobrimento } \mathcal{A}(U) = \{V \in \mathcal{A}_{n+1} : V \subset U\} \text{ é discreto e infinito.}$$

Podemos pela proposição 2.3, tomar uma sub-base $\mathcal{D} = \{V(\alpha, n) : \alpha \in \omega \text{ e } n \in N\}$, e a correspondente imersão de X em $N^{\aleph_0}$, que denotamos $f(x) = (n_\alpha(x))_{\alpha \in \omega}$, e vamos mostrar que sua imagem é todo o espaço $N^{\aleph_0}$.

Seja $s \in N^{\aleph_0}$. A sequência de fechados $\mathcal{F} = \{V(s \upharpoonright n) : n \in N\}$ onde $s \upharpoonright n = (s(i))_{i=0}^n$ satisfaz às hipóteses do teorema de Cantor, portanto $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, e o único $x \in X$ nessa interseção, é tal que dado $\alpha \in \omega$ existe um e somente um $n_\alpha(x) \in N : x \in V(\alpha, n_\alpha(x))$, e portanto, como $x \in V(\alpha, s(\alpha))$ também satisfaz a mesma condição segue que $f(x) = s$.

■

Temos implicitamente o seguinte resultado

Teorema 2.6 (*Baire, 1909*) O espaço dos números irracionais P é homeomorfo ao espaço produto $N^{\aleph_0}$.

2.5 O espaço de Baire de peso $\kappa > \aleph_0$

Seja S um espaço discreto de potência $|S| = \kappa$ onde $\kappa > \aleph_0$, seja $S^{\aleph_0}$ o produto topológico de $\aleph_0$ cópias desse espaço discreto S . O espaço produto $S^{\aleph_0}$ é completamente metrizável, e uma métrica completa para ele é dada pela fórmula:

$$\varsigma(x, y) = \frac{1}{n+1} \text{ se } x \neq y \text{ e } n = \min\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq y(n)\}.$$

O espaço métrico completo $(B(\kappa), \varsigma)$ é chamado de espaço de Baire de peso $w(B(\kappa)) = \kappa$ e observamos que sua métrica é não-arquimediana, isto é:

$$\varsigma(x, z) \leq \max\{\varsigma(x, y), \varsigma(y, z)\}, \forall x, y, z \in B(\kappa) \text{ ([1] Engelking, 4.2.12, pg 261)}.$$

Esse espaço foi definido por Baire em 1909, e será mostrado nesse parágrafo que ele é universal para a classe dos espaços métricos X com $\text{Ind}(X) = 0$ e peso $w(X) = \kappa$. Muitos outros resultados conhecidos, ficam implicitamente demonstrados como corolários do teorema de caracterização de $B(\kappa)$.

Vamos a seguir considerar algumas proposições de carácter geral.

Definição 2.4 Dizemos que um espaço X é homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$ se todo subespaço aberto $U \neq \emptyset$ tem peso $w(U) = \kappa$. Dizemos que um recobrimento aberto $\mathcal{C}$ é irredutível para a cardinalidade $|\mathcal{C}|$ se todo subrecobrimento $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ tem a mesma cardinalidade.

Proposição 2.4 Seja X um espaço métrico homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$. Então existem recobrimentos abertos de X que são irredutíveis para cardinalidade menor que $L(X) = \kappa$.

Prova. A dificuldade ocorre quando $cf(\kappa) = \aleph_0$. (Ver 1.1) Assim seja uma família celular infinita, $\mathcal{U} = \{U(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ um recobrimento com a propriedade do enunciado, para cada um dos subespaços $U(n)$, e para cada um dos cardinais regulares $\kappa_n : n \in \mathbb{N}$ que satisfazem $\sup\{\kappa_n : n \in \mathbb{N}\} = \kappa$, e assim a reunião desses recobrimentos será um recobrimento irredutível, no sentido acima.

■

Proposição 2.5 Sejam X um espaço paracompacto de Hausdorff e $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto localmente finito de X . Se $\text{Ind}(X) = 0$ então existe um refinamento aberto discreto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ que recobre X .

Prova. Como X é paracompacto regular, podemos tomar um recobrimento fechado $\mathcal{F} = \{F(i) : i \in I\}$ que refina $\mathcal{C}$ e seja localmente finito. Para cada $i \in I$ escolhemos um aberto $A(i) \in \mathcal{C}$ tal que $F(i) \subset A(i)$ obtendo um sub-recobrimento $\mathcal{C}_0 = \{A(i) : i \in I\}$ do recobrimento inicial $\mathcal{C}$. Como $\text{Ind}(X) = 0$ podemos obter para cada $i \in I$ um aberto-fechado $V(i)$ tal que $F(i) \subset V(i) \subset A(i)$. Assim a família $\{V(i) : i \in I\}$ recobre X e é localmente finita pois refina $\mathcal{C}$.

Seja $(I, <)$ uma boa ordem, num abuso de linguagem, para o conjunto I . Tomamos o refinamento

$$U(i) = V(i) \setminus \bigcup_{j < i} V(j) : \forall i \in I$$

que recobre X , seus elementos são abertos-fechados dois a dois disjuntos, e definimos $I_0 = \{i \in I : U(i) \neq \emptyset\}$. Seja $\mathcal{A} = \{U(i) : i \in I_0\}$.

■

Se supormos que o recobrimento $\mathcal{C}$ não admite sub-recobrimentos $\mathcal{C}_0$ de cardinalidade menor que a do próprio recobrimento inicial, então teremos $|I_0| = |\mathcal{C}|$ que é a situação na qual estamos interessados, para os espaços métricos que estudamos.

Proposição 2.6 *Seja X um espaço métrico homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$ e zero-dimensional, $\text{Ind}(X) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento aberto discreto $\mathcal{A}$ de X com $\text{mesh}(\mathcal{A}) < \varepsilon$ e $|\mathcal{A}| = \kappa$.*

Prova. Como X é homogêneo em peso podemos tomar um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{C}$ do recobrimento $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$, e que recobre X , com a propriedade de não admitir sub-recobrimentos de cardinalidade menor que κ . Podemos obter $\mathcal{A}$ como na proposição 2.5 e como $L(X) = \kappa$ segue o afirmado na tese.

■

Teorema 2.7 *(A. H. Stone, 1962) Seja X um espaço métrico completo homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa > \aleph_0$. Se $\text{Ind}(X) = 0$ então X é homeomorfo ao espaço de Baire $B(\kappa)$.*

Prova. Podemos tomar uma sequência de recobrimentos abertos discretos $\mathcal{A}(n), n \in \mathbb{N}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $|\mathcal{A}(n)| = \kappa$ e $\text{mesh}(\mathcal{A}(n)) < \frac{1}{2^n}$
- (2) $\mathcal{A}(n) \prec \mathcal{A}(n+1)$ isto é, para todo aberto $V \in \mathcal{A}(n)$ o conjunto $\{T \in \mathcal{A}(n+1) : T \subset V\}$

$V\}$ é um recobrimento aberto discreto irredutível, (para a potência κ), de V

Temos uma base $B = \bigcup_{n \in N} \mathcal{A}(n)$ como pedem as hipóteses da proposição 2.3, portanto temos a função $f(x) = (s_\alpha(x))_{\alpha \in \omega}$ que é um homeomorfismo de X sobre o subespaço denso $f[X] \subset B(\kappa)$. De modo análogo à prova do teorema 2.5, segue que $f[X] = B(\kappa)$. ■

Teorema 2.8 (*A H Stone, 1962*) *Seja X um espaço completamente metrizável com peso $w(X) = \kappa$ e $\text{Ind}(X) = 0$. Então X é homeomorfo a um subespaço fechado do espaço de Baire $B(\kappa)$. Consequentemente todo subespaço que é uma interseção enumerável de abertos de $B(\kappa)$ é homeomorfo a um subespaço fechado de $B(\kappa)$.* ■

2.6 Métricas não-arquimedianas.

Proposição 2.7 *Seja (X, ρ) um espaço métrico cuja métrica é não-arquimediana. Então todo recobrimento por bolas abertas*

$$\forall \varepsilon > 0 : \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

é um recobrimento aberto discreto de X .

Prova. Vamos supor que para $x, y \in X$ temos $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$. Então por

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\} < \varepsilon$$

segue que as bolas acima coincidem. Com efeito temos

$$\rho(y, z) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(y, x)\} < \varepsilon$$

portanto a inclusão $B(x, \varepsilon) \subset B(y, \varepsilon)$. A outra inclusão é análoga. ■

Uma consequência imediata dessa proposição, é que todo espaço que admite uma métrica não-arquimediana, tem uma base σ -discreta nas mesmas condições estabelecidas na proposição 2.3, desde que este espaço seja homogêneo em peso. Da mesma proposição 2.3, segue uma recíproca, observando que os espaços topológicos $S^{\aleph_0}$ e $B(\kappa)$ coincidem. Os mesmos fatos acima observados permite-nos enunciar.

Teorema 2.9 (Hausdorff, (1934) e de Groot (1956)). Para todo espaço metrizável X temos $Ind(X) = 0$ se e somente se X admite uma métrica não-arquimediana.

■

2.7 Os racionais generalizados $Q(\kappa)$

Vamos estudar uma generalização dos espaços dos números racionais que ainda será um espaço métrico X , com $Ind(X) = 0$ homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa \geq \aleph_0$.

Definição 2.5 Seja $a = (a(n))_{n \in \mathbb{N}} \in B(\kappa)$ um ponto fixado. Ao subespaço $Q(\kappa)$ que é um σ -produto no espaço de Baire de peso $\kappa \geq \aleph_0$ chamamos de espaço racional generalizado,

$$Q(\kappa) = \{(x(n))_{n \in \mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq a(n)\} \text{ é finito} \}$$

Definição 2.6 Seja X um espaço normal. Dizemos que X é um espaço perfeitamente normal se todo subconjunto fechado $F \subset X$ é subconjunto G_δ . Dizemos que X é um espaço σ -discreto se existe uma família enumerável de subespaços discretos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ cuja reunião $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é todo o espaço X .

Proposição 2.8 Todo espaço X que é perfeitamente normal e σ -discreto satisfaz a igualdade $Ind(X) = 0$.

Prova. Seja D um subespaço discreto de X . Seja Y a aderência de D em X , e então como D é discreto existe, para cada $d \in D$ um aberto $U \subset X$, tal que $U \cap D = \{d\}$. Segue que D é um aberto na sua aderência Y , e como X é perfeitamente normal, então D é um conjunto F_σ no fechado $Y \subset X$ portanto D é um conjunto F_σ em X . Podemos escrever:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \text{ e } D_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_{n,j}$$

onde D_n é discreto como subespaço de X e $Z_{n,j}$ é fechado em X . Podemos então pelo teorema da soma para a dimensão por recobrimentos afirmar que $dim(X) = 0$ que equivale para espaços normais a $Ind(X) = 0$.

■

Observamos que podemos nas condições acima reescrever $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ onde todo X_n é fechado e discreto como subconjunto de X .

Lema 2.1 ([9]) *Seja X um espaço métrico σ -discreto homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$. Todo aberto não vazio U de X contém um subconjunto discreto e fechado D em X , de potência $|D| = \kappa$.*

Prova. Como X é homogêneo em peso, dado um aberto $U \subset X$ pela proposição 2.9, podemos supor que $\emptyset \neq V \subset U$ onde V é um abeto-fechado de X . Como o subespaço V também é homogêneo em peso existe $D \subset V$ com D discreto e fechado em V portanto em X também. Observamos que no caso em que $cf(\kappa) = \aleph_0$ então tomamos um recobrimento aberto discreto e infinito de V e contornamos assim essa pequena dificuldade.

■

Teorema 2.10 ([9] Medvedev, 1986) *Se X é um espaço métrico σ -discreto homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$, então X é homeomorfo ao espaço $Q(\kappa)$.*

Demonstração. ([9]) Seja $X = \bigcup_{j \in N} X_j$ onde X_j é discreto e fechado em X , (Prop 2.9). Por indução sobre $n \in N$ podemos tomar uma família de recobrimentos abertos discretos (com uso da prop 2.7) $\mathcal{U}_n$ de X com subconjuntos discretos e fechados Y_n de X tais que:

- (1) $Y_0 \subset X_0$ e $Y_n \cup X_{n+1} \subset Y_{n+1}$
- (2) $\mathcal{U}_{n+1}$ refina $\mathcal{U}_n$ e $mesh(\mathcal{U}_n) \leq \frac{1}{2^n}$
- (3) para todo $U \in \mathcal{U}_n$ temos $|Y_n \cap U| = 1$ e $|Y_{n+1} \cap U| = \kappa$, onde usamos o lema 2.1 para tal construção.

Por indução sobre $n \in N$, podemos definir funções bijetoras f_n de Y_n sobre os subespaços

$$Q_n = \{x \in B(\kappa) : \{n \in N : x(n) \neq a(n)\} \subset \{0, 1, \dots, n\}\}$$

tais que

- (4) $f_0 : Y_0 \rightarrow Q_0$ é uma bijeção
- (5) $f_{n+1} \upharpoonright Y_n = f_n$
- (6) $f_n[U \cap Y_n] = \{y\}$ e $f_{n+1}[U \cap Y_{n+1}] = \{(x(n))_{n \in N} : x(m) = y(m) \text{ para } m \neq n+1, m \in N\}$ para todo $U \in \mathcal{U}_n$.

