SOBRE O OPERADOR ALEATÓRIO

$H = \Delta^2 + V$ E SEU ESPECTRO σ_{pp} .

Arthur Pires Julião

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Análise Funcional

Orientador: Prof. Dr. Henrique von Dreifus

– São Paulo, julho de 1995 –

SOBRE O OPERADOR ALEATÓRIO

$H = \Delta^2 + V$ E SEU ESPECTRO σ_{pp} .

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por Arthur Pires Julião e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 23 de novembro de 1995

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Henrique von Dreifus (Presidente) — IME-USP
- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro — IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Claudio Paiva — ICMSC-USP

Resumo

Neste trabalho, estudamos a localização do espectro puro ponto (σ_{pp}) de um operador hamiltoniano aleatório $H = \Delta^2 + V$, definido em $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$, onde o potencial V é estocástico. Começando com princípios básicos de Mecânica Quântica, o problema é abordado num contexto físico matemático, onde são introduzidas linguagem e resultados do caso inicial $H = -\Delta + V$. Um argumento combinatorial, baseado na limitação da função de Green do problema, é empregado e o resultado probabilístico da localização é estabelecido, em função de diversos parâmetros determinísticos, como a dimensão e o volume, por exemplo.

Abstract

We are concerned here with spectral localization for the pure point part (σ_{pp}) of the spectrum of the random hamiltonian operator $H = \Delta^2 + V$ (acting in $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$), with a stochastic potential V . Starting with basic principles of Quantum Mechanics, we approach the problem within a mathematical-physics context, where the terminology and results of the case $H = -\Delta + V$ are stated. A combinatorial reasoning based on bounds for the Green's function applicable is conducted, settling a probabilistic result for localization, which depends on deterministic parameters such as dimension and volume.

Agradecimentos

Ao término deste singelo trabalho, é realmente um prazer tornar conhecidos explicitamente todos aqueles que, diretamente ou não, deram uma contribuição positiva em prol de sua concretização. Assim, sou grato:

- em primeiro lugar, evidentemente, a Deus, por ter me ajudado sempre, principalmente nos períodos mais desgastantes, onde as dificuldades extrínsecas superaram (em muito) as intrínsecas;
- à minha família, pela compreensão e pelo suporte, em especial minha irmã e minha mãe;
- à CAPES, que patrocinou o início deste projeto;
- à Profa. Dra. Lucília Daruiz Borsari, minha orientadora de programa inicialmente, pelos conselhos muitos e por nada impor;
- ao meu orientador, Prof. Dr. Henrique von Dreifus, pela sugestão do tema e por ter me guiado competentemente, através de condições que, ao meu ver, já não eram as ideais, respeitando sempre meus outros compromissos, transcendendo seu papel e se tornando um verdadeiro amigo;

- aos professores doutores Paulo D. Cordaro e Alfredo J. Aragona, pelo interesse demonstrado no andamento do meu curso e por ótimas conversas;
- ao Marko Loparić, pela ajuda com as ilustrações;
- a diversos amigos do IME-USP, por proporcionarem um ambiente de excelente camaradagem;
- ao pessoal da biblioteca e da CPG do IME-USP;
- ao Walter, por editar em tempo recorde o manuscrito original deste trabalho e, encerrando esta lista,
- a Bach, Mozart, Yanni, Davol, Popol Vuh, Enya, Muddy Waters, Kitaro, ZZ Top e outros, pelo enlevo e relaxamento que ainda me proporcionam.

Para Helena e Magaly

How can it be that Mathematics, a product of human thought independent of experience, is so admirable adapted to the objects of reality?

– *Albert Einstein* –

Conteúdo

Capítulo 1

Um esboço do formalismo quântico	1
--	---

Capítulo 2

Localização: o ponto de vista físico	13
--	----

Capítulo 3

Localização: primeiros resultados matemáticos	19
---	----

Capítulo 4

$\sigma_{pp}(\Delta^2 + V)$: localização probabilística	28
--	----

Referências bibliográficas	42
----------------------------------	----

Capítulo 1

Um esboço do formalismo quântico

Neste capítulo, apresentamos algo sobre o formalismo da Mecânica Quântica, bem como criamos o contexto no qual será introduzido o problema central a ser estudado neste trabalho. Usamos livremente a linguagem da análise funcional, em particular, a dos espaços de Hilbert.

Em que pese a beleza matemática da Mecânica Clássica, sabe-se que ela se revelou inadequada para descrever fenômenos em escala atômica ou molecular, bem como aqueles ditos “relativísticos”.

Sem nos preocuparmos com questões cronológicas, apresentamos a seguir os

princípios básicos do novo paradigma criado para compreender e modelar os problemas que não foram solucionados com sucesso no âmbito clássico; faremos isso apresentando-os como postulados, sem tentar deduzí-los ou justificá-los. Naturalmente, formam apenas uma teoria limitada de Mecânica Quântica. Mais ainda, ignoramos aqui as modificações necessárias para o caso relativístico. Seguimos aqui [Debnath & Mikusiński], superficialmente.

Em suma, o que segue não tem outra pretensão, senão a de introduzir uma *linguagem* para formular problemas e construir *modelos*, extremamente bem sucedidos (dentro de suas limitações e aproximações, é claro), experimentalmente. Ao leitor interessado, recomendamos o esplêndido livro de [Mackey] para uma abordagem profunda, matematicamente falando, que inclusive contrasta com formalismo clássico, que parcialmente assumimos.

A Mecânica Clássica modela o *estado* de um sistema físico pelos valores de certos *observáveis* (e.g., posições, energias) dos componentes do sistema. Em Mecânica Quântica, estados e observáveis são claramente distintos. O primeiro postulado diz então respeito ao *estado* de um sistema (quântico):

Postulado I (O Vetor de Estado)

Todo estado possível de um dado sistema em Mecânica Quântica corresponde a um vetor (não nulo, em geral) num espaço de Hilbert complexo e separável, $\mathcal{H}$, e todo múltiplo escalar (não nulo) de um vetor de estado representa o mesmo estado. Denotamos por $\Psi(x, t)$ um vetor de estado ao qual corresponde o estado do sistema no instante t . Usualmente, x representa uma coleção de parâmetros, quase sempre coordenadas espaciais ou momentos (generalizados). Admite-se que quase toda informação sobre o sistema pode ser obtida a partir de $\Psi(x, t)$.

Ignorando a dependência temporal, é costume escrever o vetor de estado como $\psi(x)$. Na notação de Dirac, escrevemos $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e $\overline{\psi(x)} = \langle\psi|x\rangle$. Mais ainda, normalizaremos o vetor de estado sempre que possível, i.e., tacitamente estaremos supondo (a menos de menção explícita do contrário), que

$$\int \overline{\psi(x)}\psi(x)dx = \int |\psi(x)|^2 = 1 ,$$

onde a integral é tomada sobre todos os valores admissíveis de x , com uma *medida conveniente* (por exemplo, $x \in \mathbb{R}^3$ e a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^3$). Assim, equivalentemente em termos do produto interno de $\mathcal{H}$, $(\cdot, \cdot)$ e com a notação de Dirac, temos:

$$\int \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int |\langle\psi|x\rangle|^2 dx = (\psi, \psi) = \langle\psi|\psi\rangle = 1 .$$

Com isto, a arbitrariedade acima agora se torna “menor”: se $c \in \mathbb{C}$ e $|c| = 1$ (i.e., $c \in S^1$), os vetores de estado $\psi(x)$ e $c\psi(x)$ serão considerados “os mesmos”, significando que correspondem ao mesmo estado físico do sistema. Também não indicaremos eventualmente x .

O vetor de estado $\Psi(x, t)$ é chamado também de “função de estado” ou “função de onda” do sistema quântico.

Se $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ são dois vetores de estado, o número complexo $\langle\phi|\psi\rangle$ representa o produto interno no espaço:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int \overline{\phi(x)}\psi(x)dx = \int \langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx .$$

Assim, $\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\phi\rangle}$ (sesquilinearidade). Dois vetores de estado $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ são ditos ortogonais se $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ e um conjunto de vetores de estado $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ é dito ortonormal se

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\mathcal{H}$ é suposto separável, então, um vetor arbitrário $|\psi\rangle$ no espaço de estados pode ser escrito como soma de algum conjunto completo de vetores ortonormais (i.e., uma base hilbertiana), na forma:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle ,$$

onde $c_i = \langle \psi_i | \psi \rangle$.

