**A conjectura de Roldán
para álgebras inclinadas iteradas
de tipo euclideo**

Sonia Elisabet Trepode

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTORA EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

*Durante a elaboração deste trabalho,
a autora recebeu apoio financeiro da CNPq, CAPES e UNMDP*

-São Paulo, dezembro de 1995-

**A conjectura de Roldán
para álgebras inclinadas iteradas
de tipo euclidiano**

Este exemplar corresponde à redação final

da tese devidamente corrigida e

defendida por Sonia Elisabet Trepode

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt - IME - USP
- Prof. Dr. Alfredo Rosalio Jones Rodrigues- Univ. de la Republica-URUGUAY.
- Prof. Dra. Maria Inés Platzeck - Univ. Nac. del Sur-ARGENTINA.
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC-UNICAMP

*ao meu filho Sebastian
pela sua infinita paciência*

Hubo un Jardín o fue el Jardín un sueño?

....Y, sin embargo es mucho haber amado,

Haber sido feliz, haber tocado

El viviente Jardín, siquiera un día.

Jorge Luis Borges

Abstract

The objective of this work will be to study the validity of the following conjecture due to Roldán on iterated tilted algebras.

Let Q be a quiver without oriented cycles such that Q is not a Dynkin quiver.

Conjecture: Let B a representation-finite iterated tilted algebra of type Q , then there exist sequences of separating tilting modules $T'_0, \dots, T'_{m-1}$ and algebras $B_0, \dots, B_m$, where $B_i = \text{End}_{B_{i-1}} T'_{i-1}$ with $B_0 = B$, $B_m = kQ$ and B_{m-1} representation-finite.

It follows from the definition of separating tilting modules that all algebras B_i are representation-finite. This would mean that the tilting process could be carried out only involving representation-finite algebras.

We shall study this conjecture here only for iterated tilted algebras of Euclidean type.

We show that the conjecture is true for iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$.

For iterated tilted algebras of type $\tilde{D}_n$, $n \geq 4$, or $\tilde{E}_p$, $p = 6, 7, 8$ we show the following weak version of the conjecture:

Theorem: Let A be an iterated tilted algebra of type Q , where $Q = \tilde{D}_n$ or $\tilde{E}_p$. If A is representation-finite, then there exist sequences of tilting modules $T_1, \dots, T_m$ and algebras $A_0, \dots, A_m$, such that $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_i$, $A_0 = A$, $A_m = k\tilde{D}_n$ and A_i representation-finite for all $i \neq m$.

Note that in the above theorem the tilting modules are not necessarily separating, but in every step the torsion theories associated with the tilting modules are cofinite in $\text{mod } A_i$.

Resumo

O objetivo deste trabalho será estudar a validade da seguinte conjectura devida a Roldán referente a álgebras inclinadas iteradas.

Seja Q uma aljava sem circuitos orientado que não é um diagrama de Dynkin.

Conjectura: Seja B uma álgebra inclinada iterada de tipo de representação finito de tipo Q , então existem sequências de módulos inclinantes separantes $T'_0, \dots, T'_{m-1}$ e álgebras $B_0, \dots, B_m$, onde $B_i = \text{End}_{B_{i-1}} T_{i-1}$ com $B_0 = B$, $B_m = kQ$ e B_{m-1} de tipo de representação finito.

Observe que segue do enunciado da conjectura, que nesse caso todas as álgebras B_i são de tipo de representação finito. Isto significa que o processo inclinante poderia ser levado a cabo só envolvendo álgebras de tipo de representação finito.

Nós trabalhamos esta conjectura para álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideano.

Mostramos que a conjectura é satisfeita para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$.

Para as álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$, $n \geq 4$, $\tilde{E}_p$, $p = 6, 7, 8$ mostramos a seguinte versão mais fraca da conjectura:

Teorema: Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo Q , onde $Q = \tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$. Se a álgebra A é de tipo de representação finito então existem sequências de módulos inclinantes $T_1, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$, $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_i$, $A_0 = A$, $A_m = k\tilde{D}_n$ ou $k\tilde{E}_p$ e A_i de tipo de representação finito para todo $i \neq m$.

Observe que aqui os módulos inclinantes não são necessariamente separantes, mais a suas teorias de torção associadas são cofinitas em cada passo.

Agradecimentos

Gostaria de manifestar o meu agradecimento a todos os que ajudaram para que este trabalho fosse possível. Em primeiro lugar queria agradecer ao Brasil pela possibilidade que me foi dada de fazer o doutorado neste país. Em particular ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e a todos os seus professores que contribuíram a minha formação.

Ao grupo de representações de álgebras de este instituto pelo seu constante incentivo, e por fazer possível o contacto com pesquisadores da área de primeira linha; já seja trazendo eles aqui no Brasil ou possibilitando a minha participação em conferências internacionais.

Ao meu orientador o professor Flávio Coelho pelo seu apoio na realização deste trabalho, por discussões úteis e comentários interessantes que muitas vezes me salvaram do erro. Pela cuidadosa revisão do trabalho, e por ter convertido uma longerrima aproximação ao português em um português razoável.

Ao o professor Ibrahim Assem pelo estímulo, por interessantes sugestões sobre o problema, e pela sua excelente disposição para responder a minhas inquietudes em qualquer momento.

Ao professor José Antonio de la Peña por observações interessantes durante sua estada no Brasil.

À professora Maria Inés Platzeck pelo estímulo ao início da minha carreira na Argentina, e por discussões interessantes durante sua estada no Brasil.

Ao professor Héctor Merklen por ter-me transmitido a sua paixão pela matemática, e pela sua paciência em atender a todas minhas consultas pelos corredores do IME.

A meus professores da Universidad de Mar del Plata que me iniciaram na matemática. Em particular ao professor Horacio O'Brien pelo apoio e incentivo em momentos difíceis, e por ter-me transmitido o prazer de estudar álgebra.

A meus compatriotas Patricia e Marcelo, amigos de tantas horas, com os quais demos os primeiros passos na matemática, pela sua constante força, pelo apoio moral e por prestar ouvidos a minhas conversas de matemática quando este trabalho era só uma idéia. Ao Pedro que impulso a nossa vinda para o Brasil, e que constitui nosso líder espiritual dentro da matemática.

Em geral a todos os meus amigos e colegas, brasileiros e latino-americanos que fizeram mais prazerosa a minha estada no Brasil.

Ao meu filho Sebastian, sem cuja paciência e compreensão todo este trabalho não teria sido possível. À minha família pelo constante estímulo e apoio.

Muito obrigada a todos.

Conteúdo

1	Introdução	3
1	Álgebras inclinadas e Álgebras inclinadas iteradas	7
1.1	Preliminares	7
1.1.1	Álgebras de dimensão finita e Aljavas com relações	7
1.1.2	Módulos e Representações de Álgebras	9
1.1.3	Sequências e Aljavas de Auslander-Reiten	10
1.1.4	Álgebras hereditárias	17
1.2	O processo inclinante	19
1.2.1	Álgebras disfarçadas	25
1.3	Álgebras inclinadas iteradas	29
1.3.1	Álgebras inclinante-coinclinante equivalentes	29
1.3.2	Alargamentos por ramos de uma álgebra mansa disfarçada	31
2	A conjectura de Roldán no caso $\tilde{A}_n$	41
2.1	A conjectura de Roldán	41
2.2	Álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$	42
2.3	Observações sobre módulos inclinantes	44
2.4	Álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$	58
2.5	A prova da conjectura no caso $\tilde{A}_n$	61
3	Álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$	72
3.1	Reflexões e o processo inclinante	72

3.2	Álgebras Simplesmente Conexas e a Condição (s)	75
3.3	Algumas reflexões de um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada por vértices dos ramos	82
3.4	Um algoritmo para transformar a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{IE}_p$	93
4	A conjectura de Roldán nos casos $\tilde{D}_n$ e $\tilde{IE}_p$	110
4.1	Alguns lemas preliminares	110
4.2	Análise da existência de fontes fortes numa álgebra mansa disfarçada . . .	115
4.3	Um critério para testar a validade da versão fraca da conjectura	120
4.4	A prova da versão fraca da conjectura para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{IE}_p$	125
4.5	Apêndice: Álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{IE}_8$	135

Introdução

A teoria de representações de álgebras estuda as álgebras por meio de suas categorias de módulos. No contexto mais geral tal teoria estuda a categoria de módulos finitamente gerados à direita (ou à esquerda) sobre uma álgebra de Artin, isto é um anel artiniano finitamente gerado sobre o seu centro que é um anel artiniano. Nós trabalharemos num contexto mais restrito que é o contexto das álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Nesse contexto as álgebras estão associadas com certos grafos orientados que chamaremos de aljavas e os módulos sobre tais álgebras estão associados com representações das aljavas correspondentes.

Um dos problemas clássicos na teoria de representações é dada uma álgebra descobrir qual é o tipo de representação dela. Isto é saber qual é o número de classes de isomorfia de módulos indecomponíveis sobre a álgebra. Descobrir se esse número é finito, ou no caso de ser infinito, se os módulos indecomponíveis podem ser de alguma maneira parametrizados. Esta última classe de álgebras é a classe das álgebras mansas e constitui uma das principais linhas de pesquisa dentro da teoria de representações de álgebras na atualidade.

As álgebras hereditárias (aquelas em que submódulo de projetivo é projetivo) foram longamente estudadas e totalmente classificadas. Gabriel no teorema que leva o seu nome caracterizou as álgebras hereditárias de tipo finito como as álgebras associadas aos diagramas de Dynkin. Mais tarde Nazarova e outros mostraram que as álgebras hereditárias mansas estão caracterizadas como as associadas ao diagramas de Dynkin estendidos, também conhecidos como aljavas de tipo euclideano.

Outra das linhas que tem tido maior crescimento nos últimos 15 anos tem sido a teoria inclinante a qual teve sua motivação na teoria de equivalência de Morita. Muitas vezes a categoria de módulos de uma álgebra é difícil de estudar diretamente, nesse caso gostaríamos de substituir nossa álgebra por outra mais simples, e transferir nosso problema a um problema sobre a nova álgebra. Isto ocorre no caso do clássico teorema de equivalência de Morita. Este último teorema não é de muita utilidade na teoria de representações já que nenhuma mudança acontece a nível de categorias de módulos quando duas álgebras são Morita equivalentes. A idéia principal da teoria inclinante é dada uma álgebra construir um módulo tal que a categoria de módulos de sua álgebra de endomorfismos seja próxima da categoria de módulos da álgebra original, mas em geral que não seja equivalente.

Já que as categorias de módulos das álgebras hereditárias são bem conhecidas surge então a idéia de aproveitar este conhecimento e transferi-lo através da teoria inclinante. O germen da teoria inclinante aparece no artigo de Bernstein, Gelfand e Ponomarev onde eles dão uma prova alternativa para o teorema de Gabriel de classificação das álgebras hereditárias de tipo finito. Em tal prova eles introduzem uns funtores chamados funtores de Coxeter. Posteriormente Auslander, Platzeck e Reiten deram uma formulação homológica destes funtores de Coxeter e introduziram o que é hoje conhecido como módulo

APR-inclinante. Nós utilizaremos estes módulos reiteradamente ao longo deste trabalho. Em 1980 Brenner e Butler apresentam a primeira definição formal de módulo inclinado, e mostram o hoje conhecido como teorema de Brenner e Butler.

Dado um A -módulo inclinado T ele tem associadas duas teorias de torção, uma $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ na categoria $\text{mod} A$, e outra $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ na categoria $\text{mod} B$, onde B é a álgebra de endomorfismos do módulo inclinado T . O teorema de Brenner e Butler mostra a existência de duas equivalências de subcategorias entre as categorias de módulos das respectivas álgebras. Isto é, existem duas equivalências parciais de subcategorias tais que $\mathcal{T} \cong \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} \cong \mathcal{X}$. Este teorema constitui a base da teoria inclinada. Se o módulo inclinado tiver propriedades suficientemente boas, a informação sobre a categoria de módulos é transportada de uma álgebra para a outra. Dizemos que um A -módulo inclinado é separante se a teoria de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cobre toda a categoria de módulos da álgebra. É aqui que aparece o conceito de álgebra inclinada. Uma álgebra é dita inclinada se existir um módulo inclinado sobre ela tal que sua álgebra de endomorfismos é hereditária. Hoshino mostrou que se um módulo inclinado tem essa propriedade ele é necessariamente separante. Desta maneira se A é uma álgebra inclinada existe um A -módulo inclinado T_A tal que $H = \text{End}_A T$ é uma álgebra hereditária. Como T_A é um módulo inclinado separante, sua teoria de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cobre toda a categoria $\text{mod} A$. Isto implica que todo A -módulo indecomponível pertence a $\mathcal{T}$ ou pertence a $\mathcal{F}$. Segue que todo A -módulo indecomponível é levado em um H -módulo indecomponível por alguma das equivalências dadas pelo teorema de Brenner e Butler. Como temos uma boa informação da categoria de módulos da álgebra hereditária, esta se transporta à categoria de módulos da álgebra inclinada. Conseqüência disto é que temos uma boa descrição da categoria de módulos de uma álgebra inclinada.

Posteriormente Happel e Ringel simplificaram a definição de módulo inclinado e mostraram as principais propriedades das álgebras inclinadas. Nos anos posteriores outros pesquisadores trabalharam esta classe de álgebras exaustivamente. Além do interesse que as álgebras inclinadas representam por si próprias, elas tem-se mostrado uma ferramenta poderosa para o estudo de outros tópicos em teoria de representações, como por exemplo no estudo das álgebras mansas.

Uma vez que temos um bom conhecimento das álgebras inclinadas surge a idéia de iterar o processo e assim obter um conhecimento razoável das categorias de módulos de uma classe maior de álgebras. Desta maneira aparece de um modo natural o conceito de álgebras inclinadas iteradas. A idéia consiste em aplicar reiteradamente o processo inclinado, onde pede-se em cada passo que os módulos inclinantes sejam separantes. Neste caso para cada módulo inclinado no processo sua teoria de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cobre a categoria de módulos da álgebra respectiva. Deste modo a informação sobre a categoria de módulos é transportada pelas equivalências de Brenner e Butler de uma álgebra para outra, da mesma maneira que no caso das álgebras inclinadas.

Happel desenvolveu a teoria de álgebras inclinadas iteradas estudando-as por meio de sua categoria derivada. Usando essas técnicas ele obteve teoremas fundamentais. Este

enfoque não será apresentado neste trabalho em detalhes mas utilizaremos alguns dos resultados com ele obtidos. Por outra parte, Assem e Skowroński trabalharam esta classe de álgebras estudando-as por meio de suas aljavas associadas. As técnicas por eles desenvolvidas serão discutidas neste trabalho e amplamente utilizadas ao longo do mesmo.

As álgebras disfarçadas formam uma classe das álgebras inclinadas, cujas categorias de módulos estão muito próximas das categorias de módulos das álgebras hereditárias. Happel e Vossieck classificaram totalmente as álgebras mansas disfarçadas e deram uma lista completa das aljavas associadas as mesmas. Ringel classificou as álgebras inclinadas de uma álgebra hereditária H de tipo euclideano de tipo infinito por meio de suas aljavas associadas. Ele caracterizou as aljavas de tais álgebras como certos “alargamentos por ramos” de uma álgebra mansa disfarçada. Dessa maneira ele estudou as categorias de módulos destas álgebras utilizando a categoria de módulos da álgebra mansa disfarçada associada.

Assem e Skowroński estenderam este estudo às álgebras inclinadas iteradas de uma álgebra hereditária H de tipo euclideano de tipo infinito. Eles mostraram que as aljavas associadas a tais álgebras correspondem a outros “alargamentos por ramos” de uma álgebra mansa disfarçada. Da mesma maneira que Ringel fez para as inclinadas, eles estudaram as categorias de módulos das álgebras inclinadas iteradas deste tipo através da categoria de módulos da álgebra mansa disfarçada associada.

Por outra parte Roldán classificou totalmente as aljavas das álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$, inclusive as de tipo finito. Recentemente Wenderlich classificou as aljavas associadas às álgebras inclinadas iteradas de tipo finito de tipo $\tilde{D}_n$.

O problema que nos interessa é a seguinte conjectura sobre álgebras inclinadas iteradas devida a Roldán:

Conjectura *Seja A uma álgebra inclinada iterada de uma álgebra hereditária H de tipo de representação infinito. Se A é de tipo de representação finito então existem sequências de módulos inclinantes separantes $T_0, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$ tais que $A_0 = A$ e $A_m = H$, $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_{i-1}$ e A_{m-1} de tipo de representação finito.*

Observe que A_{m-1} é inclinada, e que todas as álgebras A_i , $i = 0, \dots, m-2$ são de tipo finito. De fato, como todos os T_i são separantes para cada i , temos que todo A_i -módulo indecomponível é aplicado em um A_{i+1} -módulo indecomponível. Isto é a álgebra A pode ser, no sentido das equivalências de Brenner e Butler, “aproximada” por álgebras de tipo finito.

Se esta conjectura for verdadeira então estudo das álgebras inclinadas iteradas de tipo finito se reduziria ao das álgebras inclinadas de tipo finito. Neste caso todo módulo indecomponível sobre uma álgebra inclinada iterada de tipo finito se aplicaria, através das equivalências de Brenner e Butler sucessivas, em um módulo indecomponível sobre uma álgebra inclinada de tipo finito. Se tivermos um bom conhecimento das categorias

de módulos das álgebras inclinadas de tipo finito, teríamos um conhecimento razoável das categorias de módulos de álgebras inclinadas iteradas de tipo finito.

No presente trabalho analisamos esta conjectura no caso de álgebras inclinadas iteradas de tipo manso, isto é, álgebras inclinadas iteradas de uma álgebra hereditária de tipo euclidiano. Mostramos que a conjectura de Roldán se satisfaz quando a álgebra hereditária é dada por um $\tilde{A}_n$. Para os caso em que a álgebra hereditária é dada por um $\tilde{D}_n$ ou um $\tilde{E}_p$ mostramos uma versão mais fraca da conjectura:

Conjectura *Seja A uma álgebra inclinada iterada de uma álgebra hereditária H de tipo de representação infinito. Se A é de tipo de representação finito então existem sequências de módulos inclinantes $T_0, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$ tais que $A_0 = A$ e $A_m = H$, $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_{i-1}$ e A_i de tipo de representação finito, para todo $i \neq m$.*

Neste caso temos que os T_i 's podem não ser separantes, mais a subcategorias associadas a T_i são cofinitas na categoria de módulos de A_i em cada passo. Portanto só perdemos informação sobre um número finito de módulos em cada passo.

No capítulo 1 começamos apresentando conceitos básicos da teoria, desenvolvemos os rudimentos da teoria inclinante, apresentamos os resultados de Happel sobre álgebras inclinadas iteradas, as caracterizações de Ringel das álgebras inclinadas através de suas aljavas associadas e finalmente as caracterizações de Assem e Skowroński das aljavas associadas a álgebras inclinadas iteradas.

No capítulo 2 discutimos o caso $\tilde{A}_n$, apresentamos as caracterizações de Assem e Skowroński das aljavas associadas a álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$, e a caracterização de Roldán das álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$. Na segunda parte do capítulo damos a demonstração da conjectura neste caso, nela exibimos uma sequência de módulos inclinantes separantes que transforma a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita na aljava de uma álgebra inclinada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita.

No capítulo 3 introduzimos o conceito de reflexão por um vértice e sua relação com o processo inclinante. Discutimos o conceito de simplesconexidade para álgebras de tipo de representação infinito e mostramos algumas dessas propriedades para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$. Na segunda parte do capítulo desenvolvemos um algoritmo para transformar a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ por meio de reflexões.

No capítulo 4 mostramos a versão fraca da conjectura para álgebras de inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$. Introducimos alguns lemas preliminares, desenvolvemos um critério para testar a validade da versão fraca da conjectura e utilizando dito critério mostramos que a mesma é satisfeita para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$.

Capítulo 1

Álgebras inclinadas e Álgebras inclinadas iteradas

1.1 Preliminares

Ao longo de todo o trabalho A denotará uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, associativa e com identidade, $\mathbf{mod} A$ representará a categoria cujos objetos são os A -módulos finitamente gerados à direita e cujos morfismos são os morfismos entre módulos. Por $\mathbf{ind} A$ indicamos a subcategoria de $\mathbf{mod} A$ dos A -módulos à direita indecomponíveis e finitamente gerados.

Nestas condições todo A -módulo finitamente gerado é soma direta finita de A -módulos finitamente gerados indecomponíveis e tal decomposição é essencialmente única. Seja $A = P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ a decomposição de A em A -módulos indecomponíveis onde P_i não é isomorfo a P_j se $i \neq j$. No caso em que $r_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$ então A é dita uma **álgebra básica**. Álgebras básicas são mais manuseáveis que as não básicas. Nosso principal objetivo na teoria de representações de álgebras é estudar suas categorias de módulos. O teorema de Morita nos permite restringir o estudo às categorias de módulos sobre álgebras básicas.

1.1.1 Álgebras de dimensão finita e Aljavas com relações

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e indecomponível. Nestas condições mostraremos que A pode ser caracterizada em termos de certas estruturas chamadas aljavas (que nada mais são que grafos orientados).

Definição 1.1.1 Uma **aljava** Q é dada por dois conjuntos Q_0 e Q_1 e um par de funções $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$. Os elementos de Q_0 são chamados de **vértices** de Q enquanto que os de Q_1 são as **flechas** de Q . Dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ é o vértice inicial de α enquanto que $e(\alpha)$ é o vértice final de α .

Um **caminho** γ em $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ é descrito da seguinte forma: $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ tal que para $1 \leq i \leq n-1$, $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$. Um **caminho trivial** é um caminho sem flechas associado ao vértice $a \in Q_0$ que denotaremos por ϵ_a . No caso em que γ não é um caminho trivial e $s(\gamma) = e(\gamma)$ dizemos que γ é um **circuito orientado**.

Seja Q uma aljava finita, isto é, onde os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos. A **álgebra de caminhos de kQ** é o espaço vetorial com base nos caminhos de Q , incluídos também os triviais, com a seguinte multiplicação. Dados dois caminhos em Q , $\gamma_1 = \alpha_n \cdots \alpha_1$ e $\gamma_2 = \beta_m \cdots \beta_1$ definimos

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1 & \text{se } e(\gamma_2) = s(\gamma_1) \\ 0 & \text{se } e(\gamma_2) \neq s(\gamma_1) \end{cases}$$

Estendendo por linearidade tal multiplicação a todos os seus elementos, define-se em kQ uma estrutura de k -álgebra. Seja J o ideal de kQ gerado pelas flechas de Q . Um ideal I de kQ é **admissível** se existir um $n > 0$ tal que $J^n \subset I$ e $I \subset J^2$.

Agora dada uma álgebra A básica e indecomponível queremos definir a sua aljava associada. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de A , numa ordem dada. (Tal sistema existe pois A é de dimensão finita sobre k). Eles permitem decompor A como a soma de A -módulos indecomponíveis $P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$. Como A é básica, P_i não é isomorfo a P_j para $i \neq j$. A **aljava ordinária** Q_A é definida agora como tendo n vértices $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. O número de flechas que começam em ϵ_i e terminam em ϵ_j será por definição

$$\dim_{ke_j}(\text{rad} A / \text{rad}^2 A) e_i$$

Pode-se mostrar que existe um epimorfismo

$$\phi : kQ_A \rightarrow A$$

cujo núcleo $R = \text{Ker} \phi$ é um ideal admissível e pode ser descrito por combinações de caminhos (relações).

Definição 1.1.2 Uma **aljava com relações** (Q, R) é dada por uma aljava Q e um sistema de relações de um ideal admissível de kQ . A **álgebra de caminhos** dada por uma aljava com relações (Q, R) é por definição a álgebra kQ/R .

Podemos agora formular o seguinte teorema devido a Gabriel:

Teorema 1.1.3 *Toda álgebra de dimensão finita A sobre um corpo algebricamente fechado k , básica, é uma álgebra de caminhos dada por uma aljava Q_A com relações (R_A) .*

A aljava Q_A acima é chamada de **aljava associada** a A . Observe que se a álgebra é indecomponível a aljava associada é conexa.

1.1.2 Módulos e Representações de Álgebras

Já vimos como as álgebras podem ser descritas em termos de aljvas com relações. Agora, estamos interessados em visualizar as representações, quer dizer os seus módulos, através das representações da correspondente aljava com relações.

Seja (Q, R) uma aljava com relações. Uma **representação** de Q é dada por $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ onde para cada $i \in Q_0$, V_i é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k e para cada $\alpha \in Q_1$, f_α é uma transformação linear. Dado um caminho não trivial $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ podemos definir $V(\gamma)$ como sendo a transformação linear de V_i a V_j dada pela composta $f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_1}$. Podemos estender esta definição para uma combinação linear de caminhos por linearidade.

Definição 1.1.4 *a) Dizemos que a representação V satisfaz uma relação δ se $V(\delta) = 0$ e que V satisfaz o sistema de relações de R se satisfaz cada relação δ de R .*

*b) Uma **representação de (Q, R)** é uma representação de Q que satisfaz as relações de R .*

Dadas duas representações $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ um morfismo $\phi : V \rightarrow W$ é dado por uma família de transformações lineares $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ tal que para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \phi_i \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

isto é $\phi_j f_\alpha = g_\alpha \phi_i$.

A composta de morfismos é definida naturalmente componente a componente.

Com isto $\text{mod} - (Q, R)$ é uma categoria, chamada a **categoria das representações de (Q, R)** .

Uma categoria é dita **k -categoria** quando para cada par de objetos dela o conjunto de morfismos entre eles é um k -espaço vetorial e as composições são aplicações k -lineares. É o caso das categorias $\text{mod} - (Q, R)$ e $\text{mod } A$ onde A é uma k -álgebra.

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , indecomponível e básica. Sabemos de **1.1.3** que A é de fato uma álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações (Q, R) , isto é $A \cong kQ/R$. O seguinte teorema mostra que o estudo da categoria $\text{mod } A$ é equivalente ao da categoria $(Q, R) - \text{mod}$.

Teorema 1.1.5 *Com as notações acima $(Q, R) - \text{mod}$ e $A - \text{mod}$ são equivalentes como k -categorias.*

Para uma leitura mais profunda destes tópicos recomendamos [19] e [22].

1.1.3 Sequências e Aljavas de Auslander-Reiten

Nos anos 70 Auslander e Reiten introduziram a noção de sequências quase cindidas (atualmente chamadas de sequências de Auslander-Reiten). A importância destas sequências exatas curtas reside basicamente nos morfismos que a compõem.

Posteriormente os morfismos que compõem as sequências de Auslander-Reiten foram utilizadas para a definição de uma aljava, atualmente chamada de Aljava de Auslander-Reiten da álgebra A . Formalizadas por Ringel tais aljavas nos ajudam a visualizar a categoria $\text{ind-}A$. Atualmente muitos resultados em teoria de representações de álgebras dependem do estudo destas aljavas. Apresentaremos aqui só as definições básicas, e indicaremos [13] e [22] para uma leitura mais profunda.

Definição 1.1.6 *Uma sequência exata curta de A -módulos que não cinde*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten (ARS) se

- i) os seus extremos N e M são indecomponíveis;*
- ii) para todo morfismo $h : X \longrightarrow M$, $X \in \text{mod } A$, que não seja um epimorfismo que cinde (isto é, que não tenha secção), existe $\bar{h} : X \longrightarrow E$ tal que $g\bar{h} = h$;*
- ii') para todo morfismo $h : N \longrightarrow X$, $X \in \text{mod } A$, que não seja um monomorfismo que cinde (isto é, que não tenha retração), existe $\bar{h} : E \longrightarrow X$ tal que $\bar{h}f = h$.*

Observação 1.1.7 Na realidade as condições $i, ii)$ e $i, ii')$ são equivalentes.

O próximo resultado, nos diz em que circunstâncias existem sequências de Auslander-Reiten. Além disto assegura a unicidade nestes casos.

Teorema 1.1.8 (*Existência e Unicidade*): Sejam A uma álgebra e M um A -módulo indecomponível.

(1) Se M não for projetivo então existe e é única a sequência de AR terminando em M : $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$.

(2) Se M não for injetivo então existe e é única a sequência de AR começando em M : $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow 0$.
 $\begin{matrix} N \longrightarrow 0 \\ \downarrow \text{GR} \end{matrix}$

Vamos estudar os morfismos que compõem as sequências de AR a partir de sua propriedade de levantamento $ii)$.

Definição 1.1.9 Seja M um módulo indecomponível.

(1) Um morfismo $g : E \longrightarrow M$ é um **poço em M** se:

(i) g não é um epimorfismo que cinde (isto é, g não tem secção).

(ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $gh = g$, h é um automorfismo.

(iii) para todo $h : X \longrightarrow M$ que não seja um epimorfismo que cinde, existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$.

(2) Um morfismo $f : M \longrightarrow E$ é uma **fonte em M** se:

(i) f não é um monomorfismo que cinde (isto é, f não tem retração).

(ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $hf = f$, h é um automorfismo.

(iii) para todo $h : M \longrightarrow X$ que não seja um monomorfismo que cinde, existe $h' : E \longrightarrow X$ tal que $h'f = h$.

Proposição 1.1.10 Seja $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ uma ARS. Então

(a) f é uma fonte e qualquer outra fonte em N é isomorfa a f .

(b) g é um poço e qualquer outro poço em M é isomorfo a g .

A seguinte proposição mostra o que acontece com os morfismos poço e fonte no caso do módulo ser projetivo ou injetivo.

Proposição 1.1.11 (1) Se P é um projetivo indecomponível não simples então a inclusão $i : \text{rad}P \rightarrow P$ é um poço e todo outro poço em P é isomorfo a i .

(2) Se I é um injetivo indecomponível não simples então a projeção natural $\pi : I \rightarrow I/\text{soc}I$ é uma fonte e toda outra fonte em I é isomorfa a π .

Veremos agora que os morfismos das ARS possuem certas propriedades de irredutibilidade.

Definição 1.1.12 Um morfismo que não cinde $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ com X, Y em $\text{mod } A$ é **irredutível** se para cada decomposição $f = gh$ ou g é um epimorfismo que cinde ou h é um monomorfismo que cinde.

Observação 1.1.13 Se $f : X \rightarrow Y$ é irredutível então f é um epimorfismo ou um monomorfismo.

A seguinte proposição relaciona os morfismos irredutíveis com fontes e poços.

Proposição 1.1.14 Seja M indecomponível.

(a) Um morfismo $h : M \rightarrow X$ é irredutível se e só se existe $h' : M \rightarrow X'$ tal que (h, h') é uma fonte em M .

(b) Um morfismo $h : X \rightarrow M$ é irredutível se e só se existe $h' : X' \rightarrow M$ tal que (h, h') é um poço em M .

Vamos agora a definir os subgrupos $\text{rad}^n(X, Y)$ de $\text{Hom}_A(X, Y)$ para X e Y em $\text{ind } A$ e $n \geq 1$. Isto é feito indutivamente como segue.

(i) Para $n = 1$ $\text{rad}^1(X, Y) = \text{rad}(X, Y)$ é o subgrupo dos morfismos de X em Y que não cindem.

(ii) Suponhamos que $\text{rad}^i(X, Y)$ está definido para $1 \leq i < n$, então f está em $\text{rad}^n(X, Y)$ se e só se pode escrever-se como a soma de morfismos da forma gh com $h \in \text{rad}^{n'}(X, Z)$ e $g \in \text{rad}^{n''}(Z, Y)$ para algum Z em $\text{ind } A$, e com n' e n'' menores que n mas satisfazendo $n' + n'' \geq n$.