A função definida por $f(x) = f_n(x)$ se $x \in Y_n$ é um homeomorfismo de X sobre $Q(\kappa)$. Com efeito, por (6) $f[U] = B_\ell(f(y), \frac{1}{n}) \cap Q(\kappa)$ portanto preserva as bases de cada espaço.

■

Teorema 2.11 *Se X é um espaço métrico σ -discreto de peso $w(X) \leq \kappa$ então existe uma cópia fechada de X em $Q(\kappa)$.*

Prova. É suficiente observar que $X \times Q(\kappa)$ é homeomorfo a $Q(\kappa)$ portanto $X \times \{a\}$ é homeomorfo a um subespaço fechado de $Q(\kappa)$.

■

A base $\bigcup \{\mathcal{U}_j : j \in N\}$ satisfaz as condições de imersão densa em $B(\kappa)$ com a imersão definida pela proposição 2.3.

Vamos a seguir dar uma aplicação desse teorema de caracterização do espaço $Q(\kappa)$.

Proposição 2.9 *Se X é um espaço métrico homogêneo em peso de peso $w(X) = \kappa$ então X contém uma cópia densa D de $Q(\kappa)$*

Prova. Para $n = 1, 2, \dots$ denotamos por $\mathcal{C}(n)$ a família dos subconjuntos $A \subset X : x, y \in A, x \neq y \implies \varrho(x, y) \geq \frac{1}{n}$ ordenadas pela inclusão. Cada uma das famílias $\mathcal{C}(n)$ é um conjunto ordenado indutivo, portanto pelo lema de Kuratowski-Zorn podemos tomar um elemento maximal $A(n) \in \mathcal{C}(n)$ para cada $n = 1, 2, \dots$. Dados $x, y \in A(n)$ se $x \neq y$, temos $\varrho(x, y) \geq \frac{1}{n}$, portanto a família $\{A(n) : n \in N^*\}$ é formada por subconjuntos discretos de X , assim o subespaço $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(i)$ de X é σ -discreto, e por ser denso em X , (pois os $A(n)$ são maximais), D é homogêneo em peso de peso $w(D) = w(X) = \kappa$, segue do teorema de Medvedev a tese.

■

Observamos que todos os espaços por nós caracterizados, são $\mathcal{B}$ -extensões de suas cópias de Q ou de $Q(\kappa)$, como subconjuntos densos, para a base das bolas abertas relativas a uma métrica não arquimediana.

Capítulo 3

Os espaços não metrizáveis

3.1 Pseudo bases e pseudo bases locais

Vamos recordar as definições de duas funções cardinais:

Definição 3.1 *Uma π -base de um espaço topológico X , é uma família de abertos não vazios $\pi\mathcal{B}$, tal que para todo aberto não vazio $T \subset X$, temos $\{U \in \pi\mathcal{B} : U \subset T\} \neq \emptyset$.*

Denotamos por

$$\pi\omega(X) = \min\{|\pi\mathcal{B}| : \pi\mathcal{B} \text{ é uma } \pi\text{-base}\} + \aleph_0$$

e chamamos de π -peso tal número cardinal. Uma π -base local de um ponto $x \in X$, é uma família de abertos não vazios $\pi\mathcal{B}(x)$, tal que, para todo aberto não vazio $T(x) \in \tau$ tal que $x \in T(x)$, temos $\{U \in \pi\mathcal{B}(x) : U \subset T(x)\} \neq \emptyset$.

Denotamos por

$$\pi\chi(x, X) = \min\{|\pi\mathcal{B}(x)| : \pi\mathcal{B}(x) \text{ é uma } \pi\text{-base local de } x \in X\} + \aleph_0$$

e chamamos de π -carácter de $x \in X$ essa função cardinal.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em ([7], cap.5 ,pg 102,103).

Teorema 3.1 *Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$ um espaço produto. Se φ é uma das seguintes funções cardinais π -carácter ou π -peso então $\varphi(X) = |I| \sup\{\varphi(X_i) : i \in I\}$ e de modo análogo tem-se uma versão local.*

3.2 Em βN

Vamos considerar dois fatos cujas demonstrações podem ser encontrada em ([15] pgs 70 a 91).

FATO 1) Seja $N_* = \beta N \setminus N$ o restante do compactificado de Čech-Stone do espaço discreto N dos números naturais. Então a celularidade $c(N_*) = 2^{\aleph_0}$.

A prova de tal fato decorre de existirem famílias de subconjuntos dois a dois quase disjuntos, isto é, a interseção de dois deles é finita, com cardinalidade c .

FATO 2) Existem 2^c tipos de ultrafiltros em N_* .

Esse fato, é parte de um Teorema devido a Frolik, cuja demonstração é extremamente engenhosa. Relembramos que dois ultrafiltros $p, q \in \beta N$ são do mesmo tipo se existe uma bijeção f de N em si mesmo cuja extensão $\beta(f) \upharpoonright N_*$ é um automorfismo que leva p em q , isto é, $\beta(f)(p) = q$.

3.3 Exemplos de alguns espaços regulares e enumeráveis não metrizáveis

Seja X um espaço regular e enumerável. Se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade então X é metrizável. Com este fato em vista devemos buscar exemplos de espaços regulares e enumeráveis X , onde caráter de pelo menos um ponto, $x \in X$ é maior que $\aleph_0$.

EXEMPLO 1. Seja X o subespaço de βN : $X = N \cup \{p\}$ onde p denota um ultrafiltro não principal sobre o conjunto N . A topologia desse espaço pode ser introduzida por sistemas fundamentais de vizinhanças como segue:

- (1) Para todo $n \in N$ tomamos $\mathcal{V}_n = \{\{n\}\}$.
- (2) Para o ponto p tomamos $\mathcal{V}_p = \{A \cup \{p\} : A \in p\}$.

Temos um espaço regular pois X é subespaço do compacto de Hausdorff βX , é enumerável, e em p temos :

$\chi(p, X) > \aleph_0$, pois p é um ultrafiltro. Existem 2^c tipos diferentes de ultrafiltros não prin-

principais sobre N , e tantos desses espaços quantos são os tipos de ultrafiltros não principais. Vamos denotar por N_p cada um destes espaços.

EXEMPLO 2. Seja uma família de subespaços de βN , como no exemplo 1, $\{N_{p_n} : n \in N\}$. Tomamos o σ -produto dessa família definido por:

$X = \{(x_n)_{n \in N} : \{n \in N : x_n \neq p_n\} \text{ é finito}\}$.

Como subespaço do espaço produto $X \subset \prod_{n \in N} N_{p_n}$ temos as seguintes propriedades:

(1) o espaço X é regular,

(2) existem pontos $x \in X$ tais que

$\chi(x, X) \geq \sup \chi(p_n, N_{p_n}) > \aleph_0$, pois X é denso no espaço produto. Também é claro que X é enumerável.

Proposição 3.1 *Seja X o espaço do exemplo 2. Temos a seguinte igualdade:*

$$\pi\chi(x, X) = \aleph_0 \text{ para todos os pontos } x \in X.$$

Prova. O conjunto de abertos elementares

$$\mathcal{G} = \{X \cap T : T \in \mathcal{B}\}$$

onde $\mathcal{B}$ é gerado por $\mathcal{D} = \{pr_n^{-1}[m] : m, n \in N\}$ define uma π -base enumerável de X .

■

Escolhendo $p, q \in N_*$ de tipos diferentes, se X_p denota um espaço como do exemplo 2, para a família $\{N_{p_n} = N_p : n \in N\}$ não há porquê X_p e X_q serem homeomorfos, pois são espaços enumeráveis, e temos 2^c tipos de ultrafiltros em N , enquanto que temos c subconjuntos em X_p .

3.4 Sobre o teorema de Hewitt-Marczewski-Pondczerzy

Dois resultados de separabilidade serão provados. Eles mostram como um conjunto denso e enumerável pode ser espalhado (spread out) no espaço produto. Então, esses resultados constituem uma generalização do clássico teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczerzy.

Vamos introduzir duas definições. Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$ um espaço produto e seja $D \subset X$ um subconjunto de X .

Definição 3.2 Dizemos que D é magro (*thin*) no produto X se

$$x, y \in D, x \neq y \iff |\{i \in I : x_i \neq y_i\}| > 1.$$

Dizemos que D é muito magro no produto X se

$$\forall i \in I \text{ e } \forall p \in X_i \text{ temos } |\{x \in D : x_i = p\}| \leq 1.$$

Vamos dar um exemplo de um subconjunto denso, enumerável, e magro no espaço produto R^2 , onde usamos sua estrutura natural de espaço vetorial. Seja a transformação linear:

$$T(x, y) = (x + \pi y, x - \pi y) : x, y \in R^2.$$

A imagem $T[Q^2] \subset R^2$ tem as propriedades acima, pois, $x + \pi y = 0$ implica $x = y = 0$ se $x, y \in Q$.

Esse exemplo mostra-nos que as duas noções acima não são propriedades topológicas. Os dois resultados de separabilidade que seguem, generalizam, segundo Piotrowski [11], o clássico teorema de Hewitt-Marczewski-Pondczery.

Teorema 3.2 ([11]) *Seja X o produto de $2^{\aleph_0}$ espaços separáveis $\{X_i : i \in c\}$ com subconjuntos densos e enumeráveis $D_i = \{x(i, n) : n \in N\}$, respectivamente. Então existe um subconjunto D denso, enumerável e magro em X .*

Demonstração. Primeiro, enumeramos ${}^{\omega}2$ como $\{f_i : i \in c\}$. Para cada $n \in N$ e cada $p \in {}^{\omega}2$, seja $y(n, p)$ definido como segue:

$$y = y(n, p) \text{ para } y_i = x(i, p(f_i \upharpoonright n)).$$

Seja D o conjunto de todos esses tais $y(n, p)$'s. O conjunto D é enumerável, denso e magro em X .

■

Teorema 3.3 ([11]) *Seja X o produto de $2^{\aleph_0}$ espaços $\{X_i : i \in c\}$ densos em si mesmos que tem π -base enumeráveis. Então X tem um subconjunto denso e enumerável D que é muito magro no produto X .*

Demonstração. Indexamos uma π -base enumerável $B_i = \{U(i, n) : n \in N\}$ e recursivamente escolhemos o subconjunto denso $D = \{y(n) : n \in N\}$ de modo que $y_i(n) \in U(i, n) \setminus \{y_i(k) : k < n\}$.

■

3.5 N^κ

O seguinte fato, estabelecido por A. H. Stone 1948, é um dos poucos que encontramos na literatura, relativo a esses espaços.

Teorema 3.4 ([14]) *O produto de $\kappa > \aleph_0$ cópias do espaço discreto N falha em ser normal.*

Demonstração.(A. H. Stone) Seja $F_i \subset N^\kappa : i = 0, 1$ os subconjuntos definidos por :
 $x \in F_i \iff x = (x(\alpha))_{\alpha \in \kappa}$ é tal que $x(\alpha) \neq i$ para um conjunto enumerável de coordenadas J onde para cada $n \in N$ temos $|\{\alpha \in \kappa : x(\alpha) = n\}| \leq 1$.

Como $\kappa > \aleph_0$ temos que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ e é fácil ver que se $y \in N^\kappa \setminus F_i$ então existe uma vizinhança elementar W de y que não encontra o subconjunto F_i , pois temos coordenadas α, β onde $y(\alpha) = y(\beta) = n \neq i$. portanto F_i é fechado em N^κ para $i = 0, 1$. Supomos, por absurdo, que o espaço N^κ é normal. Existem, assim, abertos U, V disjuntos com $F_0 \subset U$ e $F_1 \subset V$. Por indução sobre $n \in N$ vamos construir sequências $\{x_n : n \in N\} \subset F_0$, $\{m_n : n \in N\} \subset N$ estritamente crescente, e $\{\alpha_n : n \in N\} \subset \kappa$, como segue. Vamos denotar por $S(W)$ o conjunto das coordenadas $\{\alpha_i : i = 0, 1, \dots, m_W\}$ das quais um aberto elementar $W \subset N^\kappa$ depende.

Sejam $x_0 = (x_0(\alpha))_\alpha$ o ponto de F_0 que assume valores $x_0(\alpha) = 0$ para todas as coordenadas, $W_0 \subset U$ uma vizinhança de x_0 com $S(W_0) = \{\alpha_i : i \leq m_0\}$. Supomos que obtivemos para $j \leq n$ os pontos, e as vizinhanças desses pontos, $x_j \in W_j \subset F_0$ com $S(W_n) = \{\alpha_i : i \leq m_n\}$. definimos :

$x_{n+1}(\beta) = k$ se $\beta = \alpha_k$ para $k \leq m_n$ e nulo para as demais coordenadas, obtendo assim, um ponto de F_0 , e podemos escolher uma vizinhança elementar $W_{n+1} \subset U$ desse ponto, tal que $S(W_{n+1}) \setminus S(W_n) = \{\alpha_i : m_n < i \leq m_{n+1}\}$ completando a indução.

Seja $y \in N^\kappa$ tal que $y(\alpha) = k$ se $\alpha = \alpha_k$ para $k \in N$, e para as outras coordenadas seja $y(\alpha) = 1$. O ponto y está então em F_1 . Existe uma vizinhança básica $G \subset V$ de y , e como $S(G)$ é finito, existe algum natural $n \in N$, tal que $\alpha_k \notin S(G)$ para todo $k > m_n$. Definimos o ponto $z \in N^\kappa$:

$z(\beta) = k$ se $\beta = \alpha_k$ e $k \leq m_n$
 $z(\beta) = 0$ se $\beta = \alpha_k$ e $m_n < k \leq m_{n+1}$
 $z(\beta) = 1$ caso contrário.