A importância disto é que tais resultados acarretam em física o famoso “Princípio da Superposição”. A cardinalidade do conjunto completo ortonormal define a dimensão do espaço de estados. Quando não é finita, a soma acima requer uma discussão elaborada quanto ao aspecto de convergência. Cf. [Hönig] para exemplos e contra-exemplos elucidativos.

O segundo postulado explica de uma vez por todas as interpretações de um observável em Mecânica Quântica. Em Mecânica Clássica, a representação matemática de um observável é essencialmente dada pelos valores (números reais) das *medidas* (ou *observações*) do observável. Tais medidas/observações são processos ou operações físicas precisamente definidas, as quais produzem sempre um número real bem definido, o *valor do observável*, e admite-se que elas não perturbam significativamente o sistema. A abordagem quântica (como formulada essencialmente por von Neumann) é drasticamente diferente:

Postulado II (Operadores Observáveis e Seus Valores)

(a) *A todo observável físico em Mecânica Quântica, corresponde, num espaço de Hilbert, um operador linear hermitiano $\hat{A}$, o qual admite alguma base hilbertiana de autovetores (finita ou não), $\{\psi_n\} : \hat{A}(\psi_n) = \lambda_n \psi_n, n \in \mathbb{N}^*$.*

Mais ainda, a cada operador como acima, corresponde algum observável físico.

(b) *Os únicos valores possíveis do observável físico são dados pelos autovalores λ_n , i.e., o espectro de $\hat{A}$, $\sigma(\hat{A})$, contém todas as possibilidades de qualquer medida do observável em questão. Naturalmente, este espectro se decompõe em diversos conjuntos interessantes e adiante destacaremos uma componente crucial na análise que faremos.*

Vejamos rapidamente algumas consequências matemáticas importantes deste postulado:

1. $\hat{A}$ é autoadjunto $\Rightarrow \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$;
2. como $\{\lambda_n\}$ é “suposto” contável, isto sugere que certos operadores observáveis podem ser “quantizados”. Bem entendido, os autovalores de um operador observável podem ser “discretos” ou “contínuos”, ou uma combinação destes dois, que depende somente do operador observável particular;
3. em Mecânica Clássica, um observável físico, matematicamente falando, pode ser modelado por uma função *real* (de variáveis conjugadas num espaço euclidiano conveniente). Consequentemente, dois observáveis clássicos *sempre comutam*. No caso quântico, isto nem sempre ocorre! Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dois operadores observáveis, definimos seu comutador por:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Como já afirmado, em geral $[\hat{A}, \hat{B}] \neq \hat{O} = O$. Fisicamente, associamos isto às perturbações inevitáveis (e seus efeitos) na magnitude das medidas subsequentes, quanto “medimos” $\hat{A}$ e $\hat{B}$ em ordens diferentes, ou seja, medir primeiro $\hat{A}$ e depois $\hat{B}$ não produz necessariamente o mesmo resultado que

medir primeiro $\hat{B}$ e então $\hat{A}$!. Uma medição de observáveis quânticos afeta, eventualmente, o sistema e isto é previsto teoricamente. Na escala espacial de diversos fenômenos, uma simples perturbação provocada por um único fóton interagente pode modificar substancialmente o sistema.

Para uma discussão realmente lúcida deste e outros aspectos do problema da medição em Mecânica Quântica, consulte o excelente livro de [Landau & Lifshitz].

Se $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, dizemos que os observáveis são complementares, caso contrário eles são ditos compatíveis. Por exemplo, em uma dimensão pode-se provar que posição e momento são complementares, energia e momento são compatíveis. Isto significa que a energia e o momento (unidimensional) de uma partícula (*livre!*) podem ser obtidos com precisão, *simultaneamente*, mas sempre haverá uma incerteza na medição simultânea de posição e momento;

4. autovetores correspondentes a diferentes autovalores de um operador observável formam uma *base hilbertiana* de $\mathcal{H}$:

$$(\psi_n, \psi_m) = \int \overline{\psi_n(x)} \psi_m(x) dx = \delta_{mn} ,$$

e qualquer vetor de estado $\psi(x)$ pode ser escrito como:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\psi_n, \psi) \psi_n(x) .$$

(Veja que optamos, como é usual em Mecânica Quântica, pela linearidade do produto interno na segunda posição);

5. expressando a função de onda $\Psi(x, t)$ em termos da base hilbertiana de auto-

vetores $\{\psi_n(x)\}$, temos

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\psi_n, \Psi) \psi_n(x) ,$$

ou seja, os coeficientes desta expansão são escalares que dependem do tempo, explicitamente,

$$(\psi_n, \Psi) = \int \overline{\psi_n(x)} \Psi(x, t) dx , \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

contudo, o fato de que $\hat{A}$, $\psi_n(x)$ e λ_n são (em geral) todos independentes do tempo, não significa que os valores medidos do operador observável $\hat{A}$ são constantes no tempo. Especifica-se então como o resultado de uma medição particular depende do estado do sistema, na ocasião da medida.

O terceiro postulado estabelece uma ligação “lógica” entre os observáveis físicos da Mecânica Clássica e seus “análogos” quânticos.

Postulado III (O Princípio da Correspondência)

Um operador observável quântico, correspondente a uma variável dinâmica, é obtido substituindo-se a variável canônica na mecânica clássica pelo correspondente operador quântico.

Explicitamente, resumimos na tabela abaixo, algumas destas correspondências:

Observáveis	Quantidades clássicas	Operadores quânticos
Posição	x ou $\vec{r}$	$\hat{x}$ ou $\hat{r}$
Momento linear	$p_x = m\dot{x}$ ou $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$	$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ $\hat{p} = -i\hbar \nabla$
Energia potencial	$V(\vec{r}, t)$	$\hat{V}(\hat{r}, t)$
Momento angular $(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p})$	$L_x = yP_z - zP_y$ $L_y = zP_x - xP_z$ $L_z = xP_y - yP_x$	$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$ $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$
Hamiltoniano	$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$	$\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{V}(\hat{x})$

(Acima, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck).

Existem outros observáveis quânticos (isospin, por exemplo) *sem análogos clássicos*.

Postulado IV (O Princípio da Quantização)

Sendo $\hat{q}_m$ o operador observável correspondente às coordenadas generalizadas e $\hat{p}_m$ o operador momento correspondente ao momento generalizado, então, cada par de operadores observáveis canonicamente conjugados verificam as seguintes relações de comutação de Heisenberg:

$$\begin{cases} [\hat{q}_m, \hat{q}_n] = 0 = [\hat{p}_m, \hat{p}_n] , \\ [\hat{q}_m, \hat{p}_n] = i\hbar \delta_{mn} . \end{cases}$$

A expressão concreta que cada uma destas relações assume num problema particular, evidentemente depende do sistema de coordenadas empregado, como já ocorria em Mecânica Clássica. Por exemplo, em coordenadas cartesianas, é fácil verificar que:

$$[\hat{x}_m, \hat{x}_n] = 0 = [\hat{p}_m, \hat{p}_n] ,$$

$$[\hat{x}_m, \hat{p}_n] = i\hbar\delta_{mn} \quad \text{com } m, n = 1, 2, 3, \text{ representando as componentes } x, y \text{ e } z.$$

Postulado V (Resultado de Uma Medição Quântica)

Se um operador observável $\hat{A}$ tem uma base hilbertiana de autovetores $\{\psi_n\}$ com respectivos autovalores $\{\lambda_n\}$, então, a probabilidade de que uma medição no sistema físico produza um autovalor λ_n (de $\hat{A}$) para um estado normalizado $\psi(x)$ é dada por:

$$P(\lambda_n) = |\langle \psi_n | \psi \rangle|^2 .$$

Este postulado tem conseqüências profundas, que não podemos abordar aqui, pois extrapolariam tremendamente o que pretendemos estudar. Vamos apenas enfatizar que a *predição* de uma medição quântica é de natureza estatística e não determinística, como numa medição clássica. Essencialmente porque não é desprezável a interação entre o equipamento de medida e o sistema a ser medido. Matematicamente, quando o sistema está no estado $\psi(x)$, o valor obtido numa medição do operador observável $\hat{A}$ é uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade cuja média “depende” de uma enorme quantidade de medições neste estado. Consequentemente, medições repetidas em idênticas condições num dado estado não serão necessariamente as mesmas.