(iii) $\text{rad}^\infty(X, Y)$ se define como a intersecção dos $\text{rad}^n(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.1.15 Seja $f : Y \rightarrow X$ um morfismo entre módulos em $\text{ind } A$ que não seja um isomorfismo. Então $f = \sum \alpha_i + \beta$, onde cada $\alpha_i : Y \rightarrow X$ é uma composta finita de morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis e β está em $\text{rad}^\infty(Y, X)$.

Com o objetivo de tentar organizar a categoria $\text{ind } A$ associa-se a uma álgebra A dada uma aljava Γ_A onde os vértices e as flechas representarão respectivamente os A -módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis entre eles.

Seja M um A -módulo indecomponível. No caso de M não ser projetivo sabemos que existe uma sequência de Auslander-Reiten terminando em M :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Lembramos que o A -módulo N é indecomponível. Denotaremos tal N por τM . Devido à unicidade da *ARS* temos que τM é único a menos de isomorfismo. O módulo τM é dito **translado de Auslander-Reiten de M** .

Por outro lado, se M não for injetivo então existe uma única sequência de Auslander-Reiten começando em M :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

e N é um A -módulo indecomponível que denotaremos por $\tau^{-1}M$ e será dito o **translado inverso de Auslander-Reiten de M** .

Observação 1.1.16 (1) Por conveniência às vezes escreveremos $\tau P = 0$ para um projetivo P e $\tau^{-1}I = 0$ para um injetivo I .

(2) Note que se $M \in \text{ind } A$ não é projetivo então $\tau^{-1}(\tau M) \cong M$.

(3) Note que se $M \in \text{ind } A$ não é injetivo então $\tau(\tau^{-1}M) \cong M$.

Definição 1.1.17 Seja A uma álgebra. A aljava de Auslander-Reiten de A é a aljava definida como segue:

(1) Os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos A -módulos indecomponíveis, isto é para cada indecomponível M associamos um vértice $[M]$ e os vértices $[M]$ e $[M']$ são os mesmos se e só se $M \cong M'$.

(2) O número de flechas de $[M] \longrightarrow [M']$ é dado por $\dim_k \text{Irr}(M, M')$, onde

$$\text{Irr}(M, M') = \text{rad}(M, M') / \text{rad}^2(M, M')$$

é o conjunto dos morfismos irredutíveis de M em M' .

Observação 1.1.18 (1) A aljava Γ_A não tem laços. Um **laço** é uma flecha que tem início e final no mesmo vértice.

(2) Γ_A é uma aljava localmente finita, isto é para cada vértice $[M]$ de Γ_A existe apenas um número finito de flechas chegando e saindo de $[M]$.

(3) Dado $M \in \text{ind } A$ não projetivo então o número de flechas que saem de $[\tau M]$ é igual ao número de flechas que chegam a $[M]$.

Uma sequência de Auslander-Reiten σ define uma subaljava em Γ_A , cujos vértices correspondentes aos indecomponíveis de σ e as flechas correspondentes aos morfismos irredutíveis de σ , é chamada de uma **malha** de Γ_A .

Dados X e Y A -módulos indecomponíveis dizemos que X está na τ -órbita de Y se existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n X$ é isomorfo a Y . Um módulo indecomponível X é τ -periódico se existe um $n > 0$ tal que $\tau^n X$ é isomorfo a X .

A aljava Γ_A se decompõe em componentes conexas, definiremos aqui algumas dessas componentes que serão utilizadas intensivamente durante o trabalho.

Definição 1.1.19 *Uma componente conexa $\mathcal{C}$ da aljava de Auslander-Reiten é dita **pós-projetiva** se:*

- a) *Todo módulo C está na órbita de um projetivo.*
- b) *Nenhum módulo de $\mathcal{C}$ está num circuito orientado.*

*Um módulo de $\mathcal{C}$ é dito **pós-projetivo**.*

Dualmente temos:

Definição 1.1.20 *Uma componente conexa $\mathcal{C}$ da aljava de Auslander-Reiten é dita **pré-injetiva** se:*

- a) *Todo módulo de $\mathcal{C}$ está na órbita de um injetivo.*
- b) *Nenhum módulo de $\mathcal{C}$ está num circuito orientado.*

*Um módulo de $\mathcal{C}$ é dito **pré-injetivo**.*

Definição 1.1.21 *Uma componente conexa $\mathcal{C}$ da aljava de Auslander-Reiten é dita um **tubo** se:*

- a) *$\mathcal{C}$ não possui flechas múltiplas.*
- b) *$\mathcal{C}$ contém um circuito orientado.*
- c) *A realização geométrica de $\mathcal{C}$ (isto é, seu espaço topológico subjacente) é $|\mathcal{C}| = S^1 \times \mathbb{R}_0^+$ onde S^1 é o círculo unitário e $\mathbb{R}_0^+$ é o conjunto dos reais negativos.*

Se $\mathcal{C}$ é um tubo, o subconjunto $S^1 \times \{0\}$ é chamado a **boca** do tubo. Um tubo $\mathcal{C}$ é dito **estável** se $\mathcal{C}$ não contém nem módulos projetivos, nem módulos injetivos. Dado um tubo estável $\mathcal{C}$ existe um n , tal que para todo M em $\mathcal{C}$ $\tau^n M = M$. Tal n é chamado o **posto** do tubo ($\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}A_\infty/n$). Um tubo é dito **homogêneo** se seu posto é 1.

Dizemos que uma componente conexa da aljava de Auslander-Reiten é **regular** se não possui módulos projetivos nem injetivos.

Dizemos que uma componente conexa $\mathcal{C}$ é **standard generalizada** se $\text{rad}^\infty(X, Y) = 0$ para todo X e Y em $\mathcal{C}$.

Assumiremos de aqui para frente que sempre que falamos numa **componente** da aljava de Auslander-Reiten estamos falando de uma componente conexa de dita aljava.

Seguindo [41] vamos agora definir uma classe especial de módulos chamada de família tubular que será de interesse para o estudo da classe de álgebras na que estamos interessados.

Se existe um conjunto I e uma família $T(\lambda)$, $\lambda \in I$, de tubos (dois a dois diferentes) em $\text{mod } A$, a classe $\mathbf{T}$ gerada por todos os $T(\lambda)$ será chamada uma **família tubular** parametrizada por I . Nos casos em que estamos interessados o conjunto de parâmetros I será a reta projetiva $P_1(k)$. Uma família tubular será dita **estável** se $T(\lambda)$ é um tubo estável para todo $\lambda \in I$.

Definição 1.1.22 *Uma família tubular em $\text{mod } A$ é dita separante se os restantes A -módulos indecomponíveis se dividem em duas classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) $\mathbf{T}$ é standard (isto é cada, $T(\lambda)$ é standard).
- (b) $\text{Hom}_A(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_A(\mathcal{Q}, \mathbf{T}) = \text{Hom}_A(\mathbf{T}, \mathcal{P}) = 0$.
- (c) Todo morfismo de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{Q}$ se fatora através de $T(\lambda)$ para cada $\lambda \in I$.

Neste caso dizemos que $\mathbf{T}$ separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{Q}$.

Seja agora $\mathbf{T}$ uma família de tubos estáveis em $\text{mod } A$. Para cada $\lambda \in I$ denotamos por n_λ o posto de $T(\lambda)$. A função $n_* : I \rightarrow \mathbb{N}_1$ será chamada o **tipo** da família. Nos casos em que estamos interessados quase todos os tubos de $\mathbf{T}$ são homogêneos, então escolheremos I' um subconjunto finito de I tal que $n_\lambda = 1$ para todo $\lambda \in I \setminus I'$. Digamos $I' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$, λ_s dois a dois distintos. Denotamos n_{λ_s} por n_s e $(n_1, \dots, n_t)$ será chamado o **tipo tubular** da família.

Uma álgebra A é dita de **tipo de representação finito** ou de **representação finita** se o número de classes de isomorfia de A -módulos indecomponíveis é finito. Caso contrário, é dita de **tipo de representação infinito** ou de **representação infinita**.

Definição 1.1.23 *Seja A é uma álgebra de representação infinita.*

(a) *A álgebra A é dita mansa se para cada dimensão d , $d \in \mathbb{N}$, existem um número finito de A - $k[t]$ -bimódulos $M_1, \dots, M_{s(d)}$, livres como $k[t]$ -módulos, tais que para quase todo A -módulo X tal que $\dim_k X = d$*

$$X \cong M_i \otimes_{k[t]} S_\alpha$$

onde $S_\alpha = k[t]/(t - \alpha)$. Em outras palavras os A -módulos podem ser parametrizados.

(b) A álgebra A é dita **selvagem** se existe um A - K $\langle x, y \rangle$ -bimódulo tal que o funtor

$$M \otimes_{k\langle x, y \rangle} - : \text{mod } k\langle x, y \rangle \longrightarrow \text{mod } A$$

preserva indecomponíveis e reflete isomorfismos, isto é $\text{mod } k\langle x, y \rangle$ se imerge em $\text{mod } A$.

Drozd demonstrou o seguinte teorema que mostra que a classe das álgebras de representação infinita cinde em duas classes disjuntas: as álgebras mansas e as álgebras selvagens.

Teorema 1.1.24 *Uma álgebra de representação infinita ou é mansa ou é selvagem, mas não ambas simultaneamente.*

Voltaremos sobre este ponto no capítulo 3.

1.1.4 Álgebras hereditárias

Definição 1.1.25 *Uma álgebra é dita hereditária, se submódulos de projetivos são projetivos, ou equivalentemente se $gl.dim A \leq 1$, se e só se A é Morita equivalente à álgebra de caminhos de uma aljava sem circuitos orientados.*

Existe uma classificação completa para as aljavas ordinárias de uma álgebra hereditária segundo o seu tipo de representação. O seguinte teorema devido a Gabriel caracteriza as de tipo finito.

Teorema 1.1.26 (Gabriel) *Seja A uma álgebra hereditária, básica, conexa e indecomponível. Então A é de tipo de representação finito se e só se o grafo de sua aljava ordinária de A é um diagrama de Dynkin, isto é, um dos seguintes grafos:*

Independentemente, Nazárova , Donovan e Freislich mostraram um teorema semelhante para álgebras hereditárias de tipo manso.

Teorema 1.1.27 *Seja A uma álgebra hereditária, básica, conexa e indecomponível. Então A é de representação infinita mansa se e só se o grafo de sua aljava ordinária é um diagrama de Dynkin estendido ou de tipo euclidiano, isto é, é um dos seguintes grafos:*

Nestes casos as aljavas de Auslander-Reiten são conhecidas, temos de [41] o seguinte teorema:

Teorema 1.1.28 *Seja A uma álgebra hereditária mansa de tipo infinito. Então A tem uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}$ contendo todos os projetivos, uma componente pré-injetiva $\mathcal{Q}$ contendo todos os injetivos, e uma família tubular estável separante $\mathcal{T}$, separando $\mathcal{P}$ de $\mathcal{Q}$, e desta maneira obtemos todos os A -módulos indecomponíveis.*

Observação 1.1.29 (a) *No teorema acima os tubos de $\mathcal{T}$ são ortogonais, isto é, não existem morfismos entre eles. O conjunto de parâmetros neste caso é a reta projetiva.*

(b) *Quase todos os tubos de $\mathcal{T}$ são homogêneos.*

(c) *Os tubos de $\mathcal{T}$ são regulares.*

Podemos visualizar a estrutura de $\text{mod } A$ como segue (onde não são possíveis aplicações não nulas da direita para a esquerda).

1.2 O processo inclinante

Quando a teoria de representação de uma álgebra é difícil de estudar diretamente, é algumas vezes conveniente substituir A por outra álgebra mais simples B e reduzir um problema sobre A a um problema sobre B . Isto ocorre, por exemplo, no teorema clássico de equivalência Morita. Este último é de uso limitado em teoria de representações, já que nesse caso, nenhuma mudança ocorre a nível de categorias de módulos. A idéia principal da teoria inclinante é, dada uma álgebra A , construir um módulo T_A , chamado módulo inclinante, tal que se $B = \text{End}_A T$, então as categorias $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$ estão razoavelmente próximas uma da outra (mas geralmente não são equivalentes).

Seguindo [9],[34], [16] e [41] relembremos aqui os fatos principais da teoria de módulos inclinantes.

Definição 1.2.1 Um módulo T é chamado **inclinante** se satisfaz as seguintes condições:

$$(T1) \text{pd} T_A \leq 1$$

$$(T2) \text{Ext}_A^1(T, T) = 0$$

(T3) Existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T'_A \longrightarrow T''_A \longrightarrow 0$$

com $T', T'' \in \text{add} T_A$

Exemplos triviais de módulos inclinantes são os progeradores de Morita.

Definição 1.2.2 Dizemos que T é um módulo inclinante parcial se $(T1)$ e $(T2)$ são satisfeitas.

O seguinte lema devido a Bongartz [16] justifica o nome de módulos inclinantes parciais.

Lema 1.2.3 Seja T_A um módulo inclinante parcial, então existe um módulo X_A tal que $T \oplus X$ é um módulo inclinante.

A seguinte proposição mostra que a condição $(T3)$ pode ser substituída por outra mais simples de ser verificada:

Proposição 1.2.4 Seja $T_A = T_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus T_t^{m_t}$ com T_i módulos indecomponíveis tais que T_i não é isomorfo a T_j quando $i \neq j$. Então T_A é um módulo inclinante se e só se T_A é um módulo inclinante parcial e satisfaz

$(T3')$ t é igual ao número de classes de isomorfia de módulos simples sobre a álgebra A .

Definimos aqui o conceito dual de módulos inclinantes:

Definição 1.2.5 Seja A uma álgebra. Um A -módulo T_A é dito um módulo **coinclinante** se satisfaz as seguintes condições:

$$(T1^*) \text{ id} T_A \leq 1$$

$$(T2) \text{ Ext}_A^1(T, T) = 0$$

$(T3')$ o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de T_A é igual ao número de classes de isomorfia de módulos simples sobre A .

Relembramos de [24] a definição de teoria de torção numa categoria de módulos:

Definição 1.2.6 Uma teoria de torção em $\text{mod} A$ é um par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de classes de módulos tais que:

$$(i) \text{ Hom}_A(M, N) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{T} \text{ e } N \in \mathcal{F},$$

$$(ii) \text{ Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0 \text{ implica } M \in \mathcal{T},$$

$$(iii) \text{ Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0 \text{ implica } N \in \mathcal{F}.$$

A classe $\mathcal{T}$ (respectivamente, $\mathcal{F}$) é chamada a **classe de torção** (respectivamente a **classe livre de torção**) e seus objetos são chamados **módulos de torção** (respectivamente, **módulos livres de torção**). Claramente $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é uma teoria de torção em mod A se e só se $(D\mathcal{F}, D\mathcal{T})$ é uma teoria de torção em mod A^{op} .

A um módulo inclinante T pode-se associar uma teoria de torção

$$\mathcal{T} = Gen(T_A) = \{M | \exists \phi : T^n \longrightarrow M \text{ epi}\} = \{M_A | Ext_A^1(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{F} = Cogen(\tau T_A) = \{N | \exists \Phi : N \longrightarrow (\tau T)^m \text{ mono}\} = \{N_A | Hom_A(T, N) = 0\}$$

Diz-se que uma teoria de torção **cinde** se todo módulo indecomponível é um módulo de torção ou um módulo livre de torção.

Seja $B = End_A T$. Já que o processo inclinante pode ser visto como uma generalização da teoria de Morita, esperaríamos poder usar o par de funtores adjuntos $Hom_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ para comparar mod A e mod B , e também esperaríamos que a subcategoria plena $Gen(T_A)$ de mod A fosse de interesse. O seguinte teorema devido a Brenner e Butler, ver [18], mostra que isto realmente acontece dando uma equivalência parcial entre subcategorias. Sejam

$$\mathcal{Y}(T_A) = \{N_B | Tor_1^B(N, T) = 0\}$$

$$\mathcal{X}(T_A) = \{N_B | N \otimes_B T = 0\}$$

Teorema 1.2.7 (Brenner-Butler) *Seja A uma álgebra, T_A um módulo inclinante e $B = End_A T$. Então:*

(a) ${}_B T$ é um módulo inclinante e $A \cong End({}_B T)$ canonicamente.

(b) Os funtores $Hom_A(T, -)$ e $- \otimes_B T$ induzem equivalências inversas entre as subcategorias plenas $\mathcal{T}(T_A)$ e $\mathcal{Y}(T_A)$, enquanto que os funtores $Ext_A^1(T, -)$ e $Tor_1^B(-, T)$ induzem equivalências inversas entre as subcategorias plenas $\mathcal{F}(T_A)$ e $\mathcal{X}(T_A)$.

Corolário 1.2.8 *Temos que $D\mathcal{X}(T_A) = \mathcal{F}({}_B T)$ e $D\mathcal{Y}(T_A) = \mathcal{T}({}_B T)$. Em particular $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ é uma teoria de torção em mod B .*

Definição 1.2.9 *A terna (B, T, A) é dita uma terna inclinante se T é um A -módulo inclinante e $B = End_A T$.*

O seguinte teorema mostra que a propriedade de uma álgebra ser de dimensão global finita é mantida pelo processo inclinante.

Teorema 1.2.10 *Seja (B, T, A) uma terna inclinante. Então:*

$$|gl.dim.B - gl.dim.A| \leq 1$$

Para a definição de grupo de Grothendieck de A , $K_0(A)$, referimos ao leitor a [13].

Teorema 1.2.11 *Seja (B, T, A) uma terna inclinante. Então a aplicação $f : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ definida por:*

$$f(\underline{dim}M) = \underline{dim}Hom_A(T, M) - \underline{dim}Ext_A^1(T, M)$$

é um isomorfismo de grupos de Grothendieck.

Como consequência deste último teorema temos a invariância da forma quadrática homológica de uma álgebra de dimensão global finita sob o processo inclinante.

Relembramos que a **característica de Euler** de uma álgebra A de dimensão global finita é definida como a forma bilinear $\langle, \rangle_A$ sobre $K_0(A)$ dada por:

$$\langle \underline{dim}M, \underline{dim}N \rangle_A = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \underline{dim}_k Ext_A^s(M, N)$$

para todos A -módulos M e N (A soma acima é finita devido a nossa hipótese sobre A). A forma **quadrática homológica** de A é a forma q_A sobre $K_0(A)$ definida por

$$q_A(\underline{dim}M) = \langle \underline{dim}M, \underline{dim}M \rangle_A$$

Corolário 1.2.12 *Seja (B, T, A) uma terna inclinante com A de dimensão global finita. Então as formas quadráticas q_A e q_B são $\mathbb{Z}$ -congruentes.*

Definição 1.2.13 *Seja (B, T, A) uma terna inclinante. Então T_A é dito um módulo separante (respectivamente, separador) se a teoria de torção $(\mathcal{T}(T_A), \mathcal{F}(T_A))$ cinde em $mod A$ (respectivamente, a teoria de torção $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ cinde em $mod B$).*

Um módulo inclinante T_A é separante (respectivamente, separador) se e só se o módulo inclinante ${}_B T$ é separador (respectivamente, separante).

Módulos inclinantes separantes e separadores são de grande utilidade e eles dão uma boa medida de controle sobre o processo inclinante. Isto é, se T_A é separante, então todo A -módulo indecomponível é levado a um B -módulo indecomponível pelos funtores $Hom_A(T, -)$ e $Ext_A^1(T, -)$; conseqüentemente B tem pelo menos tantos indecomponíveis

não isomorfos quanto A . Por outro lado, se T_A é separador, então todos os B -módulos indecomponíveis são imagens sob os mesmos funtores de A -módulos indecomponíveis, portanto, B tem no máximo tantos indecomponíveis não isomorfos quanto A . Neste último caso, temos uma descrição completa das sequências de Auslander-Reiten em $\text{mod } B$.

Teorema 1.2.14 *Seja T_A um módulo inclinante separador e $B = \text{End}_A T_A$. Toda sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod } B$ ou está completamente em $\mathcal{X}(T_A)$, ou está completamente em $\mathcal{Y}(T_A)$, ou é da forma*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I/S) \oplus \text{Ext}_A^1(T, \text{rad} P) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, P) \longrightarrow 0$$

onde P_A é um projetivo indecomponível que não está no $\text{add}(T)$ (= soma de somandos de T), S_A seu topo simples e I_A a envolvente injetiva de S (tal sequência é chamada uma sequência de conexão).

O seguinte critério devido a Hoshino [36] é de grande utilidade para decidir quando um módulo inclinante é separante, separador ou nenhum dos dois.

Teorema 1.2.15 *Seja (B, T, A) uma terna inclinante.*

a) T_A é separante se e só se, para cada $X_B \in \mathcal{X}(T)$, $\text{pd} X_B = 1$

b) T_A é separador se e só se, para cada $M_A \in \mathcal{F}(T)$, $\text{id} M_A = 1$

Corolário 1.2.16 *Seja A uma álgebra hereditária, então todo A -módulo inclinante é separador.*

Vamos agora a introduzir uma classe de álgebras que tem-se mostrado como uma ferramenta muito importante na teoria de representações.

Definição 1.2.17 *Seja Q uma aljava conexa sem circuitos orientados. Uma álgebra A é chamada uma álgebra inclinada de tipo Q se existe um módulo inclinante T_B sobre a álgebra hereditária $B = kQ$ tal que $A = \text{End}_B T$*

Observe que por 1.2.16 tal T é necessariamente separador. Equivalentemente, a álgebra A é inclinada de tipo Q se existe um módulo inclinante ${}_A U$ (necessariamente separante) sobre A^{op} tal que $\text{End}({}_A U) = kQ$. Na realidade Happel mostrou, que uma álgebra inclinada pode ser obtida usando apenas módulos inclinantes parciais:

Teorema 1.2.18 *Seja B uma álgebra hereditária, e T_B um módulo inclinante parcial. Então $A = \text{End}_B T$ é uma álgebra inclinada.*

Segue diretamente da definição e de 1.2.10 que as álgebras inclinadas tem dimensão global no máximo dois.

Já sabemos como construir uma álgebra inclinada a partir de uma álgebra hereditária, gostaríamos de saber agora, quando dada uma álgebra A , esta é obtida de uma álgebra hereditária através do processo inclinante. Para isso, vamos definir uma classe de módulos $\mathcal{S}$ em $\text{mod } A$ com a propriedade que a existência ou não de $\mathcal{S}$ nos servirá para decidir se A é ou não é inclinada.

Definição 1.2.19 *Uma classe $\mathcal{S}$ de A -módulos indecomponíveis não isomorfos é chamada uma **fatia completa** em Γ_A se satisfaz os seguintes axiomas:*

(CS1) $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um módulo **sincero** (isto é, $\text{Hom}_A(P, U) \neq 0$ para todo A -módulo projetivo).

(CS2) Se $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_m$ é uma sequência de não isomorfismos não nulos em $\text{mod } A$ com $M_0, M_m \in \mathcal{S}$, então $M_i \in \mathcal{S}$ para todo $0 < i < m$.

(CS3) Se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten então no máximo entre L e N um está em $\mathcal{S}$. Além disso, se um somando indecomponível de M está em $\mathcal{S}$, então ou L ou N está em $\mathcal{S}$.

É possível provar que se $\mathcal{S}$ é uma fatia completa, então $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um A -módulo inclinante separante (e também coinclinante). É chamado o **módulo da fatia** de $\mathcal{S}$. É consequência do seguinte teorema que o anel de endomorfismos do módulo da fatia completa é sempre hereditário.

Teorema 1.2.20 (Ringel) *Se B é hereditária, e T_B é um módulo inclinante com $A = \text{End}_B T$ então a classe de todos os A -módulos indecomponíveis da forma $\text{Hom}_B(T, I)$ com I_B injetivo indecomponível, é uma fatia completa em $\text{mod } A$. Reciprocamente, se $\mathcal{S}$ é uma fatia completa em $\text{mod } A$, então $U = \bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M$ é um módulo inclinante com $B = \text{End}_A U$ hereditária e então $\mathcal{S}$ é isomorfa a uma fatia completa da forma anterior.*

O teorema anterior nos leva a recuperar a álgebra hereditária da qual uma álgebra inclinada dada deriva assim como o módulo inclinante correspondente.

1.2.1 Álgebras disfarçadas

Seja agora Q uma aljava euclideana, então $B = kQ$ é uma álgebra hereditária de tipo de representação infinita mansa. As propriedades essenciais dos B -módulos inclinantes são dadas por Happel e Ringel em [33]. Em particular eles mostram que nenhum módulo inclinante é regular (também nenhum módulo regular homogêneo pode ser somando de um módulo inclinante). Então todo módulo inclinante deve conter um somando não nulo pós-projetivo ou pré-injetivo, logo temos a menos de dualidade, as seguintes possibilidades para um módulo inclinante:

- (i) T_B é pós-projetivo
- (ii) $T_B = T_1 \oplus T_2$ com $T_1 \neq 0$ pós-projetivo e $T_2 \neq 0$ regular
- (iii) $T_B = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ com $T_1 \neq 0$ pós-projetivo, T_2 regular e $T_3 \neq 0$ pré-injetivo.

Foi mostrado em [33] que a álgebra inclinada $A = \text{End} T_B$ é de tipo de representação finita se e só se T_B é da forma (iii). Os casos (i) e (ii) correspondem a álgebras inclinadas de tipo de representação infinita. O caso (i) é o chamado álgebras mansas disfarçadas: uma álgebra é chamada **mansa disfarçada** (respectivamente **selvagem disfarçada**) se é o anel de endomorfismos de um módulo inclinante pós-projetivo (ou pré-injetivo) sobre uma álgebra hereditária mansa (respectivamente hereditária selvagem).

Vamos agora estudar a estrutura de $\text{mod } B$ quando B é uma álgebra disfarçada.

Seja A uma álgebra conexa, hereditária de tipo de representação infinita, e T_A um módulo inclinante pós-projetivo. Seja $B = \text{End}_A T$. Neste caso $\mathcal{F}(T_A)$ é finita e está contida em $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ é cofinita e consiste de uma subcategoria cofinita de $\mathcal{P}$, de todas as componentes de $\mathcal{R}$ e de $\mathcal{Q}$. Obtemos a categoria de B -módulos tomando $\mathcal{Y}(T_A) \cong \mathcal{T}(T_A)$ e $\mathcal{X}(T_A) \cong \mathcal{F}(T_A)$ e colando-as juntas pelas sequências de conexão. Note que $\mathcal{Y}(T_A)$ tem três partes diferentes, a imagem sob $\text{Hom}_A(T, -)$ de $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T_A)$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$. Como todos os módulos injetivos pertencem a $\mathcal{Q}$, as sequências de conexão começam em $\text{Hom}_A(T, \mathcal{Q})$. Em particular $\text{Hom}_A(T, \mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T_A))$ e $\text{Hom}_A(T, \mathcal{R})$ são fechadas sob aplicações irredutíveis. Já que $(\mathcal{Y}(T_A), \mathcal{X}(T_A))$ é uma teoria de torção, considerando as quatro classes de módulos

$$\text{Hom}(T, \mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T_A)), \text{Hom}(T, \mathcal{R}), \text{Hom}(T, \mathcal{Q}), \mathcal{X}(T_A)$$

temos que não existem aplicações não nulas de direita para a esquerda. Podemos visualizar as categorias $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$ como segue:

Note que $\text{Hom}(T, \mathcal{P} \cap \mathcal{T}(T_A))$ é uma componente pós-projetiva e $\text{Hom}(T, \mathcal{Q}) \cup \mathcal{X}(T_A)$ é uma componente pré-injetiva.

As álgebras disfarçadas estão caracterizadas como segue:

Teorema 1.2.21 *Uma álgebra A é disfarçada se e só se existem duas componentes diferentes da aljava de Auslander-Reiten de A contendo uma fatia completa.*

Parte deste teorema é provado em [41] na forma do seguinte lema, a outra implicação é provada em [31].

Lema 1.2.22 *Seja A uma álgebra conexa, hereditária de tipo de representação infinita. Uma álgebra B é da forma $B = \text{End}_A T$ com T_A módulo inclinante pós-projetivo se e só se é da forma $B = \text{End}_A T'$ com T'_A módulo inclinante pré-injetivo.*

Consideremos agora o caso de álgebras mansas disfarçadas. Se $B = \text{End}_A T$ onde A é hereditária mansa e T_A é um módulo inclinante pós-projetivo. Então o tipo tubular de B é por definição o tipo tubular de A , isto é, da forma $(n_1, \dots, n_r)$.

Teorema 1.2.23 *Seja B uma álgebra disfarçada mansa de tipo tubular $(n_1, \dots, n_r)$. Então B tem uma componente pós-projetiva contendo todos os projetivos, uma componente pré-injetiva $\mathcal{Q}$ contendo todos os injetivos e uma $P_1(k)$ -família tubular estável separante de tipo $(n_1, \dots, n_r)$ separando $\mathcal{P}$ de $\mathcal{Q}$. Desta maneira obtemos todos os módulos indecomponíveis sobre B .*

Os módulos pertencentes a $\mathcal{T}$ são os módulos regulares, e aqueles que estão na boca de um tubo são ditos **simples regulares**. Note que no caso em que o tipo tubular de B é $(n_1, \dots, n_r)$ o número de vértices de B é dado por $2 + \sum_{i=1}^r (n_i - 1)$.

Observe que de 1.2.23 podemos visualizar $\text{ind } B$ para B mansa disfarçada, neste caso é similar ao caso da álgebra hereditária mansa.

Vamos sumarizar agora uma serie de propriedades das álgebras disfarçadas que serão de grande utilidade nos próximos capítulos, todas elas podem ser encontradas em [41].

Definição 1.2.24 *Uma álgebra é dita de **representação infinita minimal** se B é de representação infinita, mas B/BeB é de representação finita para todo idempotente $0 \neq e$ de B*

Proposição 1.2.25 *Seja A uma álgebra com uma componente pós-projetiva contendo todos os projetivos. Se e é um idempotente de A , então A/AeA tem componentes pós-projetivas tais que a união delas contem todos os A/AeA -módulos projetivos indecomponíveis. Em particular, se A é de representação infinita, existe um idempotente e' de A tal que $A/Ae'A$ é de representação infinita minimal e tem componente pós-projetiva.*

As álgebras mansas disfarçadas foram classificadas por Happel e Vossieck em [35] e também independentemente por Bongartz em [17]; estas álgebras podem ser usadas como um critério efetivo para decidir quando uma álgebra é de representação finita ou não.

Teorema 1.2.26 (Happel-Vossieck) *Uma álgebra B é de representação infinita minimal com uma componente pós-projetiva se e só se ou B é a álgebra de caminhos da aljava Q com dois vértices e pelo menos duas flechas todas apontando na mesma direção, ou B é uma álgebra mansa disfarçada.*

Observação 1.2.27 *Se B mansa disfarçada, a forma quadrática q_B é semidefinida positiva de coposto 1, com um vetor sincero como gerador do radical.*

Temos o seguinte critério para uma álgebra B ser mansa disfarçada.

Proposição 1.2.28 *Seja B uma álgebra de dimensão global finita com q_B semidefinida positiva e tal que $\text{rad} q_B$ tem coposto 1, com um gerador sincero. Assumamos que existe uma componente $\mathcal{P}$ em $\text{mod } B$ tal que todo indecomponível em $\mathcal{P}$ é dirigido (isto é, não está num circuito orientado) e tal que $\text{Hom}(D({}_B B), \mathcal{P}) = 0$. Então B é mansa disfarçada e $\mathcal{P}$ é uma componente pós-projetiva.*

1.3 Álgebras inclinadas iteradas

Vamos agora estudar a teoria de representação de certas classes de álgebras de dimensão finita. A idéia é começar com uma classe cuja teoria de representação é conhecida, e depois incrementar essa classe aplicando o processo inclinante um número finito de vezes. Já que temos um bom controle sobre este processo, podemos estudar uma classe maior usando nosso conhecimento da primeira.

