Propriedades K canceláveis
e
 K estáveis
de espaços de Banach

Luciano Octavio Condori Huanca

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Elói Medina Galego**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CNPQ*

-São Paulo, 11 de dezembro de 1995-

Propriedades K canceláveis
e
 K estáveis
de espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Luciano Octavio Condori Huanca
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 11 de dezembro de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (Orientador) - IME - USP
- Prof^a. Dr^a. Zara Issa Abud - IME - USP
- Prof. Dr. Raymundo Luis de Alencar -IMECC-UNICAMP.

“ A MEUS PAIS.”

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar de forma sistemática, algumas propriedades de espaços de Banach definidas através de operadores, tais como as propriedades de Grothendieck, Dieudonné, Pelczynski, Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Bombal, etc, nos espaços de Banach do conjunto das funções contínuas definidas num compacto K à valores num espaço de Banach E .

Esse estudo é feito sob o aspecto de K cancelabilidade e K estabilidade, dois conceitos que introduzimos nesta dissertação.

Abstract

The purpose of this work is to study thoroughly some proprieties of spaces of Banach defined through operators such as the proprieties of Grothendieck, Dieudonné, Pelczynski, Dunford-Pettis, reciprocal of Dunford-Pettis, Bombal, etc in the spaces of Banach in all the functions defined in a compact K on a space of Banach E .

This study is made through the K cancelability and K stability features, two concepts we introduce in this work.

Agradecimentos

◇ Ao professor Fernando Bombal de la Universidad Complutense de Madrid, pelos e-mail e materiais que dele recebemos esclarecendo várias dúvidas ao longo dessa dissertação.

◇ E principalmente ao professor Elói Medina Galego pela sugestão do tema, pela paciente e valiosa orientação, sem a qual eu não teria concluído esta dissertação.

◇ Agradeço aos membros da comissão julgadora, em especial à Prof^a. Zara Issa Abud, pela observação de imprecisões e erros, na versão preliminar deste trabalho, e por suas valiosas sugestões.

◇ Aos professores Michael Talagrand e Elias Saab, pela gentileza em responder nossos e-mail.

◇ À CNPQ pelo apoio financeiro no início do programa de mestrado.

◇ Aos professores do IME que incentivam a pós-graduação dos que trabalham fora deste instituto.

◇ A todas as pessoas que de alguma maneira nos ajudaram a concluir este trabalho.

★ Obrigado ★

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	4
2 Motivações das definições de propriedades K canceláveis e K estáveis...	13
3 Definições de algumas propriedades de espaços de Banach através de operadores	16
4 Teoremas de representações de operadores em $C(K, E)$	35
4.1 Medidas vetoriais e o teorema de Riesz	35
4.2 O teorema de Singer	40
4.3 O teorema de Dunford-Schwartz	44
4.4 O teorema de Singer-Dinculeanu	49
5 Primeiros exemplos de propriedades de espaços de Banach K canceláveis e K estáveis	52
6 K estabilidade das propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 para compactos dispersos	58
7 K cancelabilidade e K estabilidade de um dual ser Schur	87
8 Sobre a K cancelabilidade das propriedades de Dieudonné e propriedade V para K não disperso	90

9	K estabilidade e K cancelabilidade da propriedade de Grothendieck...	107
10	K cancelabilidade e K estabilidade de conter subespaços isomorfos a $\ell_q(\mathbb{N})$, $1 \leq q < +\infty$	111
11	K cancelabilidade de conter quociente isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$	123
12	Sobre a K estabilidade da propriedade de Dunford-Pettis para K não disperso: contra-exemplo de Talagrand	131
	Bibliografia	139

★ ★ ★ ★

Notações

Seguiremos as notações dos livros [17], [18] e [19], entretanto, destacaremos aqui algumas delas.

Sejam M e N espaços de Banach, diz-se que M tem uma cópia isomorfa de N , denotaremos por $N \hookrightarrow M$, se existe um operador linear contínuo injetor $\varphi: N \rightarrow M$, com inversa contínua.

Sejam M e N espaços de Banach, diz-se que M tem um quociente a N , denotaremos por $M \twoheadrightarrow N$, se existe um operador linear contínuo sobrejetor $\varphi: M \rightarrow N$.

Sejam M e N espaços de Banach, diz-se que N tem uma cópia complementada em M , denotaremos $N \hookrightarrow^c M$, se existe um subespaço X de M isomorfo a N tal que X é complementado em M , isto é: existe uma projeção linear contínua $P: M \rightarrow X$.

Seja E um espaço de Banach, indicaremos por E^* o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de E em $\mathbb{R}$ (o dual topológico de E).

Denotaremos por K os espaços topológicos compactos de Hausdorff e por β a σ -álgebra de Borel do conjunto compacto K . O símbolo $|K|$ denotará a cardinalidade de K .

Seja E um espaço de Banach e $A \subset E$, por $co(A)$ será denotado a envolvente convexa do conjunto A e por; $\overline{co}(A)$ denotaremos a envolvente convexa fechado de A .

Seja E um espaço de Banach, por $B_r^E(0) = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ indicaremos a bola fechada de centro em 0 e radio r em E , quando $r = 1$, colocamos $B_1^E(0) = B_E$.

Sejam E e F espaços de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ representará o conjunto das transformações lineares contínuas de E em F .

Seja E um espaço de Banach, por $\dim(E)$ denotaremos a dimensão do espaço de Banach E .

Por $\ell_\infty(\mathbb{N})$ denotaremos o espaço de Banach das seqüências limitadas em $\mathbb{R}$, com a norma do supremo.

Por $c_0(\mathbb{N})$ denotaremos o espaço de Banach das seqüências convergentes a zero, com a norma do supremo.

Por $\ell_p(\mathbb{N})$ denotaremos o espaço de Banach das seqüências p somáveis com norma $\|(a_n)_n\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$.

Por $L_\infty[0, 1]$ denotaremos o espaço de Banach das funções mensuráveis essencialmente limitadas com a norma $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \inf\{c > 0 / m(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\}$.

O símbolo ■ indica o término de uma demonstração.

Introdução

Em 1953 Grothendieck axiomatizou algumas propriedades relevantes dos espaços de Banach $C(K)$ das funções contínuas definidas num compacto K com a norma do supremo, introduzindo entre outras as assim chamadas propriedade de Dunford-Pettis, propriedade recíproca de Dunford-Pettis e propriedade de Dieudonné.

Mais tarde, Pelczynski em 1962, mostrou que os espaços $C(K)$ tem outra propriedade importante que ele chamou de propriedade V .

Desde então essas propriedades começaram a ser estudadas nos espaços de Banach $C(K, E)$ das funções contínuas definidas num compacto K a valores num espaço de Banach E com a norma do supremo.

O objetivo deste trabalho é fornecer um estudo sistemático destas e outras propriedades $\mathcal{P}$ de espaços de Banach, se orientando através das seguintes definições:

1. Seja K um compacto; uma propriedade $\mathcal{P}$ de espaços de Banach é K cancelável se:
  - (a) $C(K)$ não tem a Propriedade $\mathcal{P}$;
  - (b) Se E é um espaço de Banach tal que $C(K, E)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$, então E também tem essa propriedade.
2. Seja K um compacto; uma propriedade $\mathcal{P}$ de espaços de Banach é K estável se:
  - (a) $C(K)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$;
  - (b) Se um espaço de Banach E tem a propriedade $\mathcal{P}$, então $C(K, E)$ também tem essa propriedade.

Essas definições são motivadas no capítulo 2.

As propriedades $\mathcal{P}$ que vamos estudar serão definidas e caracterizadas no capítulo 3, veja p. 22.

Como o estudo de tais propriedades está intimamente relacionado com o estudo de operadores definidos em $C(K, E)$, usando o teorema de Riesz, nós desenvolvemos no capítulo 4, a teoria de representação de operadores definidos nesses espaços tendo como objetivo principal o teorema de Singer-Dinculeanu, aí usamos as integrais de Bochner, Gowurin e Bartle.

No capítulo 5 demonstraremos (veja teoremas 5.10 e 5.11) que as propriedades de ser um espaço de Banach de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias isomorfas de $c_0(\mathbb{N})$ respectivamente são: a) K estáveis se, e somente se, K é finito; b) K canceláveis se, e somente se, K é

infinito.

No capítulo seguinte, destacamos os teoremas 6.17, 6.18 e 6.23, isto é; $C(K)$ tem a propriedade V , teorema de Dobrakov e $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis respectivamente, e daí obtemos o teorema 6.24, que é o resultado principal desse capítulo, ou seja, se K é um compacto disperso, então as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 são K estáveis.

No capítulo 7, usando uma condição necessária e suficiente para que o dual de um espaço de Banach E seja Schur em termos da propriedade de Dunford-Pettis e não conter subespaços isomorfos a $\ell_1(\mathbb{N})$ (veja teorema 7.1), demonstramos (veja teorema 7.2 e 7.3) que a propriedade de um dual ser Schur é K estável se, e somente se, K é disperso e K cancelável se, e somente se, K é não disperso.

No capítulo 8, seguindo o estudo das propriedades definidas no capítulo 3, tentamos responder a seguinte pergunta. Se K é um compacto não disperso, então a propriedade V e a propriedade de Dieudonné são K estáveis?

No estudo desse problema só conseguimos encontrar o teorema 8.13 de Kalton-Saab para obter o principal teorema 8.1 de Ülger, ou seja; sejam K um compacto não vazio e E um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- a) $C(K, E)$ tem a propriedade de Dieudonné.
- b) Se E tem a propriedade (u) , então $C(K, E)$ tem a propriedade V .

No capítulo 9, mostraremos (veja teorema 9.4 e 9.6) que a propriedade de Grothendieck é K estável se, e somente se, K é finito e é K cancelável se, e somente se, K é infinito. Para a demonstração de tais teoremas precisaremos do seguinte teorema de Cembranos (veja teorema 9.1): sejam K um compacto infinito e E um espaço de Banach de dimensão infinita, então $C(K, E)$ contém um subespaço complementado que é isomorfo de $c_0(\mathbb{N})$.

No capítulo 10, daremos uma condição necessária e suficiente (veja teoremas 10.3 e 10.4) para que a propriedade de não conter cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$ seja K estável e K cancelável para compactos K dispersos e não dispersos respectivamente.

Mostraremos também através do teorema de Bombal e Porras (teorema 10.6) que a propriedade de conter cópias complementadas de $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável para um compacto K disperso (veja teorema 10.7).

Em seguida no teorema 10.13 mostramos que a propriedade de conter cópias complementadas

de $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável para cada compacto K (teorema de Elias Saab e Paulette Saab).

No capítulo 11, motivados pelos resultados do artigo [37] provamos que a propriedade de ter quociente a $\ell_q(\mathbb{N})$, $1 \leq q < +\infty$, é K cancelável para todo compacto disperso.

Finalmente no capítulo 12, trataremos sobre a K estabilidade da propriedade de Dunford-Pettis para K não disperso e aí apresentaremos em detalhe o famoso contra-exemplo de Talagrand, ou seja; existe um espaço de Banach E com a propriedade de Dunford-Pettis (veja teorema 12.6) tal que $C([0, 1], E)$ não tem a propriedade de Dunford-Pettis (veja teorema 12.7).

Entretanto resta-nos alguns problemas, como indicaremos a seguir.

1) Seja K um compacto disperso. A propriedade de ter quociente isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ é K cancelável? (veja capítulo 2).

2) Seja K um compacto não disperso. As propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 são K estáveis? (veja capítulo 6).

3) Seja K um compacto não disperso. A propriedade de Dieudonné e a propriedade V são K canceláveis? ou K estáveis? (veja capítulo 8).

4) Seja K um compacto não disperso. A propriedade de Grothendieck é K estável? (veja capítulo 9).

5) Seja K um compacto não disperso e $1 < p < +\infty$. A propriedade de conter cópias complementadas de $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável? (veja capítulo 10).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados sobre a teoria dos espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$ que serão utilizados nos capítulos seguintes.

As notações e a grande parte dos resultados sem demonstração que utilizaremos nesta dissertação podem ser encontrados nos livros [17], [18], [19] e para facilitar o leitor passaremos a enuncialos.

Definições 1.1. *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n) \subset E$ uma seqüência e $(x_n^*) \subset E^*$ seqüência em E^* então:*

- (a) $(x_n)_n \subset E$ é fracamente convergente para $x \in E$ e escrevemos $x_n \xrightarrow{E^*-top} x$ se $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ para cada $x^* \in E^*$.
- (b) $(x_n^*)_n \subset E^*$ é fraca-estrela convergente para $x^* \in E^*$ na E -top e escrevemos $x_n^* \xrightarrow{E-top} x^*$ se $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$ para cada $x \in E$.
- (c) $(x_n)_n \subset E$ é de Cauchy se para cada par de seqüências crescentes $(p_n)_n \subset \mathbb{N}$ e $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$ temos $(x_{p_n} - x_{q_n}) \rightarrow 0$. Analogamente. $(x_n)_n \subset E$ é fracamente de Cauchy se, e somente se, $(x^*(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy para cada $x^* \in E^*$.
- (d) E é fracamente seqüencialmente completo (f.s.c.) se cada seqüência fracamente de Cauchy é fracamente convergente.
- (e) E é Schur se cada seqüência fracamente de Cauchy em E é de Cauchy.
- (f) a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy (f.i.c.) se $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < +\infty$ para cada $x^* \in E^*$.
- (g) E é reflexivo se a aplicação canônica $\tau : E \rightarrow E^{**}$ tal que $\tau(x) = \hat{x}$, $\forall x \in E$ é um operador linear contínua e sobrejetora.

Teoremas que se encontram em [17]

Definição 1.2. Uma função $f : \Omega \rightarrow E$ é dita fracamente μ -mensurável se para cada $x^* \in E^*$ a função numérica x^*f é μ -mensurável.

Teorema 1.3 Mensurabilidade de Pettis (p.42). Uma função $f : \Omega \rightarrow E$ é μ -mensurável se, e somente se:

(i) Existe $A \in \beta$ com $\mu(A) = 0$ tal que $f(\Omega \setminus A) \subset E$ é separável.

(ii) f é fracamente μ -mensurável.

Teoremas que se encontram em [18]

Teorema 1.4 Riesz (p.3). Sejam E um espaço normado. Todo subconjunto fechado e limitado de E é compacto se, e somente se, a $\dim E < +\infty$.

Teorema 1.5 Mazur (p.12). Se A é um subconjunto convexo do espaço normado E , então $\overline{A}$ na topologia da norma coincide com $\overline{A}$ na E^* -top.

Teorema 1.6 Alaoglu (p.13). Para qualquer espaço de Banach E , $B_{E^*} \subset E^*$ é compacto na E -top de E^* .

Teorema 1.7 (Orlicz-Pettis, p.24): Seja E espaço de Banach e seja $\sum_n x_n$ uma série em E , suponha que para cada $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$ crescente a $\sum_{j=1}^n x_{r_j}$ é fracamente convergente, então para cada seqüência $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$ crescente temos que $\sum_{j=1}^n x_{r_j}$ converge em norma.

Definição 1.8. Uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ é básica se $(x_n)_n$ é base de Schauder do espaço $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$.

Teorema 1.9 (p.42,46). Seja E um espaço de Banach, $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência com $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \xrightarrow{E^* \text{-top}} 0$, então $(x_n)_n \subset E$ admite uma subseqüência básica.

Teorema 1.10 (Veja [18]-p.44). Seja E um espaço de Banach, $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência e $\sum_n x_n$ uma série em E , são equivalentes:

(a) $\sum_n x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy (f.i.c).

(b) Existe $c > 0$ tal que para cada $(t_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, temos $\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right\| \leq c \sup_n |t_n|$

(c) para cada $(t_n)_n \in c_0(\mathbb{N})$, $\sum_n t_n x_n$ converge em E .

(d) Existe $c > 0$ tal que para cada subconjunto finito $\sigma \subset \mathbb{N}$ e quaisquer sinais $\pm$ temos

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} \pm x_n \right\| \leq c.$$

Teorema 1.11 (p.48). *Seja E um espaço de Banach, E contém cópia isomorfa a $\ell_1(\mathbb{N})$ complementada se, e somente se, $c_0(\mathbb{N})$ é um subespaço isomorfo de E^* .*

Teorema 1.12 (Sobczyk, p.71). *Seja E um espaço de Banach separável, se existe um subespaço linear fechado $M \subset E$ isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$. Então existe uma projeção linear contínua $P : E \rightarrow M$ de E sobre M .*

Teorema 1.13 (Phillips, p.71). *Seja $X \subset E$ um subespaço fechado do espaço de Banach E e suponha que $T : X \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$ seja um operador linear contínuo, então T pode ser estendido a um operador linear contínuo $S : E \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$ tendo a mesma norma de T .*

Teorema 1.14 (Schur, p.85). *Em $\ell_1(\mathbb{N})$, seqüências fracas e convergentes em norma coincidem.*

Definição 1.15. *Seja $sg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $sg(x) = 1$ se $x > 0$, -1 se $x < 0$ e 0 se $x = 0$; sg é dita função sinal e $sg(x)$ indica o sinal de x .*

Definição 1.16. *Denotaremos por $(r_i)_{i \in I}$ a seqüência de funções de Rademacher sobre $[0, 1]$.*

Teorema 1.17 (p.203). *Em $L_\infty[0, 1]$ as funções de Rademacher $r_n(t) = sg(\sin(2^{n-1}\pi t))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, 1]$ são equivalentes a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Definição 1.18. *A seqüência $(e_n)_n$ dado por $e_n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ em $\ell_1(\mathbb{N})$ denota a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Teorema 1.19 (Rosenthal, p.213). *Toda seqüência limitada num espaço de Banach ou tem uma subsequência fracamente de Cauchy ou tem uma subsequência equivalente à base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Teorema 1.20 (Josefson-Nissenzweig, p.219). *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita, então existe uma seqüência $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ fraca-estrela convergente a 0 ($x_n^*(x) \rightarrow 0$, para todo $x \in E$) tal que $\|x_n^*\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.21 (p.227). *Seja $H \subset E$ um subconjunto de um espaço de Banach, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $H_\varepsilon \subset E$ compacto (fracamente compacto) tal que $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon B_E$; então H é relativamente compacto (fracamente compacto).*

Teoremas que se encontram em [19]

Teorema 1.22 (Urysohn, p.15). *Sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos num espaço topológico normal K , então existe uma função contínua $f : K \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$.*

Teorema 1.23 (p.52). *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado e $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ tal que, para cada $x \in E$; $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(x)\| < +\infty$, então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty$.*

Teorema 1.24 (p.65). *Se o dual de um espaço linear normado é separável, então o espaço é separável.*

Definição 1.25. *Sejam $\lambda, \mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ funções conjunto finitamente aditiva definida sobre a σ -álgebra de Borel do compacto K . λ é μ -contínua se para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall A \in \beta$ com $|\mu|(A) < \delta$ implica $|\lambda(A)| < \epsilon$ ($\lim_{|\mu|(A) \rightarrow 0} \lambda(A) = 0$).*

Lema 1.26 (p.131). *Sejam $\lambda, \mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medidas enumeravelmente aditiva, onde λ é finita, então λ é μ -contínua se, e somente se, $|\mu|(A) = 0$ implica $\lambda(A) = 0$.*

Teorema 1.27 (Radon-Nikodým, p.176). *Seja (K, β, μ) um espaço de medida positiva σ -finita e $\lambda : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida finita μ -contínua, então existe uma única função $f \in \mathcal{L}^1(K, \beta, \mu)$ tal que $\lambda(A) = \int_K f(t) d\mu$, para cada $A \in \beta$ onde $|\lambda|(K) = \int_K |f(t)| d\mu$.*

Teorema 1.28 (p.179). *Seja (K, β, μ) um espaço de medida positiva, f uma função não negativa μ -mensurável definida sobre K e $\lambda(A) = \int_A f(t) d\mu$, para todo $A \in \beta$ e seja g uma função não-negativa λ -mensurável definida sobre K ; então $f \cdot g$ é μ -mensurável e $\int_A g(t) d\lambda = \int_A f(t)g(t) d\mu$, para todo $A \in \beta$.*

Teorema 1.29 (Riesz, p.265). *Seja K um compacto, existe um isometria entre $C^*(K)$ e $rca(K)$ tal que a cada $x^* \in C^*(K)$ associa uma $\mu \in rca(K)$, satisfazendo:*

$$x^*(f) = \int_K f d\mu, \quad \forall f \in C(K) \text{ e } \|x^*\| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Teorema 1.30 (p.289). *Se (S, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita positiva, então existe um isomorfismo isométrico entre $L_1^*(S, \Sigma, \mu)$ e $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ o qual faz corresponder a cada $x^* \in L_1^*(S, \Sigma, \mu)$ uma $g \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ tal que $x^*(f) = \int_S g(t)f(t) d\mu$ para todo $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$.*

Teorema 1.31 (p.290). *O espaço $L_1^*(S, \Sigma, \mu)$ é fracamente completo.*

Definição 1.32. *Uma seqüência de funções $(f_n)_n$ em $L_1[0, 1]$ é limitada se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < +\infty$.*

Teorema 1.33 (p. 291). *Seja $(f_n)_n \subset L_1[0, 1]$ uma seqüência.*

(a) *$(f_n)_n$ é fracamente de Cauchy se, e somente se, é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(t) dt$ existe para cada $E \subset [0, 1]$ com $E \in \beta$.*

(b) *$(f_n)_n$ converge fracamente para $f \in L_1[0, 1]$ se, e somente se, é limitado e*

$$\int_E f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(t) dt, \quad \forall E \subset [0, 1] \text{ com } E \in \beta.$$

Definição 1.34. *Seja S um espaço de Hausdorff compacto e Σ a σ -álgebra de Borel de S ; $K \subset ca(S, \Sigma)$ é uniformemente enumeravelmente aditiva se para cada seqüência $(A_n)_n \subset \beta$ de conjuntos dois a dois disjuntos temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu_i \in K} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i) \right| = 0$.*

Teorema 1.35 (p.305). *Um conjunto $K \subset ca(S, \Sigma)$ é fracamente seqüencialmente compacto se, e somente se, é limitado e uniformemente enumeravelmente aditivo em $\mu \in K$.*

Teorema 1.36 (p.306). *Um subconjunto $R \subset ca(K, \beta)$ é fracamente seqüencialmente compacto se, e somente se, é limitado e existe $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida positiva tal que $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \mu(A) = 0$ uniformemente em $\mu \in R$.*

Definição 1.37. *Seja K um conjunto compacto e β a σ -álgebra de Borel de K , o espaço $ca(K)$ é formado por todas as funções a valores reais enumeravelmente aditivas definidas sobre β .*

Teorema 1.38 (p.319). *Seja $m: \beta \rightarrow E$ uma medida vetorial de semi-variação escalar finita tal que $\{x^* \circ m : \|x^*\| \leq 1\}$ é limitado, então $\{x^* \circ m : \|x^*\| \leq 1\}$ é fracamente seqüencialmente compacto em $ca(K)$.*

Teorema 1.39 (p.321). *Dado uma medida $m : \beta \rightarrow E$ de semi-variação escalar limitada então existe uma medida $\lambda : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ finita positiva tal que:*

- (a) $\lambda(A) \leq \|m\|(A)$, para todo $A \in \beta$
- (b) $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \|m\|(A) = 0$

Teorema 1.40 (p.323). *Seja $m : \beta \rightarrow E$ uma medida vetorial de semi-variação escalar limitada e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função m -mensurável, tal que $\inf\{c > 0 / m(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\}$ é finito, então f é m -integrável e $\left| \int_K f dm \right| \leq \|f\|_{\infty} \|m\|(K)$.*

Teorema 1.41 (p.328). *Se $(f_n)_n$ é uma seqüência de funções μ -integráveis que converge μ -q.s. a f e se g é uma função μ -integrável tal que $|f_n(s)| \leq g(s)$ μ -q.s. para cada $n \in \mathbb{N}$, então f é μ -integrável e $\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$, $\forall E \in \beta$.*

Teorema 1.42 (p.421). *Seja E um espaço de Banach e seja Γ um subespaço total de E^+ . Então funcionais lineares sobre E contínuas na Γ -top. de E são necessariamente os funcionais de Γ .*

Teorema 1.43 (p.422). *Seja um operador sobre E e Γ um subespaço total de E^+ . Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) $f \in \Gamma$;
- (ii) f é Γ -contínua;

(iii) $\{x \in E / f(x) = 0\}$ é Γ -fechado.

Teorema 1.44 (p.425). *Seja E um espaço de Banach, são equivalentes.*

(a) E é reflexivo

(b) $B_E \subset E$ é compacto na E^* - top.

Teorema 1.45 (p.426). *Seja E é um espaço de Banach. E é separável se, e somente se, $B_{E^*} \subset E^*$ é metrizável na E - top. de E^* .*

Teorema 1.46 (p.426). *Seja E é um espaço de Banach. E^* é separável se, e somente se, $B_E \subset E$ é metrizável na E^* - top. de E .*

Teorema 1.47 (p.426). *Sejam X, Y espaços de Banach. Se um operador adjunto de $U \in B(X, Y)$ é injetora e tem imagem fechada, então $U(X) = Y$.*

Teorema 1.48 (p.430). *Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$ um subconjunto, A é relativamente compacto na E^* - top. se, e somente se, A é fracamente seqüencialmente compacto (isto é, qualquer seqüência em A tem uma subseqüência convergente em E).*

Definição 1.49. *Um subconjunto $A \subset E$ é fracamente compacto se A é compacto na E^* -top. de E .*

Teorema 1.50 (p.434). *Sejam E um espaço de Banach, $A \subset E$ um subconjunto, se A é fracamente compacto em E , então $\overline{\text{co}}(A)$ é fracamente compacto em E .*

Definição 1.51. *Sejam E e F espaços de Banach, um operador $T : E \rightarrow F$ é compacto (fracamente compacto) se para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ limitada; $(T(x_n))_n \subset F$ tem uma subseqüência convergente (fracamente convergente).*

Definição 1.52. *Um subconjunto $A \subset E$ é relativamente fracamente compacto se $\overline{A}$ é fracamente compacto.*

Teorema 1.53 (p.485). *Sejam E e F espaços de Banach e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ são equivalentes:*

(a) T é fracamente compacto

(b) $T(B_E) \subset F$ é relativamente fracamente compacto.

(c) $T^{**}(E^{**}) \subset \tau(F)$ onde $\tau : F \rightarrow F^{**}$ é a aplicação canônica.

(d) $T^* : F^* \rightarrow E^*$ é um operador contínuo na F - top de F^* na E^{**} - top de E^* .

(e) $T^* : F^* \rightarrow E^*$ é fracamente compacto.

(Teorema de Schauder, p.485). *Um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é compacto se, e somente se, $T^* : F^* \rightarrow E^*$ é compacto.*

Teoremas que se encontram em [16]

Definição 1.54. *Seja (K, β, μ) um espaço de medida finita e positiva. $\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ denota o conjunto das funções β -mensuráveis f tais que $\inf_{c \in \mathbb{R}} \{c > 0 / \mu(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\}$ é finito. Sejam f e g em $\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$, escrevemos $f \sim g$ se $\mu(\{t \in K : f(t) \neq g(t)\}) = 0$. A função $\rho : (K, \beta, \mu) \rightarrow (K, \beta, \mu)$ é um levantamento se verifica as seguintes condições:*

- a) $\rho(f) \sim f$;
- b) $f \sim g$ implica $\rho(f) = \rho(g)$;
- c) $\rho(\alpha f + \beta g) = \alpha \rho(f) + \beta \rho(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- d) $f \geq 0$ implica $\rho(f) \geq 0$;
- e) $f(t) \equiv \alpha$ implica $\rho(f)(t) \equiv \alpha$;
- f) $\rho(f \cdot g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$

Teorema 1.55 (p.206). *Seja (K, β, μ) um espaço de medida finita e positiva, então existe um levantamento $\rho : \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$*

Teorema 1.56 (p.209). *Seja $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida finita positiva e $\rho : \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ um levantamento, se $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido (para a relação $\leq$) de funções não negativas de $\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ com $\rho(f) = f$ para cada $f \in \mathcal{F}$; então $h = \sup_{f \in \mathcal{F}} f$ é μ -mensurável.*

Teoremas que se encontram em [15]

Definição 1.57. *Um Polish space é um espaço topológico separável que pode ser metrizado por uma métrica completa.*

Teorema 1.58 (p.286). *Sejam E e F Polish space, seja $H \subset E \times F$ um conjunto analítico e $M \subset E$ a projeção de H sobre E ; então existe uma função $f : M \rightarrow F$ tal que:*

- a) $\text{Graf}(f) \subset H$
- b) f é mensurável com respeito as álgebras $\beta_*(E)$ e $\beta(Y)$.

Teorema 1.59 (Lusin, p.227). *Seja E um espaço de Hausdorff localmente compacto, seja $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra sobre E com $\beta(E) \subset \mathcal{A}$ (borelianos em E) e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -mensurável, se $\mu(A) < +\infty$ e $\varepsilon > 0$; então existe um subconjunto compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ e $f|_K$ é contínuo.*

Teoremas que se encontram em [14]

Teorema 1.60 (p.166). *Seja $1 \leq p < +\infty$; temos $(\ell_p(I))' = \ell_{p'}(I)$.*

Teorema 1.61 (p.245). *Seja f uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach E sobre um espaço de Banach F , para todo conjunto aberto $U \subset E$, $f(U)$ é aberto em F .*

Teoremas que se encontram em [23]

Teorema 1.62 (Milutin, p.408). *Se S e T são compactos métricos não enumeráveis então $C(S) \sim C(T)$.*

Teorema 1.63 (p.411). *Seja Ω um conjunto compacto Hausdorff. São equivalentes.*

(a) Ω é disperso.

(b) Toda imagem contínua de Ω é dispersa.

(c) Nenhum subespaço de $C(\Omega)$ é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

(d) Todo funcional linear sobre $C(\Omega)$ é da forma $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(t_n)$ onde $t_1, t_2, \dots$ é uma seqüência fixada de pontos de Ω e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

(e) Todo subespaço de dimensão infinita de $C(\Omega)$ contém isomorficamente o espaço $c_0(\mathbb{N})$.

Teoremas que se encontram em [39]

Teorema 1.64 (p.149). *Cada espaço compacto enumerável é disperso e métrico.*

Teorema 1.65 (p.353). *Se $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta localmente finita, então existe uma partição da unidade subordinada a $(U_\alpha)_\alpha$. Além disso, se $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ é qualquer família de conjuntos abertos tal que $\overline{G_\alpha} \subset U_\alpha$ para $\alpha \in A$, então existe uma partição da unidade $(P_\alpha)_\alpha$ tal que $P_\alpha(x) = 0$ para $x \in X \setminus U_\alpha$ e $P_\alpha(x) > 0$ para $x \in G_\alpha$ ($\alpha \in A$).*

Teorema 1.66 (Grothendieck, p.357). *Sejam X, Y espaços localmente compactos e seja E qualquer espaço de Banach. Então $C_o(X) \hat{\otimes} C_o(Y) \cong C(X \times Y)$ e $C_o(X) \hat{\otimes} E \cong C(X, E)$.*

Precisaremos ainda dos seguintes resultados.

Teorema 1.67 (Lei fraca de Khintchine, veja [3]-p.197). *Se $X_1, X_2, \dots$ são independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com medida comum μ , então $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$ em probabilidade.*

Teorema 1.68 (Veja[31], vol.I-p.111 ou [27]-p.122). $L_\infty[0, 1] \sim \ell_\infty(\mathbb{N})$.

Definição 1.69. *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é estritamente singular se a restrição a qualquer subespaço de dimensão infinita de E não é isomorfismo.*

Teorema 1.70 (Tosio Kato, veja[40]-p.286). *Sejam E e F espaços de Banach*

(a) Se $T, S : E \rightarrow F$ são operadores estritamente singulares, então $\lambda_1 T + \lambda_2 S : E \rightarrow F$ é estritamente singular para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Se $T_n : E \rightarrow F$ é uma seqüência de operadores estritamente singulares tal que $\|T_n - T\|_E \rightarrow 0$ para algum operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$; então T é estritamente singular.

Teorema 1.71 (Pelczynski, veja[33]-p.221). Se $E \hookrightarrow C(K)$ e $\dim(E) = +\infty$, então $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$.

Teorema 1.72 (James, veja[29]-pg.139). Seja E um espaço de Banach; $A \subset E$ é fracamente compacto se, e somente se, todo funcional linear contínuo assume máximo sobre A .

Teorema 1.73 (R.D.Mc. Williams, veja[36]-p.335).

Seja $B_1(E) = \{z \in E^{**} : z \text{ é fraco-estrela limite de uma seqüência em } E\}$, então $B_1(E)$ é fechado na norma em E^{**} .

Teorema 1.74 (Arens, veja[1]). Seja K compacto e $K_0 \subset K$ um subconjunto fechado de K . Se $F : K_0 \rightarrow M$ é contínua, M convexo metrizável e completo, então existe $\hat{F} : K \rightarrow M$ extensão contínua de F .

Teorema 1.75 (Talagrand, veja[42]). Seja (K, Σ, μ) um espaço de probabilidade e E um espaço de Banach, seja a seqüência de funções $f_n : K \rightarrow B_E$ μ -mensuráveis, então existe uma seqüência $g_n \in co(f_n, f_{n+1}, \dots)$ e $C, L \in \Sigma$ com $\mu(C \cup L) = 1$ tal que:

(i) Para cada $t \in C$, $(g_n(t))_n$ é fracamente de Cauchy

(ii) Para cada $t \in L$, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $(g_n(t))_{n \geq n_t}$ é equivalente à base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Definição 1.76. Consideramos, $S = \{(a_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R} / \sup_{i \in I} |a_i| < \infty\}$ e e_i os i -vetores unitários, para cada $a \in S$, seja $\|a\| = \sup_{i \in I} |a_i|$.

Seja (Ω, μ) espaço de probabilidade, $\mu : \beta \rightarrow [0, 1]$ onde β é σ -álgebra de Ω ; e para cada $t \in \Omega$ a semi-norma $|\cdot|_t$ sobre S é dada, tal que $|a|_t$ é uma função integrável para cada $a \in S$. Claramente, $|a| = \int_{\Omega} |a|_t d\mu$ define uma seminorma sobre S .

Teorema 1.77 (Bourgain, veja[13]). Suponha que $(e_i)_{i \in I}$ é c_0 base para $|\cdot|$, isto é, existe $\delta > 0$, e $M > 0$ tais que $\delta \|\sum_{i \in I} a_i e_i\|_{\infty} \leq |a| \leq M \|\sum_{i \in I} a_i e_i\|_{\infty}$. Então existe $t \in \Omega$ e uma subsequência de $(e_i)_{i \in I}$ que é uma c_0 -base para $|\cdot|_t$.

Teorema 1.78 (Veja [2]-p.89). Um espaço com uma base é separável.

Capítulo 2

Motivações das definições de propriedades K canceláveis e K estáveis

O objetivo deste capítulo é motivar as definições de propriedades K canceláveis e K estáveis em espaços de Banach.

Em [37] p. 112 foi provado:

Teorema 2.1. Sejam K um compacto disperso, $1 \leq p < +\infty$ e X um espaço de Banach. Se $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K, E)$, então $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$.

No teorema 10.2 daremos uma demonstração disto. Esse resultado pode ser interpretado de duas maneiras:

1. Sendo K disperso, $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$, (veja teorema 1.63) e então se tivermos $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K, E)$, necessariamente $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$.
2. Sendo K disperso, $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$ e então se tivermos $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K, E)$, necessariamente $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

Essas duas interpretações motivaram as seguintes definições.

Definição 2.2. Seja K um conjunto compacto; uma propriedade $\mathcal{P}$ de espaços de Banach é K cancelável se:

- (a) $C(K)$ não tem a propriedade $\mathcal{P}$;
- (b) Se E é um espaço de Banach tal que $C(K, E)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$, então E também tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Definição 2.3. Seja K um conjunto compacto; uma propriedade $\mathcal{P}$ de espaços de Banach é K -estável se :

- (a) $C(K)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$;
- (b) Se E é um espaço de Banach com a propriedade $\mathcal{P}$, então $C(K, E)$ também tem a propriedade $\mathcal{P}$.

E então claramente o teorema acima pode ser enunciado das seguintes formas:

Teorema 2.4. Sejam K um compacto disperso, $1 \leq p < +\infty$. A propriedade de conter cópia isomorfa a $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável.

Teorema 2.5. Sejam K um compacto disperso, $1 \leq p < +\infty$. A propriedade de não conter cópia isomorfa a $\ell_p(\mathbb{N})$ é K estável.

Agora, faremos três observações sobre as definições acima. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de espaços de Banach.

Observação 1. $\mathcal{P}$ não pode ser ao mesmo tempo K estável e K cancelável, uma vez que $C(K)$ tem a propriedade $\mathcal{P}$ ou $C(K)$ não tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Observação 2. $\mathcal{P}$ é K cancelável se, e somente se, não $\mathcal{P}$ é K estável.

Observação 3. $\mathcal{P}$ pode não ser nem K cancelável e nem K estável.

Exemplo: seja $\mathcal{P}$ a propriedade de conter cópia isomorfa a $\ell_2(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{N})$ e $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ na topologia da reta.

- a) $\mathcal{P}$ não é K estável, pois $\ell_2(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$, uma vez que $C(K) \sim c_0(\mathbb{N})$ (veja o lema 11.4) e $\ell_2(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow c_0(\mathbb{N})$.
- b) $\mathcal{P}$ não é K cancelável, pois $C(K, \ell_2(\mathbb{N})) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ell_2(\mathbb{N})$ e como $c_0(\mathbb{N})$ é complementado em $(\sum_{n=2}^{\infty} \ell_2(\mathbb{N})) \sim C_0(K, \ell_2(\mathbb{N}))$ (veja por exemplo teorema 9.1), segue que
$$\ell_2(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell_2(\mathbb{N}) \sim C(K, \ell_2(\mathbb{N})),$$
mas $\ell_2(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ pois $c_0(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$.

O teorema 2 do artigo citado acima nos motivou a estudarmos a K cancelabilidade da propriedade de conter quociente isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ e então lembrando:

Definição 2.6. Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que E tem um quociente a F se existe um operador linear contínuo sobrejetor $\varphi : E \rightarrow F$ (notaremos por, $E \twoheadrightarrow F$).

Obtivemos o seguinte teorema (veja teorema 11.11).

Teorema 2.7. Sejam K um compacto disperso, $1 \leq p < +\infty$. A propriedade de ter quociente a $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável.

Ainda não sabemos resolver o seguinte problema.

Problema 1. Seja K um compacto disperso. A propriedade de ter quociente a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ é K cancelável?

No próximo capítulo, introduziremos com auxílio de operadores entre espaços de Banach, 17 propriedades de espaços de Banach que posteriormente serão analisadas sob o aspecto de serem K canceláveis ou K estáveis para compactos K fixos.

Capítulo 3

Definições de algumas propriedades de espaços de Banach através de operadores

Neste capítulo seguindo o esquema do artigo [9], introduziremos várias propriedades de espaços de Banach com auxílio de operadores, dentre elas: propriedade de Dieudonné, propriedade de Grothendieck, propriedade de Dunford-Pettis, propriedade recíproca de Dunford-Pettis, propriedade V , etc. (veja página 22).

Dados dois espaços de Banach E e F por $\mathcal{L}(E, F)$ denotaremos o conjunto de operadores lineares contínuos de E em F .

Definição 3.1. Sejam E e F dois espaços de Banach, e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ diz-se que:

1. T é compacto se para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ limitada, $(T(x_n))_n \subset F$ admite uma subseqüência convergente em F .
2. T é fracamente compacto se para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ limitada, $(T(x_n))_n \subset F$ admite uma subseqüência fracamente convergente em F .
3. T é Dunford-Pettis se para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, $(T(x_n))_n \subset F$ é convergente em norma, ou equivalentemente, se $(x_n)_n \subset E$ converge fracamente a zero, então $(T(x_n))_n \subset F$ converge em norma a zero.
4. T é Dieudonné se para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, $(T(x_n))_n \subset F$ é fracamente convergente em F .
5. T é Incondicionalmente convergente se para cada série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ fracamente incondicionalmente convergente (f.i.c.) em E , temos que $\sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)$ converge em norma em F .

As seguintes relações são válidas:

$$\mathcal{K}(E, F) \begin{matrix} \subset \\ \subset \end{matrix} \begin{matrix} \mathcal{W}(E, F) \\ \mathcal{DP}(E, F) \end{matrix} \begin{matrix} \supset \\ \supset \end{matrix} \mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F) \quad (*)$$

Denotaremos por $\mathcal{K}(E, F)$, $\mathcal{W}(E, F)$, $\mathcal{DP}(E, F)$, $\mathcal{D}(E, F)$ e $\mathcal{I}(E, F)$ respectivamente as classes de operadores compactos, fracamente compactos, Dunford-Pettis, Dieudonné e Incondicionalmente convergente de E em F .

De fato:

1. $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F)$.

Sejam $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência em E ; então $(T(x_n))_n \subset F$ admite uma subseqüência convergente em norma de F , e portanto essa mesma subseqüência converge fracamente em F , logo $T \in \mathcal{W}(E, F)$. ■

2. $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F)$.

Sejam $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência fracamente de Cauchy, então pela definição 1.1 $(x^*(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy para cada $x^* \in E^*$. Assim, pelo teorema 1.23 temos que $(x_n)_n \subset E$ é uma seqüência limitada; mas T é um operador compacto, logo existem uma subseqüência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ e $y \in F$ tal que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{F^* - top.} y$.

Por outro lado, para cada $y^* \in F^*$ temos que $T^*y^* \in E^*$ e por hipótese $(T^*y^*(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy e a subseqüência $y^*T(x_{n_k})$ converge para $y^*(y)$, então $y^*T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y^*(y)$. Como esse raciocínio vale para todo $y^* \in F^*$, então $T(x_n) \xrightarrow{F^* - top.} y$.

Afirmamos que, $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$; pois caso contrário, existiria $\epsilon > 0$ e uma subseqüência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\|T(x_{n_k}) - y\| \geq \epsilon$. Pela primeira parte $(x_n)_n$ é limitada e como T é um operador compacto, $(x_{n_k})_k$ é limitada e existem $z \in F$ e $(x_{n_{k_l}})_l$ subseqüência de $(x_{n_k})_k$ tal que $T(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{F^* - top.} z$. Pela parte anterior e pela unicidade do limite temos que $z = y$ e pelo que acabamos de provar teríamos $T(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$; o que é absurdo pela escolha de $(x_{n_k})_k$. Portanto $T \in \mathcal{DP}(E, F)$. ■

3. $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F)$.

Seja $T \in \mathcal{W}(E, F)$, demonstraremos que $T \in \mathcal{D}(E, F)$.

Seja $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência fracamente de Cauchy, logo $(x_n)_n \subset E$ é limitado (veja teorema 1.23) e dado que T é fracamente compacto, segue que $(T(x_n))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente em F , isto é, existe $y \in F$ tal que $y^*T(x_{n_k}) \rightarrow y^*y, \forall y^* \in F^*$.

Por outro lado, para cada $y^* \in F^*$ temos que $T^*y^* \in E^*$ e dado que $(x_n)_n \subset E$ é fracamente de Cauchy; temos que $(y^*T(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy e pela parte anterior, existe uma subsequência $(y^*T(x_{n_k}))_k$ convergente para y^*y ; assim $T(x_n) \xrightarrow{F^*}^{top} y$. Por tanto, $T \in \mathcal{D}(E, F)$. ■

4. $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F)$.

Seja $T \in \mathcal{DP}(E, F)$, demonstraremos que $T \in \mathcal{D}(E, F)$.

Seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, sendo T um operador de Dunford-Pettis temos que $(T(x_n))_n \subset F$ é convergente em norma, em particular $(T(x_n))_n$ converge fracamente em F . Assim, $T \in \mathcal{D}(E, F)$. ■

5. $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F)$.

Seja $T \in \mathcal{D}(E, F)$, demonstraremos que $T \in \mathcal{I}(E, F)$.

Seja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série f.i.c. em E , pela definição 1.1 (f) temos que para cada $x^* \in E^*$, $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*x_i| < +\infty$, donde segue que $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)$ é convergente para cada $x^* \in E^*$.

Por outro lado, para cada seqüência crescente $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$, a seqüência $(\sum_{i=1}^n x^*(x_{r_i}))_n$ converge para cada $x^* \in E^*$, logo $(\sum_{i=1}^n x_{r_i})_n \subset E$ é fracamente de Cauchy e dado que T é um operador de Dieudonné, temos que $(\sum_{i=1}^n T(x_{r_i}))_n \subset F$ converge fracamente.

Assim, pela parte anterior e pelo teorema 1.7 segue que $(\sum_{i=1}^n T(x_{r_i}))_n \subset F$ converge em norma para cada seqüência crescente $(r_n)_n \subset \mathbb{N}$; em particular, a seqüência $r_i = i, i \in \mathbb{N}$ é crescente; logo $(\sum_{i=1}^n T(x_{r_i}))_n \subset F$ converge em norma. Portanto, $T \in \mathcal{I}(E, F)$. ■

6. $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

O resultado segue da definição. ■

Todas as inclusões em (*) em geral são estritas, como mostram os seguintes exemplos a seguir:

1. $\mathcal{K}(\ell_2(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N})) \neq \mathcal{W}(\ell_2(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$.

Observamos que $\ell_2(\mathbb{N})$ é um espaço reflexivo, $\ell_2(\mathbb{N})^{**} = \ell_2(\mathbb{N})$, logo, pelo teorema 1.44 temos que $B_{\ell_2(\mathbb{N})} \subset \ell_2(\mathbb{N})$ é compacta na $\ell_2(\mathbb{N})^* - top$.

Seja $id : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ a aplicação identidade, logo $id \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$; observamos que $B_{\ell_2(\mathbb{N})} = id(B_{\ell_2(\mathbb{N})})$ e pela parte anterior $id(B_{\ell_2(\mathbb{N})})$ é fracamente compacto; então, pelo teorema 1.53, $id \in \mathcal{W}(\ell_2(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$; porém $id \notin \mathcal{K}(\ell_2(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$, pois caso contrário, $B_{\ell_2(\mathbb{N})} =$

$id(B_{\ell_2(\mathbb{N})})$ seria relativamente compacto, logo $B_{\ell_2(\mathbb{N})}$ é compacta e pelo teorema 1.4 teríamos que $\dim(\ell_2(\mathbb{N})) < +\infty$, o que é um absurdo. ■

2. $\mathcal{K}(\ell_1(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N})) \neq \mathcal{DP}(\ell_1(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N}))$.

Observamos que, $\ell_1(\mathbb{N})$ é um espaço de Schur (veja teorema 1.14), logo pela definição 1.1 seqüências $(x_n)_n \in \ell_1(\mathbb{N})$ fracamente de Cauchy são de Cauchy, assim $id: \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ é Dunford-Pettis; porém $id \notin \mathcal{K}(\ell_1(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N}))$, caso contrário $B_{\ell_1(\mathbb{N})}$ seria compacta em $\ell_1(\mathbb{N})$ e pelo teorema 1.4 teríamos que $\dim(\ell_1(\mathbb{N})) < +\infty$, o que é absurdo. ■

3. $\mathcal{W}(L_1[0, 1], L_1[0, 1]) \neq \mathcal{D}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$.

Observamos que, $L_1[0, 1]$ é fracamente seqüencialmente completo e não reflexivo (veja teorema 1.31).

Por outro lado, $id \in \mathcal{L}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$ e pela primeira parte $id \in \mathcal{D}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$, porém $id \notin \mathcal{W}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$, pois caso contrário $B_{L_1[0, 1]} \subset L_1[0, 1]$ seria fracamente compacto e pelo teorema 1.44 teríamos que $L_1[0, 1]$ seria reflexivo, o que é absurdo. ■

4. $\mathcal{DP}(L_1[0, 1], L_1[0, 1]) \neq \mathcal{D}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$.

Como observamos acima, $L_1[0, 1]$ é fracamente seqüencialmente completo e não reflexivo onde $L_1^*[0, 1] = L_\infty[0, 1]$.

A $id \in \mathcal{L}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$ e pela última observação $id \in \mathcal{D}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$; contudo $id \notin \mathcal{DP}(L_1[0, 1], L_1[0, 1])$. Basta considerarmos a seqüência $x_n(t) = \sin(2\pi nt)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e os seguintes fatos:

a) $(x_n)_n$ é limitada em $L_1[0, 1]$.

b) $\int_a^b x_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\forall [a, b] \subset [0, 1]$, $[a, b] \in \beta$.

Assim, pelo teorema 1.33 $(x_n)_n \subset L_1[0, 1]$ converge fracamente a zero.

Por outro lado, $\|x_n\| = \int_0^1 |\sin(2n\pi t)| dt = \frac{2}{\pi}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $(x_n)_n$ não converge a zero em norma. ■

5. $\mathcal{I}(c_o(\mathbb{N}), c_o(\mathbb{N})) \neq \mathcal{L}(c_o(\mathbb{N}), c_o(\mathbb{N}))$.