Como z coincide com y e x_{n+1} nas coordenadas $\alpha_j : j \leq m_n$ temos $z \in W_{n+1} \cap G \subset U \cap V$. Absurdo.

■

FATO 2 *O σ -produto $Z = \{x \in N^\kappa : \{\alpha \in \kappa : x_\alpha \neq 0\} \text{ é finito}\}$ é um espaço de Lindeloff.*

3.6 Uma construção para $X \subset N^\kappa$

Vamos construir um subespaço de $A \subset \beta X$ que é zerodimensional, com uma função bijetora e contínua de A em N^κ , que leva a base canônica de N^κ em uma π -base para A .

Sejam κ um número cardinal infinito menor ou igual a $2^{\aleph_0}$ e (X, τ) um espaço regular e enumerável que admite uma sub-base

$$\mathcal{D} = \{V(\alpha, n) : \alpha \in \kappa \text{ e } n \in N\} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$$

com as seguintes propriedades :

- (1) $\bigcup_{n \in N} V(\alpha, n) = X$ e $V(\alpha, n) \cap V(\alpha, m) = \emptyset$ sempre que $n \neq m$, $\forall \alpha \in \kappa$
- (2) $\forall \mathcal{F} \in [\kappa]^{<\aleph_0}$, $\forall s \in N^\kappa$ temos $V(\mathcal{F}, s) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} V(\alpha, s(\alpha)) \neq \emptyset$
- (3) $\bigcap_{\alpha \in \kappa} V(\alpha, n_\alpha(x)) = \{x\}$ onde $\forall x \in X$ e $\forall \alpha \in \kappa \exists ! n_\alpha(x) \in N$ tal que $x \in V(\alpha, n_\alpha(x))$.

Nestas condições temos uma função $f(x) = (n_\alpha(x))_{\alpha \in \kappa}$ que é um homeomorfismo de X sobre o subespaço denso $f[X]$ de N^κ .

Vamos denotar por βX o compactificado de Čech-Stone do espaço X com :
 $\beta X = X \cup F_0(X)$ onde $F_0(X)$ denota o conjunto dos ultrafiltros não principais sobre o conjunto dos subconjuntos abertos-fechados $\mathcal{D}_0(X)$ de X . Usamos ainda, como notação

$$U^* = U \cup \{p \in F_0(X) : U \in p\}, \text{ para cada } U \in \mathcal{D}_0(X)$$

$\mathcal{B}^* = \{U^* : U \in \mathcal{D}_0(X) \setminus \{\emptyset, X\}\}$ que é uma base de abertos-fechados para βX

Usaremos a família $\mathcal{D}^* = \{V^*(\alpha, n) : \alpha \in \kappa \text{ e } n \in N\} \subset \mathcal{B}^*$, de abertos-fechados em βX para definir um subespaço Y de βX que contém X como subespaço denso .

3.6.1 O subespaço $Y : X \subset Y \subset \beta X$

Sejam :

$\Omega(\alpha) = \bigcup_{n \in N} V^*(\alpha, n)$ que é aberto denso não fechado ,

$Y = \bigcap_{\alpha \in \kappa} \Omega(\alpha)$

$\forall s \in N^\kappa$ o compacto $K(s) = \bigcap_{\alpha \in \kappa} V^*(\alpha, s(\alpha)) \subset Y$ é não vazio .

Proposição 3.2 *A família $\{K(s) : s \in N^\kappa\}$ determina uma partição de Y . Isto é, temos: $\bigcup_{s \in N^\kappa} K(s) = Y$ e $K(s) \cap K(t) = \emptyset$ sempre que $s \neq t$ com $s, t \in N^\kappa$.*

Prova. Se $s \neq t$ então existe $\alpha \in \kappa$ tal que : $V(\alpha, s(\alpha)) \cap V(\alpha, t(\alpha)) = \emptyset \iff V^*(\alpha, s(\alpha)) \cap V^*(\alpha, t(\alpha)) = \emptyset$, e pela condição (2) na definição de $\mathcal{D}$ temos $K(s) \neq \emptyset$, portanto $K(s) \cap K(t) = \emptyset$. Ainda observamos que $V^*(\alpha, s(\alpha)) \subset \Omega(\alpha)$ para todo $s \in N^\kappa$, portanto $K(s)$ é subconjunto de Y . Também dados $y \in Y$, e $\alpha \in \kappa$ existe um único $n_\alpha(y) \in N$ tal que $y \in V^*(\alpha, n_\alpha(y))$. Portanto temos $Y = \bigcup \{K(s) : s \in N^\kappa\}$. ■

Proposição 3.3 *Para todo $s \in f[X]$ temos $K(s) = \{x\}$.*

Prova. Seja $s = f(x)$ para algum x em X . Temos

$K(s) = \bigcap_{\alpha \in \kappa} V(\alpha, s(\alpha)) \cup \bigcap_{\alpha \in \kappa} \{p \in F_0(X) : V(\alpha, s(\alpha)) \in p\}$ portanto por (3) temos $K(s) = \{x\} \cup \{p \in F_0(X) : \{V(\alpha, s(\alpha)) : \alpha \in \kappa\} \subset p\}$. Suponhamos por absurdo, que exista $p \in K(s) \cap F_0(X)$, então existe um aberto-fechado $U \in p$ tal que $x \in X \setminus U$, mas como $\mathcal{D}$ gera a topologia de X existe um subconjunto finito $\mathcal{F} \in [\kappa]^{<\aleph_0}$ tal que $V(\mathcal{F}, s) \subset X \setminus U$, contradizendo que p é um ultrafiltro. ■

Proposição 3.4 *A família de abertos-fechados*

$$\pi\mathcal{B}^* = \{V^*(\mathcal{F}, s) : \mathcal{F} \in [\kappa]^{<\aleph_0} \text{ e } s \in N^\kappa\}$$

é uma π -base de βX .

Prova. Seja $U^* \in \mathcal{B}^*$ um aberto básico em βX . Como $\mathcal{D}$ é sub-base de X temos um subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \kappa$ tal que $V(\mathcal{F}, s) \subset U$ portanto temos $V^*(\mathcal{F}, s) \subset U^*$. ■

Lema 3.1 *Seja X um espaço compacto de Hausdorff zero-dimensional. Seja $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ um conjunto de subconjuntos abertos-fechados. Se $K = \bigcap_{i \in I} W_i$ é subconjunto de um aberto $\Omega \subset X$ então existe um subconjunto finito $F \subset \mathcal{W}$ tal que $\bigcap F \subset \Omega$.*

Proposição 3.5 *A família de abertos-fechados*

$$\pi\mathcal{B}^*(s) = \{U^* \in \pi\mathcal{B}^* : K(s) \subset U^*\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de $K(s)$.

Prova. Dado um aberto W em βX talque $K(s) \subset W$ como $K(s) = \bigcap \{V^*(\alpha, s(\alpha)) : \alpha \in \kappa\}$ é uma intersecção de subconjuntos compactos, pelo Lema(3.1) existe um subconjunto finito $F \subset \mathcal{D}^*(s)$ tal que $K(s) \subset \bigcap F \subset W$. Temos $\bigcap F \in \pi\mathcal{B}^*(s)$. ■

Observamos que o espaço produto N^κ é assim um espaço quociente do subespaço $Y \subset \beta X$ pela relação de equivalência cujas as classes são os subconjuntos $K(s) : s \in N^\kappa$.

Definição 3.3 *Escolhemos:*

$$A \subset \bigcup_{s \in N^\kappa} K(s) \text{ tal que } K(s) \cap A = \{a\} \quad \forall s \in N^\kappa$$

e definimos a família

$$\mathcal{G} = \{A(\alpha, n) : \alpha \in \kappa \text{ e } n \in N\} \subset \tau_A \setminus \{\emptyset\} \text{ onde } A \cap V^*(\alpha, n) = A(\alpha, n),$$

que tem as seguintes propriedades :

- (1) $\bigcup_{n \in N} A(\alpha, n) = A$ e $A(\alpha, n) \cap A(\alpha, m) = \emptyset$ sempre que $n \neq m, \forall \alpha \in \kappa$
- (2) $\forall \mathcal{F} \in [\kappa]^{<\aleph_0}, \forall s \in N^\kappa$ temos $A(\mathcal{F}, s) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} A(\alpha, s(\alpha)) \neq \emptyset$
- (3) $\bigcap_{\alpha \in \kappa} A(\alpha, n_\alpha(a)) = \{a\}$ onde $\forall a \in A$ e $\forall \alpha \in \kappa \exists ! n_\alpha(x) \in N$ tal que $a \in A(\alpha, n_\alpha(a))$.

Nessas condições temos uma função $\tilde{f}(a) = (n_\alpha(a))_{\alpha \in \kappa}$ que é um homeomorfismo do espaço $(A, \tau_{\mathcal{G}})$, cuja topologia é gerada pela família $\mathcal{G}$, sobre o espaço N^κ e estende a função $f(x) = (n_\alpha(x))_{\alpha \in \kappa}$ de X em N^κ .

Observamos que o subespaço $A \subset \beta X$ é zerodimensional, porque $\beta A = \beta X$, mas não é uma $\mathcal{B}$ -extensão do espaço (X, τ) .

Sejam X_0, X_1 dois subespaços densos e enumeráveis do produto N^κ .

FATO 3 Se $h : X_0 \rightarrow X_1$ um homeomorfismo então a única extensão contínua $\beta(h) : \beta X_0 \rightarrow \beta X_1$ é um homeomorfismo.

Prova. Como h é um homeomorfismo temos h^{-1} tal que $h \circ h^{-1} = id_{X_1}$. Seja βh^{-1} a única extensão contínua de h^{-1} aos β -compactificados. A composição $\beta h \circ \beta h^{-1}$ é uma função contínua de βX_1 sobre si mesmo que restrita ao espaço X_1 é a identidade nesse espaço. Como a identidade de βX é a única extensão contínua da identidade de X_1 ou da inclusão $X_1 \subset \beta X_1$, temos : $\beta h \circ \beta h^{-1} = id_{\beta X_1}$.

■

3.7 Os espaços diádicos

Todos os espaços por nós considerados nesse parágrafo são espaços completamente regulares. Denotamos por D^κ ao espaço produto de $\kappa \geq \aleph_0$ cópias do espaço discreto $D = \{0, 1\}$ e chamamos esse espaço compacto de " κ -Cantor", ou cubo de Cantor de peso κ . Os resultados que vamos mostrar, são as possíveis generalizações do cubo de Cantor, que encontramos na literatura, além da trivial D^κ . Os resultados dessa seção são, salvo menção em contrário, devido a Engelking e Pelczyński.

Definição 3.4 Dizemos que um espaço compacto X é um espaço diádico se X é imagem contínua de algum cubo de Cantor de peso κ .

Denotamos o conjunto das funções contínuas de X na reta real R por R^X .

Seja $\{X_s : s \in S\}$ uma família de espaços onde $|S| = \kappa$, e seja $X = \prod_{s \in S} X_s$ o espaço produto dessa família. Seja Y um espaço e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua.

Definição 3.5 Dizemos que f depende de $|S_0|$ índices ou coordenadas, com índices em S_0 se

$x, y \in X$ são tais que $x_s = y_s, \forall s \in S_0$ então $f(x) = f(y)$

Lema 3.2 ([6]) *Seja X o produto topológico da família de espaços compactos $\{X_s : s \in S\}$ onde $|S| \geq \aleph_0$. Se $f : X \rightarrow R$ é uma função contínua então f depende de $\aleph_0$ coordenadas.*

Demonstração. Seja C o conjunto de todas as funções contínuas de X em R que dependem de uma quantidade enumerável de coordenadas. Para cada $f \in C$ denotamos por $S(f)$ o subconjunto enumerável de coordenadas de S das quais f depende. Temos imediatamente da definição 3.7 as seguintes propriedades

- (1) $S(f + g) \subset S(f) \cup S(g)$, $S(fg) \subset S(f) \cup S(g) : f, g \in C$
- (2) $\{f_n : n \in N\} \subset C$ converge uniformemente para $f \in R^X$ então $S(f) \subset \bigcup_{n \in N} S(f_n)$.

Como as funções constantes estão em C e a família C separa pontos, segue do teorema de Stone-Weierstrass que C é denso em R^X . Portanto dada $f \in R^X$ temos uma sequência de C que converge uniformemente para f , e de (2) temos a tese.

Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos. Existe $t \in S : x(t) \neq y(t)$ podemos assim definir uma função contínua de X_t em $[0, 1] \subset R$ tal que $g_t(x(t)) = 0$ e $g_t(y(t)) = 1$. Seja $f(x) = g_t \circ pr_t(x) = g_t(x(t))$, $\forall x \in X$. Temos $S(f) = \{t\}$ portanto $f \in C$ e separa os pontos x, y .

■

Corolário 3.1 ([6]) *Seja X um espaço diádico. Dada uma função contínua $g \in R^X$ existe um subespaço compacto metrizável $X_g \subset X$ tal que $g[X] = g[X_g]$.*

Demonstração. Seja $h : D^S \rightarrow X$ uma função contínua e sobrejetora, cuja existência segue das hipóteses. Como $f = g \circ h$ depende somente de $\aleph_0$ coordenadas, seja $S_0 \subset S$ o conjunto das coordenadas das quais essa função f depende. Seja $K = D^{S_0} \times \{o\}^{S \setminus S_0}$ uma cópia do cubo de Cantor de peso $\aleph_0$ em D^S . Definimos $X_g = h[K]$ e então $g[X_g] = g \circ h[K] = g \circ h[D^S] = g[X]$. Como K é metrizável e X_g é imagem contínua desse compacto metrizável segue a tese.