1.3.1 Álgebras inclinante-coinclinante equivalentes

Definição 1.3.1 *Sejam A e B duas álgebras. Então A e B são ditas inclinante-coinclinante equivalentes se existem seqüências de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = B$ e módulos inclinantes ou coinclinantes $T_{A_i}^i$, $0 \leq i \leq m$ tais que $A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_{A_i}^i$ para cada i .*

Seja agora $D^b(A)$ a categoria derivada de complexos limitados sobre uma categoria abeliana mod A no sentido de Verdier em [46]. O seguinte teorema foi mostrado primeiro por Happel em [30] no caso quando a dimensão global de A é finita, restrição depois eliminada por Cline, Parshall e Scott em [20].

Teorema 1.3.2 *Sejam A e B inclinante-coinclinante equivalentes, então $D^b(A) \cong D^b(B)$ como categorias triangulares*

No capítulo III de [31] podem ser encontradas demonstrações alternativas para a maioria dos resultados fundamentais da teoria inclinante usando categorias derivadas e o teorema precedente. Não aprofundaremos muito nesta direção pois não usaremos ditas técnicas neste trabalho, só mencionamos aqui os resultados fundamentais obtidos com as mesmas.

Happel deu uma descrição completa de $D^b(A)$, para A de dimensão global finita.

Vamos agora incluir a classe de álgebras inclinadas numa classe maior, fechada sob o processo inclinante.

Definição 1.3.3 *Seja Q uma aljava finita e conexa sem circuitos orientados. Uma álgebra A é dita inclinada iterada de tipo Q se existe uma seqüência de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = kQ$ e uma seqüência de módulos inclinantes separantes $T_{A_i}^i$ para cada i tal que $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_{A_{i-1}}^i$.*

Da propriedade dos módulos serem separantes segue que, se Q é uma aljava de Dynkin, então uma álgebra inclinada iterada de tipo Q é necessariamente de representação finita.

Analogamente, se Q é uma aljava euclideana, então uma álgebra inclinada iterada de tipo Q ou é representação finita ou é de representação infinita mansa.

Também por **1.2.12** a forma quadrática de uma álgebra inclinada iterada de tipo Q é congruente à de kQ . Consequentemente ela é definida positiva (se Q é uma aljava de Dynkin), semidefinida positiva de posto 1 (se Q é uma aljava euclideana) ou indefinida (se Q é uma aljava selvagem).

Finalmente por **1.2.10** toda álgebra inclinada iterada tem dimensão global finita.

É natural se perguntar quando a recíproca de **1.3.2** é satisfeita, isto é, quando uma álgebra tal que $D^b(A) \cong D^b(kQ)$ como categorias triangulares, é necessariamente inclinada iterada de tipo Q . Isto foi provado por Happel em [30], no caso em que Q é uma aljava de Dynkin, e em [29] no caso onde Q é uma aljava euclideana. No caso geral foi provado por Happel, Rickard and Schofield em [32].

Teorema 1.3.4 *Seja Q uma aljava finita e conexa sem circuitos orientados, e A uma álgebra. São equivalentes:*

- (i) A é inclinada iterada de tipo Q
- (ii) A é inclinante-coinclinante equivalente a kQ
- (iii) $D^b(A) \cong D^b(kQ)$, como categorias triangulares.

Segue do teorema que a classe de álgebras inclinadas iteradas é fechada sobre o processo inclinante. Uma álgebra é inclinada iterada de tipo Q se e só se a álgebra oposta A^{op} é inclinada iterada de tipo Q .

1.3.2 Alargamentos por ramos de uma álgebra mansa disfarçada

Nesta seção daremos a definição de alargamentos por ramos de uma álgebra mansa disfarçada e mostraremos que as álgebras inclinadas iteradas de tipo Q , onde Q é uma aljava euclídeana, são caracterizadas como alargamentos por ramos domésticos de álgebras mansas disfarçadas.

Assem e Skowroński estenderam em [6] e [9] o conceito introduzido por Ringel em [41] de ramos e alargamentos por ramos. Relembramos aqui esta definição:

Um **ramo** é um subaljava finita plena e conexa da seguinte árvore infinita com todas as relações $\beta\alpha = 0 = \alpha\beta$

As flechas segundo sua orientação serão chamadas de **flechas de tipo α** ou **flechas de tipo β** . Um caminho formado só por flechas de tipo α (respectivamente β) será chamado de um **caminho de α -flechas** (respectivamente de **caminho de β -flechas**).

Seja $A = kQ/I$ uma álgebra de caminhos e (Q', I') um subaljava plena de (Q, I) com uma fonte a . Então diz-se que A é obtida de kQ'/I' colando um ramo de extensão (Q'', I'') em a , se (Q'', I'') é uma subaljava plena de (Q, I) tal que:

$$i) Q'_0 \cap Q''_0 = \{a\}, \quad Q'_0 \cup Q''_0 = Q_0$$

ii) I é gerado por I', I'' e todos os caminhos $\beta\gamma$ onde β pertence a Q''_1 e acaba em a e γ pertence a Q'_1 e tem como fonte a .

Definimos dualmente a colagem de um ramo de coextensão.

Seja C uma álgebra mansa disfarçada com uma família tubular T com conjunto de parâmetros $P_1(k)$, e sejam $E_1, \dots, E_n$ simples regulares não isomorfos dois a dois como C -módulos. Para cada i de 1 até n seja K_i um ramo de extensão em a_i e K'_i um ramo

de coextensão em a_i . A álgebra $C[E_1, K_1]$ é obtida da extensão por vértice a_1 colando o ramo K_1 em a_1 . Para j de 1 até n , $C[E_i, K_i]_{i=1}^j$ é obtida da extensão por um ponto $C[E_i, K_i]_{i=1}^{j-1}[E_j]$ com vértice de extensão a_j colando K_j em a_j . Então $B = C[E_i, K_i]_{i=1}^n$ é chamada uma extensão por ramos de C nos módulos E_i pelos ramos K_i para i de 1 até m . Seja agora E'_i o único B -módulo indecomponível cuja restrição a C é E_i e cuja restrição a K_i é o único módulo com suporte o caminho maximal não nulo com fim em a_i . Então $[E'_1, K'_1]B$ é obtida da coextensão por um ponto $[E'_1]B$ com vértice de coextensão a'_1 colando K'_1 em a'_1 , e para j de 1 até n , $_{i=1}^j[E'_i, K'_i]B$ é obtida de $[E'_j]_{i=1}^{j-1}[E'_i, K'_i]B$ com vértice de coextensão a'_j colando K'_j em a'_j . Então $A = \prod_{i=1}^n [E'_i, K'_i]B$ é dito um alargamento por ramos de C .

Seja r_α o posto de T_α . O **tipo tubular** n_A é a família n_α , com $\alpha \in P_1(k)$, definida por:

$$n_\alpha = r_\alpha + \sum_{E_i \in T_\alpha} (o(K_i) + o(K'_i))$$

onde $o(K_i)$ é a ordem de K_i .

Escrevemos só os $n_\alpha > 1$ em ordem não decrescente.

Diremos que n_A é doméstico e que A é um alargamento por ramos doméstico, se n_A é um dos seguintes: $(p, q), (2, 2, r), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$.

Um **ramo truncado** em a é uma subálgebra finita, plena e conexa da seguinte árvore infinita com todas as possíveis relações da forma $\alpha\beta = 0$

Num ramo truncado de extensão (respectivamente coextensão) a **linha principal** do ramo é o caminho de α -flechas (respectivamente β -flechas) que acaba (respectivamente começa) em a .

Seja C uma álgebra mansa disfarçada e $E_1, \dots, E_n$ simples regulares dois a dois não isomorfos. Se $K_1, \dots, K_n$ são ramos truncados então a extensão por ramos $B = C[E_i, K_i]_{i=1}^m$ é uma extensão tubular no sentido do Ringel [41].

A seguinte proposição resume o estudo da aljava de Auslander-Reiten de um alargamento por ramos devido a Assem e Skowroński em [9]. A descrição feita na demonstração desta proposição será essencial na prova do resultado principal do capítulo 3. Para as definições e construções de inserções por raios e por coraios referimos o leitor a [41].

Na aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra dizemos que uma componente $\mathcal{D}$ é um **alargamento finito** de uma componente $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ for cofinita em $\mathcal{D}$. Dizemos que uma álgebra B é um **alargamento finito** de uma álgebra A se $\text{mod } A$ for cofinita em $\text{mod } B$.

Proposição 1.3.5 *Se A é um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada C , então sua aljava de Auslander-Reiten é obtida da aljava de Auslander-Reiten de C por inserções de raios e coraios e depois alargamentos finitos das componentes pós-projetiva, pré-injetiva e dos tubos.*

Dem. Seja A um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada C . Descreveremos a forma da aljava de Auslander-Reiten Γ_A de A .

Seja $A_0 = C$, a aljava Γ_{A_0} consiste de uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}$, uma componente pré-injetiva $\mathcal{Q}$ e uma família tubular separante $\mathbf{T}$ formada por tubos $T(\lambda)$ com $\lambda \in P_1(k)$.

Descreveremos Γ_A em vários passos já que (Q_A, I_A) pode ser obtido de (Q_C, I_C) colando um número finito de ramos.

i) Seja $A^1 = kQ^1/I^1$ a álgebra dada pela subaljava plena (Q^1, I^1) de (Q_A, I_A) cujos vértices são aqueles de C junto com os vértices de todos os ramos truncados maximais de (Q_A, I_A) nos vértices $a_1, \dots, a_r$ tais que existe pelo menos uma flecha $a_i \rightarrow b_i$ $1 \leq i \leq r$ com $a_i \notin C_0$ e $b_i \in C_0$. O radical de cada projetivo indecomponível $P(a_i)$ $1 \leq i \leq r$ tem um A^0 -módulo simples regular como somando direto e conseqüentemente A^1 é uma extensão tubular de A^0 no sentido de Ringel (ver [41]). Portanto Γ_{A^1} consiste de uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}$, uma componente pré-injetiva $\mathcal{Q}^1$ obtida de $\mathcal{Q}$ por um número finito de inserções de raios e uma família tubular $\mathbf{T}^1$ tal que $T^1(\lambda) = T(\lambda)$ para quase todo λ e $T^1(\alpha)$ é obtido de $T(\alpha)$ por um número finito de inserções de raios, para um número finito de α 's.

ii) Seja $A^2 = kQ^2/I^2$ a álgebra da subaljava (Q^2, I^2) de (Q_A, I_A) cujos vértices são aqueles de Q^1 junto com todos os vértices de todos os ramos truncados maximais de (Q_A, I_A) nos vértices $c_1, \dots, c_t$ tais que existe pelo menos uma flecha $d_j \rightarrow c_j$ $j = 1, \dots, t$ com $d_j \in C_0$ e $c_j \notin C_0$. O módulo $I(c_j)/\text{soc}I(c_j)$ tem um A^1 -módulo simples regular como somando direto. Segue que A^2 é uma coextensão tubular de A^1 , então Γ_{A^2} consiste de uma componente pós-projetiva $\mathcal{P}^2$ obtida de $\mathcal{P}^1$ por um número finito de inserções de coraios,

uma componente pré-injetiva $Q^2 = Q^1$ e uma família tubular T^2 onde $T^2(\lambda) = T^1(\lambda)$ para quase todo λ e $T^2(\alpha)$ é obtida de $T^1(\alpha)$ por um número finito de inserções de coraios, para um número finito de α' s.

iii) Seja $A^3 = kQ^3/I^3$ a álgebra da subaljava plena (Q^3, I^3) de (Q_A, I_A) cujos vértices são aqueles de Q^2 junto com os vértices de todos os ramos maximais em $Q_A \setminus Q^2$ (com as relações herdadas) colados nos ramos truncados considerados em i) por flechas com poços nestes ramos truncados. Segue que os radicais dos novos projetivos estão na componente pré-injetiva de A^2 , que os novos A^3 -módulos tem seu suporte contido nos ramos e só existe um número finito deles. Então Γ_{A^3} consiste de uma componente pré-injetiva Q^3 sendo um alargamento finito de Q^2 , uma componente pós-projetiva $P^3 = P^2$ e uma família tubular T^3 tal que $T^3(\lambda) = T^2(\lambda)$ para todo λ .

iv) Seja $A^4 = kQ^4/I^4$ a álgebra da subaljava plena (Q^4, I^4) de (Q_A, I_A) cujos vértices são aqueles de Q^3 junto com os vértices de todos os ramos conexos maximais em $Q_A \setminus Q^3$ colados nos ramos truncados considerados em i) por flechas com fontes nesses ramos truncados. Os quocientes $I/socI$ dos novos injetivos I estão nos tubos; resulta que só existe um número finito de novos A^4 -módulos e o suporte deles está contido nos ramos. A aljava Γ_{A^4} consiste de uma componente pós-projetiva $P^4 = P^3$, uma componente pré-injetiva $Q^4 = Q^3$ e uma família tubular T^4 tal que $T^4(\lambda) = T^3(\lambda)$ para quase todo λ e $T^4(\alpha)$ é um alargamento finito de $T^3(\alpha)$ para um número finito de α' s.

v) Seja $A^5 = kQ^5/I^5$ a álgebra da subaljava plena (Q^5, I^5) de (Q_A, I_A) cujos vértices são aqueles de Q^4 junto com os vértices de todos os ramos conexos maximais em $Q_A \setminus Q^4$ colados nos ramos truncados considerados em ii) pelas flechas com fontes nesses ramos truncados. De novo, $I/socI$ dos novos injetivos I são A^4 -módulos pós-projetivos. Logo os novos A^5 -módulos são um número finito e os suportes deles estão contidos nos ramos. A aljava Γ_{A^5} consiste de uma componente pós-projetiva P^5 que é um alargamento finito de P^4 , uma família tubular T^5 tal que $T^5_\lambda = T^4_\lambda$ para todo λ e uma componente pré-injetiva $Q^5 = Q^4$.

vi) Finalmente $A = kQ_A/I_A$ é obtida de A^5 colando os restantes ramos conexos maximais de Q_A colados nos ramos considerados em ii) pelas flechas com poços nesses ramos truncados. De novo, $I/socI$ dos novos injetivos I estão nos tubos, os novos A -módulos são em número finito e seus suportes estão contidos nos ramos. A aljava Γ_A consiste de uma componente pós-projetiva $P^A = P^5$ uma componente pré-injetiva $Q^A = Q^5$ e uma família tubular T^A tal que $T^A(\lambda) = T^5(\lambda)$ para quase todo λ e $T^A(\alpha)$ é um alargamento finito de $T^5(\alpha)$ para um número finito de α' s.

Resumindo Γ_A é obtida de Γ_C por um número finito de inserções de raios e coraios e depois alargamentos finitos. $\square$

O próximo exemplo ilustra a construção feita acima.

Exemplo: Na aljava as relações zeros tem sido marcadas por linhas de pontilhado fino, isto é, a composta das flechas envolvidas por uma linha pontilhada é zero. Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava com relações:

Onde C é a álgebra de Kronecker, B é a álgebra mansa obtida pela extensão por um ponto de C por um simples regular e a coextensão por um ponto de C por o mesmo simples regular. A álgebra A é obtida de B colando um ramo de extensão K em 10 e um ramo de coextensão K' em 3. As linhas pontilhadas grossas mostram os ramos truncados maximais.

(i) Seja $A^{(1)}$ dada por:

A componente pós-projetiva é igual à de C . Os tubos são todos homogêneos exceto o que contém o módulo M pelo qual é feita a extensão, isto é :

$$K \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{array} K$$

A componente pré-injetiva é obtida da C por inserções por raios.

Seja $A^{(2)}$

A componente pré-injetiva é igual à da $A^{(1)}$, todos os tubos são homogêneos exceto o de acima que resulta:

a componente pós-projetiva é obtida da de $A^{(1)}$ por inserções por coraios.

Seja $A^{(3)}$ dada por

temos um alargamento finito na componente pré-injetiva de $A^{(2)}$ e todas as outras componentes não mudam. Temos que $radP(12)$ é pré-injetivo, por tanto:

Seja $A^{(4)}$ dada por

As componentes pós-projetiva e pré-injetiva são iguais as de $A^{(3)}$ e todos os tubos a menos do não homogêneo que resulta ser um alargamento finito do de $A^{(3)}$

Seja agora $A^{(5)}$ dada por

O radical de $P(1)$ é pós-projetivo por tanto a componente pós-projetiva de $A^{(5)}$ resulta um alargamento finito da componente pós-projetiva de $A^{(4)}$ e todas as outras componentes ficam iguais as de $A^{(4)}$. A construção é dual a da $A^{(3)}$.

Finalmente $A^{(6)} = A$ e o radical do $P^{(5)}$ está no tubo não homogêneo, dualmente com $A^{(4)}$ resulta um alargamento finito no tubo de $A^{(5)}$ e todas as outras componentes ficam iguais as de $A^{(5)}$.

No seguinte teorema Ringel em [41] caracteriza as álgebras inclinadas de tipo euclideano não disfarçadas de tipo de representação infinito como alargamentos por ramos particulares:

Teorema 1.3.6 (Ringel) *Uma álgebra B é uma extensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra C mansa disfarçada se e só se é inclinada de tipo infinito com uma fatia completa na componente pré-injetiva. Dualmente B é uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra C mansa disfarçada se e só se é inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva.*

Em [7] Assem e Skowroński num teorema semelhante caracterizam as álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideano de tipo de representação infinito como alargamentos por ramos particulares

Observe que se A é uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano ela é obtida de uma álgebra hereditária H de tipo euclideano aplicando o processo inclinante um número finito de vezes.

Teorema 1.3.7 (Assem-Skowroński) *Uma álgebra A é inclinada iterada de tipo euclideano de tipo de representação infinito se e só se é isomorfa a um alargamento doméstico de uma álgebra mansa disfarçada em módulos simples regulares. Nesse caso o tipo tubular de A é igual ao da álgebra hereditária H .*

Capítulo 2

A conjectura de Roldán no caso $\tilde{A}_n$

2.1 A conjectura de Roldán

No capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos básicos de teoria inclinante para atacar o nosso problema. Discutimos lá como são as aljavas ordinárias de uma álgebra inclinada e de uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano. Vamos agora a concentrar-nos na conjectura de Roldán.

Seja Q uma aljava sem circuitos orientados que não seja um diagrama de Dynkin.

Conjectura 2.1.1 *Seja B uma álgebra inclinada iterada de tipo de representação finito de tipo Q , então existem sequências de módulos inclinantes separantes $T'_0, \dots, T'_{m-1}$ e álgebras $B_0, \dots, B_m$, onde $B_i = \text{End}_{B_{i-1}} T'_{i-1}$ com $B_0 = B$, $B_m = kQ$ e B_{m-1} de tipo de representação finito.*

Observação 2.1.2 *Se T é um A -módulo inclinante separante e $B = \text{End}_A T$ é de tipo finito então A é de tipo finito.*

Observação 2.1.3 *Todas as álgebras B_i com $i \neq m$ no enunciado da conjectura são de tipo finito.*

Isto significa que nossa álgebra pode ser "aproximada" por álgebras de tipo finito usando o processo inclinante, onde cada B_i -módulo indecomponível é aplicado em um B_{i+1} -módulo indecomponível pelas equivalências de Brenner e Butler. Observe que se a conjectura for verdadeira e conhecermos bem as álgebras inclinadas de tipo finito teremos um bom conhecimento das álgebras inclinadas iteradas de tipo finito.

No presente capítulo mostraremos que a conjectura de Roldán é satisfeita no caso em que A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita. Isto significa

que nossa álgebra A pode ser aproximada usando o processo inclinante, por álgebras de tipo de representação finita onde toda a informação essencial sobre a categoria $\text{mod} A$ está contida na penúltima álgebra que aparece na sequência e a mesma é transmitida de uma para outra pelas equivalências dadas pelo teorema de Brenner e Butler. A penúltima álgebra resulta ser uma álgebra inclinada de tipo finito, desta maneira se conhecemos bem as álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita temos um bom conhecimento das álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita.

2.2 Álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$

No capítulo 1 apresentamos os resultados de Assem e Skowroński caracterizando as aljavas das álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideano de representação infinita. Nessa oportunidade mostramos que as aljavas de tais álgebras correspondem a alargamentos por ramos domésticos de álgebras mansas disfarçadas. Para as álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$, Assem e Skowroński conseguiram uma descrição mais minuciosa das aljavas de estas álgebras. Eles caracterizaram tais álgebras em função de sua aljava ordinária em [8]:

Teorema 2.2.1 (Assem-Skowroński) *Seja k um corpo algebricamente fechado, e A uma k -álgebra de dimensão finita, básica e conexa. Então são equivalentes:*

- i) A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$.*
- ii) A é isomorfa à álgebra da aljava kQ/I onde a aljava (Q, I) satisfaz as seguintes condições:*
 - (R_1) O número de flechas que chegam ou saem de um vértice é no máximo dois.*
 - (R_2) Para cada flecha α , existe no máximo uma flecha β e uma flecha γ tais que $\alpha\beta$ e $\gamma\alpha$ não pertencem a I .*
 - (R_3) I é gerado por caminhos de comprimento dois.*
 - (R_4) Para cada flecha α em Q existe no máximo uma flecha β e uma flecha γ tais que $\alpha\beta$ e $\gamma\alpha$ pertencem a I .*
 - (R_5) Q contém um único circuito não orientado C .*
 - (R_6) O número de relações orientadas no sentido horário em C é igual ao número de relações no sentido anti-horário em C .*
 - (R_7) Q contém exatamente $n+1$ vértices.*

Definição 2.2.2 *A uma álgebra que satisfaz de (R_1) até (R_7) se diz que satisfaz a propriedade (R)*

Também em [8] Assem-Skowronski mostraram que o fato da álgebra ser de tipo de representação finito se reflete numa condição adicional sobre a aljava ordinária:

Teorema 2.2.3 (Assem-Skowronski) *Seja k algebricamente fechado e A uma k -álgebra de dimensão finita, básica e conexa. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) A é uma álgebra inclinada iterada de tipo de representação finito de tipo $\tilde{A}_n$.
 - ii) A satisfaz a condição (R) junto com a condição adicional:
- (R_8) Existe ao menos uma relação envolvendo as flechas de C .

Observe que se A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação infinita então por 1.3.7 ela é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada. Segue de 2.2.1 e 2.2.3 que A é um alargamento por ramos de uma álgebra $\tilde{A}_m$ e que os ramos satisfazem a propriedade (R) . Além disto, de [5] segue que tais ramos são álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_r$ para algum r .

Definição 2.2.4 Dizemos que um ramo de extensão está **colado externamente** no circuito se é colado como na figura da esquerda, onde Q_C é a subaljava que contém ao circuito e B é o ramo, e que está **colado internamente** se é colado como na figura da direita, onde Q_C é a subaljava que contém ao circuito e B é o ramo.

Observe que se A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ pela propriedade (R) um ramo de extensão ou está colado externamente ou está colado internamente.

2.3 Observações sobre módulos inclinantes

Seja Q_A uma aljava sem circuitos orientados. Para cada poço i em Q_A o módulo APR-inclinante associado é

$$T^i = \tau^{-1}e_i A \oplus (1 - e_i)A$$

Observe que T^i é um módulo separante.

Assuma que a aljava (Q, I) satisfaz a propriedade (R) e que T_A^i é o módulo APR-inclinante associado ao poço i . Vamos descrever a aljava de $B = \text{End}_A T^i$ e mostraremos que esta ainda satisfaz a propriedade (R) . Denotaremos por j^* o vértice de Q_B correspondente ao vértice j de Q_A . O poço i se chamará **ligado** se é o ponto final de pelo menos uma relação zero em Q_A , caso contrário se chamará **livre**. Estas caracterizações das aljavas de $\text{End}_A T^i$ foram feitas em [8]. Já que no artigo publicado estas demonstrações não aparecem com detalhes, optamos aqui por incluí-las para a conveniência do leitor.

Lema 2.3.1 (*Assem-Skowronski*) *Sejam A satisfazendo a condição (R) , i um poço livre em Q_A , B e T^i como acima. Então:*

- i) *Toda flecha $j \rightarrow i$ em Q_A induz uma flecha $i^* \rightarrow j^*$ em Q_B .*
- ii) *Toda flecha $h \rightarrow j$ ($j \neq i$) em Q_A induz uma flecha $h^* \rightarrow j^*$ em Q_B .*
- iii) *Todas as flechas em Q_B são exatamente da forma i) ou ii).*
- iv) *As relações em Q_B são exatamente aquelas de $Q_A \setminus \{i\}$ (isto é, existe uma relação zero $a^* \rightarrow b^* \rightarrow c^*$ se e só se existe uma relação zero $a \rightarrow b \rightarrow c$ em Q_A , e estas relações formam um conjunto minimal de geradores em I_B)*

Dem. (i) Para cada flecha $j \rightarrow i$ correspondem morfismos irredutíveis

$$P(i) \longrightarrow P(j) \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$$

em mod A . De fato, como $P(i)$ é um módulo simples projetivo, temos que a sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$ é dada por

$$0 \longrightarrow P(i) \longrightarrow \bigoplus_{l \rightarrow i} P(l) \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow 0$$

de onde obtemos os morfismos irredutíveis acima. Aplicando $\text{Hom}_A(T^i, -)$ a esses morfismos irredutíveis obtemos em mod B

$$P(j^*) = \text{Hom}_A(T^i, P(j)) \longrightarrow \text{Hom}_A(T^i, \tau^{-1}P(i)) = P(i^*)$$

o que induz uma flecha $i^* \rightarrow j^*$ em Q_B .

- ii) Seja $h \rightarrow j$ uma flecha em Q_A com $j \neq i$, então existe um morfismo

$$f : P(j) \longrightarrow P(h)$$

em mod A que não se fatora através de outro projetivo indecomponível. Logo f induz um morfismo

$$f^* : P(j^*) \longrightarrow P(h^*)$$

em mod B . Se f^* se fatora através de $P(a^*)$, $a^* \neq i^*$, então $f = f^* \otimes_B T^i$ se fatora através de $P(a)$. Contradição.

Se f^* se fatora através de $P(i^*)$ então f se fatora através de $\tau^{-1}P(i)$. Por tanto existem

$$f_1 : P(j) \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$$

e

$$f_2 : \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(h)$$

tais que

$$f = f_2 f_1$$

Considere a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \leftarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \rightarrow 0$$

Observe que $f_2 v \neq 0$ pois v é epimorfismo e $f_2 v u = 0$. Como A satisfaz a condição (R) então chegam no máximo duas flechas a i , e o ideal I é gerado por relações zero de comprimento dois.

Se i é o final de apenas uma flecha então temos só um somando no meio da sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$. Logo o morfismo $f_2 v u$ está associado a um caminho γ que passa por j e $f_2 v u = 0$, o que implica que $\gamma = 0$. Contradição com o fato de i ser um poço livre.

Se existirem duas flechas chegando em i teríamos dois somandos no meio da sequência de Auslander-Reiten então

$$0 = f_2 v u = f_2 v_1 u_1 + f_2 v_2 u_2$$

Tais morfismos teriam associados respectivos caminhos

$$0 = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Logo teríamos uma relação de comutatividade, o que é uma contradição ao fato de que I é gerado por relações zero. Portanto

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

e i não é livre. Contradição. Segue que f^* não se fatora através de $P(i^*)$ e portanto existe uma flecha $h^* \rightarrow j^*$ em Q_B .

iii) Seja agora $a^* \rightarrow b^*$ uma flecha arbitrária em Q_B .

Se $a = i$ então existe um morfismo $f^* : P(b^*) \rightarrow P(i^*)$ que não se fatora através de nenhum outro projetivo. Temos um morfismo

$$f = f^* \otimes_B T^i : P(b) \rightarrow \tau^{-1}P(i)$$

que chega no extremo direito de uma sequência de Auslander-Reiten. Portanto pela propriedade das sequências de Auslander-Reiten tal morfismo se fatora através do termo do meio da sequência que é projetivo. Segue que f^* se fatora através de um projetivo, e portanto $b = l$ para algum l tal que existe uma flecha $l \rightarrow i$, e isto já foi analisado no caso i).

Se $b = i$, temos $a^* \rightarrow i^*$ e existe um morfismo não nulo

$$f^* : P(i^*) \rightarrow P(a^*)$$

que não se fatora através de outro projetivo. Temos um morfismo não nulo

$$f = f^* \otimes_B T^i : \tau^{-1}P(i) \rightarrow P(a)$$

Considere a sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$

$$0 \rightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \rightarrow i} \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \rightarrow 0$$

então temos que $fv \neq 0$, pois v é epimorfismo e $fvu = 0$, portanto i não é livre. Contradição.

Finalmente se $a \neq i$, $b \neq i$ o morfismo

$$f^* : P(b^*) \rightarrow P(a^*)$$

não se fatora através de outro projetivo. Segue que

$$f : P(b) \rightarrow P(a)$$

não se fatora através de outro projetivo, então existe uma flecha $a \rightarrow b$ e estamos no caso ii).

iv) Precisamos mostrar que não existe em Q_B uma relação com ponto inicial i^* . Suponhamos que tal relação existisse, e que j^* fosse seu ponto final. Observe que a condição (R) implica a existência de no máximo dois caminhos em Q_B de i^* a j^* . De fato existem no máximo duas flechas saindo de i^* , já que existem no máximo duas flechas chegando em i em Q_A e todas as possíveis flechas saindo de i^* são induzidas por flechas chegando em i por iii).

Existe um caminho

$$i^* \rightarrow k^* \rightarrow \cdots \rightarrow j^*$$

se e só se existe um passeio em Q_A

$$i \leftarrow k \rightarrow \cdots \rightarrow j$$

Já que de cada ponto em Q_A saem no máximo duas flechas distintas, pela condição (R) não pode sair outra flecha de k . Então se existe outro caminho diferente de k para j estes dois caminhos teriam em comum a primeira flecha e em algum ponto intermédio, digamos t , existiria outro caminho começando em t e acabando em j diferente do anterior. Temos então duas flechas saindo de t , e uma flecha chegando em t , logo pela condição (R₂) uma das duas compostas tem que estar em I . Segue então que um dos caminhos tem que ser zero. Portanto só existe um caminho de i^* para j^* passando por k^* . Se existir outro caminho de i^* a j^* deve existir necessariamente outro vértice $l^* \neq k^*$ e outra flecha $i^* \rightarrow l^*$ tal que dito caminho se fatore através de l^* . Logo pelo mesmo argumento anterior existe um único caminho de i^* a j^* passando por l^* . Segue que existem no máximo dois caminhos de i^* a j^* .