Claramente, $id \in \mathcal{L}(c_o(\mathbb{N}), c_o(\mathbb{N}))$; porém $id \notin \mathcal{I}(c_o(\mathbb{N}), c_o(\mathbb{N}))$; caso contrário a série $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$, onde $(e_n)_n \subset c_o(\mathbb{N})$ é a base canônica, sendo claramente fracamente convergente seria convergente em norma, o que é absurdo. ■

6. $\mathcal{D}(E, F) \neq \mathcal{I}(E, F)$

Para provarmos isto nos serão úteis os seguintes resultados.

Teorema 3.2. *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência básica tal que $\inf_n \|x_n\| > 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é f.i.c., então $(x_n)_n$ é equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$.*

Demonstração. [18]-pg.45

Se $\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i \in c_o(\mathbb{N})$ temos que $(t_i)_i \in c_o(\mathbb{N})$ e dado que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é f.i.c. em E pelo teorema 1.10 temos que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i \in \overline{[x_i : i \in \mathbb{N}]}$ e reciprocamente, se $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i \in \overline{[x_i : i \in \mathbb{N}]}$, então existe $x \in E$ tal que $s_n = \sum_{i=1}^n t_i x_i \rightarrow x$, logo $\|t_n x_n\| = \|s_n - s_{n-1}\|$ e portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \|x_n\| = 0$; porém por hipótese $\inf_n \|x_n\| > 0$, e então forçosamente $\lim_n t_n = 0$. Assim, $(t_n)_n \in c_o(\mathbb{N})$. ■

Teorema 3.3. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é f.i.c. em E e existe $\epsilon > 0$ com $\|x_n\| > \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$; então existe uma subsequência $(y_k)_k$ de $(x_n)_n$ que é equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$.*

Demonstração. Por hipótese $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é f.i.c, logo $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(x_i)| < +\infty$ para cada $x^* \in E^*$ e portanto $x_n \xrightarrow{E^*} 0$; assim $(x_n)_n \subset E$ é limitada.

Observemos que, $(\frac{1}{\|x_n\|})_n$ é limitada por $\frac{1}{\epsilon}$ e que para cada $x^* \in E^*$, $|x^*(\frac{x_n}{\|x_n\|})| \leq \frac{|x^*(x_n)|}{\|x_n\|} \leq \frac{|x^*(x_n)|}{\epsilon}$ e então $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(\frac{x_n}{\|x_n\|})| \leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|}{\epsilon} < +\infty, \forall x^* \in E^*$, de onde obtemos que $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x_n}{\|x_n\|})$ é f.i.c. em E e $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_n$ é fracamente nula e normalizada; pelo teorema 1.9 temos que $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_n$ admite uma subsequência básica $z_n = \frac{x_{l_n}}{\|x_{l_n}\|}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pelo que fizemos anteriormente, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é f.i.c. em E e $\inf_n \|z_n\| = 1$, segue do teorema 3.2 que $(z_n)_n$ é equiivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$. Como $(\|x_n\|)$ e $(\frac{1}{\|x_n\|})$ são limitadas, segue-se que $(x_{l_n})_n$ é equivalente a $(z_n)_n$, o que prova o teorema 3.3. ■

Teorema 3.4. *Se $T \notin \mathcal{I}(E, F)$ então existe um subespaço vetorial $M \subset E$ isomorfo à $c_o(\mathbb{N})$ tal que a restrição $T|_M$ é um isomorfismo sobre a imagem.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se $T \notin \mathcal{I}(E, F)$ então existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ f.i.c. em E tal que $\sum_{i=1}^{\infty} T(z_i)$ não converge em norma, logo $(\sum_{i=1}^n T(z_i))_n$ não é de Cauchy e então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências crescentes $(p_n)_n \subset \mathbb{N}$ e $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$ com $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_n < q_n < \dots$ tal que $\|\sum_{i=p_j}^{q_j} T(z_i)\| \geq \epsilon_0, \forall j \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $x_j = \sum_{i=p_j}^{q_j} z_i$, pela parte anterior, segue que $\|T(x_j)\| \geq \epsilon_0, \forall j \in \mathbb{N}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é f.i.c. em E . Assim, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é f.i.c. em E , com $\inf_n \|x_n\| \geq \frac{\epsilon_0}{\|T\|}$ e pelo teorema 3.3 existe uma subsequência $(w_j)_j$ de $(x_j)_j$ que é equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$ e $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ é f.i.c. em E .

Por outro lado, para cada $y^* \in F^*$ temos $T^*y^* \in E^*$ e pelos fatos anteriores, $\sum_{j=1}^{\infty} T(w_j)$ é f.i.c. em F e $\inf_j \|T(w_j)\| \geq \epsilon_0$; novamente pelo teorema 3.3 existe uma subsequência $(y_j)_j$ de $(w_j)_j$ tal que $(T(y_j))_j$ é equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$. Como $(w_j)_j$ é equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$, segue-se que $(y_j)_j$ é equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$. Por tanto, existe uma sequência $(y_j)_j \subset E$ equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$ tal que $(T(y_j))_j \subset F$ é equivalente a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$.

Seja $M = \overline{[y_j : j \in \mathbb{N}]}$, M é um subespaço fechado de E isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ e $T(M)$ é também isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, desta forma $T|_M : M \rightarrow T(M)$ é um isomorfismo sobre a imagem. ■

Teorema 3.5. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E ou F não contém cópias isomorfas de $c_0(\mathbb{N})$, então $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{I}(E, F)$*

Demonstração. Suponha por absurdo que, $\mathcal{L}(E, F) \not\subset \mathcal{I}(E, F)$; logo existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T \notin \mathcal{I}(E, F)$ e pelo teorema 3.4 temos que, existe um subespaço $M \subset E$ fechado isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ tal que $T|_M : M \rightarrow T(M)$ é um isomorfismo sobre a imagem e claramente E e F contém cópias de $c_0(\mathbb{N})$, o que é absurdo. ■

Teorema 3.6. *Seja E um espaço de Banach, se $T \notin \mathcal{I}(E, c_0(\mathbb{N}))$; então E contém um subespaço complementado que é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.*

Demonstração. Por hipótese $T \notin \mathcal{I}(E, c_0(\mathbb{N}))$ e de acordo com o teorema 3.4 temos que existe um subespaço fechado $M \subset E$ isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ tal que $T|_M : M \rightarrow T(M)$ é um isomorfismo sobre a imagem, isto é $T(M) \subset c_0(\mathbb{N})$ é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ que por sua vez é separável e pelo teorema 1.12 existe uma projeção linear contínua $P : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow T(M)$; claramente $Q = T|_M^{-1} \circ P \circ T : E \rightarrow M$ é uma projeção linear contínua sobre $M \subset E$ que é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$. ■

Teorema 3.7 (Bessaga-Pelczynski). *Seja E um espaço de Banach. E não contém um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ se, e somente se, toda série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ f.i.c. em E é convergente em E .*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Se E não contém cópias de $c_0(\mathbb{N})$, pelo teorema 3.5 $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{I}(E, E)$; assim $id : E \rightarrow E$ é um operador incondicionalmente convergente. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ f.i.c. em E , logo $\sum_{n=1}^{\infty} id(x_n)$ é convergente em norma.

($\Leftarrow$) Suponhamos por absurdo que E contém um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, logo existe $\varphi : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow E$ um isomorfismo sobre a imagem. Consideremos $(e_n)_n \subset c_0(\mathbb{N})$ a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$. Observamos que, para cada $x^* \in c_0^*(\mathbb{N})$, existe $(t_n)_n \in \ell_1(\mathbb{N})$, tal que $x^*(e_n) = t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| < +\infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(e_n)| < +\infty$ para cada $x^* \in c_0^*(\mathbb{N})$; claramente $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ é f.i.c. em $c_0(\mathbb{N})$,

porém não converge em norma. Colocando $x_n = \varphi(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pela parte anterior $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é f.i.c. em E ; porém não converge em norma; absurdo. ■

Agora estamos em condições de provar que: $\mathcal{D}(E, F) \neq \mathcal{I}(E, F)$.

R. James construiu um espaço de Banach separável $\mathcal{J}$ isométrico a $\mathcal{J}^{**}$ mas não é reflexivo (veja [31], ex. I1, d.2), mostraremos que $\mathcal{D}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) \neq \mathcal{I}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$.

Observamos que, $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \mathcal{J}$; caso contrario $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{J}$; logo $\ell_{\infty}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{J}^{**}$ (veja teorema 1.11) o que mostraria que $\mathcal{J}^{**}$ seria não separável, absurdo.

Logo, pelo teorema 3.5 temos que $\mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = \mathcal{I}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$, desta forma $id \in \mathcal{I}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$.

Por outro lado, $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \mathcal{J}$; caso contrário existirá um isomorfismo sobre a imagem $T: \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{J}$, logo $T^*: \mathcal{J}^* \rightarrow \ell_{\infty}(\mathbb{N})$ seria sobrejetor. Como $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ não é separável, segue-se que $\mathcal{J}^*$ não é separável; o que contradiz a hipótese (veja teorema 1.24). Desta forma, $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow \mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ não é reflexivo; então pelo teorema 1.19 segue que $\mathcal{J}$ não é f.s.c. assim, $id \notin \mathcal{D}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$. ■

A seguir estudaremos condições sobre o espaço de Banach E para os quais as inclusões de (*) se tornam igualdades; em alguns casos obteremos teoremas e em outros casos definições, como mostra o quadro abaixo.

Teorema 3.8: $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F \Leftrightarrow \dim(E) < +\infty$.

Teorema 3.9: $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ é reflexivo.

Teorema 3.10: $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ é Schur.

Teorema 3.11: $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ é f.s.c.

Teorema 3.12: $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F), \forall F \Leftrightarrow c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

Definição 3.13: $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade de Dieudonné.

Definição 3.15: $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade V .

Definição 3.18: $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade S_1 .

Definição 3.20: $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade S_2 .

Teorema 3.22: $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E^*$ é Schur.

Definição 3.23: $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade de Dunford-Pettis.

Definição 3.26: $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade recíproca de Dunford-Pettis.

Teorema 3.28: $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F \Leftrightarrow \ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

Definição 3.29: $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade R_1 .

Definição 3.30: $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade R_2 .

Definição 3.32: $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F \Leftrightarrow E$ tem a propriedade R_3 .

Além das propriedades fornecidas pelo esquema (*) da p. 17, também apresentaremos, aqui, a definição abaixo devido a sua importância na teoria dos espaços $C(K)$.

Definição 3.34: $\mathcal{L}(E, c_0(\mathbb{N})) \subset \mathcal{W}(E, c_0(\mathbb{N})) \Leftrightarrow E$ tem a propriedade de Grothendieck.

O que faremos agora é demonstrar cada um desses teoremas e fazermos algumas observações das definições acima. No final de cada uma dessas demonstrações mencionaremos teoremas que serão provados em capítulos posteriores sobre espaços de Banach das funções contínuas definidas num compacto K .

Demonstração do teorema 3.8

($\Rightarrow$) Por hipótese temos que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F$, em particular $\mathcal{L}(E, E) \subset \mathcal{K}(E, E)$. Observemos que $id \in \mathcal{L}(E, E)$, logo $id \in \mathcal{K}(E, E)$; portanto B_E é compacto em E e pelo teorema 1.4 temos $\dim(E) < +\infty$.

($\Leftarrow$) Se $\dim(E) < +\infty$, novamente pelo teorema 1.4 temos que B_E é compacto em E , logo $T(B_E) \subset F$ é compacto para cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e cada espaço de Banach F , portanto, $T \in \mathcal{K}(E, F)$. ■

Observação: $C(K)$ tem dimensão finita se, e somente se, K é finito (veja teorema 5.10).

Demonstração do teorema 3.9

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$; em particular temos que $id \in \mathcal{L}(E, E)$; logo $id \in \mathcal{W}(E, E)$, isto é B_E é fracamente compacto em E e pelo teorema 1.44 segue que E é reflexivo.

($\Leftarrow$) Suponha que E é reflexivo, novamente pelo teorema 1.44 temos que B_E é fracamente compacto em E . Seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então T é contínua nas topologias fracas de E e F respectivamente, portanto $T(B_E) \subset F$ é fracamente compacto, desta forma, $T \in \mathcal{W}(E, F)$. ■

Observação: $C(K)$ é reflexivo se, e somente se, K é finito (veja teorema 5.10).

Demonstração do teorema 3.10

($\Rightarrow$) Por hipótese temos que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$; em particular $id \in \mathcal{DP}(E, E)$ e dado $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência fracamente de Cauchy, segue que $(id(x_n))_n$ é convergente em norma, isto é, $(x_n)_n \subset E$ converge em norma, logo, por definição, E é Schur.

($\Leftarrow$) Suponha que E é Schur. Sejam F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, dado $(x_n)_n \subset E$ uma sequência fracamente de Cauchy, por hipótese $(x_n)_n \subset E$ converge em norma; como T é linear contínuo, temos que $(T(x_n))_n \subset F$ converge em norma, logo $T \in \mathcal{DP}(E, F)$.■

Observação: $C(K)$ é Schur se, e somente se, K é finito (veja teorema 5.10).

Demonstração do teorema 3.11

($\Rightarrow$) Nós temos $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F), \forall F$, em particular $id \in \mathcal{D}(E, E)$, logo dada $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy temos que $(id(x_n))_n \subset E$ é fracamente convergente, assim $(x_n)_n \subset E$ é fracamente convergente.

($\Leftarrow$) Suponha que E é f.s.c. Sejam F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, dada $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, por hipótese temos que $(x_n)_n \subset E$ é fracamente convergente; como T é contínua nas topologias fracas de E e F respectivamente, segue que $(T(x_n))_n \subset F$ é fracamente convergente, logo $T \in \mathcal{D}(E, F)$.■

Observação: $C(K)$ é f.s.c. se, e somente se, K é finito (veja teorema 5.10).

Demonstração do teorema 3.12

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F), \forall F$, em particular $id \in \mathcal{I}(E, E)$, logo, cada série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ f.i.c. em E é convergente em norma e pelo teorema 3.7 segue que $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que, $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, logo pelo teorema 3.5 para cada espaço Banach F temos $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{I}(E, F)$.■

Observação: $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$ se, e somente se, K é finito (veja teorema 5.10).

Sobre a definição 3.13

Grothendieck em [22] começou o estudo dos espaços de Banach E tal que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$ dizendo que tal espaço E tem a propriedade de Dieudonné.

A seguir daremos alguns resultados da propriedade de Dieudonné que nos serão úteis posteriormente.

Proposição 3.14. *Seja E um espaço de Banach.*

(a) *Se $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, então E tem a propriedade de Dieudonné*

(b) *Se E tem a propriedade de Dieudonné e F é fracamente seqüencialmente completo (f.s.c.), então $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F)$.*

Demonstração.

a) Suponhamos que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, demonstraremos que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$.

Seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{D}(E, F)$, dada uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ limitada, pelo teorema 1.19 e pela hipótese existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ fracamente de Cauchy; como $T \in \mathcal{D}(E, F)$, segue que $(T(x_{n_k}))_k \subset F$ é fracamente convergente, logo $T \in \mathcal{W}(E, F)$.

b) Suponhamos que E tem a propriedade de Dieudonné e F fracamente seqüencialmente completo, demonstraremos que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F)$.

Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Observemos que $T \in \mathcal{D}(E, F)$, de fato: seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, como $T \in \mathcal{L}(E, F)$, segue que $(T(x_n))_n \subset F$ é fracamente de Cauchy e por hipótese F é f.s.c., logo $(T(x_n))_n \subset F$ é fracamente convergente, assim $T \in \mathcal{D}(E, F)$ e por hipótese temos $\mathcal{D}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$ e pela última observação, segue que $T \in \mathcal{W}(E, F)$.■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade de Dieudonné para todo compacto K (veja teorema 6.17).

Sobre a definição 3.15

Pelczynski em [34] começou o estudo dos espaços de Banach E tais que $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$ dizendo que tal espaço tem a propriedade V .

No capítulo 8 precisaremos da proposição 3.17 abaixo, antes lembremos a seguinte definição (veja [34]).

Definição 3.16. Seja E um espaço de Banach, E tem a propriedade (u) se, para cada seqüência $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*} 0$.

Proposição 3.17. Se E tem a propriedade de Dieudonné e a propriedade (u) , então E tem a propriedade V .

Demonstração. Por hipótese temos que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$ demonstraremos que $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F), \forall F$.

De fato, seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{I}(E, F)$, dada uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, por hipótese existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*} 0 \in E$ e sendo T contínua, segue que $(T(x_n) - \sum_{i=1}^n T(y_i)) \xrightarrow{F^*} 0$. Além disso, $T \in \mathcal{I}(E, F)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E , logo existe $y \in F$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} T(y_i)$ converge a y . Claramente, $T(x_n) \xrightarrow{F^*} y$, por tanto $T \in \mathcal{D}(E, F)$ e novamente por hipótese $T \in \mathcal{W}(E, F)$.■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade V para todo compacto K (veja teorema 6.17).

Sobre a definição 3.18

Bombal em [7] começou o estudo dos espaços de Banach E tais que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ dizendo que tal espaço E tem a propriedade S_1 .

A proposição seguinte mostra uma propriedade interessante que relaciona, espaço de Schur e espaço com a propriedade S_1 .

Proposição 3.19. *Um espaço de Banach E é Schur se, e somente se, tem a propriedade S_1 e é f.s.c.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que E é Schur, demonstraremos que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ e $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F), \forall F$.

De fato, pela hipótese e pelo teorema 3.10, $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$.

Por outro lado, no quadro geral (*) $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$, então $\mathcal{DP}(E, F) = \mathcal{D}(E, F) = \mathcal{I}(E, F) = \mathcal{L}(E, F), \forall F$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ e $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F), \forall F$, demonstraremos que E é Schur.

De fato, por hipótese $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ e pelo teorema 3.10 E é Schur. ■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade S_1 para todo compacto K (veja teorema 6.24).

Sobre a definição 3.20

Em [7] é estudada pela primeira vez os espaços de Banach E tais que $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ e diz-se que E tem a propriedade S_2 .

A seguir provaremos um resultado desse artigo.

Proposição 3.21 (Bombal). *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E é Schur.

(b) E tem a propriedade S_2 e $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

Demonstração.

a) $\Rightarrow$ b) Suponha que E é Schur, logo pelo teorema 3.10 segue que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$ e usando o quadro geral (*) temos que $\mathcal{DP}(E, F) = \mathcal{D}(E, F) = \mathcal{I}(E, F) = \mathcal{L}(E, F), \forall F$, desta forma, pelo teorema 3.12 $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$ e E tem a propriedade S_2 .

b) $\Leftarrow$ a) Suponhamos que E tem a propriedade S_2 e $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, logo pelo teorema 3.12 temos que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F), \forall F$ e $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$; portanto $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F), \forall F$, pelo teorema 3.10 segue-se que E é Schur. ■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade S_2 para todo compacto K (veja teorema 6.24).

Demonstração do teorema 3.22

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F$, demonstraremos que E^* é Schur.

Seja $(x_n^*)_n \subset E^*$ uma seqüência fracamente nula, logo para cada $x \in E$ temos que $\hat{x} \in E^{**}$, então $\hat{x}(x_n^*) \rightarrow 0$, para cada $x \in E$. Pelo teorema 1.23 existe $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definamos o operador linear contínuo $T: E \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, pondo $x \mapsto (x_n^*(x))_n$, pois

$\|T(x)\| = \sup_n |x_n^*(x)| \leq M\|x\|, \forall x \in E$, desta forma $T^*: c_o^*(\mathbb{N}) \rightarrow E^*$ é linear contínuo e $T^*(e_n) = x_n^*, \forall n \in \mathbb{N}$, onde $(e_n)_n \subset \ell_1(\mathbb{N})$ é a base canônica.

Consideremos $R = \{x_n^*\} \cup \{0\}$, R é fracamente compacto, pois (x_n^*) é fracamente nula em E^* . Seja $\text{coe}(R) = \text{co}(R \cup -R)$ o envolvente absolutamente convexa de R , claramente $R \cup -R$ é fracamente compacto em E^* . Pelo teorema 1.50, segue que $\overline{\text{coe}}(R) = \overline{\text{co}}(R \cup -R)$ é fracamente compacto.

Por outro lado, para cada $y^* \in B_{c_o^*(\mathbb{N})}$ existe $(t_n)_n \subset \ell_1(\mathbb{N})$, tal que $\|y^*\| = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq 1$ e $y^*T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)t_n, \forall x \in E$; então $T^*(y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*$, para cada $y^* \in B_{c_o^*(\mathbb{N})}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq 1$. Assim, $T^*(y^*) \in \overline{\text{coe}}(R)$ para cada $y^* \in B_{c_o^*(\mathbb{N})}$, logo $T^*(B_{c_o^*(\mathbb{N})}) \subset \overline{\text{coe}}(R)$ e como $\overline{\text{coe}}(R)$ é fracamente compacto segue que $T^*(B_{c_o^*(\mathbb{N})})$ é relativamente fracamente compacto em E^* .

Pela parte anterior e pelo teorema 1.53 $T \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$, logo por hipótese $T \in \mathcal{K}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e novamente pelo teorema 1.53 $T^* \in \mathcal{K}(c_o^*(\mathbb{N}), E^*)$, claramente $\{T^*(e_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset E^*$ é relativamente compacto, porém $x_n^* = T^*(e_n), \forall n \in \mathbb{N}$ e desta forma $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset E^*$ é relativamente compacto e dado que $(x_n^*) \subset E^*$ é fracamente nula, segue que $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que E^* é Schur, demonstraremos que $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F), \forall F$.

Sejam F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{W}(E, F)$, pelo teorema 1.53 temos que $T^* \in \mathcal{W}(F^*, E^*)$, logo $T^*(B_{F^*}) \subset E^*$ é relativamente fracamente compacto.

Afirmamos que, $T^*(B_{F^*}) \subset E^*$ é relativamente compacto. De fato, seja $(T^*(y_{n_k}^*))_n \subset T^*(B_{F^*})$ uma seqüência, pela primeira parte $T^*(B_{F^*})$ é relativamente fracamente compacto, logo existe $x^* \in E^*$ tal que $T^*(y_{n_k}^*) \xrightarrow{E^{**}}^{top} x^*$, como E^* é Schur, segue que $T^*(y_{n_k}^*) \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$, logo $T^*(B_{F^*}) \subset E^*$ é relativamente compacto.

Da última afirmação e pelo teorema 1.53 segue que $T \in \mathcal{K}(E, F)$. ■

Observação: $C^*(K)$ é Schur se, e somente se, K é disperso (veja corolário 7.2).

Sobre a definição 3.23

Esta definição foi estudada pela primeira vez por Grothendieck em [22].

A seguinte proposição fornece uma condição necessária e suficiente para que um espaço de Banach E tenha a propriedade de Dunford-Pettis.

Proposição 3.24. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

- (a) *E tem a propriedade de Dunford-Pettis.*
- (b) *Todo operador fracamente compacto sobre E transforma conjuntos fracamente compactos em conjuntos compactos em norma.*
- (c) $\mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$.
- (d) *Se $x_n \xrightarrow{E^*}^{top.} 0$ e $x_n^* \xrightarrow{E^{**}}^{top.} 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.*
- (e) *Toda seqüência fracamente convergente em E converge uniformemente sobre todo conjunto relativamente fracamente compacto de E^* .*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b) Demonstraremos que para cada espaço de Banach F e $T \in \mathcal{W}(E, F)$, dado $A \subset E$ fracamente compacto, temos $T(A)$ é compacto em F .

De fato, seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{W}(E, F)$, dado $A \subset E$ fracamente compacto, seja $(T(x_n))_n \subset T(A)$ uma seqüência arbitrária, logo $(x_n) \subset A$ é uma seqüência em E , porém A é fracamente compacto e pelo teorema 1.48, A é fracamente seqüencialmente compacto, então existe $x \in A$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{E^*}^{top.} x$ para alguma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$, por hipótese $T \in \mathcal{DP}(E, F)$, logo $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x) \in T(A)$. Assim, $T(A) \subset F$ é compacto na norma.

b) $\Rightarrow$ c) Suponha que cada operador fracamente compacto sobre E transforma conjuntos fracamente compactos de E em conjuntos compactos em F , demonstraremos que $\mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$.

Sejam $T \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e $(x_n) \subset E$ fracamente nula, logo $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é fracamente compacto, então da hipótese segue que $T(A) = \{T(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é compacto em $c_o(\mathbb{N})$, e zero é o único ponto de acumulação, assim $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$; portanto $T \in \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$.

c) $\Rightarrow$ d) Suponhamos que, $\mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$, demonstraremos que para cada $(x_n) \subset E$ com $x_n \xrightarrow{E^*}^{top.} 0$ e cada $(x_n^*) \subset E^*$ com $x_n^* \xrightarrow{E^{**}}^{top.} 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.

De fato, sejam $(x_n) \subset E$ e $(x_n^*) \subset E^*$ tais que $x_n \xrightarrow{E^*}^{top.} 0$ e $x_n^* \xrightarrow{E^{**}}^{top.} 0$, logo ambas seqüências são limitadas, assim existe $M > 0$ tal que: $|x_n^*(x_n)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$; por outro lado, para cada $x \in E$ temos $x_n^*(x) \rightarrow 0$, pois $(x_n^*) \subset E^*$ é fracamente nula em E^* .

Definamos o operador linear contínuo $T: E \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, pondo $x \mapsto (x_n^*(x))_n$ (isto, sai do fato $(x_n^*) \subset E^*$ limitado). Por tanto segue que $T^*: c_o^*(\mathbb{N}) \rightarrow E^*$ é linear contínuo e $T^*(e_n) = x_n^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$

onde $(e_n)_n \subset \ell_1(\mathbb{N})$ é a base canônica; dado que $(x_n^*) \subset E^*$ é fracamente nula, temos que $A = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é fracamente compacto em E^* ; seja $\text{coe}(A) = \text{co}(A \cup -A)$ a envoltória absolutamente convexa de A , claramente $A \cup -A$ é fracamente compacto e pelo teorema 1.50 segue que $\overline{\text{coe}}(A) = \overline{\text{co}}(A \cup -A)$ é fracamente compacto em E^* ; seja $y^* \in B_{c_o^*}(\mathbb{N})$, logo existe $(t_n)_n \in \ell_1(\mathbb{N})$, tal que $\|y^*\| = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq 1$ e $T^*(y^*)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*(x) \forall x \in E$, assim $T^*(y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*$ onde $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq 1, \forall y^* \in B_{c_o^*}(\mathbb{N})$ logo, $T^*(B_{c_o^*}(\mathbb{N})) \subset \overline{\text{coe}}(A)$, porém $\overline{\text{coe}}(A)$ é fracamente compacto e portanto $T^*(B_{c_o^*}(\mathbb{N})) \subset E^*$ é relativamente fracamente compacto e pelo teorema 1.53 temos que $T \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$.

Pela parte anterior e por hipótese temos que $T \in \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$. Como $x_n \xrightarrow{E^* \text{-top.}} 0 \in E$, segue que $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Observemos que, $|x_n^*(x_n)| \leq \|T(x_n)\|, \forall n \in \mathbb{N}$; desta forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.

d) $\Rightarrow$ e) Suponhamos que, para cada $(x_n)_n \subset E$ fracamente nula e para cada $(x_n^*)_n \subset E^*$ fracamente nula temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$, demonstraremos que para cada $(x_n)_n \subset E$ fracamente nula e para cada $B \subset E^*$ relativamente fracamente compacto temos, $x_n \rightarrow 0$ uniformemente sobre B .

De fato, seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente nula em E e $B \subset E^*$ um conjunto relativamente fracamente compacto. Suponha por absurdo que, $x_n \not\rightarrow 0$ uniformemente sobre B ; logo existe $\epsilon_0 > 0$ e $(y_n^*) \subset B$ tal que $|y_n^*(x_n)| \geq \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Como B é relativamente fracamente compacto, existe $x^* \in E^*$ e uma subsequência $(x_n^*)_n$ de $(y_n^*)_n$ tal que $(x_n^* - x^*)_n \subset E^*$ é fracamente nula e $|x_n^*(x_n)| \geq \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$; em particular $x^*(x_n) \rightarrow 0$ e $|(x_n^* - x^*)(x_n)| \geq \epsilon_0 - |x^*(x_n)|, \forall n \in \mathbb{N}$, assim $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^* - x^*)(x_n) \geq \epsilon_0$, o que é absurdo.

e) $\Rightarrow$ a) Suponha que, para cada $(x_n)_n \subset E$, fracamente nula e para cada $B \subset E^*$ relativamente fracamente compacto temos $x_n \rightarrow 0$ uniformemente sobre B , demonstraremos que para cada espaço de Banach F $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F)$.

De fato, seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{W}(E, F)$, pelo teorema 1.53 temos que $T^*(B_{F^*}) \subset E^*$ é relativamente fracamente compacto. Seja $(x_n)_n \subset E$ uma sequência fracamente nula, pela parte anterior e por hipótese, $x_n \rightarrow 0$ uniformemente sobre $T^*(B_{F^*}) \subset E^*$, isto é: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, implica $|T^*(y^*)(x_n)| < \epsilon$ para cada $y^* \in B_{F^*}$, logo $|y^*(T(x_n))| < \epsilon, \forall y^* \in B_{F^*}$, assim $\|T(x_n)\| < \epsilon$ e portanto, $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$; segue-se então que $T \in \mathcal{DP}(E, F)$. ■

A proposição seguinte mostra uma relação interessante da propriedade de Dunford-Pettis com outras propriedades de espaços de Banach.

Proposição 3.25. *Seja E um espaço de Banach. Então:*

(a) Se E é reflexivo e tem a propriedade de Dunford-Pettis, então $\dim(E) < \infty$.

(b) Se E^* tem a propriedade de Dunford-Pettis, então E tem a propriedade de Dunford-Pettis.

Demonstração.

a) Suponhamos que E é reflexivo e tem a propriedade de Dunford-Pettis, pelo teorema 3.9 e pela definição temos que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F)$, $\forall F$ e $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F)$, $\forall F$, logo $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F)$, $\forall F$ e em particular $id: E \rightarrow E$ é de Dunford-Pettis.

Por outro lado, pelo teorema 1.44 B_E é fracamente compacto e pela parte anterior $B_E = id(B_E)$ é compacto em E ; assim, pelo teorema 1.4 concluímos que $\dim(E) < +\infty$.

b) Suponha que E^* tem a propriedade de Dunford-Pettis, demonstraremos que E tem a propriedade de Dunford-Pettis.

De fato, seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente nula e $(x_n^*)_n \subset E^*$ fracamente nula e definamos

$T: E \rightarrow E^{**}$, pondo $x \mapsto \hat{x}$ a aplicação canônica, T é contínua com as topologias fracas de E e E^{**} respectivamente; $(T(x_n))_n \subset E^{**}$ é fracamente nula e $(x_n^*)_n \subset E^*$ é fracamente nula. Como E^* tem a propriedade de Dunford-Pettis, pela proposição 3.24, segue que $T(x_n)(x_n^*) \rightarrow 0$; porém $T(x_n)(x_n^*) = \hat{x}_n(x_n^*) = x_n^*(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $x_n^*(x_n) \rightarrow 0$ e novamente pela proposição 3.24 segue o resultado. ■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis para todo compacto K (veja teorema 6.23).

Sobre a definição 3.26

A definição da propriedade recíproca de Dunford-Pettis foi dada em [22], a proposição abaixo relaciona essa propriedade com a propriedade de não conter cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Proposição 3.27. *Seja E um espaço de Banach. Se $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, então E tem a propriedade recíproca de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Sejam F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{DP}(E, F)$, dada uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ limitada, pelo teorema 1.19 e pela hipótese, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy; como $T \in \mathcal{DP}(E, F)$, segue que $(T(x_{n_k}))_k \subset F$ converge em norma. Logo $T \in \mathcal{W}(E, F)$. ■

Observação: $C(K)$ tem a propriedade recíproca de Dunford-Pettis (veja teorema 6.24).

Demonstração do teorema 3.28

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$, demonstraremos que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

Suponha por absurdo que $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$, ou seja, existe uma seqüência $(u_n)_n \subset E$ equivalente a

base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Segue do teorema 1.17 as funções de Rademacher $r_n(t) = \text{sg}(\sin(2^{n-1}\pi t))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$ em $L_\infty[0, 1]$ são equivalentes a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, então $(u_n)_n \subset E$ e

$(r_n)_n \subset L_\infty[0, 1]$ são equivalentes, o que nos permite definir um isomorfismo topológico $S_1: M = \overline{[u_n : n \in \mathbb{N}]} \rightarrow L_\infty[0, 1]$, pondo $\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n r_n$ e pelo teorema 1.13, segue que existe uma extensão linear contínua $S: E \rightarrow L_\infty[0, 1]$, onde $S(u_n) = r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, as funções de Rademacher $(r_n)_n \subset L_2[0, 1]$ formam um sistema ortogonal, logo são fracamente nula em $L_1[0, 1]$ (veja [27]-p.318), assim para cada $f \in L_\infty[0, 1]$ temos que $\int_0^1 f(t)r_n(t) \rightarrow 0$ (veja teorema 1.30).

Logo podemos definir uma aplicação $R: L_\infty[0, 1] \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, pondo $f \mapsto (\int_0^1 f r_n)_n \in \mathbb{N}$. Claramente, R é linear contínua, onde $R(r_n) = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pelo teorema 1.68 $L_\infty[0, 1] \sim \ell_\infty(\mathbb{N})$ e como esse espaço têm as propriedades de Dunford-Pettis e de Grothendieck (veja observação sobre a definição 3.23 e o teorema 3.36), segue que $R \in \mathcal{DP}(L_\infty[0, 1], c_o(\mathbb{N}))$, onde $R(r_n) = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $S \in \mathcal{L}(E, L_\infty[0, 1])$, temos que $T = R \circ S \in \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N}))$ onde $T(u_n) = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; mas $(T(u_n))_n \subset c_o(\mathbb{N})$ não converge em norma logo, $T \notin K(E, c_o(\mathbb{N}))$.

Desta forma, existe $T \in \mathcal{DP}(E, c_o(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{K}(E, c_o(\mathbb{N}))$ o que contradiz a hipótese.

($\Leftarrow$) Suponha que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, demonstraremos que $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$.

Seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{DP}(E, F)$, seja $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência limitada, pelo teorema 1.19 e dado que E não contém cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ fracamente de Cauchy, porém T é de Dunford-Pettis, logo $(T(x_{n_k}))_k \subset F$ converge em norma. Assim, $T \in \mathcal{K}(E, F)$. ■

Sobre a definição 3.29

A propriedade $\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{D}(E, F)$, $\forall F$ não tem sido estudada sistematicamente na literatura; porém, por exemplo, a propriedade (u) de Pelczynski (veja [31], II.1.c.1) implica esta propriedade.

Observação: $C(K)$ tem a propriedade R_1 para todo compacto K (veja teorema 6.24).

Sobre a definição 3.30

Observemos por (*) que E tem a propriedade R_2 se, e somente se, $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$ e $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{W}(E, F)$, $\forall F$ ou equivalentemente pelos teoremas 3.22 e a definição 3.13, E^* é Schur e E tem a propriedade de Dieudonné; ou ainda E tem a propriedade R_2 se, e somente se, $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$ e $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F)$, $\forall F$, ou equivalentemente pelos teoremas 3.28 e pela

definição 3.18 $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$ e E tem a propriedade S_1 .

Dessa observação e do teorema 1.63 segue imediatamente.

Teorema 3.31. *Seja K um compacto. $C(K)$ tem a propriedade R_2 se, e somente se, K é disperso.*

Sobre a definição 3.32.

Analisando (*) temos: E tem a propriedade R_3 se, e somente se, tem a propriedade R_1 e R_2 .

Logo do teorema 3.31, temos:

Teorema 3.33. *Seja K um compacto. $C(K)$ tem a propriedade R_3 se, e somente se, K é disperso.*

Sobre a definição 3.34.

A seguinte proposição fornece uma condição necessária e suficiente para que um espaço de Banach E tenha a propriedade de Grothendieck.

Proposição 3.35. *Seja E um espaço de Banach.*

(a) *são equivalentes:*

(a.1) *E tem a propriedade de Grothendieck.*

(a.2) *Em E^* coincidem seqüências convergentes na E -top. de E^* com as seqüências convergentes na E^{**} -top. de E^* .*

(a.3) *Para cada espaço de Banach separável F , tem-se $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$.*

(b) *Seja E um espaço de Banach com a propriedade V . E tem a propriedade de Grothendieck se, e somente se, $c_o(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.*

Demonstração.

a) ($a.1 \Rightarrow a.2$) Suponhamos que, $\mathcal{L}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$, demonstraremos que para cada $(x_n^*)_n \subset E^*$ com $x_n^* \xrightarrow{E-top.} 0$, temos $x_n^* \xrightarrow{E^{**}-top.} 0$.

De fato, seja $(x_n^*)_n \subset E^*$ com $x_n^* \xrightarrow{E-top.} 0$, logo para cada $x \in E$ temos $x_n^*(x) \rightarrow 0$ e pelo teorema 1.23 existe $M > 0$ com $\|x_n^*\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$; definamos o operador linear contínuo $T: E \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, pondo $x \mapsto (x_n^*(x))_n$, pois $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$.

Por hipótese temos que $T \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e pelo teorema 1.53, segue que $T^* \in \mathcal{W}(\ell_1(\mathbb{N}), E^*)$ e $T^*(e_n) = x_n^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $(e_n)_n \subset \ell_1(\mathbb{N})$ é a base canônica.

Observemos que, $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset E^*$ é relativamente fracamente compacto. Claramente, $x_n^* \xrightarrow{E^{**}-top.} 0 \in E^*$, caso contrário, existem $\epsilon_0 > 0$, $x^{**} \in E^{**}$ e uma subsequência $(x_{n_k}^*)_k$ de $(x_n^*)_n$ satisfazendo $|x^{**}(x_{n_k}^*)| \geq \epsilon_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$; pela observação anterior existirá uma subsequência

de $(x_{n_k}^*)_k$, que ainda denotaremos por $(x_{n_k}^*)_k$, fracamente convergente. Como $x_n^* \xrightarrow{E-top.} 0$, segue que $x_{n_k}^* \xrightarrow{E^{**}-top.} 0$, o que contradiz $|x^{**}(x_{n_k}^*)| \geq \epsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}$ e para algum $x^{**} \in E^{**}$.

(a.2 $\Rightarrow$ a.3) Suponhamos que em E^* coincidem as seqüências convergentes na $E-top.$ de E^* com, as seqüências convergentes na $E^{**}-top.$ de E^* .

Demonstraremos que para cada espaço de Banach F separável, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$.

De fato, sejam F um espaço de Banach separável e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, logo $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$; claramente T^* é contínua da $F-top.$ de F^* na $E-top.$ de E^* .

Por outro lado, pelo teorema 1.6 $B_{F^*} \subset F^*$ é compacto na $F-top.$ de F^* e sendo F separável pelo teorema 1.45 temos que $B_{F^*} \subset F^*$ é metrizável na $F-top.$ de F^* , assim $B_{F^*} \subset F^*$ é seqüencialmente compacto na $F-top.$ de F^* . Seja $(y_n^*)_n \subset B_{F^*}$ uma seqüência, pela parte anterior existe uma subseqüência $(y_{n_k}^*)_k$ de $(y_n^*)_n$ e $y^* \in F^*$ tal que $y_{n_k}^* \xrightarrow{F-top.} y^*$. Assim $T^*(y_{n_k}^*) \xrightarrow{E-top.} T^*(y^*) \in E^*$, mais por hipótese, segue que $T^*(y_{n_k}^*) \xrightarrow{E^{**}-top.} T^*(y^*) \in E^*$ e claramente, $T^* \in \mathcal{W}(F^*, E^*)$ e ainda pelo teorema 1.53, segue que $T \in \mathcal{W}(E, F)$.

(a.3 $\Rightarrow$ a.1) Suponha que para cada F separável $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$, demonstraremos que $\mathcal{L}(E, c_o(\mathbb{N})) = \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$. Basta pegarmos, $F = c_o(\mathbb{N})$.

b) Temos como hipótese que E tem a propriedade V .

($\Rightarrow$) Suponha que E tem a propriedade de Grothendieck, demonstraremos que $c_o(\mathbb{N}) \not\xrightarrow{f} E$.

De fato, pois do contrário, $c_o(\mathbb{N}) \xrightarrow{f} E$, logo existirão um subespaço $M \subset E$ e

$\varphi: M \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ isomorfismo sobrejetor e uma projeção linear contínua $P: E \rightarrow M$. Consideremos $B_M \subset M$ a bola fechada e unitária de M , onde $P(B_M) = B_M$ e $\varphi(B_M) = B_{c_o(\mathbb{N})}$.

Observemos que $Q = \varphi \circ P: E \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ é linear contínuo onde $Q(B_M) = B_{c_o(\mathbb{N})} \subset c_o(\mathbb{N})$ e $Q(B_M)$ não é fracamente compacto, caso contrário $c_o(\mathbb{N})$ seria reflexivo, o que é absurdo. Assim, $Q \notin \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$, portanto, existe $Q \in \mathcal{L}(E, c_o(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$; o que é absurdo.

($\Leftarrow$) Suponha que $c_o(\mathbb{N}) \not\xrightarrow{f} E$, demonstraremos que $\mathcal{L}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$.

Suponha por absurdo que existe $T \in \mathcal{L}(E, c_o(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$, como E tem a propriedade V , temos $\mathcal{I}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e desta forma, $T \notin \mathcal{I}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e usando o teorema 3.6, segue que existe um subespaço $M \subset E$ isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ e complementado em E , o que é absurdo. ■

Finalmente demonstraremos o seguinte resultado.

Teorema 3.36 (Grothendieck). $\ell_\infty(\mathbb{N})$ tem a propriedade de Grothendieck.

Demonstração. Sendo $\ell_\infty(\mathbb{N})$ isomorfo a um $C(K)$, ele tem a propriedade V e usando a proposição 3.35 b) e o teorema 1.13 temos que $c_o(\mathbb{N}) \not\xrightarrow{f} \ell_\infty(\mathbb{N})$. ■

Observação: não se conhece uma caracterização dos compactos K tais que $C(K)$ tem a propriedade de Grothendieck.

No próximo capítulo, sendo K um compacto e E e F espaços de Banach, estudaremos operadores lineares contínuos definidos em $C(K, E)$ a valores em F , tendo como objetivo principal o teorema de Singer-Dinculeanu. Esse teorema de representação nos permitirá estudarmos a K cancelabilidade e K estabilidade das propriedades de espaços de Banach que acabamos de definir neste capítulo.

Capítulo 4

Teoremas de representações de operadores em $C(K, E)$

O estudo das propriedades apresentadas na p. 22 do capítulo anterior para os espaços $C(K, E)$ está intimamente relacionado com o estudo de operadores lineares contínuos definidos neste espaço, por esse motivo, desenvolveremos agora teoremas de representação que serão utilizados nos próximos capítulos.

Lembrando algumas definições sobre medidas vetoriais e as definições de integrais de Gowurin e de Bartle e admitindo o teorema de representação de Riesz (veja teorema 1.29), demonstraremos o teorema de Singer, o teorema de Dunford-Schwartz e o teorema de Singer-Dinculeanu.

4.1 Medidas vetoriais e o teorema de Riesz

Neste seção recordaremos algumas definições e propriedades das medidas vetoriais de variação limitada, de semi-variação limitada e de semi-variação escalar limitada, bem como enunciaremos o teorema de representação de Riesz para o dual de um $C(K)$, onde K é compacto.

Definição 4.1.1. Sejam S um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de S e E espaço de Banach; uma função $m: \Sigma \rightarrow E$ é chamado medida vetorial finitamente aditiva (ou simplesmente medida vetorial), se para cada par $A_1, A_2 \in \Sigma$ disjuntos temos $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

Se além disso, para cada seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ dois a dois disjuntas tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, vale $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$ na topologia da norma de E , então m é dita medida vetorial enumeravelmente aditiva (ou σ -aditiva).

Definição 4.1.2. Sejam Σ uma álgebra de subconjuntos de S , E um espaço de Banach e $m: \Sigma \rightarrow E$

uma medida vetorial. A variação de m , denotada por $|m|$, é uma função $|m| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $|m|(A) = \sup_{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i = A} \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\|$ ($|m|(A)$ é o supremo sobre todas as partições finitas de conjuntos disjuntos dois a dois de A em Σ). Se $|m|(S) < +\infty$, então diz-se que m é de variação limitada.

Definição 4.1.3. Sejam Σ uma álgebra de subconjuntos de S , E espaço de Banach e $m: \Sigma \rightarrow E$ uma medida vetorial. A semi-variação de m , denotada por $\widetilde{m}$, é uma função $\widetilde{m} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\widetilde{m}(A) = \sup_{\substack{x^* \in E^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^* \circ m|(A)$, onde $|x^* \circ m|$ é a variação da medida de valores reais $x^* \circ m : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $x^* \circ m(A) = x^*(m(A))$, $\forall A \in \Sigma$. Se $\widetilde{m}(S) < +\infty$, então diz-se que m é de semi-variação limitada.

Observação. $\widetilde{m}(A) \leq |m|(A)$, $\forall A \in \Sigma$, isto segue imediatamente das definições anteriores.

Estamos interessados no estudo de medidas vetoriais da forma $m: \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, onde E e F são espaços de Banach, para este fim lembraremos a seguinte definição, que estende a anterior.

Definição 4.1.4. Sejam S um conjunto, Σ uma álgebra de subconjunto de S , E e F espaço de Banach e $m: \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uma medida vetorial. A semi-variação de m , que também denotaremos por $\widetilde{m}$, é uma função $\widetilde{m}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \right\| : x_i \in E, \|x_i\| \leq 1, A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i, A_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Se $\widetilde{m}(S) < +\infty$, diz-se que m é de semi-variação limitada.

Observação. A definição 4.1.4 coincide com a definição 4.1.3 se $E = \mathbb{R}$.

A seguinte proposição relaciona as definições 4.1.2 e 4.1.4.

Proposição 4.1.5. Sejam S um conjunto, Σ uma álgebra de subconjunto de S , E e F espaço de Banach e $m: \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ uma medida vetorial. Então $\widetilde{m}(A) = \sup \{ |m_{y^*}|(A) : y^* \in F^*, \|y^*\| \leq 1 \}$, onde $m_{y^*} : \Sigma \rightarrow E^*$ é tal que $m_{y^*}(A)x = (m(A)x)(y^*)$ para cada $A \in \Sigma, x \in E$ e $y^* \in F^*$.

Demonstração. [4]-p.66.

- i) Seja $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ uma partição de A e $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tais que $\|x_i\| \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Como $\left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \right\| = \sup_{\substack{y^* \in F^* \\ \|y^*\| \leq 1}} |\sum_{i=1}^n (m(A_i)x_i)y^*|$ e $m_{y^*}(A_i)x_i = (m(A_i)x_i)y^*$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, temos
- $$\left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \right\| = \sup_{\substack{y^* \in F^* \\ \|y^*\| \leq 1}} \left| \sum_{i=1}^n m_{y^*}(A_i)x_i \right| \leq \sup_{\substack{y^* \in F^* \\ \|y^*\| \leq 1}} \sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\| \|x_i\|,$$

logo $\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \| \leq \sup_{\substack{y^* \in F^* \\ \|y^*\| \leq 1}} \sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\|$, portanto

$$\sup\{\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \| : \|x_i\| \leq 1, A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i\} \leq \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sup_{A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i} \sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\| ,$$

conseqüentemente $\widetilde{m}(A) \leq \sup\{|m_{y^*}|(A_i) : y^* \in F^*, \|y^*\| \leq 1\}$.

ii) Seja $y^* \in F^*$ com $\|y^*\| \leq 1$ e $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, como

$$\|m_{y^*}(A_i)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |m_{y^*}(A_i)(x)|, \text{ fixados } i \text{ e } \epsilon > 0, \text{ existe } \|x_i\| \leq 1, \text{ tal que}$$

$$\|m_{y^*}(A_i)\| - \frac{\epsilon}{n} < |m_{y^*}(A_i)(x_i)|, \text{ logo } \sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\| < \sum_{i=1}^n |m_{y^*}(A_i)(x_i)| + \epsilon.$$

Seja $\sigma_i = sg(m_{y^*}(A_i)(x_i))$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, então

$$\sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\| < \sum_{i=1}^n \sigma_i m_{y^*}(A_i)(x_i) + \epsilon = \sum_{i=1}^n m(A_i)(\sigma_i x_i) y^* + \epsilon$$

onde, $\|\sigma_i x_i\| \leq 1$, $\|y^*\| \leq 1$; portanto

$$\sup\{\sum_{i=1}^n \|m_{y^*}(A_i)\| : \|y^*\| \leq 1, A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i\} \leq \sup_{\substack{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i = A \\ \|x_i\| \leq 1}} \| \sum_{i=1}^n m(A_i)(x_i) \| .$$

Assim, $\sup\{|m_{y^*}|(A) : \|y^*\| \leq 1, y^* \in F^*\} \leq \widetilde{m}(A)$. De i) e ii) segue o resultado. ■

Agora lembraremos as definições de medida vetorial de semi-variação escalar e de medida regular que serão úteis nos capítulos seguintes.