■

Lema 3.3 ([6]) *Seja $X = \prod_{s \in S} X_s$ o produto de uma família de espaços compactos $\{X_s : s \in S\}$. Toda função contínua f de X num espaço de Tychonoff Y de peso $w(Y) \leq \kappa \geq \aleph_0$ depende somente de κ coordenadas.*

Demonstração. Podemos pelo teorema da imersão de Tychonoff supor $Y \subset [0, 1]^\kappa$ e que $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in \kappa}$ e então cada componente f_α depende somente de $\aleph_0$ coordenadas, segue que f depende de $\kappa \times \aleph_0$ coordenadas.

■

Corolário 3.2 ([6]). *Seja $g : X \longrightarrow Y$ uma função contínua de um espaço diádico X em um espaço de Tychonoff Y de peso κ . Existe um subespaço compacto de peso κ , $X_g \subset X$ tal que $g[X_g] = g[X]$.*

Teorema 3.5 ([6] Sanin) *Se X é um espaço diádico de peso κ então existe uma função contínua f de D^κ sobre X .*

Demonstração. Por definição de espaço diádico existe um cardinal γ e uma função contínua g de D^γ sobre X . Do lema 3.5, existe $S_0 \subset \gamma$ onde $|S_0| = \kappa$ tal que g depende somente das coordenadas em S_0 . Seja $D_0^{S_0} \subset D^\gamma$ onde $D_0^{S_0} = D^{S_0} \times \{0\}^{\gamma \setminus S_0}$. Seja $h : D^{S_0} \longrightarrow D^\kappa$ a identificação natural desses dois espaços, seja $f = g \circ h^{-1}$ e como $g[D^{S_0}] = X$, segue que X é imagem contínua de D^κ por f .

■

Lema 3.4 ([6]) *Para todo subconjunto X que é um G_δ fechado de D^κ , existe um subconjunto enumerável $S_0 \subset \kappa$ e um subconjunto fechado $X_0 \subset D^{S_0}$ tal que $X = X_0 \times D^{\kappa \setminus S_0}$.*

Demonstração. Como X é um G_δ fechado do espaço normal D^κ , existe uma função contínua $f : D^\kappa \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f^{-1}[0] = X$. Do lema 2.3, f depende somente de $\aleph_0$ coordenadas, seja S_0 o conjunto dessas coordenadas das quais f depende, $f = f_1 \circ pr$ onde $pr : D^\kappa \longrightarrow D^{S_0}$ denota a projeção usual, $f_1 : D^{S_0} \longrightarrow [0, 1]$ e por definição $X_0 = f_1^{-1}[0]$. Temos $X = X_0 \times D^{\kappa \setminus S_0}$.

■

Teorema 3.6 ([6]) *Se κ é um número cardinal maior que $\aleph_0$, então todo conjunto G_δ fechado X de D^κ é homeomorfo a D^κ .*

Demonstração. Do lema 3.6, existe um subconjunto fechado $X_0 \subset D^\kappa$ tal que $X \approx X_0 \times D^\kappa$ onde $\approx$ denota que existe um homeomorfismo entre os espaços em questão. Como $X_0 \times$

$D^{\aleph_0} \approx D^{\aleph_0}$ pelo teorema 2.3, temos

$$X \approx X_0 \times D^\kappa \approx X_0 \times D^{\aleph_0} \times D^\kappa \approx D^{\aleph_0} \times D^\kappa \approx D^\kappa.$$

■

Corolário 3.3 ([6]) *Se X é um conjunto G_δ fechado de D^κ então existe uma retração $r : D^\kappa \longrightarrow X$, (isto é r é uma função contínua e tal que $r(x) = x, \forall x \in X$).*

Demonstração. Temos $X = X_0 \times D^{\aleph_0 \setminus S_0}$ onde X_0 é um subconjunto fechado do cubo de Cantor de peso $\aleph_0$. De um resultado de Sierpinski (1928), proposição logo a seguir, existe uma retração g de D^{S_0} sobre X_0 . Para $(x, y) \in X = X_0 \times D^{\aleph_0 \setminus S_0}$ seja $r(x, y) = (g(x), y)$.

■

Proposição 3.6 (implicitamente, [13]). *Seja (X, ρ) um espaço métrico separável, $\text{ind}(X) = 0$. Todo subconjunto fechado não vazio $A \subset X$ é um retrato de X .*

Prova. Se A também for aberto então escolhemos $a \in A$ e definimos $f(x) = a, \forall x \in X \setminus A$ e $f(x) = x, \forall x \in A$ obtendo assim uma retração. Supomos que A não é um aberto.

Vamos obter uma família de subconjuntos abertos fechados dois a dois disjuntos, que recobrem $X \setminus A$, $W_j : j \in N$ talque:

$$x \in \bigcap_{j \in N} U_j \implies \rho(x, A) = 0$$

onde $\alpha_j : j \in N$ é uma sequência estriamente decrescente de números reais que converge para 0. Seja $\beta_j : j \in N$ uma sequência de números reais tais que $\beta_j \in [0, 1]$ e os intervalos $[\frac{1}{1+j}, \frac{1+\beta_j}{1+j}]$ sejam dois a dois disjuntos $j = 0, 1, \dots$. Definimos os subconjuntos fechados disjuntos,

$$F_j = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \frac{1}{1+j}\} \text{ e } G_j = \{x \in X : \rho(x, A) \geq \frac{1+\beta_j}{j+1}\} : j = 0, 1, \dots,$$

e pelo teorema da partição ([2], $\text{ind}(X) = 0, w(X) = \aleph_0$) existem subconjuntos abertos $U_j, V_j : \subset X$ tais que :

$$F_j \subset U_j, G_j \subset V_j, U_j \cap V_j = \emptyset, U_j \cup V_j = X \text{ para todo } j \in N.$$

Definimos $W_j = V_j \setminus V_{j-1} : j = 1, 2, \dots$ com $W_0 = X \setminus U_0$ e os números reais $\alpha_j = \sup\{\rho(x, A) : x \in U_j\} : j \in N\}$ observando que $\alpha_j \in [\frac{1}{1+j}, \frac{1+\beta_j}{1+j}]$. Temos assim

$x \in \bigcap_{j \in N} U_j \implies \rho(x, A) = 0$ portanto temos a igualdade $X \setminus A = \bigcup_{j \in N} W_j$ com a seguinte desigualdade

$$\alpha_j \leq \rho(x, A) \leq \alpha_{j-1}, \forall x \in W_j.$$

Cada aberto $W_j : j \in N$ pode ser recoberto por uma família enumerável (usamos que X é separável) de abertos não vazios dois a dois disjuntos $\{W_{j,i} : i \in N\}$ todos com diâmetros menores que α_j . Definimos $r(x) = x$ se $x \in A$ e escolhemos $a_{j,i} \in A$ tais que $\rho(a_{j,i}, W_{j,i}) < \alpha_j + \rho(W_{j,i}, A)$. Seja $r(x) = a_{j,i}$ se $x \in W_{j,i}$ onde existe um e um único aberto $W_{j,i}$ ao qual x pertence. A função $r : X \longrightarrow A$ é bem definida, e resta verificar sua continuidade. Dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$ seja $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Se $y \in B(x, \delta) \cap W_{j,i}$ então temos $\alpha_j \leq \delta$ pois $B(x, \delta) \cap W_j \neq \emptyset$ e assim $\alpha_j \leq \rho(y, A) = \inf\{\rho(y, a) : a \in A\} \leq \delta$ pois $x \in A$ e então

$$\rho(x, a_{j,i}) \leq \rho(x, y) + \rho(a_{j,i}, y) \leq \delta + \rho(W_{j,i}, a_{j,i}) + \text{diam}(W_{j,i}) \leq 4\delta < \varepsilon.$$

Se $y \in A \cap B(x, \delta)$ segue imediatamente $\rho(r(x), r(y)) = \rho(x, y) < \varepsilon$ e no caso em que $x \in X \setminus A$ temos $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset W_{j,i}$, o único ao qual x pertence.

■

Proposição 3.7 *Se X é um espaço regular tal que todo subconjunto fechado não vazio é um retrato então X é um espaço normal e $\text{Ind}(X) = 0$.*

Prova. Dados subconjuntos fechados disjuntos não vazios $F, G \subset X$ seja $A = F \cup G$ e seja $r : X \longrightarrow A$ uma retração de X sobre o subconjunto fechado A . Sejam $U = r^{-1}[F]$, $V = r^{-1}[G]$. Como r é sobrejetora e $F \cup G = A$ e são abertos fechados em A e mais a continuidade de r segue que

$U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$, são abertos em X , $F \subset U, G \subset V$. Logo X é um espaço normal e $\text{Ind}(X) = 0$.

■

Capítulo 4

Os espaços que contém uma cópia dos racionais

Neste capítulo estudaremos que tipos de espaços contém cópias do espaço dos números racionais $\mathbb{Q}$. A palavra espaço irá denotar um espaço regular, e supomos que todas as funções entre espaços são contínuas e sobrejetoras.

4.1 Introdução

Vamos recordar algumas definições que serão frequentes neste texto. Seja X um espaço topológico.

Denotamos o interior, a aderência e a fronteira de um subconjunto $A \subset X$ por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$, $\text{Fr}_X(A)$ respectivamente.

Definição 4.1 *Seja (X, τ) um espaço topológico.*

Dizemos que X é um espaço de Fréchet se dados um subconjunto $A \subset X$ e um ponto $x \in \text{cl}(A)$ existe uma sequência $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ que converge para x em X , escrevemos $x \in \lim a_n$, e dizemos que x é um ponto limite dessa sequência.

Dizemos que X é um espaço sequencial se vale a seguinte condição:

$A \subset X$ é fechado se e somente se A contém o conjunto dos pontos limites de todas as sequências convergentes $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$.

Dizemos que X é um espaço de Lašnev se existe uma função contínua e fechada f de um espaço metrizável M sobre X .

Dizemos que X é um espaço disperso (*scattered*) se todo subconjunto não vazio tem um ponto isolado.

Proposição 4.1 *Todo espaço de Lašnev é um espaço de Fréchet.*

■

4.1.1 O axioma de Martin

Definição 4.2 *Seja $(P, \leq)$ um conjunto ordenado.*

Dados $p, q \in P$ dizemos que p e q são compatíveis se existe $r \in P$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$, e então dizemos que r estende p e q . Caso contrário dizemos que p e q são incompatíveis e denotamos $p \perp q$, isto é, não existe $r \in P$ que estende p e q simultaneamente.

Dizemos que um subconjunto $D \subset P$ é denso em $(P, \leq)$ se para todo $p \in P$ existe $r \in D$ tal que $r \leq p$.

Dizemos que $A \subset P$ é uma anti-cadeia se seus elementos são dois a dois incompatíveis. Dizemos que $(P, \leq)$ verifica c.c.c (*countable chain condiction*) se toda anti-cadeia A de $(P, \leq)$ é enumerável.

Um subconjunto não vazio $F \subset P$ é um filtro em $(P, \leq)$ se ele verifica as seguintes condições

- (1) $\forall p, q \in F \exists r \in F$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$
- (2) $\forall p \in P \forall q \in F$ tal que $q \leq p \implies p \in F$

Seja $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$ um número cardinal.

Definição 4.3 (*O axioma de Martin*)

$MA(\kappa)$: *Seja $(P, \leq)$ uma ordem que verifica c.c.c .Se $\mathcal{D}$ é uma família de subconjuntos densos de $(P, \leq)$ com $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ então existe um filtro genérico F para $\mathcal{D}$, isto é, $F \cap D \neq \emptyset, \forall D \in \mathcal{D}$.*

4.1.2 Funções irreduzíveis

Definição 4.4 *Sejam X, Y espaços topológicos e f uma função contínua de X sobre Y . Dizemos que f é uma função irreduzível se um subconjunto fechado $F \subset X$ é tal que $f[F] = Y$ então $F = X$.*

Lema 4.1 (*Lema de Veinštejn*) Se $f : M \rightarrow X$ é uma função contínua e fechada de um espaço metrizável M sobre um espaço X , então para todo ponto $x \in X$ cujo carácter $\chi(x, X) \leq \aleph_0$, o conjunto $Fr_M(f^{-1}[x])$ é um sub-espaço compacto em M .

Uma demonstração do lema acima pode ser encontrado em ([5],cap4),e a seguinte proposição é uma particularização de um resultado de Lašnev [8].

Proposição 4.2 *Seja $f : M \rightarrow X$ é uma função contínua e fechada de um espaço metrizável M sobre um espaço X . Existe um sub-espaço fechado $M_0 \subset M$ tal que $f|_{M_0} : M_0 \rightarrow X$ é uma função irreduzível.*

Prova. Seja $S = A \cup B$ onde tomamos $B = f^{-1}[X^d]$ e X^d denota o conjunto dos pontos de acumulação de X , e escolhemos A de modo que $A \subset \bigcup \{f^{-1}[y] : y \in X \setminus X^d\}$ é tal que $|A \cap f^{-1}[y]| = 1, \forall y \in X \setminus X^d$. O subconjunto S é fechado em M e $f[S] = X$.