Se existem dois caminhos de i^* a j^* , então não existe nenhuma relação de comutatividade possível. De fato, já que existem dois caminhos de i^* a j^* temos que

$$\dim_k \text{Hom}_A(P(j), \oplus_{l \rightarrow i} P(l)) = 2$$

Segue então que existem dois morfismos g_1 e g_2 linearmente independentes. Considere a sequência de Auslander-Reiten começando em $P(i)$

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \rightarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1} P(i) \rightarrow 0$$

Observe que vg_1 e vg_2 são linearmente dependentes já que temos uma relação de comutatividade $\dim_k \text{Hom}_A(P(j), \tau^{-1} P(i)) = 1$. Segue que $vg_1 = \lambda vg_2$ para algum $\lambda \in k$. Além disto $g = g_1 - \lambda g_2 \neq 0$ pois g_1 e g_2 são linearmente independentes, e que $vg = 0$. Então g se fatora através do núcleo de v pela propriedade do conúcleo. Isto é, existe $fP(j) \longrightarrow P(i)$, $f \neq 0$ tal que $g = uf$. Contradição pois $P(i)$ é simples projetivo. Similarmente se tivéssemos uma relação zero de i^* a j^* , teríamos um morfismo não nulo

$$f : P(j) \longrightarrow \oplus_{l \neq i} P(l)$$

tal que $vf = 0$ então f se fatora pelo núcleo de v . Contradição. $\square$

Lema 2.3.2 (Assem-Skowroński) *Seja A satisfazendo a condição (R), i um poço ligado em Q_A , B e T^i como acima. Então:*

i) Toda flecha $h \rightarrow i$ em Q_A induz uma flecha $i^ \rightarrow h^*$ em Q_B .*

ii) Toda relação de j a i em Q_A induz uma flecha $j^* \rightarrow i^*$ em Q_B .

iii) Toda flecha $h \rightarrow j$ ($j \neq i$) tal que não existe uma relação zero $h \rightarrow j \rightarrow i$ induz uma flecha $h^* \rightarrow j^*$ em Q_B , se existir uma relação zero $h \rightarrow j \rightarrow i$ então existem flechas $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ em Q_B .

iv) Todas as flechas em Q_B são da forma (i), (ii) or (iii).

v) Um sistema minimal de geradores para I_B é dado por relações zero da forma $a^* \rightarrow b^* \rightarrow c^*$ onde $a \rightarrow b \rightarrow c$ é uma relação zero em Q_A e $c \neq i$, da forma $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ onde não existe caminho de h para j em Q_A e da forma $a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^*$ se existirem relações zero $a \rightarrow h \rightarrow j$ e $h \rightarrow j \rightarrow i$ em Q_A .

Dem. i) A demonstração é análoga à feita em 2.3.1.

ii) Seja $j \rightarrow l \rightarrow i$ uma relação zero de j até i . Se $N = \text{rad}P(j)$ então existe um epimorfismo de $P(l)$ em N que se fatora através de $\tau^{-1}P(i)$ pela propriedade do conúcleo. Por argumentos similares aos usados em [5] segue que existe um caminho seccional

$$P(l) \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow \cdots \longrightarrow N \longrightarrow P(j)$$

o que induz morfismos

$$P(l^*) \longrightarrow P(i^*) \longrightarrow P(j^*)$$

em $\text{mod } B$ onde o último morfismo não se fatora através de nenhum outro projetivo. Segue que existe uma flecha $j^* \rightarrow i^*$.

iii) Seja $h \rightarrow j$ uma flecha em Q_A e $f : P(j) \longrightarrow P(h)$ o morfismo induzido. Temos então $f^* = \text{Hom}_A(T^i, f) : P(j^*) \longrightarrow P(h^*)$. Se f^* se fatora através de $P(i^*)$, então $f = f_1 f_2$ com

$$f_1 : \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(h)$$

$$f_2 : P(j) \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$$

Temos que f_2 chega no extremo direito da sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \rightarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \rightarrow 0$$

Logo pela propriedade das sequências de Auslander-Reiten existe

$$g_2 : P(j) \rightarrow \oplus_{l \rightarrow i} P(l)$$

tal que $f_2 = v g_2$. Seja $g_1 = f_1 v$, então

$$g_1 g_2 = f_1 v g_2 = f_1 f_2 = f$$

logo f se fatora através de um projetivo. Contradição com o fato que o morfismo f é induzido pela flecha $h \rightarrow j$. Portanto $P(h) \cong P(l)$ ou $P(j) \cong P(l)$ para algum $l \rightarrow i$. No primeiro caso $h = l$ então por [12] temos que $g_1 u \neq 0$. Por outro lado

$$g_1 u = f_1 v u = 0$$

contradição. Então $P(j) \cong P(l)$ para algum l , e temos uma flecha de j até i . Neste caso $g_1 \neq 0$ é um morfismo não nulo que tem associado um caminho não nulo de h em j , enquanto $g_1 u = 0$, onde u é um morfismo não nulo que tem associado um caminho não nulo de i em j . Segue que temos uma relação zero

$$h \rightarrow j \rightarrow i$$

De i) e ii) segue que

$$h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$$

é uma relação zero em Q_B .

iv) Seja $a^* \rightarrow b^*$ uma flecha arbitrária em Q_B .

Se $b = i$ temos um morfismo não nulo

$$g : \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(a)$$

Se consideramos a sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \rightarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \rightarrow 0$$

temos que $gv \neq 0$ enquanto que $gvu = 0$. Logo existe uma relação zero de a até i e estamos no caso ii).

Se $a = i$ então existe um morfismo de $f : P(b) \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$ que não se fatora através de outro projetivo. Tal morfismo f chega no extremo direito da sequência de Auslander-Reiten que começa em $P(i)$, portanto existe um morfismo não nulo de $g : P(b) \longrightarrow \oplus_{l \rightarrow i} P(l)$ tal que $vg = f$. Já que f não se fatora através de outro projetivo segue que $P(b)$ é um dos termos do meio da sequência de Auslander-Reiten e então existe uma flecha de $b \rightarrow i$ e estamos no caso i).

Finalmente se $a \neq i \neq b$ temos um morfismo de $P(b) \longrightarrow P(a)$ que não se fatora através de outro projetivo, então existe uma flecha $a \rightarrow b$ estamos no caso iii).

v) Se γ^* de a^* a b^* é um caminho em Q_B tal que ele não é induzido por um caminho γ de Q_A , então ele se fatora através de i^* . Isto é, γ^* é a composta de δ^* de a^* a i^* e β^* de i^* a b^*

$$\gamma^* = \beta^* \delta^*$$

Se $a^* \neq i^*$ então $\delta^* = \epsilon^* \alpha^*$ onde ϵ^* é um caminho de a^* até h^* e α^* é uma flecha de h^* a i^* . Existe uma flecha de h^* em i^* se e só se existir uma relação zero

$$h \rightarrow j' \rightarrow i$$

em Q_A .

Se $b^* \neq i^*$ então $\beta^* = \phi^* \pi^*$ onde ϕ^* é uma flecha de i^* em j^* e π^* é um caminho de j^* em b^* . Existe uma flecha de $i^* \rightarrow j^*$ em Q_B se e só se existir uma flecha de $j \rightarrow i$ em Q_A .

Então se $a^* \neq i^*$ e $b^* \neq i^*$, γ^* se fatora através em Q_B de

$$h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$$

onde existe uma relação zero em Q_A $h \rightarrow j' \rightarrow i$ e uma flecha $j \rightarrow i$.

Claramente toda relação zero de Q_A que não passa através de um caminho mencionado induz uma relação zero em Q_B .

Afirmamos que $j \neq j'$ se e só se $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ é uma relação zero em Q_B .

Já que se $j = j'$ temos por ii) um caminho seccional na aljava de Auslander-Reiten de A .

$$P(j) \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow \dots \longrightarrow R(j) \longrightarrow P(h)$$

onde $R(j)$ é um somando do rad $P(h)$ tendo $S(j)$ como topo.

Já mostramos que isso induz um morfismo não nulo

$$P(j^*) \longrightarrow P(i^*) \longrightarrow P(h^*)$$

isto é, um caminho não nulo

$$h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$$

Se $j \neq j'$ a composta $P(j') \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(h)$ deve ser zero já que ela se fatora através de $R(j)$. Sejam

$$f : P(j') \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$$

e

$$g : \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(h)$$

então

$$\tau^{-1}P(i) \xrightarrow{g_2} \text{rad}P(h) \xrightarrow{\pi} R(j) \xrightarrow{i} \text{rad}P(h) \xrightarrow{g_1} P(h)$$

onde π e i são a projecção e a inclusão respectivamente sobre o somando $R(j)$, temos que $g = g_1 g_2$.

Se $gf \neq 0$ então $g_1g_2f \neq 0$ e portanto $g_2f \neq 0$ temos

$$\pi_1 : P(j) \rightarrow R(j)$$

um epimorfismo e

$$g_2f : P(j') \rightarrow R(j)$$

Já que $P(j')$ é projetivo temos um morfismo

$$\phi : P(j') \rightarrow P(j)$$

tal que $\pi_1\phi = g_2f$.

Segue que $g_1\pi_1\phi = g_1g_2f = gf$ e portanto gf se fatora através de $P(j)$ o que contradiz o fato que tínhamos uma flecha de $h \rightarrow j'$. Então $gf = 0$ e portanto temos a relação zero em $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ em Q_B .

Suponha agora que exista em Q_A uma relação zero

$$a \rightarrow h \rightarrow j$$

seguida de outra relação zero

$$h \rightarrow j \rightarrow i$$

Mostraremos que existe uma relação zero

$$a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^*$$

em Q_B .

Vamos ver que $\text{Hom}_A(\tau^{-1}P(i), P(a)) = 0$. Considere a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \oplus_{l \rightarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \longrightarrow 0$$

Se existir um morfismo não nulo

$$g : \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(a)$$

$g \neq 0$ então $gv \neq 0$ pois v é epimorfismo.

Já que $a \rightarrow h \rightarrow j$ é zero em Q_A , então $\text{Hom}_A(P(j), P(a)) = 0$. Logo existe j' tal que temos uma flecha $j' \rightarrow i$. Segue que $v = (v_1, v_2)$ onde $v_2 : P(j') \longrightarrow \tau^{-1}P(i)$, portanto temos

$$gv_2 : P(j') \rightarrow P(a)$$

tal que $gv_2 \neq 0$. Segue que Q_A contém um circuito

$$a \rightarrow h \rightarrow j \rightarrow i$$

$$a \rightarrow \cdots j' \rightarrow i$$

com duas relações em sentido horário. Logo devem existir duas relações em sentido anti-horário pela propriedade (R). Portanto $\text{Hom}_A(P(j'), P(a)) = 0$. Contradição. Segue que $\text{Hom}_A(\tau^{-1}P(i), P(a)) = 0$ portanto temos a relação zero $a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^* \rightarrow$ em Q_B .

Seja agora

$$\delta^* : a^* \rightarrow \cdots \rightarrow i^*$$

uma relação zero minimal em Q_B então $\delta^* = \alpha^* \pi^*$ onde $\alpha^* : h^* \rightarrow i^*$ é uma flecha então existe uma relação em Q_A e existem flechas $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ em Q_B .

Já que δ^* é uma relação zero então $\text{Hom}_B(P(i^*), P(a^*)) = 0$ e existe um caminho

$$a^* \rightarrow \cdots h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$$

Portanto $\text{Hom}_B(P(j^*), P(a^*)) = 0$, e conseqüentemente $\text{Hom}_A(P(j), P(a)) = 0$. Segue daí que

$$a \rightarrow \cdots \rightarrow h \rightarrow j$$

é uma relação zero em Q_A . Do fato de Q_A satisfazer a propriedade (R) segue que o caminho de a para h na relação é uma flecha, e então temos

$$a \rightarrow h \rightarrow j$$

Portanto

$$\delta^* = a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^*$$

Logo se δ^* é zero e acaba em i^* , temos que $\delta^* = a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^*$ onde existem relações $a \rightarrow h \rightarrow j$ e $h \rightarrow j \rightarrow i$ em Q_A .

Vejamos agora que estas são as únicas relações possíveis.

Se

$$\gamma^* : a^* \rightarrow \cdots \rightarrow b^*$$

é uma relação zero em Q_B minimal, precisamos ainda considerar os seguintes dois casos: se $a^* = i^*$ ou $a^* \neq i^*$ e $b^* \neq i^*$

Se $a^* = i^*$ já que γ^* é uma relação zero temos que $\text{Hom}_B(P(b^*), P(i^*)) = 0$

$$\gamma^* = \pi^* \alpha^*$$

onde $\alpha^* : i^* \rightarrow j^*$ é uma flecha, então $\text{Hom}_B(P(b^*), P(j^*)) \neq 0$. Logo $\text{Hom}_A(P(b), P(j)) \neq 0$, isto é, existe

$$\phi : P(b) \longrightarrow P(j)$$

tal que $\phi \neq 0$. Como $\text{Hom}_B(P(b^*), P(i^*)) = 0$ temos que $\text{Hom}_A(P(b), \tau^{-1}P(i)) = 0$. Considere a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(i) \xrightarrow{u} \bigoplus_{l \rightarrow i} P(l) \xrightarrow{v} \tau^{-1}P(i) \longrightarrow 0$$

temos por um lado que $v\phi = 0$ já que $\text{Hom}_A(P(b), \tau^{-1}P(i)) = 0$. Então pela propriedade do conúcleo existe $\Phi : P(b) \rightarrow P(i)$ tal que $u\Phi = \phi$ e portanto $\Phi \neq 0$. Absurdo pois $P(i)$ é simples projetivo. Segue que não existe nenhuma relação zero começando em i^* .

Seja $\gamma^* : a^* \rightarrow \dots \rightarrow b^*$ com $a^* \neq i^*$ e $b^* \neq i^*$ e induzido por um caminho de Q_A . Logo γ^* se fatora através de $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ onde existe uma relação zero $h \rightarrow j \rightarrow i$ em Q_A

$$\gamma^* : a^* \rightarrow \dots \rightarrow h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^* \rightarrow \dots \rightarrow b^*$$

Temos que o correspondente morfismo

$$P(b) \longrightarrow \dots \longrightarrow P(j) \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow P(h) \longrightarrow \dots \longrightarrow P(a)$$

tem composta zero, e induz uma relação zero

$$a \rightarrow \dots \rightarrow h \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow b$$

em Q_A . Já que existe a relação zero

$$h \rightarrow j \rightarrow i$$

e Q_A satisfaz a propriedade (R), então $b = j$, e como pela mesma propriedade $h \rightarrow j$ não pode ser parte de duas relações pela esquerda temos que a relação tem comprimento dois, portanto existe a relação $a \rightarrow h \rightarrow j$ em Q_A . Segue que existem as relações $a \rightarrow h \rightarrow j$ e $h \rightarrow j \rightarrow i$ em Q_A . Logo existe uma relação $a^* \rightarrow h^* \rightarrow i^*$ em Q_B , o que contradiz a minimalidade de γ^* . Mostra-se da mesma maneira que em 2.3.1 que não existem relações de comutatividade em Q_B , então essas são as únicas relações possíveis. $\square$

Proposição 2.3.3 *Se A satisfaz a propriedade (R) e T_A^i é o módulo APR-inclinante associado ao poço i , então $B = \text{End}_A T^i$ também satisfaz a propriedade (R).*

Dem. Observe que Q_B contém exatamente um circuito não orientado. De fato se C é o único circuito orientado de Q_A , argumentos combinatórios mostram que os vértices associados aos vértices de C também formam um circuito não orientado Q_B , tanto se o vértice i pertence a C , quanto se ele não pertence a C . Devemos ver que não se forma outro circuito orientado em Q_B . Se este for o caso o vértice i^* também pertence a este circuito. Agora sabemos que toda flecha que sai de i^* é induzida por uma flecha que chega em i , e se existe uma flecha chegando em i^* ela é induzida por uma relação zero que acaba em i . Em todo caso temos que o novo circuito orientado provem de um circuito orientado em Q_A . Portanto só existe um circuito não orientado em Q_B . Observe também que I_B é gerado por caminhos de comprimento dois. Se uma das relações zero $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j^*$ em Q_B que não provém de uma relação zero em Q_A está no circuito em Q_B então existe uma relação $h \rightarrow j \rightarrow i$ em Q_A e uma flecha $j' \rightarrow i$. Como $h^* \rightarrow i^* \rightarrow j'^*$ está no circuito existe um passeio em Q_B de h^* a j'^* que não passa por i^* e este passeio por 2.3.1 e 2.3.2 é induzido por um passeio em Q_A de h a j' que não passa por i . Então o número de relações orientadas em sentido horário é igual ao número de relações orientadas em sentido anti-horário. As outras relações se verificam facilmente. $\square$

Definição 2.3.4 a) Se (A, T, B) é uma terna inclinante, diremos que B é obtida de A aplicando o módulo inclinante T .

b) Diremos que o módulo inclinante T é dado por uma composta de módulos APR-inclinentes, se aplicar T é equivalente a aplicar uma sequência módulos APR-inclinentes.

Corolário 2.3.5 Seja A uma álgebra satisfazendo (R) , e T_A uma composta de módulos APR-inclinentes. Então $\text{End}_A T$ satisfaz a propriedade (R) .

Usando as técnicas desenvolvidas em [3] mostraremos nos lemas seguintes que os módulos envolvidos são compostas de módulos APR-inclinentes.

Seja $e = \sum_{i=0}^l e_i$ uma soma de idempotentes ortogonais e primitivos, tais que $e_0 A$ é um A -módulo simples projetivo. Se $A_1 = \text{End}_A T[0]$ onde $T[0]$ é o A -módulo APR-inclinante associado ao vértice 0, então $e_1 A_1$ é um simples projetivo de A_1 . Indutivamente se $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T[i-1]$, onde $T[i-1]$ é o A_{i-1} -módulo APR-inclinante associado ao vértice $i-1$, temos que $e_i A_i$ é um simples projetivo de A_i . Temos o seguinte lema:

Lema 2.3.6 Seja $e = \sum_{i=0}^l e_i$ como acima, e seja $T_A = \tau^{-1} e A \oplus (1 - e) A$. Então T_A é um módulo inclinante que é uma composta de módulos APR-inclinentes.

Dem.

Seja $B = \text{End}_A T$ e seja

$$T[0] = \tau^{-1} e_0 A \oplus (1 - e_0) A$$

$T[0]$ é separante pois

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T[0]) &= \{e_0 A\} \\ \mathcal{T}(T[0]) &= \text{ind} A \setminus \{e_0 A\} \end{aligned}$$

Então

$$T \in \mathcal{T}[T[0]] \cong \mathcal{Y}[T[0]]$$

pela equivalência $\text{Hom}_A(T[0], -)$.

Definimos

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{End}_A T[0] \\ T_{A_1}^1 &= \text{Hom}_A(T[0], T) \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{End}_{A_1} T^1 = \text{Hom}_{A_1}(\text{Hom}_A(T[0], T), \text{Hom}_A(T[0], T)) \cong \text{Hom}_A(T, T) = \text{End}_A T = B$$

Observe que $T_{A_1}^1$ tem agora o primeiro somando projetivo, isto é

$$\text{Hom}_A(T[0], \tau^{-1}e_0A) = P_{A_1}^0$$

então $T_{A_1}^1$ tem $l - 1$ somandos não projetivos.

Indutivamente se $j < l - 1$

$$A_j = \text{End}_{A_{j-1}} T[j - 1]$$

$$T[j] = e_j A_j \oplus (1 - e_j) A_j$$

$$T_{A_j}^j = \text{Hom}_{A_{j-1}}(T[j], T^{j-1})$$

temos que

$$\mathcal{T}(T[j]) \cong \mathcal{Y}(T[j])$$

Observe que $T_{A_j}^j$ tem $l - (j + 1)$ somandos não projetivos e

$$\text{End}_{A_j} T^j = B$$

Se $j = l - 1$

$$T_{A_j}^j = T_{A_{l-1}}^{l-1} = T_{A_{l-1}} = T_{A_{l-1}}[l]$$

já que $T_{A_{l-1}}^{l-1}$ tem $l - (l - 1) = 1$ somando não projetivo.

$$\text{End}_{A_{l-1}} T^{l-1} = B$$

Portanto aplicar T é equivalente a aplicar uma sequência de módulos inclinantes separantes $T[0], T[1], \dots, T[l]$ sobre as respectivas álgebras A_i tais que

$$A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T[i - 1]$$

Logo T é a composta de $l + 1$ módulos APR-inclinantes. $\square$

Lema 2.3.7 *Seja $\mathcal{S}$ uma fatia completa com um número finito de predecessores e sem circuitos orientados entre seus predecessores. Seja T o módulo da fatia $\mathcal{S}$, então ele é um módulo inclinante que é composta de módulos APR-inclinantes.*

Dem. Seja

$$T_A = \bigoplus_{i=1}^n T(i)$$

o módulo da fatia $\mathcal{S}$. Já que $\mathcal{S}$ tem um número finito de predecessores então cada $T(i)$ está na órbita de um módulo projetivo, isto é:

$$T(i) = \tau^{-r_i} P(s_i)$$

então

$$T_A = \bigoplus_{i=1}^n \tau^{-r_i} P(s_i)$$

Seja

$$T[1]_A = \tau^{-1} P(s_1) \oplus \bigoplus_{j \neq 1} P(s_j)$$

Observe que

$$\tau^{-r_k} P(s_k) \in \mathcal{T}(T[1])$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Sejam

$$T^1 = \text{Hom}_A(T[1], T)$$

e

$$B = \text{End}_A T = \text{End}_{A_1} T$$

onde

$$A_1 = \text{End}_A T[1]$$

Temos que para $k = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, r_k$

$$\tau^j \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-r_k} P_{s_k}) \cong \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-r_k+j} P(s_k))$$

De fato, observe que $\tau^{-r_k} P_{s_k}$ não tem predecessores injetivos pois é um módulo da fatia completa $\mathcal{S}$. Logo $\text{Hom}_A(DA, \tau^{-r_k} P_{s_k}) = 0$, e portanto $pd \tau^{-r_k} P_{s_k} \leq 1$ (ver [41]). Por outro lado temos que $\tau^{-r_k} P_{s_k}$ pertence a $\mathcal{T}(T[1])$. A afirmação segue da observação de [41] no fim da página 17. Então

$$\tau^{r_k} \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-r_k} P(s_k)) \cong \text{Hom}_A(T[1], P(s_k)) = P_{s_k}^1$$

Portanto

$$\tau^{r_k} P_{s_k}^1 \cong \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-r_k} P(s_k)) = T^1(k)$$

onde $k = 2, \dots, n$. Para $k = 1$ temos

$$\tau^{-(r_1-1)} P_{s_1}^1 = \tau^{-(r_1-1)} \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-1} P(s_1)) \cong \text{Hom}_A(T[1], \tau^{-r_1} P(s_1)) = T^1(1)$$

Conseqüentemente

$$T^1(k) = \tau^{-r_k} P_{s_k}^1$$

para $k = 2, \dots, n$. Além disto,

$$T^1(1) = \tau^{-(r_1-1)} P_{s_1}^1$$

Seja

$$T[1]_{A_1} = \tau^{-1} P_{s_1}^1 \oplus \bigoplus_{i \neq 1} P^1(s_i)$$

então

$$T_{A_1}^1 \in \mathcal{T}_{A_1}(T[1])$$

e

$$T_{A_2}^2 = \text{Hom}_{A_1}(T[1], T^1)$$

então

$$T_{A_2}^1(1) = \tau^{-(r_1-2)} P^1(s_1)$$

e

$$T_{A_2}^1(k) = \tau^{-r_k} P^1(s_k)$$

para $k = 2, \dots, n$. Indutivamente temos que

$$A_{r_1} = \text{End}_{A_{r_1-1}} T[1]$$

e

$$T_{A_{r_1}}^1 = \text{Hom}_{A_{r_1}}(T[1], T^1)$$

tal que

$$T_{A_{r_1}}^1(1) = P^{r_1}(s_1)$$

e

$$T_{A_{r_1}}^1(k) = \tau^{-r_k} P^{r_1}(s_k)$$

Seja agora

$$T[2]_{A_{r_1}} = \tau^{-1} P^{r_1}(s_2) \oplus_{i \neq 2} P^{r_1}(s_i)$$

$$A_{r_1+1} = \text{End}_{A_{r_1}} T[2]$$

e

$$T_{A_{r_1+1}}^2 = \text{Hom}_{A_{r_1}}(T[2], T^1)$$

Assim sucessivamente aplicamos r_2 vezes o módulo APR-inclinante associado ao vértice s_2 sobre as respectivas álgebras até obtermos

$$A_{r_1+r_2} = \text{End}_{A_{r_1+r_2-1}} T[2]$$

Sucessivamente aplicamos r_i vezes o módulo APR-inclinante associado ao vértice s_i sobre as respectivas álgebras até obtermos

$$T_{A_{r_1+r_2+\dots+r_n-1}}^n = T[n]_{A_{r_1+r_2+\dots+r_n-1}}$$

$$B = \text{End}_{A_{r_1+\dots+r_n-1}} T^n = \text{End}_{A_{r_1+\dots+r_n-1}} T[i]$$

Então B é obtida através da aplicação r_1 vezes do módulo APR-inclinante associado ao vértice s_1 , a aplicação r_2 vezes do módulo APR-inclinante associado ao vértice s_2 , assim sucessivamente até aplicar r_n vezes o módulo APR-inclinante associado ao vértice s_n . Logo aplicar T é equivalente a aplicar uma composta de módulos APR-inclinaentes, os quais são separantes. $\square$

2.4 Álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$

Roldán em [42] classificou as álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$ dando as possíveis aljavas para elas. Já que a prova original de Roldán é de difícil acesso nós damos aqui uma prova do mesmo devida a Assem e Skowroński a qual foi recebida em comunicação privada.

Teorema 2.4.1 (Roldán) *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$. Então A é inclinada se e só se A é isomorfa a uma álgebra de caminhos kQ/I onde a aljava (Q, I) não contém como subaljava plena nenhuma das seguintes aljavas ou suas duais*

onde 1 e 2 estão no circuito.

onde 0, 1 e 2 estão no circuito.

onde todos os vértices de 1 até t estão no circuito.

Antes de apresentar a demonstração do teorema de Roldán, relembremos aqui a seguinte definição que será utilizada na prova do mesmo.

Definição 2.4.2 a) *Para um A -módulo indecomponível não projetivo Z , consideremos a sequência de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n Y_i \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

onde todos os Y_i são indecomponíveis. Definimos $\alpha'(Z) = n$

b) $\alpha'(A)$ é igual ao supremo de $\alpha'(Z)$ com Z indecomponível não projetivo.

Dem. Se A é uma álgebra inclinada iterada de tipo de representação infinita de tipo $\tilde{A}_n$ ela é um alargamento por ramos doméstico de uma $\tilde{A}_m$, $m \leq n$ por 1.3.7. Se a aljava (Q_A, I_A) de A não contém nenhuma das subaljavas acima ou suas duais, é fácil ver que A é uma extensão por ramos truncados de uma $\tilde{A}_m$, $m \leq n$. Segue de 1.3.6 que A é uma álgebra inclinada de tipo $\tilde{A}_n$. Reciprocamente, toda álgebra inclinada de tipo de representação infinita de tipo $\tilde{A}_n$ é, de novo por 1.3.6 uma extensão por ramos truncados ou uma coextensão por ramos truncados de uma álgebra hereditária de tipo $\tilde{A}_m$. Então é claro que (Q_A, I_A) não pode conter nenhuma das subaljavas acima.

Assumamos agora que A é uma álgebra inclinada iterada de tipo de representação finita de tipo $\tilde{A}_n$. Já que o número de relações no circuito C em sentido horário é igual ao número de relações em sentido anti-horário, argumentos combinatórios simples mostram que se (Q_A, I_A) não contém uma subaljava plena da forma (a), então não contém nenhuma das subaljavas plenas da forma (b), (c) ou (d) ou suas duais. Então assumamos que A é inclinada e contém uma subaljava plena da forma (a).

Observe que A está nas condições de [44] pois é de tipo finito e satisfaz (R) . Logo os A -módulos indecomponíveis são unicamente determinados por seus suportes, todos de tipo A_r . Usando o fato que existe ao menos uma relação envolvendo os vértices de C obtemos uma contradição aplicando uma construção similar à aplicada em (2.1) de [1] para mostrar que uma álgebra inclinada iterada de tipo A_r não pode ser inclinada se contém uma aljava de tipo (a).

Reciprocamente, assumamos que A não contém, uma subaljava plena da forma (a). Afirmamos que Γ_A contém uma fatia completa. Por hipótese, existem no circuito C duas relações consecutivas em direções opostas, e portanto necessariamente existe uma fonte i em C entre os pontos iniciais destas relações. Claramente o radical do projetivo indecomponível $P(i)$ consiste da soma direta de dois módulos uniserials $M(j_1)$ e $M(j_2)$. Sejam $S(j_1)$ e $S(j_2)$ os seus respectivos topos.

Observe também que não existe ramo colado em i . Já que pela condição (R) este seria necessariamente colado externamente e isso é impossível por nossa hipótese. Denotemos A_i a álgebra definida pela aljava $Q_A \setminus (i)$ com as relações induzidas. Pelo teorema principal de [1] A_i é inclinada de tipo A_n . Afirmamos que $M(j_1)$ e $M(j_2)$ considerados como A_i -módulos pertencem a diferentes órbitas em Γ_{A_i} . Isto implicará nosso resultado, já que por [2] existe uma fatia completa de tipo A_n que contém $M(j_1)$ e $M(j_2)$. Como estes são os somandos indecomponíveis do radical de $P_A(i)$ só precisamos adicionar este projetivo para obter uma fatia completa de Γ_A de tipo $\tilde{A}_n$. Para provar que $M(j_r)$, $r = 1, 2$, pertencem a uma órbita do bordo construímos estas τ -órbitas usando o método descrito ao final de [44] do qual segue que $\alpha'(N_r) \leq 1$ para todo N_r na τ -órbita de $M(j_r)$. Por outro lado, o suporte de N_r está inteiramente contido no passeio entre j_r e m_r , (ver figura), e os ramos colados nestes passeios. Em particular, as duas órbitas do bordo são distintas. Isto acaba a prova. $\square$

2.5 A prova da conjectura no caso $\tilde{A}_n$

Teorema 2.5.1 *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita. Então existem sequências de módulos inclinantes separantes $T_0, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$, tais que $A_0 = A$, $A_m = k\tilde{A}_n$, $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_{i-1}$ e A_{m-1} é de representação finita.*

Dem. Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representação finita. De 2.2.1 e 2.2.3 segue que a aljava Q_A satisfaz a propriedade (R), e consiste de um só circuito não orientado ligado pelo menos por uma relação, junto com alguns ramos K_i , cada um dos quais é a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_r$, ver [5]. Isto é, Q_{K_i} é uma subaljava plena e conexa da seguinte árvore infinita com todas as relações $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$.

Cada ramo é ligado ao circuito num único ponto b que chamaremos a raiz do ramo, isto é existe uma flecha ligando b com a ou existe uma flecha ligando a com b .

A prova será feita em oito passos.

Os passos de 1 até 4 aparecem em [8] na demonstração do teorema 1. Para maior clareza vamos lembrá-los aqui.

1) Neste passo vamos reverter todas as flechas de maneira que todas elas apontem para o circuito. Em cada ramo faremos indução na distância de cada poço ao circuito. No caso em que o poço é uma ponta, então só tem um vizinho então o módulo APR-inclinante

$$T^0 = \tau^{-1}e_0A \oplus (1 - e_0)A$$

é tal que seu anel de endomorfismos $\text{End}T^0$ ainda satisfaz a propriedade (R) por 2.3.3, mas 0^* não é um poço em $\text{End}T^0$. Indutivamente podemos assumir que o poço está no

meio do ramo e que Q_A tem a seguinte forma:

onde Q_C contém o circuito e todas as flechas de Q', Q'' apontam para o poço 0 pela hipótese de indução. Aqui Q' e Q'' podem ser vazios. Observe que Q' contém uma subaljava plena conexa $l \rightarrow \dots \rightarrow i+1 \rightarrow i$ que é maximal com a propriedade de não conter uma relação zero. Nesse caso a aljava de Auslander-Reiten de Γ_A de A tem a seguinte forma:

Seja $e = \sum_{i=0}^l e_i$ e seja

$$T_A = \tau^{-1}eA \oplus (1 - e)A$$

Então e está nas condições de **2.3.6**, e portanto T_A é um módulo inclinante separante e é uma composta de módulos APR-inclinantes. Logo, por **2.3.5**, $\text{End}_A T$ satisfaz a propriedade (R) e não tem poço s^* no ramo contendo 0^* cuja distância ao circuito seja maior que a distância de c^* ao circuito. Observe que o efeito de aplicar T_A foi reverter

todas as flechas de 0 até l . Depois de aplicar este processo em cada ramo todas as flechas apontam para o circuito.