O valor esperado $\langle \hat{A} \rangle$ de um operador observável num estado normalizado $\psi(x)$ de um sistema físico é dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = (\psi, \hat{A}\psi) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

e o desvio médio quadrático ($\Delta \hat{A}$) que mede a dispersão em torno do valor esperado

(ou médio) $\langle \hat{A} \rangle$, é dado por:

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{A})^2 &= \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = (\psi, (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \psi) = ((\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)\psi, \\ &(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)\psi) = \|(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)\psi\|^2, \end{aligned}$$

já que A é autoadjunto e $\langle \hat{A} \rangle \in \mathbb{R}$.

Isto posto, a seguinte proposição é imediata:

Proposição 1.1 ($\hat{A}$ como acima)

- (a) $(\Delta \hat{A})^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - (\langle \hat{A} \rangle)^2$;
- (b) $\langle \hat{A}^2 \rangle = \|\hat{A}\psi\|^2$;
- (c) *um sistema físico está num autoestado ψ de $\hat{A}$ se, e somente se, $\Delta \hat{A} = 0$.*

Com estes resultados, podemos enunciar então o famoso

Princípio da Incerteza: *Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são autoadjuntos em $\mathcal{H}$, então, para qualquer vetor de estado (normalizado):*

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \frac{1}{i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.$$

Este resultado é essencialmente a desigualdade de Schwarz escrita no contexto que discutimos até agora.

Pondo $\hat{A} = q_j$ e $\hat{B} = p_k$, obtemos que $\Delta q_j \Delta p_k \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{jk}$, ou, em coordenadas cartesianas, $\Delta x_j \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}$, resultado conhecido como *princípio da incerteza de Heisenberg*, que destaca o papel crucial desempenhado pela constante de Planck. Tanto que, muitos autores afirmam que a Mecânica Clássica pode ser considerada como o limite $\hbar \rightarrow 0$ da Mecânica Quântica (não relativística).

Finalmente, o próximo postulado dá conta do que ocorre com a evolução temporal de um sistema quântico.

Postulado VI (A Dinâmica)

(a) *Para todo sistema físico, existe um operador autoadjunto $\widehat{H}$, o chamado operador hamiltoniano, que descreve o operador observável correspondente à energia total do sistema.*

(b) *Se o sistema físico não é perturbado por algum ensaio, o operador hamiltoniano $\widehat{H}$ determina a evolução temporal do vetor de estado do sistema $\Psi(\vec{r}, t)$, através da relação*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \widehat{H}\Psi(\vec{r}, t) ,$$

conhecida como equação de Schrödinger (dependente do tempo).

Outra maneira de escrever isto é:

$$\frac{d}{dt}[U(t)\Psi] = i\widehat{H}[U(t)\Psi] ,$$

onde $\{U(t)\}$ é um grupo (a um parâmetro) de operadores unitários $U(t)$, que descrevem a dinâmica do sistema.

Para um estudo detalhado desta abordagem, veja o livro já citado de [Mackey].

Um hamiltoniano da forma acima será, no que segue, chamado simplesmente de um *operador de Schrödinger*. Escreveremos também simplesmente H .

Não podemos discutir aqui as analogias notáveis e as consequências físicas decorrentes da interpretação da equação de Schrödinger; vamos apenas destacar que ela

“prevê” a *lei da conservação de probabilidade total no espaço e no tempo*, um resultado não trivial: a densidade de probabilidade $P(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)\overline{\Psi(\vec{r}, t)} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ verifica a relação

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0 ,$$

onde $\vec{J}$ é o fluxo de probabilidade para uma função potencial (*real*).

Como discutido adiante, as propriedades espectrais de $\widehat{H}$ guardam informações físicas importantes dos sistemas que $\widehat{H}$ modela. Em particular, para átomos “pequenos”, diferentes níveis de energia são previstos com exatidão, algumas propriedades de espalhamento relacionam-se com certos subconjuntos de $\sigma(\widehat{H})$, etc.

A aplicação desta metodologia a corpos “grandes”, como um cristal (macroscópico), esbarra em dificuldades enormes, de modo que temos que introduzir um certo número de simplificações e/ou aproximações. É o que faremos no próximo capítulo.

Capítulo 2

Localização: o ponto de vista físico

Apresentamos aqui a terminologia e os principais resultados (físicos) da localização espectral e introduzimos (superficialmente) o modelo de Anderson. Seguimos essencialmente [Reed & Simon; I, IV] mas adaptamos a notação e organização de [von Dreifus].

No chamado “modelo a um elétron dos sólidos”, consideramos apenas um elétron interagente com um *potencial efetivo* (periódico, talvez), devido aos núcleos atômicos, organizados mais ou menos rigidamente num reticulado espacial em $\mathbb{R}^d$ (d : dimensão característica do sistema físico em questão). Ignoramos as interações e^-/e^- , que

introduzem termos “complicados” no hamiltoniano H , com este procedimento. Isto não é tão “arbitrário” assim, já que ignoramos também o spin, o movimento do núcleo de cada átomo e, como já citado, os fenômenos relativísticos. Para não mencionar o Princípio da Exclusão de Pauli.

Do ponto de vista matemático, o espaço de Hilbert em geral é tomado como algum $L^2(\mathbb{R}^d)$ (com a medida de Lebesgue) e supomos, sempre, que H é a extensão auto-adjunta de algum operador *conveniente*. O fato de H poder ser ilimitado introduz dificuldades notáveis aqui. Cf. [Reed & Simon; I], cap. VIII.

Felizmente, para nossos propósitos, estaremos sempre supondo que $H = -\Delta + V$, onde Δ representa o laplaciano (em coordenadas convenientes), e V representa uma função potencial, que atuará sempre multiplicativamente. Mais ainda, discretizaremos tanto o espaço quanto o operador, i.e., consideraremos diretamente $\mathbb{Z}^d$ ao invés de $\mathbb{R}^d$, de sorte que Δ se torna essencialmente o laplaciano a diferenças finitas, como indicaremos adiante, com condições de Dirichlet.

Algumas interpretações físicas já podem ser antecipadas. Potenciais periódicos tipicamente implicam em bandas de espectro absolutamente contínuo e, se a energia de Fermi se situar numa banda do espectro ou num intervalo (“gap”), o material será um condutor ou isolante, respectivamente.

Se no reticulado estiverem presentes impurezas ou núcleos atômicos diferentes (como numa liga metálica, por exemplo), os quais se distribuem aleatoriamente, pode-se argumentar que a dinâmica é melhor descrita por um operador de Schrödinger com um potencial aleatório V . Este é o caso de que nos ocuparemos neste trabalho: o operador de Schrödinger é então dito um *operador linear aleatório*, discretizado espacialmente.

Com estes pressupostos, vamos verificar que H se torna um operador *limitado*,

o que permitirá usar os resultados da análise espectral, e estudar diretamente um componente importante do $\sigma(H)$, sem nos perdermos em detalhes (profundos) de medidas espectrais. Com efeito, temos:

$$\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |f(x)|^2 < +\infty \right\}$$

e, neste espaço de Hilbert complexo, definimos o laplaciano a diferenças finitas por:

$$\begin{aligned} \Delta : \ell_2(\mathbb{Z}^d) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d) \\ f \mapsto \Delta(f) : \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (\Delta(f))(x) &= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} f(y), \end{aligned}$$

onde $\|y - x\| = \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_d - x_d|\}$.

As funções tipo delta de Kronecker δ_x , $x \in \mathbb{Z}^d$ formam uma base do espaço $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{Z}^d)$: $\delta(x) = \delta_x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$; o “1” ocorre na posição da x -ésima coordenada.

Note que a contribuição “diagonal” $-2df(x)$ não apareceu explicitamente pois, como de costume, a incluiremos como uma “contribuição” do potencial.

Adiante, quando iterarmos o laplaciano a diferenças finitas no cálculo de Δ^2 , a incluiremos explícita e momentaneamente para deduzir uma expressão correta.

É importante ressaltar que esta soma (sobre y) é *finita*, o que implica duas importantes conseqüências:

1. Δ é um operador linear *simétrico* (i.e., $(\Delta f, g) = (f, \Delta g)$, $\forall f, g \in \text{Dom}(H)$);
2. Δ é *limitado*.

Como indicado anteriormente, H é evidentemente densamente definido, de modo que, à luz das conseqüências acima, no que segue, não mais mencionaremos que, se necessário, empregamos (a única) extensão autoadjunta deste operador ou de outros dele derivados. As adaptações são óbvias.