Definição 4.1.6. Sejam S um conjunto, Σ uma álgebra sobre S , E um espaço de Banach e $m: \Sigma \rightarrow E$ uma medida vetorial.

- i) A semi-variação escalar de m , denotada por $\|m\|$, é uma função $\|m\|: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|m\|(A) = \sup\{\| \sum_{i=1}^n m(A_i)\alpha_i \| : \alpha_i \in \mathbb{R}, |\alpha_i| \leq 1, A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i, A_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n\}$, $A \in \Sigma$. Se $\|m\|(S) < +\infty$, diz-se que m é de semi-variação escalar limitada.
- ii) m é regular, se para cada $A \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$ existem um compacto F , com $\overline{F} \subset A$ e um aberto G , com $G \supset A$ tais que $\|m\|(G \setminus F) < \epsilon$.

Seja E um espaço de Banach. Indicaremos por $rca(S, E)$ o conjunto das medidas regulares enumeravelmente aditivas, definidas sobre a σ -álgebra de Borel de S em E e por $rcabv(S, E)$ o conjunto das medidas regulares enumeravelmente aditivas de variação limitada, definidas sobre a σ -álgebra de Borel de S em E , que são espaços de Banach com a norma da variação (veja [19]-p.163).

Observação: seja $m: \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uma medida vetorial de semi-variação limitada, como

$$\| \sum_{i=1}^n m(A_i)\alpha_i \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| \sum_{i=1}^n m(A_i)(\alpha_i x) \| \leq \widetilde{m}(A), \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, |\alpha_i| \leq 1, \text{ segue que } \|m\|(A) \leq \widetilde{m}(A),$$

para cada $A \in \Sigma$. ■

Lema 4.1.7. *Sejam K um compacto e E um espaço de Banach, então*

$D = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot) x_i : \alpha_i \in C(K) \text{ e } x_i \in E \right\}$ é denso em $C(K, E)$.

Demonstração. [39] p. 373-375.

Sejam $\epsilon > 0$ e $f \in C(K, E)$, para cada $t \in K$, existe uma vizinhança aberta V_t tal que para cada $t', t'' \in V_t$, temos $\|f(t') - f(t'')\| < \epsilon$. Como K é compacto, sejam $t_1, t_2, \dots, t_n \in K$ tal que $K = V_{t_1} \cup V_{t_2} \cup \dots \cup V_{t_n}$ pelo teorema 1.65 existe uma partição subordinada a K . Seja $0 \leq \varphi_i \leq 1$ tal partição. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sejam $x_i = f(t_i)$, logo $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot) x_i \in C(K, E)$.

Dado $t \in K$; se $t \in V_{t_j}$, pela escolha de V_{t_j} , $\|f(t) - f(t_j)\| < \epsilon$; se $t \notin V_{t_j}$ então $\varphi_j(t) = 0$. Portanto,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) x_i - f(t) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) (f(t_i) - f(t)) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \|f(t_i) - f(t)\| < \epsilon \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) < \epsilon, \forall t \in K.$$

Assim, $\|\varphi - f\| < \epsilon$, conseqüentemente, D é denso em $C(K, E)$. ■

No próximo teorema usaremos algumas das propriedades da integral de Bochner, Gowurin e de Bartle (veja [19] capítulo IV 10.7 p. 323 e definições 4.2.11 e 4.4.16).

Teorema 4.1.8. *Sejam K um compacto, E e F espaços de Banach e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uma medida tal que para cada $x \in E$ e cada $y^* \in B_{F^*}$ a medida real $m_{x,y^*}: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $m_{x,y^*}(A) = y^*(m(A)x)$ é uma medida regular e m_x é de semi-variação limitada para cada $x \in E$, então*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left\{ \left\| \int_A f dm \right\| : \|f\|_A \leq 1, f \in C(K, E) \right\} \text{ para cada } A \in \beta \text{ onde } \|f\|_A = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

Demonstração. [4]-p.68.

a) Seja $f \in C(K, E)$ com $\|f\|_A \leq 1$, pela propriedade da integral de Bartle temos

$$\left\| \int_A f dm \right\| \leq \|f\|_A \widetilde{m}(A), \text{ logo } \sup \left\{ \left\| \int_A f dm \right\| : \|f\|_A \leq 1, f \in C(K, E) \right\} \leq \widetilde{m}(A).$$

b) temos duas possibilidades:

i) se $\widetilde{m}(A) < +\infty$, dado $\epsilon > 0$ escolhemos $x_1, x_2, \dots, x_r$ em B_E e $A_1, A_2, \dots, A_r \in \beta$ conjuntos dois a dois disjuntos tais que $A_i \subset A$, $y^* \in B_{F^*}$ de forma que

$$\widetilde{m}(A) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^r y^*(m(A_i)(x_i)) = \sum_{i=1}^r m_{x_i, y^*}(A_i),$$

pela regularidade de cada $|m_{x_i, y^*}|$ existe um compacto $K_i \subset A_i$ e um aberto $U_i \supset A_i$ tal que

$$|m_{x_i, y^*}|(U_i \setminus K_i) < \frac{\epsilon}{2r} \quad (*)$$

pelo teorema 1.22 de Urysohn, para cada $i = 1, 2, \dots, r$ existe $\varphi_i \in C(K)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, tal que $\varphi_i(t) = 1$ para cada $t \in K_i$ e $\varphi_i(t) = 0$ para cada $t \notin U_i$.

Assim, por (*) para cada $i = 1, 2, \dots, r$, temos

$$\left| \int_A \varphi_i dm_{x_i, y^*} - m_{x_i, y^*}(K_i) \right| = \left| \int_{A \cap (U_i \setminus K_i)} \varphi_i dm_{x_i, y^*} \right| \leq \|\varphi_i\|_\infty |m_{x_i, y^*}(U_i \setminus K_i)| < \frac{\epsilon}{2r},$$

coloquemos $f(t) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(t)x_i \in D$ onde $D = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i : \alpha_i \in C(K) \text{ e } x_i \in E\}$ então

$$\|f\|_A \leq 1, \text{ além disso } y^*\left(\int_A f dm\right) = y^*\left(\sum_{i=1}^r \int_A \varphi_i dm_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^r \int_A \varphi_i dm_{x_i, y^*} \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \left| y^*\left(\int_A f dm - \sum_{i=1}^r m(K_i)x_i\right) \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^r \int_A \varphi_i dm_{x_i, y^*} - \sum_{i=1}^r y^*m(K_i)(x_i) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r \left| \int_A \varphi_i dm_{x_i, y^*} - m_{x_i, y^*}(K_i) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado, } \left| y^*\left(\sum_{i=1}^r m(A_i)x_i - \sum_{i=1}^r m(K_i)x_i\right) \right| \leq \sum_{i=1}^r |m_{x_i, y^*}(U_i \setminus K_i)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{m}(A) - \epsilon &\leq \left| y^*\left(\sum_{i=1}^r m(A_i)x_i - \sum_{i=1}^r m(K_i)x_i\right) \right| + \left| y^*\left(\sum_{i=1}^r m(K_i)x_i - \int_A f dm\right) \right| + \left| y^*\left(\int_A f dm\right) \right| \leq \\ &\leq \epsilon + \left\| \int_A f dm \right\|, \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$

então do lema 4.1.7 e pela parte anterior segue que

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left\{ \left\| \int_A f dm \right\| : \|f\|_A \leq 1, f \in C(K, E) \right\}$$

ii) se $\widetilde{m}(A) = +\infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $A_1, A_2, \dots, A_r \in \beta$, conjuntos dois a dois disjuntos com

$A_i \subset A$, $x_1, x_2, \dots, x_r$ em B_E e $y^* \in B_{F^*}$ tais que $n \leq \sum_{i=1}^r y^*m(A_i)x_i = \sum_{i=1}^r m_{x_i, y^*}(A_i)$ da mesma forma que em i) construímos uma função $f \in C(K, E)$ com $\|f\| \leq 1$ tais que

$$\left\| \int_A f dm \right\| \geq n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ logo, } \sup \left\{ \left\| \int_A f dm \right\| : \|f\|_A \leq 1, f \in C(K, E) \right\} = \infty.$$

Corolário 4.1.9. *Sejam K um compacto e E um espaço de Banach, β uma σ -álgebra de K , $D = \{\sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot)x_i : \varphi_i \in C(K), x_i \in E\}$, e $m : \beta \rightarrow E^*$ uma medida vetorial de semi-variação limitada e regular. Então $\widetilde{m}(K) = \sup \left\{ \left\| \int_K f dm \right\| : \|f\| \leq 1, f \in D \right\}$*

Demonstração. [4]-p.68.

i) Seja $f \in C(K, E)$ com $\|f\| \leq 1$ pela propriedade da integral de Gowurin temos

$$\left\| \int_K f dm \right\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K), \text{ logo, } \sup \left\{ \left\| \int_K f dm \right\| : \|f\| \leq 1, f \in C(K, E) \right\} \leq \widetilde{m}(K).$$

ii) dado $\epsilon > 0$, existem $(A_i)_{i=1}^n \subset \beta$ dois a dois disjuntos e $x_i \in E$, com $\bigcup_{i=1}^n A_i = K$ e

$$\|x_i\| \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ tais que } \widetilde{m}(K) - \epsilon < \left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \right\|.$$

Dado que, $m : \beta \rightarrow E^*$ é regular, temos que para cada $x \in B_E$ $m_x : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m_x(A) = m(A)x$ é regular. Sendo m_x medida real $\|m_x\|(A) = |m_x|(A)$, $\forall A \in \beta$. Logo, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existem fechados $F_i \subset A_i$ e abertos $G_i \supset A_i$ tais que $|m_{x_i}|(G_i \setminus F_i) < \frac{\epsilon}{2n}$, então pelo teorema 1.22 de Urysohn (pois K é normal), para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existem $\varphi_i \in C(K)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, tal que $\varphi_i(F_i) = 1$ e $\varphi_i(K \setminus G_i) = 0$. Desta maneira, para cada

$i = 1, 2, \dots, n$ temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_K \varphi_i dm_{x_i} - m(F_i)x_i \right| &= \left| \int_{G_i \setminus F_i} \varphi_i dm_{x_i} + m(F_i)x_i - m(F_i)x_i \right| \leq \|\varphi_i\| |m_{x_i}|(G_i \setminus F_i) \\ \left| \int_K \varphi_i dm_{x_i} - m(F_i)x_i \right| &\leq |m_{x_i}|(G_i \setminus F_i) < \frac{\epsilon}{2n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Pondo, $f = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot)x_i$, $f \in D$ e $\|f\| \leq 1$ (já que os, A_i são dois a dois disjuntos). Assim,

$$\left| \int_K f dm - \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_K \varphi_i(t)x_i dm - m(F_i)x_i \right) \right| < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2n} = \frac{\epsilon}{2n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\text{Então, } \left| \int_K f dm - \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i - \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (m_{x_i}(A_i) - m_{x_i}(F_i)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |m_{x_i}(A_i) - m_{x_i}(F_i)| \leq \sum_{i=1}^n |m_{x_i}|(A_i \setminus F_i) \leq \sum_{i=1}^n |m_{x_i}|(G_i \setminus F_i) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

assim, $\left| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i - \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo :

$$\widetilde{m}(K) - \epsilon \leq \left| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i - \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i \right| + \left| \sum_{i=1}^n m(F_i)x_i - \int_K f dm \right| + \left| \int_K f dm \right|.$$

$$\text{Então, } \widetilde{m}(K) - \epsilon < \epsilon + \left| \int_K f dm \right|, \quad \forall \epsilon > 0. \text{ Claramente, } \widetilde{m}(K) \leq \sup_{\substack{f \in D \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_K f dm \right|.$$

Portanto, $\widetilde{m}(K) = \sup \left\{ \left| \int_K f dm \right| : f \in D, \|f\| \leq 1 \right\}$. ■

Observação: do lema anterior, segue que

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left\{ \left| \int_A f dm \right| : f \in D, \|f\| \leq 1, \text{ supp } f \subset A \right\} \text{ para cada } A \in \beta.$$

Mais ainda, $\widetilde{m}(A) = |m|(A)$, $\forall A \in \beta$, $m : \beta \rightarrow E^*$. Logo,

$$|m|(A) = \sup \left\{ \left| \int_A f dm \right| : f \in D, \|f\| \leq 1, \text{ supp } f \subset A \right\}.$$

Teorema 4.1.10 (Riesz). *Seja K um compacto, existe um isometria entre $C^*(K)$ e $rca(K)$ tal que a cada $x^* \in C^*(K)$ associa uma $\mu \in rca(K)$, satisfazendo:*

$$x^*(f) = \int_K f d\mu, \quad \forall f \in C(K) \text{ e } \|x^*\| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Demonstração: Veja [19] - p. 265 . ■

4.2 O teorema de Singer

O teorema de Singer é uma extensão do teorema de Riesz para o espaço $C(K, E)$, onde E é um espaço de Banach.

Antes de enunciarmos o teorema, precisaremos definir o que significa $\int_K f dm$ onde $f \in C(K, E)$ e $m: \beta \rightarrow E^*$ é uma medida vetorial de variação limitada; para isto lembremos a integral de Gowurin (veja [21]).

Seja $m: \beta \rightarrow E^*$ uma medida vetorial de variação limitada e definidas nos borelianos de K .

Definição 4.2.11. Seja f uma função β -simples, isto é, existem conjuntos $(A_i)_{i=1}^n \subset \beta$ dois a dois disjuntos com $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e vetores $x_i \in E$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ tais que $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(\cdot) x_i$.

Definimos $\int_K f dm = \sum_{i=1}^n m(A_i) x_i$.

$$\text{Claramente, } \left| \int_K f dm \right| \leq \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| \|x_i\| = \|f\| \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| \frac{\|x_i\|}{\|f\|} \leq \|f\| |m|(K). \quad (*)$$

Seja $f \in C(K, E)$, logo, f é o limite uniforme de funções β -simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, dado que

$$\left| \int_K f_i dm - \int_K f_j dm \right| = \left| \int_K (f_i - f_j) dm \right| \leq \|f_i - f_j\| |m|(K),$$

temos que $(\int_K f_i dm)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, e então definimos:

Definição 4.2.12. $\int_K f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n dm$.

De (*) segue que $\int_K f dm$ independe da escolha da sequência f_n e como $\left| \int_K f_n dm \right| \leq \|f_n\| |m|(K)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $\left| \int_K f dm \right| \leq \|f\| |m|(K)$.

Teorema 4.2.13 (Singer). *Sejam K um compacto e E um espaço de Banach. Então existe uma isometria entre $C^*(K, E)$ e $rcbv(K, E^*)$ tal que, para cada $\phi \in C^*(K, E)$ associa uma medida vetorial $m: \beta \rightarrow E^*$ em $rcbv(K, E^*)$, satisfazendo:*

$$\phi(f) = \int_K f dm \quad \text{para cada } f \in C(K, E) \quad \text{e} \quad \|\phi\| = |m|(K).$$

Demonstração: Veja [38]- p. 193.

($\Rightarrow$) Seja $\phi \in C^*(K, E)$, fixado $x \in E$ consideremos o espaço $C_x = \{\alpha(\cdot)x : \alpha \in C(K) \text{ e } x \in E\}$ de $C(K, E)$. Restringindo $\phi: C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ a C_x temos $\phi|_{C_x}: C_x \rightarrow \mathbb{R}$ linear contínuo, C_x é equivalente a $C(K)$, pela aplicação $\alpha(\cdot)x \mapsto \alpha(\cdot)\|x\|$ e, pelo teorema 4.1.10, $C^*(K) \sim rca(K)$, então existe $\mu_x \in rca(K)$ tal que $\phi(\alpha(\cdot)x) = \int_K \alpha(t) d\mu_x$ e $\|\phi|_{C_x}\| = |\mu_x|(K)$.

Para cada $A \in \beta$, boreliano de K e $x \in E$ definiremos uma aplicação $m: \beta \rightarrow E^*$, dada por $m(A)(x) = \mu_x(A)$ para cada $x \in E$.

a) Para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(A)(x) = \mu_x(A)$, $\forall x \in E$ é linear contínua.

De fato, seja $\alpha \in C(K)$, $x_1, x_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$\int_K \alpha(t) d\mu_{x_1+\lambda x_2} = \phi(\alpha(\cdot)(x_1 + \lambda x_2)) = \phi(\alpha(\cdot)x_1) + \lambda \phi(\alpha(\cdot)x_2) = \int_K \alpha(t) d\mu_{x_1} + \lambda \int_K \alpha(t) d\mu_{x_2}$
para cada $\alpha \in C(K)$. Logo, $\mu_{x_1+\lambda x_2} = \mu_{x_1} + \lambda \mu_{x_2}$, para cada $x_1, x_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Claramente, $m(A)(x_1 + \lambda x_2) = \mu_{x_1+\lambda x_2}(A) = m(A)(x_1) + \lambda m(A)(x_2)$.

Assim, $m(A) : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $m(A)(x) = \mu_x(A)$ é linear e contínua, pois

$|m(A)(x)| = |\mu_x(A)| \leq |\mu_x|(K)$. Como, $\|\phi|_{C_x}\| = |\mu_x|(K)$, segue-se que:

$|m(A)(x)| \leq \|\phi|_{C_x}\| \leq \|\phi\| \|x\|$ para cada $x \in E$. Portanto, $m(A) \in E^*$ para cada $A \in \beta$.

b) $m : \beta \rightarrow E^*$ tal que $m(A)(x) = \mu_x(A)$ para cada $A \in \beta$ e $x \in E$ é aditiva e limitada.

De fato, sejam $A_1, A_2 \in \beta$ disjuntos, logo $m(A_1 \dot{\cup} A_2)(x) = \mu_x(A_1 \dot{\cup} A_2)$, $\forall x \in E$ e dado que $\mu_x \in rca(K)$, segue $m(A_1 \dot{\cup} A_2) = m(A_1) + m(A_2)$, onde m é limitado, pela parte a) por $\|\phi\|$.

c) a medida $m : \beta \rightarrow E^*$ tal que $m(A)(x) = \mu_x(A)$, $\forall A \in \beta$ e $x \in E$ é de variação limitada.

De fato, sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ conjuntos em β dois a dois disjuntos tal que $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$, dado $\epsilon > 0$, arbitrário com $0 < \epsilon < \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\|$, escolhemos $x_i \in E$ com $\|x_i\| = 1$ e $m(A_i)x_i \geq \|m(A_i)\| - \frac{\epsilon}{n}$ para cada i , com $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearmente independentes (substituindo, se necessário por elementos suficientemente próximos). Logo $0 < \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)x_i$.

Por outro lado, $C(K)$ é denso em $L^1(K, \mu_{x_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Fixado i , existe uma seqüência $(\alpha_i^j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K |\alpha_i^j(t) - \chi_{A_i}(t)| d\mu_{x_i} = 0$, para cada $i = 1, \dots, n$. Então existe uma subseqüência de $(\alpha_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(\alpha_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_i^j(t) = \chi_{A_i}(t)$ q.s. com relação às variáveis $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \mu_{x_3}, \dots, \mu_{x_n}$ (respectivamente).

Para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $j \in \mathbb{N}$, colocamos $\beta_i^j(t) = \frac{\alpha_i^j(t)}{\frac{1}{j} + \|\sum_{i=1}^n \alpha_i^j(t)x_i\|_E}$.

Logo, $\beta_i^j(\cdot) \in C(K)$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $j \in \mathbb{N}$; temos ainda

$$\|\sum_{i=1}^n \beta_i^j(t)x_i\|_E = \frac{\|\sum_{i=1}^n \alpha_i^j(t)x_i\|_E}{\frac{1}{j} + \|\sum_{i=1}^n \alpha_i^j(t)x_i\|_E} \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \text{ Portanto } \|\sum_{i=1}^n \beta_i^j(t)x_i\|_E \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } t \in K.$$

Assim, $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_i^j(t) = \frac{\chi_{A_i}(t)}{\|\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(t)x_i\|_E}$ q.s. para cada $i = 1, 2, \dots, n$ com relação a $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$ respectivamente.

Observemos que, se $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é l.i. existe um operador linear contínuo

$L: \overline{[x_1, x_2, \dots, x_n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $L(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\forall \sum_{i=1}^n a_i x_i \in \overline{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$,

logo, existe $M > 0$ tal que $\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| \leq M$, sempre que $\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|_E \leq 1$. Como,

$\|\sum_{i=1}^n \beta_i^j(t)x_i\|_E \leq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Segue-se que $\|(\beta_1^j(t), \beta_2^j(t), \dots, \beta_n^j(t))\| \leq M$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Logo $|\beta_i^j(t)| \leq M$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $j \in \mathbb{N}$.

Pelo teorema da convergência dominada e pela parte anterior, segue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K \beta_i^j(t) d\mu_{x_i} = \int_K \chi_{A_i}(t) d\mu_{x_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

assim, temos que $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K \beta_i^j(t) d\mu_{x_i} = \mu_{x_i}(A_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$

ou então, $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K \beta_i^j(t) d\mu_{x_i} = m(A_i)(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Claramente, $0 < \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)(x_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_K \beta_i^j(t) d\mu_{x_i}$, porém $\beta_i^j(\cdot)x_i \in C_{x_i}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $j \in \mathbb{N}$ e pela última parte

$$0 < \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| - \epsilon \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(\beta_i^j(\cdot)x_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^j(\cdot)x_i\right).$$

Como $\|\sum_{i=1}^n \beta_i^j(t)x_i\|_E \leq 1, \forall j \in \mathbb{N}$ segue que $0 < \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| - \epsilon \leq \|\phi\|, \forall \epsilon > 0, \forall \bigcup_{i=1}^n A_i = K$,

assim $|m|(K) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n A_i = K} \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| \leq \|\phi\|$. Portanto, m é de variação limitada.

d) $m : \beta \rightarrow E^*$, tal que $m(A)(x) = \mu_x(A)$, $\forall A \in \beta, x \in E$ é enumeravelmente aditiva.

De fato: Seja $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \beta$ disjuntos dois a dois, dado que m é de variação limitada, por c), temos que $\sum_{i=1}^n \|m(A_i)\| \leq |m|(K)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ é absolutamente convergente, portanto $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ converge.

Por outro lado, $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)(x) = \mu_x(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_x(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)x$, logo

$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)(x) = (\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i))(x)$, $\forall x \in E$, assim $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

e) $\phi(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$.

De fato, dado $f \in C(K, E)$ pela definição da integral de Goursin existe $\int_K f dm$.

Por outro lado, pelo lema 4.1.7 existe uma sequência $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i$ que converge uniformemente a

f , onde $\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i) = \sum_{i=1}^n \int_K \alpha_i(t) d\mu_{x_i} = \sum_{i=1}^n \int_K \alpha_i(t) d(m(\cdot)x_i) = \sum_{i=1}^n \int_K \alpha_i(t)x_i dm$

assim, $\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i) = \int_K (\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x_i) dm$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i$ converge uniformemente a f temos

$$\phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot)x_i\right) dm = \int_K f dm,$$

assim, $\phi(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$.

f) $m : \beta \rightarrow E^*$, tal que $m(A)(x) = \mu_x(A)$, $\forall x \in E$ e $A \in \beta$ é regular.

De fato, podemos definir para cada $x \in E$ a medida $m_x : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$m_x(A) = m(A)(x) = \mu_x(A)$, $\forall A \in \beta$, assim $m_x = \mu_x \in rca(K)$ para cada $x \in E$.

Suponhamos por absurdo que m não é regular. Logo da definição 4.1.6, existe $A \in \beta$ e $\epsilon > 0$ tal que $\forall S \in \beta$ fechado com $S \subset A$ temos $\|m\|(A \setminus S) \geq \epsilon$.

Por outro lado, seja $S_1 = \phi$. Existe $x_1 \in B_E$ tal que $|m_{x_1}|(A \setminus S_1) \geq \epsilon$ e sendo m_{x_1} regular, existe

um fechado $S_2 \in \beta$ com $S_1 \subset S_2 \subset A$ tal que $|m_{x_1}|(A \setminus S_2) < \frac{\epsilon}{2}$. Analogamente, existe $x_2 \in B_E$ tal que $|m_{x_2}|(A \setminus S_2) \geq \epsilon$ e sendo m_{x_2} regular, existe um fechado $S_3 \in \beta$ com $S_2 \subset S_3 \subset A$ tal que $|m_{x_2}|(A \setminus S_3) < \frac{\epsilon}{2}$.

Pelo mesmo raciocínio, podemos obter uma sequência $(x_n)_n \subset B_E$ e uma sequência $(S_n)_n \subset \beta$ de fechados crescente tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \subset S_{n+1} \subset A, \quad |m_{x_n}|(A \setminus S_n) \geq \epsilon \quad \text{e} \quad |m_{x_n}|(A \setminus S_{n+1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos, $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \beta$ e dado que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (S \setminus S_n) = \phi$, temos $\|m\|(S \setminus S_n) \rightarrow 0$ (pois, m é σ -aditiva), logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|m\|(S \setminus S_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$, porém $S_{n_0} \subset S_{n_0+1} \subset S \subset A$. Logo $A \setminus S_{n_0} \subset A \setminus S_{n_0+1} \cup S \setminus S_{n_0}$, então temos $|m_{x_{n_0}}|(A \setminus S_{n_0}) \leq |m_{x_{n_0}}|(A \setminus S_{n_0+1}) + |m_{x_{n_0}}|(S \setminus S_{n_0})$ sendo, $m_{x_{n_0}}$ uma medida real $|m_{x_{n_0}}|(S \setminus S_{n_0}) = \|m_{x_{n_0}}\|(S \setminus S_{n_0})$, logo $|m_{x_{n_0}}|(S \setminus S_{n_0}) \leq \|m\|(S \setminus S_{n_0})$ e pela parte anterior $|m_{x_{n_0}}|(A \setminus S_{n_0}) \leq |m_{x_{n_0}}|(A \setminus S_{n_0+1}) + \|m\|(S \setminus S_{n_0}) < \epsilon$ o que contradiz a escolha de S_{n_0} . Portanto $m : \beta \rightarrow E^*$ é regular.

($\Leftarrow$) seja $m : \beta \rightarrow E^*$ uma medida vetorial tal que $m \in rcabv(K, E^*)$, pela definição da integral de Gowurin, para cada $f \in C(K, E)$, existe $\int_K f dm$ e $|\int_K f dm| \leq \|f\| \|m\|(K)$, assim podemos definir $\phi : C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$, ϕ é linear e contínuo, pois:

$$|\phi(f)| = \left| \int_K f dm \right| \leq \|f\| \|m\|(K), \quad \forall f \in C(K, E),$$

assim, $\|\phi\| \leq \|m\|(K)$.

Resta demonstrar que $\|\phi\| = \|m\|(K)$. Pelo corolário 4.1.9 temos que

$$\widetilde{m}(K) = \sup \left\{ \left| \int_K f dm \right| : f \in D, \|f\| \leq 1 \right\},$$

onde $D = \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot) x_i : \varphi_i \in C(K), x_i \in E \right\} \subset C(K, E)$, sendo m de variação limitada, $\widetilde{m}$ é limitada e $\|m\|(K) = \widetilde{m}(K)$. Assim $\|m\|(K) = \sup_{\substack{f \in D \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_K f dm \right| = \sup_{\substack{f \in D \\ \|f\| \leq 1}} \|\phi(f)\| \leq \sup_{\substack{f \in C(K, E) \\ \|f\| \leq 1}} \|\phi(f)\| = \|\phi\|.$ ■

4.3 O teorema de Dunford - Schwartz

Para mostrarmos que $C(K)$ tem a propriedade de V (teorema 6.17) e a propriedade de Dunford-Pettis (teorema 6.23) precisaremos dos teoremas 4.3.14 e 4.3.15 que por sua vez são conseqüências do teorema de Riesz.

Teorema 4.3.14. *Sejam K um compacto e $T : C(K) \rightarrow E$ um operador linear contínuo. Então existe uma medida $m : \beta \rightarrow E^{**}$ fraca-estrela enumeravelmente aditiva tal que*

a) $m(\cdot)x^* \in rca(K)$ para cada $x^* \in E^*$;

- b) o operador $x^* \mapsto m(\cdot)x^*$ é fraca-estrela contínua de E^* em $rca(K)$;
c) $x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$, $\forall f \in C(K)$ e $x^* \in E^*$;
d) $\|T\| = \|m\|(K)$.

Reciprocamente, se $m: \beta \rightarrow E^{**}$ é uma medida definida nos borelianos de K de semi-variação escalar finita satisfazendo a), b). Então $x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$ define um operador linear contínuo T de $C(K)$ em E tal que $\|T\| = \|m\|(K)$.

Demonstração: [19] - p. 492

($\Rightarrow$) Seja $T: C(K) \rightarrow E$ linear contínuo. Logo, $T^*: E^* \rightarrow C^*(K)$ é linear contínuo. Então $T^{**}: C^{**}(K) \rightarrow E^{**}$ é linear contínuo. Pelo teorema 1.29, temos que $C^*(K)$ é isométrico a $rca(K)$.

Seja $A \in \beta$, definimos $\varphi_A: C^*(K) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$, $\forall \mu \in C^*(K)$ onde $\varphi_{(A \cup B)}(\mu) = \varphi_A(\mu) + \varphi_B(\mu)$, $\forall A, B \in \beta$ disjuntos e φ_A é linear contínuo, então $\varphi_A \in C^{**}(K)$, desta forma, $T^{**}(\varphi_A) \in E^{**}$ para cada $A \in \beta$. Logo $m: \beta \rightarrow E^{**}$ definida por $m(A) = T^{**}(\varphi_A)$, $\forall A \in \beta$ é tal que $\|m(A)\| \leq \|T^{**}\|$ para cada $A \in \beta$ e m é aditiva.

- a) $m: \beta \rightarrow E^{**}$ é uma medida vetorial tal que $m(\cdot)x^* \in rca(K)$, $\forall x^* \in E^*$.

De fato, seja $x^* \in E^*$. Logo $T^*(x^*) \in C^*(K)$, então existe $\mu_{x^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(x^*) = \mu_{x^*}$. Assim, $\mu_{x^*}(A) = \varphi_A(\mu_{x^*}) = \varphi_A(T^*(x^*)) = T^{**}\varphi_A(x^*)$. Logo, $\mu_{x^*}(A) = m(A)(x^*)$, $\forall x^* \in E^*$. Portanto, $m(\cdot)x^* = \mu_{x^*} \in rca(K)$, $\forall x^* \in E^*$.

- b) o operador $x^* \mapsto m(\cdot)x^*$ é fraca-estrela contínua de E^* em $rca(K)$

De fato, observemos que $T^*: E^* \rightarrow rca(K)$ tal que $T^*(x^*) = m(\cdot)x^*$, $\forall x^* \in E^*$ é contínuo, em particular é fraca-estrela contínua.

- c) $x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$ para cada $f \in C(K)$ e $x^* \in E^*$.

De fato, seja $x^* \in E^*$ logo $T^*(x^*) \in C^*(K)$, então pelo teorema 1.29, existe $\mu_{x^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(x^*)(f) = \int_K f d\mu_{x^*}$, $\forall f \in C(K)$, $x^* \in E^*$ pela parte a) $\mu_{x^*} = m(\cdot)x^*$, $\forall x^* \in E^*$. Assim, $x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$, $\forall x^* \in E^*$ e $f \in C(K)$.

- d) $m: \beta \rightarrow E^{**}$ é uma medida vetorial de semi-variação escalar limitada e $\|T\| = \|m\|(K)$.

De fato, seja $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $|\alpha_i| \leq 1$ onde $A_i \in \beta$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Como no caso a) $\varphi_{A_i} \in C^{**}(K)$, tal que $\varphi_{A_i}(\mu) = \mu(A_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ e $\mu \in rca(K)$, segue que $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i}(\mu)| = |\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \leq |\mu|(K)$. Logo $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i}\| \leq 1$.

Por outro lado, $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i T^{**}(\varphi_{A_i})\|$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right\| \leq \|T^{**}\| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i} \right\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|,$$

claramente $\|m\|(K) = \sup_{\substack{\bigcup_{i=1}^n A_i = K \\ \|\alpha_i\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right\| \leq \|T\|$. Assim $\|m\|(K) \leq \|T\|$.

Resta mostrar a desigualdade contrária, para isto temos que:

$$\|T\| = \|T^*\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|T^*(x^*)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\mu_{x^*}|(K) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |m(\cdot)x^*|(K),$$

logo $\|T\| \leq \sup_{\|x^{***}\| \leq 1} |x^{***}m(\cdot)|(K)$, assim dado $\epsilon > 0$ existe $\|x^{***}\| \leq 1$ e $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$, tal que $\|T\| - \epsilon < \sum_{i=1}^n |x^{***}m(A_i)|$. Consideremos $\sigma_i = sg(x^{***}m(A_i))$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, então $\|T\| - \epsilon < x^{***}(\sum_{i=1}^n \sigma_i m(A_i)) < \left\| \sum_{i=1}^n \sigma_i m(A_i) \right\| \leq \|m\|(K)$, $\forall \epsilon > 0$. Logo $\|T\| \leq \|m\|(K)$.

($\Leftarrow$) Seja $m: \beta \rightarrow E^{**}$ uma medida vetorial de K de semi-variação escalar finita tal que:

- a) $m(\cdot)x^* \in rca(K)$ para cada $x^* \in E^*$
- b) o operador $x^* \mapsto m(\cdot)x^*$ é fraca-estrela contínua de E^* em $rca(K)$.

Queremos demonstrar que existe $T: C(K) \rightarrow E$ linear contínuo tal que

$$x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*), \quad \forall f \in C(K), \quad \forall x^* \in E^*.$$

De fato: seja $f \in C(K)$ fixado e $L: E^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x^*) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$, $\forall x^* \in E^*$, L está bem definido, pois f é $m(\cdot)x^*$ - integrável.

Seja $\Gamma = \hat{E} \subset E^{**}$, Γ é total, L é contínua na Γ -top de E^* , pois se $x_n^* \xrightarrow{\Gamma-top} 0$ temos que $x_n^* \xrightarrow{E-top} 0$ e dado que $x^* \mapsto m(\cdot)x^*$ é fraca-estrela contínua, segue-se que $m(\cdot)x_n^* \xrightarrow{C(K)-top} 0$ e, portanto $L(x_n^*) = \int_K f d(m(\cdot)x_n^*) \rightarrow 0$.

Assim, pelo teorema 1.42 temos que existe $x_f \in E$ tal que $L = \hat{x}_f$; definindo $T: C(K) \rightarrow E$ tal que $T(f) = x_f$, $\forall f \in C(K)$ com $x^*(x_f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$, claramente T é linear contínuo, pois $|x^*(T(f))| = \left| \int_K f d(m(\cdot)x^*) \right| \leq \|f\|_\infty |m(\cdot)x^*|(K)$, logo $\|T(f)\| \leq \|f\|_\infty \|m\|(K)$, $\forall f \in C(K)$. Então $\|T\| \leq \|m\|(K)$ e $x^*T(f) = \int_K f d(m(\cdot)x^*)$, $\forall f \in C(K)$, $\forall x^* \in E^*$.

Observando que, $T^*(x^*) = m(\cdot)x^*$, $\forall x^* \in E^*$ e $\forall A \in \beta$. Seja $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$, $\forall \mu \in rca(K)$, logo $\varphi_A \in C^{**}(K)$, $\forall A \in \beta$. Dado $A \in \beta$, $T^{**}(\varphi_A)(x^*) = \varphi_A(T^*(x^*)) = m(A)x^*$, $\forall x^* \in E^*$, então $m(A) = T^{**}(\varphi_A)$, $\forall A \in \beta$.

Se $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$ com $|\alpha_i| \leq 1$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T^{**}(\varphi_{A_i}) \right\| \leq \|T^{**}\| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i} \right\| \leq \|T^{**}\|,$$

assim, $\|m\|(K) \leq \|T\|$, pois $\|T\| = \|T^{**}\|$. ■

Teorema 4.3.15 (Dunford-Schwartz). *Sejam K um compacto e $T: C(K) \rightarrow E$ um operador*

fracamente compacto, onde E é um espaço de Banach. Então existe uma medida vetorial $m: \beta \rightarrow E$ enumeravelmente aditiva de semi- variação escalar limitada tal que:

- a) $x^* \circ m \in rca(K)$, para cada $x^* \in E^*$;
- b) $T(f) = \int_K f(t) dm$, para cada $f \in C(K)$;
- c) $\|T\| = \|m\|(K)$;
- d) $T^*(x^*) = x^* \circ m$, para cada $x^* \in E^*$.

Reciprocamente, se $m: \beta \rightarrow E$ é uma medida vetorial enumeravelmente aditiva de semi-variação escalar limitada, satisfazendo a), então o operador T definido por b) é um operador fracamente compacto de $C(K)$ em E satisfazendo c) e d).

Demonstração: [19]-p.493.

($\Rightarrow$) suponhamos que $T: C(K) \rightarrow E$ é um operador fracamente compacto, pelo teorema 1.53 $T^{**}(C(K)^{**}) \subset \hat{E}$. Pelo teorema 1.29, $C^*(K) = rca(K)$, logo para $x^* \in E^*$ existe $\mu_{x^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(x^*) = \mu_{x^*}$.

Para cada $A \in \beta$ seja $\varphi_A: C(K)^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$, $\forall \mu \in C(K)^*$, observemos que $\varphi_A \in C^{**}(K)$ e pela parte anterior, existe $x_A \in E$ tal que $\hat{x}_A = T^{**}(\varphi_A)$ para cada $A \in \beta$. Assim $x^*(x_A) = T^{**}(\varphi_A)(x^*)$, $\forall A \in \beta$, $x^* \in E^*$. A função $m: \beta \rightarrow E$ tal que $x^*(m(A)) = T^{**}(\varphi_A)(x^*)$ para cada $x^* \in E^*$ é uma medida vetorial aditiva.

- a) $x^* \circ m \in rca(K)$, para cada $x^* \in E^*$.

De fato, seja $x^* \in E^*$; logo $x^*(m(A)) = \varphi_A(T^*(x^*))$, então

$$x^*(m(A)) = \varphi_A(\mu_{x^*}) = \mu_{x^*}(A), \forall A \in \beta \text{ e } x^* \in E^*.$$

Desta forma, $x^* \circ m = \mu_{x^*} \in rca(K)$ para cada $x^* \in E^*$.

- b) a medida vetorial $m: \beta \rightarrow E$ tal que $x^*(m(A)) = T^{**}(\varphi_A)(x^*)$, $\forall A \in \beta$ e $x^* \in E^*$ é enumeravelmente aditiva.

De fato, seja $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, sabemos por a) que $x^*m(A) = \mu_{x^*}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x^*}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x^*m(A_i)$ para cada $x^* \in E^*$ e pelo teorema 1.7 temos que $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ converge. Logo $x^*m(A) = x^*(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i))$, $\forall x^* \in E^*$. Assim, $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

- c) f é m -integrável para cada $f \in C(K)$.

De fato, como $f \in C(K)$ é contínua no compacto K existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$\alpha \leq |f(t)| \leq \beta$, $\forall t \in K$ logo $\inf\{c > 0 / m(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\}$ é finito. Claramente f é m -mensurável e pelo teorema 1.40, f é m -integrável e $|\int_K f dm| \leq \|f\| \|m\|(K)$.

d) $T(f) = \int_K f dm$ para cada $f \in C(K)$.

De fato, para cada $x^* \in E^*$ existe $\mu_{x^*} \in rca(K)$ tal que $T^*(x^*)(f) = \int_K f d\mu_{x^*}$, $\forall f \in C(K)$.

Pela parte a) $\mu_{x^*} = x^* \circ m$, $\forall x^* \in E^*$, logo $x^*(T(f)) = \int_K f d(x^* \circ m)$, $\forall f \in C(K)$. Por

c) temos que f é m -integrável, assim $x^*(T(f)) = x^*(\int_K f dm)$, $\forall x^* \in E^*$ e $f \in C(K)$.

Claramente, $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K)$.

e) $\|T\| = \|m\|(K)$ e m é de semi-variação escalar limitada.

De fato, pela parte c) temos que $\|T(f)\| \leq \|f\| \|m\|(K)$, logo $\|T\| \leq \|m\|(K)$.

Por outro lado, seja $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $\|\alpha_i\| \leq 1$ com $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right\| &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i))| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x^* \circ m(A_i) \right| = \\ &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i T^{**}(\varphi_{A_i}) x^* \right| = \|T^{**}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i})\| \leq \|T\| \end{aligned}$$

assim, $\|m\|(K) \leq \|T\|$. Claramente, $\|T\| = \|m\|(K)$.

f) $T^*(x^*) = x^* \circ m$ para cada $x^* \in E^*$

Pela parte a) segue o resultado.

($\Leftarrow$) reciprocamente, suponha que $m : \beta \rightarrow E$ é uma medida vetorial enumeravelmente aditiva de semi-variação escalar limitada tal que:

a) $x^* \circ m \in rca(K)$ para cada $x^* \in E^*$.

Queremos demonstrar: $T : C(K) \rightarrow E$ tal que $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K)$ é fracamente compacto onde $\|T\| = \|m\|(K)$ e $T^*(x^*) = x^* \circ m$, $\forall x^* \in E^*$.

De fato, seja $f \in C(K)$ dado que $m : \beta \rightarrow E$ é uma medida enumeravelmente aditiva e f é m -mensurável onde claramente $\inf\{c > 0 / m(\{t \in K : |f(t)| > c\}) = 0\} < +\infty$, pelo teorema 1.40, f é m -integrável e $|\int_K f dm| \leq \|f\| \|m\|(K)$, assim podemos definir $T : C(K) \rightarrow E$ tal que $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K)$ que é linear contínuo, pois $\|T(f)\| \leq \|f\| \|m\|(K)$ e $\|m\|(K) < +\infty$ e pelo teorema 4.3.14, segue que $\|T\| = \|m\|(K)$ e $T^*(x^*) = x^* \circ m$, $\forall x^* \in E^*$, logo

$$T^*(B_{E^*}) = \{x^* \circ m : \|x^*\| \leq 1\} \subset rca(K)$$

é limitado em $rca(K)$ portanto limitado em $ca(K)$ e pelo teorema 1.38, $T^*(B_{E^*}) \subset ca(K)$ é fracamente seqüencialmente compacto e dado que $rca(K)$ é fracamente completo, $T^*(B_{E^*}) \subset rca(K)$ é relativamente fracamente compacto e pelo teorema 1.53, $T : C(K) \rightarrow E$ é fracamente compacto. ■

4.4 O teorema Singer - Dinculeanu

Aqui precisaremos definir o que significa $\int_K f dm$, quando $f \in C(K, E)$ e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, Z)$ é uma medida vetorial aditiva de semi-variação limitada definida nos borelianos de K a valores nos operadores lineares contínuos de E em Z , espaços de Banach; para isto lembraremos a integral de Bartle.

Sejam E e Z espaços de Banach e m como acima.

Definição 4.4.16. Seja f uma função β -simples, isto é, existem conjuntos $(A_i)_{i=1}^n \subset \beta$ dois a dois disjuntos com $K = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e vetores $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n$ tais que, $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(\cdot) x_i$.

Definimos $\int_K f dm = \sum_{i=1}^n m(A_i) x_i$.

Claramente temos $\|\int_K f dm\| = \|\sum_{i=1}^n m(A_i) x_i\| = \|f\| \|\sum_{i=1}^n m(A_i) \left(\frac{x_i}{\|f\|}\right)\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K)$.

Seja $f \in C(K, E)$, logo f é limite uniforme de funções β -simples $(f_n)_n$ e dado que $\|\int_K f_i dm - \int_K f_j dm\| \leq \|f_i - f_j\| \widetilde{m}(K)$ (*) e então definimos.

Definição 4.4.17. $\int_K f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n dm$.

De (*) segue que $\int_K f dm$ independe da escolha da sequência $(f_n)_n$ e da desigualdade $\|\int_K f_n dm\| \leq \|f_n\| \widetilde{m}(K)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que $\|\int_K f dm\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K)$.

Teorema 4.4.18 (Singer-Dinculeanu). *Sejam K um compacto, E, F espaços de Banach e $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Então existe uma única medida vetorial, $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ tal que :*

- a) m é aditiva e $\widetilde{m}(K) < +\infty$;
- b) para cada $y^* \in F^*$, $m_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$;
- c) o operador $y^* \mapsto m_{y^*}$ é fraca-estrela contínua de F^* em $rcabv(K, E^*)$;
- d) $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$;
- e) $\|T\| = \widetilde{m}(K)$;
- f) $T^*(y^*) = m_{y^*}$ para cada $y^* \in F^*$.

Reciprocamente, cada medida vetorial $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ satisfazendo a), b) e c) define um operador linear contínuo $T: C(K, E) \rightarrow F$ definido por $T(f) = \int_K f dm$ e vale e) e f).

Demonstração. [16] p.398.

($\Rightarrow$) seja $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Para cada $y^* \in F^*$, $T^*(y^*) \in C^*(K, E)$ e pelo teorema 4.2.13, existe $\mu_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$ tal que $T^*(y^*) = \mu_{y^*}$.

Definimos $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ tal que $(m(A)x)(y^*) = \mu_{y^*}(A)(x)$ para cada $x \in E$ e $y^* \in F^*$, a partir daí podemos definir, para cada $y^* \in F^*$ uma medida $m_{y^*}: \beta \rightarrow E^*$ tal que $m_{y^*}(A)(x) = (m(A)x)y^*$, $\forall x \in E$, claramente a medida $m_{y^*} = T^*(y^*) = \mu_{y^*}$ pertence à $rcabv(K, E^*)$, para cada $y^* \in F^*$.

a) m é aditiva e $\widetilde{m}(K) < +\infty$.

De fato, sejam $A_1, A_2 \in \beta$ conjuntos disjuntos:

$$(m(A_1 \dot{\cup} A_2)(x))(y^*) = \mu_{y^*}(A_1 \dot{\cup} A_2)(x), \forall x \in E \text{ e } y^* \in F^*, \text{ logo}$$

$$(m(A_1 \dot{\cup} A_2)(x))(y^*) = (m(A_1)(x) + m(A_2)(x))(y^*), \forall y^* \in F^*, \forall x \in E,$$

então, $m(A_1 \dot{\cup} A_2)(x) = m(A_1)(x) + m(A_2)(x)$, $\forall x \in E$, assim $m(A_1 \dot{\cup} A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

Por outro lado, da proposição 4.1.5, temos que $\widetilde{m}(K) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(K)$ e pelas observações feitas na primeira parte, temos que $\widetilde{m}(K) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |T^*(y^*)| = \|T^*\| = \|T\|$, claramente $\widetilde{m}(K) = \|T\|$ é finita.

b) $m_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$ para cada $y^* \in F^*$.

De fato, como provamos anteriormente $m_{y^*} = T^*(y^*) = \mu_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$; para cada $y^* \in F^*$.

c) a aplicação $y^* \mapsto m_{y^*}$ é fraca-estrela contínua de F^* em $rcabv(K, E^*)$.

De fato, $T^*: F^* \rightarrow rcabv(K, E^*) = C^*(K, E)$ é linear contínuo, claramente ela é fraca-estrela contínua; isto é, da F -top. de F^* na $C(K, E)$ -top. de $rcabv(K, E^*)$.

d) $T(f) = \int_K f dm$ para cada $f \in C(K, E)$.

De fato, para cada $f \in C(K, E)$ temos que existe a integral de Bartle

$$\int_K f dm \text{ e } \left\| \int_K f dm \right\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K).$$

Por outro lado, para cada $y^* \in F^*$ temos que $T^*(y^*) \in C^*(K, E)$, logo existe $m_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$ tal que $T^*(y^*)(f) = \int_K f dm_{y^*}$ e pela primeira parte $y^*(T(f)) = \left(\int_K f dm \right)(y^*)$ para cada $y^* \in F^*$, desta forma $T(f) = \int_K f dm$ para cada $f \in C(K, E)$.

e) $\|T\| = \widetilde{m}(K)$. O resultado segue da parte a).

f) $T^*(y^*) = m_{y^*}$ para cada $y^* \in F^*$. O resultado segue da parte b).

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ uma medida vetorial tal que:

a) m é aditiva e $\widetilde{m}(K) < +\infty$

b) $m_{y^*} \in rcabv(\beta, E^*)$, para cada $y^* \in F^*$

c) o operador $y^* \mapsto m_{y^*}$ é fraca-estrela contínua de F^* em $rcabv(K, E^*)$.

Queremos demonstrar que existe $T: C(K, E) \rightarrow F$ linear contínuo definido por $T(f) = \int_K f dm$ e valem e), f).

d) existe $T: C(K, E) \rightarrow F$ tal $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$ é linear contínuo.

De fato, seja $f \in C(K, E)$ pela definição da integral de Bartle existe $\int_K f dm$ e

$$\left\| \int_K f dm \right\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K).$$

Por outro lado, para cada $y^* \in F^*$ existe $\int_K f dm_{y^*}$, logo definimos $\varphi_f: F^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$\varphi_f(y^*) = \int_K f dm_{y^*}$, $\forall y^* \in F^*$, claramente φ_f é linear. Consideremos $\Gamma = \widehat{F}$, Γ é total em F^* , pois se $\varphi(y^*) = 0$, $\forall \varphi \in \Gamma$ temos $y^*(y) = 0$, $\forall y \in F$, então $y^* = 0$.