Conseqüentemente os ramos estão colados no circuito de alguma das seguintes maneiras:

pela propriedade (R) , isto é, externamente ou internamente.

2) Neste passo vamos tirar todos os ramos colados externamente entre duas relações consecutivas e em direções opostas no circuito. A aljava de A tem de fato a seguinte forma:

onde temos assumido que não existem relações zero no circuito entre os pontos médios i e j . Observe que Q_i e Q_j podem ser vazias e podem ter ramos colados externamente em pontos no caminho

$$w : i \rightarrow i-1 \cdots j-1 \leftarrow j$$

Observe que w deve conter pelo menos um poço 0 que não é raiz de um ramo pela propriedade (R) (especificamente (R_1)). Por outro lado, Q_i e Q_j contem respectivamente subalgebras plenas conexas

$$l_i \rightarrow \cdots \rightarrow i+1 \rightarrow i$$

e

$$l_j \rightarrow \cdots \rightarrow j+1 \rightarrow j$$

que são maximais com a propriedade de não conter relações zero. Seja H a álgebra hereditária de tipo A_m dada pelo seguinte aljava de Q_A :

$$l_i \rightarrow \cdots \rightarrow i \rightarrow i-1 \cdots \rightarrow 0 \leftarrow \cdots j-1 \leftarrow j \leftarrow \cdots \leftarrow l_j$$

Assumamos agora que existe um ramo Q_b colado externamente ao circuito em w . Podemos supor sem perda de generalidade que nenhum outro ramo é colado em w entre a raiz do Q_b e o poço 0. A aljava Q_A tem a seguinte forma:

Se $R = \text{rad}P(a)$ então $R = S(b)$ se $c \rightarrow b$ ou $R = P(b)/P(d)$ se $b \rightarrow c$, em ambos casos o suporte de R está contido em Q_H .

Então por uma propriedade das álgebras hereditárias de tipo A_m , ver [10] e [27], R pertence a um dos bordos em Γ_H , isto é, para todo módulo da forma $\tau^z R$, $z \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha'(\tau^z R) \leq 1$.

Então pelo Lema 3.1 de [2], existe uma fatia completa em Γ_H contendo ambos R e um módulo projetivo no bordo oposto de Γ_H .

Seja T'_A o módulo da fatia considerado como A -módulo e seja

$$T_A = T'_A \oplus \bigoplus_{l \notin Q_H} P(l)$$

Por 2.3.7, T_A é um módulo inclinado separante que é composta de módulos APR-inclinantes, logo $End T_A$ satisfaz a propriedade (R) e apagamos a relação zero de ponto médio b . De fato o radical de $P(a)$ é $P(b)/P(d)$ ou $S(b)$, em qualquer caso pertence a um dos bordos e pertence à fatia completa, portanto não pode ter relação zero de a até d de ponto médio b . Observe que o ramo Q_b é transformado em outro ramo que deve ser colado ao vértice t tal que $R = \tau^{-s}P(t)$. Neste caso $t = l_i$ ou $t = l_j$, portanto o ramo foi colado ou no ramo Q_i ou no ramo Q_j . Desse jeito tiramos todos os ramos colados entre os pontos médios i e j .

3) Neste passo vamos tirar todos os pares de relações no circuito a menos de um, para garantir que a álgebra continue de tipo de representação finito.

Voltando a situação onde não existem ramos colados externamente em w entre i e j . Nosso próximo objetivo é apagar simultaneamente as relações zero com ponto médio i e j respectivamente. Consideremos de novo a álgebra hereditária H dada por Q_H

$$l_i \rightarrow \cdots \rightarrow i \rightarrow i-1 \cdots j-1 \leftarrow j \cdots \leftarrow l_j$$

Observamos que os módulos $S(i)$ e $S(j)$ são somandos dos radicais de $P(i')$ e $P(j')$ respectivamente, mas como anteriormente $S(i)$ e $S(j)$ considerados como H -módulos pertencem a bordos opostos em Γ_H então Γ_A tem a seguinte forma:

Seja T'_A a fatia completa em Γ_H contendo ambos $S(i)$ e $S(j)$, ver [2], considerado como A -módulo e seja

$$T_A = T'_A \oplus \bigoplus_{l \notin Q_H} P(l)$$

Então T_A é um módulo inclinante separante que é composta de módulos APR-inclnantes pelo lema 2.3.7. Então $End T_A$ ainda satisfaz a propriedade (R). Já que $S(i)$ e $S(j)$ são respectivamente somandos do radical de $P(i')$ e $P(j')$ apagamos as duas relações zero com pontos médios i e j e incorporamos as subálgebras plenas e conexas

$$l_i \rightarrow \cdots \rightarrow i + 1$$

e

$$l_j \rightarrow \cdots \rightarrow j + 1$$

dentro do circuito, já que $S(t)$ $t = i, j$ pertence à órbita de $P(l_t)$ $t = i, j$.

4) Neste passo tiramos todos os ramos colados externamente que restaram com as mesmas técnicas usadas em 2).

Nos passos 5), 6), 7) e 8) vamos reduzir os ramos restantes a A_r linearmente ordenados para algum r . Usaremos o fato de que cada ramo é uma álgebra inclinada iterada de tipo A_r , essencialmente os módulos inclinantes utilizados aqui são os mesmos que os utilizados por Assem e Happel em [5] para reduzir álgebras que sendo árvores satisfazem $(R_1), (R_2), (R_3), (R_4)$ a A_r linearmente ordenados para algum r .

5) Neste passo vamos colocar todas as flechas apontando para fora do circuito. Observe que só existem agora no máximo dois ramos colados internamente. Colocar todas as flechas apontando para o circuito como em 1) se for o caso de ter aparecido um novo poço em algum ramo. Reverter todas as flechas usando o módulo inclinante formado pelos projetivos, isto é, calculando a álgebra oposta. Agora todas as flechas ficaram apontando para fora do circuito.

6) Neste passo vamos produzir uma ponta não ligada em cada ramo. Em primeiro lugar vamos detectar todos os poços do ramo. Observe que se a é um poço de um ramo, então ele é uma ponta, pois não pode ter a seguinte situação:

$$\rightarrow .a \leftarrow$$

Já que todas as flechas do ramo apontam para fora do circuito e existe um único circuito em Q_A . Se a é um poço ligado, então temos :

Tomamos $T = T[a] = \tau^{-1}P(a) \oplus \oplus_{j \neq a} P(j)$. Então $B = \text{End}_A T$ é da seguinte forma:

onde não existe nenhuma relação $c^* \rightarrow a^* \rightarrow b^*$. Já que existe um caminho em Q_A de c para b por 2.3.2.

Se existe uma flecha em Q' incidente em b , ela tem que estar saindo de b , já que todas as flechas apontam para fora do circuito. Neste caso b^* não é agora um poço pois tem uma flecha de $b^* \rightarrow d^*$. Se não existe flecha em Q' incidente em b então b^* é um poço não ligado, pois se tiver uma relação acabando em b^* deveria ter outra relação acabando em a . De fato, se não existe flecha incidente em Q' , existe só uma flecha chegando em b . Se existir uma relação zero acabando em b^* , esta deveria ser da forma $d^* \rightarrow a^* \rightarrow b^*$. Nesse caso teríamos uma flecha de $d^* \rightarrow a^*$ em Q_B , e portanto teríamos outra relação zero $d \rightarrow e \rightarrow a$ em Q_A , mas isso é impossível pois a é uma ponta e só existe uma flecha chegando em a . Observe que todas as flechas em Q' estavam apontando para fora do circuito e continuam desse jeito; então em Q_B todas as flechas continuam apontando para fora do circuito. Repetimos o processo com todos os poços ligados.

7) Neste passo apagaremos uma a uma as relações nos ramos. Já não existem poços ligados na aljava Q_A , todas as flechas continuam apontando para fora do circuito. Agora se existe uma relação no ramo, ela não é extremal.

Observe que em Q'' as flechas saem de b .

Podemos supor que em Q' não existem relações, já que podemos tomar a primeira relação começando em um poço. Agora todas as flechas estão apontando para fora do circuito, então não podemos ter em Q' a seguinte situação

Pela propriedade (R) deveria haver uma relação, então Q' é um A_n linearmente ordenado.

$$a \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow d$$

Então temos

Sejam $d = 1$, $b = r$. E considere H a álgebra hereditária de tipo A_n dada por

$$r \rightarrow r-1 \rightarrow \cdots \rightarrow 1$$

Seja $T_i = P(r)/P(i)$

$$T = \bigoplus_{i=1}^{r-1} T(i) \oplus \bigoplus_{j \neq \{1, \dots, r-1\}} P(j)$$

Observe que $\text{rad}P(c) = P(b)/P(a) = P(r)/P(r-1)$. Por outra parte os módulos $P(r)/P(i)$ correspondem aos H -módulos injetivos, e formam uma fatia completa $\mathcal{S}$ em

Γ_H . A fatia $\mathcal{S}$ tem um número finito de predecessores e não existem circuitos orientados entre eles. Portanto por 2.3.7 T_A é uma composta de módulos APR-inclinantes.

Então Q_B é da seguinte forma pois como $radP(c)$ está na órbita de $P(1)$, temos uma flecha de c^* para 1^* :

Onde as flechas de Q_C e Q'' foram revertidas. Então agora todas as flechas apontam para o circuito.

Observe que o módulo incliante T apagou uma relação ($c \rightarrow r \rightarrow r - 1$, não existe a correspondente a ela em Q_B) e Q_B ainda satisfaz a propriedade (R), de fato T é uma composta de módulos APR-inclinantes, portanto separante e $End_A T$ satisfaz a propriedade (R) por 2.3.5. Vejamos agora o que aconteceu com as relações. As relações que aparecem em Q_C e Q'' permanecem as mesmas. Suponha que existia uma relação zero acabando em $r = b$ e começando em Q'' em algum ponto s , pela propriedade (R) tinha que ter comprimento dois, isto é tínhamos $s \rightarrow j \rightarrow t$ em Q_A . Então existe uma relação zero $s^* \rightarrow j^* \rightarrow t^*$ em Q_B . Se tínhamos uma relação zero começando em t em Q_C e acabando em r , isto é $t \rightarrow c \rightarrow r$ em Q_A obtemos uma relação zero $1^* \rightarrow c^* \rightarrow t^*$ em Q_B . Afirmamos que não existem novas relações. Uma nova relação zero deveria começar em Q'' e acabar em algum ponto i^* entre 1^* e $(r-1)^*$ ou começar em i^* entre 1^* e $(r-1)^*$ e acabar em Q_C . Suponha que $s \in Q''$ é tal que $Hom_A(P(s), P(r)/P(i)) = 0$ mas $Hom_A(P(s), P(r)) \neq 0$. Considere a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(i) \longrightarrow P(r) \longrightarrow P(r)/P(i) \longrightarrow 0$$

Seja $f : P(s) \longrightarrow P(r)$, $f \neq 0$. Já que $Hom_A(P(s), P(r)/P(i)) = 0$ temos pela pro-

priedade do núcleo que existe uma morfismo não nulo $g : P(s) \longrightarrow P(i)$ e portanto um caminho não nulo de i até s em Q_A . Contradição com a propriedade (R), pois neste caso teríamos um circuito passando por s e por i e Q_A possui um único circuito que está contido em Q_C pela propriedade (R), portanto não existem relações começando em Q'' e acabando em algum i^* entre 1^* e $(r-1)^*$. Se t é um ponto em Q_C tal que $\text{Hom}_A(P(r)/P(i), P(t)) = 0$ para algum i entre 1 e $(r-1)$ mas $\text{Hom}_A(P(r), P(t)) \neq 0$ temos que $\text{Hom}_A(P(r), P(t)) = 0$ e isso dá a relação zero considerada anteriormente. Portanto não existem novas relações em Q_B e existe ao menos uma relação zero a menos.

8) Repetir o passo 5, isto é reverter todas as flechas e indutivamente aplicar o passo 7, até não existir nenhuma relação no ramo, então o ramo virou um A_n linearmente ordenado com todas as flechas apontando para o circuito. Simetricamente no outro ramo. Então finalmente temos:

Claramente esta é uma álgebra inclinada de tipo $\tilde{A}_n$ de tipo de representação finito por 2.4.1 e 2.2.3. Isto acaba a prova. $\square$

Observação 2.5.2 Note que a sequência de álgebras que aparecem na prova do teorema são todas de tipo finito, já que sempre o circuito ficou ligado ao menos por um par de relações, por tanto todas as álgebras envolvidas no processo são de tipo finito.

Capítulo 3

Álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$

Neste capítulo apresentamos resultados prévios de caracterização das álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$ por meio de sua aljava ordinária, assim como desenvolvemos um algoritmo para transformar a aljava ordinária destas álgebras da mesma maneira que fizemos no capítulo 2 com as álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$. Começamos lembrando algumas definições :

3.1 Reflexões e o processo inclinante

Uma álgebra é dita **triangular** se sua aljava associada não possui circuitos orientados. Hughes e Waschbusch introduziram em [37] as seguintes definições:

Seja A uma álgebra triangular e i um poço de Q_A . Seja $I(i)$ o injetivo correspondente ao vértice i . A **reflexão** $S_i^+ A$ de A em i é o quociente da extensão por um ponto $A[I(i)]$ pelo ideal bilateral gerado pelo idempotente e_i , isto é:

$$A[I(i)] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I(i) & k \end{pmatrix}$$

$$S_i^+ A = A[I(i)] / \langle e_i \rangle$$

O poço de Q_A é substituído na aljava $\sigma_i^+ Q_A$ de $S_i^+ A$ por uma fonte que chamaremos de i' . Uma **sequência de reflexões de poços** $i_1, \dots, i_m$ é uma sequência de vértices de Q_A tal que i_p é um poço em $\sigma_{i_{p-1}}^+ \dots \sigma_{i_1}^+ Q_A$ para p de 1 até m . Dualmente, começando com uma fonte j em Q_A definimos a **reflexão** $S_j^- A$ como sendo o quociente da coextensão por um ponto $[I(j)]A$ pelo ideal bilateral gerado pelo idempotente e_j , isto é:

$$[I(j)]A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ P(j) & A \end{pmatrix}$$

$$S_j^- A = [I(j)]A / \langle e_j \rangle$$

Exemplo:

Seja A dada pela seguinte aljava:

Vamos aplicar a reflexão S^- à fonte 5. Obtemos desta maneira $S_5^- A$ que é dada pela seguinte aljava:

Observação 3.1.1 *Sejam A uma álgebra triangular, i um poço de Q_A , $C = A[I(i)]$ e $B = S_i^+ A$ então:*

i) $P_C(i') = I_C(i)$, isto é $P_C(i')$ é projetivo-injetivo.

ii) $\text{rad} P_C(i') = I_A(i)$

iii) $\text{rad} P_B(i') = I_A(i) / \text{soc} I_A(i)$

Observação 3.1.2 *Sejam A uma álgebra triangular, j uma fonte de Q_A , $C = [I(j)]A$ e $B = S_j^- A$ então*

i) $I_C(i') = P_C(i)$, isto é, $I_C(i')$ é projetivo-injetivo.

ii) $I_C(i')/\text{soc} I_C(i') = P_A(i)$

iii) $I_B(i')/\text{soc} I_B(i') = \text{rad} P_A(i)$

Também de [37] relembramos a seguinte definição que será de grande utilidade.

Definição 3.1.3 *Um poço i de Q_A é um **poço forte** se não existir caminho em $\text{ind} A$ de $I(j)$ a $I(i)$ para algum $j \neq i$, isto é, se não existir em $\text{mod } A$ uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos entre módulos indecomponíveis:*

$$I(j) \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots M_n \longrightarrow I(i)$$

*Dualmente j é uma **fonte forte** de Q_A se não existir caminho em $\text{mod} A$ de $P(j)$ em algum projetivo $P(i)$ para $i \neq j$.*

Em [6] Assem, Nehring e Skowroński fizeram um estudo detalhado do comportamento das reflexões. A seguinte proposição decorre da prova de um outro resultado em dito artigo. Por conveniência do leitor daremos sua demonstração aqui.

Proposição 3.1.4 *(Assem-Nehring-Skowroński) Se A é uma álgebra inclinada com uma fatia completa na componente pré-injetiva e i um poço forte em Q_A , então $S_i^+ A$ é também uma álgebra inclinada. Se A é uma álgebra inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva e j é uma fonte forte em Q_A então $S_j^- A$ é também uma álgebra inclinada.*

Dem.

Se i é um poço forte de Q_A então $I(i)$ é fonte de uma fatia completa $\mathcal{S}$ na aljava de Auslander-Reiten de A . Em particular, nenhum módulo de $\mathcal{S}$ tem $S(i)$ como fator de composição, por tanto são todos $S_i^+ A$ -módulos. Obtemos uma fatia completa $\mathcal{S}'$ na aljava de Auslander-Reiten de $S_i^+ A$ substituindo o A -módulo $I_A(i)$ pelo $S_i^+ A$ -módulo $\tau_C^{-1} I(i)$ e cada flecha $\alpha : I_A(i) \longrightarrow X$ pela correspondente $\sigma^{-1} \alpha : X \longrightarrow \tau_C^{-1} I_A(i)$. Isto é, considere a sequência de Auslander-Reiten que começa em $I_A(i)$ em $\text{mod } C$. Para cada morfismo irredutível de $\alpha : I(i) \longrightarrow X$, onde X é um somando do termo do meio da sequência, temos um morfismo irredutível $\sigma^{-1} \alpha : X \longrightarrow \tau_C^{-1} I(i)$.

Dualmente, se j é uma fonte forte em Q_A então $P(j)$ é poço de uma fatia completa na aljava de Auslander-Reiten de A , e nenhum módulo de $\mathcal{S}$ tem $S(j)$ como fator de

composição, por tanto são todos $S_j^- A$ -módulos. Obtemos então uma fatia completa S' na aljava de Auslander-Reiten de $S_j^- A$ substituindo o A -módulo $P(j)$ pelo $S_j^- A$ -módulo $\tau_C P(j)$ e cada flecha $\alpha : X \longrightarrow P_A(j)$ pela correspondente $\sigma\alpha : \tau_C P_A(j) \longrightarrow X$. $\square$

Observação 3.1.5 *Nas condições da proposição anterior se i é um poço forte então i' é uma fonte forte, já que o projetivo $P_B(i') = \tau_C^{-1} I_A(i)$ é poço de uma fatia completa. Dualmente se j é uma fonte forte então j' é um poço forte.*

Relembramos a seguinte proposição de [6].

Proposição 3.1.6 (Assem-Nehring-skowroński) *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo Q de representação finita, onde Q não é um diagrama de Dynkin. Existe uma sequência de reflexões por poços fortes $i_1, \dots, i_n$ tal que $S_{i_n}^+ \dots S_{i_1}^+ A$ é de representação infinita e $S_{i_j}^+ \dots S_{i_1}^+ A$ é de representação finita para todo $j = 1, \dots, n-1$.*

3.2 Álgebras Simplesmente Conexas e a Condição (s)

A noção de álgebras simplesmente conexas é de grande importância no estudo de álgebras de tipo de representação finito. Em [4], Assem e Skowroński estenderam esta definição para álgebras triangulares de tipo de representação infinito. Relembramos aqui dita definição:

Uma relação

$$\gamma = \sum_{j=1}^m \lambda_j w_j$$

pertencente a $I(x, y)$ é dita **minimal** se $m \geq 2$ e para todo subconjunto próprio J de $\{1, 2, \dots, m\}$ tem-se que $\sum_{j \in J} \lambda_j w_j \notin I(x, y)$. Chamamos de $m(I)$ o conjunto das relações minimais do ideal I . Um **passeio** em Q entre dois vértices x e y é uma composição formal $\alpha_1 \dots \alpha_m$ de flechas de Q e inversas formais de tais flechas, começando em x e acabando em y . Denotamos por w_x o passeio trivial do vértice x nele mesmo. Um passeio $\alpha_1 \dots \alpha_m$ de x a y pode ser composto com um passeio $\beta_1 \dots \beta_n$ de y a z pela fórmula $\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_n$. No conjunto de todos os passeios em Q definimos a relação de homotopia $\cong$ (ver [28], [39]) como a menor relação de equivalência satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\alpha\alpha^{-1} \cong w_x \cong \beta^{-1}\beta$ para cada flecha $\alpha \in Q$ com início em x e cada flecha $\beta \in Q$ com fim x .

(b) $u \cong v$ para cada par de caminhos u, v com o mesmo início e o mesmo fim e tais que existe $\sum_{j=1}^m \lambda_j w_j \in m(I)$ com $u = w_i, v = w_j$ para alguns i, j .

(c) A relação $u \cong v$ implica $wu \cong wv$ e $up \cong vp$ sempre que estas composições façam sentido.

A composição de passeios induz um produto (definido parcialmente) nas classes de homotopia: se $\bar{w}$ denota a classe de homotopia de um passeio w , então o produto $\bar{u}.\bar{v}$ está definido quando uv está definido, e temos que $\bar{u}.\bar{v} = \overline{uv}$. Em particular dado $x \in Q_0$, a composição está sempre definida no conjunto $\pi_1(Q, I, x)$ das classes de homotopia de x a x . Logo $\pi_1(Q, I, x)$ é um grupo; o grupo fundamental de (Q, I) em x . Já que Q é conexa, para quaisquer $x, y \in Q_0$, os grupos $\pi_1(Q, I, x)$ e $\pi_1(Q, I, y)$ são isomorfos. Denotamos por $\pi_1(Q, I)$ o grupo $\pi_1(Q, I, x)$ num vértice fixo x de Q e o chamamos o **grupo fundamental** de (Q, I) .

Uma álgebra triangular é dita **simplesmente conexa** se para toda apresentação $A \cong kQ/I$ de A , o grupo fundamental $\pi_1(Q, I)$ é trivial. Um exemplo de uma álgebra simplesmente conexa de representação infinita é dada pela álgebra da seguinte aljava com relações

onde I é gerado por $\lambda\alpha$ e $\delta\alpha - \delta\gamma\beta$. Por outro lado, a álgebra dada pela seguinte aljava Q' com relações:

onde o ideal I' é gerado por $\delta\alpha - \delta\gamma\beta$, não é simplesmente conexa. Isto porque $A' = kQ'/I'$ é isomorfa a kQ'/I'' , onde I'' é gerado por $\delta\alpha$, e

$$\pi_1(Q', I'') = \pi_1(Q', I'', 3) = \{\overline{\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Bautista, Larrión e Salmerón introduziram a propriedade de separação (s) em [14] e mostraram que no caso de álgebras triangulares de tipo finito tal condição é equivalente a que seja simplesmente conexa.

Um A -módulo projetivo indecomponível $P(i)$ diz-se ter o **radical separado** quando o suporte de dois somandos indecomponíveis do $\text{rad } P(i)$ estão contidos em componentes conexas distintas da aljava Q_i de Q_A , onde Q_i é obtido de Q_A apagando todos os vértices j tais que existe um caminho de j até i . Se cada A -módulo projetivo indecomponível tem o radical separado então A diz-se que satisfaz a **condição (s)**.

Uma k -categoria $\mathcal{A}$ é chamada **Schurian** se para cada par de objetos $x, y \in \mathcal{A}_0$, tem-se que $\dim_k \mathcal{A}(x, y) \leq 1$. Dado $s \in \mathcal{A}_0$, denotamos por $\mathcal{A}_s$ o conjunto ordenado

$$\mathcal{A}_s = \{t \in \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}(t, s) \neq 0\}$$

com a seguinte relação de ordem: $t \leq t'$ se e só se a composta $\mathcal{A}(t, t') \times \mathcal{A}(t', s)$ é não nula. Denotamos por $k\mathcal{A}_s$ a categoria de incidência de $\mathcal{A}_s$.

Dualmente definimos

$$\mathcal{A}^s = \{t \in \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}(s, t) \neq 0\}$$

e $k\mathcal{A}^s$.

Uma categoria Schurian é chamada **$\tilde{A}$ -livre** se não contiver uma subcategoria plena $\mathcal{B} \cong kQ_{\mathcal{B}}$ onde o grafo subjacente de $Q_{\mathcal{B}}$ é $\tilde{A}_n$ ($n \geq 1$).

Uma álgebra A tem associada uma aljava com relações, a qual por sua vez tem associada uma k -categoria $\mathcal{A}$ onde os objetos são os vértices da aljava e os morfismos entre dois objetos correspondem aos caminhos entre os vértices (módulo as relações).

Uma álgebra A é dita **fortemente separada** se toda subcategoria convexa de $\mathcal{A}$ satisfaz a condição (s).

Uma álgebra A é dita **completamente separante** se $\mathcal{A}$ é Schurian e fortemente separada.

Definição 3.2.1 Denotamos por C_A a matrix de Cartan de A , a matrix $n \times n$, cuja entrada ij é dada por $\dim_k \text{Hom}_A(P(i), P(j))$, isto é, a j -ésima coluna é dada por $p(j)^t$, onde $p(j) = \underline{\dim} P(j)$.

Dräxler mostrou em [25] que a classe de álgebras completamente separantes contém a classe de álgebras tais que $\mathcal{A}^s$ e $\mathcal{A}_s$ são $\tilde{A}$ -livres, e que A é completamente separante se e só se A^{op} é completamente separante. No mesmo artigo ele mostrou que se a álgebra é completamente separante a matriz de Cartan determina a álgebra.

O seguinte teorema devido a Tachikawa e Wakamatsu em [45] mostra a relação entre as reflexões e o processo inclinante:

Teorema 3.2.2 (Tachikawa-Wakamatsu) As álgebras A e $S_i^{+-} A$ são inclinante-coinclinante equivalentes.

Segue da prova do teorema que o efeito da reflexão $S_i^+ A$ é equivalente à composta de dois módulos inclinantes, dados por:

$$T_A[i] = \tau^{-1}P(i) \oplus_{j \neq i} P(j)$$

O módulo APR-inclinante associado ao poço i . Seja $B = \text{End}_A T[i]$, se $P(j)$ é o A -módulo projetivo indecomponível $P(j) = e_j A$, então seja $M_j = e_j A / e_j A e_i$ onde $e_j A e_i$ representa a soma direta de todas as cópias do simples $S(i) = P(i)$ dentro de $P(j)$. Logo M_j é um A -módulo contido na torção de $T[i]$, já que o único módulo livre de torção é o $P(i)$.

Seja

$$T_j = \text{Hom}_A(T[i], M_j)$$

e seja

$$T_i = \text{Ext}_A^1(T[i], P(i))$$

$$T = \bigoplus_i^n T_i$$

O B -módulo T resulta ser um modulo inclinante e $\text{End}_B T = S_i^+ A$.

Dualmente o efeito da reflexão $S_i^- A$ é o mesmo de aplicar a composta de dois módulos coinclinantes, isto é o módulo APR-coinclinante associado à fonte i :

$$T_A[i] = \tau I(i) \oplus_{j \neq i} I(j)$$

Seja $B = \text{End}_A T[i]$ e seja $M_j = I(j)/S(i)$. Então M_j está na classe livre de torção de $T[i]$.

Seja

$$T_j = \text{Ext}_A^1(T[i], M_j)$$

e seja

$$T[i] = \text{Hom}_A(T[i], I(i))$$

$$T = \bigoplus_i^n T_i$$

então T é um módulo coinclinante sobre B e $\text{End}_B T = S_i^- A$.

Observe que o processo de reflexão é mais fácil de calcular do que o processo inclinante, já que aquele só requer o conhecimento da aljava ordinária, enquanto que calcular o anel de endomorfismos de um módulo inclinante requer algum conhecimento da categoria de módulos.

Exemplo:

Seja A a álgebra do exemplo anterior :

Vamos calcular agora a reflexão $S_5^- A$ como a **composta de dois módulos coincli-**
nantes. Seja $T[5]$ o módulo APR-coinclinante associado ao vértice 5, isto é, na aljava de
Auslander-Reiten:

$T[5] = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \oplus \tau I_5$. Usando a notação de **3.2.2** temos:

$$M_A(1) = I_A(1)/S_A(5) = 10110$$

$$M_A(2) = I_A(2)/S_A(5) = 01100$$

$$M_A(3) = I_A(3)/S_A(5) = 00100$$

$$M_A(4) = I_A(4)/S_A(5) = 00010$$

A álgebra $B = (End_A T[5])^{op}$, é dada pela aljava:

$$T_B^1 = Ext_A^1(T[5], M(1)) = DHom_A(M(1), \tau T[5]) = 01111$$

$$T_B^2 = Ext_A^1(T[5], M(2)) = DHom_A(M(2), \tau T[5]) = 10111$$

$$T_B^3 = Ext_A^1(T[5], M(3)) = DHom_A(M(3), \tau T[5]) = 00010$$

$$T_B^4 = Ext_A^1(T[5], M(4)) = DHom_A(M(4), \tau T[5]) = 01100$$

$$T_B^5 = Hom_A(T[5], I(5)) = 11111$$

A aljava de Auslander-Reiten de B é dada por:

Seja $T_B = \tau I_3 \oplus I_1 \oplus I_4 \oplus I_2 \oplus \tau^2 I_4$

Observe que $End_B T$ é dada pela aljava:

Então $(End_B T)^{op} = S_5^- A$ e a reflexão S_5^- é igual a composta de dois módulos coincidentes $T[5]$ e T .

Assem demonstrou em [3] que se um módulo inclinante é separante ele não pode ter dois somandos na mesma órbita. Observe que no exemplo o módulo coincidente T_B tem dois somandos na mesma órbita, por tanto o módulo inclinante $(DT)_{B^{op}}$ também tem dois somandos na mesma órbita, por tanto ele não pode ser separante.

Observação 3.2.3 *As reflexões não são necessariamente dadas por compostas de módulos inclinantes separantes.*

O seguinte teorema devido a Hughes e Waschusch em [37] mostra que as reflexões são inversíveis num certo sentido, isto é:

Lema 3.2.4 (Hughes-Waschusch) *A álgebra $S_i^- S_i^+ A$ é isomorfa a A .*

O seguinte teorema de Assem e Skowroński de [9] mostra que as álgebras que nos interessam neste capítulo tem a propriedade de simples conexão.

Teorema 3.2.5 (Assem-Skowroński) *Uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano é simplesmente conexa se e só se não é inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$.*

Em [4] Assem e Skowroński obtiveram uma caracterização das álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin e de tipo euclideano $\neq \tilde{A}_n$ de tipo de representação finito em função da propriedade de simples conexão e de sua forma quadrática.

Teorema 3.2.6 (Assem-Skowroński) *Seja A de tipo de representação finito.*

(i) *A é inclinada iterada de tipo Dynkin se e só se A é simplesmente conexa e sua forma quadrática q_A é definida positiva.*

(ii) *A é inclinada iterada de tipo euclideano $\neq \tilde{A}_n$ se e só se A é simplesmente conexa e q_A é semidefinida positiva de posto 1.*

3.3 Algumas reflexões de um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada por vértices dos ramos

Relembramos aqui de [6] a seguinte construção que será essencial na prova da versão fraca da conjectura que temos estudado. Daqui para frente faremos referência dela reiteradas vezes.

Seja B um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada e L um ramo com raiz b (ver seção 1.2.2).

Denotamos por w_x um caminho em L de b a x ligado por uma relação zero, por w'_x um caminho em L de x a b ligado por uma relação zero, por w''_x um caminho em L de $\beta - flechas$ (ver definição de ramo no capítulo 1) de x a b e por um caminho w^*_x em L de $\alpha - flechas$ de b a x .

Seja $S(L) = \{x \in L, \text{tais que existe um dos caminhos } w_x, w'_x, w''_x, \text{ ou } w^*_x\}$

Então $S(L)$ é vazio se e só se L é um ramo truncado.