Quanto ao papel do potencial, antes de explicitarmos completamente as hipóteses que estaremos pressupondo adiante, vamos observar o comentário de [Martinelli & Scopolla]:

“Anderson, em seu artigo famoso [An], introduziu um modelo no qual ao elétron é permitido interagir apenas com as impurezas que produzem um potencial que varia estocasticamente de sítio a sítio. (...) Matematicamente, esta aproximação consiste em considerar a seguinte *matriz hamiltoniana*:

$$H_{ij} = \begin{cases} 2d + \lambda V(j) & , \text{ se } i = j, \\ -1 & , \text{ se } |i - j| = 1, \\ 0 & , \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

onde $V(j)$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas” (v.a.i.i.d.), no que segue. No seu artigo original, Anderson considerou $V(j)$ uniformemente distribuídas entre -1 e 1 . A constante λ , além de acertar unidades, dá uma medida da *desordem*, i.e., admite-se que as flutuações do potencial de sítio a sítio são da ordem λ . Bem, o exposto acima pode parecer algo restritivo ou por demais idealizado. Ledo engano:

- um cristal macroscópico real não é certamente um “continuum” de pontos, de modo que a consideração do reticulado $\mathbb{Z}^d$ (na verdade, uma parte finita dele) é apropriada;
- o fato de que então (H_{ij}) se torna de fato uma matriz, não simplifica muito o problema, já que temos uma quantidade de átomos no cristal tipicamente da ordem de N_A , o número de Avogadro, e então qualquer estudo numérico se torna desesperador;
- como se pode perceber na literatura, a estrutura assim construída está longe de ser trivial, mesmo em dimensão $d = 1$.

Vejamos alguns resultados sobre o fenômeno da *localização*, do ponto de vista da física.

No caso de um cristal (por exemplo, monoatômico), perfeitamente periódico (e infinito, portanto), os autoestados de energia são descritos no Teorema de Bloch como:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = U_{\vec{k}}(\vec{r})e^{i\vec{r}\cdot\vec{r}},$$

onde $\vec{k}$ é um vetor de onda e $U_{\vec{k}}$ é uma função periódica na rede (i.e., espacialmente periódica). Neste caso, a probabilidade de encontrar um elétron num dado ponto da rede, não depende deste ponto, e os autoestados estão espalhados sobre todo o reticulado. Por isso, dizemos que eles são *estendidos*. A introdução de impurezas acarreta uma desordem, ou “desorganização estrutural”, que “quebra” a periodicidade, daí, o resultado acima não mais se aplica. Anderson mostrou que se a constante de acoplamento λ é “suficientemente grande”, um autoestado ψ_E , de energia E , fica *exponencialmente localizado numa região finita*, ao redor de um sítio, digamos x_0 , com uma amplitude tendo o aspecto:

$$e^{(-\xi^{-1}(E)|x-x_0|)}, \quad \text{para } |x-x_0| > \xi(E),$$

onde $\xi(E)$ é o comprimento característico da região no qual a função é localizada. Dizemos que tais estados estão, então, *localizados* e que $\xi(E)$ é o comprimento de localização. Como veremos matematicamente em detalhes, estes fatos todos são muito profundos. Para uma exposição elegante de todos estes resultados num nível como qual certamente não tencionamos de modo algum nos igualar, consulte [Spencer], [von Dreifus], [von Dreifus & Klein], [Kunz & Souillard], o “enciclopédico” [Cycon, etc.] (cujo capítulo 9, “Matrizes de Jacobi aleatórias”, é excepcional), ou ainda diversos trabalhos em [Papanicolaou].

Voltemos ao potencial V . Seja $V = \{V(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ uma família de variáveis aleatórias independentes, com uma *distribuição de densidade comum*, denotada por $g(V(x))dV(x)$, ou seja, o potencial aleatório V pertence ao espaço de probabilidade:

$$\Omega = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} (\mathbb{R}, dP(V(x))) ,$$

onde $dP(V(x)) = g(V(x))dV(x)$ é uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$, com uma *densidade limitada* com respeito à medida de Lebesgue. Com tais cuidados, pode-se provar que o processo aleatório associado a V é *ergódico*, i.e., a probabilidade P é ergódica com relação às translações de $\mathbb{Z}^d$. Consequentemente, qualquer propriedade espectral de H valerá com probabilidade zero ou um. Para detalhes precisos, veja, por exemplo, [Kunz & Souillard].

Definimos, finalmente, $H = -\Delta + V$ por:

$$\begin{aligned} H : \ell_2(\mathbb{Z}^d) &\rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d) \\ f \mapsto H(f) : \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (H(f))(x) &:= -(\Delta(f))(x) + (V(f))(x) \\ &= - \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} f(y) + V(x)f(x) . \end{aligned}$$

Este modelo é conhecido na física do estado sólido como a “aproximação da ligação estreita” (tight binding approximation). Ainda hoje é fonte de diversos problemas em aberto em física matemática, como por exemplo sua extensão ao caso do continuum ou aproximações válidas para “alta energia”, além das adaptações que permitiriam discutir propriedades de transporte e de localização em sistemas desordenados diversos.

Enfatizamos no que segue, que sempre estaremos supondo que g tem densidade limitada, com suporte compacto.

No próximo capítulo, apresentamos os resultados matemáticos necessários para a análise espectral do operador que estudamos neste trabalho.

Capítulo 3

Localização: primeiros resultados matemáticos

Nesta parte crucial, colecionamos as ferramentas matemáticas para a análise espectral estocástica do próximo capítulo. Os resultados essenciais apresentados foram adaptados (inclusive com notação preservada, onde pertinente) de [Reed & Simon; I] e [von Dreifus], principalmente. Por concisão, optamos por remeter o leitor aos trabalhos originais, ao invés de reproduzir as provas e/ou enunciados completos dos fatos profundos que selecionamos.

Antes de começarmos, um comentário adicional: a abordagem escolhida neste trabalho poderia ser diferente? Sim, embora talvez extremamente mais complicada.

Foi um prazer descobrir, na literatura da área, uma obra excepcional, a qual, já na sua introdução, destaca diversas abordagens alternativas para a teoria espectral dos operadores estocásticos (ou aleatórios), com ênfase em operadores que têm espectro discreto; destacamos os métodos: perturbativos, variacionais, assintóticos, de equações integrais, de iteração e hierárquicos. Para detalhes precisos, consulte [vom Scheidt & Purkert]. Neste contexto, o que faremos se encaixa nos métodos iterativos hierárquicos, e usa fortemente a técnica das funções de Green.

Assumimos conhecidos os resultados básicos do cálculo funcional contínuo, como expostos em [Reed & Simon; I], cap. III, Teorema VII.1, por exemplo.

Considere então A , um operador limitado e autoadjunto, definido em $\mathcal{H}$, e $\psi \in \mathcal{H}$. A aplicação:

$$\begin{aligned} C(\sigma(A), \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto (\psi, (f(A))(\psi)) \end{aligned}$$

é um funcional linear positivo, definido em $C(\sigma(A))$, o espaço das funções complexas $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$. Pelo Teorema de Riesz-Markov, *existe uma única* medida (de Baire) μ_ψ no conjunto compacto $\sigma(A)$, tal que

$$(\psi, (f(A))(\psi)) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi .$$

Esta medida μ_ψ é chamada medida espectral (associada ao vetor ψ).

Tais medidas permitem estender o cálculo funcional contínuo ao cálculo funcional boreliano. Não vamos entrar em detalhes. Interessa-nos apenas o fato de que elas podem ser empregadas para fornecer a chamada representação espectral de A . (Grosso modo, todo operador limitado e autoadjunto como A , “é” um operador de multiplicação num espaço de medida conveniente.)

Se $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ é uma família de medidas, o suporte de $\{\mu_n\}$ é dado por

$$\text{supp}\{\mu_n\} = \overline{\bigcup_{n=1}^N \text{supp}\mu_n} .$$

Pode-se provar que se A é autoadjunto e $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ é uma família de medidas espectrais, então,

$$\sigma(A) = \text{supp}\{\mu_n\} .$$

Um uso judicioso do Teorema de Decomposição de Lebesgue (e outros fatos sobre medida em $\mathcal{H}$) permite afinal decompor $\mathcal{H}$ em somas diretas:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pp}} \oplus \mathcal{H}_{\text{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\text{sing}} ,$$

sendo cada um destes subespaços invariantes por A . Mais ainda, quanto às restrições abaixo, temos:

$A|_{\mathcal{H}_{\text{pp}}}$ tem um conjunto completo de autovetores,

$A|_{\mathcal{H}_{\text{ac}}}$ tem apenas medidas espectrais absolutamente contínuas e

$A|_{\mathcal{H}_{\text{sing}}}$ tem apenas medidas espectrais singulares-contínuas.