O operador $\varphi_f: F^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_f(y^*) = \int_K f dm_{y^*}$, $\forall y^* \in F^*$ é Γ -contínuo, pois se $y_n^* \xrightarrow{\Gamma-top} 0$, então $y_n^*(y) \rightarrow 0$, $\forall y \in F$ e dado que $y^* \mapsto m_{y^*}$ é fraca-estrela contínua temos que $m_{y_n^*}(f) \rightarrow 0$, $\forall f \in C(K, E)$, isto é $\int_K f dm_{y_n^*} \rightarrow 0$, desta forma $\varphi_f(y_n^*) \rightarrow 0$.

Agora, pelo teorema 1.43 segue que $\varphi_f \in \Gamma = \widehat{F}$ então existe $y_f \in F$ tal que $\varphi_f = \widehat{y}_f$. Desta forma definimos $T: C(K, E) \rightarrow F$ tal que $\int_K f dm_{y^*} = y^*(T(f))$, $\forall f \in C(K, E)$ e cada $y^* \in F^*$, claramente T é um operador linear. Para cada $y^* \in F^*$, $y^*(T(f)) = \int_K f dm_{y^*}$ e pela parte anterior, existe $\int_K f dm$.

Assim $y^*(T(f)) = \left(\int_K f dm \right) (y^*)$, $\forall y^* \in F^*$, então $T(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in C(K, E)$, além disso $\|T(f)\| = \left\| \int_K f dm \right\| \leq \|f\| \widetilde{m}(K)$, $\forall f \in C(K, E)$. Claramente, T é linear contínuo.

e) $\|T\| = \widetilde{m}(K)$

De fato, pela parte d) temos $\|T\| \leq \widetilde{m}(K)$ e $y^*(T(f)) = \int_K f dm_{y^*}$, $\forall f \in C(K, E)$, logo $T^*(y^*)(f) = \int_K f dm_{y^*}$, $\forall f \in C(K, E)$, então $T^*(y^*) = m_{y^*}$, $\forall y^* \in F^*$.

Assim, $\|T\| = \|T^*\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|T^*(y^*)\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(K)$ e pela proposição 4.1.5 concluímos que $\widetilde{m}(K) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(K)$. Claramente $\|T\| = \widetilde{m}(K)$.

f) $T^*(y^*) = m_{y^*}$ para cada $y^* \in F^*$

Segue-se da parte e). ■

Tendo feito neste capítulo um breve e necessário estudo de operadores definidos em $C(K, E)$, começaremos a partir do próximo capítulo estudar a K cancelabilidade e a K estabilidade das propriedades de espaços de Banach definidas em (*) p. 17.

Capítulo 5

Primeiros exemplos de propriedades de espaços de Banach K canceláveis e K estáveis

Para estudarmos os compactos K para os quais as propriedades caracterizadas nos teoremas 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12 são K estáveis e K canceláveis, precisaremos dos teoremas 5.7 e 5.8 junto com as observações abaixo.

Observação. Sejam K um compacto finito, E um espaço de Banach suponhamos que $|K| = n$, $n \in \mathbb{N}$ e $K = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e consideremos $\sum_{i=1}^n \oplus E = \underbrace{E \oplus E \oplus E \oplus \dots \oplus E}_{n\text{-vezes}}$ o espaço de Banach, onde $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$, $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i \in \sum_{i=1}^n \oplus E$, definimos $\varphi : C(K, E) \rightarrow \sum_{i=1}^n \oplus E$, pondo $f \mapsto \sum_{i=1}^n f(t_i)$, φ está bem definida e é linear.

O operador φ é sobrejetor, com efeito, seja $y \in \sum_{i=1}^n \oplus E$, logo existe $(y_i)_{i=1}^n \in E$, tal que $y = \sum_{i=1}^n y_i$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, definimos $f_i : K \rightarrow E$ tal que $f_i(t_j) = \delta_j^i y_i$, $1 \leq j \leq n$. Cada f_i está bem definida e é contínua, logo $f_i \in C(K, E)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Seja $f = \sum_{i=1}^n f_i \in C(K, E)$, portanto $\varphi(f) = \varphi(\sum_{i=1}^n f_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(f_i)$, logo $\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_j^i y_i = \sum_{i=1}^n y_i = y$.

O operador φ é uma isometria, pois $\|\varphi(f)\| = \|\sum_{i=1}^n f(t_i)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(t_i)\| = \|f\|$, $\forall f \in C(K, E)$.

A partir de agora identificaremos $C(K, E) \equiv \sum_{i=1}^n \oplus E$, sempre que $|K| = n$.

Definição 5.1. Sejam K um compacto, β a σ -álgebra de Borel de K e $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida em $rca(K)$. Um conjunto $A \in \beta$ diz-se átomo para μ , se $|\mu|(A) > 0$ e para cada $B \in \beta$ com $B \subset A$ $|\mu|(B) = 0$ ou $|\mu|(B) = |\mu|(A)$.

Dizemos ainda que, $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ é puramente não atômica, se μ não tem átomos, e $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ é puramente atômica, se para cada $A \in \beta$ com $|\mu|(A) > 0$, existe $B \subset \beta$ com $B \subset A$ tal que B é átomo para μ .

Definição 5.2. Seja S um espaço topológico, um conjunto $A \subset S$ é perfeito se, A é fechado e é denso em A .

- Um espaço topológico S é disperso se não contém conjunto perfeito não vazio.

Lema 5.3. *Seja K um compacto disperso, então toda medida $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ em $rca(K)$ é puramente não atômica é nula.*

Demonstração. Veja [23]-p. 411.

Suponha que $\mu \neq 0$ e dado que $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ está em $rca(K)$ e é positiva, existe um menor fechado $F \subset K$ tal que $\mu(F) = \mu(K)$; de fato, seja $F(K) = \{F \in \beta : F \text{ é fechado}\}$ e considere $S = \{F \in F(K) : \mu(F) = \mu(K)\}$, $S \neq \emptyset$. Em S definimos uma relação de ordem $F_1 \leq F_2$ se, e somente se, $F_1 \supseteq F_2$. Notemos que se $F_{t_1}, F_{t_2} \in S$, então $F_{t_1} \cap F_{t_2} \in S$, isto segue de

$$\mu(F_{t_1}) + \mu(F_{t_2}) - \mu(F_{t_1} \cap F_{t_2}) \leq \mu(K).$$

Seja $F = \bigcap_{t \in I} F_t$, onde $(F_t)_{t \in I}$ é uma cadeia em S , com I bem ordenado e $t_1 < t_2$ implica $F_{t_1} \supseteq F_{t_2}$; vale $\mu(F) = \inf_{t \in I} \mu(F_t) = \mu(K)$, de fato, $\mu(F) \leq \mu(F_t)$, $\forall t \in I$ e dado $\epsilon > 0$, como μ é regular; existe aberto $G \supseteq F$ tal que $\mu(G \setminus F) < \epsilon$, onde $K = F^c \cup G = (\bigcup_{t \in I} F_t^c) \cup G$. Como K é compacto, existem $t_1, t_2, \dots, t_n$, tal que $K = (\bigcup_{i=1}^n F_{t_i}^c) \cup G$; então $\bigcap_{i=1}^n F_{t_i} \subset G$.

Seja $F_{t_0} = \bigcap_{i=1}^n F_{t_i}$, $F_{t_0} \subset G$ e $\forall t \geq t_0$ $F_t \subset G$, logo $\mu(F_t \setminus F) < \epsilon$; então $\mu(F_t) < \mu(F) + \epsilon$; assim $\mu(F) = \inf_{t \in I} \mu(F_t) = \mu(K)$.

Temos $F \neq \emptyset$ e F é fechado com $\mu(F) = \mu(K)$, então F é perfeito, de fato; caso contrario F não é denso em F , logo existe $p \in F$ e um aberto G tal que $F \cap G = \{p\}$ e como μ é puramente não atômica $\mu(\{p\}) = 0$; logo o fechado $F_1 = F \cap G^c = F \setminus \{p\}$ satisfaz $F_1 \subset F$ e $\mu(F_1) = \mu(F) = \mu(K)$ o que é absurdo, pois F é o menor fechado tal que $\mu(F) = \mu(K)$. Claramente $F \neq \emptyset$ e F é perfeito, logo K não pode ser disperso; absurdo. ■

Lema 5.4. *Se $\mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ está em $rca(K)$ e $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in K$, então μ é puramente não atômica.*

Demonstração. [23] p.411.

Suponha por absurdo que, μ não é puramente não atômica, logo existe $B \in \beta$ que é átomo, isto é; $\mu(B) > 0$ e $\forall A \subset B$, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = \mu(B)$.

Seja $\epsilon = \frac{\mu(B)}{2}$ e pela regularidade de μ , existe um compacto F_1 , $F_1 \subset B$ com $\mu(B \setminus F_1) < \epsilon$, sendo B átomo e F_1 compacto, $\mu(F_1) \neq 0$ e $\mu(B) = \mu(F_1)$ (note que, F_1 é átomo).

Seja $S = \{A \in F(K) : A \subset F_1 \text{ e } \mu(A) = \mu(F_1)\}$, onde $F(K) = \{F \subset K : F \text{ é fechado}\}$ por um argumento análogo a lema 5.3, $F_2 = \bigcap_{A \in S} A \neq \emptyset$ e satisfaz $\mu(F_2) = \mu(B)$ (note que, F_2 é átomo).

Se F_2 tivesse dois pontos distintos x, y , como F_2 é átomo necessariamente temos (por exemplo) $\mu(\{x\}) = 0$, pela regularidade de μ , existe um aberto G contendo x e não y tal que $\mu(G) < \frac{\mu(F_2)}{2}$, logo $F_3 = F_2 \cap G^c$ é um fechado próprio de E e $F_3 \neq \emptyset$, com $\mu(F_3) = \mu(B)$, absurdo, pois $F_3 \subset F_2$, $F_3 \in S$ e $F_2 = \bigcap_{A \in S} A$. Assim, F_2 consiste de apenas um ponto $t_0 \in K$, logo $\mu(\{t_0\}) = 0 = \mu(B)$, contradição. ■

Lema 5.5. *Se $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ está em $rca(K)$ então existe uma única decomposição $\mu = \mu' + \mu''$ onde μ' é puramente atômica e μ'' é puramente não atômica.*

Demonstração. [23] p.411.

Seja $C = \{t \in K : \mu(\{t\}) \neq 0\}$; logo C é enumerável (μ é finita), seja $C = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, definimos $\mu': \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\mu' = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t_n\})\mu_{t_n}$, onde $\mu_{t_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } t_n \in A \\ 0 & \text{se } t_n \notin A \end{cases}$. Vemos que μ' é puramente atômica, pois para cada $A \in \beta$ com $|\mu'| (A) > 0$ e $A \cap C \neq \emptyset$; logo existe um $t_{n_0} \in K$, tal que $\mu(\{t_{n_0}\}) \neq 0$, $\{t_{n_0}\}$ é átomo para μ' .

Colocando $\mu'' = \mu - \mu'$ e observando que $\mu''(\{t\}) = \mu(\{t\}) - \mu'(\{t\}) = 0$, $\forall t \in K$ e pelo lema 5.4; segue-se que μ'' é puramente não atômica. ■

Teorema 5.6. *Se K é um compacto disperso, então cada medida $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ em $rca(K)$ é da forma $\mu(A) = \sum_{t_n \in A} \mu(t_n)$, onde $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ é uma seqüência fixada de pontos de K e $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(\{t_n\})| < +\infty$.*

Demonstração. [23] p.411.

Temos que K é disperso, seja $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma medida regular enumeravelmente aditiva, pelo lema 5.5 existe uma única decomposição $\mu = \mu' + \mu''$, onde μ' é puramente atômica e μ'' é puramente não atômica, logo pelo lema 5.3 $\mu'' = 0$, assim $\mu = \mu'$ e novamente pelo lema 5.5; existe uma seqüência

$(t_n)_n \subset K$ tal que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{t_n\})\mu_{t_n}$; então $\mu(A) = \sum_{t_n \in A} \mu(t_n)$, $\forall A \in \beta$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(t_n)| < +\infty$ e ainda $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(t_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(t_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{t_n\}) < +\infty$. ■

Teorema 5.7. *Seja K um compacto disperso, então $C^*(K, E) \equiv (\sum_{|K|} E^*)_1$*

Demonstração. Como K é um compacto disperso e E um espaço de Banach, pelo teorema 4.2.13 temos que $C^*(K, E) \equiv rcabv(\beta, E^*)$. Seja $\mu \in rcabv(\beta, E^*)$, então $\mu: \beta \rightarrow E^*$ e $|\mu|(K) < +\infty$; observemos que $|\mu|: \beta \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma medida $rca(K)$ e dado que K é disperso, pelo teorema 5.6 temos que; $|\mu|(A) = \sum_{t_n \in A} |\mu|(\{t_n\})$, $\forall A \in \beta$ onde $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ é uma seqüência fixada de pontos e $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(\{t_n\}) < +\infty$; além disso, $\|\mu(\{t_n\})\| = |\mu|(\{t_n\})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e pela parte anterior, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(\{t_n\})\| < +\infty$, isto é, $(\mu(\{t_n\}))_n \in (\sum_{|K|} E^*)_1$; assim podemos definir um operador $\varphi: rcabv(\beta, E^*) \rightarrow (\sum_{|K|} E^*)_1$, pondo $\mu \mapsto (\mu(\{t\}))_{t \in K}$, φ está bem definida, é linear e de

$$\|\varphi(\mu)\|_1 = \sum_{t \in K} \|\mu(\{t\})\| = \sum_{t_n \in K} |\mu|(\{t_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(\{t_n\}) = |\mu|(K) < +\infty,$$

segue que, φ é uma isometria linear contínua sobre a imagem. ■

Teorema 5.8. *Seja K um compacto infinito, então $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$.*

Demonstração. Como K é infinito, K tem um ponto de acumulação p . Seja $x_1 \in K$, $x_1 \neq p$, logo existem abertos disjuntos O_1 e U_1 tal que $x_1 \in O_1$ e $p \in U_1$, tomemos agora, $x_2 \in U_1$, $x_2 \neq p$, por tanto existem abertos disjuntos O_2 e U_2 contidos em U_1 tal que $x_2 \in O_2$ e $p \in U_2$.

Por indução finita, podemos construir uma seqüência $(x_n)_n \in K$ e uma seqüência disjunta de abertos $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in O_n$. Para cada O_n , usando o teorema 1.22 de Urysohn; existe uma função contínua $f_n: K \rightarrow [0, 1]$ tal que $f_n(x_n) = 1$ e $f_n|_{O_n^c} = 0$. Definiremos $T: c_o(\mathbb{N}) \rightarrow C(K)$, pondo $(a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$; não é difícil ver que T está bem definida e é uma isometria sobre a imagem. ■

Lema 5.9. *Sejam E e F espaços de Banach. Se $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow E \oplus F$, então $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$ ou $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow F$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|z\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ onde $z = x + y$. Seja $z_n = x_n + y_n$, $n = 1, 2, \dots$ uma seqüência básica de $E \oplus F$ equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$, logo existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|z_n\| \geq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \geq M\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} : \|y_n\| \geq M\}$, podemos supor sem perda de generalidade que A seja infinito, isto é existe infinitos i tais que $\|x_{n_i}\| \geq M$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} z_{n_i}$ é f.i.c (veja teorema 1.10), segue que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ é f.i.c. e pelo teorema 3.2 temos que $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$. ■

O seguinte teorema dá uma condição necessária e suficiente para que as propriedades de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ sejam K estáveis.

Teorema 5.10. *As propriedades de ser um espaço de Banach de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias de $c_o(\mathbb{N})$ são K estáveis se, e somente se, K é finito.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que K é infinito, pelo teorema 5.8 temos $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$, logo $C(K)$ não tem dimensão finita, não é reflexivo, não é Schur e não é f.s.c.

($\Leftarrow$) Por hipótese existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|K| = n$ e pela primeira observação deste capítulo temos que $C(K, E) = \sum_{i=1}^n \oplus E$. (1)

verificaremos os seguintes fatos:

- a) $C(K)$ tem dimensão finita, é reflexivo, é Schur, é f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente. De fato, isto segue de $C(K) \sim \mathbb{R}^n$.
- b) Se E é de dimensão finita, é reflexivo, é Schur, é f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente, então $C(K, E)$ tem dimensão finita, é reflexivo, é Schur, é f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente. Tudo isto segue imediatamente de (1), teorema 5.7 e o lema 5.9. ■

O teorema abaixo dá uma caracterização, para que as propriedades de espaços de Banach de ser de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente sejam K canceláveis.

Teorema 5.11. *As propriedades de ser um espaço de Banach de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente são K canceláveis se, e somente se, K é infinito.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $|K| = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ logo $C(K) \sim \mathbb{R}^n$, mais por hipótese $C(K)$ não é de dimensão finita, não é reflexivo, não é Schur, não é f.s.c. e contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente. o que é absurdo.

($\Leftarrow$) Suponha que K é infinito e observemos que $C(K) \hookrightarrow C(K, E)$, pois basta escolhermos $x \in E$, $\|x\| = 1$ e definirmos $\varphi: C(K) \rightarrow C(K, E)$, pondo $\varphi(f) = f(\cdot)x$; verificaremos os seguintes fatos:

- a) $C(K)$ não é de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente.

O resultado segue da hipótese e pelo teorema 5.8, $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$.

b) Seja E um espaço de Banach tal que, $C(K, E)$ é de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente; então E é de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não conter cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente.

De fato, dado que $C(K)$ não é de dimensão finita, reflexivo, Schur, f.s.c. e não contém cópias isomorfas de $c_o(\mathbb{N})$ respectivamente e pela última observação, $C(K) \hookrightarrow C(K, E)$; logo $C(K, E)$ também não tem tais propriedades. ■

Capítulo 6

K estabilidade das propriedades Dunford-Pettis, Dieudonné, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 para compactos dispersos

Seguindo os esquemas de [28], [6], [12], no teorema 6.24 mostraremos que as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 são K canceláveis sempre que K seja disperso. Para isso, daremos algumas definições, lemas e teoremas que, por sua vez, nos permitirão mostrar o teorema de Dobrakov (6.18) e que $C(K)$ tem propriedade V (6.17) para todo compacto K .

Definição 6.1. Sejam K um compacto, β a σ -álgebra de K . Seja $B \in \beta$, $\pi(B) = \{G \text{ abertos em } K : B \subset G\}$, com ordem parcial $\leq$ como segue: se $G_1, G_2 \in \pi(B)$ então $G_1 \leq G_2$ se, e somente se, $G_2 \subset G_1$.

Definição 6.2. Seja $B \in \beta$, $\pi_0(B) = \{F \text{ compacto em } K : F \subset B\}$ com ordem parcial $\leq$, dado por $F_1 \leq F_2$ se, e somente se, $F_1 \subset F_2$.

Observação. Seja $S \subset K$ um conjunto compacto. Para cada $G \in \pi(S)$, temos que $K \setminus G$ é fechado, sendo K compacto, ele é normal e pelo teorema 1.22 de Urysohn existe uma função contínua $\varphi_G = \varphi_{G,S} : K \rightarrow [0, 1]$ tais que

$$\varphi_G(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in S \\ 0 & \text{se } t \in K \setminus G. \end{cases}$$

Definição 6.3. Seja K um compacto e β a σ -álgebra de K . Uma função $g: K \rightarrow E$ é β -simples se tem a forma $g = \sum_{i \in I} \chi_{A_i} x_i$, onde I é um conjunto finito, $A_i \in \beta$ e $x_i \in E$ para cada $i \in I$ e

$$\chi_{A_i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A_i \\ 0 & \text{se } t \notin A_i \end{cases}.$$

Definição 6.4. Uma função $f: K \rightarrow E$ é totalmente mensurável com respeito a β σ -álgebra (f é totalmente β -mensurável), se existe uma seqüência de funções $(f_n)_n$ β -simples convergindo uniformemente a f .

Definição 6.5. Seja $B(\beta, E) = \{f: K \rightarrow E: f \text{ é totalmente } \beta\text{-mensurável}\}$.

Teorema 6.6 (Batt-Berg). *Seja $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo e m sua representante.*

- (a) *Para cada $S \subset K$ compacto e para qualquer escolha de funções φ_G , $G \in \pi(S)$, temos que:*
 $\lim_{G \in \pi(S)} T(x \cdot \varphi_G) = m(S) \cdot x$ *na F^* -top. de F^{**} uniformemente para cada $x \in B_E$.*
Para cada $B \in \beta$, $\lim_{G \in \pi(B)} m(G)x = \lim_{S \in \pi_0(B)} m(S)x = m(B)x$ na F^* -top. de F^{**} uniformemente para cada $x \in B_E$;
 (b) *$T: C(K, E) \rightarrow F$ possui uma extensão linear contínua $\bar{T}: B(\beta, E) \rightarrow F^{**}$ dada por*
 $\bar{T}(f) = \int_K f dm$, *com $\|\bar{T}\| = \|T\|$ e $\bar{T}(x \cdot \chi_B) = m(B)x$, $\forall B \in \beta$ e $x \in E$ e*
 $\bar{T}(x \cdot \chi_S) = \lim_{G \in \pi(S)} T(x \cdot \varphi_G)$ *na F^* -top. de F^{**} , para cada compacto $S \subset K$ e uniformemente sobre B_E .*

Demonstração. [28]-p.218.

- (a) Seja $S \subset K$ um compacto. Para cada $G \in \pi(S)$, S e $K \setminus G$ são fechados no espaço normal K e pelo teorema 1.22 existe uma função contínua $\varphi_G = \varphi_{G,S}: K \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi_G(t) = 1, \forall t \in S$ e $\varphi_G(t) = 0, \forall t \in K \setminus G$. Seja $x \in B_E$, logo $x \cdot \varphi_G \in C(K, E)$ e $(T(x \cdot \varphi_G))_{G \in \pi(S)} \subset F \subset F^{**}$. Então $y^*(T(x \cdot \varphi_G)) = \int_K x \varphi_G dm_{y^*} = \int_G x \varphi_G dm_{y^*}$.

Por outro lado, $m(S)xy^* = m_{y^*}(S)x = \int_K x \cdot \chi_S(t) dm_{y^*}$, logo

$$y^*(T(x \cdot \varphi_G)) - m(S)xy^* = \int_S x dm_{y^*} + \int_{G \setminus S} x \varphi_G(t) dm_{y^*} - \int_S x \cdot dm_{y^*} = \int_{G \setminus S} x \cdot \varphi_G(t) dm_{y^*}.$$

Então, $|y^*(T(x \cdot \varphi_G)) - m(S)xy^*| \leq \|x\| \sup_{t \in G \setminus S} |\varphi_G(t)| \|m_{y^*}\|(G \setminus S) \leq \|m_{y^*}\|(G \setminus S), \forall x \in B_E$ e

dado que $m_{y^*} \in rcabv(K, E^*)$ para cada $\varepsilon > 0$ existe um $G_0 \in \pi(S)$ tais que para cada $C \in \beta$, com $C \subset G_0 \setminus S$, temos $\|m_{y^*}\|(C) < \varepsilon$.

Em particular, para cada $G \in \pi(S)$ com $G \subset G_0$, temos $G \setminus S \subset G_0 \setminus S$, assim

$$\|m_{y^*}\|(G \setminus S) < \varepsilon, \forall G \in \pi(S), G \geq G_0. \text{ Logo, } |y^*(T(x \cdot \varphi_G)) - m(S)xy^*| < \varepsilon, \forall x \in B_E.$$

Desta forma, $\lim_{G \in \pi(S)} y^*(T(x \cdot \varphi_G)) = m(S)xy^*$ uniformemente para cada $x \in B_E$, ou

$$\lim_{G \in \pi(S)} T(x \cdot \varphi_G) = m(S)x \text{ na } F^*\text{-top. de } F^{**}, \text{ uniformemente para cada } x \in B_E.$$

Seja $B \in \beta$ fixado, demonstraremos que $\lim_{G \in \pi(B)} m(G)x(y^*) = \lim_{S \in \pi_0(B)} m(S)x(y^*) = m(B)x(y^*)$,

para cada $y^* \in F^*$ uniformemente em $x \in B_E$.

De fato, seja $y^* \in F^*$ e $\varepsilon > 0$. Pela regularidade de m_{y^*} , temos que existe $G_0 \in \pi(B)$ e $S_0 \in \pi_0(B)$ tais que para cada $C \in \beta$ com $C \subset G_0 \setminus S_0$, temos $\|m_{y^*}\|(C) < \varepsilon$.

Em particular, para todo $G \in \pi(B)$ com $G \geq G_0$ e para todo $S \in \pi_0(B)$ com $S \geq S_0$, temos $G \setminus B \subset G_0 \setminus B \subset G_0 \setminus S_0$ e $B \setminus S \subset G_0 \setminus S_0$, logo $\|m_{y^*}\|(G \setminus B) < \varepsilon$ e $\|m_{y^*}\|(B \setminus S) < \varepsilon$.

Por outro lado, $|m(G)x(y^*) - m(B)x(y^*)| = |m_{y^*}(G)x - m_{y^*}(B)x| \leq \|x\| \|m_{y^*}\|(G \setminus B)$ e $|m(S)x(y^*) - m(B)x(y^*)| = |m_{y^*}(S)x - m_{y^*}(B)x| \leq \|x\| \|m_{y^*}\|(B \setminus S)$. Assim

$$|m(G)x(y^*) - m(B)x(y^*)| < \varepsilon, \forall x \in B_E \text{ sempre que } G \geq G_0,$$

$$|m(S)x(y^*) - m(B)x(y^*)| < \varepsilon, \forall x \in B_E \text{ sempre que } S \geq S_0.$$

Portanto $\lim_{G \in \pi(B)} m(G)x = m(B)x = \lim_{S \in \pi_0(B)} m(S)x$ na F^* -top. de F^{**} e uniformemente sobre $x \in B_E$.

- (b) Seja $T: C(K, E) \rightarrow F$ linear contínuo e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ sua representante e consideremos $\bar{T}: B(\beta, E) \rightarrow F^{**}$, pondo $g \mapsto \int_K g dm$; como $\bar{T}|_{C(K, E)} = T$ e $\bar{T}$ é linear e contínuo, segue que $\|T\| \leq \|\bar{T}\|$. Por outro lado $\|\bar{T}(g)\| \leq \|g\| \bar{m}(K)$, porém $\|T\| = \bar{m}(K)$, logo $\|\bar{T}(g)\| \leq \|T\| \|g\|$, $\forall g \in B(\beta, E)$, portanto $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$ e assim $\|T\| = \|\bar{T}\|$.

Seja $B \in \beta$ e $x \in E$, então $x \cdot \chi_B \in B(\beta, E)$ e temos $\bar{T}(x \cdot \chi_B) = \int_K x \cdot \chi_B dm = m(B)x$, logo

$$\bar{T}(x \cdot \chi_B) = m(B)(x), \forall x \in E \text{ e } B \in \beta.$$

Seja $S \subset K$ um compacto qualquer. Logo $\bar{T}(x \cdot \chi_S) = \int_K x \cdot \chi_S dm = m(S)x$ e usando a parte

- (a) temos $m(S)x = \lim_{G \in \pi(S)} T(x \cdot \varphi_G)$ na F^* -top. de F^{**} e uniformemente em B_E , portanto $\bar{T}(x \cdot \chi_S) = \lim_{G \in \pi(S)} T(x \cdot \varphi_G)$ na F^* -top. de F^{**} e uniformemente sobre B_E . ■

Lema 6.7 (Dobrakov). *Uma seqüência limitada $(f_n)_n \subset C(K, E)$ converge fracamente a zero se, e somente se, para cada $t \in K$, $f_n(t)$ converge fracamente a zero em E .*

Demonstração. [6]-p.139 ou [25]-p.26.

- ($\Rightarrow$) Seja $t \in K$ e $x^* \in E^*$, definimos $\delta_t: C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\delta_t(f) = x^*(f(t))$, $\forall f \in C(K, E)$, δ_t está bem definida, $\|\delta_t\| \leq \|x^*\|$, e $\delta_t \in C^*(K, E)$. Como $(f_n)_n \subset C(K, E)$ é fracamente nula, temos que $\delta_t(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ para cada $t \in K$, logo $x^* f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, para todo $x^* \in E^*$ e $t \in K$. Portanto, para cada $t \in K$, $(f_n(t))_n \subset E$ é fracamente nula.

- ($\Leftarrow$) Suponha que $(f_n) \subset C(K, E)$ é limitada e $(f_n(t))_n \subset E$ é fracamente nula para todo $t \in K$.

Demonstraremos que $(f_n) \subset C(K, E)$ é fracamente nula.

Seja $y^* \in C^*(K, E)$ e, pelo teorema 4.2.13 de Singer, existe $m: \beta \rightarrow E^*$ *rcabv*(K, E^*) com $y^*(f) = \int_K f dm$, para todo $f \in C(K, E)$ e $\|y^*\| = |m|(K)$. Pelo teorema 10.11 de Dinculeanu

existe uma única função $h: K \rightarrow E^*$ tais que $\int_K \psi dm = \int_K h(t)\psi(t)d|m|$, $\forall \psi \in \mathcal{L}^1(K, \beta, m)$ e $\|y^*\| = |m|(K) = \int_K \|h(t)\|d|m| < +\infty$. Por outro lado, sabemos que, para cada $t \in K$, $(f_n(t))_n$ é fracamente nula, logo $h(t)f_n(t) \rightarrow 0$ e existe $M > 0$, $\|f_n(t)\| \leq M$, para todo $t \in K$ onde $\|h(t)f_n(t)\| \leq M\|h(t)\|$. Como $\int_K \|h(t)\|d|m| < +\infty$, pelo teorema da convergência dominada temos que $\int_K h(t)f_n(t)d|m| \rightarrow 0$. Cada f_n é m -integrável, pois são contínuas, logo $y^*(f_n) = \int_K f_n dm = \int_K h(t)f_n(t)d|m| \rightarrow 0$, portanto $(f_n)_n \subset C(K, E)$ é fracamente nula. ■

Lema 6.8. *Seja K um compacto disperso. Se $(f_n)_n \subset C(K, E)$ é limitado, então existem um quociente metrizável $\overline{K}$ de K e uma seqüência $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ tais que $\overline{f}_n(\pi(t)) = f_n(t)$ para cada $t \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ é a aplicação quociente canônica.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tais que $\|f_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, definiremos uma relação de equivalência em K . Se $t_1, t_2 \in K$, $t_1 \sim t_2$ se, e somente se, $f_n(t_1) = f_n(t_2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\overline{K} = K/\sim$ e $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ a aplicação canônica que é contínua e sobrejetora, pelo teorema 1.63, segue que $\overline{K}$ é compacto disperso.

Consideremos as $(\overline{f}_n)_n$, $\overline{f}_n: \overline{K} \rightarrow E$, definidas por $\overline{f}_n(\bar{t}) = f_n(t)$, logo $f_n = \overline{f}_n \circ \pi$ e portanto $\overline{f}_n$ são funções contínuas.

Definimos uma métrica d em $\overline{K}$, dada por $d(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(t_1) - f_n(t_2)|}{2^n}$. Mostraremos que $\overline{K}$ com a topologia quociente é equivalente a $(\overline{K}, d)$. Coloquemos $id: \overline{K} \rightarrow (K_1, d)$, id é uma função contínua bijetora, pois se $\bar{t}_\delta$ é um net convergindo para $\bar{t}$ na topologia quociente de $\overline{K}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n(t_\delta) - f_n(t)\|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \|f_n(t_\delta) - f_n(t)\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2M}{2^n}$, da continuidade das $(\overline{f}_n)_n$, segue que $d(\bar{t}_\delta, \bar{t}) \xrightarrow{\delta} 0$, assim $\overline{K}$ é métrico. ■

Teorema 6.9 (Bombal-Cembranos). *Um operador $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto (respectivamente, Dunford-Pettis, Dieudonné, incondicionalmente convergente) se, e somente se, para cada quociente metrizável $\overline{K}$ de K , o operador $\overline{T}: C(\overline{K}, E) \rightarrow F$ definido por $\overline{T}(\overline{f}) = T(\overline{f} \circ \pi)$, onde $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ é a aplicação canônica contínua e sobrejetora, é fracamente compacto (resp., Dunford-Pettis, Dieudonné, incondicionalmente convergente).*

Demonstração. Veja [6]-p.140.

($\Rightarrow$) Consideremos o operador $L: C(\overline{K}, E) \rightarrow C(K, E)$ tal que $L(\overline{f}) = \overline{f} \circ \pi$, $\forall \overline{f} \in C(\overline{K}, E)$, logo L é claramente uma isometria sobre a imagem.

Demonstraremos que:

- (a) Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto, então $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto.
De fato, seja $(\bar{f}_n)_n \subset C(\bar{K}, E)$ uma seqüência limitada, como $L: C(\bar{K}, E) \rightarrow C(K, E)$ é uma isometria linear, segue que $(L(\bar{f}_n))_n \subset C(K, E)$ é limitada e por hipótese $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto. Logo $(T(L(\bar{f}_n)))_n \subset F$ admite subsequência fracamente convergente, porém $T(L(\bar{f}_n)) = T(\bar{f}_n \circ \pi) = \bar{T}(\bar{f}_n)$. Assim $(\bar{T}(\bar{f}_n))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente.
- (b) Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dunford-Pettis, então $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ é Dunford-Pettis.
De fato, seja $(\bar{f}_n)_n \subset C(\bar{K}, E)$ fracamente nula, logo $\bar{y}^*(\bar{f}_n) \rightarrow 0, \forall \bar{y}^* \in C^*(\bar{K}, E)$. Por outro lado, seja $y^* \in C^*(K, E)$, logo $y^* \circ L: C(\bar{K}, E) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear contínua e pela parte anterior $(y^* \circ L)(\bar{f}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, então, $y^*(\bar{f}_n \circ \pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, portanto, $(\bar{f}_n \circ \pi)_n \subset C(K, E)$ é fracamente nula. Como $T: C(K, E) \rightarrow F$ é de Dunford-Pettis temos que $T(\bar{f}_n \circ \pi) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Logo $\bar{T}(\bar{f}_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.
- (c) Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dieudonné, então $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ é Dieudonné.
De fato, seja $(\bar{f}_n)_n \subset C(\bar{K}, E)$ fracamente de Cauchy, logo $(\bar{y}^*(\bar{f}_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy para cada $\bar{y}^* \in C^*(\bar{K}, E)$. Por outro lado, seja $y^* \in C^*(K, E)$ e pela parte inicial temos que $y^* \circ L: C(\bar{K}, E) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear contínua e pela parte anterior $(y^* \circ L(\bar{f}_n))_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, logo $(\bar{f}_n \circ \pi)_n \subset C(K, E)$ é fracamente de Cauchy, sendo $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dieudonné, temos que $(T(\bar{f}_n \circ \pi))_n \subset F$ é fracamente convergente, assim $(\bar{T}(\bar{f}_n))_n \subset F$ é fracamente convergente.
- (d) Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente, então $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ também o é.
De fato, seja $\sum_n \bar{f}_n$ f.i.c. em $C(\bar{K}, E)$ e seja $y^* \in C^*(K, E)$, logo $y^* \circ L \in C^*(\bar{K}, E)$ e por definição de série f.i.c, temos $\sum_{n=1}^{\infty} |(y^* \circ L)(\bar{f}_n)| < +\infty$. Assim $\sum_{n=1}^{\infty} |y^*(\bar{f}_n \circ \pi)| < +\infty$ para cada $y^* \in C^*(K, E)$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n \circ \pi$ é f.i.c. em $C(K, E)$. Como $T: C(K, E) \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente temos que $\sum_{i=1}^{\infty} T(\bar{f}_n \circ \pi)$ converge em norma em F , portanto $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}(\bar{f}_n)$ converge em norma em F .
- ($\Leftarrow$) Suponhamos que para cada quociente metrizável $\bar{K}$ de K o operador $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ definido por $\bar{T}(\bar{f}) = T(\bar{f} \circ \pi)$ onde $\pi: K \rightarrow \bar{K}$ é contínuo e sobrejetor, é fracamente compacto (respectivamente, Dunford-Pettis, Dieudonné, incondicionalmente convergente).

Demonstraremos que: $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto (respectivamente, Dunford-Pettis, Dieudonné, incondicionalmente convergente).

- (a) Se $\bar{T}: C(\bar{K}, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto, então $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto.
De fato, seja $(f_n)_n \subset C(K, E)$ uma seqüência limitada, pelo lema 6.8 existe um quociente metrizável $\bar{K}$ de K , e portanto uma $\pi: K \rightarrow \bar{K}$ contínua e sobrejetora e uma seqüência $(\bar{f}_n)_n \subset$

$C(\overline{K}, E)$ tal que $\overline{f}_n \circ \pi = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ é limitado; como $\overline{T}$ é fracamente compacto, $(\overline{T}(\overline{f}_n))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente, porém $\overline{T}(\overline{f}_n) = T(\overline{f}_n \circ \pi) = T(f_n), \forall n \in \mathbb{N}$, portanto $(T(f_n))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente, claramente, T é fracamente compacto.

- (b) Se $\overline{T}: C(\overline{K}, E) \rightarrow F$ é Dunford-Pettis, então $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dunford-Pettis.

De fato, seja $(f_n)_n \subset C(K, E)$ uma seqüência fracamente nula, logo $(f_n)_n$ é limitada e pelo lema 6.8 existe um quociente metrizável $\overline{K}$ de K e portanto uma $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ contínua e sobrejetora e uma seqüência $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ tal que $\overline{f}_n \circ \pi = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $(f_n)_n \subset C(K, E)$ é fracamente nula, pelo lema 6.7, para cada $t \in K$, segue que $(f_n(t))_n \subset E$ é fracamente nula. Agora seja $\bar{t} \in \overline{K}$, então existe $t \in K$ tal que $\bar{t} = \pi(t)$ e pela parte anterior, $(f_n(t))_n$ é fracamente nula, logo $(\overline{f}_n(\pi(t)))_n \subset E$ é fracamente nula, pois $\overline{f}_n \circ \pi = f_n$, portanto $(\overline{f}_n(\bar{t}))_n \subset E$ é fracamente nula para cada $\bar{t} \in \overline{K}$. Novamente, pelo lema 6.7, segue que $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ é fracamente nula, como $\overline{T}$ é Dunford-Pettis, $(\overline{T}(\overline{f}_n))_n \subset F$ converge em norma, portanto $(T(\overline{f}_n \circ \pi))_n \subset F$ converge a zero em norma, porém, $f_n = \overline{f}_n \circ \pi, \forall n \in \mathbb{N}$, conseqüentemente $(T(f_n))_n \subset F$ converge a zero em norma.

- (c) Se $\overline{T}: C(\overline{K}, E) \rightarrow F$ é Dieudonné, então T é Dieudonné.

De fato, seja $(f_n)_n \subset C(K, E)$ fracamente de Cauchy e pela definição 1.1 para cada par de seqüências crescentes $(p_n)_n \subset \mathbb{N}$ e $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$, temos que $(f_{p_n} - f_{q_n})_n \subset C(K, E)$ é fracamente nula e pelo mesmo raciocínio da parte (b) existem um quociente metrizável $\overline{K}$ de K , $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ contínua e sobrejetora e uma seqüência $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ com $\overline{f}_n \circ \pi = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(\overline{f}_{p_n} - \overline{f}_{q_n})_n \subset C(\overline{K}, E)$ é fracamente nula para cada par de seqüências $(p_n)_n \subset \mathbb{N}$ e $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$. Novamente pela definição 1.1 $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ é fracamente de Cauchy, como $\overline{T}$ é Dieudonné, segue que $(\overline{T}(\overline{f}_n))_n \subset F$ é fracamente convergente, portanto $(T(f_n))_n \subset F$ é fracamente convergente.

- (d) Se $\overline{T}: C(\overline{K}, E) \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente, então T é incondicionalmente convergente.

De fato, seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ f.i.c. em $C(K, E)$, logo $(f_n)_n \subset C(K, E)$ é limitada, como em (c) existem $\overline{K}$ quociente de K , $\pi: K \rightarrow \overline{K}$ contínua e sobrejetora e $(\overline{f}_n)_n \subset C(\overline{K}, E)$ tal que $\overline{f}_n \circ \pi = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$; visto que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ f.i.c. está em $C(K, E)$, existe $c > 0$ tais que $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} f_i \right\| \leq c$ (veja teorema 1.10). Seja $\sigma \subset \mathbb{N}$ finito e $\bar{t} \in \overline{K}$, logo existe $t_1 \in K$ tais que $\bar{t} = \pi(t_1)$, portanto, de acordo com a fórmula acima, $\left\| \sum_{i \in \sigma} \overline{f}_i(\bar{t}) \right\| = \left\| \sum_{i \in \sigma} \overline{f}_i \circ \pi(t_1) \right\| = \left\| \sum_{i \in \sigma} f_i(t_1) \right\| \leq \left\| \sum_{i \in \sigma} f_i \right\| \leq c, \forall \bar{t} \in \overline{K}$ e $\sigma \subset \mathbb{N}$ finito, claramente $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} \overline{f}_i \right\| \leq c$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{f}_i$ é f.i.c em $C(\overline{K}, E)$. Como $\overline{T}$ é

incondicionalmente convergente, temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{T}(\overline{f}_n)$ converge em norma em F , logo $\sum_{i=1}^{\infty} T(f_n)$ converge em norma em F . ■

Definição 6.10. Se $A \in \beta$ e $x \in E$, definimos $\chi_A \cdot x$ como o elemento de $C^{**}(K, E)$ dado por $\chi_A \cdot x: C^*(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\chi_A \cdot x(f^*) = \mu(x, f^*)(A)$, $\forall f^* \in C^*(K, E)$ onde $\mu(x, f^*)$ é a medida (única, pelo teorema 1.29) regular de Borel, tal que

$$f^*(\varphi(\cdot)x) = \int_K \varphi(t) d_{\mu(x, f^*)} = \mu(x, f^*)(\varphi), \forall \varphi \in C(K).$$

Consideremos $S(\beta, E) = \{\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \cdot x_i : x_i \in E \text{ e } (A_i)_{i=1}^n \subset \beta \text{ são dois a dois disjuntos}\}$, pela definição anterior podemos considera-lo como subespaço de $C^{**}(K, E)$.

De fato, definiremos $L_{f^*}: C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L_{f^*}(\varphi) = f^*(\varphi(\cdot)x)$, $\forall \varphi \in C(K)$ sempre que $x \in E$ e $f^* \in C^*(K, E)$. Assim, $L_{f^*} \in C^*(K)$ e pelo teorema 1.29, existe uma medida $\mu(x, f^*) \in rca(K)$ tais que $f^*(\varphi(\cdot)x) = L_{f^*}(\varphi) = \int_K \varphi(t) d_{\mu(x, f^*)}$, $\forall \varphi \in C(K)$.

Assim definimos $\chi_A \cdot x: C^*(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\chi_A \cdot x(f^*) = \mu(x, f^*)(A)$, $\forall f^* \in C^*(K, E)$ onde $f^*(\varphi(\cdot)x) = \int_K \varphi(t) d_{\mu(x, f^*)} = \mu(x, f^*)(\varphi)$, $\forall \varphi \in C(K)$ e para cada $f^* \in C^*(K, E)$.

Lema 6.11 (Brooks-Lewis). *Seja E um espaço de Banach. Então existe uma isometria de $B(\beta, E)$ em $C^{**}(K, E)$.*

Demonstração. [12]-p.142.

Observemos que $S(\beta, E)$ é denso em $B(\beta, E)$ e pela definição 6.10 está imerso em $C^{**}(K, E)$. Resta provarmos que $\|\xi\|_{C^{**}(K, E)} = \|\xi\|_{\infty}$, para todo $\xi \in S(\beta, E)$.

De fato, seja $\xi \in S(\beta, E)$, logo, podemos supor que $\xi = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i$, onde $(A_i)_i \subset \beta$ são disjuntos dois a dois e $\|x_1\| = \|\xi\|_{\infty}$. Seja $t_1 \in A_1$ e definamos uma medida vetorial aditiva $m: \beta \rightarrow E^*$ tais que

$$m(B) = \begin{cases} 0 & , t_1 \notin B \\ x^* & , \text{onde } \|x^*\| = 1 \text{ e } x^*(x_1) = \|x_1\| \end{cases} \text{ , se } t_1 \in B.$$

Então, $m \in rcabv(\beta, E^*)$ que é isométrico a $C^*(K, E)$. De fato, verificamos os seguintes fatos:

(a) m é de variação limitada.

De fato, se $K = \bigcup_{i=1}^n B_i$ e $t_1 \in B_{i_0}$, temos que $\sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| = \|m(B_{i_0})\| = \|x^*\| \leq 1$. Assim

$$\sup_{K = \bigcup_{i=1}^n B_i} \sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| \leq 1, \text{ logo } |m|(K) \leq 1.$$

(b) m é enumeravelmente aditiva.

De fato, seja $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \beta$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

(i) Se $t_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$, temos que $t_1 \in A_{i_0}$ para algum i_0 , logo $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = x^*$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(A_{i_0}) = x^*, \text{ claramente } m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

(ii) Se $t_1 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, temos que $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$ e $t_1 \notin A_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, logo $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = 0$.

$$\text{Portanto } m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

(c) m é regular.

De fato, consideremos a medida real $\delta_1: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\delta_1(B) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_1 \notin B \\ 1 & \text{se } t_1 \in B \end{cases}$.

Mostraremos que:

c.1) $\|m\|(A) = \|\delta_1\|(A)\|x^*\|$, para cada $A \in \beta$, de fato:

i) $\|m\|(A) \leq \|\delta_1\|(A)\|x^*\|$, para cada $A \in \beta$

Seja $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e escalares $|\alpha_i| \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, logo

$$\left\| \sum_{i=1}^n \delta_1(A_i) x^* \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\delta_1(A_i)| \|x^*\| \leq \|x^*\| \|\delta_1\|(A);$$

ii) $\|\delta_1\|(A)\|x^*\| \leq \|m\|(A)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e escalares $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que

$$\|\delta_1\|(A) - \frac{\epsilon}{\|x^*\|} < \left| \sum_{i=1}^n \delta_1(A_i) \alpha_i \right|,$$

$$\text{logo, } \|x^*\| \|\delta_1\|(A) - \epsilon < \left\| \sum_{i=1}^n \delta_1(A_i) x^* \alpha_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n m(A_i) \alpha_i \right\| < \|m\|(A), \forall \epsilon > 0.$$

c.2) $\delta_1: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ é regular

Seja $A \in \beta$ e $\epsilon > 0$, temos os seguintes casos:

i) Se $A = \emptyset$, nada a fazer;

ii) Se $A \neq \emptyset$, existe $q \in A$ e temos:

ii1) Se $t_1 \in A$, seja $F = \{t_1\}$ fechado e $G = K$ aberto tal que $\|\delta_1\|(G \setminus F) = 0 < \epsilon$;

ii2) Se $t_1 \notin A$, seja $F = \{q\}$ fechado, $G = \{t_1\}^c$ aberto tal que $\|\delta_1\|(G \setminus F) = 0 < \epsilon$.

Como $m = \delta_1 \cdot x^*$, de c.1) e c.2) segue que m é regular.

Claramente, temos que $m: \beta \rightarrow E^*$ está em $rcabv(\beta, E^*)$.

Por outro lado, $\xi(m) = \left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \cdot x_i \right) (m) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \cdot x_i(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \mu_{(x_i, m)}(A_i)$ e assim

$\xi(m) = \sum_{i=1}^n \mu_{(x_i, m)}(A_i)$. Seja $i > 1$ e $\epsilon > 0$, dado que cada $\mu_{(x_i, m)}$ é regular, escolhemos uma coleção de compactos $S_i \subset A_i$, tais que $|\mu_{(x_i, m)}(A_i \setminus S_i)| < \frac{\epsilon}{4(n-1)(n+2)}$, $\forall i = 2, 3, \dots, n$ e seja $V_i \supset S_i$

aberto relativamente compacto tal que $t_1 \notin \bigcup_{i=2}^n V_i$ e $|\mu|_{(x_i, m)}(V_i \setminus S_i) < \frac{\varepsilon}{4(n-1)(n+2)}$, $\forall i = 2, 3, \dots, n$.