Suponha que $S(L)$ não seja vazio e seja $x \in S(L)$. Se existe w_x de x até b ligado por uma relação zero definimos $d(x)$ como a distância de b ao ponto médio da primeira relação em w_x . Se existe w'_x de x até b ligado por uma relação zero definimos $d(x)$ como a distância do ponto médio da última relação em w'_x até b . Se existe um caminho w''_x de $\beta - flechas$ de x até b definimos $d(x)$ como o comprimento de w''_x . Se existe um caminho w^*_x de $\alpha - flechas$ de b até x definimos $d(x)$ como o comprimento de w^*_x .

Seja

$$d(L) = \min_{x \in S(L)} d(x)$$

Então $d(L) \geq 1$

Seja $N(L)$ a subálgebra plena com relações de L

$$N(L) = \{x \in S(L) / d(x) = d(L)\}$$

Sejam $y_1, \dots, y_p$ os pontos médios das primeiras relações zeros em w_x , $d_1, \dots, d_t$ os pontos médios das últimas relações em w'_x , $r_1, \dots, r_f$ os começos das primeiras flechas de w''_x , e $l_1, \dots, l_m$ os finais das últimas flechas de w^*_x . Sejam $c_1, \dots, c_s$ a reunião dos y_i, d_j, r_k, l_h . Cada c_i determina uma componente conexa $N(c_i)$ de $N(L)$. Para cada i tal que $1 \leq i \leq s$ seja γ_i a flecha conectando c_i a $N(c_i)$ (ou $N(c_i)$ a c_i). Se c_i é o começo (respectivamente o fim) de γ_i seja $n(c_i)$ o comprimento do caminho maximal começando (resp. acabando) em c_i e acabando (resp. começando) em $N(c_i)$. Então

$$n(L) = \max_{1 \leq i \leq s} n(c_i)$$

Como $S(L)$ não é vazio segue que $n(L) \geq 1$

Exemplo :

Seja o seguinte ramo com raiz no vértice 1:

$$S(L) = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Temos que $d(11) = 2$, $d(12) = 1$, $d(13) = 1$, $d(14) = 1$, $d(15) = 1$, $d(9) = 2$, $d(10) = 2$, portanto

$$d(L) = 1$$

$$d(L) = 1$$

e

$$N(L) = \{12, 13, 14, 15\}$$

Segue que $c_1 = 3, c_2 = 2, c_3 = 6, c_4 = 14, c_5 = 15$, e $N(3) = \{3, 11\}$, $N(2) = \{12, 13\}$, $N(6) = \{9, 10\}$, $N(15) = \{15\}$, $N(14) = \{14\}$, $n(3) = 1$, $n(2) = 2$, $n(6) = 2$, $n(14) = 1$, $n(15) = 1$, e

e

$$N(L) = \{12, 13, 14, 15\}$$

Segue que $c_1 = 3, c_2 = 2, c_3 = 6, c_4 = 14, c_5 = 15$, e $N(3) = \{3, 11\}$, $N(2) = \{12, 13\}$, $N(6) = \{9, 10\}$, $N(15) = \{15\}$, $N(14) = \{14\}$, $n(3) = 1$, $n(2) = 2$, $n(6) = 2$, $n(14) = 1$, $n(15) = 1$, e portanto

$$n(L) = 2$$

Do mesmo artigo lembramos o seguintes lemas com demonstração. O objetivo de reitearmos aqui tais demonstrações é esclarecer para o leitor o algoritmo, o que será utilizado posteriormente na prova de um resultado central.

Lema 3.3.1 (*Assem-Nehring-Skowroński*) *Seja A um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada C e K um ramo em b . Então existe uma sequência de vértices de K $y_1, \dots, y_n$ tal que $A' = S_{y_n}^{+-} \dots S_{y_1}^{+-} A$ é um alargamento por ramos de C obtido substituindo K por um ramo truncado K' em b com o mesmo comprimento que K .*

Dem. Se K é um ramo truncado não há nada a mostrar. Podemos então assumir que $S(K)$ não é vazio. Com as notações acima $S(K)$ representa o conjunto dos vértices "ruins" e $n(K)$ dá uma medida do tamanho de $N(K)$. Eliminaremos indutivamente os vértices ruins reduzindo o número daqueles que estão em $N(K)$ e enviando-os mais longe de b . Construiremos uma sequência de álgebras $(A_i)_{i \geq 1}$ e ramos $(K_i)_{i \geq 1}$ tal que A_{i+1} existe se $S(K_i)$ não é vazio e é obtida de A_i substituindo K_i por um novo ramo K_{i+1} tal que:

- i) K_{i+1} e K_i tem o mesmo número de vértices;
- ii) A_{i+1} é obtida de A_i por uma sequência de reflexões;
- iii) Se $S(K_{i+1})$ não é vazio então ou $d(K_{i+1}) = d(K_i)$ e então $n(K_{i+1}) < n(K_i)$ ou caso contrario $d(K_{i+1}) > d(K_i)$.

Claramente atingimos dessa maneira uma álgebra A_t e um ramo K_t tal que $S(K_t)$ é vazio. Então $A_t = A'$ e $K_t = K'$.

Seja $A_0 = A$ e $K_0 = K$. Indutivamente suponhamos que $S(K_i)$ não é vazio e decomponhamos $N(K_i)$ numa união disjunta de componentes conexas $N(c_j^i)$ $1 \leq j \leq s_i$ como acima. Sabemos que $n(K_i) \geq 1$. Sejam x_l , $1 \leq l \leq m_i$ o conjunto de todos os vértices que estão em $N(K_i)$ (isto é em algum $N(c_j^i)$) tais que a distância de x_l ao correspondente c_j^i é exatamente $n(K_i)$. Então cada x_l é ou uma fonte ou um poço.

Seja $A_{i+1} = S_{x_1}^{+-} \dots S_{x_m}^{+-} A_i$.

O ramo K_i é substituído por um novo ramo K_{i+1} tendo o mesmo comprimento e que claramente satisfaz iii)

□

Exemplo :

No exemplo anterior observamos que $d(L) = 1$ e $n(L) = 2$. Neste caso o vértice 13 está a distância 2 do vértice 2 e $d(13) = 1$. Aplicando S_{13}^- obtemos um novo ramo L_1 onde $d(L_1) = d(L) = 1$ e $1 = n(L_1) < n(L) = 2$:

Agora $n(L_1) = 1$ aplicando as reflexões S_{12}^- , S_{14}^- e S_{15}^+ obtemos um novo ramus L_2 tal que $2 = d(L_2) > d(L_1) = 1$ e $n(L_2) = 2$:

Aplicando S_9^+ e S_{11}^- obtemos um L_4 que é um ramo truncado:

Lema 3.3.2 (*Assem-Nehring-Skowroński*) Seja A um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada C tal que cada ramo de extensão é truncado. Então existe uma sequência de vértices dos ramos $t_1, \dots, t_m$ tal que $B = S_{t_m}^{+-} \dots S_{t_1}^{+-} A$ é coextensão por ramos de C .

Dem. Denotaremos respectivamente os ramos de extensão e coextensão de A nos módulos simples regulares E_i $1 \leq i \leq t$ por K_i e K'_i em suas raízes a_i e a'_i . Para cada i encontraremos uma sequência de reflexões de fontes $x(i, 1), \dots, x(i, s_i)$ em K_i tal que $B = S_{x(1, s_1)}^- \dots S_{x(1, 1)}^- S_{x(2, s_2)}^- \dots S_{x(t, 1)}^- \dots S_{x(t, s_t)}^- A$ é uma coextensão por ramos de C nos módulos E_i por ramos de coextensão K'_i tal que o comprimento de K'_i é a soma dos comprimentos de K_i e K'_i para $1 \leq i \leq t$.

Para cada i tal que K_i não é vazio S_i denota o conjunto de vértices da linha principal de K_i e s_i denota sua cardinalidade. Para cada $x \in S_i$, l_x denota o comprimento do caminho de x a a_i . Agora $x(i, 1)$ denota a única fonte de S_i , e para cada $1 \leq r \leq s_i$, e por $x(i, r)$ representamos o único vértice x tal que $l_x = s_i - r$. Então $x(i, s_i) = a_i$. Claramente $x(i, 1), \dots, x(i, s_i)$ é uma sequência de reflexões de fontes, o ramo K_i é substituído em $S_{x(i, 1)}^- A$ por outro ramo de extensão tendo pelo menos um vértice a menos enquanto que o correspondente ramo de coextensão K'_i é substituído por um ramo de coextensão tendo pelo menos um vértice a mais. Isto segue do fato que a restrição a C dos módulos de extensão definindo K_i e do módulo de coextensão definindo K'_i são iguais. Uma indução acaba a prova. $\square$

Exemplo

Seja o exemplo apresentado ao final do capítulo 1, vamos levá-lo a uma coextensão por ramos truncados por meio de reflexões.

Temos que A é um alargamento por ramos de C

Observamos que 8 é um poço de um ramo não truncado e que não existem caminhos não nulos de 10 para 8, isto é o caminho está ligado por uma relação zero. Se aplicamos S_8^+ a A vemos que $8'$ é um vértice de um ramo truncado:

O vértice 12 é uma fonte que não é de um ramo truncado. Se aplicamos agora S_{12}^- obtemos

Agora temos que K é um ramo truncado de extensão, e temos que todo ramo de extensão, no caso o único, é truncado. Por tanto existe uma sequência de reflexões que o leva a um ramo de coextensão.

Temos que refletir os vértices da linha principal do ramo truncado de extensão, no caso, os dois vértices 11 e 10. Começamos refletindo pela fonte 11.

A seguir refletimos por S_{10}^-

Agora temos que o ramo tem raiz $11'$, é um ramo de coextensão, mas não é truncado, $8'$ não é uma fonte de um ramo truncado. Temos por enquanto uma coextensão por ramos de C . Se aplicamos $S_{8'}^-$ obtemos:

Então agora o ramo de coextensão em $11'$ virou truncado.

Temos então que a álgebra resultante é dada por

$$S_8^+ S_{12}^- S_{11}^- S_{10}^- S_8^- A$$

Vamos agora transformar o ramo de coextensão em 3 que não é truncado. Como 5 é uma fonte que não é de um ramo truncado, aplicando S_5^- obtemos

O vértice 1 é um poço que não é de um ramo truncado, então aplicando S_1^+ obtemos

Finalmente obtemos nossa coextensão por ramos truncados:

Observação 3.3.3 Note que esta sequência especial de reflexões preserva a álgebra mansa disfarçada, segue da demonstração de 3.3.1 e 3.3.2.

3.4 Um algoritmo para transformar a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$

Com o objetivo de mostrar a versão fraca da conjectura para as álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$ desenvolvemos aqui um algoritmo para transformar adequadamente a aljava ordinária e levá-la a uma aljava de uma álgebra inclinada de tipo finito.

Nesta seção o maior trabalho é dedicado a mostrar que existe uma sequência de reflexões que transforma a aljava de uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ de representação finita numa aljava de uma álgebra de tipo finito do mesmo tipo euclideo passando só por aljavas de álgebras de tipo finito. No próximo capítulo discutiremos as condições sob as quais a aljava resultante é a de uma álgebra inclinada.

Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$, $n \geq 4$, ou $\tilde{E}_p$ com $p = 6, 7, 8$, de tipo de representação finito, então por 3.1.6 existe uma sequência de poços fortes $i_1, \dots, i_n$ tal que $A' = S_{i_n}^+ \dots S_{i_1}^+ A$ é de tipo de representação infinito e por 3.2.2 é inclinante-coinclinante equivalente a A . Segue de 1.3.4 que A' é inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ e de tipo de representação infinito. Logo por 1.3.7 A' é um alargamento doméstico de uma álgebra mansa disfarçada. De 3.3.1 e 3.3.2 segue que existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ tal que $B = S_{j_t}^{+-} \dots S_{j_1}^{+-} A$ é uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada. De 1.3.6 e o fato de B ser uma coextensão doméstica por ramos truncados decorre que B é inclinada de tipo de representação infinito com uma fatia completa na componente pós-projetiva. Esta sequência de reflexões foi aplicada nos ramos para levá-los a ramos truncados.

Seja i'_n a fonte em A' obtida pela reflexão $S_{i_n}^+$ pelo poço forte i_n . Vamos mostrar que também é uma fonte em B . Nosso objetivo é agora mostrar que $S_{i'_n}^- B$ é de tipo finito, para isso mostraremos que as reflexões feitas nos ramos para levar A' até B comutam com a reflexão pela fonte i'_n .

Damos aqui as definições de extensão e coextensão por um ponto por um módulo qualquer, as situações particulares de extensão ou coextensão por um módulo injetivo foram mencionadas nas definições de reflexões por um poço ou por uma fonte respectivamente.

a) A **extensão por um ponto** de uma álgebra A por um módulo M é dada por:

$$A[M] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & k \end{pmatrix}$$

O quiver ordinário de $A[M]$ é obtido acrescentado um novo vértice a Q_A que resulta ser uma fonte. b) A **coextensão por um ponto** de uma álgebra A por um módulo M é dada

por:

$$[M]A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ DM & A \end{pmatrix}$$

O quiver ordinário é obtido acrescentado um novo vértice a Q_A que resulta ser um poço.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.4.1 *Se M e N são A -módulos então:*

$$a) A[M][N] = A[N][M]$$

$$b) [M][N]A = [N][M]A$$

$$c) [M](A[N]) = ([M]A)[N]$$

Dem.

a) Seja

$$A[M] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & k \end{pmatrix}$$

Como N é um A -módulo, então $N_x = 0$ onde x é o novo vértice, e portanto

$$B = A[M][N] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ M & k & 0 \\ N & 0 & k \end{pmatrix}$$

Seja agora

$$A[N] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ N & k \end{pmatrix}$$

já que M é um A -módulo $M_y = 0$ onde y é o novo vértice, então

$$D = A[N][M] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ N & k & 0 \\ M & 0 & k \end{pmatrix}$$

Observe que B e D são isomorfas já que o isomorfismo é a composta de dois isomorfismos, isto é a permutação da linha 2 com a linha 3, seguido da permutação da coluna 2 com a coluna 3.

b) Dual de a)

c) Seja

$$B = [M](A[N]) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ DM & A & 0 \\ 0 & N & k \end{pmatrix}$$

Seja agora

$$D = ([M]A)[N] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ DM & A & 0 \\ 0 & N & k \end{pmatrix}$$

Obviamente B e D são isomorfas.

□

Corolário 3.4.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma k -categoria.*

a) Se i, j são tais que $\mathcal{A}(i, j) = 0$ então $[I(i)](A[I(j)]) = (I(i)A)[I(j)]$

b) Se i, j são tais que $\mathcal{A}(j, i) = 0$ então $[I(i)]([I(j)]A) = [I(j)]([I(i)]A)$

Observe que se j_i é um poço de um ramo tal que aplicamos uma reflexão para transformá-lo em ramo truncado, então não existem caminhos de i'_n até j_i . Logo por **3.4.2** as extensões e coextensões respectivamente comutam e portanto as reflexões também.

Vamos mostrar aqui algumas propriedades de simples conexão que são mantidas pelas reflexões, e vamos mostrar que sob certas condições a extensão por um ponto de uma álgebra fortemente separada também é fortemente separada, o que será de grande utilidade para obter nosso objetivo.

Assem e Skowroński mostraram em [4] o seguinte lema:

Lema 3.4.3 (Assem-Skowroński) *Seja A simplesmente conexa de tipo de representação finito e i um poço de sua aljava. Então $B = S_i^+ A$ é Schurian e simplesmente conexa.*

Observe que A' é simplesmente conexa por **3.4.3**. Nós mostraremos agora que a demonstração pode ser estendida ao seguinte caso mais geral.

Lema 3.4.4 *Se A é Schurian e fortemente separada então $S_i^+ A$ é Schurian e satisfaz a condição (s).*

Dem. Seja i um poço de Q_A e seja $B = S_i^+ A$. Já que A é Schurian, vemos que $I_A(i)$ é livre de multiplicidade. Logo $A[I_A(i)]$, e conseqüentemente B também são Schurian. Vejamos agora que B também satisfaz a condição (s).

Suponhamos que $P_B(j)$ para $j \neq i'$ é um projetivo indecomponível com radical não separado. Então existem dois somandos do $\text{rad} P_B(j)$ com seus suportes na mesma componente conexa da aljava $Q_B(j)$ de Q_B obtida de Q_B apagando todos os vértices l tais que existe um caminho de l a j . Já que A satisfaz a condição (s), temos $i \in \text{supp} P_A(j)$ e então $B(i', j) \neq 0$ e portanto $i' \notin (Q_B(j))_0$. Consideremos B' a subcategoria plena de B consistindo de todos os objetos de B menos i ($B'_0 = B_0 \setminus \{i\}$). Como B' é convexa em A , e A é fortemente separada B' satisfaz a condição (s). Agora $P_B(j)$ é claramente igual ao indecomponível $P_{B'}(j)$ (pois $B(j, i') = 0$ já que i' é uma fonte). Temos que $i' \notin (Q_B(j))_0$ portanto $Q_B(j)$ é igual $Q_{B'}(j)$. Segue que $P_{B'}(j)$ tem o radical separado. Contradição. Falta mostrar que $P_B(i')$ tem radical separado. Já que A é completamente separante (Schurian e fortemente separada) A^{op} também, então satisfaz a condição (s). Logo o A^{op} -projetivo $D(I_A(i))$ tem radical separado e portanto $P_B(i')$ tem radical separado. Logo B satisfaz a condição (s). $\square$

Mostraremos aqui que uma extensão por um ponto de uma álgebra fortemente separada tal que o novo vértice x também satisfaz a propriedade de separação para toda subcategoria convexa resulta também uma álgebra fortemente separada.

Lema 3.4.5 *Se A é fortemente separada e $B = A[M]$ tal que o novo vértice x também satisfaz a propriedade de separação para toda subcategoria convexa de B , então B é fortemente separada.*

Dem. Suponha que o vértice x corresponde a nova fonte de B . Seja D uma subcategoria convexa de B , vejamos que ela satisfaz a condição (s). Se $x \notin D$ então D é uma subcategoria convexa de A , portanto D satisfaz a condição (s). Se $x \in D$, então x satisfaz a condição (s) em D por hipótese.

Seja C a subcategoria de A formada por todos os objetos de D menos x . C é convexa já que x é uma fonte e nenhum caminho se fatora através de x .

Se $y \in D$, $y \neq x$ então $y \in C$, e C satisfaz a condição (s) já que A é fortemente separada, então y satisfaz a condição (s) em C . Como x satisfaz a condição (s) em D , segue que y satisfaz a propriedade de separação em D , portanto D satisfaz a condição (s) e B é fortemente separada. $\square$

Corolário 3.4.6 *Se A é fortemente separada tal que o novo vértice x de $B = A[I(i)]$ satisfaz a propriedade de separação em toda subcategoria convexa de B , então $S_i^+ A$ é fortemente separada.*

Dem. $S_i^+ A$ é uma subcategoria convexa de $A[I(i)]$, como $A[I(i)]$ é fortemente separada segue que $S_i^+ A$ também é fortemente separada. $\square$

Dualmente temos proposições análogas para $S_i^- A$.

Voltando agora a situação na que estamos interessados, A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ de representação finita. Por **3.1.6** existe uma sequência de reflexões por poços fortes tal que $A' = S_{i_n}^+ \cdots S_{i_1}^+ A$ é de representação infinita.

Assem e Skowroński mostraram em [4] que se para A' todos os $\mathcal{A}'_s$ e $\mathcal{A}'^s$ são $\tilde{A}$ -livres, A' é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ e nesse caso A' é fortemente separada. Nesta situação temos que como A' é Schurian por **3.4.3**, A' é completamente separante. De **3.4.6** e **3.4.4** segue que B também é completamente separante e a matriz de Cartan determina B por [25] pág. 57.

Temos a seguinte proposição que mostra sob que condições as matrizes de Cartan de duas extensões consecutivas são iguais.

Proposição 3.4.7 a) Seja j uma fonte de Q_A e i um poço de Q_A tais que não existem caminhos de j até i em Q_A . Se $B = ([I(j)]A)[I(i)]$ e $D = [I(j)][A[I(i)]]$, então $C_B = C_D$ (as respectivas matrizes de Cartan), e portanto

$$C_{S_i^+ S_j^- A} = C_{S_j^- S_i^+ A}$$

b) Se j e i são duas fontes de Q_A , então

$$C_{S_j^- S_i^- A} = C_{S_i^- S_j^- A}$$

Dem. a) Sejam j uma fonte e i um poço de Q_A tais que não existem caminhos de j até i . Seja a coextensão por um ponto de A pelo módulo $I(j)$

$$[I(j)]A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ P_A(j) & A \end{pmatrix}$$

Sua matriz de Cartan é a seguinte:

$$C_{[I(j)]A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{j1} & P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & P_{1n} \\ P_{j2} & P_{21} & P_{22} & \cdots & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{jn} & P_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Observe que i continua sendo um poço de $[I(j)]A$ pois $(I(j'))_i = (P(j))_i$. Podemos então calcular a extensão por um ponto de $F = [I(j)]A$ pelo módulo $I(i)$. Seja então B a álgebra matricial dada por:

$$B = [[I(j)]A][I(i)] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ P_A(j) & A & 0 \\ 0 & I_F(i) & k \end{pmatrix}$$

Observe que $I_F(i)_{j'} = 0$. De fato, temos que o número de caminhos de j' para i é igual ao o número de caminhos de i para j . Como i é um poço não existem caminhos saindo de i , e portanto o número de caminhos de i para j é zero. A sua matriz de Cartan é dada por

$$C_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{j1} & P_{11} & \cdots & \cdots & P_{1n} & 0 \\ P_{j2} & P_{21} & \cdots & \cdots & P_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ P_{jn} & P_{n1} & \cdots & \cdots & P_{nn} & 0 \\ 0 & I_{i1} & \cdots & \cdots & I_{in} & 1 \end{pmatrix}$$

Começando agora pela extensão por um ponto de A pelo módulo $I(i)$ temos:

$$A[I(i)] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_A(i) & k \end{pmatrix}$$

Sua matriz de Cartan é a seguinte:

$$C_{A[I(i)]} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \cdots & P_{1n} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & \cdots & P_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & \cdots & P_{nn} & 0 \\ I_{i1} & I_{i2} & \cdots & \cdots & I_{in} & 1 \end{pmatrix}$$

Já que $(P(i'))_j = (I(i))_j = 0$ pois j é uma fonte, temos que j ainda é uma fonte de $A[I(i)]$ e podemos calcular a coextensão por um ponto de $E = A[I(i)]$ pelo módulo $I(j)$ e chamamos a ela D

$$D = [I(j)][A[I(i)]] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ P_E(j) & A & 0 \\ 0 & I_A(i) & k \end{pmatrix}$$

Observe que $P_{ji'} = 0$ pois representa o número de caminhos de j para i' que é igual ao número de caminhos de i para j . Sua matriz de Cartan é dada por:

$$C_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{j1} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & 0 \\ P_{j2} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{jn} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} & 0 \\ es0 & I_{i1} & I_{i2} & \cdots & I_{in} & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $C_B = C_D$. Tirando agora as linhas i, j e as colunas i, j as matrizes continuam iguais, logo

$$C_{S_i^+ S_j^- A} = C_{S_j^- S_i^+ A}$$

b) Se j e i são duas fontes de A então não existem caminhos nem de i para j nem de j para i . Portanto estão bem definidas as coextensões por um ponto por $I(i)$ e $I(j)$ respectivamente. Da mesma maneira que em a) calculamos as coextensões em uma e em outra ordem e suas respectivas matrizes de Cartan, isto é:

$$B = [I(i)][[I(j)]A] \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ P_F(i) & k & 0 \\ 0 & P_A(j) & A \end{pmatrix}$$

Observe que $P_{ji'} = 0$ já que não existem caminhos de j para i . A matriz de Cartan é dada por

$$C_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{i1} & P_{j1} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{i2} & P_{j2} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{in} & P_{jn} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Seja agora

$$D = [I(j)][[I(i)]A] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ P_F(j) & k & 0 \\ 0 & P_A(i) & A \end{pmatrix}$$

Observe que $P_{ji'} = 0$ pois não existem caminhos de i para j .

A matriz de Cartan é dada por:

$$C_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{j1} & P_{i1} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{j2} & P_{i2} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{jn} & P_{in} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Portanto $C_D = C_B$ e logo

$$C_{S_j^- S_i^- A} = C_{S_i^- S_j^- A}$$

□

Voltamos agora à nossa situação particular onde A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ de representação finita e A' é a álgebra de tipo infinito obtida de A por uma sequência de reflexões por poços fortes. No caso em que A' é um alargamento por ramos de uma mansa dirfarçada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ temos que A' é fortemente separada. Por outra parte os novos vértices resultantes nos ramos por as reflexões aplicadas nos ramos satisfazem a propriedade de separação em toda subcategoria convexa, logo de 3.4.6 segue que a reflexão de uma álgebra fortemente separada é fortemente separada. Neste caso chegamos novamente a conclusão de 3.4.2 : as reflexões aplicadas nos ramos de A' para levá-los a ramos de coextensão truncados, isto é para levar A' a B , comutam com reflexão pela fonte i'_n .

Temos o seguinte lema de [6]:

Lema 3.4.8 (*Assem-Nehring-Skowronski*) *Seja A uma álgebra e i um poço em Q_A tais que $I(i)_A$ satisfaz:*

**) Para todo indecomponível M não isomorfo a $I(i)$ tal que $\text{Hom}_A(I(i), M) \neq 0$ temos que $\text{Hom}_A(M, I(i)) = 0$.*

Então todo $A[I(i)]$ -módulo indecomponível não isomorfo a $P(i')$ é um A -módulo ou um $S_i^+ A$ -módulo.

Usaremos aqui uma versão dual do mesmo:

Lema 3.4.9 *Seja A uma álgebra e i uma fonte em Q_A tais que $P(i)_A$ satisfaz:*

**) Para todo indecomponível M não isomorfo a $P(i)$ tal que $\text{Hom}_A(M, P(i)) \neq 0$ temos que $\text{Hom}_A(P(i), M) = 0$.*

Então todo $[I(i)]A$ -módulo indecomponível não isomorfo a $I(i')$ é um A -módulo ou um $S_i^- A$ -módulo.

Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano de tipo de representação finito, simplesmente conexa e tal que $S_i^+ A$ seja de tipo de representação infinito. Segue de 1.3.7 que $S_i^+ A$ é um alargamento doméstico de uma álgebra mansa disfarçada. Além disso temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4.10 *Sejam A e i como acima. Então a fonte i' obtida pela reflexão S^+ está na álgebra mansa disfarçada.*

Dem. Seja $B = S_i^+ A$ e $B' = B / \langle e_{i'} \rangle$. Observe que B' é isomorfa a $A' = A / \langle e_i \rangle$. Se i' não pertence a C então C está contida em B' . Logo B' é de tipo de representação infinito. Por outro lado já que existe um epimorfismo de A em B' , $\text{mod} B'$ se imerge na categoria $\text{mod} A$ que é de tipo finito. Por tanto B' é de tipo finito, o que contradiz as nossas hipóteses. Então i' está em C . $\square$

De 3.4.10 temos que i'_n está na álgebra mansa disfarçada. Sabemos que com as transformações feitas nos ramos para levá-los a ramos truncados, i'_n continua sendo uma fonte de B , pois C fica invariante por essas reflexões, (ver 3.3.1 e 3.3.2). Mostraremos que $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito de B .

Relembramos do capítulo 1 que uma álgebra A é chamada mansa se para cada dimensão $d \in \mathbb{N}$ existem $A - k[t]$ -bimódulos $M_1, \dots, M_{s(d)}$, M_i livre como $k[t]$ -módulo para todo i , tais que para cada A -módulo indecomponível X com $\dim_k X = d$

$$X \cong M_i \otimes_{k[t]} S_\alpha$$

para algum $\alpha \in K$, ver 1.1.23.

Se A é mansa e $d \in \mathbb{N}$, então o número mínimo entre todos os possíveis $s(d)$ é denotado por $\delta_A(d)$. Se $\delta_A(d) = r$, para toda dimensão d , A é dita **doméstica** e r é dito o **número de parâmetros**. Se $\delta_A(d) \leq d^c$ para algum $c \in \mathbb{N}$ e todo $d \in \mathbb{N}$, então A é dita de **crescimento polinomial**.

Temos o seguinte lema de [6]:

Lema 3.4.11 (*Assem-Nehring-Skowroński*) *Se A é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada, então ela é doméstica a um parâmetro.*

Proposição 3.4.12 *Seja A um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C . Se $i \in C$, então $[I(i)]A$ é doméstica, portanto de crescimento polinomial.*

Dem. Se A é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C , então A é uma álgebra inclinada iterada de tipo infinito, e portanto $S_i^- A$ também é inclinada iterada de tipo finito ou infinito. Se for de tipo infinito também é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C' .

Já que $i \in C$ segue que a condição de **3.4.9** se satisfaz automaticamente, e portanto todo $[I(i)]A$ -módulo não isomorfo a $I(i')$ é um A -módulo ou um $S_i^- A$ -módulo.

Temos dois casos:

a) Afirmamos que se $S_i^- A$ é de tipo finito então $[I(i)]A$ é doméstica a um parâmetro. Já que A é doméstica a um parâmetro, por **3.4.11** existe um bimódulo ${}_A M_{k[t]}$ tal que para quase todo módulo X temos que para $S_\alpha = k[t]/(t - \alpha)$

$$X \cong M \otimes_{k[t]} S_\alpha$$

Como só existe um número finito de $S_i^- A$ -módulos e M também é um $[I(i)]A$ -módulo segue que quase todo módulo da extensão pode ser obtido dessa maneira, portanto $[I(i)]A$ é doméstica a um parâmetro.

b) Afirmamos que se $S_i^- A$ é de tipo infinito $[I(i)]A$ é doméstica a dois parâmetros. Temos de **3.4.11** que $S_i^- A$ é doméstica a um parâmetro, portanto existe um bimódulo ${}_A M'_{k[t]}$ tal que para quase todo $S_i^- A$ -módulo X' :

$$X' \cong M' \otimes_{k[t]} S_\alpha$$

Como A é doméstica a um parâmetro, então existe um $A - k[t]$ -bimódulo M tal que para quase todo A -módulo X :

$$X \cong M \otimes_{k[t]} S_\beta$$

Observe que M e M' também são $[I(i)]A$ -módulos, logo temos que existem dois $[I(i)]A - k[t]$ -bimódulos que descrevem todos os $[I(i)]A$ -módulos. Logo $[I(i)]A$ é doméstica a dois parâmetros. Em particular $[I(i)]A$ é de crescimento polinomial. $\square$

Definição 3.4.13 *Uma álgebra A é de ciclos finitos se sempre que existir um circuito orientado, nenhum dos morfismos envolvidos pertence ao radical infinito da categoria.*

Proposição 3.4.14 (Skowroński) *Seja A fortemente separada. São equivalentes:*

- a) A é de crescimento polinomial
- b) A é de ciclos finitos

Relembremos de [21] o seguinte lema:

Lema 3.4.15 *Sejam X e Y indecomponíveis tais que não tem caminho de irredutíveis de Y para X . Se $0 \neq h \in \text{Hom}_A(Y, X)$ então:*

a) *Para cada $n \geq 1$ existem módulos indecomponíveis $Y = Y_0, \dots, Y_n$, aplicações irredutíveis $\alpha_i : Y_{i-1} \rightarrow Y_i$ para $i = 1, \dots, n$ e um morfismo $f \in \text{Hom}_A(Y_n, X)$ tais que $f\alpha_n \cdots \alpha_1 \neq 0$.*

b) Para cada $n \geq 1$ existem módulos indecomponíveis $X_n, \dots, X_0 = X$, aplicações irreduzíveis $\beta_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n$ e um morfismo $g \in \text{Hom}_A(Y, X_n)$ tais que $\beta_1, \dots, \beta_n g \neq 0$.