O conjunto $\mathcal{C} = \{F \subset S : F \text{ é fechado em } S \text{ e } f[F] = X\}$ não é o vazio, e seja a ordem parcial $(\mathcal{C}, \preceq)$ onde definimos:

$$F \preceq G \iff G \subset F.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é ordenado indutivo.

Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ um subconjunto não vazio, totalmente ordenado por $\preceq$, então $\bigcap \mathcal{A} = G$ é fechado em M . É preciso mostrar que $f[G] = X$, isto é, $\forall y \in X$ temos $f^{-1}[y] \cap \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que exista $y_0 \in X$ tal que $f^{-1}[y_0] \cap \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Então $y_0 \in X^d$. Com efeito, se $y \in X \setminus X^d$ então $f^{-1}[y] \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{C}$. Como X é um espaço de Fréchet, existe uma sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ não trivial, $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$, que converge para o ponto y_0 , e então temos

$$\emptyset \neq K = f^{-1}[y_0] \cap cl(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[x_n]) \subset Fr(f^{-1}[y_0]).$$

O sub-espaço $T = f^{-1}[y_0] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[x_n] \subset M$ é metrizável e $f[T] = \{y_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, portanto do lema de Veinštejn, para $f|_T : T \rightarrow f[T]$, o subconjunto K é fechado no compacto $Fr(f^{-1}[y_0])$ ele é um subconjunto compacto. Como $\mathcal{A}$ é totalmente ordenado, a família $\{K \cap F : F \in \mathcal{A}\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, portanto $\emptyset \neq \bigcap \{K \cap F : F \in \mathcal{A}\} \subset f^{-1}[y_0] \cap \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, absurdo! Logo $\mathcal{C}$ é ordenado indutivo. Pelo lema de Kuratowski-Zorn, seja M_0 um elemento maximal em $\mathcal{C}$. Dado $F \subset M_0 : f[F] = X$ se F for fechado em S (portanto em X) então $F \in \mathcal{C}$ e assim $F = M_0$. Logo $f|_{M_0} : M_0 \rightarrow X$ é uma função irreduzível.

■

4.1.3 O cardinal $\mathfrak{b}$

Seja a ordem no conjunto ${}^\omega\omega$ definida por

$$\forall f, g \in {}^\omega\omega$$

$$f <^* g \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(n) < g(n), \forall n \geq n_0.$$

Definição 4.5 Dizemos que um subconjunto $A \subset {}^\omega\omega$ é limitado se dado $f \in {}^\omega\omega$ existe $g \in A$ tal que $f \leq^* g$.

Seja $\mathfrak{b} = \min\{|A| : A \text{ é ilimitado em } {}^\omega\omega\}$.

Seja uma sequência de funções $L = \{g_n : n \in \omega\}$ de ${}^\omega\omega$. Para cada $n \in \omega$ seja $f(n) = g_0(n) + g_1(n) + \dots + g_n(n) + 1$. Temos um elemento $f \in {}^\omega\omega$ tal que em L não existe $g \in A$ tal que $f \leq^* g$. Dessa observação vemos que $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$.

4.2 Funções cujas fibras são subconjuntos raros

Denotamos por Seq o conjunto das sequências finitas $s = (s(0), s(1), \dots, s(j)) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{j+1}$ de números naturais reunido à sequência vazia, e definimos o comprimento de cada uma dessas sequências por $l(s) = j + 1$, e para a sequência vazia $()$ o comprimento será zero, e definimos a operação $s * n = (s(0), s(1), \dots, s(j), n)$ se $s \in Seq$ e $l(s) = j + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e de modo análogo para $s, t \in Seq$ definimos $s * t = (s(0), \dots, s(j), t(0), \dots, t(k))$.

Definição 4.6 Sejam X, Y espaços (regulares). Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é "nowhere dense" ou rara, ou de fibras raras, se $\forall y \in Y$ tem-se $\text{int}_X(f^{-1}[y]) = \emptyset$.

Lema 4.2 ([3]) Se $f : Q \rightarrow X$ é uma função rara então X contém uma cópia de Q .

Demonstração. Por indução sobre o comprimento de $s \in Seq$ vamos para cada $s \in Seq$ definir um ponto $q_s \in Q$ uma vizinhança aberta $U_s \subset Q$ de q_s , e uma vizinhança aberta $V_s \subset X$ de $f(q_s)$. Para a sequência vazia, seja $q_{()} = 0, U_{()} = Q$ e $V_{()} = X$. Supomos que para todo $s \in Seq : l(s) \leq k$ já obtivemos q_s, U_s, V_s tal que $f[U_s] \subset V_s$. Escolhemos uma sequência $\{q_{s*n} : n \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $q_{s*n} \rightarrow q_s$ quando $n \rightarrow \infty$
- (2) $\{q_{s*n} : n \in \mathbb{N}\} \subset U_s$
- (3) $f(q_{s*n}) \neq f(q_s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(q_{s*n}) \neq f(q_{s*m})$ se $n \neq m$.

Vamos mostrar que existem seqüências nessas condições em Q . Seja $\{U_n : n \in N\}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de q_s em Q tal que $U_{n+1} \subset U_n \subset U_s$ e $U_n \setminus cl_Q(U_{n+1}) \neq \emptyset, \forall n \in N$. Como $int_Q(f^{-1}(x)) = \emptyset, \forall x \in X$ podemos escolher os pontos

$$q_{s*0} \in (U_0 \setminus cl_Q(U_1)) \setminus f^{-1}[f(q_s)]$$

$q_{s*n} \in (U_n \setminus cl_Q(U_{n+1})) \setminus f^{-1}[\{f(q_{s*j}) : j < n\}] \cup f^{-1}[f(q_s)]$ indutivamente, e assim valem as condições acima (1),(2) e (3), pois $\bigcap_{n \in N} U_n = \{q_s\}$ e na escolha dessas seqüências forçamos a condição (3). Como $f(q_{s*n}) \rightarrow f(q_s)$ o sub-espaco $\{q_{s*n} : n \in N\}$ é discreto, e então escolhemos vizinhanças abertas V_{s*n} de $f(q_{s*n})$ tais que

(4) $V_{s*n} \cap V_{s*m} = \emptyset$ sempre que $n \neq m$ e $f(q_s) \notin cl_X(V_{s*n})$ e escolhemos as vizinhanças $U_{s*n} \subset U_s$ tais que

$$(5) q_{s*n} \in U_{s*n}$$

$$(6) f[U_{s*n}] \subset V_{s*n}$$

$$(7) diam(U_{s*n}) < \frac{1}{n+1}.$$

Temos assim, q_s, U_s, V_s escolhidos para cada $s \in Seq$. Seja $Y = \{q_s : s \in Seq\}$ que é um sub-espaco de Q sem pontos isolados, portanto Y é uma cópia de Q . A restrição $f|Y : Y \rightarrow f[Y]$ é bijetora e contínua. Resta verificarmos que também é aberta.

Seja U uma vizinhança aberta de q_s . Por (1) e (7) existe $n \in N$ tal que $\bigcup_{m \geq n} U_{s*m} \subset U_s$, por (4) temos $f(q_s) \notin cl(\bigcup_{j < n} V_{s*j})$, e por (3) e (4) temos

$$f(q_s) \in f[Y] \cap V_s \setminus cl(\bigcup_{j < n} V_{s*j}) \text{ que por (6)}$$

$$f(q_s) \in f[Y] \cap V_s \setminus cl(\bigcup_{j < n} V_{s*j}) \subset f[Y] \cap V_s \setminus \bigcup_{j < n} f[U_{s*j}] \subset f[Y] \setminus f[U \cap U_s].$$

■

Teorema 4.1 (Folclore) *Todo espaco não disperso X que satisfaz ao primeiro axioma de enumerabilidade contém uma cópia de Q .*

Teorema 4.2 ([3]) *Seja X um espaco de Lašnev. Se X é não disperso então X contém uma cópia de Q .*

Demonstração. Podemos supor que X não tem pontos isolados, e que $f : M \rightarrow X$ é uma função irredutível de um espaco métrico M sobre X . Para cada $y \in X$ escolhemos $m(y) \in f^{-1}[y]$ e seja $Y = \{m(y) : y \in X\}$. Vamos mostrar que Y não tem pontos isolados. Por absurdo, suponhamos que $m(x)$ é um ponto isolado de Y . Existe um aberto $U \subset M$ tal que $U \cap Y = \{m(x)\}$. Como f é irredutível e $f|Y$ é injetora, segue que $f^{-1}[y] \subset U, \forall y \neq x$.

Então, $X \setminus f[X \setminus U] = \{x\}$. Absurdo X não tem pontos isolados. Do teorema 4.1, segue que Y contém uma cópia Z de Q . A função $f|_Z : Z \rightarrow f[Z]$ é injetora e Z não tem pontos isolados, portanto de fibras raras em Z . Do lema 4.2, $f[Z]$ contém uma cópia de Q .

■

Teorema 4.3 ([3]) *Seja X um espaço sequencial sem pontos isolados. Se o carácter $\chi(x, X) < b, \forall x \in X$ então X contém uma cópia de Q .*

Demonstração. Como X é um espaço sequencial, podemos tomar $x_s \in X$ e vizinhanças abertas U_s de x_s para cada $s \in Seq$, de modo a valerem as seguintes condições

- (1) $\lim x_{s*k} = x_s$ e $\{x_{s*k} : k \in N\} \subset U_s$
- (2) $\forall k \in N, U_{s*k} \subset U_s$ e $U_{s*k} \cap U_{s*j} = \emptyset$ se $j \neq k$

Vamos agora nos restringir ao subespaço enumerável $X^* = \{x_s : s \in Seq\}$. Seja $\{U_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ uma base de X^* onde $\Gamma < b$. Para cada $\alpha \in \Gamma$ definimos $f_\alpha : Seq \rightarrow \omega$ pela fórmula

$$f_\alpha(s) = \min\{k \in N : x_s \in U_\alpha \implies x_{s*j} \in U_\alpha, \forall j \geq k\}$$

Como $\Gamma < b$, existe $h : Seq \rightarrow \omega$ tal que $f_\alpha(s) \leq h(s)$ para quase todo $s \in Seq$, isto é, exceto para um número finito de elementos de Seq .

Sejam $T = \{s \in Seq : h(s|i-1) \leq s(i), \forall i \leq l(s)\}$ onde $s|i-1 = (s(0), \dots, s(i-1))$ e $Y = \{x_s : s \in T\}$. A sequência vazia $() \in T$ e se $t \in T$ então $t*j \in T$ exceto para um número finito de $j \in N$. Assim Y não é vazio, nem tem pontos isolados.

Vamos mostrar que o subespaço Y satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Lema 4.3 *Para todo $s \in T, \alpha \in \Gamma, x_s \in U_\alpha$, existe $k(\alpha) = k \in N$ tal que $s*j*t \in T \implies x_{s*j*t} \in U_\alpha, \forall j \geq k$ e $t \in Seq$.*

Com efeito, pela definição de h existe um subconjunto finito $H \subset Seq$ tal que $f_\alpha(t) \leq h(t), \forall t \in Seq \setminus H$. Escolha $k \in N$ tal que $f_\alpha(s) \leq k$ e tal que para todo $j \geq k$ nenhuma das extensões $s*j$ esteja em H . Por indução sobre o comprimento $l(s)$ de $s \in Seq$ vamos mostrar que a afirmação do lema 4.3 vale para este k . A afirmação é clara para $t = ()$, pois $x_{s*j} \rightarrow x_s$. Suponha que a afirmação valha para todo t cujo comprimento $l(t) \leq n$.

Tome $t = r * m$ e $s * j * r * m \in T$. Para $s * j * r \in T$ pela hipótese de indução $x_{s*j*r} \in U_\alpha$. Pela propriedade de k , $s * j * r * i \notin H$, e então $f_\alpha(s * j * r) \leq h(s * j * r) \leq m$ e então vale a afirmação do lema.

■

Observamos que, dado $x_s \in Y$ o conjunto

$$V_{k(\alpha)} = Y \cap [\{x_s\} \cup \bigcup_{j > k(\alpha)} \{x_{s*j*t} : t \in Seq\}]$$

é uma vizinhança aberta de x_s em Y .

■

4.3 Cópias de Q em espaços produtos

Como já observamos no capítulo 2, os espaços produtos de $\aleph_0$ cópias do espaços discretos $D = \{0, 1\}$ ou N contém cópias do espaço dos números racionais, e nenhuma dessas cópias pode ser fechada, como veremos ao fim dessa seção. Para produto de dois espaços, temos o teorema a seguir.

Teorema 4.4 ([3]) *Sejam X, Y espaços regulares. Se o produto $X \times Y$ contém uma cópia de Q , então X ou Y contém uma cópia de Q .*

Demonstração. Supomos que $Q \subset X \times Y$ e denotamos por pr_X, pr_Y as projeções de $X \times Y$ sobre X ou Y respectivamente, e podemos supor que restritas a Q essas projeções são sobrejetoras. Se existe $x \in X$ tal que $int_Q(p^{-1}[x]) \neq \emptyset$ onde $p = pr_X \mid Q$, então $p^{-1}[x]$ contém uma cópia de Q , portanto, Y também contém uma dessas cópias de Q . Supondo o contrário, $\forall x \in X, int_Q(p^{-1}[x]) = \emptyset$, então p é uma função de fibras raras, pelo lema 4.2, X contém uma cópia de Q .