Pelo teorema 1.22 de Urysohn existe uma função contínua $\varphi_i: K \rightarrow [0, 1]$ tais que $\varphi_i|_{S_i} = 1$ e $\varphi_i|_{V_i^c} = 0$, para cada $i = 2, 3, \dots, n$ e tomamos os compactos G_i , $G_i = \{t \in K : \varphi_i(t) \geq \frac{1}{2}\}$ para cada $i = 2, 3, \dots, n$. Então, $S_i \subset G_i \subset V_i$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$ e

$$|\mu_{(x_i, m)}(G_i) - \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i)| = \left| \int_{V_i} (\chi_{G_i} - \varphi_i) d\mu_{(x_i, m)} \right| \leq 2|\mu|_{(x_i, m)}(V_i \setminus S_i) < \frac{\varepsilon}{2(n-1)(n+2)}.$$

Logo, $|\mu_{(x_i, m)}(G_i) - \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i)| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)(n+2)}$, $\forall i = 2, 3, \dots, n$. Porém, $\mu_{(x_i, m)}(\varphi_i) = m(\varphi_i(\cdot)x_i) = \int_K \varphi_i(\cdot)x_i dm$, $\forall i = 2, \dots, n$, assim $\mu_{(x_i, m)}(\varphi_i) = \int_{V_i} \varphi_i(t)x_i dm$, mas $t_1 \notin \bigcup_{i=2}^n V_i$ e $m(V_i) = 0$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$. Claramente temos que $\mu_{(x_i, m)}(\varphi_i) = 0$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$, logo na última desigualdade, $|\mu_{(x_i, m)}(G_i)| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)(n+2)}$, $\forall i = 2, 3, \dots, n$. Como $A_i = (A_i \setminus S_i) \dot{\cup} S_i \subset (A_i \setminus S_i) \cup G_i$, segue que:

$$|\mu_{(x_i, m)}(A_i)| \leq |\mu_{(x_i, m)}(A_i \setminus S_i)| + |\mu_{(x_i, m)}(G_i)| < \frac{3\varepsilon}{4(n-1)(n+2)}.$$

portanto, $|\mu_{(x_i, m)}(A_i)| < \frac{\varepsilon}{(n-1)(n+2)}$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$.

Finalmente observemos que $\xi(m) = \mu_{(x_1, m)}(A_1) + \sum_{i=2}^n \mu_{(x_i, m)}(A_i)$, logo

$$\begin{aligned} |\xi(m)| &\geq \left| \int_K \chi_{A_1} d\mu_{(x_1, m)} \right| - \sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon}{(n-1)(n+2)} \geq |m(\chi_{A_1} \cdot x_1)| - \frac{\varepsilon}{(n-1)(n+2)} \frac{(n+2)(n-1)}{2} \\ &\geq \left| \int_K \chi_{A_1} x_1 dm \right| - \frac{\varepsilon}{2} > m(A_1)x_1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $|\xi(m)| > x^*(x_1) - \varepsilon > \|x_1\| - \varepsilon > \|\xi\|_\infty - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, claramente $|\xi(m)| \geq \|\xi\|_\infty$ onde $m \in C^*(K, E)$. Portanto $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_{C^{**}(K, E)}$.

Para mostrarmos a desigualdade contrária, seja ξ como acima e escolhamos $m \in rcabv(\beta, E^*)$ arbitrária, com $\|m\| \leq 1$, logo $\xi = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \cdot x_i$ com $(A_i)_i$ conjuntos disjuntos dois a dois, $\|\xi\|_\infty = \|x_1\|$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $\varepsilon > 0$, sendo $\mu_{(x_i, m)}$ regular, podemos escolher conjuntos compactos $S_i \subset A_i$ tais que $|\mu|_{(x_i, m)}(A_i \setminus S_i) < \frac{\varepsilon}{4n(n+1)}$ e abertos relativamente compactos V_i com $S_i \subset A_i \subset V_i$ tais que $|\mu|_{(x_i, m)}(V_i \setminus S_i) < \frac{\varepsilon}{4n(n+1)}$.

Agora, pelo teorema 1.22 de Urysohn existem funções $\varphi_i: K \rightarrow [0, 1]$ contínuas tais que $\varphi_i|_{S_i} = 1$ e $\varphi_i|_{V_i^c} = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ e elegemos os compactos G_i , $G_i = \{t \in K : \varphi_i(t) \geq \frac{1}{2}\}$.

Assim $S_i \subset G_i \subset V_i$ e $|\mu_{(x_i, m)}(G_i) - \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i)| = \left| \int_{V_i \setminus S_i} (\chi_{G_i} - \varphi_i) d\mu_{(x_i, m)} \right| < \frac{\varepsilon}{2n(n+1)}.$

Claramente $|\mu_{(x_i, m)}(G_i) - \mu_{(x_i, m)}(S_i)| \leq |\mu|_{(x_i, m)}(G_i \setminus S_i) \leq |\mu|_{(x_i, m)}(V_i \setminus S_i).$ Logo $|\mu_{(x_i, m)}(G_i) - \mu_{(x_i, m)}(S_i)| < \frac{\varepsilon}{4n(n+1)}.$ Então $|\mu_{(x_i, m)}(A_i) - \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i)| < \frac{\varepsilon}{n(n+1)}, \forall i = 1, 2, \dots, n.$ Portanto $\left| \sum_{i=1}^n (\mu_{(x_i, m)}(A_i) - \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i)) \right| < \varepsilon.$

Por outro lado $\left| \sum_{i=1}^n \mu_{(x_i, m)}(\varphi_i) \right| = \left| m \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot) x_i \right) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot) x_i \right\| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| = \|x_1\| = \|\xi\|_\infty,$ portanto $|\xi(m)| = \left| \sum_{i=1}^n \mu_{(x_i, m)}(A_i) \right| < \varepsilon + \|\xi\|_\infty, \forall \varepsilon > 0,$ logo $|\xi(m)| \leq \|\xi\|_\infty, \forall m \in C^*(K, E), \|m\| \leq 1$ e conseqüentemente $\|\xi\|_{C^{**}(K, E)} \leq \|\xi\|_\infty,$ assim $\|\xi\|_{C^{**}(K, E)} = \|\xi\|_\infty, \forall \xi \in S(\beta, E),$ lembrando que $S(\beta, E)$ é denso em $B(\beta, E),$ segue que $\|\xi\|_{C^{**}(K, E)} = \|\xi\|_\infty, \forall \xi \in B(\beta, E).$ ■

Teorema 6.12 (Bombal-Cembranos). *Sejam K e K_0 dois espaços de Hausdorff compactos, β e β_0 as σ -álgebras de Borel de K e K_0 respectivamente e $\alpha: K \rightarrow K_0$ uma função contínua. Se m é a medida representante de $T: C(K, E) \rightarrow F$ e m_0 é a medida representante de $T_0: C(K_0, E) \rightarrow F$ dado por $T_0(f_0) = T(f_0 \circ \alpha),$ então $m_0(A_0) = m(\alpha^{-1}(A_0)),$ para todo $A_0 \in \beta_0.$ Conseqüentemente, $\widetilde{m}_0(A_0) \leq \widetilde{m}(\alpha^{-1}(A_0)),$ para todo $A_0 \in \beta_0.$*

Demonstração. [6]-p.140.

Seja $A_0 \in \beta_0,$ logo pelo teorema 6.6 temos que $m_0(A_0)x = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} m_0(S_0)x$ na F^* -top. de F^{**} uniformemente em $x \in B_E$ e $m_0(S_0)x = \overline{T}_0(x \cdot \chi_{S_0}) = \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} T_0(x \cdot \varphi_{G_0})$ na F^* -top. de F^{**} uniformemente para $x \in B_E.$

Assim $m_0(A_0)x = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} T_0(x \cdot \varphi_{G_0}) = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} T(x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha)$ na F^* -top. de F^{**} uniformemente em B_E e pelo lema 6.11 para cada $y^* \in F^*$ temos que:

$m_0(A_0)x(y^*) = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} \overline{T}(x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha)(y^*) = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} T^{**}(x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha)(y^*),$ uniformemente em $B_E.$ Logo $m_0(A_0)x(y^*) = \lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \lim_{G_0 \in \pi(S_0)} (x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha)(T^*(y^*)),$ uniformemente em $B_E.$

Por outro lado, $\lim_{G_0 \in \pi(S_0)} (x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha) = \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x$ na $C^*(K, E)$ -top. de $C^{**}(K, E).$ De fato, seja $m \in C^*(K, E),$ então

$$\begin{aligned} \left| \int_K x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha dm - \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} x(m) \right| &= \left| \int_K (\varphi_{G_0}(\alpha(t)) - \chi_{\alpha^{-1}(S_0)}(t)) dm_x \right| = \\ &= \left| \int_K (\varphi_{\alpha^{-1}(G_0)}(t) - \chi_{\alpha^{-1}(S_0)}(t)) dm_x \right| = \left| \int_{\alpha^{-1}(G_0) \setminus \alpha^{-1}(S_0)} \varphi_{\alpha^{-1}(G_0)}(t) dm_x \right| \\ &\leq \|m_x\|(\alpha^{-1}(G_0) \setminus \alpha^{-1}(S_0)) \leq \|x\| \|m\|(\alpha^{-1}(G_0) \setminus \alpha^{-1}(S_0)), \end{aligned}$$

$$\log \left| \int_K x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha dm - \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x(m) \right| \leq \|m\|(\alpha^{-1}(G_0) \setminus \alpha^{-1}(S_0)), \forall x \in B_E.$$

Para cada $G_0 \in \pi(S_0)$ pela regularidade de m temos que $\lim_{G_0 \in \pi(S_0)} (x \cdot \varphi_{G_0} \circ \alpha) = \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x$ na $C^*(K, E)$ -top. de $C^{**}(K, E)$ uniformemente em $x \in B_E$. Logo pela parte anterior temos $m_0(A_0)x(y^*) = \lim_{S_0 \in \pi(A_0)} (\chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x)(T^*(y^*))$ uniformemente em B_E .

Analogamente, $\lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x = \chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x$ na $C^*(K, E)$ -top. de $C^{**}(K, E)$ uniformemente em B_E . De fato, seja $m \in C^*(K, E)$, logo se $S_0 \in \pi_0(A_0)$ e $S_0 \subset A_0$, então $|\chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x(m) - \chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x(m)| = |m(\alpha^{-1}(S_0))x - m(\alpha^{-1}(A_0))x| \leq \|m\|(\alpha^{-1}(A_0) \setminus \alpha^{-1}(S_0)), \forall x \in B_E$ e pela regularidade de m segue que $\lim_{S_0 \in \pi_0(A_0)} \chi_{\alpha^{-1}(S_0)} \cdot x = \chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x$ na $C^*(K, E)$ -top. de $C^{**}(K, E)$, uniformemente em B_E .

Assim, pela última parte, temos que $m_0(A_0)(x)(y^*) = \chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x(T^*(y^*)) = T^{**}(\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x)(y^*)$ para cada $y^* \in F^*$ e $x \in B_E$. Logo $m_0(A_0)(x) = T^{**}(\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x), \forall x \in B_E$.

Resta provar que, $T^{**}(\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x) = m(\alpha^{-1}(A_0))(x)$. Para isto basta provarmos que: $\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x(T^*(y^*)) = m(\alpha^{-1}(A_0))xy^*, \forall y^* \in F^*$. De fato, pelo lema 6.11 $B(\beta, E) \hookrightarrow C^{**}(K, E)$. Seja $y^* \in F^*$, logo $\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x(T^*(y^*)) = \mu(x, T^*(y^*))(\alpha^{-1}(A_0))$ (veja definição 6.10) e

$$y^* \left(\int_K \varphi(t) x dm \right) = y^*(T(\varphi(\cdot)x)) = T^*y^*(\varphi(\cdot)x) = \int_K \varphi(t) d_{\mu(x, T^*(y^*))}.$$

logo $\int_K \varphi(t) x dm(\cdot)y^* = \int_K \varphi(t) d_{\mu(x, T^*(y^*))}, \forall \varphi \in C(K), \forall y^* \in F^*$. Consequentemente $m(\cdot)x(y^*) = \mu(x, T^*(y^*))$, para cada $y^* \in F^*$ e $m(\alpha^{-1}(A_0))x(y^*) = \mu(x, T^*(y^*))(\alpha^{-1}(A_0)), \forall y^* \in F^*$; disto junto com a primeira parte, temos $\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x(T^*(y^*)) = m(\alpha^{-1}(A_0))x(y^*), \forall y^*$, claramente

$T^{**}(\chi_{\alpha^{-1}(A_0)} \cdot x) = m(\alpha^{-1}(A_0))x$, portanto $m_0(A_0)(x) = m(\alpha^{-1}(A_0))(x), \forall x \in B_E$ e $A_0 \in \beta_0$. Desta forma $m_0(A_0) = m(\alpha^{-1}(A_0)), \forall A_0 \in \beta_0$.

Finalmente,

$$\widetilde{m}_0(A_0) = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ A_0 = \bigcup_{i=1}^n A_i^0}} \left\| \sum_{i=1}^n m_0(A_i^0)x_i \right\| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ A_0 = \bigcup_{i=1}^n A_i^0}} \left\| \sum_{i=1}^n m(\alpha^{-1}(A_i^0))x_i \right\| \leq \widetilde{m}(\alpha^{-1}(A_0)),$$

assim $\widetilde{m}_0(A_0) \leq \widetilde{m}(\alpha^{-1}(A_0))$ para todo $A_0 \in \beta_0$. ■

Agora necessitamos algumas definições envolvendo medidas, o objetivo é demonstrar o lema 6.16.

Definições 6.13:

a) Sejam Ω um espaço topológico, $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre Ω e E espaço normado. Uma medida vetorial $m: \mathcal{A} \rightarrow E$ é fortemente aditiva, se para toda seqüência $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ de conjuntos, disjuntos dois a

dois, a série $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ converge em E .

b) Uma família $M = \{m_i : \mathcal{A} \rightarrow E : i \in I\}$ de medidas vetoriais é uniformemente fortemente aditiva, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_i(A_m) \right\| = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos dois a dois.

c) Uma família $M = \{m_i : \mathcal{A} \rightarrow E : i \in I\}$ de medidas vetoriais é uniformemente enumeravelmente aditiva (σ -aditiva), se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_i(A_m) \right\| = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ de conjuntos, disjuntos dois a dois, com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Observação: se $\mathcal{A}$ é σ -álgebra, então as definições de uniformemente fortemente aditiva e uniformemente σ -aditiva, para uma família de medidas M , coincidem.

d) Sejam Ω espaço topológico, E espaço normado e $\mathcal{A}$ uma álgebra de Ω , $m: \mathcal{A} \rightarrow E$ medida vetorial e $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ medida real. Dizemos que m é μ -contínua ($m \ll \mu$) se $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} m(A) = 0$.

e) Uma família de medidas vetoriais $\{m_i: \mathcal{A} \rightarrow E : i \in I\}$ é uniformemente limitada, se $\sup_{i \in I} \|m_i\|(\Omega) < +\infty$.

f) Sejam E espaço de Banach, K um compacto, β σ -álgebra de K e $m: \beta \rightarrow E$ uma medida vetorial. m é fortemente limitada se $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$, $\forall (A_n)_n \subset \beta$ decrescente com $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$ ($A_n \searrow \phi$).

Lema 6.14. *Seja $m: \mathcal{A} \rightarrow E$ uma medida vetorial, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Ω .*

- (a) Para todo $A \in \mathcal{A}$, $\|m\|(A) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m|(A)$;
- (b) $\sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| \leq \|m\|(A) \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|$;
- (c) $\|m\|(A) = 0 \Leftrightarrow m(B) = 0$, para todo $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A \Leftrightarrow |m|(A) = 0$.

Demonstração. [4]-p.3.

- (a) Seja $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e sejam $\alpha_i \in \mathbb{R}$, com $|\alpha_i| \leq 1$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| x^* \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i) \right) \right| \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^n |\alpha_i x^*(m(A_i))| \leq$$

$$\leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^n |x^* \circ m(A_i)| \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m|(A).$$

Claramente, $\|m\|(A) \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m|(A)$. Por outro lado, seja $\|x^*\| \leq 1$ e $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$

onde $\theta_i = sg(x^* \circ m(A_i))$, logo $\sum_{i=1}^n |x^* \circ m(A_i)| = \sum_{i=1}^n \theta_i x^* \circ m(A_i) = x^* \left(\sum_{i=1}^n \theta_i m(A_i) \right)$, então

$$\sum_{i=1}^n |x^* \circ m(A_i)| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i m(A_i) \right\| \leq \|m\|(A),$$
 portanto $|x^* \circ m|(A) \leq \|m\|(A)$, $\forall \|x^*\| \leq 1$.
 Conseqüentemente $\sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m|(A) \leq \|m\|(A)$.

(b) Seja $A \in \mathcal{A}$, logo $\|m(A)\| \leq \|m\|(A) \leq |m|(A)$, então $\sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| \leq \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m\|(B) \leq \|m\|(A)$.

Como E é um espaço vetorial real, sejam $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $x^* \in E^*$,

$\pi^+ = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ com } x^* \circ m(A_i) \geq 0\}$ e $\pi^- = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ com } x^* \circ m(A_i) < 0\}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x^* \circ m(A_i)| &= \sum_{i \in \pi^+} x^* \circ m(A_i) - \sum_{i \in \pi^-} x^* \circ m(A_i) = x^* \left(\sum_{i \in \pi^+} m(A_i) - \sum_{i \in \pi^-} m(A_i) \right) \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i \in \pi^+} m(A_i) \right\| + \left\| \sum_{i \in \pi^-} m(A_i) \right\| \leq \|m(\bigcup_{i \in \pi^+} A_i)\| + \|m(\bigcup_{i \in \pi^-} A_i)\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| + \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|. \end{aligned}$$

Claramente $\sum_{i=1}^n |x^* \circ m(A_i)| \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|$, assim $|x^* \circ m|(A) \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|$, $\forall \|x^*\| \leq 1$,

logo $\sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m|(A) \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|$ e pela parte a) $\|m\|(A) \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\|$.

(c) (i) $\|m\|(A) = 0$ se, e somente se, $m(B) = 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$.

($\Rightarrow$) Se $\|m\|(A) = 0$ pela parte (b) temos $\sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| = 0$, logo $\|m(B)\| = 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$, claramente $m(B) = 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$.

($\Leftarrow$) Se para cada $B \in \mathcal{A}$ com $B \subset A$ e $m(B) = 0$, temos $\|m(B)\| = 0$, então $\sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| = 0$ e por (b) $\|m\|(A) = 0$.

(ii) $m(B) = 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$ se, e somente se, $|m|(A) = 0$.

($\Rightarrow$) Temos que $|m|(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \sum_{i=1}^n \|m(A_i)\|$; dado que $m(A_i) = 0$ para cada $A_i \subset A$,

temos que $|m|(A) = 0$.

($\Leftarrow$) Pela parte (b) temos $\sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \|m(B)\| \leq \|m\|(A) \leq |m|(A) = 0$, logo $m(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$. ■

Lema 6.15. Sejam E espaço de Banach, $\mathcal{A}$ uma álgebra de Ω e $\{m_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow E : \alpha \in I\}$ uma família de medidas vetoriais σ -aditivas. São equivalentes:

- (a) $\{m_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow E : \alpha \in I\}$ é uniformemente fortemente aditiva;
- (b) $\{x^* \circ m_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \in I, \|x^*\| \leq 1, x^* \in E^*\}$ é uniformemente fortemente aditiva;
- (c) se $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ são disjuntos dois a dois, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha(A_n)\| = 0$;
- (d) se $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ são disjuntos dois a dois, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$;
- (e) $\{|x^* \circ m_\alpha| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \in I, x^* \in E^*, \|x^*\| \leq 1\}$ é uniformemente fortemente aditiva;
- (f) se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é decrescente tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$;

(g) se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é decrescente tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_{\alpha}(A_n)\| = 0$.

Demonstração. [4]-p.11.

(a) $\Rightarrow$ (b) Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_i(A_m) \right\| = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois. Consideremos $\{x^* \circ m_{\alpha} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \in I, \|x^*\| \leq 1\}$. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ disjuntos, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ tem-se $\left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_{\alpha}(A_m) \right\| \leq \varepsilon$, $\forall \alpha \in I$. Logo

$$\left\| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right\| \leq \|x^*\| \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_{\alpha}(A_m) \right\| \leq \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_{\alpha}(A_m) \right\|, x^* \in B_{E^*}.$$

Assim $\left\| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right\| \leq \varepsilon$, $\forall \alpha \in I$ e $x^* \in B_{E^*}$, claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right\| =$

0 e portanto $\{x^* \circ m_{\alpha} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \in I, \|x^*\| \leq 1\}$ é fortemente uniformemente aditivo.

(b) $\Rightarrow$ (c) Pela parte (b), para todo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois e $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ tem-se $\left| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right| < \varepsilon$, $\forall \alpha \in I$ e $\|x^*\| \leq 1$. Em particular para $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} |x^* \circ m_{\alpha}(A_n)| &= \left| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{m=n}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right\| + \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} x^* \circ m_{\alpha}(A_m) \right\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $|x^* \circ m_{\alpha}(A_n)| < 2\varepsilon$, $\forall \alpha \in I$ e $\|x^*\| \leq 1$, portanto $\|m_{\alpha}(A_n)\| < 2\varepsilon$, $\forall \alpha \in I$ e $\forall n \geq n_0$.

Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_{\alpha}(A_n)\| = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Suponhamos que (d) não é verdade, logo existirá $\delta > 0$ e uma seqüência $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois e uma subsequência $(m_{\alpha_n})_n$ de (m_{α}) tal que $\|m_{\alpha_n}\|(A_n) > 4\delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, pelo lema 6.14 temos $\|m_{\alpha_n}\|(A_n) \leq 2 \sup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subset A_n}} \|m_{\alpha_n}(B)\|$.

Assim existe $B_n \subset A_n$ tal que $\|m_{\alpha_n}(B_n)\| > \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo existe $(B_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois tal que $\sup_{\alpha \in I} \|m_{\alpha}(B_n)\| > \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$ o que contradiz (c).

(d) $\Rightarrow$ (e) Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_{\alpha}|(A_m) = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois.

Suponha que não é verdade a afirmação acima, logo existe $\delta > 0$ e $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos tal que $\sum_{m=n}^{\infty} |x_n^* \circ m_{\alpha_n}|(A_m) > 2\delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\|x_n^*\| \leq 1$.

Logo para $m_1 > 1$ temos $\sum_{m=m_1+1}^{\infty} |x_{m_1+1}^* \circ m_{\alpha_{m_1+1}}|(A_m) > 2\delta$, então existe $m_2 > m_1$ tal que $\sum_{m=m_1+1}^{m_2} |x_{m_1+1}^* \circ m_{\alpha_{m_1+1}}|(A_m) > \delta$. Para $m_2 > m_1$ temos $\sum_{m=m_2+1}^{\infty} |x_{m_2+1}^* \circ m_{\alpha_{m_2+1}}|(A_m) > 2\delta$, então

existe $m_3 > m_2$ tal que $\sum_{m=m_2+1}^{m_3} |x_{m_2+1}^* \circ m_{\alpha_{m_2+1}}|(A_m) > \delta$. Desta forma podemos construir uma sequência crescente de naturais $(m_j) \subset \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=m_j+1}^{m_{j+1}} |x_{m_j+1}^* \circ m_{\alpha_{m_j+1}}|(A_m) > \delta$.

Seja $H_j = \bigcup_{m=m_j+1}^{m_{j+1}} A_m$, $\forall j \in \mathbb{N}$, logo essa família de conjuntos em $\mathcal{A}$ é dois a dois disjuntos e então temos $|x_{m_j+1}^* \circ m_{\alpha_{m_j+1}}|(H_j) > \delta$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Claramente $\sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| < 1}} |x^* \circ m_\alpha|(H_j) > \delta$, $\forall j$. Porém pelo lema 6.14 (a) $\|m_\alpha\|(A) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m_\alpha|(A)$. Assim $\sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(H_j) > \delta$, $\forall j \in \mathbb{N}$ o que contradiz a parte (d).

(e) $\Rightarrow$ (a) Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(A_m) = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois. Seja $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Pela parte (e) dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ tem-se $\sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(A_m) < \varepsilon$, $\forall \alpha \in I$ e $\|x^*\| \leq 1$.

Observemos que $\left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_\alpha(A_m) \right\| \leq \sum_{m=n}^{\infty} \|m_\alpha(A_m)\| \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(A_m)$. Assim $\sup_{\alpha \in I} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_\alpha(A_m) \right\| \leq \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(A_m) < \varepsilon$. Claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} m_\alpha(A_m) \right\| = 0$. Logo $\{m_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow E : \alpha \in I\}$ é uniformemente fortemente aditivo.

Com isto já provamos (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e).

(e) $\Rightarrow$ (f) Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ decrescente tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

De fato, seja $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ decrescente com $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo a família $(B_n)_n \subset \mathcal{A}$ é disjunta e $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m \in \mathcal{A}$. Por (e) temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(B_m) = 0$ e $|x^* \circ m_\alpha|(A_n) = \sum_{m=n}^{\infty} |x^* \circ m_\alpha|(B_m)$ (pois, converge e $|x^* \circ m_\alpha|$ é σ -aditiva).

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in I \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^* \circ m_\alpha|(A_n) = 0$ e pelo lema 6.14 (a) $\|m_\alpha\|(A_n) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \circ m_\alpha|$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$ (as m_α são todas σ -aditivas).

(f) $\Rightarrow$ (g) Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$, $\forall A_n \searrow \emptyset$.

Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} m_\alpha(A_n) = 0$, $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ decrescente e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

De fato, se $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ é decrescente e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\|m_\alpha(A_n)\| \leq \|m_\alpha\|(A_n)$ e pela parte (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha(A_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|(A_n) = 0$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha(A_n)\| = 0$.

(g) $\Rightarrow$ (a) Seja $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, coloquemos $B_n = A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ assim $B_n \searrow \emptyset$ e por (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha(B_n)\| = 0$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \left\| m_\alpha(A) - \sum_{i=1}^n m_\alpha(A_i) \right\| = 0$ e portanto $m_\alpha(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha(A_i)$ uniformemente em $\alpha \in I$, conseqüentemente $\{m_\alpha: \mathcal{A} \rightarrow E: \alpha \in I\}$ é uniformemente σ -aditiva (uniformemente fortemente aditiva). ■

Lema 6.16. *Sejam K um compacto, β σ -álgebra de K e $M = \{m: \beta \rightarrow \mathbb{R}: m \text{ é regular e } \sigma\text{-aditiva}\}$ uma família de medidas. São equivalentes:*

- (a) *Para cada seqüência $(G_n)_n \subset \beta$ disjunta de abertos temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} m(G_n) = 0$;*
- (b) *Para cada seqüência $(G_n)_n \subset \beta$ disjunta de abertos temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} |m|(G_n) = 0$;*
- (c) *Dado $G \in \beta$ aberto e $\varepsilon > 0$, existe um compacto $F \subset G$ tal que $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus F) \leq \varepsilon$;*
- (d) *Dado $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$, existe um compacto $F \subset A$ tal que $\sup_{m \in M} |m|(A \setminus F) \leq \varepsilon$;*
- (e) *Dado $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$, existe um aberto $G \supset A$ e um compacto $F \subset A$ tal que $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus F) \leq \varepsilon$;*
- (f) *$M = \{m: \beta \rightarrow \mathbb{R} / m \text{ é regular}\}$ é uniformemente σ -aditiva.*

Demonstração. [4]-p.43.

(a) $\Rightarrow$ (b) Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} |m|(G_n) = 0$ para cada seqüência $(G_n)_n \in \beta$ de abertos disjunta dois a dois.

De fato, suponhamos que existem uma seqüência disjunta de abertos $(G_n)_n \in \beta$, $a > 0$ e uma seqüência $(m_n)_n \subset M$ tais que $|m_n|(G_n) > 8a$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo lema 6.14 (b), temos que $8a < |m_n|(G_n) \leq 2 \sup_{\substack{B \subset G_n \\ B \in \beta}} |m_n(B)|$, logo existe $A_n \in \beta$ com $A_n \subset G_n$ tal que $|m_n(A_n)| > 2a, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $A_n \in \beta$, pela regularidade de m_n , existem $F \subset A_n$ fechado e $G \supset A_n$ aberto tal que $|m_n|(G \setminus F) < a$. Pondo $O_n = G \cap G_n$, temos $A_n \subset O_n \subset G_n$ e $|m_n|(O_n \setminus A_n) < a$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $|m_n(O_n)| = |m_n(A_n) + m_n(O_n \setminus A_n)| \geq |m_n(A_n)| - |m_n(O_n \setminus A_n)|$ e portanto $|m_n(O_n)| > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, existe uma seqüência $(O_n)_n \in \beta$ disjunta de abertos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |m_n(O_n)| > a$, o que contradiz (a).

(b) $\Rightarrow$ (c) Demonstraremos que dado um aberto $G \in \beta$ e $\varepsilon > 0$, existe um compacto $F \subset G$ tais que $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus F) < \varepsilon$.

De fato, suponhamos que existe um aberto $G \subset K$ e $\varepsilon > 0$ tal que para cada compacto $F \subset G$ existe $m \in M$ com $|m|(G \setminus F) > \varepsilon$. Em particular para $F_0 = \emptyset$ existe $m_1 \in M$ tais que $|m_1|(G) > \varepsilon$; dado que m_1 é regular, existe um subconjunto compacto $F_1 \subset G$ tais que $|m_1|(F_1) > \varepsilon$. Mas como K é normal, existe um aberto $O_1 \in \beta$ tais que $F_1 \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset G$, além disso $|m_1|(O_1) \geq |m_1|(F_1) > \varepsilon$.

Porém $\overline{O_1} \subset G$ é um compacto, logo existe $m_2 \in M$ tal que $|m_2|(G \setminus \overline{O_1}) > \varepsilon$ e, pela regularidade de m_2 , existe um compacto $F_1^* \subset G \setminus \overline{O_1}$ tal que $|m_2|(F_1^*) > \varepsilon$. Fazendo $F_2 = F_1^* \cup \overline{O_1}$, F_2 é compacto e $\overline{O_1} \subset F_2 \subset G$ e $|m_2|(F_2 \setminus \overline{O_1}) = |m_2|(F_1^*) > \varepsilon$. Novamente pela normalidade de K , existe um aberto $O_2 \in \beta$, $O_1 \subset \overline{O_1} \subset F_2 \subset O_2 \subset \overline{O_2} \subset G$, tal que $|m_2|(O_2 \setminus \overline{O_1}) \geq |m_2|(F_2 \setminus \overline{O_1}) > \varepsilon$.

Agora $\overline{O_2}$ é compacto e por hipótese, existe uma $m_3 \in M$ tais que $|m_3|(G \setminus \overline{O_2}) > \varepsilon$. Pela regularidade de m_3 existe um compacto F_2^* , $F_2^* \subset G \setminus \overline{O_2}$ tal que $|m_3|(F_2^*) > \varepsilon$. Pondo $F_3 = F_2^* \cup \overline{O_2}$ temos $\overline{O_2} \subset F_3 \subset G$ e $|m_3|(F_3 \setminus \overline{O_2}) = |m_3|(F_2^*) > \varepsilon$. Novamente pela normalidade de K existe um aberto $O_3 \in \beta$ tal que $O_2 \subset \overline{O_2} \subset F_3 \subset O_3 \subset \overline{O_3} \subset G$, portanto $|m_3|(O_3 \setminus \overline{O_2}) \geq |m_3|(F_3 \setminus \overline{O_2}) > \varepsilon$.

Como $\overline{O_3}$ é compacto, por hipótese, existe $m_4 \in M$ tais que $|m_4|(G \setminus \overline{O_3}) > \varepsilon$. Procedendo da mesma forma, obtemos uma seqüência crescente $(O_n)_n \subset \beta$ de abertos e uma seqüência de medidas $(m_n)_n \in M$ tais que:

- (i) $G \supset \overline{O_{n+1}} \supset O_{n+1} \supset \overline{O_n} \supset O_n$;
- (ii) $|m_{n+1}|(O_{n+1} \setminus \overline{O_n}) > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pondo $G_{n+1} = O_{n+1} \setminus \overline{O_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $(G_n)_{n \geq 2} \in \beta$ é uma seqüência de abertos disjuntos dois a dois com $|m_{n+1}|(G_{n+1}) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz (b).

(c) $\Rightarrow$ (d) Demonstraremos que $\forall A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$ existe $F \subset A$ compacto tal que $\sup_{m \in M} |m|(A \setminus F) \leq \varepsilon$.

De fato, lembremos a seguinte definição: um conjunto $A \in \beta$ é M -mensurável se para cada $\varepsilon > 0$ existe um compacto F com $A \cap F$ compacto e $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F) \leq \varepsilon$.

É claro que cada compacto F é M -mensurável, pois dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto K (o espaço todo) tais que $K \cap F = F$ é compacto e $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus K) = 0 < \varepsilon$.

Por hipótese cada aberto $G \in \beta$ é M -mensurável, pois dado $\varepsilon > 0$, por (c) existe um compacto $F_1 \in \beta$ com $F_1 \subset G$ e $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus F_1) \leq \varepsilon$. Seja $F = F_1 \cup (K \setminus G)$, logo $F \in \beta$ é compacto e $F \cap G = F_1$ também é compacto, onde $K \setminus F \subset G \setminus F_1$. Assim $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F) \leq \sup_{m \in M} |m|(G \setminus F_1) \leq \varepsilon$. Portanto todo aberto é M -mensurável.

Provaremos agora que os conjuntos M -mensuráveis formam uma σ -álgebra.

(i) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de conjuntos M -mensuráveis, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é M -mensurável.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existem compactos $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ e $A_n \cap F_n$

é compacto $\forall n \in \mathbb{N}$. O conjunto $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap F_n)$ é compacto e

$\sup_{m \in M} |m|\left(K \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$, logo $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é M -mensurável.

(ii) Se A é M -mensurável, então $K \setminus A$ é M -mensurável.

De fato, se A é M -mensurável, dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto F_1 com $F_1 \cap A$ compacto tal que $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Porém $K \setminus (A \cap F_1)$ é aberto e pelo item anterior é M -mensurável,

logo existe um compacto F_2 , com $F_2 \cap (K \setminus (A \cap F_1))$ compacto tais que $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, portanto $F_1 \cap F_2 \cap (K \setminus (A \cap F_1)) = (F_1 \cap F_2) \cap (K \setminus A)$ é compacto e

$\sup_{m \in M} |m|(K \setminus (F_1 \cap F_2)) \leq \sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_1) + \sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_2) \leq \varepsilon$, assim existe um compacto $F = F_1 \cap F_2$ tais que $F \cap (K \setminus A)$ é compacto e $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F) \leq \varepsilon$, conseqüentemente $K \setminus A$ é M -mensurável.

Desta forma, a família dos conjuntos M -mensuráveis é uma σ -álgebra que contém os compactos de K , logo coincide com σ -álgebra de Borel β . Se, agora, $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$, como A é M -mensurável existe um compacto F_1 tal que $F = A \cap F_1$ é compacto e $\sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_1) \leq \varepsilon$, porém $F \subset F_1$, logo $\sup_{m \in M} |m|(A \setminus F) \leq \sup_{m \in M} |m|(K \setminus F_1) \leq \varepsilon$ e portanto vale (d).

(d) $\Rightarrow$ (e) Demonstraremos que $\forall A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$ existe $G \supset A$ aberto e $F \subset A$ compacto com $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus F) \leq \varepsilon$.

De fato, seja $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$ por (d) existe um compacto F , com $F \subset A$ tal que $\sup_{m \in M} |m|(A \setminus F) \leq \varepsilon$.

Por outro lado, $K \setminus A \in \beta$ e por (d) existe um compacto $F_1 \subset K \setminus A$ tal que $\sup_{m \in M} |m|((K \setminus A) \setminus F_1) \leq \varepsilon$. Seja $G = K \setminus F_1$ aberto com $A \subset G$ e $(K \setminus A) \setminus F_1 = G \setminus A$, logo $\sup_{m \in M} |m|(G \setminus A) \leq \varepsilon$, o que prova (e).

Claramente (e) $\Rightarrow$ (d). ■

(d) $\Rightarrow$ (f) Demonstraremos que $M = \{m: \beta \rightarrow \mathbb{R} : m \text{ é regular } \sigma\text{-aditiva}\}$ é uniformemente σ -aditiva, pelo lema 6.15 é equivalente provarmos que se $(A_n)_n \subset \beta$ é decrescente e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} |m|(A_n) = 0$.

De fato, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \beta$ uma seqüência decrescente com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, pela parte (d) existem compactos $F_n \subset A_n$ com $\sup_{m \in M} |m|(A_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (sendo K compacto), existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\forall s \geq r$, $\bigcap_{n=1}^s F_n = \emptyset$.

Portanto se $s \geq r$ temos $|m|(A_s) = |m|\left(A_s \setminus \bigcap_{n=1}^s F_n\right) = |m|\left(\bigcup_{n=1}^s (A_s \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n=1}^s |m|(A_s \setminus F_n)$.

Porém $A_s \subset A_n$, $\forall n = 1, 2, \dots, s$, logo $|m|(A_s) \leq \sum_{n=1}^s |m|(A_n \setminus F_n)$, $\forall s \geq r$ e $m \in M$, portanto $\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} |m|(A_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m \in M} |m|(A_n \setminus F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\forall \varepsilon > 0$, conseqüentemente $\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{m \in M} |m|(A_s) \leq \varepsilon$, isto prova (f).

(f) $\Rightarrow$ (a) Pelo lema 6.15 segue o resultado. ■

Com os resultados mostrados até agora podemos provar dois resultados importantes: a propriedade de V de Pelczynski para $C(K)$ e o teorema de Dobrakov.

Teorema 6.17 (Pelczynski). *Seja K um compacto, então $C(K)$ tem a propriedade V .*

Demonstração. Veja [4]-p.56.

Demonstraremos que $\mathcal{I}(C(K), F) \subset \mathcal{W}(C(K), F)$, para todo espaço de Banach F .

De fato, suponhamos que existe um espaço de Banach F e um operador $T \in \mathcal{I}(C(K), F)$ tal que $T: C(K) \rightarrow F$ não é fracamente compacto e seja m sua medida representante, pelo teorema 4.3.15 temos que $\{|y^* \circ m| : \|y^*\| \leq 1, y^* \in F^*\}$ não é uniformemente enumeravelmente aditiva. Como as medidas $|y^* \circ m|$ são regulares, pelo lema 6.16 existem $\varepsilon > 0$, $(G_n)_n \subset \beta$ abertos disjuntos e $(y_n^*)_n \subset B_{F^*}$ tal que $|y_n^* \circ m|(G_n) > \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema de Rosenthal existe uma subsequência de (G_n) , que ainda denotaremos por $(G_n)_n$, tais que $|y_n^* \circ m|(G_n) > \varepsilon$ e $|y_n^* \circ m|\left(\bigcup_{j \neq n} G_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos construir então uma sequência $(f_n)_n \subset C(K)$ tais que:

- (a) $\|f_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (b) $\text{supp } f_n \subset G_n$;
- (c) $y_n^* \circ T(f_n) = \int_K f_n d(y_n^* \circ m) > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $N = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n : a = (a_n)_n \in c_0(\mathbb{N}) \right\}$ em $C(K)$. Se $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \in N$, claramente $\|f\| = \|a\|$, logo N é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, além disso para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |y_n^* \circ T(f)| &= \left| \int_K f d(y_n^* \circ m) \right| = \left| a_n \int_{G_n} f_n d(y_n^* \circ m) + \int_{\bigcup_{j \neq n} G_j} f d(y_n^* \circ m) \right| \geq \\ &\geq |a_n| \varepsilon - \int_{\bigcup_{j \neq n} G_j} \|f\| d(|y_n^* \circ m|) \geq |a_n| \varepsilon - \|f\| |y_n^* \circ m|\left(\bigcup_{j \neq n} G_j\right) \geq |a_n| \varepsilon - \|f\| \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $\|T(f)\| \geq \sup_n \|y_n^* \circ T(f)\| \geq \|f\|\varepsilon - \|f\|\frac{\varepsilon}{2}$. Assim, $\|T(f)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\|f\|$ e $T|_N: N \rightarrow T(N)$ é isomorfismo, logo $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow F$. Desta forma existirá uma série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ f.i.c. em $C(K)$, onde $(e_n)_n \subset c_o(\mathbb{N})$ é a base canônica tal que $\sum_{n=1}^{\infty} T(e_n)$ não converge em norma em F , logo T não é incondicionalmente convergente. Contra à hipótese. ■

Teorema 6.18 (Dobrakov). *Sejam K um compacto, E e F espaços de Banach, $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ a sua medida representante. Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é um operador incondicionalmente convergente, temos:*

- (i) $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$;
- (ii) para cada seqüência $(A_n)_n \subset \beta$ decrescente, com $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{m}(A_n) = 0$;
- (iii) para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é um operador incondicionalmente convergente.

Demonstração. [4]-p.100.

- (i) Observemos que, para cada $x \in E$ a medida $m_x: \beta \rightarrow F^{**}$ é a representante do operador linear $T_x: C(K) \rightarrow F$ tal que $T_x(\varphi) = T(\varphi(\cdot)x)$, $\forall \varphi \in C(K)$, e como que T é um operador incondicionalmente convergente, T_x é um operador incondicionalmente convergente, porém pelo teorema 6.17 $C(K)$ tem a propriedade V , logo T_x é fracamente compacto e pelo teorema 4.3.15 $m_x: \beta \rightarrow F$ toma valores em F .
- (ii) Temos que a medida $m_{y^*}: \beta \rightarrow E^*$ é $rcabv(\beta, E^*)$ para cada $y^* \in B_{F^*}$. Consideremos a família $\{|m_{y^*}|: \beta \rightarrow \mathbb{R} : |m_{y^*}| \text{ é regular, } \sigma\text{-aditiva, } y^* \in B_{F^*}\}$.

Provaremos que se $(G_n)_n \subset \beta$ são abertos disjuntos dois a dois então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G_n) = 0$.

De fato, suponha que existam um $\varepsilon > 0$, uma subsequência $(G_n)_n \subset \beta$ de abertos disjuntos dois a dois, que ainda denotamos por $(G_n)_n$, e uma seqüência $(y_n^*)_n \subset B_{F^*}$ tal que $|m_{y_n^*}|(G_n) > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como cada m_{y^*} é regular e de variação limitada (veja, teorema 4.1.8) temos que

$$|m_{y^*}|(A) = \sup_{\substack{\text{supp } f \subset A \\ f \in C(K, E) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int f dm_{y^*} \right|, \forall A \in \beta, \text{ logo existe } (f_n)_n \subset C(K, E) \text{ com } \|f_n\| \leq 1,$$

$\text{supp } f_n \subset G_n$ tal que $\left| \int_K f_n dm_{y_n^*} \right| > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $\mu \in rcabv(\beta, E^*)$ que é isométrico à $C^*(K, E)$ e $\sigma \subset \mathbb{N}$ finito temos:

$$\left| \sum_{n \in \sigma} \int_K f_n d\mu \right| \leq \sum_{n \in \sigma} \|f_n\|_{G_n} |\mu|(G_n) \leq \sum_{n \in \sigma} |\mu|(G_n) = |\mu| \left(\bigcup_{n \in \sigma} G_n \right) \leq |\mu|(K) < +\infty.$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é f.i.c em $C(K, E)$ (veja teorema 1.10). Porém

$$\|T(f_n)\| = \left\| \int_K f_n dm \right\| \geq |y_n^* \left(\int_K f_n dm \right)| = \left| \int_K f_n dm_{y_n^*} \right| > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que contradiz o fato de T ser incondicionalmente convergente.

Desta forma, $\forall (G_n)_n \in \beta$ de abertos disjuntos, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G_n) = 0$ e pelo lema 6.16 concluímos que $\{|m_{y^*}|: \beta \rightarrow \mathbb{R}\}$ é uniformemente σ -aditivo e pelo lema 6.15 segue que $\forall (A_n)_n \in \beta$ decrescente com $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ($A_n \searrow \emptyset$) temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n) = 0$, porém $\widetilde{m}(A_n) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n)$, portanto $\forall (A_n)_n \in \beta$ com $A_n \searrow \emptyset$ temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{m}(A_n) = 0$.

(iii) Seja $A \in \beta$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ f.i.c. em E , então existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. No item (ii) provamos que $\forall (G_n)_n \in \beta$ de abertos disjuntos temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G_n) = 0$, logo pelo lema 6.16 (e) temos que dado $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$, existe um compacto $F \subset A$ e um aberto $G \supset A$ tais que $\sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, logo $\widetilde{m}(G \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Seja $\varphi \in C(K)$ tais que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset G$ e $\varphi|_F = 1$ (veja teorema 1.22), então

$$\begin{aligned} \|T(\varphi(\cdot)x_n) - m(A)x_n\| &= \left\| \int_K \varphi(t)x_n d\mu - m(A)x_n \right\| = \\ &= \left\| \int_{G \setminus F} \varphi(t)x_n d\mu + m(F)x_n - m(A)x_n \right\| \leq 2M\widetilde{m}(G \setminus F) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\cdot)x_n$ é f.i.c. em $C(K, E)$, pois se $\mu \in rcabv(\beta, E^*)$ e $\sigma \subset \mathbb{N}$ finito, temos $\left| \sum_{n \in \sigma} \int_K \varphi(t)x_n d\mu \right| \leq \sum_{n \in \sigma} \|\varphi\| \|x_n\| |\mu|(G) \leq M \sum_{n \in \sigma} |\mu|(G) \leq M |\mu|(K)$. Logo $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left| \sum_{n \in \sigma} \mu(\varphi(t)x_n) \right| \leq M |\mu|(K) < +\infty$. Como T é incondicionalmente convergente, $\|T(\varphi(\cdot)x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e pela parte anterior, para n suficientemente grande $\|m(A)x_n\| < \varepsilon$. Assim $m(A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} m(A)x_n$ converge em norma em F (pois, para cada $\sum_n x_n$ f.i.c em E , $m(A)x_n \rightarrow 0$) e portanto $m(A): E \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente, $\forall A \in \beta$. ■

Os teoremas 6.19 e 6.20 são teoremas análogos ao anterior para operadores de Dieudonné, Dunford-Pettis e fraco-compacto.

Teorema 6.19. *Sejam K um compacto, E, F espaços de Banach, $T: C(K, E) \rightarrow F$ linear contínuo e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ sua medida representante. Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é de Dieudonné (respectivamente Dunford-Pettis) temos:*

- (i) $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$;
- (ii) $\forall (A_n)_n \subset \beta$ com $A_n \searrow \emptyset, \widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$;
- (iii) $\forall A \in \beta, m(A): E \rightarrow F$ é Dieudonné (respectivamente Dunford-Pettis).

Demonstração. Veja [4].

No Capítulo 3, quadro (*), temos que todo operador $T: C(K, E) \rightarrow F$ de Dieudonné (respectivamente Dunford-Pettis) é um operador incondicionalmente convergente, logo pelo teorema 6.18 segue (i) e (ii).

(iii) Dados $A \in \beta$, $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy então existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \geq 1$, e $\varepsilon > 0$; pelo lema 6.16 existem $F \subset A$ fechado e $G \supset A$ aberto tal que $\sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Porém temos que $\widetilde{m}(G \setminus F) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Pelo teorema 1.22 existe $\varphi \in C(K)$, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, $\forall t \in [0, 1]$ tais que $\varphi|_F = 1$ e $\varphi|_{K \setminus G} = 0$, logo

$$\begin{aligned} \|T(\varphi(\cdot)x_n) - m(A)x_n\| &= \left\| \int_K \varphi(t)x_n dm - m(A)x_n \right\| = \left\| m(F)x_n - m(A)x_n + \int_{G \setminus F} \varphi(t)x_n dm \right\| \leq \\ &\leq \|m(F)x_n - m(A)x_n\| + \left\| \int_{G \setminus F} \varphi(t)x_n dm \right\| \leq \|x_n\| \widetilde{m}(G \setminus F) + \|\varphi\| \|x_n\| \widetilde{m}(G \setminus F) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para cada $t \in K$, $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_n \subset E$ é fracamente de Cauchy, logo $(\varphi(t)x_n)_n \subset E$ é fracamente de Cauchy e pelo lema 6.7 $(\varphi(\cdot)x_n)_n \subset C(K, E)$ é fracamente de Cauchy. Como $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dieudonné (resp. Dunford-Pettis), temos que $(T(\varphi(\cdot)x_n))_n \subset F$ é fracamente convergente (resp. é convergente em norma) a $y \in F$. Logo dado $y^* \in F$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ tem-se $\|y^*(T(\varphi(\cdot)x_n) - y)\| < \varepsilon$. Desta forma dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ temos:

$$\|y^*(m(A)x_n - y)\| \leq \|y^*(m(A)x_n - T(\varphi(\cdot)x_n))\| + \|y^*(T(\varphi(\cdot)x_n) - y)\|,$$

logo $\|y^*(m(A)x_n - y)\| < \|y^*\| \|m(A)x_n - T(\varphi(\cdot)x_n)\| + \varepsilon$, e $\|y^*(m(A)x_n - y)\| < (\|y^*\| + 1)\varepsilon$.

Claramente $(m(A)x_n)_n \subset F$ é fracamente convergente (resp. convergente em norma), portanto $m(A): E \rightarrow F$, $\forall A \in \beta$ é Dieudonné (resp. Dunford-Pettis).■

Teorema 6.20. *Seja K um compacto, E, F espaços de Banach, $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo e $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ à sua medida representante. Se $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto, temos:*

- (i) $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$;
- (ii) $\forall (A_n)_n \subset \beta$ com $A_n \searrow \emptyset$, $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$;
- (iii) $\forall A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é fracamente compacto.

Demonstração. Veja [4].