As belíssimas construções matemáticas atrás deste fatos estão em [Reed & Simon; I]. Finalmente, temos a seguinte

Definição

$$\sigma_{\text{pp}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda \text{ é um autovalor de } A\};$$

$$\sigma_{\text{cont}}(A) = \sigma(A|_{(\mathcal{H}_{\text{sing}} \oplus \mathcal{H}_{\text{ac}}) \equiv \mathcal{H}_{\text{cont}}});$$

$$\sigma_{\text{ac}}(A) = \sigma(A|_{\mathcal{H}_{\text{ac}}});$$

$$\sigma_{\text{sing}}(A) = \sigma(A|_{\mathcal{H}_{\text{sing}}}).$$

Estes conjuntos são, respectivamente, os espectros: puro ponto, contínuo, absolutamente contínuo e singular (ou singular contínuo).

Acertadas estas questões de “terminologia”, voltemos ao nosso velho hamiltoniano, $H = -\Delta + V$.

Diremos que o operador aleatório H *exibe localização num intervalo de energia* I , se H tem espectro puro ponto em I , com probabilidade um, i.e., se:

$$\sigma_{\text{ac}}(H) \cap I = \emptyset = \sigma_{\text{sing}}(H) \cap I .$$

Temos *localização exponencial* em I se tivermos localização e todas as autofunções correspondentes a autovalores em I tiverem decaimento exponencial.

Se $A, B \subset \mathbb{R}$, pomos: $A + B := \{\lambda \in \mathbb{R} | \lambda = a + b; a \in A, b \in B\}$.

Passemos à apresentação dos resultados de [von Dreifus] que usaremos efetivamente.

Teorema 3.1 (Kunz & Souillard)

Se $H = -\Delta + V$, então, com probabilidade um,

$$\sigma(H) = [0, 4d] + \text{supp}(g) .$$

Prova: Veja [Kunz & Souillard]! Num certo sentido, este já é um primeiro resultado de localização.

Teorema 3.2 (Simon & Wolff, 1986)

Considere a função de Green dada por

$$G(E + i\varepsilon; x, y) := (H + (-E - i\varepsilon)\mathbf{1})^{-1}(x, y)$$

e um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sum_x |G(E + i\varepsilon; 0, x)|^2 < +\infty$$

vale para quase todo (q.t.) par ordenado $(V, E) \in \Omega \times I$ (com respeito a P vezes a medida de Lebesgue), então, H tem espectro puro ponto em I .

Prova: Cf. [Simon & Wolff]!

Observações:

- (1) Vamos aderir à notação sugestiva de [von Dreifus] completamente, mas que fique claro de uma vez por todas, que:

$$G(E + i\varepsilon; x, y) = (\delta_x, ((H - (E + i\varepsilon)\mathbf{1})^{-1}(\delta_y)) \text{ .}$$

Também não escreveremos mais o operador $\mathbf{1}$, eventualmente.

- (2) O resultado do teorema acima continua legítimo para um operador autoadjunto A , no lugar de H .

Definimos a seguir uma medida da “intensidade da desordem” (associada ao potencial aleatório V), por

$$\delta = \frac{1}{\sup_V g(V)} \text{ .}$$

Teorema 3.3 (Frölich & Spencer)

Dado $p \geq 1$, existem constantes δ_0, E_0 , tais que se $\delta > \delta_0$ ou $|E| > E_0$, então, para cada $k > 1$,

$$|G(E + i\varepsilon; 0, x)| \leq e^{m(k-\|x\|)} \text{ ,}$$

vale para todo $x \in \mathbb{Z}^d \neq 0$, com probabilidade no mínimo $1 - c_p k^{-p}$, onde c_p e m são constantes reais, estritamente positivas.

Uma versão mais forte do Teorema 3.3 é dada a seguir pelo Teorema 3.4. Antes, algumas notações:

$\Lambda_L(x)$: “cubo” centrado em $x \in \mathbb{Z}^d$, de “lado” $L = 2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

$\partial\Lambda_L(x)$: “fronteira” de $\Lambda_L(x)$;

Λ : região finita de $\mathbb{Z}^d$;

$$H(\Lambda)(x, y) = \begin{cases} H(x, y) & , \text{ se } x, y \in \Lambda, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

($H(x, y)$ é um elemento de matriz que define um operador $H(\Lambda) = H_\Lambda$);

$\partial\Lambda^* = \{(x, y) \mid \|x - y\| = 1 \text{ e } (x \in \Lambda \text{ e } y \notin \Lambda) \text{ ou } (x \notin \Lambda \text{ e } y \in \Lambda)\}$;

Γ_Λ : operador (em $\ell_2(\mathbb{Z}^d) = \mathcal{H}$) cujos elementos de matriz são dados por

$$\Gamma_\Lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } (x, y) \in \partial\Lambda^*, \\ 0 & , \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

$H_{\Gamma_\Lambda} = H + \Gamma_\Lambda$, outro operador;

G, G_{Γ_Λ} e G_Λ : funções de Green de H, H_{Γ_Λ} e H_Λ , respectivamente;

finalmente, todos os operadores definidos acima têm condições de contorno nulas, fora de Λ .

Teorema 3.4 (Frölich, Martinelli, Scoppola, Spencer, 1985)

Dados: $p > 2d$, $\rho_0 \in]0, 1[$, existe $B_p > 0$ tal que se, para algum $L_0 > B_p$ a desigualdade

$$\sum_{y \in \partial\Lambda_{L_0}(x)} \left| G_{\Lambda_{L_0}(x)}(E + i\varepsilon; x, y) \right| \leq \rho_0$$

vale com probabilidade pelo menos $1 - L_0^{-p}$, para todo $\varepsilon \neq 0$, então, para cada $K > 1$ e $m_0 = \frac{-2 \ln(\rho_0)}{L_0}$, a desigualdade

$$|G(E + i\varepsilon, 0, x)| \leq e^{m_0(K - \|x\|)/4}$$

vale para todos x e $\varepsilon \neq 0$, com probabilidade pelo menos $1 - c_p K^{-(p-d)}$.

Prova: Cf. [von Dreifus].

Note a dependência explícita da dimensão.

Em sua tese de doutoramento, von Dreifus, entre outros resultados, obteve uma versão deste teorema (3.4) em “volume finito”, que descrevemos adiante.

Para simplificar a exposição e ter presente em mente o encadeamento lógico do raciocínio necessário, veja o esquema dedutivo original por ele empregado:

$$\begin{aligned} T(3.6) &\stackrel{T(3.5)}{\Rightarrow} T(3.4) \Rightarrow T(3.3) + \text{Lema de Borel-Cantelli} + \text{Teorema de Fubini} \\ &\Rightarrow T(3.2) \Rightarrow \text{localização espectral.} \end{aligned}$$

Alguns ingredientes técnicos para provar as implicações acima serão omitidos aqui, mas, obviamente, estão disponíveis em [von Dreifus]. Os principais, destacamos agora (veja as notações anteriores):

Identidade do Resolvente

$$G = G_{\Gamma_A} + G_{\Gamma_A} \Gamma_A G .$$

Prova: os operadores $(H - E - i\varepsilon)^{-1}$ e $(H_{\Gamma_A} - E - i\varepsilon)^{-1}$ estão bem definidos, dado que H é autoadjunto: $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ e, para $\varepsilon \neq 0$, $E + i\varepsilon \notin \sigma(H)$. Logo, existe $(H - (E + i\varepsilon)1)^{-1}$. Analogamente, para $(H_{\Gamma_A} - E - i\varepsilon)^{-1}$. Além disso, evidentemente,

$$(H_{\Gamma_A} - E - i\varepsilon)^{-1} (H_{\Gamma_A} - E - i\varepsilon) = 1 .$$

Usando então que $H_{\Gamma_\Lambda} = H + \Gamma_\Lambda$ acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & (H_{\Gamma_\Lambda} - E - i\varepsilon)^{-1}(H + \Gamma_\Lambda - E - i\varepsilon) \\ &= (H_{\Gamma_\Lambda} - E - i\varepsilon)^{-1}(H - E - i\varepsilon) + (H_{\Gamma_\Lambda} - E - i\varepsilon)^{-1}\Gamma_\Lambda = \mathbf{1} . \end{aligned}$$