■

Lema 4.4 ([3]) ($MA(\kappa)$) *Seja Z um espaço de cardinalidade $|Z| < c$, sem pontos isolados, cuja celularidade é $c(X) = \aleph_0$; e seja $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, onde $\kappa < c$. Seja $X = \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$, o espaço produto dessa família de espaços. Se Z está imerso em X como subconjunto fechado, então existe um subconjunto aberto $U \subset Z$ (aberto em Z), não vazio, e um índice $\alpha \in \kappa$ tal que a função $p_\alpha = pr_\alpha \mid U : U \longrightarrow pr_\alpha[U]$, (restrição da projeção $pr_\alpha X \longrightarrow X_\alpha$), tem fibras raras.*

Demonstração. Suponhamos que para todo $\alpha \in \kappa$ e todo aberto não vazio $U \subset Z$, existe $x \in p_\alpha[U]$ tal que $\text{int}_Z(p_\alpha^{-1}[x]) \neq \emptyset$. Então

$$\bigcup_{z \in Z} \text{int}_Z(p_\alpha^{-1}[p_\alpha(z)])$$

é um aberto denso de Z para todo $\alpha \in \kappa$. Para cada subconjunto finito $F \subset \kappa$ seja $p_F : Z \rightarrow \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ a restrição da projeção $pr_F : X \rightarrow \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ ao subespaço Z . Então $\text{int}_Z(p_F^{-1}[x]) = \bigcap_{\alpha \in F} \text{int}_Z(p_\alpha^{-1}[x_\alpha])$ onde $x = (x_\alpha)_{\alpha \in F} \in p_F[Z]$ e assim temos o aberto denso em Z dado pela fórmula

$$0) \bigcup_{z \in Z} \text{int}_Z(p_F^{-1}[p_F(z)]).$$

Passamos a denotar por $f_F = pr_F \mid Z$ as projeções.

Seja $(P, \leq)$ o conjunto ordenado, onde

$$P = \{p \in \prod_{\alpha \in F} X_\alpha : \text{int}_Z(f_F^{-1}[p]) \neq \emptyset, F \in [\kappa]^{<\aleph_0}\}$$

e $p \leq q$ se e somente se $\text{dom}(p) \subset \text{dom}(q)$ e $p \mid \text{dom}(q) = q$, isto é, p é uma extensão de q , e $\text{dom}(p) = F$ se $p \in \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$.

É preciso mostrar que P satisfaz c.c.c., observamos que

$$p \perp q \iff \text{int}_Z(f_{\text{dom}(p)}^{-1}[p]) \cap \text{int}_Z(f_{\text{dom}(q)}^{-1}[q]) = \emptyset.$$

Com efeito, $r \in \text{int}_Z(f_{\text{dom}(p)}^{-1}[p]) \cap \text{int}_Z(f_{\text{dom}(q)}^{-1}[q]) = A \iff \text{dom}(r) \subset \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$ e também $r \leq p$ e $r \leq q$ com $\emptyset \neq A \subset \text{int}_Z(f_{\text{dom}(r)}^{-1}[r])$, portanto $r \in P$. Assim p, q são compactáveis. Segue que P satisfaz c.c.c. pois Z tem celularidade igual a $\aleph_0$.

Vamos definir agora a família de subconjuntos densos em P . Seja $\mathcal{D} = \{D_z : z \in Z\} \cup \{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ onde por definição temos

$$D_z = \{p : f_{\text{dom}(p)}(z) \neq z\}, D_\alpha = \{p : \alpha \in \text{dom}(p)\}, \forall z \in Z \text{ e } \alpha \in \kappa$$

Para todo $z \in Z$ D_z é denso em P . Com efeito, seja $z \in Z$ e se $p \in P \setminus D_z$ então $f_{\text{dom}(p)}(z) = p$. Como Z não tem pontos isolados e $A = \text{int}_Z(f_{\text{dom}(p)}^{-1}[p]) \neq \emptyset$ também $A \setminus \{z\}$ não é vazio. Existe assim um subconjunto finito $F \subset \kappa$ e um subconjunto aberto $U \subset \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ tal que

- 1) $\text{dom}(p) \subset F$
- 2) $\emptyset \neq f_F^{-1}[U] \subset \text{int}_Z(f_{\text{dom}(p)}^{-1}[p])$

3) $z \notin f_F^{-1}[U]$

Por 0) temos $z_* \in Z$ tal que $f_F^{-1}[U] \cap f_F^{-1}[f_F(z_*)] \neq \emptyset$, seja $q = f_F(z_*)$. Então $q \in U$ e por 1) e 2) $q \leq p$. Por 2) e 3) temos $f_F(z) \neq q$ e $q \in D_z$. Assim, D_z é denso em P .

Para todo $\alpha \in \kappa$, D_α é denso em P . Com efeito, sejam $\alpha \in \kappa$ e $p \in P$. Seja $F = \{\alpha\} \cup \text{dom}(p)$. Por 0) existe $z \in \text{int}_Z f_F^{-1}[f_F(z)] \cap \text{int}_Z f_{\text{dom}(p)}^{-1}(p)$. Seja $q = f_F(z)$. Então $q \in P$, $\text{dom}(q) = F$, $\text{int}_Z f_F^{-1}(q) \subset \text{int}_Z f_F^{-1}(p)$. Temos $q \leq p$ com $q \in D_\alpha$.

Por $\text{MA}(\kappa)$ seja G um filtro genérico para $\mathcal{D}$. Temos $\bigcup G \in X$ pois para cada $\alpha \in \kappa$ existe $p \in G$ tal que $\alpha \in \text{dom}(p)$. Para cada $z \in Z$ escolhemos $p \in G \cap D_z$ e então $p \neq f_{\text{dom}(p)}(z)$. Assim $\bigcup G \notin Z$. Por outro lado, seja $F\{\alpha_j : j = 1, 2, \dots, n\} \subset \kappa$ e escolhemos $p_j \in G$ tal que $\alpha_j \in \text{dom}(p_j)$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Existe $p \in G$ tal que $p \leq p_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, então $F \subset \text{dom}(p)$, e assim existe $z \in Z$ tal que $f_F(\bigcup G) = f_F(z)$. Portanto $\bigcup G$ é aderente ao fechado Z . Absurdo.

■

Teorema 4.5 ([3]) *Seja Z um espaço regular e enumerável sem pontos isolados. Então*

1) *Z não pode ser imerso num produto de enumerável de espaços regulares dispersos, como subespaço fechado.*

2) *($\text{MA}(\kappa)$) Z não pode ser imerso num produto de $\kappa < c$ de espaços regulares dispersos, como subespaço fechado.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo, que Z possa ser imerso como subconjunto fechado num produto de κ espaços regulares dispersos. Então pelo lema acima, existe um índice $\alpha \in \kappa$ e um aberto não vazio $U \subset Z$ tal que a projeção $p_\alpha \upharpoonright U : U \longrightarrow p_\alpha[U]$ é uma função rara. Isso é impossível porque a imagem de um espaço por uma função rara não tem pontos isolados.

■

Teorema 4.6 ([3])

1) *Se Q está imerso num produto $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ como subconjunto fechado então pelo menos um dos fatores X_n contém uma cópia de Q , onde X_n são espaços regulares arbitrários.*

2) *($\text{MA}(\kappa)$) Se Q está imerso num produto $\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$ como subconjunto fechado então pelo menos um dos fatores X_α contém uma cópia de Q , onde $X_\alpha : \alpha \in \kappa < c$ são espaços regulares arbitrários.*

Demonstração. Se Q está imerso como subconjunto fechado num produto $\prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$, então pelo lema 4.3, existe um índice $\alpha \in \kappa$ e um aberto não vazio $U \subset Q$ tal que a projeção $p_\alpha \mid U : U \longrightarrow p_\alpha[U]$ é uma função rara. Pelo lema 4.2, como U é homeomorfo a Q , o subespaço $p_\alpha[U]$ contém uma cópia de Q .

■

Capítulo 5

Outras caracterizações

5.1 A classe $CAP(X)$

Seja (X, τ) um espaço metrizável, que contém uma cópia rara e fechada de si mesmo. Dizemos que $F \subset X$ é raro em X se a aderência do subconjunto F tem interior vazio em X .

Definição 5.1 *Por $CAP(X)$ denotamos a classe dos espaços metrizáveis Y que podem ser descritos na forma*

- 1) $Y = \bigcup_{j \in N} Y_j$ com $Y_j \subset Y_{j+1}, \forall j \in N$
- 2) Y_j é uma cópia fechada de X em Y , e rara em $Y_{j+1}, \forall j \in N$

Vamos observar que $CAP(X)$ seria necessariamente vazia, sem a hipótese acima assumida para o espaço X , pois por 2) se existe um homeomorfismo h de Y_1 sobre X , então $h[Y_0] \subset X$ é uma cópia rara e fechada de X .

Seja $s \in Seq$, isto é, $s = \emptyset$ ou existe $j \in N$ tal que $s = (s(0), \dots, s(j)) \in N^{j+1}$. Seja $f(s) : N \rightarrow [0, 1]$ a função definida por

$$f(s)(m) = \frac{1}{1+s(0)+\dots+s(m)} \text{ se } m \leq j \text{ e } f(s)(m) = 0 \text{ se } m > j$$

onde $s \in N^{j+1}$, e seja $f(\emptyset)$ a função nula.

O subespaço do cubo de Tychonoff $[0, 1]^{\aleph_0}$

$Q = \bigcup_{j \in N} Q_j : Q_0 = \{f(\emptyset)\}$ e $Q_{j+1} = Q_j \cup \{f(s) : s \in N^{j+1}\}$ é um espaço racional, e a

função $h : Q_n \times Q_1 \longrightarrow Q_{n+1}$ tal que $h(f(s), f(j)) = f(s * j)$ é um homeomorfismo entre esses subespaços compactos.

Proposição 5.1 *Seja (X, ρ) um espaço métrico, com $\dim(X) = 0$, cujos abertos fechados não vazios são dois a dois homeomorfos. Supomos ainda que X contém uma cópia fechada e rara de si mesmo. Então X é homeomorfo ao espaço produto $X \times Q_1$.*

■

A demonstração dessa proposição é a mesma do teorema de extensão de homeomorfismos, teorema 5.1, que veremos logo mais. Do fato acima, segue que $X \times Q$ é um elemento de $CAP(X)$. Com efeito, temos $X \approx X \times Q_1$ e $X \approx X \times Q_n \implies X \approx (X \times Q_n) \times Q_1 \approx X \times Q_{n+1}$, então por indução sobre $n \in \mathbb{N}$ temos $X \times Q = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (X \times Q_j)$ satisfazendo as condições da definição de $Y \in CAP(X)$. Nos casos que vamos estudar a conclusão acima não depende da proposição 5.1, por exemplo $P \approx P \times Q_1$ é uma consequência do teorema de caracterização de P .

5.2 Extensões de bases e de homeomorfismos

Seja (X, ρ) um espaço métrico, com $\text{Ind}(X) = 0$, cujos abertos fechados não vazios são dois a dois homeomorfos. Supomos ainda que X contém uma cópia fechada e rara de si mesmo.

Lema 5.1 *Sejam $A \subset X$ um subconjunto fechado raro, não vazio, e $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto discreto de A com $\text{mesh}(\mathcal{A}) \leq \lambda > 0$. Para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um recobrimento aberto discreto $\mathcal{C}$ de X , da forma $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$, onde*

- 1) $\mathcal{D} = \{U \in \mathcal{C} : U \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{C} : U \cap A = \emptyset\}$
- 2) $\mathcal{D} \upharpoonright A = \{U \cap A : U \in \mathcal{D}\} = \mathcal{A}$
- 3) $\forall U \in \mathcal{D} : \text{diam}(U) < \text{diam}(T) = \epsilon$, onde $T = U \cap A$ e $\text{mesh}(\mathcal{E}) \leq \lambda$.

Usamos a notação $\mathcal{D} = \{U(T) : T \in \mathcal{A}\}$ onde $U = U(T)$ é uma função bijetora de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{D}$. Exigimos ainda que $0 < \rho(x, T) < \epsilon$ para todo $T \in \mathcal{A}$ e todo $x \in U(T) \setminus T$.

Prova. Como $\mathcal{A}$ é uma família de fechados dois a dois disjuntos, não vazios, $\dim(X) = 0$ e X é coletivamente normal, para cada $T \in \mathcal{A}$ podemos obter um aberto fechado $U(T) \subset X$

tal que $U(T) \cap A = T$, com a família resultante $\mathcal{D} = \{U(T) : T \in \mathcal{A}\}$ sendo discreta, e tal que $\text{diam}(U(T)) \leq \text{diam}(T) + \epsilon$, e ainda com $\cup \mathcal{D}$ sendo um aberto fechado em X , e que está contido no aberto $\cup_{T \in \mathcal{A}} B(T, \epsilon)$, onde $B(T, \epsilon) = \{x \in X : \rho(x, T) < \epsilon\}$. Podemos ainda supor que $X \setminus \cup \mathcal{D}$ não é vazio, e então escolhemos um recobrimento aberto discreto $\mathcal{E}$ com $\text{mesh}(\mathcal{E}) < \lambda$ de $X \setminus \cup \mathcal{D}$. Seja $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$. ■

Vamos chamar $\mathcal{D}$ nas condições acima de uma extensão exterior para A de $\mathcal{A}$ em X .