Lema 3.4.16 *Seja A um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada C . Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{Q}$ a componente pós-projetiva, a família tubular e a componente pré-injetiva respectivamente. Então $\text{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_A(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_A(\mathcal{Q}, \mathcal{T}) = 0$*

Dem. Sejam $X \in \mathcal{P}$ e $Y \in \mathcal{T}$ ou $Y \in \mathcal{Q}$. Então não existem caminhos de irreduzíveis de Y até X . Suponhamos que existe $h : Y \rightarrow X$, $h \neq 0$, por 3.4.15 parte b) segue que para todo $n \geq 1$, $h = \alpha_n, \dots, \alpha_1 g_n$, onde os X_i estão em $\mathcal{P}$, já que X só tem um número finito de predecessores temos uma contradição. Portanto não existem morfismos chegando em $\mathcal{P}$ desde outra componente.

Sejam $Y \in \mathcal{Q}$ e $X \in \mathcal{T}$ então não existem caminhos de irreduzíveis de Y até X . Suponhamos que existe $h : Y \rightarrow X$, $h \neq 0$, por 3.4.15 parte a) segue que existe um caminho infinito em $\mathcal{Q}$ de sucessores de Y . Contradição com o fato que Y só tem um número finito de sucessores. Portanto não tem morfismos saindo de $\mathcal{Q}$ para outras componentes.

Temos o seguinte lema devido a Liu em [38] que será usado na prova da proposição central:

Lema 3.4.17 (Liu) *Sejam X e Y módulos em Γ_A tais que $\text{rad}_A^\infty(X, Y) \neq 0$. Então existem caminhos infinitos*

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots$$

e

$$\dots Y_j \rightarrow Y_{j-1} \rightarrow \dots Y_1 \rightarrow Y_0 = Y$$

em Γ_A tais que $\text{rad}_A^\infty(X, Y_j) \neq 0$ e $\text{rad}_A^\infty(X_i, Y) = 0$ para todo $i, j \geq 0$.

O seguinte lema é uma extensão direta do lema 4.2 de [6]:

Lema 3.4.18 *Seja B uma álgebra inclinada iterada $\hat{D}_n$ $n \geq 4$, ou $\hat{IE}_p$, $p = 6, 7, 8$ de tipo de representação infinito e i uma fonte de C tal que $[I(i)]B$ é um alargamento finito de B então $S_i^- B$ é de tipo de representação finito.*

Dem.

Seja B' a subcategoria plena consistindo de todos os objetos de B exceto i . Pela definição de alargamento finito e do lema só existe um número finito de $S_i^- B$ -módulos

indecomponíveis que não são B -módulos. Já que os restantes $S_i^- B$ -módulos indecomponíveis são B' -módulos é suficiente mostrar que B' é de tipo de representação finito.

Primeiro provaremos que B' é schurian, $\tilde{A}$ -livre e simplesmente conexa. Como $i \in C$, segue B' é schurian e $\tilde{A}$ -livre. Se C é hereditária de tipo $\tilde{A}_n$ ou uma não schurian mansa disfarçada é claro que B' é simplesmente conexa. Se B' é de representação infinita então ela contém uma mansa disfarçada C' como subcategoria plena convexa. Observe que $C \neq C'$ já que C' não contém i . Como B é uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano a sua forma quadrática homológica q_B tem coposto 1. Já que C (respectivamente C') é mansa disfarçada a restrição q_C (resp. $q_{C'}$) de q_B a ela tem um vetor radical sincero x (resp. x'). Como x e x' são linearmente independentes no grupo de Grothendieck $K_0(B)$ obtemos uma contradição, e portanto B' é de representação finita. $\square$

Proposição 3.4.19 *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$. Seja i um poço de Q_A satisfazendo a propriedade $(*)$ de 3.4.9, então $A[I(i)]$ é de ciclos finitos. Dualmente se j é uma fonte de Q_A satisfazendo a propriedade $(*)$ de 3.4.9 temos que $[I(j)]A$ é de ciclos finitos.*

Dem. Seja $\hat{A}$ a álgebra repetitiva de A , ver [9]. Happel mostrou em [31] que para álgebras de dimensão global finita a categoria derivada de A , isto é $D^b(A)$ é equivalente a categoria $\text{mod } \hat{A}$, onde $\text{mod } \hat{A}$ é a categoria cujos objetos são os $\hat{A}$ -módulos não projetivos e os morfismos são aqueles $\hat{A}$ -morfismos que não se factorão através de um projectivo. Este é o caso das álgebras inclinadas iteradas de tipo euclideano. Também no mesmo trabalho Happel mostrou que a categoria derivada de uma álgebra inclinada iterada de tipo euclideano é de ciclos finitos. Segue que $\text{mod } \hat{A}$ é de ciclos finitos e de [9] que $\text{mod } \hat{A}$ é de ciclos finitos. Por outra parte Hughes e Waschbüsch em [37], lema 2.9, mostraram que $\widehat{S^+A} \cong \hat{A}$ e no lema 2.8 que o $A[I(i)]$ -módulo projetivo-injetivo $P(i')$ pode-se identificar com um $\hat{A}$ -módulo projetivo-injetivo. Portanto temos que $\text{mod } A[I(i)]$ se imerge em $\text{mod } \hat{A}$, já que $\text{mod } S^+A$ e $\text{mod } A$ se imergem em $\text{mod } \hat{A}$ e todo $A[I(i)]$ -módulo diferente de $P(i')$ é um S^+A -módulo ou um A -módulo. Como $\text{mod } \hat{A}$ é de ciclos finitos, segue que $A[I(i)]$ é de ciclos finitos. $\square$

Vamos mostrar agora que $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito de B . Esta é a proposição central deste capítulo.

Proposição 3.4.20 *$[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito de B .*

Dem. A álgebra B é obtida de A' por uma sequência de reflexões que só envolvem vértices dos ramos e i'_n é uma fonte em C . Dada a sequência especial que foi aplicada nos ramos, ver o algoritmo desenvolvido em 3.3.1 e 3.3.2, não existem caminhos de i'_n até tais vértices. Logo, temos de 3.4.2 que as reflexões comutam, então

$$S_{i'_n}^- S_{j_i}^+ D = S_{j_i}^+ S_{i'_n}^- D$$

Queremos mostrar que $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito sabendo que $S_{i'_n}^- A' = S_{i'_{n-1}}^+ \cdots S_{i'_1}^+ A$ é de tipo finito. Como por **3.4.9**, todo $[I(i'_n)]A'$ -módulo é um A' -módulo ou um $S_{i'_n}^- A'$ -módulo e $S_{i'_n}^- A'$ é de tipo finito, temos que $[I(i'_n)]A'$ é um alargamento finito.

Vamos mostrar que em cada passo para um vértice j_i do ramo pelo qual aplicamos uma reflexão no processo, se temos que $[I(i'_n)]D$ é um alargamento finito então:

$$S_{j_i}^{+-}[I(i'_n)]D = [I(i'_n)]S_{j_i}^{+-}D$$

é também um alargamento finito. Sabemos que D é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada. Por isso, a aljava Γ_D está bem determinada: consiste de uma componente pós-projetiva dada por alargamentos finitos e inserções por coraios da componente pós-projetiva de C , uma componente pré-injetiva dada por alargamentos finitos e inserções por raios da componente pré-injetiva de C e uma família tubular, dada por tubos insertados e coinsertados e alargamentos finitos neles, obtida da família tubular de C . Como i'_n está na álgebra mansa disfarçada C , $P(i'_n)$ está na componente pós-projetiva de D . Em todo o processo usaremos fortemente a estrutura de Γ_D , descrita em **1.3.5**, em todos os passos faremos referencia constante a **1.3.5** só denotando os incisos i),ii),iii),iv),v) e vi).

a) Seja j_i é um poço de um ramo de extensão não truncado como em iv), tal que quando aplicamos $S_{j_i}^+ D$, j'_i resulta uma fonte de um ramo truncado maximal de extensão como em i). O projetivo $P(j'_i)$ está na boca de um tubo de $S_{j_i}^+ D$ já que $rad P(j'_i) = I(j_i)$ está em um tubo de D (ver iv)). Portanto insertar $P(j'_i)$ corresponde a uma inserção por raios, pois j'_i está nas condições de i). Como $S_{j_i}^+[I(i'_n)]D = [I(i'_n)]S_{j_i}^+ D$ pois as reflexões comutam, e o projetivo $P(i'_n)$ está na componente pós-projetiva temos a seguinte situação:

Afirmamos que não existem novos módulos M tal que $M_{i_n} \neq 0$ e $M_{j'_i} \neq 0$. Se existir um M nessa situação, teríamos um morfismo $f : P(j'_i) \longrightarrow M$ não nulo, com M em $\mathcal{P}$, então estaríamos na situação do **3.4.15** parte b), isto é, existiriam um caminho infinito de morfismos irredutíveis

$$\cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 = M$$

e morfismos não nulos $f_i : P(j'_i) \longrightarrow M_i$, onde os M_i são predecessores de M . Como existe um número finito de predecessores de M e não existem circuitos orientados entre eles, teríamos uma contradição. Portanto nossa afirmação é verdadeira. Logo não existem novos módulos com as duas componentes não nulas. Já que $I[(i'_n)]D$ é um alargamento finito por hipótese, quando inserimos o projetivo $P(j'_i)$ só obtemos um número finito de novos módulos com a componente i'_n não nula. Por outra parte as respectivas reflexões comutam segue que $[I(i'_n)]S_{j_i}^+ D$ é um alargamento finito.

b) Se j_i é um poço de um ramo de extensão como em iii) tal que quando aplicamos a reflexão $S_{j_i}^+ D$ temos que j'_i resulta uma fonte de um ramo de extensão como em iii). Nesse caso a inserção de $P(j'_i)$ corresponde a um alargamento finito na componente pré-injetiva. Portanto $P(j'_i)$ está em $\mathcal{Q}$ e $P(i'_n)$ está em $\mathcal{P}$. Se existir um novo módulo M tal que $M_{j'_i} \neq 0$ e $M_{i_n} \neq 0$, teríamos um morfismo não nulo de $P(j'_i)$ em M . Já que $P(j'_i)$ está em $\mathcal{Q}$ e M está em $\mathcal{P}$, novamente estaríamos nas condições de **3.4.15** parte b). Segue que existiriam um caminho infinito de morfismos irredutíveis

$$\cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 = M$$

e morfismos não nulos $f_i : P(j'_i) \longrightarrow M_i$, onde os M_i são predecessores de M . Novamente, como existe um número finito de predecessores de M e não existem circuitos orientados entre eles, teríamos uma contradição. Portanto não existem novos módulos nessa situação, por um argumento similar ao de a) segue que $[I(i'_n)]S_{j_i}^+ D$ é também um alargamento finito.

c) Se j_i é uma fonte de um ramo de extensão não truncado como em iv) tal que quando aplicamos $S_{j_i}^- D$ resulta que j'_i é um poço de um ramo de extensão como em iv). O projetivo $P(j'_i)$ está num tubo de D , e corresponde a um alargamento finito de um tubo de C (ver iv)) e por outro lado $P(i'_n)$ está em $\mathcal{P}$. Como a situação é análoga à de a) segue que $[I(i'_n)]S_{j_i}^- D$ é um alargamento finito.

d) Assuma agora que j_i é uma fonte de um ramo truncado de extensão tal que j_i é como em iii), e quando aplicamos a reflexão $S_{j_i}^-$ temos que j'_i está no ramo truncado maximal como em i). Então o projetivo $P(j'_i)$ está na boca de um tubo e o projetivo $P(i'_n)$ em $\mathcal{P}$. Logo a situação é análoga a anterior, e não existem novos módulos com componente i_n diferente de zero. Também nesse caso $[I(i'_n)]S_{j_i}^- D$ é um alargamento finito.

e) Se j_i uma fonte da linha principal de um ramo truncado de extensão, ver **3.3.2**, se ao aplicar $S_{j_i}^-$, j'_i corresponde a um poço de um ramo de extensão como em iv). Nesse caso o projetivo $P(j'_i)$ está no tubo e corresponde a um alargamento finito de um tubo de C . A situação é similar à de a), e segue então $[I(i'_n)]S_{j_i}^- D$ é um alargamento finito.

f) Se j_i é a raiz do ramo truncado de extensão e é uma fonte, ao aplicarmos a reflexão $S_{j_i}^-$ resulta que j'_i está no ramo truncado maximal de coextensão como em ii). Nesse caso o projetivo $P(j'_i)$ está na componente pós-projetiva e $P(i'_n)$ também. Vamos mostrar que só existem um número finito de novos módulos M com componente i_n e j'_i diferente de zero. Temos que $P(j'_i)$ e $I(i_n)$ estão na mesma componente $\mathcal{C}$ de $E = [I(i'_n)]S_{j_i}^- D$.

Se M é um novo módulo tal que $M_{i_n} \neq 0$ e $M_{j'_i} \neq 0$ então $\text{Hom}_E(M, I(i_n)) \neq 0$ e $\text{Hom}_E(P(j'_i), M) \neq 0$. Os morfismos entre módulos de $\mathcal{C}$ compreendidos no setor entre o caminho seccional saindo de $P(j'_i)$ e o caminho seccional chegando em $I(i_n)$ dados por compostas de morfismos irredutíveis são em número finito:

Mostraremos que em tal setor não existem morfismos no radical infinito da categoria. Suponhamos que existe um morfismo $f : M \rightarrow N$, com M, N em $\mathcal{C}$ e que f está no radical infinito de $\text{mod } E$. Observe que $L = S_{i'_n}^- S_{j'_i}^- D$ é inclinada iterada de tipo euclideano por **3.2.2** e **[30]**. Temos duas situações possíveis: ou L é de tipo finito, ou L é um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada. Seja $F = S_{j'_i}^- D$. Como F é inclinada iterada de tipo euclideano e $i'_n \in C$, temos da prova de **3.4.18** que $F \setminus \{i'_n\}$ é de representação finita. Então só existe um número finito de F -módulos M tais que $M_{i'_n} = 0$, e portanto só existe um número finito de F -módulos M que também são L -módulos. Como $i'_n \in C$ segue de **3.4.9** que todo $[I(i'_n)]F$ -módulo é um F -módulo ou um L -módulo. Se L é de tipo de representação infinito só existe um número finito de L -módulos N tais que eles também podem ser vistos como F -módulos, logo $N_{i_n} \neq 0$ para quase todo L -módulo. Por hipótese temos que $f \in \text{rad}_E^\infty(M, N)$. Portanto, por **3.4.17**, segue que existe um caminho infinito de morfismos não nulos:

$$\cdots N_l \longrightarrow \cdots N_1 \longrightarrow N$$

e morfismos não nulos $f_i : M \rightarrow N_i$ tais que $f_i \in \text{rad}_E^\infty(M, N_i)$. Já que $L \setminus \{i_n\}$ é de tipo finito segue que existem N_s e f_s , tais que $(N_s)_{i_n} \neq 0$ e $f_s : M \rightarrow N_s$ tal que $f_s \in \text{rad}_E^\infty(M, N_s)$.

Dado $f_s : M \rightarrow N_s$ tal que $f_s \in \text{rad}_E^\infty(M, N_s)$ existe, por **3.4.17**, um caminho infinito de morfismos não nulos:

$$M \longrightarrow L_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_t \cdots$$

e morfismos não nulos $g_i : L_i \rightarrow N_s$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $g_i \in \text{rad}_E^\infty(L_i, N_s)$. Já que o caminho é infinito e $F \setminus \{i'_n\}$ é de tipo finito, existem L_t , para algum $t \in \mathbb{N}$, tal que $(L_t)_{i'_n} \neq 0$ e $g_t : L_t \rightarrow N_s$. Portanto temos o seguinte circuito em $\text{mod } E$:

$$P(i'_n) \longrightarrow L_t \xrightarrow{g_t} N_s \longrightarrow I(i_n) \longrightarrow P(i'_n)$$

que é um ciclo infinito em $\text{mod } E$. Como $P(i'_n)$ está na componente pós-projetiva satisfaz as condições de **3.4.19** portanto $\text{mod } E$ é de ciclos finitos. Contradição.

Portanto não existem morfismos no radical infinito no setor considerado, o que implica de **[21]** que todos os morfismos entre módulos de $\mathcal{C}$ estão dados por compostas de irreduzíveis, logo $\mathcal{C}$ é standard generalizada. Segue que só existe um número finito de novos módulos em $\mathcal{C}$ com as duas componentes j'_n e i_n não nulas.

Suponhamos agora que existe um módulo M em alguma outra componente $\mathcal{D}$ de E , tal que $\text{Hom}_E(P(j'_i), M) \neq 0$ e $\text{Hom}_E(M, I_{i_n}) \neq 0$.

Como $i'_n \in \mathcal{C}$, a álgebra $E = [I(i'_n)]F$ tem a propriedade que toda componente conexa diferente de $\mathcal{C}$ é uma L -componente ou uma F -componente, por **3.4.9**. Isto é, se temos uma componente $\mathcal{D}$ diferente de $\mathcal{C}$, ou quase todos seus módulos são F -módulos ou quase todos seus módulos são L módulos, nesse caso dizemos que $\mathcal{D}$ é uma F -componente ou uma L -componente, respectivamente.

Se $\mathcal{D}$ é uma L -componente, então L é de tipo de representação infinito e portanto por **1.3.7** um alargamento por ramos de uma álgebra mansa disfarçada, e nesse caso a componente pré-injetiva $\mathcal{Q}'$ de L contém $\mathcal{C}/\langle e_{i'_n} \rangle$ (a reunião das componentes resultantes de $\mathcal{C}$ ao fazer o quociente $E/\langle e_{i'_n} \rangle$). Segue que $P(j'_i)$ é um L -módulo e está em $\mathcal{Q}'$.

Temos que M esta em uma L -componente $\mathcal{D}$, então quase todo módulo em $\mathcal{D}$ é um L -módulo. Seja $f : P(j'_i) \rightarrow M$ um morfismo no radical infinito, então temos por **3.4.15** e **3.4.17** que existem um caminho infinito de morfismos irreduzíveis

$$\dots \rightarrow M_n \xrightarrow{\alpha_n} \dots \xrightarrow{\alpha_1} M_1 \xrightarrow{\alpha_0} M_0 = M$$

e morfismos no nulos no radical infinito $f_i : P(j'_i) \rightarrow M_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Já que os morfismos são irreduzíveis segue que todos os $M_i \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ é uma L -componente segue que existe um M_s que é um L -módulo. Temos que $f_s \in \text{rad}_E^\infty(P(j'_i), M_s)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, ele se decompõe como $f_s = \alpha_{s+1} \cdots \alpha_n f_n$. Já que na sequência infinitos M_n são L -módulos, pois $\mathcal{D}$ é uma L -componente, segue que f_s está no radical infinito de $\text{mod } L$. Logo temos um morfismo não nulo $f \in \text{rad}_L^\infty(P(j'_i), M_s)$ saindo da componente pré-injetiva em $\text{mod } L$. Contradição com **3.4.16**.

Segue que $\mathcal{D}$ tem que ser uma F -componente. Existe $M \in \mathcal{D}$ tal que existem morfismos

$$g : P(j'_i) \rightarrow M$$

e

$$h : M \rightarrow I(i_n)$$

Temos que $g \in \text{rad}_E^\infty(P(j'_i), M)$ portanto, por **3.4.15** e **3.4.17**, existem um caminho infinito de morfismos irreduzíveis

$$\cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 = M$$

e morfismos não nulos $g_i : P(j'_i) \longrightarrow M_i$. Por outra parte temos que $M_i \in \mathcal{D}$, já que $\mathcal{D}$ é uma F -componente e $F \setminus \{i'_n\}$ é de tipo finito, existe algum $t \in \mathbb{N}$ tal que M_t é um F -módulo tal que $(M_t)_{i'_n} \neq 0$. Então existe um morfismo não nulo de $P(i'_n)$ em M_t . Observe que existe um morfismo não nulo de $I(i_n)$ em $P(i'_n)$. Logo temos o seguinte circuito em $\text{mod } E$:

$$P(i'_n) \xrightarrow{g_t} M_t \longrightarrow M_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{h} I(i_n) \longrightarrow P(i'_n)$$

onde g_t e h estão no radical infinito de $\text{mod } E$. Então temos um ciclo infinito na categoria. Temos que $P(i')$ está na componente pós-projetiva portanto de **3.4.19** temos que $\text{mod } E$ é de ciclos finitos. Contradição.

Portanto, os únicos novos módulos com as duas componentes não nulas estão no setor de $\mathcal{C}$ indicado na figura. Segue que só existem um número finito de novos módulos com as duas componentes diferentes de zero. Logo E é um alargamento finito de F .

g) Seja agora j_i um poço de um ramo de coextensão como em v) tal que quando aplicamos $S_{j_i}^+$, a fonte j'_i resulta no ramo truncado maximal de coextensão como em ii). Nesse caso projetivo $P(j'_i)$ está na componente pós-projetiva e $P(i'_n)$ também, segue que ambos estão na mesma componente de $[I(i'_n)]S_{j_i}^+ D$ como no caso anterior. Análogamente segue que $[I(i'_n)]S_{j_i}^+ D$ é um alargamento finito.

Os outros casos são duais aos aqui apresentados e representam as mesmas situações, então em todos os passos do processo $[I(i'_n)]S_{j_i}^{+-} D$ é um alargamento finito, em particular $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito. $\square$

Corolário 3.4.21 *Se $B = S_{j_n}^{+-} \cdots S_{j_1}^{+-} A'$ então $S_{i_n}^- B$ é de tipo finito e $S_{i_n}^- S_{j_i}^{+-} \cdots S_{j_1}^{+-} A'$ é de tipo finito para todo t de 1 até $n - 1$.*

Dem. Segue da prova que $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito, já que foi mostrado que em cada passo o alargamento é finito. $\square$

Capítulo 4

A conjectura de Roldán nos casos $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$

Neste capítulo mostraremos que a versão fraca da conjectura de Roldán é satisfeita para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e mostraremos sob quais condições a versão fraca é satisfeita para álgebras de tipo $\tilde{E}_p$, $p = 6, 7, 8$.

Na seção 1 começamos mostrando alguns lemas prévios com vista à prova da conjectura. Na seção 2 analisamos a existência de fontes fortes numa álgebra mansa disfarçada. Na seção 3 desenvolvemos um critério para decidir a validade da versão fraca da conjectura. Dito critério se aplica na lista de álgebras mansas disfarçadas. Finalmente na seção 4 mostramos que a versão fraca da conjectura é satisfeita para álgebra inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$.

Relembramos aqui a versão fraca da conjectura:

Conjectura 4.0.22 *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo Q de representação finita, onde Q não é um diagrama de Dynkin. Então existem seqüências de módulos inclinantes $T_1, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$, com $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_i$, $A_0 = A$, $A_m = \tilde{D}_n$ e A_i de tipo de representação finito para todo $i \neq m$.*

4.1 Alguns lemas preliminares

Mostraremos aqui alguns lemas que serão essenciais nas próximas seções para provar a versão fraca da conjectura.

Lema 4.1.1 *Seja $B = [M]A$ uma coextensão por um ponto de uma álgebra A , sejam i e j dois vértices de Q_A . Se existe uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos*

em $\text{mod } B$,

$$P_B(i) \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_n \longrightarrow P_B(j)$$

onde os N_i são indecomponíveis, então existe uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos

$$P_A(i) \longrightarrow N_{i_1}|_A \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{i_s}|_A \longrightarrow P_A(j)$$

em $\text{mod } A$.

Dem. Como a álgebra B é

$$B = [M]A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ DM & A \end{pmatrix}$$

sabemos que $\text{mod } B$ pode ser identificada com a categoria das ternas (V', V'', δ) , onde V' é um k -espaço vetorial, V'' é um A -módulo a direita e

$$\delta : V'' \otimes_A DM \longrightarrow DV'$$

uma aplicação linear, ver [41]. Podemos supor que δ é um epimorfismo. De fato, se δ não fosse um epimorfismo então $DV' = \text{Im} \delta \oplus \tilde{V}$.

Logo $(D\text{Im} \delta, V'', \delta)$ é um somando direto de (V', V'', δ) . Isto é, existe um epimorfismo

$$(id, \pi) : (V', V'', \delta) \longrightarrow (D\text{Im} \delta, V'', \delta)$$

e um monomorfismo

$$(id, i) : (D\text{Im} \delta, V'', \delta) \longrightarrow (V', V'', \delta)$$

tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} V'' \otimes_A DM & \xrightarrow{id \otimes id} & V'' \otimes_A DM & \xrightarrow{id \otimes id} & V'' \otimes_A DM \\ \delta \downarrow & \searrow & \delta \downarrow & \searrow & \delta \downarrow \\ DV' & \xrightarrow{\pi} & \text{Im} \delta & \xrightarrow{i} & DV' \end{array}$$

Portanto $(id, \pi)(id, i) = (id, id)|_{(D\text{Im} \delta, V'', \delta)}$. Segue que se (V', V'', δ) é indecomponível então δ é epi, ou $(V', V'', \delta) = (0, k, 0)$.

Os projetivos que correspondem a vértices de A estão dados por $(P \otimes_A DM, P_A, id)$, ver [40] e [26]

$$id : P \otimes_A DM \longrightarrow P \otimes_A DM$$

Assumamos agora que existe uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos com todos os N_i indecomponíveis

$$P_B(i) \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_n \longrightarrow P_B(j)$$

onde $i, j \in Q_A$. Então temos o seguinte diagrama comutativo com todos os f_i epimorfismos e todos os (α_i, β_i) não nulos e não isomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} P(i) \otimes DM & \xrightarrow{\alpha_1 \otimes 1} & N_1'' \otimes DM & \xrightarrow{\alpha_2 \otimes 1} & N_2'' \otimes DM & \cdots & \xrightarrow{\alpha_n \otimes 1} N_n'' \otimes DM \xrightarrow{\alpha_{n+1} \otimes 1} P(j) \otimes DM \\ \downarrow id & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_n \\ P(i) \otimes DM & \xrightarrow{\beta_1} & N_1' & \xrightarrow{\beta_2} & N_2' & \cdots & \xrightarrow{\beta_n} N_n' \xrightarrow{\beta_{n+1}} P(j) \otimes DM \\ & & & & & & \downarrow id \end{array}$$

Seja $f_0 = id$ e $f_{n+1} = id$. Vamos mostrar que $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n+1$

Se $\beta_i = 0$, então $\alpha_i \neq 0$ pois $(\alpha_i, \beta_i) \neq 0$.

Suponha agora $\beta_i \neq 0$.

Se $\alpha_i = 0$, segue que $\alpha_i \otimes 1 = 0$ e portanto

$$0 = f_i \alpha_i \otimes 1 = \beta_i f_{i-1}$$

Como f_{i-1} é um epimorfismo segue que $\beta_i = 0$. Contradição.

Então todos os $\alpha_i \neq 0$, e isto induz uma cadeia em $\text{mod } A$. Se algum α_i é um isomorfismo $N_{i-1} \cong N_i$, nesse caso tiramos N_{i-1} da cadeia, e colocamos o morfismo $\alpha_{i-1} \alpha_i$ de N_{i-2} em N_i . Observe que ao menos um dos α_i não é um isomorfismo, pois $P(i)$ não é isomorfo a $P(j)$. Portanto temos uma cadeia induzida em $\text{mod } A$

$$P_A(i) \longrightarrow N_{i_1}'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{i_s}'' \longrightarrow P_A(j)$$

onde os morfismos são não nulos e não isomorfismos. $\square$

A seguinte proposição mostra que numa coextensão por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada se uma fonte tem a propriedade de ser uma fonte forte na subálgebra convexa correspondente à álgebra disfarçada, também é uma fonte forte da coextensão por ramos truncados.

Proposição 4.1.2 *Se A é uma coextensão por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada C e j é uma fonte de A , tal que j é uma fonte forte de C , então j é uma fonte forte de A .*

Dem. Seja K um ramo truncado de coextensão em b . Teremos então:

Olhando só na subálgebra convexa K formada pelos vértices do ramo, na figura todos os vértices menos b , temos que o projetivo associado ao vértice n como kK -módulo também é injetivo, isto é $P_{kK}(n) = I_{kK}(1)$. Por outra parte $P_A(n)$ é um somando do radical de $P_A(b)$ por tanto temos em Γ_A a seguinte situação:

Por tanto não existem projetivos do ramo que sejam sucessores de $P(b)$. Precisamos mostrar que se a era uma fonte forte de C então continuará a ser uma fonte forte de A . Para isto observamos que os únicos projetivos associados a vértices do ramo que podem ter morfismos em projetivos correspondentes aos vértices de C , são os projetivos correspondentes aos vértices da linha principal do ramo. Logo temos que ver que os projetivos da linha principal "não desordenam" os projetivos de C . Isto é, se os projetivos correspondentes aos vértices da subálgebra convexa C tinham uma certa ordem ($P(i) \leq P(j)$ se $P(i)$ é predecessor de $P(j)$) na álgebra de Auslander-Reiten Γ_C , vamos mostrar

que tal ordem é mantida quando inserimos os projetivos correspondentes aos vértices da linha principal.

Trabalharemos em cada ramo. Faremos um argumento indutivo sobre o comprimento da linha principal do ramo de coextensão.

Se $n = 1$ temos que B é uma coextensão por um ponto por um módulo simples regular e do lema anterior segue que se a não for uma fonte forte de B existiria uma sequência de morfismos não nulos, não isomorfismos e módulos indecomponíveis N_i

$$P_B(a) \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_r \longrightarrow P_B(j)$$

onde j é um vértice de C , já que o projetivo de b está no início da aljava Γ_B . Tal sequência induziria uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos em C

$$P_C(a) \longrightarrow N_{i_1}|_C \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{i_r}|_C \longrightarrow P_C(j)$$

onde os $N_{i_i}|_C$ são indecomponíveis já que B é coextensão de C por um módulo indecomponível e os N_i são indecomponíveis. Contradição com o fato que a é uma fonte forte em C . Segue que a é uma fonte forte de B .

Suponhamos agora como hipótese de indução que para toda coextensão B de C por um ramo truncado cujo comprimento da linha principal seja menor do que r , se a é uma fonte forte de C então a é uma fonte forte de B .

Seja agora B dada pela coextensão de C por um ramo truncado cuja linha principal tem comprimento r . A álgebra B pode ser vista como a coextensão por um ponto por um módulo indecomponível de uma álgebra D , onde D é uma coextensão de C por um ramo truncado cuja linha principal tem comprimento $r - 1$. Logo a hipótese de indução se satisfaz para D . Segue que a hipótese de indução também se satisfaz para B , já que ela é a coextensão por um ponto de D e foi mostrado em $n = 1$, que se a é uma fonte forte de D então a é uma fonte forte em B . $\square$

4.2 Análise da existência de fontes fortes numa álgebra mansa disfarçada

Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\hat{D}_n$ ou $\hat{E}_p$ de tipo de representação finita, então existe uma sequência de poços fortes $i_1, \dots, i_n$ tal que $A' = S_{i_n}^+ \dots S_{i_1}^+ A$ é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\hat{D}_n$ ou $\hat{E}_p$ de representação infinita. Logo A' é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C .

Estudaremos a seguir a existência de fontes fortes numa álgebra disfarçada C . Analisaremos separadamente os casos em que a álgebra mansa disfarçada C é de tipo $\hat{A}_n$, $\hat{D}_n$ ou $\hat{E}_p$.

Observamos que a única álgebra mansa disfarçada de tipo $\hat{A}_n$ é ela própria. Nesse caso como ela é hereditária temos que toda fonte é forte.