- (i) Para cada $x \in E$, seja $T_x: C(K) \rightarrow F$ dado por $T_x(\varphi(\cdot)) = T(\varphi(\cdot)x) = \int_K \varphi(\cdot)x dm$, $\forall \varphi \in C(K)$. Agora, para $x \in E$, definimos $m_x: \beta \rightarrow F^{**}$ dado por $m_x(A) = m(A)x$, $\forall A \in \beta$ e, pela parte anterior, $T_x(\varphi(\cdot)) = \int_K \varphi(\cdot) dm_x$, $\forall \varphi \in C(K)$, logo a medida $m_x: \beta \rightarrow F^{**}$ é representante do operador linear contínuo $T_x: C(K) \rightarrow F$. Dado que T é operador fracamente compacto, em particular $T_x: C(K) \rightarrow F$ é fracamente compacto e pelo teorema 4.3.15 m_x toma valores em F . Assim $m_x: \beta \rightarrow F$, $\forall x \in E$. Claramente $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Demonstraremos que para todo $(A_n)_n \in \beta$ com $A_n \searrow \emptyset$, $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$.

De fato, temos que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto. Logo pelo teorema 1.53 $T^*: F^* \rightarrow C^*(K, E)$ é fracamente compacto. Assim $T^*(B_{F^*}) \subset C^*(K, E)$ é relativamente fracamente compacto e como $C^*(K, E) = rcabv(\beta, E^*)$ temos

$M = \{m_{y^*} : \beta \rightarrow E^* / \|y^*\| \leq 1\} \subset rcabv(\beta, E^*)$ é relativamente fracamente compacto.

Para cada seqüência $(A_n)_n \in \beta$ de abertos disjuntos, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n) = 0$.

De fato, suponha que existe $\varepsilon > 0$, $(A_n)_n \in \beta$ abertos disjuntos e uma seqüência $(m_{y_n^*}) \subset M$ tais que $|m_{y_n^*}|(A_n) > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem partições finitas $(B_i^n)_{i=1}^{r(n)}$ de A_n e $(x_{n_i})_{i=1}^{r(n)} \subset B_E$ tais que $\sum_{i=1}^{r(n)} |m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i})| > \varepsilon$. Observemos que, dado $\mu \in rcabv(\beta, E^*)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} |\mu(B_i^n)(x_{n_i})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \|\mu(B_i^n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) = |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq |\mu|(K) < +\infty.$$

Definimos $\psi: rcabv(\beta, E^*) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ tal que $\psi(\mu) = \left((\mu(B_i^n)(x_{n_i}))_{i=1}^{r(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall \mu \in rcabv(\beta, E^*)$, logo ψ é linear bem definido.

Se $a \in \ell_{\infty}(\mathbb{N})$, $a = ((a_{n_i})_{i=1}^{r(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, definimos o operador $\varphi_a: rcabv(\beta, E^*) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_a(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} a_{n_i} \mu(B_i^n)(x_{n_i})$, $\forall \mu \in rcabv(\beta, E^*)$, φ_a é linear contínuo, pois

$$|\varphi_a(\mu)| \leq \|a\|_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \mu(B_i^n)(x_{n_i}) \leq \|a\|_{\infty} |\mu|(K), \forall \mu \in rcabv(\beta, E^*).$$

Claramente, $\varphi_a \in (rcabv(\beta, E^*))^*$, $\forall a \in \ell_{\infty}(\mathbb{N})$. Desta forma, $\psi: rcabv(\beta, E^*) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ é um operador linear contínuo da $(rcabv(\beta, E^*))^*$ -top. de $rcabv(\beta, E^*)$ na $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ -top. de $\ell_1(\mathbb{N})$, pois se $\mu_n \xrightarrow{C(K, E)^{**}-top.} \mu$, dado $a \in \ell_{\infty}(\mathbb{N})$ temos $\varphi_a(\mu_n) \rightarrow \varphi_a(\mu)$, logo $a(\psi(\mu_n)) \rightarrow a(\psi(\mu))$, para todo $a \in \ell_{\infty}(\mathbb{N})$, portanto $\psi(\mu_n) \xrightarrow{\ell_{\infty}(\mathbb{N})-top.} \psi(\mu)$.

Por hipótese temos que $\{m_{y^*} : \beta \rightarrow E^* / \|y^*\| \leq 1\} \subset rcabv(\beta, E^*)$ é relativamente fracamente compacto, logo $\{\psi(m_{y^*}) : \|y^*\| \leq 1\} \subset \ell_1(\mathbb{N})$ é relativamente fracamente compacto e como $\ell_1(\mathbb{N})$ Schur, segue que $\{((m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i}))_{i=1}^{r(n)})_n / \|y_n^*\| \leq 1\} \subset \ell_1(\mathbb{N})$ é relativamente compacto em norma, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} |m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i})| = 0$, assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{\|y^*\| \leq 1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} |m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ logo existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tais que } \sum_{i=1}^{r(n)} |m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para}$$

todo $n \geq n_0$, o que contradiz $\sum_{i=1}^{r(n)} |m_{y_n^*}(B_i^n)(x_{n_i})| > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lembremos que $\{|m_{y^*}| : \beta \rightarrow \mathbb{R}, \|y^*\| \leq 1\} \subset rcabv(K)$ e pela parte anterior $\forall (A_n)_n \in \beta$ de abertos disjuntos temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n) = 0$, e pelo lema 6.16 é equivalente a que $\{|m_{y^*}| : \beta \rightarrow \mathbb{R}, \|y^*\| \leq 1\} \subset rcabv(K)$ é uniformemente σ -aditiva, sendo β σ -álgebra, pelo

lema 6.15 é equivalente a (g) $\forall (A_n)_n \in \beta$ com $A_n \searrow \phi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n) = 0$, porém $\widetilde{m}(A_n) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n)$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{m}(A_n) = 0$.

(iii) Demonstraremos que $m(A): E \rightarrow F$, $\forall A \in \beta$ é fracamente compacto.

De fato, seja $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é linear contínuo. Seja $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência limitada, logo existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

No item (ii) provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G_n) = 0$, para cada seqüência $(G_n)_n \in \beta$ de abertos disjuntos onde $\{|m_{y^*}| : \beta \rightarrow \mathbb{R}, \|y^*\| \leq 1\} \subset rcabv(K)$ e pelo lema 6.16 é equivalente ao item (e). Logo para $A \in \beta$ e $\varepsilon > 0$ existem um compacto $F \subset A$ e um aberto $G \supset A$ tal que $\sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2M}$, porém $\widetilde{m}(G \setminus F) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(G \setminus F)$, logo $\widetilde{m}(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Pelo teorema 1.22 existe $\varphi \in C(K)$ com $\varphi|_F = 1$ e $\varphi|_{K \setminus G} = 0$ onde $0 \leq \varphi \leq 1$, portanto

$$\begin{aligned} \|T(\varphi(\cdot)x_n) - m(A)x_n\| &= \left\| \int_K \varphi(t)x_n dm - m(A)x_n \right\| \leq \|m(F)x_n - m(A)x_n\| + \left\| \int_{G \setminus F} \varphi(t)x_n dm \right\| \leq \\ &\leq \|x_n\| \widetilde{m}(G \setminus F) + \|\varphi\| \|x_n\| \widetilde{m}(G \setminus F) \leq 2\|x_n\| \widetilde{m}(G \setminus F) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\|\varphi(\cdot)x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo temos que $(\varphi(\cdot)x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K, E)$ é limitada e como T é um operador fracamente compacto, $(T(\varphi(\cdot)x_n))$ admite uma subseqüência fracamente convergente. Assim existe $y \in F$ tais que $\forall y^* \in F^*$, $y^*T(\varphi(\cdot)x_{n_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y^*(y)$, logo existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y^*(T(\varphi(\cdot)x_{n_i}) - y)| < \varepsilon$, $\forall i \geq i_0$, portanto

$$\begin{aligned} |y^*(m(A)x_{n_i} - y)| &\leq \|m(A)x_{n_i} - T(\varphi(\cdot)x_{n_i})\| \|y^*\| + |y^*(T(\varphi(\cdot)x_{n_i}) - y)| < \|y^*\| \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(\|y^*\| + 1), \text{ e} \\ \text{então } m(A)x_{n_i} &\xrightarrow{F^* - \text{top.}} y \in F. \blacksquare \end{aligned}$$

O teorema abaixo caracteriza os operadores incondicionalmente convergente, Dunford-Pettis, Dieudonné, fracamente compacto definidos em $C(K, E)$, onde K é disperso em termos de suas medidas representantes.

Teorema 6.21 (Bombal-Cembranos). *Seja K um disperso e $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo e tendo m como medida representante, são equivalentes:*

- (a) *T é incondicionalmente convergente (respectivamente Dunford-Pettis, Dieudonné, fracamente compacto);*
- (b) *$\widetilde{m}$ é fortemente limitada e para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente (respectivamente Dunford-Pettis, Dieudonné, fracamente compacto).*

Demonstração. Veja [6].

(b) $\Rightarrow$ (a) Se K é disperso, então qualquer quociente de K também é disperso e pelos teoremas 6.9 e 6.12 podemos supor que K é disperso e metrizável, logo enumerável (veja teorema 1.64).

- (i) Se $\widetilde{m}$ é fortemente limitado e para cada $A \in \beta$ $m(A): E \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente, então T é incondicionalmente convergente.

De fato, seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ f.i.c. em $C(K, E)$, então $\|T(f_n)\|$ converge a zero. Com efeito, dado que $(f_n)_n \subset C(K, E)$ converge fracamente a zero, basta mostrarmos que $H = \{T(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em F .

Como K é enumerável, seja $K = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_i)$ é f.i.c., pois se $x^* \in E^*$, $\delta_i: C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\delta_i(f) = x^*(f(t_i))$, $\forall f \in C(K, E)$ é contínua e como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é f.i.c. em particular $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_i(f_n)|$ é convergente. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(f_n(t_i))|$ é convergente para cada $x^* \in E^*$, assim $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_i)$ é f.i.c. em E para cada $i \in \mathbb{N}$.

Agora, por hipótese, para cada $i \in \mathbb{N}$ o conjunto $H_i = \{m(\{t_i\})(f_n(t_i)) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em F (pois é uma seqüência que tem "0" como ponto de acumulação na norma). Coloquemos $A_i = \{t_j : j \geq i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, como m é fortemente limitada, $\widetilde{m}(A_i) \rightarrow 0$. Logo se $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|$ e $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$\widetilde{m}(A_r) < \frac{\varepsilon}{M}$. Por outro lado, $T(f_n) = \int_K f_n dm = \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) + \int_{A_r} f_n dm$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\left\| T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) \right\| = \left\| \int_{A_r} f_n dm \right\| \leq \|f_n\| \widetilde{m}(A_r) < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Assim $\left(T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) \right) \in \varepsilon B_F$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto

$H = \{T(f_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \sum_{i=1}^{r-1} H_i + \varepsilon B_F$, $\forall \varepsilon > 0$. Seja H_ε o fecho na norma de $H_1 + H_2 + \dots + H_{r-1}$, logo H_ε é compacto e $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon B_F$, $\forall \varepsilon > 0$, pelo teorema 1.21, segue que $H = \{T(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto e $(T(f_n))_n$ fracamente nula e $T(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, assim $\sum_{n=1}^{\infty} T(f_n)$ converge em norma.

- (ii) Se $\widetilde{m}$ é fortemente limitado e para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é Dunford-Pettis (resp. Dieudonné).

Demonstraremos que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é Dunford-Pettis (resp. Dieudonné).

De fato, seja $(f_n)_n \subset C(K, E)$ fracamente de Cauchy. Logo $(T(f_n))_n \subset F$ é fracamente de Cauchy, dado que K é enumerável (K disperso métrico, como em (i)). Seja $K = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $(f_n(t_i))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy. De fato, $x^* \in E^*$ e $\delta_i: C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\delta_i(f) = x^*(f(t_i))$, $\forall f \in C(K, E)$ é linear contínuo. Pela primeira parte $(\delta_i(f_n))_n \subset \mathbb{R}$ é Cauchy, logo $(x^*(f_n(t_i)))_n \subset \mathbb{R}$ é Cauchy $\forall x^* \in E^*$. Assim $(f_n(t_i))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy.

$m(\{t_i\}): E \rightarrow F$, $\forall i \in \mathbb{N}$ é de Dunford-Pettis (Dieudonné). Logo $(m(\{t_i\})(f_n(t_i)))_n \subset F$ é

convergente em norma (resp. fracamente convergente). Assim $H_i = \{m(\{t_i\})(f_n(t_i)) : n \in \mathbb{N}\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ é relativamente compacto (resp. relativamente fracamente compacto).

Coloquemos, $A_n = \{t_i : i \geq n\}$ então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ e como $\widetilde{m}$ é fortemente limitado $\widetilde{m}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Se $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|$ e $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tais que $\widetilde{m}(A_r) < \frac{\varepsilon}{M}$.

Agora $T(f_n) = \int_K f_n dm = \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) + \int_{A_r} f_n dm$. Assim

$\left\| T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) \right\| \leq \sup_n \|f_n\| \widetilde{m}(A_r) < \varepsilon$. Logo $(T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i))) \in \varepsilon B_F$.

Se H_ε é o fecho na norma de $H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_{r-1}$, temos que H_ε é compacto (fracamente compacto) e pela parte anterior $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon B_F$, $\forall \varepsilon > 0$, segue do teorema 1.21 que

$H = \{T(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto (resp. relativamente fracamente compacto). Como $(T(f_n))_n$ é fracamente de Cauchy segue que $(T(f_n))_n \subset F$ é convergente em norma (respectivamente, fracamente convergente). Claramente T é um operador de Dunford-Pettis (respectivamente Dieudonné).

(iii) $\widetilde{m}$ é fortemente limitado e para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é fracamente compacto.

Demonstraremos que T é fracamente compacto.

De fato, seja $(f_n)_n \subset C(K, E)$ limitada. Logo $(T(f_n))_n \subset F$ é limitada e para cada f^* em $C^*(K, E)$, $(f^*(f_n))_n \subset \mathbb{R}$ é limitado. Como K é disperso e métrico, temos que K é enumerável. Seja $K = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$ e para cada $x^* \in E^*$ seja $\delta_i: C(K, E) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\delta_i(f) = x^*(f(t_i))$, $\forall f \in C(K, E)$ é contínuo. Logo $(\delta_i(f_n))_n \subset \mathbb{R}$ é limitado, isto é, $(x^*(f_n(t_i)))_n \subset \mathbb{R}$ é limitado para cada $x^* \in E^*$. Claramente $(f_n(t_i))_n \subset E$ é limitada e para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $m(\{t_i\}): E \rightarrow F$ é fracamente compacto. Logo $(m(\{t_i\})(f_n(t_i)))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente, então $H_i = \{m(\{t_i\})(f_n(t_i)) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente fracamente compacto para cada $i \in \mathbb{N}$.

Coloquemos $A_i = \{t_j : j \geq i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, logo $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ e como $\widetilde{m}$ é fortemente limitado, $\widetilde{m}(A_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Se $M = \sup_n \|f_n\|$ dado $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tais que $\widetilde{m}(A_r) < \frac{\varepsilon}{M}$.

Logo $T(f_n) = \int_K f_n dm = \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) + \int_{A_r} f_n dm$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim $\left\| T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) \right\| \leq \sup_n \|f_n\| \widetilde{m}(A_r) < M \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto $T(f_n) - \sum_{i=1}^{r-1} m(\{t_i\})(f_n(t_i)) \in \varepsilon B_F$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se H_ε é o fecho na norma de $H_1 + H_2 + \dots + H_{r-1}$, temos que H_ε é relativamente fracamente compacto e $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon B_F$, $\forall \varepsilon > 0$ e pelo teorema 1.21, $H = \{T(f_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset F$ é relativamente fracamente compacto, logo $(T(f_n))_n \subset F$ admite uma subsequência fracamente convergente, assim T é fracamente

compacto.

(a) $\Rightarrow$ (b) segue dos teoremas 6.18, 6.19 e 6.20. ■

Corolário 6.22. *Seja K um compacto disperso. Então $C(K, E)$ tem a propriedade Dunford-Pettis, a propriedade recíproca de Dunford-Pettis, a propriedade de Dieudonné, a propriedade V se, e somente se, E tem a mesma propriedade.*

Demonstração. Veja [6]-p.141.

($\Rightarrow$) Observemos que $E \xhookrightarrow{c} C(K, E)$, de fato, se $t_0 \in K$, definimos $\varphi: C(K, E) \rightarrow E$ tais que $\varphi(f) = f(t_0)$, $\forall f \in C(K, E)$ e é linear contínuo. φ é sobrejetor, pois se $x \in E$ definimos $f_0: K \rightarrow E$ tal que $f_0(t) = x$, $\forall t \in K$, logo $f_0 \in C(K, E)$ e $\varphi(f_0) = f_0(t_0) = x$. Claramente φ é uma projeção.

Como as propriedades de Dunford-Pettis, propriedade recíproca de Dunford-Pettis, propriedade de Dieudonné e a propriedade V são estáveis através de subespaços complementados, claramente E tem as mesmas propriedades.

($\Leftarrow$) $C(K, E)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis.

De fato, seja F um espaço de Banach e $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador fracamente compacto, se m é sua medida representante pelo teorema 6.21 temos que $\widetilde{m}$ é fortemente limitado e $m(A): E \rightarrow F$, $\forall A \in \beta$ é fracamente compacto. Como E tem a propriedade de Dunford-Pettis, segue que $m(A): E \rightarrow F$ é de Dunford-Pettis, $\forall A \in \beta$. Novamente pelo teorema 6.21 $T: C(K, E) \rightarrow F$ é um operador de Dunford-Pettis. Assim $C(K, E)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis.

As demais propriedades seguem do mesmo raciocínio. ■

Para atingirmos o principal objetivo deste capítulo com o teorema 6.24 precisaremos ainda de.

Teorema 6.23 (Dunford-Schwartz). *Seja K um compacto, então $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. [19]-p.494.

Sejam F um espaço de Banach, $T: C(K) \rightarrow F$ um operador fracamente compacto e $(\varphi_n)_n \subset C(K)$ uma seqüência fracamente de Cauchy, logo existe $M > 0$ tais que $\|\varphi_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e pelo teorema 4.3.15 existe uma medida vetorial $m: \beta \rightarrow E$ enumeravelmente aditiva de semi-variação escalar limitada tais que $T(\varphi_n) = \int_K \varphi_n dm$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in K$ existe $\varphi_o(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$, embora a função limite pode não estar em $C(K)$.

Pelo teorema 1.41 temos que φ_o é m-integrável e $\int_K \varphi_o dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K \varphi_n dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\varphi_n)$, logo $(T(\varphi_n))_n \subset F$ converge em norma e portanto T é de Dunford-Pettis. ■

No teorema seguinte caracterizaremos as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 como sendo K estáveis para compactos dispersos.

Teorema 6.24. *Se K é um compacto disperso, então as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 são K estáveis.*

Demonstração. Verificaremos os seguintes fatos:

- (a) $C(K)$ tem as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 .

De fato, pelo teorema 6.17 e pelo teorema 6.23 $C(K)$ tem a propriedade V e Dunford-Pettis. Usando o quadro (*) do Capítulo 3, temos:

$$\mathcal{I}(C(K), F) = \mathcal{D}(C(K), F) = \mathcal{W}(C(K), F) \subset \mathcal{DP}(C(K), F), \forall F.$$

Como K é disperso, pelo teorema 1.63, temos que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$, da proposição 3.27 junto com o teorema 3.28 segue que $C(K)$ tem a propriedade recíproca de Dunford-Pettis e $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$, com tudo pela parte anterior

$\mathcal{I}(C(K), F) = \mathcal{D}(C(K), F) = \mathcal{W}(C(K), F) = \mathcal{DP}(C(K), F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$. Assim, $C(K)$ tem as referidas propriedades.

- (b) Se um espaço de Banach E tem respectivamente as propriedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné, V , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 e R_3 , então $C(K, E)$ tem respectivamente tais propriedades.

De fato, o corolário 6.22 prova o resultado para as propriedades Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, Dieudonné e propriedade V . Provaremos para o caso S_2 , R_1 , R_2 e R_3 . tendo em consideração que a propriedade S_2 implica a propriedade S_1 .

- (i) Suponhamos que E tem a propriedade S_2 .

Seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{I}(C(K, E), F)$, pelo teorema 6.21 temos que para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente e por hipótese esse operador é Dunford-Pettis, para cada $A \in \beta$. Novamente pelo teorema 6.21 temos que $T \in \mathcal{DP}(C(K, E), F)$, logo $C(K, E)$ tem a propriedade S_2 (o caso S_1 é análogo).

- (ii) Suponhamos que E tem a propriedade R_1 .

Seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{I}(C(K, E), F)$. Pelo teorema 6.21 temos que $m(A): E \rightarrow F$, $\forall A \in \beta$ é incondicionalmente convergente e por hipótese esse operador é de Dieudonné. Novamente pelo teorema 6.21 temos que $T \in \mathcal{D}(C(K, E), F)$, logo $C(K, E)$ tem a propriedade R_1 .

- (iii) Suponhamos que E tem a propriedade R_2 , logo $\mathcal{D}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$, então $\mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, $\forall F$ e pelo teorema 3.28 $\ell_1(\mathbb{N}) \not\rightarrow E$. Pelo teorema 10.2 segue que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\rightarrow C(K, E)$. Novamente pelo teorema 3.28 temos que

$$\mathcal{DP}(C(K, E), F) \subset \mathcal{K}(C(K, E), F), \forall F.$$

Por outro lado, $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{DP}(C(K, E), F)$, $\forall F$, de fato, seja F um espaço de Banach e $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador de Dieudonné, pelo teorema 6.21 temos que para cada $A \in \beta$, $m(A): E \rightarrow F$ é de Dieudonné, como E tem a propriedade R_2 temos que $m(A): E \rightarrow F$ é um operador de Dunford-Pettis. Novamente pelo teorema 6.21 temos que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é de Dunford-Pettis. Portanto $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{DP}(C(K, E), F)$, $\forall F$, logo concluímos que $C(K, E)$ tem a propriedade R_2 .

- (iv) Suponha que E tem a propriedade R_3 .

Do quadro geral (*) p. 17 e das definições 3.29, 3.30 e 3.32 segue que ter a propriedade R_3 é equivalente a ter as propriedades R_1 e R_2 , disto junto com i) e ii) demonstram que $C(K, E)$ tem a propriedade R_3 . ■

Capítulo 7

K cancelabilidade e K estabilidade de um dual ser Schur

O objetivo deste capítulo é caracterizar os compactos K para os quais a propriedade de um dual ser Schur, seja respectivamente K estável e K cancelável (veja os corolários 7.2 e 7.3). Para isso precisaremos do teorema 7.1 que fornece uma condição necessária e suficiente para que E^* seja Schur.

Teorema 7.1 (Pethe e Thakare). *Seja E um espaço de Banach. E^* é Schur se, e somente se, E tem a propriedade de Dunford-Pettis e $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.*

Demonstração. [9] p.106.

($\Rightarrow$) Pela hipótese e pelo teorema 3.22 temos que $\mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N})) \subset K(E, c_o(\mathbb{N}))$. Provaremos:

- i) E tem a propriedade de Dunford-Pettis. Pela proposição 3.24 d) bastará provarmos que, para cada par de seqüências $x_n \xrightarrow{E^*} 0$ e $x_n^* \xrightarrow{E^{**}} 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.

De fato, seja $x_n \xrightarrow{E^*} 0$ e $x_n^* \xrightarrow{E^{**}} 0$, como $(x_n)_n \subset E$ é fracamente de Cauchy, existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e como E^* é Schur, $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, assim dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $\|x_n^*\| < \frac{\epsilon}{M}$, logo $|x_n^*(x_n)| \leq \|x_n^*\| \|x_n\| \leq M \|x_n^*\| < \epsilon$. Desta forma $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(x_n) = 0$.

- ii) $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

De fato, suponha por absurdo que $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$, logo existe uma seqüência $(u_n)_n \subset E$ equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Agora, pelo teorema 1.17 as funções de Rademacher $r_n(t) = sg(\sin(2^n \pi t))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$ em $L_\infty[0, 1]$ são equivalentes a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, então $(u_n)_n \subset E$ e $(r_n)_n \subset L_\infty[0, 1]$ são equivalentes, o que nos permite definir um isomorfismo $S_1: M = \overline{[u_n : n \in \mathbb{N}]} \rightarrow L_\infty[0, 1]$ sobre a imagem, pondo $\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n r_n$, pelo teorema 1.68 temos que $L_\infty[0, 1] \sim \ell_\infty(\mathbb{N})$ e pelo teorema 1.13 segue que existe uma extensão linear contínua $S: E \rightarrow L_\infty[0, 1]$, onde

$S(u_n) = r_n, \forall n \in \mathbb{N}$. No entanto, as funções de Rademacher $(r_n)_n \subset L_2[0, 1]$ formam um sistema ortogonal, logo são fracamente nula em $L_1[0, 1]$ (veja [27] p.318), assim para cada $f \in L_\infty[0, 1]$, temos que $\int_0^1 f(t)r_n(t) \rightarrow 0$ (veja teorema 1.30), logo podemos definir uma função $R : L_\infty[0, 1] \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, pondo $f \mapsto (\int_0^1 f r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente R é linear e contínua e $R(r_n) = e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $L_\infty[0, 1] \sim \ell_\infty(\mathbb{N})$ e este espaço tem a propriedade de Grothendieck (veja teorema 3.36), segue que $R \in \mathcal{W}(L_\infty[0, 1], c_o(\mathbb{N}))$; dado que $S \in \mathcal{L}(E, L_\infty[0, 1])$, temos que $T = (R \circ S) \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e, $T(u_n) = e_n, \forall n \in \mathbb{N}$, assim $(T(u_n))_n \subset c_o(\mathbb{N})$ não converge em norma, logo $T \notin \mathcal{K}(E, c_o(\mathbb{N}))$ e desta forma, $T \in \mathcal{W}(E, c_o(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{K}(E, c_o(\mathbb{N}))$ o que contradiz a hipótese.

($\Leftarrow$) Pela hipótese e pela definição 3.23 e teorema 3.28 temos $\mathcal{W}(E, F) \subset \mathcal{DP}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$, para cada espaço de Banach F , portanto o resultado segue do teorema 3.22. ■

Corolário 7.2. *A propriedade de um dual ser Schur é K estável se, e somente se, K é disperso.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos por absurdo que K não é disperso logo $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$ (veja teorema 1.63), mais por hipótese $C^*(K)$ é Schur e pelo teorema 7.1, segue que $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis e $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$ o que contradiz a parte anterior.

($\Leftarrow$) Verifiquemos os seguintes fatos:

a) $C^*(K)$ é Schur.

De fato, como K é disperso, pelo teorema 5.7 temos que $C^*(K) = \ell_1(|K|)$ que por sua vez é Schur ([4] p.15).

b) Se E^* é Schur, então $C^*(K, E)$ é Schur.

De fato, pelo teorema 7.1 temos que E tem a propriedade de Dunford-Pettis e $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$. Por outro lado, como K é disperso, pelo teorema 6.24 e pela parte anterior $C(K, E)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis. Além disso, pelo teorema 10.2, $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K, E)$, logo pelo teorema 7.1, $C^*(K, E)$ é Schur. ■

Corolário 7.3. *A propriedade de um dual ser Schur é K cancelável se, e somente se, K é não disperso.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese $C^*(K)$ não é Schur. Como $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis, pelo teorema 7.1 temos que, $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$. Assim, K é não disperso (veja teorema 1.63).

($\Leftarrow$) Verificamos os seguintes fatos:

a) $C^*(K)$ não é Schur.

De fato, dado que K é não disperso, temos que $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$ (veja teorema 1.63) e pelo teorema 7.1, concluimos que $C^*(K)$ não é Schur.

b) Seja E espaço de Banach, tal que $C^*(K, E)$ é Schur; então E^* é Schur.

De fato, observamos que $E \xhookrightarrow{c} C(K, E)$ sempre, pois se $t_0 \in K$, definimos $\varphi: C(K, E) \rightarrow E$ tal que $\varphi(f) = f(t_0)$, $\forall f \in C(K, E)$ e é linear contínuo. φ é sobrejetor, pois se $x \in E$ definiremos $f_0: K \rightarrow E$ tal que $f_0(t) = x$, $\forall t \in K$, logo $f_0 \in C(K, E)$ e $\varphi(f_0) = f_0(t_0) = x$. Claramente φ é uma projeção, logo existe um subespaço F de $C(K, E)$ tal que $C(K, E) = E \oplus F$. Assim $C^*(K, E) = E^* \oplus F^*$, logo $E^* \hookrightarrow C^*(K, E)$ e como $C^*(K, E)$ é Schur, concluimos que E^* é Schur. ■

Capítulo 8

Sobre a K estabilidade das propriedades de Dieudonné e propriedade V para K não disperso

No capítulo 6 mostramos que se K é disperso então as propriedades V e Dieudonné são K estáveis, no entanto não sabemos resolver:

Problema: Se K é um compacto não disperso, então a propriedade V e a propriedade de Dieudonné são K estáveis?

No estudo desse problema só conseguimos encontrar o seguinte resultado de [43]-p.149:

Teorema 8.1 (Ülger). *Sejam K um compacto não vazio e E um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a) $C(K, E)$ tem a propriedade de Dieudonné.
- b) Se E tem a propriedade (u) , então $C(K, E)$ tem a propriedade V .

A demonstração deste resultado servirá para ressaltarmos as dificuldades que surgem quando passamos a considerar o problema de K estabilidade de certas propriedades para compactos não dispersos.

Para a demonstração deste precisaremos das seguintes definições, lemas e teoremas.

Definição 8.2. Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$ um subconjunto, dizemos que $A \in \mathcal{W}(E)$ (respectivamente $A \in \mathcal{WC}(E)$) se para cada seqüência $(x_n) \subset A$ existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) fracamente convergente em E (respectivamente, fracamente de Cauchy em E).

O seguinte lema nos será útil na demonstração do teorema 8.1.

Lema 8.3. *Seja E um espaço de Banach e $A \subset E$ um subconjunto limitado. Então $A \in \mathcal{W}(E)$ se, e somente se, para cada seqüência $(x_n)_n \subset A$ existe uma seqüência $(\tilde{x}_n)$ fracamente convergente com $\tilde{x}_n \in co(x_n, x_{n+1}, \dots)$.*

Demonstração. Veja [43]-p.145.

($\Rightarrow$) Suponha que A é relativamente fracamente compacto.

Seja $(x_n)_n \subset A$ uma seqüência e por hipótese existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) fracamente convergente em E . Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $n_k > k$ e fazemos $\tilde{x}_k = x_{n_k}$, logo $\tilde{x}_k \in co(x_k, x_{k+1}, \dots)$, pois $n_k > k$ e além disso $(\tilde{x}_k)_k$ converge fracamente.

($\Leftarrow$) Suponha que para cada seqüência $(x_n)_n \subset A$ existe uma seqüência $(\tilde{x}_n)_n$ fracamente convergente em E com $\tilde{x}_n \in co(x_n, x_{n+1}, \dots)$.

Demonstraremos que $\overline{A}^w$ é fracamente compacto. De fato, como $A \subset E$ é limitado temos que $\overline{co}(A)$ é limitado.

Seja $x^* \in E^*$ arbitrário e não nulo e consideremos $\lambda = \sup_{x \in \overline{co}(A)} x^*(x)$. Observemos que $\lambda = \sup_{x \in A} x^*(x)$, para isto verificaremos os seguintes fatos:

a) $\sup_{x \in A} x^*(x) \leq \lambda$.

De fato, se $x \in A$ temos $x \in \overline{co}(A)$, então $x^*(x) \leq \lambda$ para cada $x \in A$, desta forma $\sup_{x \in A} x^*(x) \leq \lambda$.

b) dado $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\lambda - \epsilon < x^*(x)$.

De fato, suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $x \in A$, $\lambda - \epsilon_0 \geq x^*(x)$.

Por outro lado, para $\epsilon_0 > 0$ existe $x_{\epsilon_0} \in \overline{co}(A)$ tal que $\lambda - \epsilon_0 < x^*(x_{\epsilon_0})$, então

$x^*(x) \leq \lambda - \epsilon_0$, $\forall x \in A$. Com tudo, $x_{\epsilon_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{\epsilon_0}$ onde $(y_n^{\epsilon_0})_n \subset co(A)$, assim cada $y_n^{\epsilon_0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ com $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in A$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Claramente $x^*(y_n^{\epsilon_0}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^*(x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda - \epsilon_0) = \lambda - \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como x^* é contínua e $y_n^{\epsilon_0} \rightarrow x_{\epsilon_0}$ temos que $x^*(y_n^{\epsilon_0}) \rightarrow x^*(x_{\epsilon_0})$ e então $x^*(x_{\epsilon_0}) \leq \lambda - \epsilon_0 < x^*(x_{\epsilon_0})$, o que é absurdo.

De a) e b) segue que $\lambda = \sup_{x \in A} x^*(x)$.

Cada $x^* \in E^*$ assume seu máximo em $\overline{co}(A)$. De fato, pela parte anterior $\lambda = \sup_{x \in A} x^*(x)$, logo existe uma seqüência $(x_n) \subset A$ tal que $x^*(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ e por hipótese existe uma seqüência $(\tilde{x}_n)_n$ com $\tilde{x}_n \in co(x_n, x_{n+1}, \dots)$ e $(\tilde{x}_n)_n$ converge fracamente para $a \in \overline{co}(A)$, como x^* é contínua $x^*(\tilde{x}_n) \rightarrow x^*(a)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ temos $x^*(x_n) > \lambda - \epsilon$. Além disso, para

cada $n \in \mathbb{N}$ existe k_n tal que $\tilde{x}_n = \sum_{i \leq k_n} \lambda_i x_{i+n}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i \leq k_n} \lambda_i = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Claramente, $x^*(\tilde{x}_n) = \sum_{i \leq k_n} \lambda_i x^*(x_{i+n}) > \sum_{i \leq k_n} \lambda_i (\lambda - \epsilon) = \lambda - \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ temos $x^*(a) \geq \lambda - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Logo $\lambda \leq x^*(a)$ e $a \in \overline{co}(A)$, desta forma $x^*(a) = \sup_{x \in \overline{co}(A)} x^*(x)$. Como $x^* \in E^*$ é arbitrário, pelo teorema 1.72 de James, segue que $\overline{co}(A)$ é fracamente compacto. Mas $A \subset co(A)$ e assim finalmente concluímos que $A \in \mathcal{W}(E)$. ■

O seguinte lema será necessário na demonstração do teorema 8.13.

Lema 8.4 (Dobrakov). *Seja $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uma medida vctorial, m é fortemente limitada se, e somente se, existe uma medida $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ finita e positiva tal que $\lambda(A) \leq \|m\|(A)$, $\forall A \in \beta$ e $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$ ($\|m\|(A)$ é a semi-variação escalar de m em A).*

Demonstração. [25]-p.17.

($\Rightarrow$) Suponhamos que m seja fortemente limitada, pela observação da definição 4.1.6 temos que $\|m(A)\| \leq \|m\|(A) \leq \widetilde{m}(A)$ para cada $A \in \beta$. m é enumeravelmente aditiva, pois se $(A_n)_n \subset \beta$ é uma seqüência de conjuntos dois a dois disjuntos, e $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$, seja $B_n = A \setminus \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $B_n \searrow \emptyset$ e por hipótese $\widetilde{m}(B_n) \rightarrow 0$ e pela primeira parte temos $\|m(A) - \sum_{i=1}^n m(A_i)\| = \|m(A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)\| = \|m(B_n)\| \leq \widetilde{m}(B_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, fazendo $n \rightarrow +\infty$ temos que $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Por outro lado, pelo teorema 1.39 existe uma medida $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ finita positiva tal que:

- a) $\lambda(A) \leq \|m\|(A) \leq \widetilde{m}(A)$, $\forall A \in \beta$.
- b) $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \|m\|(A) = 0$.

Notemos que se $\|m\|(A) = 0$, então $0 = \|m(A)\| = \sup_{\substack{|\alpha_i| \leq 1 \\ A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i}} \left\| \sum_{i=1}^n m(A_i) \alpha_i \right\|$, logo $\left\| \sum_{i=1}^n m(A_i) \right\| =$

0, para cada $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$, então $\left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)(x_i) \right\| = 0$ para cada $x_i \in E$, $\|x_i\| \leq 1$ e $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$, e portanto $\widetilde{m}(A) = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i}} \left\| \sum_{i=1}^n m(A_i)(x_i) \right\| = 0$.

Conseqüentemente $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$, suponha que $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) \neq 0$ então existe $\epsilon > 0$ e uma seqüência $A_n \in \beta$, $n = 1, 2, \dots$ com $\lambda(A_n) < \frac{1}{2^n}$ e $\widetilde{m}(A_n) > \epsilon$. Seja $B_n = \dot{\bigcup}_{i=n}^{\infty} A_i$ e $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, desde que λ é uma medida enumeravelmente aditiva, finita e não negativa em β segue que $\lambda(B) = 0$ e pelo item b) temos $\|m\|(B) = 0$ e pela parte anterior $\widetilde{m}(B) = 0$. Enquanto que $\widetilde{m}(B) \geq \widetilde{m}(B_k) - \widetilde{m}(B_k \setminus B) > \frac{\epsilon}{2}$, para k suficientemente grande (pois $\widetilde{m}$ é fortemente limitada, $(B_n \setminus B) \searrow \emptyset$ e $\widetilde{m}(B_n) > \widetilde{m}(A_n) > \epsilon$).

O que contradiz o que fizemos acima.

($\Leftarrow$) Suponha que existe uma medida $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ finita positiva tal que $\lambda(A) \leq \|m\|(A)$, para cada $A \in \beta$ e $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$.

Demonstraremos que se $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, então $\widetilde{m}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De fato, seja $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, logo $\lambda(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e por hipótese temos $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$, assim $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$. ■

A seguinte proposição servirá para a demonstração do teorema 8.1.

Proposição 8.5 (Brook e Lewis). *Seja $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ uma medida vetorial aditiva, como no teorema 4.4.18. São equivalentes:*

- a) $\widetilde{m}(A_i) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ quando $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \beta$ são disjuntos dois a dois.
- b) m é fortemente limitada.
- c) $\{|m_{y^*}| : y^* \in B_{F^*}\}$ é relativamente fracamente compacto em $ca(K)$.

Demonstração. [12]-p.149.

a) $\Rightarrow$ b) suponha que $\widetilde{m}(A_i) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ quando $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \beta$ são disjuntos dois a dois, demonstraremos que se $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, então $\widetilde{m}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De fato, suponha que existe uma seqüência $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ tal que $\widetilde{m}(A_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, logo existe $\epsilon_0 > 0$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(A_n)_n$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ e $\widetilde{m}(B_n) > 2\epsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\widetilde{m}(B_n) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(B_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (veja proposição 4.1.5).

Por hipótese $|m_{y^*}|: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ é enumeravelmente aditiva para cada $y^* \in F^*$.

Para $n = 1$ existe $\|y_1^*\| \leq 1$ tal que $|m_{y_1^*}|(B_1) > 2\epsilon_0$. Dado que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$, pela parte anterior $|m_{y_1^*}|(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e para cada $\epsilon_0 > 0$ dado, existe $N_2 > N_1 = 1$ tal que $|m_{y_1^*}|(B_{N_2}) < \epsilon_0$, porém $B_{N_1} = (B_{N_1} \setminus B_{N_2}) \dot{\cup} B_{N_2}$, logo $|m_{y_1^*}|(B_{N_1} \setminus B_{N_2}) > \epsilon_0$.

Para $n = N_2$, existe $\|y_2^*\| \leq 1$ tal que $|m_{y_2^*}|(B_{N_2}) > 2\epsilon_0$, pela parte anterior $|m_{y_2^*}|(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e para $\epsilon_0 > 0$ dado existe $N_3 > N_2$ tal que $|m_{y_2^*}|(B_{N_3}) < \epsilon_0$, porém $B_{N_2} = (B_{N_2} \setminus B_{N_3}) \dot{\cup} B_{N_3}$, assim $|m_{y_2^*}|(B_{N_2} \setminus B_{N_3}) > \epsilon_0$.

Por indução finita podemos construir uma seqüência $(B_{N_i} \setminus B_{N_{i+1}})_{i \in \mathbb{N}} \subset \beta$ de conjuntos disjuntos dois a dois tais que $\epsilon_0 < |m_{y^*}|(B_{N_i} \setminus B_{N_{i+1}}) \leq \widetilde{m}(B_{N_i} \setminus B_{N_{i+1}})$, desta forma existe $(B_{N_i} \setminus B_{N_{i+1}}) \subset \beta$ dois a dois disjuntos tal que $\widetilde{m}(B_{N_i} \setminus B_{N_{i+1}}) \not\rightarrow^+ 0$, o que é absurdo.

b) $\Rightarrow$ a) suponhamos que $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ implica $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$.

Demonstraremos que se $(A_n)_n \subset \beta$ são conjuntos disjuntos dois a dois então $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow^+ 0$.

De fato, seja $(A_n)_n \subset \beta$ conjuntos disjuntos dois a dois, coloquemos $B_n = \bigcup_{i \geq n} A_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ e por hipóteses $\widetilde{m}(B_n) \rightarrow^+ 0$, porém $A_n \subset B_n$, logo $\widetilde{m}(A_n) \leq \widetilde{m}(B_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ isto é $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$.

b) $\Rightarrow$ c) nós sabemos que $\widetilde{m}(A) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A)$ (veja proposição 4.1.5).

Lembremos que $\mathcal{A} \subset ca(K, \beta)$ é uniformemente enumeravelmente aditiva se para cada $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_n A_n = \emptyset$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ uniformemente em $\mu \in \mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A} = \{|m_{y^*}| : \|y^*\| \leq 1\}$, $\mathcal{A}$ é limitado, pois m tem semi-variação finita.

Seja $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, logo $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow^+ 0$, então $|m_{y^*}|(A_n) \rightarrow^+ 0$ para cada $\|y^*\| \leq 1$, assim $\lim_{n \rightarrow \infty} |m_{y^*}|(A_n) = 0$ uniformemente em $|m_{y^*}| \in \mathcal{A}$, $\forall (A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_n A_n = \emptyset$ e pela última observação $\mathcal{A}$ é limitado e uniformemente enumeravelmente aditiva e pelo teorema 1.35 segue que $\mathcal{A}$ é relativamente fracamente compacto.

c) $\Rightarrow$ b) suponhamos que $\{|m_{y^*}| : \|y^*\| < 1\}$ é relativamente fracamente compacto, pelo teorema 1.35 temos que $|m_{y^*}|(A_n) \rightarrow 0$ uniformemente em B_{F^*} , para cada $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_n A_n = \emptyset$, claramente $\widetilde{m}(A_n) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A_n) \rightarrow 0$. ■

O seguinte teorema motiva a definição 8.8.

Teorema 8.6 (Kalton-Saab). *Seja E um espaço de Banach com a propriedade (u), então existe $c > 0$ tal que para cada $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c em E tal que:*

- a) $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*}^{top} 0$ em E .
- b) $\sup \{ \|\sum_{i \in \sigma} y_i\| : \sigma \subset \mathbb{N} \text{ é finito} \} \leq c \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Demonstração. Veja proposição 1 de [32]-p.370.

Seja $B_1(E) = \{Z \in E^{**} : Z \text{ é limite fraca-estrela de uma seqüência em } E\}$, $Z \in B_1(E)$ se, e

somente se, existe $(x_n)_n \subset E$ tal que $x^*(x_n) \rightarrow Z(x^*)$ para cada $x^* \in E^*$. Pelo teorema 1.73 temos que $B_1(E)$ é fechado na norma.

Seja $M = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} y_i \text{ é f.i.c em } E\}$, coloquemos $|||(y_n)_n||| = \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} y_i\|$, não é difícil ver que M com a norma anterior é um espaço de Banach.

Seja $T : M \rightarrow B_1(E)$ tal que $T((y_n)_n) = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, T está bem definido, pois para cada $x^* \in E^*$ temos $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(y_i) = R(x^*)$, assim $R(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x^*(y_i)$, pelo princípio da limitação uniforme $R \in E^{**}$ e $\sum_{i=1}^n y_i \xrightarrow{E^*-top} R$ ou então $R = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i$, assim $T((y_n)_n) = R$.

O operador $T : M \rightarrow B_1(E)$ é linear contínuo, pois se $x^* \in B_{E^*}$ temos $|T((y_n)_n)(x^*)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^*(\sum_{i=1}^n y_i)|$, logo $|x^*(\sum_{i=1}^n y_i)| \leq \|x^*\| \|\sum_{i=1}^n y_i\| \leq \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} y_i\|, \forall n \in \mathbb{N}$, desta forma $|T((y_n)_n)(x^*)| \leq \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} y_i\| = |||(y_n)_n|||$, para cada $x^* \in B_{E^*}$, claramente $\|T((y_n)_n)\| \leq |||(y_n)_n|||$, logo T é contínua.

O operador $T : M \rightarrow B_1(E)$ é sobrejetor, de fato seja $u \in B_1(E)$ e escolhemos uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ tal que $u = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, isto é $(x_n)_n \subset E$ é uma seqüência fracamente de Cauchy, por hipótese E tem a propriedade (u) , logo existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E com $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*-top} 0$ de E , assim $u(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x^*(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) + x^*(\sum_{i=1}^n y_i)]$, e então $u(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\sum_{i=1}^n y_i)$ ou $u = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, desta forma existe $(y_n)_n \in M$ tal que $u = T((y_n)_n)$.

Existe $c > 0$ tal que para cada $u \in B_1(E)$ com $\|u\| \leq 1$, existe $(y_n)_n \in M$ com $|||(y_n)_n||| \leq c$ e $u = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, de fato, pelo feito anteriormente $T : M \rightarrow B_1(E)$ é linear contínuo e sobrejetor e usando o teorema da aplicação aberta existe $r > 0$ tal que $B_1(0) \subset T(B_{\frac{1}{r}}(0))$, seja $c = \frac{1}{r}$, para cada $u \in B_1(E)$ com $\|u\| \leq 1$ existe $(y_n)_n \in M$ com $|||(y_n)_n||| \leq c$ e $u = T((y_n)_n) = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$.

Dado $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, existe $W \in B_1(E)$ tal que $W = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, com efeito, seja $(x_n)_n \subset E$ uma seqüência fracamente de Cauchy, como E tem a propriedade (u) existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*-top} 0$ de E . Seja $W = T((y_n)_n)$ então $W = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, logo $W(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(\sum_{i=1}^n y_i)$ para cada $x^* \in E^*$, claramente $W(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x^*(\sum_{i=1}^n y_i - x_n) + x^*(x_n)]$, assim $W(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n)$ ou $W = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Finalmente provaremos o que necessitamos, seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, logo pela parte anterior existe $W \in B_1(E)$ tal que $W = weak^* - \lim x_n$. Seja $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha > 0$ e consideremos $u = \frac{W}{\alpha}$, $u \in B_1(E)$, para cada $x^* \in B_{E^*}$ temos $|x^*(x_n)| \leq \|x_n\|$ e $|W(x^*)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \log \|W\| \leq \alpha$, claramente $\|u\| \leq 1$ e desta forma pela observação anterior, existe $c > 0$ e $(v_n) \in M$ com $|(v_n)| \leq c$ e $u = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n v_i)$.

Por outro lado, seja $y_n = \alpha v_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é *f.i.c* em E e

$$\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\| \leq \alpha \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} v_i \right\|, \text{ assim } \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\| \leq \alpha |(v_n)_n| \leq \alpha c = c \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Portanto $W = \alpha u = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n \alpha v_i) = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, porém
 $W = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = weak^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n y_i)$, logo $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*}^{top} 0 \in E. \blacksquare$

Antes de enunciarmos o próximo teorema precisaremos de algumas observações e definições, estas podem ser achadas em [15].

Observação: veja [15]-p.251.

a) Cada subespaço fechado ou aberto, de um “Polish space” é “Polish space”.

Observação: [15]-p.261.

- a) Todo aberto e fechado de um “Polish space” é analítico.
- b) todo Boreliano em K compacto “Polish space” é analítico.
- c) se K é um compacto “Polish space” e $M \subset K$ é a imagem contínua de um Boreliano contido num “Polish space”, então M é analítico.

Para a demonstração do teorema 8.13 precisaremos do seguinte lema.

Lema 8.7. *Sejam K_1 e K_2 compactos, $f: K_1 \rightarrow K_2$ uma função contínua. Então f é mensurável com respeito as σ -álgebras $\beta_\mu(K_1)$ e $\beta_*(K_2)$.*

Demonstração. Seja $\nu: \beta(K_2) \rightarrow \mathbb{R}$ a medida definida por $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ para cada $A \in \beta(K_2)$. Seja $B \in \beta_* = \bigcap_{\lambda} \beta_\lambda$ em particular $B \in \beta_\nu$ que é completa, logo existem $A, D \in \beta(K_2)$ com $A \subset B \subset D$ e $\nu(A) = \nu(D)$, como $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(D)$ e $f^{-1}(A), f^{-1}(D) \in \beta(K_1)$ (f é contínua) temos que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(f^{-1}(D)) = \nu(A) = \nu(D)$, então $f^{-1}(B) \in \beta_\mu$. Assim, $f: K_1 \rightarrow K_2$ é mensurável com respeito as σ -álgebras $\beta_\mu(K_1)$ e $\beta_*(K_2)$. ■

Antes de demonstrarmos o próximo teorema, precisaremos de:

Definição 8.8. Sejam E um espaço de Banach separável com a propriedade (u) , $c > 0$ a constante achada no teorema 8.6. denotaremos por H o subconjunto de $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$, definido da seguinte maneira: um elemento $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in H$ se, e somente se:

- a) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\| \leq c \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$
- b) para cada $n \geq 1$ existe um número natural m_n e números racionais $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m_n}$ tal que
  - i) $t_i \geq 0$ para cada i e $\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i = 1$.
  - ii) $\left\| \sum_{i=1}^{n+m_n} t_i (x_i - \sum_{j=1}^i y_j) \right\| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Na demonstração do teorema 8.11 necessitaremos dos teoremas 8.9 e 8.10 abaixo.