Definição 5.2 *Seja G um espaço metrizável. Dizemos que $\mathcal{G} = \cup_{j \in N} \mathcal{G}_j$ é uma boa base de G se cada família $\mathcal{G}_j$ é um recobrimento aberto discreto de G , $\mathcal{G}_{j+1}$ refina $\mathcal{G}_j$, $\forall j \in N$.*

Se $T \in \mathcal{G}_j$ é um aberto fechado tal que $|T| > 1$, então impomos que $\mathcal{G}(T) = \{S \in \mathcal{G}_{j+1} : S \subset T\}$ é um recobrimento aberto discreto de T e que também não é unitário. Quando G for um espaço compacto supomos que tais bases são diádicas.

Lema 5.2 *Sejam $A \subset X$ um subconjunto fechado e raro em X e $\mathcal{A}$ uma boa base de A . Então existe uma família de extensões exteriores $\mathcal{D}_j : j \in N$ de modo que*

- 1) $\mathcal{D}_j = \{U(T) : T \in \mathcal{A}_j\}, \forall j \in N$
- 2) $\forall T \in \mathcal{A}_j : \text{diam}(U(T)) < \text{diam}(T) + \frac{1}{2^{j+1}}, \forall j \in N$
- 3) $\forall T \in \mathcal{A}_j : \mathcal{D}_{j+1}(T) = \{U(S) : S \in \mathcal{A}_{j+1}(T)\}$ é uma boa extensão exterior de $\mathcal{A}_{j+1}(T)$ com o subconjunto aberto fechado não vazio, $E_{j+1}(T) = U(T) \setminus \cup \mathcal{D}_{j+1}(T)$ e $E_{j+1} = \cup_{T \in \mathcal{A}_j} E_{j+1}(T)$.
- 4) $X \setminus \cup \mathcal{D}_0 = E_0$ e $\cup \mathcal{D}_j \setminus \cup \mathcal{D}_{j+1} = E_{j+1}$ para todo $j \in N$ formam um recobrimento de $X \setminus A$ por subconjuntos abertos fechados não vazios de X , dois a dois disjuntos.
- 5) $\forall j \in N : \cup_{T \in \mathcal{A}_j} \mathcal{D}_{j+1}(T) = \mathcal{D}_{j+1}$

A família $\mathcal{D} = \cup_{j \in N} \mathcal{D}_j$ obtida chamamos de uma base exterior para A em X que estende $\mathcal{A}$. Observamos ainda que $\mathcal{D}(y) = \{U \in \mathcal{D} : y \in U\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $y \in A$ em X .

Prova. Supondo $\mathcal{D}_j$ definidos para $0 \leq j \leq n$, em que $\mathcal{D}_j = \{U(T) : T \in \mathcal{A}_j\}$ aplicamos o lema 5.1 para cada fechado $T \in \mathcal{A}_n$ como subconjunto dos respectivos subespaços $U(T) \in \mathcal{D}_n$ para obter uma extensão exterior $\mathcal{D}_{n+1}(T)$ de $\mathcal{A}_{n+1}(T) = \{S \in \mathcal{A}_{n+1} : S \subset T\}$ com $\epsilon_{n+1} > 0$ e $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $\text{diam}(U(S)) \leq \text{diam}(S) + \epsilon_{n+1}$ para todo $S \in \mathcal{A}(T), T \in \mathcal{A}_n$ e $U(T) \setminus \cup \mathcal{D}_{n+1}(T) = E_{n+1}(T) \neq \emptyset$. Temos $\cup_{T \in \mathcal{A}_n} \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}_{n+1}$ definida nas condições pedidas, com $\cup_{T \in \mathcal{A}_n} E_{n+1}(T) = E_{n+1} \subset \cup \mathcal{D}_n$ sendo um aberto fechado não vazio de X . Observamos que $X \setminus A = \cup_{j \in N} E_j$ é dependente da hipótese :” A é raro em X ”, porque,

$\mathcal{A}$ é uma base de A , e A não poderia conter abertos fechados não vazios, para a afirmação acima ser possível. ■

Sejam Y, Z cópias de um espaço métrico (X, ρ) , com $\dim(X) = 0$ e cujos abertos fechados são dois a dois homeomorfos. Sejam $A \subset Y$ e $B \subset Z$ subconjuntos raros e fechados nos seus respectivos espaços, que supomos serem homeomorfos entre si.

Teorema 5.1 ([10] van Mill, 1981) *Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homeomorfismo então existe um homeomorfismo $h : Y \longrightarrow Z$ que é uma extensão de φ .*

Prova. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ boas bases de A e B respectivamente, com $\mathcal{B} = \{\varphi[T] : T \in \mathcal{A}\}$, e sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ boas extensões dessas bases como no lema 5.2. Podemos indexar essas famílias na forma $\mathcal{D}_j = \{U_j(T) : T \in \mathcal{A}_j\}$ e $\mathcal{E}_j = \{V_j(T) : T \in \mathcal{A}_j\}$ onde $V(T) \cap B = \varphi[T]$, $\forall T \in \mathcal{A}$. Como $E_0 = Y \setminus \cup \mathcal{D}_0$ e $G_0 = Z \setminus \cup \mathcal{E}_0$, são abertos fechados não vazios em Y e Z respectivamente, existe um homeomorfismo f_0 entre eles, e para cada $T \in \mathcal{A}$ existe um e somente um $j \in N$ tal que $T \in \mathcal{A}_j$, portanto, temos $E_{j+1}(T) = U_j(T) \setminus \cup \mathcal{D}_{j+1}(T) \subset E_{j+1}$ e $G_{j+1}(T) = V_j(T) \setminus \cup \mathcal{E}_{j+1}(T) \subset G_{j+1}$ temos para esses abertos fechados em Y e Z , um homeomorfismo f_T e assim cada função f_{j+1} de E_{j+1} sobre G_{j+1} definida por $f_{j+1}(y) = f_T(y)$ se $y \in E(T) \subset E_{j+1}$ é um homeomorfismo, para todo $j \in N$. Definimos a função $h(x) = \varphi(x)$ se $x \in A$, e $h(y) = f_j(y)$ se $y \in E_j$, e temos que $h : Y \longrightarrow Z$ é bijetora. É preciso mostrar que h é bicontínua. Como os subconjuntos A, B são fechados raros nos seus respectivos espaços, é suficiente mostrar que h preserva as bases exteriores acima definidas. Sejam $U = U(T)$ e $V = V(T)$ fixados, e seja $x \in U$ um ponto qualquer. Se $x \in U \setminus T$ então existe $S \subset T$ e $S \in \mathcal{A}$ tal que $x \in E(S) \subset U$ e $f_S(x) \in G(S) \subset V$ pela definição das bases exteriores e das funções acima. Assim $h[U] \subset V$. Do mesmo modo invertamos a inclusão obtendo a igualdade $h[U] = V$. Logo h é bicontínua. ■

5.3 Indução em $CAP(X)$

Seja (X, ρ) um espaço métrico, com $\text{Ind}(X) = 0$, cujos abertos fechados não vazios são dois a dois homeomorfos. Supomos ainda que X contém uma cópia fechada e rara de si mesmo.

Lema 5.3 *Sejam $Y, Z \in CAP(X)$. Existem seqüências de boas bases exteriores $\mathcal{D}_n$ para Y_n e $\mathcal{E}_n$ para Z_n com homeomorfismos $\varphi_n : Y_n \longrightarrow Z_n$ para todo $n \in N$, tais que*

$$1) \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1} \text{ e } \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$$

$$2) \varphi_{n+1} \mid Y_n = \varphi_n$$

$$3) \varphi_n(\mathcal{D}_n \mid Y_n) = \mathcal{E}_n \mid Z_n$$

para todo $n \in N$.

Prova. Suponhamos que já definimos para $j = 0, 1, \dots, n$ boas bases exteriores, $\mathcal{D}_j$ para Y_j e $\mathcal{E}_j$ para Z_j com homeomorfismos $\varphi_j : Y_j \longrightarrow Z_j$ nas condições acima pedidas. Seja então φ_{n+1} uma extensão como no teorema 5.1 em relação as bases exteriores $\mathcal{D}_n \mid Y_{n+1}$ e $\mathcal{E}_n \mid Z_{n+1}$. Para cada um dos abertos fechados $D_{n,j} = \mathcal{D}_{n,j-1} \setminus \mathcal{D}_{n,j}$ e $E_{n,j} = \mathcal{E}_{n,j-1} \setminus \mathcal{E}_{n,j}$ podemos tomar boas bases para $Y(j) = Y_{n+1} \cap D_{n,j}$ e $Z(j) = Z_{n+1} \cap E_{n,j}$ que denotamos por $\mathcal{U}(j)$ e $\mathcal{V}(j)$, respectivamente, correspondendo por φ_{n+1} , e como no lema 5.2, obter as boas extensões nos respectivos subespaços abertos fechados, $D_{n,j}$ e $E_{n,j}$, que denotamos por $\mathcal{D}(Y(j))$ e $\mathcal{E}(Z(j))$. Definimos então $\mathcal{D}_{n+1}$ e $\mathcal{E}_{n+1}$ por

$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{n,j} \cup \bigcup_{i \leq j} \mathcal{D}_j(Y(i))$$

$$\mathcal{D}_{n+1,j} \mid Y_{n+1} = \mathcal{D}_{n,j} \mid Y_{n+1} \cup \bigcup_{i \leq j} \mathcal{U}_j(Y(i))$$

e de modo análogo

$$\mathcal{E}_{n+1,j} = \mathcal{E}_{n,j} \cup \bigcup_{i \leq j} \mathcal{E}_j(Z(i))$$

$$\mathcal{E}_{n+1,j} \mid Z_{n+1} = \mathcal{E}_{n,j} \mid Z_{n+1} \cup \bigcup_{i \leq j} \mathcal{V}_j(Z(i))$$

e então estabelecemos para $n + 1$ as bases exteriores $\mathcal{D}_{n+1}$ e $\mathcal{E}_{n+1}$ com φ_{n+1} .

■

Lema 5.4 *Sejam Y, Z espaços regulares, com bases $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ respectivamente. Suponhamos que existem bijeções $\psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ e $\varphi : Y \longrightarrow Z$ tais que valem as seguintes igualdades :*

$$\bigcap_{U \in \mathcal{D}(y)} \psi(U) = \{\varphi(y)\} \text{ e } \bigcap_{V \in \mathcal{E}(z)} \psi^{-1}(V) = \{\varphi^{-1}(z)\}$$

para todo $y \in Y$ e $z \in Z$. Então φ é um homeomorfismo.

Prova. Sejam $U \in \mathcal{D}, V = \psi(U) \in \mathcal{E}$. Tomamos, para $x \in U$ o sistema fundamental de vizinhanças de x em Y ,

$\mathcal{D}(U, x) = \{T \in \mathcal{D} : x \in T \subset U\}$, e como temos

$$\cap\{\psi(T) : T \in \mathcal{D} \text{ e } x \in T \subset U\} = \{\varphi(x)\}$$

então temos $\varphi[U] \subset \psi(U)$ para todo $U \in \mathcal{D}$. Do mesmo modo estabelecemos $\varphi^{-1}[V] \subset \psi^{-1}(V)$ para todo $V \in \mathcal{E}$, e temos assim $V = \varphi[\varphi^{-1}[V]] \subset \varphi[U]$ portanto vale a igualdade.

Logo φ preserva sistemas fundamentais de vizinhanças. ■

Teorema 5.2 ([10]) *Se $Y, Z \in CAP(X)$, (onde X é um espaço métrico , com $\dim(X) = 0$, cujos abertos fechados não vazios são dois a dois homeomorfos e que contém uma cópia fechada e rara de si mesmo), então existe um homeomorfismo de Y sobre Z .*

Em outros termos, a menos de homeomorfismos $CAP(X)$ tem no máximo um elemento.

Prova. Como no lema 5.3, seja a sequência de bases exteriores com o respectivo homeomorfismo $\{\mathcal{D}_n, \mathcal{E}_n, \varphi_n\}$ e definimos as funções bijetoras :

$$\varphi : Y \longrightarrow Z, \text{ por } \varphi(x) = \varphi_n(x) \text{ se } x \in Y_n$$

$$\psi_{n,j} : \mathcal{D}_{n,j} \longrightarrow \mathcal{E}_{n,j}$$

onde $\psi_{n,j}(U) = V \iff U = U(T), V = V(T)$ e $T \in \mathcal{D}_{n,j} \mid Y_n$, com as notações já definidas nos lemas anteriores. Seja $\psi(U) = \psi_{n,j}(U)$ se $U \in \mathcal{D}_{n,j}$ a função bijetora entre as bases desses espaços respectivamente

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n \in N} \mathcal{D}_n \text{ com } \mathcal{D}_n = \bigcup_{j \in N} \mathcal{D}_{n,j} \text{ (para } Y \text{)}$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in N} \mathcal{E}_n \text{ com } \mathcal{E}_n = \bigcup_{j \in N} \mathcal{E}_{n,j} \text{ (para } Z \text{)}$$

Vamos verificar as seguintes igualdades,

$$\bigcap_{U \in \mathcal{D}(y)} \psi(U) = \{\varphi(y)\} \text{ e } \bigcap_{V \in \mathcal{E}(z)} \psi^{-1}(V) = \{\varphi^{-1}(z)\}$$

e então segue do lema 5.4 que φ é um homeomorfismo.