Vamos agora analisar caso a caso as álgebras mansas disfarçadas de tipo $\hat{D}_n$ que estão listadas em [35]:

Lema 4.2.1 *Numa álgebra A mansa disfarçada de tipo $\hat{D}_n$ toda fonte é forte.*

Dem. Se $A = k\hat{D}_n$ então é hereditária. Neste caso se i é uma fonte, então o projetivo $P(i)$ é poço de uma fatia completa formado pelos projetivos e portanto ele é uma fonte forte. Seja agora A dada por:

Se i é uma fonte correspondente à subaljava convexa D_n de Q_A então ela é uma fonte forte. Se $i = 1$ ela também é uma fonte forte como pode ser observado na sua aljava de Auslander-Reiten:

Considere a outra orientação da mesma aljava:

Na sua aljava de Auslander-Reiten vemos que a situação é similar:

Seja A é dada por:

Se i é uma fonte da subaljava convexa de tipo A_r de Q_A o projetivo $P(i)$ é um poço da secção dos projetivos correspondentes a tais vértices, portanto uma fonte forte. Os vértices $i = 1$ ou $i = m + 2$ também é uma fonte forte como podemos ver na sua aljava de Auslander-Reiten:

Por último se A é dada por

então 1 é a única fonte e é forte como podemos ver na sua aljava de Auslander-Reiten:

□

Exemplos de álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{IE}_p$ que possuem fontes que não são fortes serão exibidos ao longo da próxima seção.

Voltando novamente a situação na que estamos interessados, temos que se A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{IE}_p$ de representação finita existe uma sequência de poços fortes $i_1, \dots, i_n$ tal que $A' = S_{i_n}^+ \cdots S^+ + i_1 A$ é de tipo de representação infinito, portanto A' é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C . Sabemos que existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ de vértices dos ramos tal que $B = S_{j_t}^{+-} \cdots S_{j_1}^{+-} A'$ é uma álgebra inclinada de tipo de representação infinito com uma fatia completa na componente pós-projetiva, isto é uma coextensão doméstica por ramos truncados da álgebra mansa disfarçada C . Já mostramos que a fonte i'_n é uma fonte de C . Temos então que se C é de tipo $\tilde{A}_n$ ou $\tilde{D}_n$, i'_n resulta ser uma fonte forte de C . Segue de 4.2.1 que i'_n é uma fonte forte de B . Já que B é uma álgebra inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva e i'_n é uma fonte forte de B segue de 3.1.4 que $S_{i'_n}^- B$ é uma álgebra inclinada. Como já mostramos em 3.4.18 $S_{i'_n}^- B$ é de tipo finito e todas as álgebras envolvidas na sequência entre A e $S_{i'_n}^- B$ são de tipo finito.

A seguir estudaremos o caso em que B é uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{IE}_p$.

4.3 Um critério para testar a validade da versão fraca da conjectura

Seja A agora uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ de representação finita tal que existe uma sequência de poços fortes $i_1, \dots, i_n$ onde $A' = S_{i_n}^+ \cdots S_{i_1}^+ A$ é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{E}_p$ de tipo de representação infinito. A álgebra A' é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra C , onde C é uma álgebra mansa disfarçada. Temos que o vértice i'_n é uma fonte de A' que está em C . Por outro lado existe uma sequência de reflexões por vértices dos ramos de A' que comutam com a reflexão por i'_n tal que a álgebra A' é transformada em uma álgebra B inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva. Tal álgebra B é uma coextensão doméstica por ramos truncados de C , e já mostramos que $S_{i'_n}^- B$ é de tipo finito e todas as álgebras envolvidas no processo para transformar A em $S_{i'_n}^- B$ por dita sequência de reflexões são de tipo finito. Temos que o vértice i'_n continua a ser uma fonte de B , e continua em C já que C é invariante pela sequência especial de reflexões aplicadas nos ramos.

Na seção anterior mostramos que se C é uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{A}_n$ ou $\tilde{D}_n$, toda fonte é forte, e nesse caso i'_n é uma fonte forte de C . Em tal caso i'_n resulta ser uma fonte forte de B e $S_{i'_n}^- B$ é uma álgebra inclinada de tipo finito.

No caso em que B é uma coextensão doméstica de uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{E}_p$ se i'_n for uma fonte forte de C segue da mesma maneira que $S_{i'_n}^- B$ é inclinada. O problema é que não necessariamente i'_n é uma fonte forte de C , já que existem em C fontes que não são fortes. O seguinte resultado mostra que existe uma sequência de reflexões que transforma i'_n numa fonte forte.

Proposição 4.3.1 *Se A é uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada C de tipo $\tilde{E}_p$, se i é uma fonte de C tal que i não é uma fonte forte então existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ tal que j_i é uma fonte forte de $S_{j_{i-1}}^- \cdots S_{j_1}^- A$ e i é uma fonte forte de $S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- A$.*

Dem. Observe que A é inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva por 1.3.6, por tanto todos os projetivos estão nesta componente. Já que i não é uma fonte forte, $P(i)$ tem pelo menos um sucessor projetivo.

A prova será feita por indução sob o número de sucessores projetivos de $P(i)$.

Se $P(i)$ tem um único sucessor projetivo $P(j)$, mostraremos que i é uma fonte forte de $S_j^- A$.

Seja $[I(j)]A = B$. Observe que j é uma fonte forte de A (caso contrario $P(i)$ teria mais do que um sucessor projetivo), portanto de 4.1.1 segue que j também é uma fonte

forte de B . De fato, se este não fosse o caso teríamos que $P(j)$ teria um sucessor projetivo $P(t)$, onde $t \neq j'$ pois $P(j')$ é simples. Segue que t e j estão em $(Q_A)_0$ e existe uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos em $\text{mod } B$ começando em $P_B(j)$ e acabando em $P_B(t)$. Por 4.1.1 temos que esta induz uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos em $\text{mod } A$ entre $P_A(j)$ e $P_A(t)$. Isto é uma contradição com o fato de que j é uma fonte forte de A . Observe que pelo mesmo argumento $P_B(j)$ é o único sucessor projetivo de $P_B(i)$.

Seja $D = S_j^- A$.

Observe que $P_B(l)_j = 0$, para todo $l \neq j$ pois j é uma fonte ($P_B(l)_j$ indica o número de caminhos de l até j). Então $P_B(l) = P_D(l)$ para todo $l \neq j$. Se i não é uma fonte forte de D , então existe uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos de $P_D(i)$ em $P_D(t)$, para algum t , em $\text{mod } D$. Já que $\text{mod } D$ se imerge em $\text{mod } B$, esta cadeia se imerge em $\text{mod } B$. Como $P_B(l) = P_D(l)$ para $l = i, t$ temos que $P_B(i)$ tem outro sucessor projetivo. Contradição com o fato de que $P(i)$ só tinha um único sucessor projetivo. Portanto i é uma fonte forte de D .

Suponha agora que a afirmação é verdadeira se $P(i)$ tem no máximo t sucessores projetivos, e seja $P(i)$ um projetivo com $t + 1$ sucessores projetivos $P(j_{t+1}), \dots, P(j_1)$, onde j_1 é uma fonte forte. Assuma além disto que a ordem dos j_i é dada da seguinte maneira: $P(j_{t+1})$ é tal que é um sucessor de $P(i)$ e não tem outro projetivo no caminho de morfismos não isomorfismos que começa em $P(i)$ e acaba em $P(j_{t+1})$ (o mesmo se forem vários caminhos), nesse caso vamos dizer que $P(j_{t+1})$ é um sucessor direto de $P(i)$. O projetivo $P(j_t)$ é tal que é um sucessor direto de $P(i)$ ou é um sucessor direto de $P(j_{t+1})$. Desta maneira temos que $P(j_s)$ é sucessor direto de $P(j_{s+1})$ ou é sucessor direto de $P(j_l)$ para $t + 1 \geq l \geq s$ ou $l = i$. Vamos mostrar que j_2 é uma fonte forte de $S_{j_1}^- A$. Temos dois casos a considerar, se $P(j_2)$ é predecessor de $P(j_1)$ ou não. Se $P(j_1)$ não é sucessor de $P(j_2)$ em $\text{mod } A$, então j_2 também é uma fonte forte de A devido à ordem dada nos projetivos.

Seja $B_1 = [I(j_1)]A$. Observe que j_1 e j_2 são fontes fortes em B_1 por 4.1.1.

Seja $D_1 = S_{j_1}^- A$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente segue que j_2 também é fonte forte de D_1 , isto é, $\text{mod } D_1$ se imerge em $\text{mod } B_1$ e se existir uma cadeia de morfismos não nulos, não isomorfismos começando em $P(j_2)$ e acabando num outro projetivo, esta cadeia se imerge em $\text{mod } B_1$ o que contradiz o fato de que j_2 é uma fonte forte de B_1 .

Se $P_A(j_1)$ é sucessor de $P_A(j_2)$, devido a ordem dada entre os projetivos temos que não existe outra fonte forte em A . Nesse caso $P_{B_1}(j_2)$ não tem outro sucessor projetivo distinto de $P_{B_1}(j_1)$ pelo argumento de $t = 1$, segue que j_2 é uma fonte forte de D_1 .

Observe que $P_{D_1}(i)$ tem como máximo t sucessores projetivos, por tanto pela hipótese de indução segue que a proposição é satisfeita. $\square$

Voltando agora ao nosso problema, se i'_n não é uma fonte forte de B por 4.3.1 segue

que existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ tal que $P(j_1), \dots, P(j_t)$ são os sucessores projetivos de $P(i'_n)$ em $\text{mod } B$ e j_1 é uma fonte forte de B onde B é inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva.

Observação 4.3.2 Já que em cada passo j_i e i'_n são fontes de $E = S_{j_{i-1}}^- \cdots S_{j_1}^- B$ as respectivas reflexões comutam por 3.4.2, isto é,

$$S_{i'_n}^- S_{j_i}^- E = S_{j_i}^- S_{i'_n}^- E$$

Relembramos de [37] o seguinte lema:

Lema 4.3.3 Se A é uma álgebra inclinada de tipo de representação finito e i é uma fonte forte de A então $S_i^- A$ é inclinada.

Temos que B é inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva. Se i'_n não é uma fonte forte, temos que existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ como em 4.3.1. A proposição seguinte diz respeito ao caso em que $S_{j_k}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é de tipo finito para todo $k = 1, \dots, t$.

Proposição 4.3.4 Seja a sequência $j_1, \dots, j_t$ como acima, então $S_{i'_n}^- S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada de tipo finito. Além disto, para todo i , $1 \leq i \leq j-1$, temos que $S_{i'_n}^- S_{j_i}^- \cdots S_{j_1}^- B = S_{j_i}^- \cdots S_{j_1}^- S_{i'_n}^- B$ é de tipo finito.

Dem. Vamos mostrar primeiro que $S_{i'_n}^- S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada. Como B é inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva e j_1 é uma fonte forte de B então por 3.1.4 segue que $S_{j_1}^- B$ é inclinada e por nossa hipótese é de tipo finito. Por 4.3.1 temos que j_2 é uma fonte forte de $S_{j_1}^- B$ então por 4.3.3 temos que $S_{j_2}^- S_{j_1}^- B$ é inclinada e por nossa hipótese também é de tipo finito. Para todo i tal que $2 \leq i \leq t$ temos que $S_{j_{i-1}}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada de tipo finito e j_i é uma fonte forte por 4.3.1. Portanto $S_{j_i}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada de tipo finito pela hipótese. Temos que i'_n é uma fonte forte da álgebra inclinada $S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$. Logo $S_{i'_n}^- S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada.

Mostraremos agora que em cada passo obtemos uma álgebra de tipo finito. Sabemos que $[I(i'_n)]B$ é um alargamento finito por 3.4.20, e de 4.3.2 que as reflexões comutam. Começamos mostrando que $S_{j_1}^- [I(i'_n)]B = [I(i'_n)]S_{j_1}^- B$ é um alargamento finito.

Já que por hipótese $D_1 = S_{j_1}^- B$ é de tipo finito temos que tanto $P(j'_1)$ quanto $P_B(i'_n)$ estão na componente pós-projetiva de D_1 . Portanto temos que $I(i'_n)$ e $P(j'_1)$ estão na

mesma componente $\mathcal{C}$ de $[I(i'_n)]D_1$. O raciocínio que utilizamos aqui é o mesmo que o utilizado na prova de 3.4.20 parte f), isto é, se M é um módulo sobre a coextensão tal que $M_{i_n} \neq 0$ e $M_{j'_1} \neq 0$ então M é um módulo que se encontra na componente $\mathcal{C}$ no setor determinado pelos caminhos seccionais que saem de $P(j'_1)$ e os caminhos seccionais que chegam em $I(i_n)$. Segue então que só existe um número finito de novos módulos com as duas componentes i_n e j'_1 diferentes de zero. Por tanto $[I(i'_n)]D_1$ é um alargamento finito, e de 3.4.18 $S_{i_n}^- D_1$ é de tipo finito.

Agora para todo i tal que $2 \leq i \leq t$, j_i é uma fonte forte de $D_{i-1} = S_{j_{i-1}}^- \cdots S_{j_1}^- B$ que é inclinada e pela hipótese é de tipo finito. Aplicando o mesmo raciocínio anterior temos que $[I(i'_n)]D_{i-1}$ é um alargamento finito, portanto $S_{i_n}^- D_{i-1}$ é de tipo finito. $\square$

Proposição 4.3.5 *Seja B uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada C , seja i uma fonte de B , tal que $i \in C$ e $S_i^- C$ é de tipo finito, então $S_i^- B$ é de tipo finito.*

Dem. Seja B uma coextensão doméstica por ramos truncados de uma álgebra mansa disfarçada C . Por 1.3.6 ela é inclinada de tipo euclideano e $S_i^- B$ é inclinada iterada de tipo euclideano.

Sabemos que $S_i^- C$ é de tipo finito e que $P_C(i)$ está nas condições de 3.4.9. Portanto todo módulo sobre $[I(i)]C$ não isomorfo a $I(i')$ é um C -módulo ou um $S_i^- C$ -módulo. Já que $S_i^- C$ é de tipo finito temos que $[I(i)]C$ é um alargamento finito.

Trabalharemos em cada ramo. Seja B uma coextensão por um ramo truncado de C .

Vamos mostrar primeiro para o caso em que B é uma coextensão por um ponto de C . Neste caso $B = [N]C$ e b é o novo vértice, o projetivo $P_B(b)$ é simples e também está na componente pós-projetiva. Se fizermos $[I(i)]B$ vemos que só existe um número finito de módulos M tais que $M_b \neq 0$ e $M_{i'} \neq 0$ já que $P(b)$ e $I(i')$ estão na mesma componente $\mathcal{C}$ de $[I(i)]B$ e os únicos módulos que podem ter ambas componentes diferentes de zero são os que se encontram no setor de $\mathcal{C}$ determinado pelos caminhos seccionais que saem de $P(b)$ e os caminhos seccionais que chegam em $I(i')$, ver 3.4.20 parte f). O resto dos novos módulos são $[I(i)]C$ -módulos. Como só existe um número finito de $[I(i)]C$ -módulos M com $M_{i'} \neq 0$ temos que só existe um número finito de módulos M sobre a coextensão tais que eles não são B módulos. Já que $i \in C$ temos que o projetivo $P_B(i)$ está nas condições de 3.4.9 e portanto todo $[I(i)]B$ -módulo não isomorfo a $I(i')$ é um B -módulo ou um $S_i^- B$ -módulo. Como só existe um número finito de módulos que não são B -módulos segue que $[I(i)]B$ é um alargamento finito de B .

Seja agora B uma coextensão doméstica por um ramo truncado de C , então ou $B = D[L]$ ou $B = [N]D$ onde D é uma coextensão por um ramo truncado de C . Assumamos que a hipótese é satisfeita para D , isto é $[I(i)]D$ é um alargamento finito. Em qualquer um

dos casos, acrescentamos um novo projetivo na componente pós-projetiva pois B é uma álgebra inclinada com todos os projetivos na componente pós-projetiva. Logo temos que o novo projetivo $P(b)$ e o injetivo $I(i')$ se inserem na mesma componente $\mathcal{C}$ de $[I(i)]B$, portanto só existe um número finito de novos módulos M tais que $M_b \neq 0$ e $M_{i'} \neq 0$. Por nossa hipótese que $[I(i)]D$ é um alargamento finito, só existe um número finito de $[I(i)]D$ -módulos M com $M_{i'} \neq 0$. Já que $i \in C$ por 3.4.9 temos que todo $[I(i)]B$ -módulo não isomorfo a $I(i')$ é um B -módulo ou um $S_i^- B$ -módulo.

Logo $[I(i)]B$ é um alargamento finito, e de 3.4.18 $S_i^- B$ é de tipo finito. $\square$.

A seguinte observação mostra que cada reflexão pode ser vista como composta de módulos inclinantes.

Observação 4.3.6 a) Um módulo T é coinclinante sobre A se e só se DT é um módulo inclinante sobre A^{op} .

b) Seja T um A -módulo coinclinante e $B = \text{End}_A T$ então T é a composta de três módulos inclinantes. Isto é, $T_A^1 = \bigoplus_i P_A(i)$ a soma de todos os projetivos indecomponíveis sobre A e $\text{End}_A T^1 = A^{op}$, $T_{A^{op}}^2 = DT$ e $\text{End}_{A^{op}} T^2 = B^{op}$ e $T_{B^{op}}^3 = \bigoplus_i P_{B^{op}}(i)$ a soma de todos os projetivos indecomponíveis sobre B^{op} tais que $\text{End}_{B^{op}} T^3 = B$.

c) A é de tipo finito se e só se DA é de tipo finito.

Temos um critério para determinar casos onde a versão fraca da conjectura se satisfaz. Sejam $A, A', B, C, i'_n, j_1, \dots, j_t$ como anteriormente. A seguinte proposição mostra alguns casos onde a versão fraca da conjectura é satisfeita para álgebras de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$.

Proposição 4.3.7 A versão fraca da conjectura para A de tipo finito de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{E}_p$ é satisfeita se:

a) i'_n é uma fonte forte.

b) A sequência $j_1, \dots, j_t$ é como em 4.3.4 com respeito a C , isto é: $S_{j_k}^- \cdots S_{j_1}^- C$ é de tipo finito para todo $k = 1, \dots, t$.

4.4 A prova da versão fraca da conjectura para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$

Já mostramos na seção anterior que se a álgebra mansa disfarçada é de tipo $\tilde{A}_n$ ou $\tilde{D}_n$ toda fonte é forte e a primeira condição de 4.3.7 é satisfeita. Se a álgebra mansa disfarçada é de tipo $\tilde{E}_p$ vamos testar a validade utilizando o critério dado por 4.3.7 na lista das álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_p$.

A continuação disto mostramos que a versão fraca da conjectura é satisfeita para álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{D}_n$ e $\tilde{E}_p$.

Começamos aplicando o critério nas álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_6$ e $\tilde{E}_7$.

Álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_6$

Neste caso todas as fontes são fortes para qualquer orientação.

Para a segunda classe de álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_6$ existe uma orientação, onde existe uma fonte que não é forte:

O vértice 4 não é uma fonte forte, pois na sua aljava de Auslander-Reiten o projetivo $P(6)$ é sucessor do projetivo $P(4)$.

Se aplicamos a reflexão pela fonte 6, a álgebra resultante é de tipo de representação finito (ver aljava acima), por tanto estamos nas condições do teorema.

Na classe número 3 de álgebras mansas disfarçadas existe uma orientação onde existe uma fonte que não é forte:

Aqui 7 não é uma fonte forte pois $P(2)$ é sucessor de $P(7)$. Se aplicamos a reflexão pela fonte 2, a álgebra resultante $S_2^- C$ é de tipo finito, e também estamos nas condições do teorema.

Na classe número 4, existe uma única orientação possível, e a única fonte é forte.

Álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_7$

A seguinte é uma lista completa das álgebras mansas disfarçadas para as quais todas as fontes são fortes para qualquer orientação:

Listamos a seguir todas as álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{IE}_7$ onde existe uma orientação que tem pelo menos uma fonte que não é forte. Mostramos em cada caso que se fizermos as reflexões pelos vértices correspondentes a projetivos sucessores do projetivo associado àquela fonte, temos que todas as álgebras obtidas por essas reflexões são de tipo finito. Para isto observamos que se fizermos a reflexão por uma fonte de uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{IE}_p$, isto nos dá uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{IE}_p$ por **3.2.2** e **1.3.4**. Segue de **1.3.7** que se ela é de tipo infinito ela tem que conter uma álgebra mansa disfarçada. Desta maneira temos um critério para verificar se a álgebra é de tipo finito.

A seguir indicamos em cada caso a aplicação do critério. Indicamos com um quadrado a fonte que não é forte, e com um círculo os vértices associados aos sucessores projetivos do projetivo correspondente a dita fonte.

$S_1^- S_7^- C$

8)

9)

10)

11)

13)

14)

15)

16)

20)

$S_8^- C$

As álgebras mansas disfarçadas de tipo $\hat{IE}_8$ aparecem listadas no appêndice. Quando não tem indicação significa que nesse caso todas as fontes são fortes. As fontes que não são fortes aparecem indicadas com i_k e os respectivos sucessores da fonte que não é forte ,

j_l onde l indica a ordem em que as reflexões devem ser aplicadas. Realizando tais reflexões observamos que todas as álgebras resultantes são de tipo finito.

Para as álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{I\!E}_p$ temos a seguinte proposição:

Proposição 4.4.1 *Seja C uma álgebra mansa disfarçada de tipo $\tilde{I\!E}_p$. Se i é uma fonte de C que não é forte, sejam $j_1, \dots, j_t$ a lista dos sucessores projetivos de $P(i)$. Temos que para cada j_k $S_{j_k}^- \cdots S_{j_1}^- C$ é de tipo finito para todo $k = 1, \dots, t$.*

Da proposição 4.4.1 segue que uma ou outra condição de 4.3.7 é satisfeita, logo a versão fraca da conjectura é satisfeita para álgebras de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{I\!E}_p$.

Enunciamos aqui o teorema e damos sua demonstração em forma completa.

Teorema 4.4.2 *Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{I\!E}_p$ de representação finita então existe sequências de módulos inclinantes $T_1, \dots, T_m$ e álgebras $A_0, \dots, A_m$, $A_i = \text{End}_{A_{i-1}} T_i$, $A_0 = A$, $A_m = k\tilde{D}_n$ ou $k\tilde{I\!E}_p$ e A_i de tipo de representação finita para todo $i \neq m$.*

Dem. Seja A uma álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{D}_n$ ou $\tilde{I\!E}_p$ de representação finita. Por 3.1.6 existe uma sequência de poços fortes $i_1, \dots, i_n$ tal que $A' = S_{i_n}^+ \cdots S_{i_1}^+ A$ é de representação infinita. Por outro lado por 3.3.1, 3.3.2 e por 1.3.6 existe uma sequência de reflexões por vértices dos ramos que levam A' em B , onde B é uma álgebra inclinada com uma fatia completa na componente pós-projetiva. De 1.3.7 sabemos que A' é um alargamento por ramos doméstico de uma álgebra mansa disfarçada C , e de 3.3.1 e 3.3.2 que as reflexões feitas nos ramos para transformar A' em B deixam a álgebra mansa disfarçada C invariante. Temos de 3.4.2 que tais reflexões comutam com a reflexão pela fonte i'_n . Mostramos em 3.4.10 que i'_n está em C .

Se C é de tipo $\tilde{A}_n$ ou $\tilde{D}_n$ temos que i'_n é uma fonte forte de C . Como B é uma coextensão doméstica por ramos truncado de C de 4.1.2 temos que i'_n é uma fonte forte de B . Decorre de 3.1.4 que $S_{i'_n}^- B$ é uma álgebra inclinada, pois é uma reflexão por uma fonte forte de uma álgebra com uma fatia completa na componente pós-projetiva.

Já que $S_{i'_n}^- B$ é obtida de A por uma sequência de reflexões ela é inclinante-coinclinante equivalente a A por 3.2.2. Como as reflexões são equivalentes a compostas de módulos inclinantes e coinclinantes (ver 3.2.2) segue de 4.3.6 que $S_{i'_n}^- B$ é obtida de A por uma sequência de módulos inclinantes.

Mostramos em 3.4.21 que $S_{i'_n}^- B$ é de tipo finito e todas as álgebras envolvidas no processo para transformar A em $S_{i'_n}^- B$ por meio de reflexões são de tipo finito. De novo por 4.3.6 segue que todas as álgebras envolvidas no processo são de tipo finito.

Se C é de tipo $\tilde{E}_p$ não necessariamente i'_n é uma fonte forte de C . Nesse caso por **4.3.1** temos que existe uma sequência $j_1, \dots, j_t$ tal que i'_n é uma fonte forte de $S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$. Temos por **4.3.2** que as reflexões por esta sequência de vértices comutam com a reflexão pela fonte i'_n . Segue de **4.4.1**, **4.3.5** e de **4.3.4** que $S_{i'_n}^- S_{j_t}^- \cdots S_{j_1}^- B$ é inclinada de tipo finito e que todas as álgebras envolvidas no processo são de tipo finito. Novamente de **4.3.6** temos que esta última álgebra é obtida de A por uma sequência de módulos inclinantes onde todas as álgebras envolvidas no processo são de tipo finito. $\square$

4.5 Apêndice: Álgebras mansas disfarçadas de tipo $\tilde{E}_8$.

8)

9)

10)

11)

12)

13)

14)

15)

16)

17)

18)

19)

20)

21)

22)

23)

32)

33)

34)

35)

36)

37)

38)

39)

40)

41)

42)

43)

44)

45)

46)

47)

88)

89)

90)

91)

92)

93)

94)

95)

Bibliografia

- [1] I. Assem. Tilted algebras of type A_n . *Communications in Algebra*, (19):2121–2139, 1982.
- [2] I. Assem. Algebras given by labelled quivers. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(29):41–48, 1984.
- [3] I. Assem. Torsion theories induced by tilting modules. *Canadian Journal of Mathematics*, 36(5):899–913, 1984.
- [4] I. Assem and Skowroński A. Quadratic forms and iterated tilted algebras. *Journal of Algebra*, (128):55–85, 1990.
- [5] I. Assem and D. Happel. Generalized tilted algebras of type A_n . *Communications in Algebra*, 9(20):2101–2125, 1981.
- [6] I. Assem, J. Nehring, and A. Skowroński. Domestic trivial extensions os simply connected algebras. *Tsukuba J. Math.*, 13(1):31–72, 1989.
- [7] I. Assem and A. Skowroński. *Algèbres pré-inclinées et catégories dérivées*, volume 1407 of *Séminaire M.P. Malliavin. Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1987.
- [8] I. Assem and A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$. *Math. Z.*, 195:269–290, 1987.
- [9] I. Assem and A. Skowroński. Algebras with cycle-finite derived categories. *Math. Ann.*, 280:441–463, 1988.
- [10] M. Auslander, R. Bautista, M.I. Platzeck, I. Reiten, and S.O. Smalø. Almost split sequences whose middle term has at most two indecomposable summands. *Canadian Journal of Mathematics*, 31:942–960, 1979.
- [11] M. Auslander, M.I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250:1–46, 1979.

- [12] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of artin algebras IV. *Comm. Algebra*, (6):443–518, 1977.
- [13] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [14] R. Bautista, F. Larrión, and L. Salmerón. On simply connected algebras. *Proc. London Math. Soc.* (2), 27(2):212–220, 1983.
- [15] K. Bongartz. *Tilted algebras*, *Proc. ICRA III(Puebla)*, volume 903 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1980.
- [16] K. Bongartz. *Tilted Algebras*. *Proc. ICRA III (Puebla)*, volume 903 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1981.
- [17] K. Bongartz. A criterion for finite representation type. *Math. Annalen. Band. Heft*, (269):1–12, 1984.
- [18] S. Brenner and M. Butler. *Generalizations of Bernstein-Gelfand and Ponomarev reflection functors*. *Proc. ICRA II (Ottawa)*, volume 832 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1980.
- [19] C. Cibils, Larrión F., and Salmerón L. Métodos diagramáticos em teoria de representações. *Monografias del Instituto de Matemáticas. UNAM. México*, 1982.
- [20] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Derived categories and Morita theory. *J. Algebra*, (104):397–409, 1986.
- [21] F. Coelho. Preprojective partitions and Auslander-Reiten quivers for artin algebras. *Ph. D Thesis, University of Liverpool*, 1990.
- [22] F. Coelho. Uma introdução à teoria de representações de álgebras. *XII Escola de Álgebra. Brasil*, 1992.
- [23] G. D’Este and C. M. Ringel. Coherent tubes. *Journal of Algebra*, (87):150–201, 1984.
- [24] S. Dickson. Torsion theory for abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (121):223–235, 1966.
- [25] P. Draxler. Completely separating algebras. *Journal of Algebra*, reprint 1994.
- [26] R. M. Fossum, I. A. Griffith, and I. Reiten. *Trivial extensions of abelian categories*, volume 456 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1975.
- [27] P. Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras*, *Proc. ICRA II(Ottawa)*, volume 831 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1979.

- [28] P. Gabriel. *The universal cover of a representation-finite algebra*. *Proc. ICRA II (Puebla, 1980)*, volume 903 of *Springer Lectures Notes*. Springer Verlag, 1981.
- [29] D. Happel. Iterated tilted algebras of affine type. *Comm. Algebra*, 1- 2(15):29–45, 1987.
- [30] D. Happel. On the derived category of finite-dimensional algebras. *Comment. Math. Helv.*, 62:339–389, 1987.
- [31] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, volume 119 of *London Math. Soc. Notes*. Cambridge University Press, 1988.
- [32] D. Happel, J. Rickard, and A. Schofield. Piecewise hereditary algebras. *Bull London Math. Soc.*, (20):23–28, 1988.
- [33] D. Happel and C. M. Ringel. *Construction of tilted algebras*. *Proc ICRA III (Puebla)*, volume 903 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1981.
- [34] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.
- [35] D. Happel and D. Vossiek. Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component. *Manuscripta Math.*, (42):221–243, 1983.
- [36] M. Hoshino. Splitting torsion theories induced by tilting modules. *Comm. Algebra* 11, (4):427–441, 1983.
- [37] D. Hughes and J. Waschbusch. Trivial extensions of tilted algebras. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 46(3):347–364, 1983.
- [38] S. Liu. Tilted algebras and generalized standard Auslander-Reiten components. *Arch. Math.*, (61):12–19, 1993.
- [39] R. Martinez-Vila and J. A. De la Peña. The universal cover of a quiver with relations. *J. Pure Appl. Algebra*, (30):277–292, 1983.
- [40] H. Merklen. On Auslander-Reiten sequences of triangular matrix algebras. *Canadian Mathematical Society. Conference Proceedings*, 11, 1991.
- [41] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1984.
- [42] O. Roldán. Tilted algebras of types $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n$ and $\tilde{B}\tilde{C}_n$. *Ph. D, Thesis, Carleton University*, 1983.
- [43] A. Skowroński. Simply connected algebras and hochschild cohomologies. *Canadian Mathematical Society. Conference proceedings*, 14, 1993.

- [44] A. Skowroński and J. Waschbusch. Representation finite biserial algebras. *J. Reine Angew. Math.*, pages 172–181, 1983.
- [45] H. Tachikawa and T. Wakamatsu. Tilting functors and stable equivalence for self injective algebras. *Journal of Algebra*, 109:138–165, 1987.
- [46] J. C. Verdier. *Categories dérivées*, volume 569 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1977.
- [47] M. Wenderlich. Representation finite iterated tilted algebras of type $\tilde{D}_n$. *Ann. Sci. Math. Quebec*, 17(2):195–224, 1993.