Teorema 8.9. *O conjunto H é um subconjunto de Borel de $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto (logo H é analítico).*

Demonstração. [32]-p.372.

Seja $A = \{((x_n), (y_n)) \in E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}} : \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\| \leq c \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|\}$, logo $A \subset E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$ é Boreliano, com efeito, sejam as funções $f_n: E^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_\sigma: E^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n((x_n)_n) = \|x_n\|$ e $g_\sigma((y_n)_n) = \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\|, \sigma \subset \mathbb{N}$ finito, ambas são contínuas, logo $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n((x_n)_n)$ e $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} g_\sigma((y_n)_n)$ são mensuráveis, desta forma temos que $f((x_n)_n, (y_n)_n) = -c \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n((x_n)_n) + \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} g_\sigma((y_n)_n)$ é mensurável. Assim $A = f^{-1}([-\infty, 0])$ é Boreliano.

Claramente $A = \{((x_n), (y_n)) \in E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}} : \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} y_i \right\| \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|\}$ é Borel.

Para cada $m \geq 0$, seja $\mathbb{Q}^{m+1}$ o produto de $m+1$ cópias racionais e seja $T_m = \{t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : t_i \geq 0 \forall i \text{ e } \sum_{i=0}^m t_i = 1\}$; para $t \in T_m$ e $n \geq 1$, consideremos $H_{t,n} = \{((x_n), (y_n)) \in E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}} : \left\| \sum_{i=n}^{n+m} t_{i-n} (x_i - \sum_{j=1}^i y_j) \right\| \leq \frac{1}{n}\}$, cada $H_{t,n}$ é fechado, logo de Borel em $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$, assim $H = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{t \in T_m} H_{t,n} \right)$ é Boreliano e portanto H é analítico. ■

Teorema 8.10. *Seja E um espaço de Banach separável com a propriedade (u) , então $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subset E$ seqüência fracamente de Cauchy, existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $((x_n), (y_n)) \in H$.*

Demonstração. [32]-p.372.

Seja $(x_n)_n \subset E$ fracamente de Cauchy, pelo teorema 8.6 existe $c > 0$ e uma série $\sum_{i=1}^n y_i$ f.i.c. em E tal que:

- a) $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*} 0$.
b) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} y_i\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.

Pela parte a) $(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \xrightarrow{E^*} 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) \in \overline{co}(x_n - \sum_{i=1}^n y_i, x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} y_i, x_{n+2} - \sum_{i=1}^{n+2} y_i, \dots),$$

Claramente, $0 \in \overline{co}(x_n - \sum_{i=1}^n y_i, x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} y_i, \dots)$ na $E^* - top$ de E e pelo teorema 1.5 de Mazur, segue que $0 \in \overline{co}(x_n - \sum_{i=1}^n y_i, x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} y_i, \dots)$ na norma de E para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (podemos tomar números racionais no lugar de reais), para cada $n \in \mathbb{N}$ acima, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{m_n} \in co(x_n - \sum_{i=1}^n y_i, x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} y_i, \dots)$ e $\|x_{m_n}\| \leq \frac{1}{n}$, logo existem racionais $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m_n}$ com $t_i \geq 0$, $\forall i = n, n+1, \dots, n+m_n$, $\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i = 1$ e $x_{m_n} = \sum_{i=n}^{n+m_n} t_i(x_i - \sum_{j=1}^i y_j)$.

Claramente, existem $m_n \in \mathbb{N}$ e $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m_n}$ racionais com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i = 1$ tal que $\|\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i(x_i - \sum_{j=1}^i y_j)\| \leq \frac{1}{n}$. Portanto, $((x_n), (y_n)) \in H$. ■

O seguinte teorema e o lema 8.12 serão muito útil na demonstração de teorema 8.13.

Teorema 8.11. *Seja E um espaço de Banach separável com a propriedade (u) e seja $W = \{(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \text{ é fracamente de Cauchy em } E\}$, então existe um subconjunto analítico M de $E^{\mathbb{N}}$, com $W \subset M$ e uma seqüência $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de funções de M em E universalmente mensuráveis tal que se $x = (x_n)_n \in W$ temos:*

- a) $(x_n - \sum_{i=1}^n S_i(x)) \xrightarrow{E^*} 0 \in E$.
b) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} S_i(x)\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.

Demonstração. [32]-p.373.

Para cada $(x_n) \in W$, pelo teorema 8.10 existe uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $((x_n), (y_n)) \in H$, temos provado no teorema 8.9 que H é analítico no “Polish space” $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$ (isto pela observação c)).

Por outro lado, seja $\pi_1: E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}} \rightarrow E^{\mathbb{N}}$ a projeção e coloquemos $L = \pi_{1/H}: H \rightarrow M = L(H)$; como L é contínuo e H analítico temos que M é analítico. Desta forma $M \subset E^{\mathbb{N}}$ analítico é

projeção de $H \subset E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$ e pelo teorema 1.58, existe uma função $S: M \rightarrow E^{\mathbb{N}}$ universalmente mensurável (com respeito a $\beta_*(M)$ e $\beta(E^{\mathbb{N}})$) tal que $\text{Graf}(S) \subset H$, isto é para cada $(x_n)_n \in M$ temos $((x_n), S((x_n))) \in H$.

Temos que $W \subset M$, onde M é analítico em $E^{\mathbb{N}}$, de fato, seja $(x_n)_n \in W$ logo (x_n) é fracamente de Cauchy e pelo teorema 8.9 existe uma seqüência $(y_n)_n$ com $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ f.i.c. em E tal que $((x_n), (y_n)) \in H$ e desde que $(x_n) = L((x_n), (y_n)) \in M = L(H)$ concluímos que $W \subset M$.

Pela parte anterior, para cada $(x_n) \in W$, $(x_n) \in M$ e temos $((x_n), S((x_n))) \in H$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $\theta_i: E^{\mathbb{N}} \rightarrow E$ a i -ésima projeção e coloquemos $S_i = \theta_i \circ S: M \rightarrow E$. Como θ_i é continua e S é universalmente mensurável, segue que $S_i: M \rightarrow E$ é universalmente mensurável, onde $S((x_n))_n = (S_i((x_n)))_{i \in \mathbb{N}}$. Pela última parte $((x_n), (S_i((x_n)_n))_i) \in H$, logo existe $c > 0$ tais que:

- a) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} S_i((x_n)_n) \right\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.
- b) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ e $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m_n}$ números racionais tais que:
  - i) $t_i \geq 0, \forall i$ e $\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i = 1$.
  - ii) $\left\| \sum_{i=n}^{n+m_n} t_i (x_i - \sum_{j=1}^i S_j((x_n)_n)) \right\| \leq \frac{1}{n}$.

Disto junto com $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é fracamente de Cauchy, implica que $(x_i - \sum_{j=1}^i S_j((x_n)_n)) \xrightarrow{E^*}^{top} 0$, de fato, para cada $x = (x_n)_n \in W$ temos que $((x_n)_n, S((x_n)_n)) \in H$, logo $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} S_i(x) \right\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$,

portanto $\sum_{i=1}^{\infty} S_i(x)$ é f.i.c. em E e para cada $x^* \in E^*$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(S_i(x)) = b$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe m_n e $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m_n}$ de números racionais tais que:

- a.1) $t_i \geq 0, \forall i$ e $\sum_{i=n}^{n+m_n} t_i = 1$.
- b.1) $\left\| \sum_{i=n}^{n+m_n} t_i (x_i - \sum_{j=1}^i S_j(x)) \right\| \leq \frac{1}{n}$.

Dado que a seqüência $x = (x_n)$ é fracamente de Cauchy, para cada $x^* \in E^*$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x^*(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, logo dado $x^* \in B_{E^*}$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ e

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i (x_i - \sum_{j=1}^i S_j(x)) \right\| \leq \epsilon, \text{ além disso } \left| \sum_{i=1}^j x^*(S_i(x)) - b \right| < \epsilon \text{ e } |x^*(x_j) - a| < \epsilon, \forall j \geq n_0, \text{ então} \\ |a - b| &= \left| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i a - \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i b \right| \leq \left| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i a - \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i x^*(x_i) \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i x^*(x_i) - \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i \sum_{j=1}^i x^*(S_j(x)) \right| + \left| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i \sum_{j=1}^i x^*(S_j(x)) - \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i b \right|, \text{ logo} \\ |a - b| &\leq \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i |a - x^*(x_i)| + \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i (x_i - \sum_{j=1}^i S_j(x)) \right\| + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i \left| \sum_{j=1}^i x^*(S_j(x)) - b \right| < \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i \epsilon + \epsilon + \sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i \epsilon ,$$

porém $\sum_{i=n_0}^{n_0+m_{n_0}} t_i = 1$ e claramente $|a - b| < 3\epsilon$, $\forall \epsilon$, logo $a = b$ e, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = a = b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x^*(S_i(x))$, $\forall x^* \in E^*$. Assim $(x_n - \sum_{i=1}^n S_i(x)) \xrightarrow{E^*}^{top} 0 \in E$. ■

Lema 8.12 (Arens). *Sejam K um compacto, $K_0 \subset K$ um subconjunto fechado de K e M um subespaço fechado, separável de $C(K_0, E)$. Então existe uma isometria linear contínua $S: M \rightarrow C(K, E)$ tal que $S(f)|_{K_0} = f$ para cada $f \in M$.*

Demonstração. [43]-p.144.

Definimos $F: K_0 \rightarrow \mathcal{L}(M, E)$ tal que $F(t) = \delta_t$, $\forall t \in K_0$ onde $\delta_t: M \rightarrow E$ tal que $\delta_t(f) = f(t)$ é linear contínuo e $\|\delta_t\| \leq 1$, desta forma F é linear contínua com $\|F\| \leq 1$.

Consideremos $N = \{T \in \mathcal{L}(M, E) : \|T\| \leq 1\}$, logo observemos que $Im(F) \subset N$. Dado que M é subespaço fechado, separável no espaço de Banach $C(K_0, E)$ temos que M é separável e completo, seja $(h_n)_n \subset M$ denso na B_M bola unitária e coloquemos $d(T_1, T_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|T_1(h_n) - T_2(h_n)\|}{2^n}$ para cada $T_1, T_2 \in N$, d é uma métrica em N , logo N é convexo, completo e metrizável (N é fechado e $\mathcal{L}(M, E)$ é completo) e pelo teorema 1.74 de Arens existe uma extensão $\hat{F}: K \rightarrow N$ contínua com $\hat{F}|_{K_0} = F$.

Definiremos $S: M \rightarrow C(K, E)$, pondo $S(f)(t) = \hat{F}(t)(f)$ para cada $f \in M$ e $t \in K$. S é um operador linear contínuo, pois temos $\|S(f)(t)\| \leq \|\hat{F}(t)\| \|f\| \leq \|\hat{F}\| \|f\| \leq \|F\| \|f\| \leq \|f\|$, $\forall f \in M$, logo $\|S(f)\| \leq \|f\|$, $\forall f \in M$. Se $t \in K_0$ temos $\hat{F}(t) = F(t) = \delta_t$, então $\hat{F}(t)(f) = \delta_t(f) = f(t)$ para todo $f \in M$ e $t \in K_0$. Assim, $S(f)(t) = f(t)$, $\forall t \in K_0$ e $f \in M$. Claramente, $S(f)|_{K_0} = f$, $\forall f \in M$.

Seja $f \in M \subset C(K_0, E)$, então $\|f(t)\| = \|S(f)(t)\|$, $\forall t \in K_0$ logo $|f(t)| \leq \|S(f)\|$, $\forall t \in K_0$, claramente $\|f\| \leq \|S(f)\|$, $\forall f \in M$ e pela parte anterior $\|S(f)\| \leq \|f\|$, assim $\|S(f)\| = \|f\|$, para todo $f \in M$. ■

Agora usando os lemas 8.4, 8.7 e 8.12 e o teorema 8.11, demonstraremos o próximo resultado que será útil no teorema 8.14.

Teorema 8.13 (Kalton-Saab). *Se E tem a propriedade (u), então cada operador linear contínuo $T: C(K, E) \rightarrow F$ incondicionalmente convergente é um operador de Dieudonné.*

Demonstração. Veja [43]-p.146.

Seja $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador incondicionalmente convergente, pelo teorema 6.18, T é

fortemente limitado, isto é, a sua medida representante $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ é de semi-variação limitada tal que para cada $(A_n)_n \subset \beta$ com $\bigcap_n A_n = \emptyset$, $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$ e $\int_K f dm = T(f)$ para cada $f \in C(K, E)$, pelo lema 8.4 existe uma medida de controle $\mu: \beta \rightarrow [0, 1]$ tal que $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$.

Demonstraremos que para cada sequência $(\varphi_n) \subset C(K, E)$ fracamente de Cauchy, temos $(T(\varphi_n))_n \subset F$ convergente fracamente.

De fato, seja $(\varphi_n)_n \subset C(K, E)$ uma sequência fracamente de Cauchy na bola unitária de $C(K, E)$, isto é, $\|\varphi_n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in K$, $(\varphi_n(t)) \subset E$ é fracamente de Cauchy, basta definirmos $\delta_t: C(K, E) \rightarrow E$, pondo $f \mapsto f(t)$, onde δ_t é linear contínuo; como $(\varphi_n) \subset C(K, E)$ é fracamente de Cauchy, temos que $(\delta_t(\varphi_n))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy, logo $(\varphi_n(t))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy para cada $t \in K$.

Podemos supor que E é separável, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(K) \subset E$ é separável, logo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(K)$ é separável e desde que todo subespaço fechado de um espaço que tem a propriedade (u) tem a propriedade (u), então $\bigcup_n \varphi_n(K) \subset E$ é separável e tem a propriedade (u) o que permite supor E separável e com a propriedade (u).

Agora, pelo teorema 8.11 existem um conjunto analítico $H \subset E^{\mathbb{N}}$, $c > 0$ e funções universalmente mensuráveis $h_i: H \rightarrow E$ (com as σ -álgebras $\beta_*(H)$ e $\beta(E)$) tais que, para cada sequência $x = (x_n)_n$ fracamente de Cauchy em E temos:

- i) $(x_n - \sum_{i=1}^n h_i(x)) \xrightarrow{E^*} 0 \in E$.
- ii) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} h_i(x)\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\| \leq r$.

Seja $\varphi: K \rightarrow H$ tal que $\varphi(t) = (\varphi_n(t))_n$, $\forall t \in K$, φ é contínuo e dado que $\varphi(t) = (\varphi_n(t))_n$ é fracamente de Cauchy para cada $t \in K$ temos pela parte anterior que

- a) $(\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i(\varphi(t))) \xrightarrow{E^*} 0 \in E$.
- b) $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \|\sum_{i \in \sigma} h_i(\varphi(t))\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|\varphi_n(t)\| \leq r$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $f_i = h_i \circ \varphi: K \rightarrow E$, claramente cada f_i é μ -mensurável, pois dado que $\varphi: K \rightarrow H$ é contínuo, φ é mensurável com as σ -álgebras β_μ e $\beta_*(H)$ (ver lema 8.7) além disso temos que as $h_i: H \rightarrow E$ são mensuráveis nas σ -álgebras $\beta_*(H)$ e $\beta(E)$, então $f_i = h_i \circ \varphi: K \rightarrow E$ é mensurável nas σ -álgebras $\beta_\mu(K)$ e $\beta(E)$, isto é, cada f_i é μ -mensurável.

Por outro lado, como $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para cada $A \in \beta$ com $\mu(A) < \delta$ temos $\widetilde{m}(A) < \frac{\epsilon}{2r}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ pelo teorema 1.59 de Lusin existem um compacto

$K_i \subset K$, com $\mu(K \setminus K_i) < \frac{\delta}{2^i}$ e $f_{i|_{K_i}}$ função contínua; coloquemos $g_i = f_{i|_{K_i}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e $K_0 = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$, K_0 é compacto onde $\mu(K \setminus K_0) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (K \setminus K_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta$, assim $\widetilde{m}(K \setminus K_0) < \frac{\epsilon}{2r}$.

Voltando a b) e dado que $f_i = h_i \circ \varphi$ temos, $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} f_i(t) \right\| \leq r, \forall t \in K$, em particular $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} g_i(t) \right\| \leq r, \forall t \in K_0$, assim $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} g_i \right\| \leq r$ em $C(K_0, E)$ e pelo teorema 1.10, $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ é f.i.c. em $C(K_0, E)$.

Seja $M = \overline{[g_i : i \in \mathbb{N}]}$ $\subset C(K_0, E)$ o subespaço fechado separável gerado pelos g_n em $C(K_0, E)$ e pelo lema 8.12 existe uma isometria linear contínua $S_\epsilon : M \rightarrow C(K, E)$ tal que $S_\epsilon(f)|_{K_0} = f, \forall f \in M$ e dado que $T \circ S_\epsilon : M \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente e a série $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ é f.i.c em M , temos que a série $\sum_{i=1}^n T \circ S_\epsilon(g_i)$ converge em norma de F , porém $\left\| \sum_{i \in \sigma} g_i \right\|_M = \left\| S_\epsilon \left(\sum_{i \in \sigma} g_i \right) \right\|_{C(K, E)}$ pela isometria S_ϵ e além disso $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} S_\epsilon(g_i) \right\|_{C(K, E)} = \sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} g_i \right\|_{C(K_0, E)} \leq r$, assim $\sup_{\substack{\sigma \subset \mathbb{N} \\ \text{finito}}} \left\| \sum_{i \in \sigma} S_\epsilon(g_i) \right\|_{C(K, E)} \leq r$ e $S_\epsilon(g_i) = f_i, \forall i \in \mathbb{N}$ em K_0 , logo:

$$\begin{aligned} \left\| \int_K \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) - \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) \right) dm \right\| &= \left\| \int_{K \setminus K_0} \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) - \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) \right) dm \right\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in K \setminus K_0} \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) - \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) \right\| \widetilde{m}(K \setminus K_0) \leq \\ &\leq \left(\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i) \right\| \right) \widetilde{m}(K \setminus K_0) \leq 2r \widetilde{m}(K \setminus K_0) < \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\int_K \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) dm = T \left(\sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i) \right) = \sum_{i=1}^n T \circ S_\epsilon(g_i)$ e pela parte anterior esta converge para algum $y_\epsilon \in F$, logo $\int_K \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) dm \rightarrow y_\epsilon$ para cada $\epsilon > 0$.

Observamos que, para cada $0 < \epsilon < 1$, o net (y_ϵ) é de Cauchy em F , pois:

$$\begin{aligned} \|y_{\epsilon_1} - y_{\epsilon_2}\| &\leq \|y_{\epsilon_1} - \int_K \sum_{i=1}^n S_{\epsilon_1}(g_i)(t) dm\| + \left\| \int_K \left(\sum_{i=1}^n S_{\epsilon_1}(g_i)(t) - \sum_{i=1}^n f_i(t) \right) dm \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_K \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) - \sum_{i=1}^n S_{\epsilon_2}(g_i)(t) \right) dm \right\| + \left\| \int_K \sum_{i=1}^n S_{\epsilon_2}(g_i)(t) dm - y_{\epsilon_2} \right\| \end{aligned}$$

fazendo $n \rightarrow +\infty$ temos que $\|y_{\epsilon_1} - y_{\epsilon_2}\| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$, assim $(y_\epsilon)_{0 < \epsilon < 1} \subset F$ é de Cauchy, logo converge a $y \in F$, por tanto $y_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} y \in F$.

Seja $y^* \in F^*$ e $m_{y^*} : \beta \rightarrow E^*$ a medida vetorial de variação limitada enumeravelmente aditiva. Como $\widetilde{m}$ é μ -contínua e $\lambda = |m_{y^*}|$ é $\widetilde{m}$ -contínua, pois $|m_{y^*}|(A) \leq \widetilde{m}(A), \forall A \in \beta$, segue que λ é μ -contínua e pelo teorema 10.11 temos que existe uma função $h : K \rightarrow E^*$ tal que:

- i) $\int_K \|h(t)\| d\mu = |m_{y^*}|(K) = \|T^*(y^*)\|.$
 ii) $\int_K \Psi dm_{y^*} = \int_K h(t)\Psi(t) d\mu, \forall \Psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, \mu).$

Nós temos observado que cada φ_n é contínua e $f_i = h_i \circ \varphi$ é μ -mensurável, logo $\varphi_n - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi$ é μ -mensurável, assim $\varphi_n - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, \mu)$ e pela parte anterior temos:

$$\begin{aligned} y^*\left(\int_K (\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) dm\right) &= \int_K (\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) dm_{y^*} = \\ &= \int_K h(t)(\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) d\mu, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pela parte a) $(\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) \xrightarrow{E^*} 0 \in E$ e como $h(t) \in E^*$, segue que $h(t)(\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) \rightarrow 0$ onde $\|h\| \|\varphi_n - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi\| < +\infty$ e pelo teorema da convergência dominada temos:

$$y^*\left(\int_K (\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) dm\right) = \int_K h(t)(\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) d\mu \rightarrow 0.$$

Finalmente $T(\varphi_n) - y = \int_K \varphi_n(t) dm - y$, logo:

$$\begin{aligned} T(\varphi_n) - y &= \int_K (\varphi_n(t) - \sum_{i=1}^n h_i \circ \varphi(t)) dm + \int_K (\sum_{i=1}^n f_i(t) - \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t)) dm + \\ &+ \left(\int_K \sum_{i=1}^n S_\epsilon(g_i)(t) dm - y_\epsilon\right) + (y_\epsilon - y); \end{aligned}$$

pelos fatos anteriores, concluímos que $y^*(T(\varphi_n) - y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, logo $T(\varphi_n) \xrightarrow{F^*} y$. ■

Na demonstração do teorema 8.1 faremos uso do seguinte teorema.

Teorema 8.14. *Seja E espaço de Banach com a propriedade (u), então o espaço $C(K, E)$ tem a propriedade V , se e somente se, $C(K, E)$ tem a propriedade de Dieudonné.*

Demonstração. [43]-p.148.

($\Rightarrow$) suponha que $C(K, E)$ tem a propriedade V , isto é $\mathcal{I}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F), \forall F$.

Demonstraremos que para cada espaço de Banach F , $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F)$.

De fato, seja F um espaço de Banach e $T \in \mathcal{D}(C(K, E), F)$, pelo quadro geral (*) do capítulo 3 p. 17 $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{I}(C(K, E), F)$ e por hipótese $\mathcal{I}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F)$, então temos que $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F), \forall F$.

($\Leftarrow$) suponhamos que E tem propriedade (u) e $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F), \forall F$.

Demonstraremos que para cada espaço de Banach F , $\mathcal{I}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F)$.

De fato, seja F um espaço de Banach e seja $T \in \mathcal{I}(C(K, E), F)$, logo $T: C(K, E) \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente onde E tem a propriedade (u) pelo teorema 8.13 temos que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é um operador de Dieudonné, portanto pela hipótese $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto, isto é $T \in \mathcal{W}(C(K, E), F)$. ■

Finalmente demonstraremos o teorema 8.1.

Demonstração do teorema 8.1 (veja [43]-p.149).

a) Demonstraremos que para cada espaço de Banach F , $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F)$.

De fato, seja F um espaço de Banach e $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador Dieudonné e consideremos $H = B_{C(K, E)}$ a bola unitária de $C(K, E)$ logo para cada $t \in K$, $H(t) = \{\varphi(t) : \varphi \in H\} \subset E$ é limitado, pois $\|\varphi(t)\| \leq 1$, $\forall \varphi \in H$ e $t \in K$.

Para cada $t \in K$, $H(t) \in \mathcal{WC}(E)$: de fato, seja $(\varphi_n(t))_n \subset H(t)$ uma seqüência limitada como E é um espaço de Banach pelo teorema 1.19 de Rosenthal junto com o fato de que E não contém cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$, existe uma subseqüência $(\varphi_{n_k}(t))_n$ fracamente de Cauchy em E , desta forma $H(t) \in \mathcal{WC}(E)$.

Dado que $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{I}(C(K, E), F)$ (veja cap.3 p. 17) temos que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é incondicionalmente convergente e pelo teorema 6.18 segue que $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fortemente limitado (veja definição 6.13), logo sua medida representante $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, F^{**})$ é fortemente limitado e pela proposição 8.5 parte c) $\{|m_{y^*}| : y^* \in B_{F^*}\} \subset ca(K)$ é relativamente fracamente compacto e pelo teorema 1.36 existe uma medida de controle $\mu: \beta \rightarrow [0, 1]$ tal que $\lim_{\mu(B) \rightarrow 0} |m_{y^*}|(B) = 0$ uniformemente em $y^* \in B_{F^*}$, com $\mu(K) = 1$ e desde que $\widetilde{m}(B) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(B)$, segue que $\lim_{\mu(B) \rightarrow 0} \widetilde{m}(B) = 0$.

Seja $(T(\varphi_n))_n \subset T(H)$ uma seqüência qualquer, com $(\varphi_n)_n \subset H$ uma seqüência com $\|\varphi_n(t)\| \leq 1$ para cada $t \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Dado que as $\varphi_n: K \rightarrow B_E$ são contínuas e $\mu: \beta \rightarrow [0, 1]$ uma medida positiva, temos que cada $\varphi_n: K \rightarrow B_E$ é μ -mensurável (com as σ -álgebras $\beta_\mu(K)$ e $\beta_*(E)$) e pelo teorema 1.75 existe uma seqüência $(\tilde{\varphi}_n)_n \subset C(K, E)$ com $\tilde{\varphi}_n \in co(\varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots)$ e dois conjuntos C e $L \in \beta$ disjuntos com $\mu(C \cup L) = 1$ tal que:

- i) para cada $t \in C$, $(\tilde{\varphi}_n(t))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy;
- ii) para cada $t \in L$, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $(\tilde{\varphi}_n(t))_{n \geq n_t}$ é equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Por outro lado, para cada $t \in K$ temos que $\tilde{\varphi}_n(t) \in co(\varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t), \dots)$, logo

$(\tilde{\varphi}_n(t))_n \subset co(H(t))$ para cada $t \in K$ e $H(t) \in \mathcal{WC}(E)$ então $co(H(t)) \in \mathcal{WC}(E)$ para cada $t \in K$ e pela parte ii) e o teorema 1.19 de Rosenthal temos que $L = \emptyset$, logo $\mu(C) = 1 = \mu(K)$,

desta forma $(\tilde{\varphi}_n(t))_n \subset E$ é fracamente de Cauchy q.s, então existe $A \in \beta$ com $\mu(A) = 0$ e $(\tilde{\varphi}_n(t))_n$ fracamente de Cauchy para cada $t \in K \setminus A$.

Nós temos que $\lim_{\mu(B) \rightarrow 0} \tilde{m}(B) = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall B \in \beta$ com $\mu(B) < \delta$ implica $\tilde{m}(B) < \frac{\epsilon}{2}$; seja $G \in \beta$ um aberto tal que $A \subset G$ e $\mu(G) < \delta$ logo pela parte anterior $\tilde{m}(G) < \frac{\epsilon}{2}$. Fazendo $K_0 = K \setminus G \subset K$, K_0 é compacto e pela parte anterior $(\tilde{\varphi}_n)_n \subset C(K_0, E)$ é fracamente de Cauchy (veja lema 6.7).

Consideremos $M = \overline{[\tilde{\varphi}_n : n \in \mathbb{N}]} \subset C(K_0, E)$ o subespaço fechado gerado pelos $\tilde{\varphi}_n$ e pelo lema 8.12 existe uma isometria linear contínua $S_\epsilon: M \rightarrow C(K, E)$ tal que $S_\epsilon(f)|_{K_0} = f$, $\forall f \in M$. Temos que $T : C(K, E) \rightarrow F$ é um operador de Dieudonné e S_ϵ é linear contínuo, então $T \circ S_\epsilon : M \rightarrow F$ é um operador de Dieudonné onde $(\tilde{\varphi}_n)_n \subset M$ é fracamente de Cauchy, portanto $(T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n))_n \subset F$ é fracamente convergente em F , além disso

$\|T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| = \|\int_K (\tilde{\varphi}_n - S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)) dm\|$, porém $S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)|_{K_0} = \tilde{\varphi}_n$, logo pela parte anterior temos que $\|T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| = \|\int_{K \setminus K_0} (\tilde{\varphi}_n - S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)) dm\|$ e $K_0 = K \setminus G$, e então $\|T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| \leq \|\tilde{\varphi}_n - S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| \tilde{m}(G) \leq (\|\tilde{\varphi}_n\| + \|S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\|) \tilde{m}(G)$ como S_ϵ é uma isometria e $\tilde{\varphi}_n \in M$, temos $\|T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| \leq 2\|\tilde{\varphi}_n\| \tilde{m}(G) \leq 2\tilde{m}(G) < \epsilon$.

Portanto $\|T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n)\| < \epsilon$ e então $(T(\tilde{\varphi}_n) - T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n))_n \subset \epsilon B_F$.

Claramente, $\{T(\tilde{\varphi}_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n) : n \in \mathbb{N}\} + \epsilon B_F$ para cada $\epsilon > 0$, onde $\{T \circ S_\epsilon(\tilde{\varphi}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente fracamente compacto para cada $\epsilon > 0$ e pelo teorema 1.21 temos que $\{T(\tilde{\varphi}_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset F$ é relativamente fracamente compacto.

Por outro lado, nós temos que $m_{y^*} : \beta \rightarrow E^*$ é uma medida vetorial regular enumeravelmente aditiva de variação limitada onde $\lim_{\mu(B) \rightarrow 0} |m_{y^*}|(B) = 0$ uniformemente para cada $y^* \in B_{F^*}$ e pelo teorema 10.11 existe uma única função $h : K \rightarrow E^*$ tal que:

i') $|m_{y^*}|(K) = \int \|h(t)\| d\mu = \|T^*(y^*)\| < +\infty$;
ii') $\int_K \Psi dm_{y^*} = \int_K h(t) \Psi(t) d\mu$, $\forall \Psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m_{y^*})$;
e como $(\tilde{\varphi}_n(t)) \subset E$ é uma seqüência fracamente de Cauchy, $\forall t \in K \setminus A$ e dado que $h(t) \in E^*$ existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $h(t)\tilde{\varphi}_n(t) \rightarrow \lambda(t)$ q.s. e com $\|h\tilde{\varphi}_n\| \leq \|h\|M$ e $\int_K \|h(t)\| d\mu < \infty$, pelo teorema da convergência dominada, segue que $\int_K h(t)\tilde{\varphi}_n(t) d\mu \rightarrow \int_K \lambda(t) d\mu$, porém $\int_K \tilde{\varphi}_n dm_{y^*} \rightarrow \int_K \lambda(t) d\mu$ (os $\tilde{\varphi}_n \in C(K, E)$ logo são m -mensuráveis, m_{y^*} -mensuráveis), assim $y^*(\int_K \tilde{\varphi}_n dm) \rightarrow \int_K \lambda(t) d\mu$ e $T(\tilde{\varphi}_n) = \int_K \tilde{\varphi}_n dm$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Claramente, $y^*(T(\tilde{\varphi}_n)) \rightarrow \int_K \lambda(t) d\mu$, desta maneira $(T(\tilde{\varphi}_n))_n \subset F$ é fracamente de Cauchy e usando que $(T(\tilde{\varphi}_n))_n \subset F$ é relativamente fracamente compacto, concluímos que $(T(\tilde{\varphi}_n))_n \subset F$ é fracamente convergente, onde $T(\tilde{\varphi}_n) \in co(T(\varphi_n), T(\varphi_{n+1}), \dots)$ para cada seqüência $(T(\varphi_n))_n \subset T(H)$. Pelo lema 8.3 segue que $T(H)$ é relativamente fracamente compacto, isto

é, $T(B_{C(K,E)}) \subset F$ é relativamente fracamente compacto, logo $T: C(K, E) \rightarrow F$ é fracamente compacto.

Portanto $\mathcal{D}(C(K, E), F) \subset \mathcal{W}(C(K, E), F)$ para cada espaço de Banach F . Assim $C(K, E)$ tem a propriedade de Dieudonné.

b) o resultado segue de a) e do teorema 8.14. ■

Capítulo 9

K estabilidade e K cancelabilidade da propriedade de Grothendieck

Seguindo o esquema de [35], no teorema 9.4 deste capítulo daremos uma condição necessária e suficiente sobre o compacto K para que a propriedade de Grothendieck, seja K estável; para isto precisaremos dos seguintes teoremas.

Teorema 9.1 (Cembranos). *Sejam K um compacto infinito e E um espaço de Banach de dimensão infinita, então $C(K, E)$ contém um subespaço complementado que é isomorfo de $c_o(\mathbb{N})$.*

Demonstração. [35]-p.556.

Como a dimensão de E é infinito, pelo teorema 1.20 de Josefson-Nissenzweig existe uma seqüência $(x_n^*)_n \subset E^*$ com $\|x_n^*\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x_n^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para cada $x \in E$.

Por hipótese, K é um espaço compacto infinito, logo existe uma seqüência de abertos não vazios dois a dois disjuntos $(G_n)_n \subset \beta$ (pois K tem um ponto de acumulação).

Seja $(x_n)_n \subset E$ com $\|x_n\| \leq 2$ tal que $x_n^*(x_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $t_n \in G_n$ e consideremos $\varphi \in C(K, E)$, logo $(\varphi(t_n))_n \subset E$, como $|x_n^*\varphi(t_n)| \leq \|\varphi(t_n)\| \leq \|\varphi\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que $(x_n^*\varphi(t_n))_n \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$, definimos uma aplicação $T : C(K, E) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$, pondo $T(\varphi) = (x_n^*\varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $\varphi \in C(K, E)$. T é linear contínuo, pois $\|T(\varphi)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*\varphi(t_n)|$, então $\|T(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in C(K, E)$, desta forma $\|T\| \leq 1$.

Por outro lado, se $f \in C(K)$ e $x \in E$, temos que $f(\cdot)x \in C(K, E)$, logo $T(f(\cdot)x) = (x_n^*(f(\cdot)x)(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, $T(f(\cdot)x) = (f(t_n)x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$, porém $|f(t_n)x_n^*(x)| \leq \|f\| \|x_n^*(x)\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e por hipótese $x_n^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\forall x \in E$, logo $(f(t_n)x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}} \in c_o(\mathbb{N})$ para cada $x \in E$, então $T(f(\cdot)x) \in c_o(\mathbb{N})$, $\forall f \in C(K)$

e $x \in E$ e pelo lema 4.1.7 o conjunto $\{\sum_{i=1}^n f_i(\cdot)x_i : f_i \in C(K), x_i \in E\}$ é denso em $C(K, E)$, claramente $T(\varphi) \in c_o(\mathbb{N})$ para cada $\varphi \in C(K, E)$. Desta forma, $T: C(K, E) \rightarrow c_o(\mathbb{N})$, tal que $T(\varphi) = (x_n^* \varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $\varphi \in C(K, E)$ é linear contínuo.

Afirmamos que $T: C(K, E) \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ não é incondicionalmente convergente, de fato; observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{t_n\}$ e $K \setminus G_n$ são fechados e disjuntos. Como K é normal, pelo teorema 1.22, existe uma função contínua $f_n: K \rightarrow [0, 1]$ tal que $f_n(t_n) = 1$ e $f_n(K \setminus G_n) = 0$ e $\|f_n\| = 1$.

Consideremos a seqüência $(f_n(\cdot)x_n)_n \subset C(K, E)$ e observemos que $f_n(t_n) = \delta_n^m$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ (por construção), logo $T(f_n(\cdot)x_n) = (x_m^*(f_n(\cdot)x_n)(t_m))_m = (f_n(t_m)x_m^*(x_n))_m$, assim $T(f_n(\cdot)x_n) = (\delta_n^m x_m^*(x_n))_m = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $(e_n)_n$ é a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$. Seja $\sigma \subset \mathbb{N}$ um subconjunto finito, então:

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} \pm f_n(\cdot)x_n \right\| = \sup_{t \in K} \left\| \sum_{n \in \sigma} \pm f_n(t)x_n \right\| = \sup_{t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} \left\| \sum_{n \in \sigma} \pm f_n(t)x_n \right\|,$$

pois se; $t \in K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, temos $f_n(t) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} \pm f_n(\cdot)x_n \right\| = \sup_{t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} \left\| \sum_{n \in \sigma} \pm f_n(t)x_n \right\| \leq 2, \quad \forall \sigma \subset \mathbb{N} \text{ finito},$$

e pelo teorema 1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)x_n$ é f.i.c. em $C(K, E)$, desta forma $\sum_{n=1}^{\infty} T(f_n(\cdot)x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \subset c_o(\mathbb{N})$ não converge em norma. Assim, $T: C(K, E) \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ não é incondicionalmente convergente.

Por outro lado, pelo teorema 3.6 e pela afirmação anterior; existe um subespaço $M \subset C(K, E)$, isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ e complementado em $C(K, E)$. ■

Teorema 9.2 (Khurana). *Sejam K um compacto e E um espaço de Banach. Se $C(K, E)$ tem a propriedade de Grothendieck, então K é finito ou E tem dimensão finita.*

Demonstração. [35]-p.557.

Suponhamos que $C(K, E)$ tem a propriedade de Grothendieck, queremos provar que K é finito ou E tem dimensão finita.

De fato, suponhamos que K é infinito e $\dim(E) = +\infty$, logo pelo teorema 9.1, segue que existe um subespaço M isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ e complementado em $C(K, E)$; assim existem um isomorfismo $\varphi: M \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ e uma projeção linear contínua $P: C(K, E) \rightarrow M$.

Se $B_M \subset M$ é a bola unitária em M , temos que $P(B_M) = B_M$ e $\varphi(B_M) = B_{c_o(\mathbb{N})}$; desta forma $Q = (\varphi \circ P): C(K, E) \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ é linear contínua, onde $Q(B_M) = B_{c_o(\mathbb{N})}$. Como $c_o(\mathbb{N})$ não é reflexivo,

$B_{c_o(\mathbb{N})}$ não pode ser fracamente compacto, assim $Q: C(K, E) \rightarrow c_o(\mathbb{N})$ não é fracamente compacto. Por tanto, existe $Q \in \mathcal{L}(C(K, E), c_o(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{W}(C(K, E), c_o(\mathbb{N}))$ o que é absurdo. ■

Teorema 9.3. *Seja K um compacto. $C(K)$ tem a propriedade de Grothendieck se, e somente se, $C(K)$ não contém cópias complementadas e isomorfas a $c_o(\mathbb{N})$.*

Demonstração. [35]-p.557.

Pelo teorema 6.17, $C(K)$ tem a propriedade V e então o resultado segue da proposição 3.35 parte b). ■

Teorema 9.4. *Seja K um compacto. A propriedade de Grothendieck é K estável se, e somente se, K é finito.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $|K| = +\infty$ e tomemos um espaço de Banach E com a propriedade de Grothendieck tendo dimensão infinita, pelo teorema 9.2, temos que $C(K, E)$ não tem a propriedade de Grothendieck, o que é absurdo.

$(\Leftarrow)$ Verificaremos os seguintes fatos:

(a) $C(K)$ tem a propriedade de Grothendieck.

De fato, $C(K) \sim \mathbb{R}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, logo tem a propriedade de Grothendieck (isto segue de 9.3).

(b) Se E tem a propriedade de Grothendieck, então $C(K, E)$ tem a propriedade de Grothendieck.

De fato, se E tem a propriedade de Grothendieck, como $C(K, E)$ é isométrico a

$\underbrace{E \oplus E \oplus E \oplus \dots \oplus E}_{n\text{-vezes}}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, ele tem a propriedade de Grothendieck (isto segue imediatamente da proposição 3.35 (a.2)). ■

Para estudarmos a K cancelabilidade da propriedade de Grothendieck para K disperso necessitaremos do seguinte lema.

Lema 9.5. *Seja K um compacto disperso e infinito, então $C(K)$ não tem a propriedade de Grothendieck.*

Demonstração. Por teorema 5.7, temos $C^*(K) = \ell_1(|K|)$ e pela proposição 3.35, basta mostrarmos que existe uma seqüência em $\ell_1(|K|)$ convergente na $c_o(|K|)$ -top. de $\ell_1(|K|)$, mas não convergente na $\ell_\infty(|K|)$ -top. de $\ell_1(|K|)$. Seja $A \subset K$, $|A| = \aleph_0$.

Para cada $n \in A$, coloquemos $x_n^* = e_n$, onde $(e_n)_n \subset \ell_1(|K|)$ é a base canônica de $\ell_1(A) = \ell_1(\mathbb{N})$; seja $a = (a_\gamma)_{|K|} \subset c_o(|K|)$, logo $x_n^*(a) = a_n \rightarrow 0$. Assim $(x_n^*)_n \subset \ell_1(|K|)$ é fraca-estrela convergente a

zero.

Por outro lado, seja $x^{**} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) \in \ell_\infty(|K|)$, logo $x^{**}(e_n) = (-1)^{n+1}$, assim $(x_n^*)_n$ não converge fracamente em $\ell_1(|K|)$. ■

O seguinte teorema dá uma condição necessária e suficiente para que a propriedade de Grothendieck seja K cancelável, onde K é um compacto disperso.

Teorema 9.6. *Seja K um compacto disperso. Então a propriedade de Grothendieck é K cancelável se, e somente se, K é infinito.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que K é finito, pelo teorema 9.4, temos que $C(K)$ tem a propriedade de Grothendieck; absurdo.

($\Leftarrow$) verificaremos os seguintes fatos:

a) $C(K)$ não tem a propriedade de Grothendieck.

De fato, o resultado segue do lema 9.5.

b) Seja E um espaço de Banach tal que $C(K, E)$ tem a propriedade de Grothendieck, então E também tem a propriedade de Grothendieck.

De fato, seja E um espaço de Banach tal que $C(K, E)$ tem a propriedade de Grothendieck, basta observarmos que E é complementado em $C(K, E)$ (veja corolário 6.22), logo não é difícil ver que E tem a propriedade de Grothendieck. ■

Capítulo 10

K cancelabilidade de conter subespaço isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < +\infty$

O objetivo deste capítulo é demonstrar os teoremas 10.7 e 10.13 os quais dam uma condição necessária para a K cancelabilidade de conter subespaço isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < +\infty$ de um conjunto compacto disperso e não disperso respectivamente.

Utilizaremos as seguintes definições, lemas e teoremas abaixo.

Lema 10.1 (Samuel). *Sejam $E_i, i=1,2,\dots$ espaços de Banach e $1 < p < +\infty$, se $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0$, então existe $1 \leq i < +\infty$, tal que $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow E_i$.*

Demonstração. [37]-p.109.

Sejam $Y = (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0$ e $T: \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow Y$ um isomorfismo sobre a imagem, e $a, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $a\|z\| \leq \|T(z)\| \leq b\|z\|$, $\forall z \in \ell_p(\mathbb{N})$, tomemos $0 < \epsilon < \frac{a}{2}$ e $c = \frac{a}{b} \leq 1$.

Suponhamos que $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E_i, \forall i, i = 1, 2, \dots$, logo por [37] teorema 1, temos que $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n, \forall n, n = 1, 2, \dots$

Sejam $P_n : Y \rightarrow Y$ projeções definidas por $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

Como $P_1 \circ T: \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow E_1$ não é um isomorfismo sobre a imagem, existe $z_1 \in \ell_p(\mathbb{N}), \|z_1\| = 1$, com $\|P_1 \circ T(z_1)\| \leq \frac{\epsilon}{2^1} c$. Seja $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(z_1) - P_{m_1} \circ T(z_1)\| \leq \frac{\epsilon}{2} c$ e coloquemos $y_1 = P_{m_1} \circ T(z_1)$. Como $P_{m_1} \circ T$ não é um isomorfismo sobre a imagem, existe $z_2 \in \ell_p(\mathbb{N})$ tal que $\|z_2\| = 1$ e $\|P_{m_1} \circ T(z_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} c$, fixemos $m_2 > m_1$ tal que $\|T(z_2) - P_{m_2} \circ T(z_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} c$ e denotemos $y_2 = (P_{m_2} - P_{m_1})(T(z_2))$, logo $\|T(z_2) - y_2\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} c$.

Continuando por indução finita, podemos construir uma seqüência normalizada z_n , $n = 1, 2, \dots$ de $\ell_p(\mathbb{N})$, uma seqüência estritamente crescente de inteiros $m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$ e uma seqüência de elementos de Y , y_n , $n = 1, 2, \dots$ tal que:

- a) $\forall n, n \geq 1, \|T(z_n) - y_n\| \leq \frac{c}{2^n}$;
- b) $\forall n, n \geq 2, y_n = (P_{m_n} - P_{m_{n-1}})(T(z_n))$ e $y_1 = P_{m_1}(z_1)$;
- c) $\frac{a}{2} \leq \|y_n\| \leq b, \forall n, n = 1, 2, \dots$ (pois, $\frac{c}{2^n} c \leq \frac{a}{2}$.)

De $\frac{a}{2}|a_n| \leq \|a_n y_n\| \leq b|a_n|, \forall (a_n)_n \subset c_o(\mathbb{N})$, segue que $y_n, n = 1, 2, \dots$ é uma seqüência básica de Y equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$.

O operador linear contínuo $L: c_o(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}$ definida por $L(e_n) = y_n$, satisfaz $\frac{a}{2} \leq \|L\| \leq b$ e por tanto $\frac{a}{2}\|L^{-1}(x)\| \leq \|L(L^{-1}(x))\| = \|x\|, \forall x \in \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}$, isto é $\|L^{-1}\| \leq \frac{2}{a}$.

Colocando $L^*: \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}^* \rightarrow c_o^*(\mathbb{N})$ e tomando $y_n^*, n = 1, 2, \dots$ tal que $L^*(y_n^*) = e_n^*$, segue que $y_n^*(y_j) = y_n^*(L(e_j)) = L^*(y_n^*)(e_j) = e_n^*(e_j) = \delta_j^n$ e $\|y_n^*\| = \|L^{*-1}(e_n^*)\| \leq \frac{2}{a}, \forall n, n = 1, 2, \dots$

De, $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(z_n) - y_n\| \|y_n^*\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2^n} \frac{2}{a} = \frac{c}{a} < 1$, segue do teorema 1 de [10], que $T(z_n)$ (e por tanto z_n), $n = 1, 2, \dots$ é uma seqüência básica equivalente a $y_n, n = 1, 2, \dots$, portanto $c_o(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, absurdo. ■

Teorema 10.2 (Samuel). *Sejam K um compacto disperso, E um espaço de Banach e $1 \leq p < +\infty$. Se $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K, E)$, então $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$.*

Demonstração. Veja [37].

Por hipótese existe um subespaço $H \subset C(K, E)$ tal que $H \sim \ell_p(\mathbb{N})$, logo H é separável.

Definimos a relação $t_1 \sim t_2$ se, e somente se, $h(t_1) = h(t_2)$ para todo $h \in H$ e sejam o espaço quociente $K_1 = \frac{K}{\sim}$ e $\varphi: K \rightarrow K_1$ a aplicação canônica que é contínua e sobrejetora, pelo teorema 1.63, segue que K_1 é compacto disperso.

Tomemos $(h_n)_n$ denso em $B_H \subset C(K, E)$ e consideremos as $(\bar{h}_n)_n, \bar{h}_n: K_1 \rightarrow E$, definidas por $\bar{h}_n(\bar{t}) = h_n(t)$, logo $h_n = \bar{h}_n \circ \varphi$ e portanto $\bar{h}_n$ são funções contínuas.

Definimos uma métrica d em K_1 , dada por: $d(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|h_n(t_1) - h_n(t_2)\|}{2^n}, \forall \bar{t}_1, \bar{t}_2 \in K_1$. Mostremos que K_1 com a topologia quociente é equivalente a (K_1, d) . Coloquemos $id: K_1 \rightarrow (K_1, d)$, id é uma função contínua bijetora, pois se $\bar{t}_\delta$ é um net convergindo para $\bar{t}$ na topologia quociente de K_1 , como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|h_n(t_\delta) - h_n(t)\|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \|h_n(t_\delta) - h_n(t)\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$, da continuidade das $(h_n)_n$, segue que $d(\bar{t}_\delta, \bar{t}) \xrightarrow{\delta} 0$, assim K_1 é métrico.

Seja $\varphi^0 : C(K_1, E) \rightarrow C(K, E)$ dado por $\bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \varphi$. φ^0 está bem definida e sendo $\varphi: K \rightarrow K_1$ uma função contínua sobrejetora, φ^0 é uma isometria, logo $C(K_1, E)$ é isométrico a $\varphi^0(C(K_1, E))$.

Observemos que $H \subset \varphi^0(C(K_1, E))$, pois $h_n = \varphi^0(\bar{h}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sendo K_1 compacto métrico enumerável por [24]-p.16 existe um ordinal α , $0 \leq \alpha < \omega_1$ tal que $K_1 \sim [0, \alpha]$ e pelo teorema 1.66, $C(K_1, E) \sim C([0, \alpha], E)$, logo $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C([0, \alpha], E)$.