Seja $U \in \mathcal{D}$, e para $x \in U$ temos $n \in N$ tal que $x \in U \cap Y_n \in \mathcal{D}_n \mid Y_n$ e pela definição das bases exteriores, segue que $\varphi_n[U \cap Y_n] \in \mathcal{E} \mid Z_n$ portanto, temos $\varphi(x) \in \varphi_n[U \cap Y_n] \subset \psi(U) \cap Z_n$. Temos a inclusão $\varphi[U] \subset \psi(U)$ e de modo análogo temos a outra inclusão, e as duas igualdades acima. ■

5.4 As caracterizações de $C \times Q$ e de $P \times Q$

Vamos a seguir caracterizar os espaços produtos $Q \times C$, $Q \times P$ onde C denota o cubo de Cantor, P denota o conjunto dos números irracionais, com a topologia de subespaço da reta real, e também vamos caracterizar o espaço produto $Q \times B(\kappa)$. Do teorema de Baire, segue que o espaço $Q \times C$ não pode conter uma cópia fechada (e rara) de $\{0\} \times P$, portanto os espaços $C \times Q$ e de $P \times Q$ não são homeomorfos entre si.

Definição 5.3 *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica. Dizemos que um espaço topológico X é $\sigma\mathcal{P}$ se X é uma reunião enumerável de subconjuntos fechados que satisfazem a propriedade $\mathcal{P}$. Dizemos que um espaço topológico X é raramente $\mathcal{P}$ se nenhum aberto não vazio de X satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$.*

Lema 5.5 ([10], implicitamente) *Seja (X, ρ) um espaço métrico com $Ind(X) = 0$. Para todo fechado (não vazio) $F \subset X$ existe um recobrimento aberto, por abertos fechados dois a dois disjuntos em X que denotamos por $\mathcal{D}$ de $X \setminus F$ tal que $diam(D) < \rho(F, D)$, $\forall D \in \mathcal{D}$*

Prova. Dado $x \in X \setminus F$ como $\rho(x, F) = a > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus F$ e satisfazendo a condição $diam(B(x, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon < \rho(B(x, \varepsilon), F) \leq a$. Como $Ind(X) = 0$ podemos tomar um recobrimento por abertos fechados em X que denotamos por $\mathcal{C}$ de $X \setminus F$ com a propriedade $diam(U) < \rho(F, U)$, $\forall U \in \mathcal{C}$ e então existe um refinamento $\mathcal{D}$ por abertos fechados dois a dois disjuntos de $\mathcal{C}$ recobre $X \setminus F$ e tem a propriedade acima pedida, pois $X \setminus F$ é paracompacto T_2 . ■

Supondo que a métrica ρ é totalmente limitada, portanto X é separável, e que F é um compacto, podemos supor que o conjunto $\{D \in \mathcal{D} : \rho(D, F) > a\}$ é finito para todo $a > 0$, ou em outros termos, que toda vizinhança aberta de F deixa de conter somente um número finito de elementos do recobrimento $\mathcal{D}$.

Teorema 5.3 (Alexandroff e Urysohn, 1928) *Seja X um espaço métrico separável com as seguintes propriedades*

- 1) X é σ -compacto e $\text{ind}(X) = 0$
- 2) X é raramente localmente compacto e raramente enumerável

Então X é homeomorfo ao espaço produto $C \times Q$ onde C denota o conjunto triádico de Cantor. (Que dizemos abreviadamente conjunto de Cantor).

Demonstração. ([10]) Primeiro vamos estabelecer dois fatos, e depois mostrar que $X \in CAP(C)$, concluindo a demonstração.

FATO 1. Todo aberto não vazio $U \subset X$ contém um cópia do conjunto de Cantor C .

Podemos supor que U é um aberto fechado, e pela σ -compacidade de X , que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ onde K_n é um subespaço compacto de X . Como $|U| > \aleph_0$, pois X é raramente enumerável existe n_0 tal que K_{n_0} contém uma cópia de C .

FATO 2. Se K é um compacto em X então existe uma cópia $E \subset X$ de C contendo K como subconjunto raro.

Seja $\mathcal{D}$ um recobrimento aberto como no lema 5.5 de $X \setminus K$ com a propriedade $\text{diam}(D) < \rho(K, D)$, $\forall D \in \mathcal{D}$ e ainda pedimos que o conjunto $\{D \in \mathcal{D} : \rho(D, F) > a\}$ seja finito para todo $a > 0$. Para cada $D \in \mathcal{D}$ seja $F(D) \subset D$ uma cópia do conjunto de Cantor C , e definimos o subespaço $E = K \cup (\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$. Como uma vizinhança de K deixa no máximo um número finito de cópias $F(D)$ por recobrir, segue que E é um subespaço compacto de X . Como $K \subset \text{Fr}(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$ segue que K é raro em E .

Com esses fatos estabelecidos, seja $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, onde $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ são compactos em X e raros em K_{n+1} , como 1) e 2) nos permite supor. Do fato 2, podemos tomar $E_n \subset X$, que são cópias do conjunto de Cantor, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tais que $K_n \cup E_n \subset E_{n+1}$ e $K_0 \subset E_0$, onde E_n é raro em E_{n+1} por causa da hipótese 2) e de $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset X$. Portanto, $X \in CAP(C)$. ■

Teorema 5.4 ([10] van Mill 1981) *Seja X um espaço métrico separável com as seguintes propriedades*

- 1) X é σ -completo e $\text{ind}(X) = 0$
- 2) X é raramente completo e raramente σ -compacto

Então X é homeomorfo ao espaço produto $P \times Q$.

Demonstração. ([10]) Primeiro vamos estabelecer dois fatos, e depois mostrar que $X \in \text{CAP}(P)$, concluindo a demonstração.

FATO 1. Todo aberto-fechado não vazio $U \subset X$ contém uma cópia do espaço dos números irracionais P .

Podemos supor pela σ -completude de X , que $U = \bigcup_{n \in N} K_n$ onde K_n é um subespaço topologicamente completo de U para cada $n \in N$. Como X não é σ -compacto, existe $n \in N$ tal que K_n também não é σ -compacto. Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos abertos fechados de K_n que são σ -compactos. Temos $K_n \setminus \bigcup \mathcal{E} \neq \emptyset$, pois assumindo o contrário, podemos obter um subrecobrimento enumerável $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ de K_n , o que é contradição. Vamos mostrar que $E = K_n \setminus \bigcup \mathcal{E}$ é raramente localmente compacto. Por absurdo, suponhamos que $F \subset E$ é um compacto aberto não vazio em E . Existe G aberto fechado em K_n tal que $F = G \cap E$ e um recobrimento enumerável $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ de $G \setminus F$ e como F é compacto segue que G é σ -compacto, absurdo. Como E é fechado em K_n também E é topologicamente completo.

FATO 2. Se K é um subconjunto fechado e completo em X então existe uma cópia fechada $E \subset X$ de P contendo K como subconjunto fechado raro.

Seja $\mathcal{D}$ um recobrimento aberto como no lema 5.5 de $X \setminus K$ com a propriedade $\text{diam}(D) < \rho(K, D)$, $\forall D \in \mathcal{D}$. Para cada $D \in \mathcal{D}$ seja $F(D) \subset D$ uma cópia do conjunto dos números irracionais P , e definimos o subespaço $E = K \cup (\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$. Como $K \subset \text{Fr}(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$ segue que K é raro e fechado em E . Seja $A = E \setminus K$ que por ser homeomorfo a $P \times N$ é topologicamente completo, e aberto em E . Seja $\tilde{E}$ uma compactificação de E , então, $\tilde{E} \setminus A$ é σ -compacto pois A é topologicamente completo, portanto $\tilde{E} \setminus (A \cup \tilde{K})$ é também σ -compacto, e como $\tilde{K} \setminus K$ é σ -compacto, também o é $\tilde{E} \setminus E$. Segue que E é topologicamente completo raro e fechado em X .

Com esses fatos estabelecidos, seja $X = \bigcup_{n \in N} K_n$, onde $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in N$ são fechados e completos em X e raros em K_{n+1} , como 1) e 2) nos permite supor. Do fato 2, podemos tomar $E_n \subset X$, que são cópias fechadas do conjunto dos números irracionais P , para cada $n \in N^*$, tais que $K_n \cup E_n \subset E_{n+1}$ e $K_0 \subset E_0$, onde E_n é raro em E_{n+1} por causa da hipótese 2) e de $X = \bigcup_{n \in N} K_n \subset \bigcup_{n \in N} E_n \subset X$. Portanto, $X \in CAP(P)$. ■

5.4.1 A caracterização de $Q \times B(\kappa)$

Vamos usando "a mesma demonstração do teorema anterior" obter outra caracterização, a do espaço $Q \times B(\kappa)$, onde κ é um número cardinal maior que $\aleph_0$.

Teorema 5.5 ([9] Medvedev, 1986) *Seja X um espaço métrico, $\dim(X) = 0$, de peso $w(X) = \kappa$ com as seguintes propriedades*

- 1) X é σ -completo
- 2) X é raramente completo
- 3) *Todos os abertos não vazios contém uma cópia fechada de $B(\kappa)$.*

Então X é homeomorfo ao espaço produto $B(\kappa) \times Q$.

Demonstração. Usamos a condição 3) para estabelecer o seguinte fato.

FATO 2. Se K é um subconjunto fechado e completo em X então existe uma cópia fechada $E \subset X$ de $B(\kappa)$ contendo K como subconjunto fechado raro.

Seja $\mathcal{D}$ um recobrimento aberto discreto de $X \setminus K$ com a propriedade $\text{diam}(D) < \rho(K, D)$, $\forall D \in \mathcal{D}$. Para cada $D \in \mathcal{D}$ seja $F(D) \subset D$ uma cópia fechada de $B(\kappa)$, e definimos o subespaço $E = K \cup (\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$. Como $K \subset \text{Fr}(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} F(D))$ segue que K é raro e fechado em E . Seja $A = E \setminus K$ que por ser homeomorfo a $B(\kappa) \times S$, onde S é um espaço discreto de potência igual a $|\mathcal{D}|$, é topologicamente completo, e aberto em E . Seja $\tilde{E}$ uma compactificação de E , então, $\tilde{E} \setminus A$ é σ -compacto pois A é topologicamente completo, portanto $\tilde{E} \setminus (A \cup \tilde{K})$ é também σ -compacto, e como $\tilde{K} \setminus K$ é σ -compacto, também o é $\tilde{E} \setminus E$. Segue que E é topologicamente completo.

Com esses fatos estabelecidos, seja $X = \bigcup_{n \in N} K_n$, onde K_n para todo $n \in N$ são fechados e completos em X e raros, como 1) e 2) nos permite supor. Do fato 2, podemos tomar $E_n \subset X$, que são cópias fechadas do espaço $B(\kappa)$, para cada $n \in N^*$, tais que $K_{n+1} \cup E_n \subset E_{n+1}$ e $K_0 \subset E_0$, onde E_n é raro em E_{n+1} por causa do fato 2) e temos $X = \bigcup_{n \in N} K_n \subset \bigcup_{n \in N} E_n \subset X$. Portanto, $X \in CAP(B(\kappa))$. ■

Corolário 5.1 *Para todo cardinal $\lambda \leq \kappa$ são homeomorfos $Q \times B(\kappa)$ e $Q(\lambda) \times B(\kappa)$*

■

Bibliografia

- 1) Maria Stella Amorim Coutinho Castilla
Sobre os Espaços $\Sigma(J)$,
Tese de Doutorado, IME-USP, Out. 1984.
- 2) Eric K. van Douwen,
Closed Copies of Rationals,
Commentationes Math. univ. Carolinae, 28, 1, (1987), 137-139.
- 3) Katsuya Eda, Shizuo Kamo, Tsugonori Nogura,
Spaces Which Contain a Copy of the Rationals,
J. Math. Soc. Japan, 42, 1, (1990), 103-114
- 4) R. Engelking,
Dimension Theory,
North Holland Amsterdam, 1978.
- 5) R. Engelking,
General Topology, Revised and Completed ed.
Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- 6) R. Engelking and A. Pelczyński,
Remarks on Dyadic Spaces,
Coll. Math. 11,(1963),55-63.

- 7) I. Juhász
Cardinal Function in Topology - Ten Years Later
Mathematisch Centrum Amsterdam, 1980.
- 8) N. Lašnev,
Continuous Decompositions and Closed Mappings of Metric Spaces
Dokl. Akad. Nauk. SSSR (1965) 756 - 758
Sov. Math. Dokl. 6, (1965) 1504 - 1506.
- 9) S. V. Medvedev,
Topological Characteristics of Spaces $Q(\kappa)$ and $Q \times B(\kappa)$
Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika, 41, 1, (1986) 42 - 45.
- 10) Jan van Mill,
Characterization of Some Zerodimensional Separable Metric Spaces
Trans. Amer. Math. Soc. 264, 1, (1981) 205 - 215
- 11) Zbigniew Piotrowski,
Dense Subsets of Product Spaces
Q & A in General Topology, 11, (1993) 135 - 138.
- 12) W. Sierpinski,
Sur Une Propriété Topologique des Ensembles Dénombrables Denses en Soi,
Fund. Math. 1, (1920) 11 - 16.
- 13) W. Sierpinski,
Sur Une Projection des Ensembles Complémentaire aux Ensembles (A),
Fund. Math. 11, (1928) 117 - 122.
- 14) A. H. Stone,
Paracompactness and Product Spaces,
Bull. Amer. Math. Soc. 54, (1948) 977 - 982.

15) R. C. Walker,
Stone-Čech Compactification,
Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1974.