Multiplicando por $(H - E - i\varepsilon)^{-1}$, vem:

$$(H_{\Gamma_\Lambda} - E - i\varepsilon)^{-1}\mathbf{1} + (H_{\Gamma_\Lambda} - E - i\varepsilon)^{-1}\Gamma_\Lambda(H - E - i\varepsilon)^{-1} = (H - E - i\varepsilon)^{-1} ,$$

o que, em termos de funções de Green, permite escrever

$$G_{\Gamma_\Lambda} + G_{\Gamma_\Lambda}\Gamma_\Lambda G = G .$$

Explicitamente, pela definição de Γ_Λ ,

$$G(E + i\varepsilon; x, y) = G_{\Gamma_\Lambda}(E + i\varepsilon; x, y) + \sum_{(z, z') \in \partial\Lambda^*} G_{\Gamma_\Lambda}(E + i\varepsilon; x, y) G(E + i\varepsilon; z', y) ,$$

pois se $\partial\Lambda$ separa x de y , então

$$G_{\Gamma_\Lambda}(E + i\varepsilon, x, y) = 0 .$$

Qed //

Teorema 3.5 (Wegner)

Considere $V = \{V(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$, $H = -\Delta + V$, como antes, e $W \in \mathbb{R}_+^*$. Então,

$$\text{Prob}(\text{dist}(\sigma(H(\Lambda)), E) \leq W^{-1}) \leq 2W^{-1} \sup g|\Lambda|$$

e este resultado implica que:

$$\text{Prob}(|G_\Lambda(E + i\varepsilon; x, y)| \geq W) \leq 2W^{-1} \sup g|\Lambda| ,$$

onde $|\Lambda|$ representa o “volume” (d -dimensional) da região finita Λ . Esta última desigualdade é fundamental.

Prova: Cf. [von Dreifus].

Finalmente, temos o

Teorema 3.6 (von Dreifus)

Dados $p > 2d$ e $\rho_0 \in]0, 1[$, existe B_p tal que se para algum $L_0 > B_p$ a desigualdade

$$\sum_{y \in \partial \Lambda_{L_0}(x)} \left| G_{\Lambda_{L_0}(x)}(E + i\varepsilon; x, y) \right| \leq \rho_0$$

vale com probabilidade pelo menos $1 - L_0^{-p}$, para todo $\varepsilon \neq 0$, então, para $m_0 = -2 \log(\rho_0)/L_0$, a desigualdade

$$|G_\Lambda(E + i\varepsilon; x, y)| \leq \exp(-m_0 \|x - y\|/4)$$

vale (para todo $\varepsilon \neq 0$ e $x, y \in \Lambda$ tais que $\text{dist}(x, \partial \Lambda) \geq \|x - y\| \geq \ell \geq \frac{L_0}{2}$), com probabilidade pelo menos $1 - c_g |\Lambda| \ell^{-p}$, onde c_g é uma constante positiva, dependente da distribuição g .

Na abordagem de von Dreifus, o Teorema de Wegner é usado na prova de que $T(3.6) \Rightarrow T(3.4)$, com um argumento iterativo que procuramos seguir de perto no próximo capítulo, *mutatis mutandis*. Ainda em [von Dreifus], todo o Capítulo 4 é dedicado ao estabelecimento do Teorema 3.6, através de um argumento combinatorial surpreendente, que consiste essencialmente em usar técnicas de “rescaling”, exposto numa série de lemas extremamente técnicos.

Capítulo 4

$\sigma_{\text{pp}}(\Delta^2 + V)$: localização probabilística

Finalmente, de posse de toda a linguagem apresentada, bem como dos resultados técnicos do Capítulo 3, vamos estudar a localização espectral de um operador linear, autoadjunto, limitado e aleatório, do tipo $H = \Delta^2 + V$ (que atua em $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{Z}^d)$). Nosso interesse é o espectro puro ponto, $\sigma_{\text{pp}}(H)$.

Começemos com uma observação inicial. Para que $H := \Delta^2 + V$ seja considerado um operador hamiltoniano, i.e., associado à energia total do sistema, tacitamente admitiremos que Δ^2 está multiplicado por uma constante ($= 1!$) que “acerta” as unidades. Na “verdade”, o que desejamos é levar em consideração a interação dos

segundos sítios mais próximos do ponto x , e não apenas dos pontos $y \in \mathbb{Z}^d$ tais que $\|y - x\| = 1$, como no caso $-\Delta + V$ anterior. Explicitamente, calculemos $((\Delta)^2(f))(x)$. Temos, resgatando a contribuição “diagonal”:

$$\begin{aligned}
\Delta(\Delta f)(x) &= \Delta \left\{ \left(\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} f(y) \right) - 2df(x) \right\} \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} \Delta f(y) - 2d\Delta f(x) \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} \left\{ \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ \|z-y\|=1}} f(z) - 2df(y) \right\} - 2d \left\{ \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} f(y) - 2df(x) \right\} \\
\Rightarrow (\Delta^2 f)(x) &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ \|z-x\|=2}} f(z) - 4d \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ \|y-x\|=1}} f(y) + \text{contribuição diagonal},
\end{aligned}$$

que “absorvemos” no potencial $V(x)$. Veja a figura 4.1.

Figura 4.1: para $d = 1$.

Como fica a identidade do resolvente para $H = \Delta^2 + V$? Observe a figura 4.2.

L é um parâmetro a ser escolhido adiante.

Lembremos que Λ é um “cubo” de volume finito. Temos que, neste caso, $\Delta_\Lambda^2 := (\Delta_L)^2 + (\Gamma_L)$ e estes operadores são (representados por) matrizes (do tipo diagonais de bandas), simétricas, cujo aspecto obviamente depende de como enumeramos os pontos da rede. Para $d = 1$, temos uma matriz tridiagonal, em geral. Explicitamente

Figura 4.2: para $d = 2$.

(para $d = 2$),

$$(\Delta^2)_{u,v} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \|u - v\|' > 2 \\ 1 & , \text{ se } \|u - v\|' = 2 \\ -4 & , \text{ se } \|u - v\|' = 1 \\ 0 & , \text{ se } \|u - v\|' = 0, \end{cases}$$

$(u, v = 1, \dots, "|\Lambda|")$. (A norma $\|\cdot\|'$ acima reflete o fato de que empregamos uma enumeração na qual os sítios 1 e $L + 1$ são vizinhos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & L \\ L+1 & & & \dots & 2L \\ 2L+1 & & & \dots & 3L \\ 3L+1 & & & \dots & 4L \\ \vdots & & & & \\ \dots & & & & |\Lambda| \times |\Lambda| \end{array}$$

Definição de Γ_L : ($d = 1$ neste exemplo).

$$(\Gamma_L(x))_{u,v} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } (U, V) \notin \partial\Lambda_L(x) \\ 1 & , \text{ se } (u, v) \in \partial\Lambda_L(x) \text{ com } \|u - v\| = 2 \\ -4 & , \text{ se } (u, v) \in \partial\Lambda_L(x) \text{ com } \|u - v\| = 1, \end{cases}$$

onde

$$\partial\Lambda_L(x) = \{(a, b) \mid \|a-b\| \leq 2, (a \in \Lambda_L(x) \text{ e } b \notin \Lambda_L(x)) \text{ ou } (b \in \Lambda_L(x) \text{ e } a \notin \Lambda_L(x))\}$$

e

$$\Lambda_L(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid \|x - y\| \leq L\} .$$

Como antes, as condições de fronteira são de Dirichlet.

Voltemos ao tratamento abstrato. Precisamos produzir um novo aspecto da identidade do resolvente para $H = \Delta^2 + V$. Vamos usar a notação sugestiva e *mais conveniente*:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + V - E - i\varepsilon)^{-1}(x, y) &= \frac{1}{((\Delta_L)^2 + \Gamma_L(x)) + V - E - i\varepsilon}(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_L + V - E - i\varepsilon} + \frac{1}{(\Delta_L)^2 - E - i\varepsilon} \Gamma_L \right) \left(\frac{1}{(\Delta_L)^2 - E - i\varepsilon} \right) (x, y) . \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) &= \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \\ &+ \sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(x)} \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \Gamma_L(t, s) \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(s, y) \end{aligned}$$

O resultado acima é o ingrediente principal do que segue.

Vejamos o que ocorre já no caso determinístico. Temos o seguinte

Teorema 4.1 *Para todo $x \in \Lambda$, fixado,*

$$\begin{aligned} &\sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(x)} \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \Gamma_L(t, s) \right| \leq \delta < 1 \\ \Rightarrow &\left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right| \leq \delta \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(\bar{s}, y) \right| , \end{aligned}$$

onde tomamos o parâmetro δ como sendo do tipo $\delta = e^{-m_0 L}$, onde $m_0 > 0$ será especificado adiante,

$$\partial\Lambda_L(x) = \{(s, t) \mid s \in \Lambda_L(x), t \notin \Lambda_L(x), (\Delta_L)^2(s, t) = (\delta_s, (\Delta_L)^2 \delta_t) \neq 0\} .$$

Prova: tomando valor absoluto na identidade do resolvente acima, majorando convenientemente, vem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right| &\leq \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right| \\ &+ \sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(x)} \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \right| |\Gamma_L(t, s)| \left| \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(s, y) \right| \\ &\leq \delta \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(\bar{s}, t) \right|, \end{aligned}$$

onde lembramos que $\Delta_L = \Delta_\Lambda - \Gamma$, $\Gamma_L(s, t) = 0$, se $(s, t) \in \Lambda_L^*(x)$ e o termo $\frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y)$ se anula, para y “fora” de $\Lambda_L(x)$ e $\bar{s} \in \partial\Lambda_L(x)$ é escolhido tal que

$$\left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(s, t) \right| \leq \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(\bar{s}, t) \right|,$$

$\forall s \in \partial\Lambda_L^{\text{ext}}(x)$ = “exterior” do cubo $\Lambda_L(x)$ em Λ . (Lembre que estamos assumindo condições de Dirichlet!). Qed //

Lema 4.1 *Se*

$$\sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(x)} \left| \frac{1}{(\Delta_L(x))^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \Gamma_L(t, s) \right| \leq \delta < 1,$$

para qualquer $x \in \Lambda$, então:

$$\left| \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right| \leq \text{cte.} \delta^{\|x-y\|/L} \max_{(w,z) \in \Lambda} \left| \frac{1}{(\Delta_\Lambda)^2 + V - E - i\varepsilon}(w, z) \right|,$$

onde L é tal que L^d = “Volume” = $|\Lambda|$ (veja Figura 4.3).

Prova: é uma consequência do Teorema 4.1, iterativamente aplicado:

$$\begin{aligned} |G_\Lambda(E + i\varepsilon, x, y)| &\leq \delta |G_\Lambda(E + i\varepsilon; \bar{s}, y)| \leq \delta \delta |G_\Lambda(E + i\varepsilon; \bar{\bar{s}}, y)| \\ &\leq \delta^2 \delta |G_\Lambda(E + i\varepsilon; \bar{\bar{\bar{s}}}, y)| \leq \dots \leq \text{cte.} \delta^{\|x-y\|/L} \end{aligned}$$

Figura 4.3: para $d = 2$.

(esta constante depende, é claro, da distância de x a y).

Qed //

Faremos a seguir uma

Hipótese Adicional (H.A.)

$$\max_{w,z \in \Lambda} \left| \frac{1}{[(\Delta_L)^2 + V] - E - i\varepsilon}(w, z) \right| \leq |\Lambda|^p ,$$

onde p será especificado depois. Lembre que o volume é finito e que então é possível uma majoração deste tipo. Com isto, modificamos o lema anterior, obtendo o

Lema 4.2 ($x \in \Lambda$, arbitrário)

$$\begin{aligned} & \sum_{(s,t) \in \partial_{\Lambda_L}^*(x)} \left| \frac{1}{(\Delta_L(x))^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \Gamma_L(t, s) \right| \leq \delta < 1 \\ \Rightarrow & \left| \frac{1}{(\Delta_L(x))^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right| \leq \text{cte. } \delta^{\|x-y\|/L} \max_{w,z \in \Lambda} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(x)})^2 + V - E - i\varepsilon}(w, z) \right| \\ \Rightarrow & \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon}(0, y) \right| \leq \text{cte. } \delta^{\|y\|/L} L^{pd} , \end{aligned}$$

$$(|\Lambda| = L^d = \text{Vol.}).$$

Prova: Adapte a notação do Lema 4.1 a H.A.!

Considere, agora, $\alpha > 1$, tal que $L = \ell^\alpha$.

Multiplicando a última desigualdade do Lema 4.2 pelo valor absoluto do elemento de matriz $\Gamma_\Lambda(y, z)$, podemos escrever:

$$\left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon}(0, y) \right| |\Gamma_{\Lambda_L(0)}(y, z)| \leq \delta^{\lceil \|y\|/\ell \rceil} L^{pd} |\Gamma_{\Lambda_L(0)}(y, z)| ,$$

desigualdade válida para todo y , inclusive para $y \in \Lambda_{L(0)}$, pela hipótese adicional.

$[x]$ indica a função “maior inteiro” menor do que x . Particularizando, obtemos a

seguinte sucessão de desigualdades:

$$\begin{aligned}
& \sum_{(y,z) \in \partial \Lambda_{L(0)}^*} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon} (0, y) \right| |\Gamma_{\Lambda_{L(0)}}(y, z)| \\
& \leq \sum_{(y,z) \in \partial \Lambda_{L(0)}^*} \delta^{\|y\|/\ell} L^{pd} |\Gamma_{\Lambda}(y, z)| \\
& \leq \sum_{(y,z) \in \partial \Lambda_{L(0)}^*} \delta^{cL/\ell} L^{pd} k ,
\end{aligned}$$

(onde escolhemos as novas constantes $\|y\| = cL \leq dL$ (c depende da dimensão d) e $|\Gamma_{\Lambda}(y, z)| \leq k$)

$$\leq c_1 L^{d-1} \delta^{cL/\ell} L^{pd} k 2d L^{d-1} ,$$

(onde $c_1 = \sum_{(y,z) \in \partial \Lambda_{L(0)}^*} 1$, $2d$ representa o número de “hiperfaces” sobre as quais escolhemos (y, z))

$$\leq \underbrace{c(d, k) L^q}_{\text{cte.}} e^{-mL} < 1 ,$$

(onde $q = pd + d - 1$, $-m = \ln(\delta)c/\ell$),

$$\leq d^{(-m_1 L)} < 1 ,$$

onde m_1 é definido por ser a maior constante positiva que torna a desigualdade verdadeira.

Conclusão: (veja a hipótese do Teorema 4.1)

$$\begin{aligned}
& \sum_{(s,t) \in \partial \Lambda_L^*(0)} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon} \Gamma_L(s, t) \right| \leq \underbrace{\epsilon^{-m_0 L}}_{=\delta} \\
\Rightarrow & \sum_{(w,z) \in \partial \Lambda_L^*(0)} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon} \Gamma_{\Lambda_{L(0)}}(w, z) \right| \leq \epsilon^{-m_1 L} ,
\end{aligned}$$

onde $m_1 < m_0$.

Se $m_1 > 0$, repetimos tudo, definindo um m_2 , etc:

$$\begin{aligned} & \sum_{(s,t) \in \partial \Lambda_{L(0)}^*} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon} \Gamma_{st} \right| \leq e^{-m_0 L_0} \\ \Rightarrow & \sum_{(w,z) \in \partial \Lambda_{L(0)}} \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_L(0)})^2 + V - E - i\varepsilon} \Gamma_{wz} \right| \leq e^{-m_1 L_1} \Rightarrow \dots, \end{aligned}$$

onde, para as etapas adiante, temos $L_n = L_{n-1}^\alpha$, para algum $\alpha > 1$, $L_0 = \ell$; $m_n > 0 \Rightarrow$ iteração válida para m_{n+1} .

Temos então:

$$\begin{aligned} e^{-m_{n+1}L} &= \text{cte.} L^p e^{-m_n L} = e^{\ln(L^{p+1}) - m_n L} \\ &= e^{-(m_n - (p+1) \ln(L_{n+1})/L_{n+1})L} . \end{aligned}$$

Note que $\ln(L_{n+1})/L_{n+1}$ tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$.

Finalmente, note que obtemos algo análogo ao Teorema 3.6, neste caso determinístico. Pela argumentação lá exposta, segue então a localização espectral.

Vamos agora provar essencialmente a mesma coisa, tomando estimativas probabilísticas “bem escolhidas” (cf. com o teorema de Wegner, do capítulo anterior).

Vamos colocar a

Hipótese extra (probabilística)

$$P(|G_\Lambda(E + i\varepsilon; x, y)| \leq W = L^p) \geq 1 - 2W^{-1} \sup_V g(V) |\Lambda| = 1 - 2 \sup_V g(V) \frac{|\Lambda|}{L^p} ,$$

para algum p ou,

$$P(|G_{\Lambda_L}(E + i\varepsilon; x, y)| \leq L^p) \geq 1 - 2 \sup_V g(V) \frac{L^d}{L^p} .$$

Lembre que, no caso de desordem “grande”, a hipótese probabilística original é

$$P \left(\sum_{(s,t) \in \partial \Lambda_{L_0}^*} |G_{\Lambda_{L_0}}(E + i\varepsilon; x, y)| |\Gamma_{\Lambda_{L_0}}(s, t)| \leq e^{-m_0 L_0} \right) \geq 1 - L_0^{-q} .$$

Se conseguirmos reescrever a *conclusão* do Teorema 3.6 (no nosso contexto) na forma *conveniente* abaixo, o problema da localização espectral fica resolvido, pois, $T(3.6) \Rightarrow T(3.4)$ e, como já afirmado, empregando o lema de Borel-Cantelli e o teorema de Fubini, verificam-se as hipóteses do $T(3.2)$ (Simon & Wolff), de onde segue a localização:

$$P(G_\Lambda(E + i\varepsilon; x, y) \leq e^{-(m_0/4)\|x-y\|}) \geq 1 - C_g |\Lambda| \ell^{-p} ,$$

onde: $\frac{L_0}{2} \leq \ell \leq \|x - y\| \leq \text{dist}(x, \partial\Lambda_{\ell(0)})$ e C_g é uma constante associada a g .

Observe a Figura 4.4.

Considere o evento (*dependente de realizações do potencial V*):

$$E_z := \left(\sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_\ell^*(z)} |G_{\Lambda_\ell(0)}(E + i\varepsilon, z, t)| |\Gamma_{\Lambda_\ell(0)}(t, s)| \leq e^{-m_0 L_0} , \right.$$

$\forall z, t \in \Lambda_{2L(0)}$, deve implicar, juntamente com a hipótese extra, que:

$$|G_{\Lambda_{2L(0)}}(E + i\varepsilon, 0, y)| \leq e^{-m_1 L} \Big) .$$

Vejamos com que probabilidade E_z ocorre. Temos, num primeiro cálculo, que:

$$P(\{V|E_z \text{ ocorre}\}) = (1 - L_0^{-q}) = 1 - \ell^{-q} .$$

Daí,

$$P\left(\bigcap_z E_z\right) = 1 - P\left(\bigcup_z E_z^c\right) .$$

Por subaditividade,

$$P\left(\bigcup_z E_z^c\right) \leq \sum_z \underbrace{P(E_z^c)}_{=\ell^{-q}}$$

e daí,

$$P\left(\bigcap_z E_z\right) = 1 - |\Lambda| \ell^{-q} ,$$

Figura 4.4: para $d = 2$.

o que não é conveniente, já que $|\Lambda| \rightarrow +\infty$, no caso de interesse. Considere então $\tilde{E} := (E_z \text{ é verificado para todo } z \in \Lambda_{2L} \text{ a menos de um sítio, } \bar{z})$. Temos: (aqui usamos que $V(x)$ são v.a.i.i.d.!)

$$P(\tilde{E}) = (1 - (1 - \ell^q))(1 - (1 - \ell^q)) = \ell^{-2q} ,$$

para z e $\bar{z}$ fixados. Como

$$P(\tilde{E}) = 1 - P(\tilde{E}^c) ,$$

por subaditividade, vem:

$$1 - P(\tilde{E}^c) \geq 1 - |\Lambda|^2 \ell^{-2q} = 1 - (2L)^{2d} \ell^{-2q} = 1 - (2L)^{2d} \frac{1}{\ell^{2q}} .$$

Agora, se

$$L = \ell^\alpha , \quad (2L)^{2d} \frac{1}{\ell^{2q}} = 2^{2d} L^{2d - \frac{2q}{\alpha}} \leq L^{-q} ,$$

onde $2d - \frac{2q}{\alpha} \leq -q$, então, $2d \leq (2 - \alpha)q$ e, portanto, q e α satisfazem: $q > \frac{2d}{2 - \alpha}$, o que fornece a estimativa: $P(\tilde{E}) \geq 1 - \frac{1}{L^q} \frac{1}{2}$. Da conclusão da estimativa determinística, a desigualdade:

$$\left| G_{\Lambda_{2L}(0)}(E + i\varepsilon, 0, y) \right| \delta^{2\|y\|/\ell} \leq L^p$$

ocorre com probabilidade $1 - 2 \sup_V g(V) \frac{L^d}{L^p}$.

Assim, se escolhermos p tal que $2 \sup g \frac{L^d}{L^p} \leq \frac{1}{2L^q}$, para expoentes $p > d + q$, obtemos:

$$P \left(\left| G_{\Lambda_{2L}(0)}(E + i\varepsilon, 0, y) \right| \leq e^{-m_1 L} \right) \geq 1 - \frac{1}{L^q} ,$$

uma conclusão válida para tais escolhas convenientes (de p , α , q), pelo teorema de Wegner.

Veja que, da identidade do resolvente, vem:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(\Delta_{\Lambda_{2L}(0)})^2 + V - E - i\varepsilon}(0, y) \right| = \left| \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(x)} \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(x, t) \frac{1}{(\Delta_L)^2 + V - E - i\varepsilon}(s, y) \right| \\
& \Rightarrow \left| G_{\Lambda_L(0)}(E + i\varepsilon; x, y) \right| \leq \left| G_{\Lambda_{2L}(0)}(0, y) \right| \\
& \quad + \sum_{(s,t) \in \partial\Lambda_L^*(0)} \left| G_{\Lambda_{2L}(0)}(E + i\varepsilon, 0, t) \right| \left| G_{\Lambda_L(0)}(E + i\varepsilon, s, y) \right| ,
\end{aligned}$$

ou seja, repetindo de novo o argumento, passamos de $2L$ a L .

Se no processo alguma realização de V contrariar as escolhas num ponto z , recomeçamos, da “fronteira” para o ponto z , conforme a Figura 4.5.

Então, as hipóteses do Teorema 3.6 estando verificadas também no caso probabilístico, pelo exposto no capítulo anterior, o Teorema 3.2 (Simon & Wolff) permite concluir que $\sigma_{\text{pp}}(H)$ está localizado em I , como queríamos estabelecer.

Observe que na argumentação toda, foi crucial o fato de que g tem *densidade limitada*. Em particular, g poderia ser “gaussiana” ou mesmo uniforme, em um intervalo compacto, como no modelo original de Anderson.

Figura 4.5: para $d = 2$.

Referências bibliográficas

- [Cycon, etc.] Cycon, H.L.; Froese, R.G.; Kirsch, W.; Simon, B. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [Debnath & Mikusiński] Debnath, L.; Mikusiński, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1990.
- [von Dreifus] von Dreifus, H. *On the Effects of Randomness in Ferromagnetic Models and Schrödinger Operators*. Ph.D. Thesis, New York University, NY, 1987.
- [von Dreifus & Klein] von Dreifus, H.; Klein, A. A New Proof of Localization in the Anderson Tight Binding Model. *Comm. Math. Phys.*, **124**, 1989, p.285.
- [Hönl] Hönl, C.S. *Análise Funcional e Aplicações*. V. I & 2. IME-USP, São Paulo, 1970.
- [Kunz & Souillard] Kunz, H.; Souillard, B. Sur le Spectre des Opérateurs aux Différences Finies Aléatoires. *Comm. Math. Phys.*, **78**, 1980, p.201.
- [Landau & Lifshitz] Landau, L.; Lifshitz, E. *Mecânica Quântica - Teoria Não Relativista*. Editora Mir, Moscou, 1985.
- [Mackey] Mackey, G.W. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. The Benjamin-Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1980.
- [Martinelli & Scopolla] Martinelli, F.; Scopolla, E. *Introduction to the Mathematical Theory of Anderson Localization*. Università "La Sapienza", Roma, Itália.

- [Papanicolaou] Papanicolaou, G. (ed.) *Random Media*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Reed & Simon; I] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, Inc., New York, 1972.
- [Reed & Simon; IV] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, IV: Analysis of Operators*. Academic Press, Inc., New York, 1978.
- [vom Scheidt & Purket] vom Scheidt, J.; Purket, W. *Random Eigenvalue Problems*. North Holland, 1983.
- [Simon & Wolff] Simon, B.; Wolff, T. *Singular Continuous Spectrum under Rank One Perturbations and Localization for Random Hamiltonians*. *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**, 1986, p.75.
- [Spencer] Spencer, T.C. *The Schrödinger Equation with a Random Potential - A Mathematical Review*. Les Houches, Session XLIII, 1984, Elsevier Science Publishers, 1986.