Faremos a demonstração por indução sobre α .

- se α é finito, veja [37] teorema 1
- se $\alpha = \omega$, o teorema 10.2 segue do lema 10.1

Supondo o teorema válido para todo γ , $\omega < \gamma < \alpha$ e seja $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C([0, \alpha], E)$, pela teoria isomorfa de $C[0, \alpha]$, veja [11]-p.59, podemos supor que α é um ordinal limite. Sejam α_n , $n = 1, 2, \dots$ uma seqüência estritamente crescente de ordinais infinitos convergindo para α .

De $C([0, \alpha], E) \sim (\sum_{n=1}^{\infty} C([0, \alpha_n], E))_0$ (veja [11]-p.59), segue do lema 10.1 que $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow C([0, \alpha_i], E)$ e pela hipótese de indução, $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$. ■

O seguinte teorema dá uma condição necessária e suficiente para que a propriedade de não conter cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$ seja K estável.

Teorema 10.3. *Seja K um compacto. A propriedade de não conter $\ell_1(\mathbb{N})$ é K estável se, e somente se, K é disperso.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Se K é não disperso então $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$ (veja teorema 1.63) o que contradiz a hipótese.

($\Leftarrow$) Verificaremos os seguintes fatos:

- a) $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$. Veja teorema 1.63
- b) se $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$, então $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K, E)$. O resultado segue do teorema 10.2. ■

O teorema 10.4 abaixo mostra que a propriedade de não conter cópias de $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável para cada compacto K não disperso.

Teorema 10.4. *Seja K um compacto. A propriedade de não conter $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável se, e somente se, K é não disperso.*

Demonstração

($\Rightarrow$) Se K é disperso então $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$ (veja teorema 1.63) o que contradiz a hipótese. ■

($\Leftarrow$) Verificaremos os seguintes fatos:

a) $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$.

De fato, por hipótese K é não disperso logo, $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K)$. (veja teorema 1.63).

b) se E é um espaço de Banach tal que $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K, E)$ então $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow E$.

De fato, sabemos que $E \xhookrightarrow{c} C(K, E)$ (veja corolário 6.22) e se $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow E$ então

$\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow C(K, E)$. ■

Seguindo os resultados de [5], no teorema 10.7 daremos uma condição necessária para que a propriedade de conter cópias complementares de $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < +\infty$ seja K cancelável para K disperso, para tal, precisaremos das seguintes definições, teoremas e corolários.

Teorema 10.5. *Seja $T: C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo tendo m como medida representante tal que $\widetilde{m}$ admite uma medida de controle $\lambda: \beta \rightarrow [0, 1]$ discreta. Seja $A = \{t_n: n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto enumerável de átomos de λ , $\pi_n: B(\beta, E) \rightarrow E$ tal que $\pi_n(f) = f(t_n)$, $\forall f \in B(\beta, E)$, e $j_n: E \rightarrow B(\beta, E)$ a imersão dado por $j_n(x) = \chi_{\{t_n\}}(\cdot)x$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{T} - \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i\| = 0$.*

Demonstração. [5]-p.359.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $A_n = \{t_i: i \geq n\}$ consideremos $\overline{T}: B(\beta, E) \rightarrow F^{**}$ a extensão de T , logo $\overline{T}(f) = \int_K f dm$, $\forall f \in B(\beta, E)$ (veja teorema 6.6).

Dado que, A é o conjunto enumerável de átomos de λ , temos $A = \{t_1, \dots, t_n\} \dot{\cup} A_n$. Logo, $\overline{T}(f) = \int_A f dm = \sum_{i=1}^n m(\{t_i\})f(t_i) + \int_{A_n} f dm$.

Por outro lado, $\overline{T} \circ j_i \circ \pi_i: B(\beta, E) \rightarrow F$ para cada $i \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\overline{T} \circ j_i \circ \pi_i(f) = \overline{T}(j_i(f(t_i))) = \overline{T}(\chi_{\{t_i\}}(\cdot)f(t_i)) = \int_K \chi_{\{t_i\}}(t)f(t_i)dm = m(\{t_i\})f(t_i),$$

assim, pelas partes anteriores temos $\overline{T}(f) = \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i(f) + \int_{A_n} f dm$.

Claramente, $\|\overline{T}(f) - \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i(f)\| = \|\int_{A_n} f dm\|$, logo $\|\overline{T}(f) - \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i(f)\| \leq \|f\|\widetilde{m}(A_n)$

desta forma, $\|\overline{T} - \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i\| \leq \widetilde{m}(A_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Observemos que, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, logo $\lambda(A_n) \rightarrow 0$. Como λ é uma medida de controle para $\widetilde{m}$, isto é $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$, segue-se que $\widetilde{m}(A_n) \rightarrow 0$, então pela parte anterior $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{T} - \sum_{i=1}^n \overline{T} \circ j_i \circ \pi_i\| = 0$. ■

No que segue consideraremos K um espaço de Hausdorff compacto e disperso.

Teorema 10.6 (Bombal-Porras). *Sejam E um espaço de Banach, $1 < p < +\infty$. $C(K, E)$ contém cópia complementada de $\ell_p(\mathbb{N})$ se, e somente se, E contém cópia complementada de $\ell_p(\mathbb{N})$.*

Demonstração. [5]-p.364.

(a) $\Rightarrow$ (b) suponhamos que $C(K, E)$ contém cópia complementada de $\ell_p(\mathbb{N})$, logo existe um subespaço fechado $H \subset C(K, E)$ isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ e uma projeção linear contínua $P: C(K, E) \rightarrow H$. Como H é isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ e $\ell_p(\mathbb{N})$ não contém cópias de $c_o(\mathbb{N})$, temos que H não contém cópias de $c_o(\mathbb{N})$. Usando o teorema 3.5, segue que $P: C(K, E) \rightarrow H$ é incondicionalmente convergente. Seja m a medida representante de P ; pelo teorema de Dobrakov (veja teorema 6.18 e lema 8.4) existe uma medida de controle $\lambda: \beta \rightarrow [0, 1]$, tal que $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \widetilde{m}(A) = 0$. Como K é disperso, λ é discreta.

Seja $A = \{t_n: n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto enumerável de átomos de λ . Para cada $n \in \mathbb{N}$, lembrando que $B(\beta, E) = \{f: K \rightarrow E / f \text{ é totalmente } \beta\text{-mensurável}\}$ (veja definição 6.5), seja $\pi_n: B(\beta, E) \rightarrow E$ tal que $\pi_n(f) = f(t_n)$, $\forall f \in B(\beta, E)$ e $j_n: E \rightarrow B(\beta, E)$ tal que $j_n(x) = \chi_{\{t_n\}}(\cdot)x$, $\forall x \in E$. Pelo teorema 10.5 temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{P} - \sum_{i=1}^n \overline{P} \circ j_i \circ \pi_i\| = 0$, onde $\overline{P}: B(\beta, E) \rightarrow H$ é a extensão de P (veja definição 6.5, teorema 6.6 e observe que H é reflexivo).

$\overline{P}: B(\beta, E) \rightarrow H$ não é estritamente singular, pois $P: C(K, E) \rightarrow H$ não é estritamente singular, dado que $P|_H: H \rightarrow H = P(H)$ é um isomorfismo topológico. Agora afirmamos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $S = \overline{P} \circ j_n: E \rightarrow H$ não é estritamente singular, pois se $\overline{P} \circ j_n: E \rightarrow H$ é estritamente singular para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\pi_n: B(\beta, E) \rightarrow E$ é contínua, segue que $\overline{P} \circ j_n \circ \pi_n: B(\beta, E) \rightarrow H$ é estritamente singular para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 1.70 de Tosio Kato, temos que $\sum_{i=1}^n \overline{P} \circ j_i \circ \pi_i: B(\beta, E) \rightarrow H$ é estritamente singular para cada $n \in \mathbb{N}$ e pela parte anterior temos, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{P} - \sum_{i=1}^n \overline{P} \circ j_i \circ \pi_i\| = 0$, novamente pelo teorema 1.70, $\overline{P}$ é estritamente singular, absurdo.

Sendo $S: E \rightarrow H$ não estritamente singular, existe um subespaço $Z \subset E$ de dimensão infinita, tal que $S|_Z: Z \rightarrow S(Z) \subset H$ é isomorfismo topológico, assim $S(Z) \subset H$ é de dimensão infinita, mas H é isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$, e como todo subespaço de dimensão infinita de $\ell_p(\mathbb{N})$ contém um subespaço de dimensão infinita isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ e complementado em $\ell_p(\mathbb{N})$ (veja [33]-p.214) temos que existe um subespaço $M \subset S(Z)$ de dimensão infinita isomorfo a H e complementado em H .

Seja $Q: H \rightarrow M$ a projeção linear contínua e consideremos R o isomorfismo $S|_{S(Z)}^{-1}$ restrito a M , $R: M \rightarrow S|_{S(Z)}^{-1}(M) \subset Z$. Claramente $R \circ Q \circ S: E \rightarrow S|_{S(Z)}^{-1}(M) \subset E$ é uma projeção linear contínua onde $S|_{S(Z)}^{-1}(M)$ é isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ (pois M é isomorfo a H e H a $\ell_p(\mathbb{N})$). Portanto E contém uma cópia complementada de $\ell_p(\mathbb{N})$.

(b) $\Rightarrow$ (a) se E contém cópia complementada isomorfa a $\ell_p(\mathbb{N})$, seja $Z \subset E$, Z isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ e $Z \xhookrightarrow{c} E$, nós sabemos que $E \xhookrightarrow{c} C(K, E)$ (veja corolário 6.22), logo $Z \xhookrightarrow{c} C(K, E)$ e Z isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$. ■

O teorema abaixo nos dá uma condição necessária para que a propriedade de conter cópias complementares a $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < +\infty$ seja K cancelável.

Teorema 10.7. *Sejam K um compacto disperso e $1 < p < +\infty$, então a propriedade de conter cópias complementadas de $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável.*

Demonstração. Verificaremos os seguintes fatos.

a) $\ell_p(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow C(K)$, $\forall p$, $1 < p < +\infty$.

De fato, se $\ell_p(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} C(K)$, como $\dim(\ell_p(\mathbb{N})) = +\infty$ teríamos pelo teorema 1.71, que $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_p(\mathbb{N})$; absurdo.

b) Se E é um espaço de Banach e $1 < p < +\infty$, tal que $\ell_p(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} C(K, E)$, então $\ell_p(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} E$.

O resultado segue do teorema 10.6. ■

O nosso objetivo agora é mostrar através do teorema 10.13 que a propriedade de conter cópias complementadas isomorfas a $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável para qualquer compacto K . Utilizaremos resultados de [20] junto com as seguintes definições, observações e teoremas.

Definição 10.8. Sejam $\lambda, \mu : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medidas finitamente aditivas na σ -álgebra β dos borelianos de K . Dizemos que λ é contínua com respeito a μ ou simplesmente μ -contínua, se $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \lambda(A) = 0$ para cada $A \in \beta$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $A \in \beta$ com $|\mu|(A) < \delta$, temos $\lambda(A) < \epsilon$.

Definição 10.9. Sejam (K, β, μ) um espaço de medida finita positiva e

$$\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é } \mu\text{-mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Em $\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ definimos $f \sim g$ se, e somente se, $\mu(\{t \in K : f(t) \neq g(t)\}) = 0$.

Observação. Seja $\rho : \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ um levantamento em $\mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ (veja teorema 1.55). Então:

a) se $f \leq g$ q.s., então temos $\rho(f)(t) \leq \rho(g)(t)$ para cada $t \in K$.

Com efeito, pois tomando $f' \sim f$ tal que $f'(t) \leq g(t)$ para cada $t \in K$, temos $(g - f') \geq 0$, logo $\rho(g - f') \geq 0$, assim $\rho(g) \geq \rho(f')$, porém dado que $f' \sim f$, segue que $\rho(f') = \rho(f)$ e portanto $\rho(f)(t) \leq \rho(g)(t)$, $\forall t \in K$.

b) $|\rho(f)| = \rho(|f|)$ para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$.

De fato, $(\rho(|f|))^2 = \rho(|f|^2) = \rho(f \cdot f) = (\rho(f))^2$, porém $\rho(|f|) \geq 0$, assim $\rho(|f|) = |\rho(f)|$.

Teorema 10.10. *Sejam $m : \beta \rightarrow E^*$ uma medida vetorial não nula de variação limitada, coloquemos $\lambda = |m| : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ a variação de m e $\rho : \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda)$ um levantamento. Então existe $g : K \rightarrow E^*$ tal que:*

- (a) para cada $x \in E$, a função $t \mapsto g(t)x$ é λ -integrável
- (b) para cada $A \in \beta$ e cada $x \in E$, $m(A)(x) = \int_A g(t)x d\lambda$.
- (c) $\rho(g(\cdot)x) = g(\cdot)x$ para cada $x \in E$.
- (d) $\int_K f dm = \int_K g(t)f(t)d\lambda$ para cada $f \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$.
- (e) a função $t \mapsto \|g(t)\|$ é λ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda$.
- (f) $\|g(\cdot)\| = 1$, $\lambda - q.s.$

Demonstração. Veja [16]-p.263.

Se $m \neq 0$, temos que $\lambda = |m|: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ e uma medida positiva e finita, logo pelo teorema 1.55 existe um levantamento $\rho: \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda)$.

Para cada $x \in E$ definimos $m_x: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m_x(A) = m(A)x$, $\forall A \in \beta$. Seja $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n C_i$, logo $\sum_{i=1}^n |m_x(C_i)| \leq (\sum_{i=1}^n \|m(C_i)\|)\|x\|$, assim $|m_x|(A) \leq \lambda(A)\|x\|$ para cada $A \in \beta$.

Desta forma m_x é λ -contínua e pelo teorema 1.27 de Radon-Nikodym, existe uma única função $g_x: K \rightarrow \mathbb{R}$ λ -integrável, tal que $m_x(A) = \int_K g_x(t)d\lambda$ e $|m_x|(A) = \int_K |g_x(t)|d\lambda$ para cada $A \in \beta$. Portanto temos $\int_A |g_x(t)|d\lambda = |m_x|(A) \leq \lambda(A)\|x\|$; logo $\int_A |g_x(t)|d\lambda \leq \int_A \|x\|d\lambda$, $\forall A \in \beta$, portanto $|g_x(t)| \leq \|x\|$ $\lambda - q.s.$ assim $g_x \in \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda)$.

Modificando g_x num conjunto λ -nulo nós podemos supor que, $\rho(g_x(\cdot)) = g_x(\cdot)$, pois observemos que $\rho(g_x(\cdot)) \sim g_x(\cdot)$ e fazendo $h_x(\cdot) = \rho(g_x(\cdot))$ temos $h_x(\cdot) \sim g_x(\cdot)$ e assim $\rho(h_x(\cdot)) = h_x(\cdot)$.

Pela observação b) acima temos que $|g_x(\cdot)| = |\rho(g_x(\cdot))| = \rho(|g_x(\cdot)|)$ e pela observação a), segue que $|g_x(\cdot)| \leq \rho(\|x\|) = \|x\|$, desta forma $|g_x(t)| \leq \|x\|$, $\forall t \in K$.

Seja, $g: K \rightarrow E^*$ definida por $g(t)x = g_x(t)$ para cada $t \in K$ e $x \in E$. $g(t)$ é linear e pela desigualdade anterior, g está bem definida.

- a) para cada $x \in E$, a função $t \mapsto g(t)x$ é λ -integrável.

De fato, pois $g(t)x = g_x(t)$ que é λ -integrável para cada $x \in E$.

- b) para cada $A \in \beta$ e cada $x \in E$, $m(A)(x) = \int_A g(t)x d\lambda$.

De fato, dado $A \in \beta$ e $x \in E$ temos que, $m(A)x = m_x(A) = \int_A g_x(t)d\lambda = \int_A g(t)(x)d\lambda$.

- c) $\rho(g(\cdot)x) = g(\cdot)x$, para cada $x \in E$.

De fato, nós temos provado, que dado $x \in E$, $g(\cdot)x = g_x(\cdot) = \rho(g_x(\cdot)) = \rho(g(\cdot)x)$.

- d) $\int_K f dm = \int_K g(t)f(t)d\lambda$ para cada $f \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$.

De fato, seja $f \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$, logo existe uma seqüência de funções simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal

que $\int_K \|f_n(t) - f_m(t)\| d\lambda \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$ e $f_n \xrightarrow{\lambda - q.s.} f$ de b), segue que $\int_K f_n dm = \int_K g(t) f_n(t) d\lambda$, mas $(g(\cdot) f_n(\cdot))_n$ é claramente uma seqüência de Cauchy em $L^1(K, \beta, \lambda)$ que converge $\lambda - q.s.$ a $g(\cdot) f(\cdot)$, logo pela parte anterior, segue-se $\int_K f dm = \int_K g(t) f(t) d\lambda$.

e) a função $t \mapsto \|g(t)\|$ é λ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda$.

De fato, pela primeira parte temos provado que, $\rho(g_x(\cdot)) = g_x(\cdot)$ e pela observação b) acima, temos que $\rho(|g_x(\cdot)|) = |\rho(g_x(\cdot))| = |g_x(\cdot)|$ para cada $x \in E$ e além disso $\|g(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |g_x(t)|$.

Seja $\mathcal{F} = \{g_x \in \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \lambda) : \|x\| \leq 1\}$ e coloquemos $g_x \leq g_y$, se $g_x(t) \leq g_y(t)$ $q.s.$, claramente pelo teorema 1.56, temos que $\|g(t)\|$ é λ -mensurável e portanto $t \mapsto \|g(t)\|$ é λ -integrável.

Por outro lado, de b) $m(A)x = \int_A g(t)(x) d\lambda$, $\forall A \in \beta, x \in E$, logo $\|m(A)\| \leq \int_A \|g(t)\| d\lambda$ para todo $A \in \beta$, então $|m|(K) \leq \int_K \|g(t)\| d\lambda$.

Nós temos que $\|g(t)(x)\| \leq \|x\|$ para cada $t \in K$ e $x \in E$, logo $\|g(t)\| \leq 1$, $\forall t \in K$, assim $\int_K \|g(t)\| d\lambda \leq \int_K d\lambda = \lambda(K) = |m|(K)$. Desta forma, $|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda$.

f) $\|g(\cdot)\| = 1$, $\lambda - q.s.$

De fato, por e) $\|g(t)\| \leq 1$, $\forall t \in K$ e $\|m(A)\| \leq \int_A \|g(t)\| d\lambda$, $\forall A \in \beta$. Seja $V: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(A) = \int_A \|g(t)\| d\lambda$, $\forall A \in \beta$, V é uma medida real positiva tal que $\|m(A)\| \leq V(A)$, $\forall A \in \beta$.

Desde que, $\lambda = |m|$ é a menor medida positiva tal que $\|m(A)\| \leq \lambda(A)$, $\forall A \in \beta$, temos que $\lambda(A) \leq V(A) = \int_A \|g(t)\| d\lambda$, $\forall A \in \beta$. Assim, $\int_A (\|g(t)\| - 1) d\lambda \geq 0$, $\forall A \in \beta$ logo, $\|g(\cdot)\| \geq 1$ $q.s.$

Portanto, $\|g(t)\| = 1$ $\lambda - q.s.$ ■

Teorema 10.11. *Sejam $m: \beta \rightarrow E^*$ uma medida não nula de variação limitada, $\lambda = |m|: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ a sua variação e $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida finita e positiva e $\rho: \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$ um levantamento. Se λ é μ -contínua, então existe uma função $h: K \rightarrow E^*$ tal que:*

- (a) para cada $x \in E$, a função $t \mapsto h(t) \cdot x$ é μ -integrável;
- (b) para cada $A \in \beta$ e cada $x \in E$, $m(A)(x) = \int_A h(t)(x) d\mu$;
- (c) $\rho(h(\cdot)x) = h(\cdot)x$ para cada $x \in E$;
- (d) $\int_K \psi dm = \int_K h(t)\psi(t) d\mu$, $\forall \psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$;
- (e) a função $t \mapsto \|h(t)\|$ é μ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|h(t)\| d\mu$;
- (f) $\|h(\cdot)\| = 1$ $\mu - q.s.$

Demonstração. Veja [16]-p.269.

Se $\mu \neq 0$, sendo μ uma medida finita e positiva, pelo teorema 1.55 existe um levantamento $\rho: \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$. Como λ é μ -contínua, pelo teorema 1.27 de Radon Nikodym, existe uma única função $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) = \int_A f(t) d\mu$ para cada $A \in \beta$.

Agora pelo teorema 10.10 existe uma função $g: K \rightarrow E^*$ tal que:

- i) para cada $x \in E$ $t \mapsto g(t)x$ é λ -integrável;
- ii) para cada $A \in \beta$ e cada $x \in E$, $m(A)(x) = \int_A g(t)(x) d\lambda$;
- iii) $\int_K \psi dm = \int_K g(t)(\psi(t)) d\lambda$, $\forall \psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$;
- iv) a função $t \mapsto \|g(t)\|$ é λ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda$;
- v) $\|g(\cdot)\| = 1$ λ -q.s.;

Consideremos $h: K \rightarrow E^*$ tal que $h(t)(x) = f(t)g(t)(x)$, $\forall x \in E$ e $t \in K$. $h(t)$ é linear e contínua e h está bem definida.

- a) Para cada $x \in E$ a função $t \mapsto h(t)(x)$ é μ -integrável.

De fato, nós temos que $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ é uma medida positiva e $\lambda(A) = \int_A f(t) d\mu$, $\forall A \in \beta$; dado $x \in E$, por i) $g(\cdot)x$ é λ -integrável e pelo teorema 1.28, segue-se que $f(\cdot)g(\cdot)x$ é μ -integrável e $\int_A g(t)(x) d\lambda = \int_A f(t)g(t)(x) d\mu$. Assim, a função $t \mapsto h(t)(x)$ é μ -integrável e $\int_A g(t)(x) d\lambda = \int_A h(t)(x) d\mu$, $\forall A \in \beta, x \in E$.

- b) Para cada $A \in \beta$ e cada $x \in E$, $m(A)(x) = \int_A h(t)(x) d\mu$

De fato, seja $A \in \beta$ e $x \in E$, pela parte ii) anterior temos $m(A)(x) = \int_A g(t)(x) d\lambda$ e pela parte

a) $\int_A g(t)(x) d\lambda = \int_A h(t)(x) d\mu$, assim $m(A)(x) = \int_A h(t)(x) d\mu$.

- c) $\rho(h(\cdot)x) = h(\cdot)x$ para cada $x \in E$.

Com efeito, pela parte a) temos que $\int_A |h(t)(x)| d\mu = \int_A |g(t)(x)| d\lambda \leq \|x\| \int_A \|g(t)\| d\lambda$, porém pela parte v) $\|g(t)\| = 1$ λ -q.s, logo $\int_A |h(t)(x)| d\mu \leq \|x\| \int_A |f(t)| d\mu$. Como K é compacto, existe $M > 0$ tal que $\sup_{t \in K} |f(t)| \leq M$, claramente $\int_A |h(t)(x)| d\mu \leq \int_A M \|x\| d\mu$, $\forall A \in \beta$. Assim $|h(t)(x)| \leq M \|x\|$ μ -q.s, logo $h(\cdot)(x) \in \mathcal{L}^\infty(K, \beta, \mu)$.

Por outro lado, modificando $h(\cdot)x$ num conjunto μ -nulo podemos supor que $\rho(h(\cdot)x) = h(\cdot)x$ para cada $x \in E$ (se $\varphi(\cdot)x = \rho(h(\cdot)x)$, $\varphi(\cdot)x \sim h(\cdot)x$, logo $\rho(\varphi(\cdot)x) = \varphi(\cdot)x$).

- d) $\int_K \psi dm = \int_K h(t)(\psi(t)) d\mu$, $\forall \psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$.

De fato, seja $\psi \in \mathcal{L}_E^1(K, \beta, m)$ pela parte iii) temos $\int_K \psi dm = \int_K g(t)(\psi(t)) d\lambda$ e pela parte a) segue que $\int_K g(t)(\psi(t)) d\lambda = \int_K h(t)(\psi(t)) d\mu$. Claramente $\int_K \psi dm = \int_K h(t)(\psi(t)) d\mu$.

e) a função $t \mapsto \|h(t)\|$ é μ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|h(t)\| d\mu$.

De fato, pela parte a) $\lambda(A) = \int_A |f(t)| d\mu$ onde $|f(\cdot)|$ é μ -integrável e pela parte iv) temos $\|g(\cdot)\|$ é λ -integrável, usando o teorema 1.28, temos $|f(\cdot)|\|g(\cdot)\|$ é μ -integrável e

$$\int_A \|g(t)\| d\lambda = \int_A |f(t)| \|g(t)\| d\mu.$$

Desta forma, como $h(\cdot) = f(\cdot)g(\cdot)$, temos que $\|h(\cdot)\|$ é μ -integrável e $\int_A \|g(t)\| d\lambda = \int_A \|h(t)\| d\mu$, para cada $A \in \beta$. Assim, a aplicação $t \mapsto \|h(t)\|$ é μ -integrável e usando v) segue que

$$|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda = \int_K \|h(t)\| d\mu.$$

f) $\|h(\cdot)\| = 1$ $\mu - q.s.$

De fato, pela parte b) $m(A)(x) = \int_A h(t)(x) d\mu$. Logo $m_x : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m_x(A) = m(A)x$ é μ -contínua e pela unicidade do teorema 1.27 de Radon Nikodym, temos $|m_x|(A) = \int_A |h(t)(x)| d\mu$, pelo mesmo raciocínio do teorema 10.10 parte a)

$$\int_A |h(t)(x)| d\mu = |m_x|(A) \leq \|x\| \mu(A) = \int_A \|x\| d\mu, \quad \forall A \in \beta.$$

Assim, $|h(\cdot)(x)| \leq \|x\|$ $\mu - q.s.$, claramente $\|h(\cdot)\| \leq 1$ $\mu - q.s.$

Pelo anterior $\|m(A)\| \leq \int_A \|h(t)\| d\mu$, $\forall A \in \beta$. Seja $V(A) = \int_A \|h(t)\| d\mu$, $\forall A \in \beta$, desde que μ é a menor medida positiva finita satisfazendo $\|m(A)\| \leq \mu(A)$, $\forall A \in \beta$, segue que $\mu(A) \leq V(A) = \int_A \|h(t)\| d\mu$, $\forall A \in \beta$. Logo $\int_A (\|h(t)\| - 1) d\mu \geq 0$, $\forall A \in \beta$. Claramente temos $\|h(\cdot)\| \geq 1$ $\mu - q.s.$ ■

Teorema 10.12 (Elias Saab-Paulette Saab). *Seja K um compacto e E um espaço de Banach. Então $C(K, E)$ contém uma cópia complementada de $\ell_1(\mathbb{N})$ se, e somente se, E contém uma cópia complementada de $\ell_1(\mathbb{N})$*

Demonstração. [20]-p.44.

($\Rightarrow$) Se $C(K, E)$ contém uma cópia complementada de $\ell_1(\mathbb{N})$, pelo teorema 1.11 de Pelczynski temos que $C^*(K, E)$ contém um subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$.

Nós sabemos pelo teorema 4.2.13 de Singer que $C^*(K, E)$ é isometricamente isomorfo ao conjunto das medidas vetoriais $m: \beta \rightarrow E^*$ fraca-estrela regular de variação limitada com norma $|m|(K) = \|m\|$.

Seja $(m_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de medidas vetoriais em $C^*(K, E)$ equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$ e seja $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|m_n|(A)}{2^n}$, $\forall A \in \beta$ uma medida real.

Seja Σ o complemento de β com respeito a λ . Fixemos um levantamento ρ de $\mathcal{L}^\infty(K, \Sigma, \lambda)$, pelo teorema 10.11 como cada $|m_n|$ é λ -contínua, existe uma seqüência $g_n: K \rightarrow E^*$ tal que:

- a) para cada $x \in E$, a função $t \mapsto g_n(t)(x)$ é λ -integrável;
- b) para cada $A \in \Sigma$ e $x \in E$ temos: $m_n(A)(x) = \int_A g_n(t)(x) d\lambda$;
- c) $\rho(g_n(\cdot)x) = g_n(\cdot)x$, $\forall x \in E$;
- d) a função $t \mapsto \|g_n(t)\|$ é λ -integrável e $|m_n|(K) = \int_K \|g_n(t)\| d\lambda$;
- e) $\|g_n(\cdot)\| = 1$ λ -q.s.

Seja $(a_n)_{1 \leq n \leq p}$ uma seqüência finita de números reais e seja $m = \sum_{n=1}^p a_n m_n$, novamente pelo teorema 10.11 existe $g: K \rightarrow E^*$ tal que:

- a') para cada $x \in E$, $t \mapsto g(t) \cdot x$ é λ -integrável;
- b') para cada $A \in \Sigma$ e $x \in E$ temos, $m(A)(x) = \int_A g(t)(x) d\lambda$;
- c') $\rho(g(\cdot)x) = g(\cdot)x$, $\forall x \in E$;
- d') a função $t \mapsto \|g(t)\|$ é λ -integrável e $|m|(K) = \int_K \|g(t)\| d\lambda$;
- e') $\|g(t)\| = 1$ λ -q.s.

Seja $h = \sum_{n=1}^p a_n g_n$, pelas propriedades b) e b') temos $h(t)(x) = g(t)(x)$, λ -q.s., segue-se que $\rho(h(\cdot)x) = \rho(g(\cdot)x) = g(\cdot)x$ e como $\rho(h(\cdot)x) = \sum_{n=1}^p a_n \rho(g_n(\cdot)x) = \sum_{n=1}^p a_n g_n(\cdot)x = h(\cdot)x$. claramente, $h(t)(x) = g(t)(x)$, $\forall t \in K$ e $x \in E$. Assim, $h(t) = g(t)$, $\forall t \in K$.

Portanto, $\|\sum_{n=1}^p a_n m_n\| = \int_K \|\sum_{n=1}^p a_n g_n(t)\| d\lambda$, para cada seqüência finita de números reais $(a_n)_{1 \leq n \leq p}$. Seja $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ o espaço de todas as seqüências reais finitas e denotaremos por e_n a n -ésima coordenada. Para cada $a = (a_n)_n \in F$ seja $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$. Para cada $t \in K$ definimos a semi-norma $|\cdot|_t$ em F , dada por $|a|_t = \|\sum a_n g_n(t)\|$. Claramente $|a| = \int_K |a|_t d\lambda$ é uma semi-norma em F e $|a| = \|\sum a_n m_n\|$.

Desde que m_n é equivalente a base usual de $c_o(\mathbb{N})$ em $C^*(K, E)$, existem constantes C_1 e C_2 reais tal que $C_2 \|a\|_\infty \leq \|\sum a_n m_n\| \leq C_1 \|a\|_\infty$, logo $C_2 \|a\|_\infty \leq |a| \leq C_1 \|a\|_\infty$ e isto significa que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F com semi-norma $|\cdot|$ é equivalente a base usual de $c_o(\mathbb{N})$. Portanto pelo teorema 1.77 de Bourgain, existe $t \in K$ e uma subsequência $(e_{n_k})_{k \geq 1}$ de $(e_n)_{n \geq 1}$ que é uma c_o -base para $|\cdot|_t$, logo existe uma subsequência g_{n_k} de g_n tal que, $g_{n_k}(t)$ é equivalente à base canônica de $c_o(\mathbb{N})$ em E^* . Finalmente pelo teorema 1.11 de Pelczynski, $\ell_1(\mathbb{N})$ é complementado em E .

($\Leftarrow$) suponhamos que $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} E$, pelo corolário 6.22 temos que $E \xhookrightarrow{c} C(K, E)$, assim $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} C(K, E)$. ■

Terminamos este capítulo com:

Teorema 10.13. *A propriedade de conter cópias complementadas de $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável para cada compacto K .*

Demonstração. Verificaremos os seguintes fatos:

a) $\ell_1(\mathbb{N}) \not\stackrel{c}{\hookrightarrow} C(K)$

De fato, se $\ell_1(\mathbb{N}) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(K)$ e dado que $\dim(\ell_1(\mathbb{N})) = +\infty$ pelo teorema 1.71, temos que $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ o que é absurdo.

b) seja E um espaço de Banach, tal que $\ell_1(\mathbb{N}) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(K, E)$, então $\ell_1(\mathbb{N}) \stackrel{c}{\hookrightarrow} E$.

O resultado segue do teorema 10.12. ■

E deixamos:

Problema. Seja K um compacto não disperso e $1 < p < +\infty$. A propriedade de conter cópias complementadas de $\ell_p(\mathbb{N})$ é K cancelável?

Capítulo 11

K cancelabilidade de conter quociente isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema 11.11. Antes disto precisaremos de algumas observações, definições e lemas.

Definição 11.1. Sejam $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de espaços de Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos uma aplicação $P^n : (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0 \rightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0$, pondo $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ e $P_n = P^0 - P^n : (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0 \rightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0$, pondo $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$; logo $\|P^n\| \leq 1$ e $\|P_n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observação. Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e sobrejetor, então pelo teorema da aplicação aberta (veja teorema 1.61), existe $r > 0$ tal que $B_F \subset T(B_r^E(0))$, logo definimos $r(T) = \inf\{r > 0 : B_F \subset T(B_r^E(0))\}$.

Lema 11.2 (Samuel). Sejam $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de espaços de Banach, $1 < q < +\infty$. Se $(\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0 \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

Demonstração. [37]-p.109.

Denotando $X = (\sum_{i=1}^{\infty} E_i)_0$, seja $T: X \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ um operador linear contínuo e sobrejetor. Suponhamos por absurdo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n não tenha $\ell_q(\mathbb{N})$ como quociente. Nós iremos estabelecer que:

- (i) $\forall r > r(T), \forall \epsilon \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}$, existe $x \in X$ com $x = P^n(x)$ e $\|x\| \leq r$ tal que $\|T(x)\| \geq \epsilon$.

De fato: caso contrário, existe $r > r(T)$ e $\epsilon_0 \in]0, 1[$ e um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in X$, se $x = P^{n_0}(x)$ com $\|x\| \leq r$ temos que $\|T(x)\| < \epsilon_0$.

Seja $y \in B_{\ell_q(\mathbb{N})}$, dado que $r > r(T)$ existe $t \in X$ tal que $\|t\| \leq r$ e $y = T(t)$, coloquemos $x = P_{n_0}(t)$ e $u = P^{n_0}(t)$, claramente $x = t - u$, $P_{n_0}(x) = x$, $P^{n_0}(u) = u$ e

$\|u\| = \|P^{n_0}(t)\| \leq \|t\| \leq r$, logo por hipótese, $\|T(u)\| < \epsilon_0$ e assim temos que

$$\|y - T(x)\| = \|T(t - x)\| = \|T(u)\| < \epsilon_0.$$

Portanto provamos que existe $\epsilon_0 \in]0, 1[$, um real $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in B_{\ell_q(\mathbb{N})}$, existe $x \in X$ com $\|x\| \leq r$, $x = P_{n_0}(x)$ e $\|y - T(x)\| < \epsilon_0$.

Agora, dado $y \in B_{\ell_q(\mathbb{N})}$, pelo que acabamos de provar existe $x_1 \in X$ com $\|x_1\| \leq r$,

$x_1 = P_{n_0}(x_1)$ e $\|y - T(x_1)\| < \epsilon_0$. Observando que $\frac{y - T(x_1)}{\epsilon_0} \in B_{\ell_q(\mathbb{N})}$; novamente existe $x_2 \in X$ com $\|x_2\| \leq r$ e $x_2 = P_{n_0}(x_2)$ tal que $\|y - T(x_1) - \epsilon_0 T(x_2)\| < \epsilon_0^2$; analogamente temos que $\frac{y - T(x_1) - \epsilon_0 T(x_2)}{\epsilon_0^2} \in B_{\ell_q(\mathbb{N})}$ e por tanto, uma vez mais, existe $x_3 \in X$ com $\|x_3\| \leq r$ e $x_3 = P_{n_0}(x_3)$ tal que $\|y - T(x_1) - \epsilon_0 T(x_2) - \epsilon_0^2 T(x_3)\| < \epsilon_0^3$.

Desta forma podemos construir, por indução finita, $(x_n)_n \subset X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|y - \sum_{i=1}^n \epsilon_0^{i-1} T(x_i)\| < \epsilon_0^n$, onde $\|x_i\| \leq r$ para todo $i \in \mathbb{N}$; logo $\sum_{i=1}^{\infty} \|\epsilon_0^{i-1} x_i\| < r \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_0^{i-1} < +\infty$.

Assim $x = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_0^{i-1} x_i \in X$ e sendo T contínua $y = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_0^{i-1} T(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\sum_{i=1}^n \epsilon_0^{i-1} x_i) = T(x)$, onde $x = P_{n_0}(x)$, portanto $T(Im(P_{n_0})) = \ell_q(\mathbb{N})$ e $Im(P_{n_0}) \subset X$, desta forma

$T|_{Im(P_{n_0})} : Im(P_{n_0}) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ é linear, contínua e sobrejetora; logo $Im(P_{n_0}) = \sum_{i=1}^{n_0} E_i \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ e pelo teorema 2 de [37], temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, o que contradiz a nossa hipótese. Da afirmação i) deduzimos que:

- (ii) $\forall r > r(T)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, existem $x \in X$ e $m > n$ tais que $x = (P_m - P_n)(x)$, com $\|x\| \leq r$ e $\|T(x)\| \geq \frac{1}{2}$

De fato, pela parte i) sendo $r > r(T)$ e tomando $\epsilon > \frac{1}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $x_n = P^n(x_n)$ e $\|T(x_n)\| > \frac{1}{2}$.

Observamos que $P_m(x_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_n \in X$, sendo T contínuo segue que $T(P_m(x_n)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(x_n)$, portanto existe $m > n$ tal que $\|T(P_m(x_n))\| \geq \frac{1}{2}$, seja $x = P_m(x_n)$; logo $\|x\| \leq \|x_n\| \leq r$, $P_m(x) - P_n(x) = x$ e $\|T(x)\| \geq \frac{1}{2}$.

Agora denotando para $m = 0, 1, 2, \dots$, $Q^m: \ell_q(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ o operador linear contínuo tal que $Q^m((a_i)_i) = (0, 0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots)$ e colocando, também, $Q_m = id_{\ell_q(\mathbb{N})} - Q^m$, fixando, $r > r(T)$ e $n_0 = 0$, $m_0 = 0$, nós construiremos por recorrência duas seqüências $(n_k)_k$ e $(m_k)_k$ estritamente crescentes de inteiros, uma seqüência $(x_k)_k$ de elementos de X tal que:

- (iii) $\|x_k\| \leq r$, $\forall k = 1, 2, \dots$
(iv) $x_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(x_k)$, $\forall k = 1, 2, \dots$
(v) $\|Q^{m_{k-1}}(T(x_k))\| \geq \frac{1}{2}$ e $\|Q^{m_k}(T(x_k))\| \leq \frac{1}{2^2}$ para cada $k = 1, 2, \dots$

De fato, primeiro observemos que $r(Q^m \circ T) \leq r(T)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pois $\|Q^m\| \leq 1$.

Por ii) para $n_0 = 0$ existem $x_1 \in X$ com $\|x_1\| \leq r$ e $n_1 > n_0$ tais que $x_1 = (P_{n_1} - P_{n_0})(x_1)$ e $\|Q^{m_0}(T(x_1))\| \geq \frac{1}{2}$; uma vez que $T(x_1) \in \ell_q(\mathbb{N})$ existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Q^{m_1}(T(x_1))\| \leq \frac{1}{2^2}$. Pondo $(Q^{m_1} \circ T)$ no lugar de T e usando a observação anterior $r > r(T) \geq r(Q^{m_1} \circ T)$ em ii) temos que para $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $x_2 \in X$ com $\|x_2\| \leq r$ e $n_2 > n_1$ tal que $x_2 = (P_{n_2} - P_{n_1})(x_2)$ e $\|Q^{m_1}(T(x_2))\| \geq \frac{1}{2}$; dado que $T(x_2) \in \ell_q(\mathbb{N})$ existe $m_2 > m_1$ tal que $\|Q^{m_2}(T(x_2))\| \leq \frac{1}{2^2}$. Analogamente, pondo $(Q^{m_2} \circ T)$ no lugar de T e usando a última observação em ii) temos que para $n_2 \in \mathbb{N}$ existe $x_3 \in X$ com $\|x_3\| \leq r$ e $n_3 > n_2$ tal que $x_3 = (P_{n_3} - P_{n_2})(x_3)$ e $\|Q^{m_2}(T(x_3))\| \geq \frac{1}{2}$; sendo $T(x_3) \in \ell_q(\mathbb{N})$ existe $m_3 > m_2$ tal que $\|Q^{m_3}(T(x_3))\| \leq \frac{1}{2^2}$; procedendo da mesma forma encontramos seqüências $(n_k), (m_k)$ e (x_k) satisfazendo iv), v) e vi).

Para cada $k \in \mathbb{N}$, coloquemos $y_k = T(x_k)$, logo $(y_k)_k \subset \ell_q(\mathbb{N})$ é uma seqüência limitada e podemos supor que $(y_k)_k \subset B_{\ell_q(\mathbb{N})}$, sendo $\ell_q(\mathbb{N})$ reflexivo (veja teorema 1.60), temos que $B_{\ell_q(\mathbb{N})}$ é fracamente compacto (veja teorema 1.44) e dado que $\ell_q^*(\mathbb{N}) = \ell_{q'}(\mathbb{N})$ é separável (veja teorema 1.60), segue-se que $B_{\ell_q(\mathbb{N})}$ é métrico na topologia fraca (veja teorema 1.46), logo $B_{\ell_q(\mathbb{N})}$ é fracamente seqüencialmente compacto, a menos de extrair uma subsequência de $(y_k)_k$ nos podemos supor que $(y_k)_k \subset \ell_q(\mathbb{N})$ é uma seqüência de Cauchy na $\ell_q^*(\mathbb{N})$ -top. de $\ell_q(\mathbb{N})$.

Coloquemos $z_k = y_{2k-1} - y_{2k}$ e $v_k = x_{2k-1} - x_{2k}$, $\forall k = 1, 2, \dots$; então $T(v_k) = z_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \in \ell_q(\mathbb{N})$ na $\ell_q^*(\mathbb{N})$ -top. de $\ell_q(\mathbb{N})$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, usando vi) temos que:

$\|z_k\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1} - y_{2k})\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k})\| - \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1})\| \geq \frac{1}{4}$, assim $\inf_k \|z_k\| \geq \frac{1}{4}$ e $z_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ na $\ell_q^*(\mathbb{N})$ -top. de $\ell_q(\mathbb{N})$; logo pelo teorema 1.9 principio de seleção de Bessaga-Pelczynski, a menos de extrair uma subsequência de $(z_k)_k$, nós podemos supor que $(z_k)_k$ é

equivalente a base canônica de $\ell_q(\mathbb{N})$, logo existe $c > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e toda família $a_1, a_2, \dots, a_n$ de escalares temos que $\|\sum_{i=1}^n a_i z_i\| \geq c(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ e de iv) e v) nós deduzimos que

$\|\sum_{i=1}^n a_i v_i\| = \|\sum_{i=1}^n a_i (x_{2i-1} - x_{2i})\| \leq 2r \max_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|$, como $T(v_i) = z_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, temos:
 $(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\|T\|}{c} \|\sum_{i=1}^n a_i v_i\| \leq \frac{2r\|T\|}{c} \max_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, em particular para $a_i = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, temos; $n^{\frac{1}{q}} = (\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2r\|T\|}{c}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o que é absurdo. Concluimos então que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$. ■

Definição 11.3. Sejam α um ordinal qualquer e E um espaço de Banach. $C_0([0, \alpha], E)$ indicará o conjunto das funções contínuas em $[0, \alpha]$ a valores em E que são nulas em α , com a norma do supremo.

Lema 11.4. Sejam α um ordinal enumerável infinito e E um espaço de Banach, então

$C([0, \alpha], E) \sim C_0([0, \alpha], E)$.

Demonstração. Veja [11], ou defina $T : C([0, \alpha], E) \rightarrow C_0([0, \alpha], E)$ por $f \mapsto g$, pondo $g(0) = f(\alpha)$, $g(n) = f(n-1) - f(\alpha)$, $1 \leq n \leq w$ e $g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha)$, $\forall \beta \geq w$ logo, T é um isomorfismo. ■

Lema 11.5. *Sejam K um compacto enumerável, E um espaço de Banach. Se $C(K, E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, $1 < q < +\infty$, então $E \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.*

Demonstração. Suponhamos que $C(K, E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$. Dado que K é compacto enumerável pela proposição 8.5.6 de [39], K é disperso e metrizável, logo do teorema 8.6.10 de [39], segue-se que existe um ordinal α com $\alpha < w_1$ (onde w_1 é o primeiro ordinal infinito) tal que K é homeomorfo a $[0, \alpha]$, então $C(K, E) \sim C([0, \alpha], E)$ (veja teorema 1.66), por tanto temos que $C([0, \alpha], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

Faremos a demonstração por indução transfinita

- (i) se α for finito, digamos $\alpha = n$, temos que $(\sum_{i=1}^n E)_0 = C([0, \alpha], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$. Logo, pelo lema 11.2, segue-se que $E \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.
- (ii) se $\alpha = w$, então pelo lema 11.4 $C([0, \alpha], E) \sim (\sum_{i=1}^{\infty} E)_0 \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$; novamente pelo lema 11.2, temos que $E \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.
- (iii) Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo ordinal β , com $\beta < \alpha$, onde α é infinito; como não é difícil verificar que $C[0, \alpha + 1]$ é isométrico a $C[0, \alpha]$ para todo ordinal α infinito, podemos supor que α é um ordinal limite. Seja β_n uma seqüência estritamente crescente de ordinais infinitos convergindo para α , então pelo lema 11.4

$$C([0, \alpha], E) \sim C_0([0, \alpha], E) \sim C([0, \beta_1], E) \oplus (\sum_{i=1}^{\infty} C([\beta_i + 1, \beta_{i+1}], E))_0$$

(veja teorema 2 de [37]) e por hipótese $C([0, \alpha], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, agora usando o lema 11.2 temos que $C([0, \beta_1], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ ou existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C([\beta_{i_0} + 1, \beta_{i_0+1}], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

iii.a) Se $C([0, \beta_1], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ pela hipótese de indução temos que $E \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

iii.b) Se existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C([\beta_{i_0} + 1, \beta_{i_0+1}], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, temos que

$C([0, \beta_{i_0+1}], E) \twoheadrightarrow C([\beta_{i_0} + 1, \beta_{i_0+1}], E) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ e novamente pela hipótese de indução $E \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$. ■

Teorema 11.6. *Seja K um compacto enumerável, então a propriedade de conter quociente de $\ell_q(\mathbb{N})$, onde $1 < q < +\infty$, é K cancelável.*

Demonstração. Pela definição, basta verificarmos os seguintes fatos:

a) $C(K) \not\rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

De fato, suponha que $C(K) \twoheadrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, logo $\ell_q^*(\mathbb{N}) \hookrightarrow C^*(K) = \ell_1(\mathbb{N})$ (veja [11] ou o teorema 5.7 desta dissertação), então $\ell_{q'}(\mathbb{N}) = \ell_q^*(\mathbb{N})$ é reflexivo e Schur e pelo teorema 1.4 $\ell_q(\mathbb{N})$ é de dimensão finita o que é absurdo.

b) Se $C(K, E) \not\rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, então $E \not\rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$

Segue do lema 11.5. ■

A seguir provaremos que o teorema 11.6 é verdadeiro para o caso $p = 1$, precisaremos de:

Lema 11.7. *Seja E espaço de Banach. Se $E \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ então $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} E$.*

Demonstração. [18] p.72, Sejam $T : E \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ uma transformação linear contínua sobrejetora e $(e_n)_n \subset \ell_1(\mathbb{N})$ a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, logo existe uma sequência $(x_n)_n \subset E$ tal que $T(x_n) = e_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideramos o operador linear contínuo $S : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow E$ tal que $S(e_n) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $T \circ S : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ é a aplicação identidade de $\ell_1(\mathbb{N})$ e $(S \circ T)^2 = (S \circ T) \circ (S \circ T) = S \circ (T \circ S) \circ T = S \circ T$, assim $S \circ T$ é uma projeção e $Im(S \circ T) = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$.

Seja $(t_n)_n \subset \mathbb{R}$ uma sequência de escalares tal que somente uma parte finita de termos é não nulo, então

$$\sum_{n=1}^m |t_n| = \left\| \sum_{n=1}^m t_n e_n \right\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^m t_n T(x_n) \right\|_1 \leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^m t_n x_n \right\| \leq \|T\| \|S\| \left\| \sum_{n=1}^m t_n e_n \right\|_1 \leq \|T\| \|S\| \sum_{n=1}^m |t_n|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, logo $\frac{1}{\|T\|} \sum_{n=1}^m |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^m t_n x_n \right\| \leq \|S\| \sum_{n=1}^m |t_n|$, $\forall m \in \mathbb{N}$, então $Im(S \circ T) = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} \sim \ell_1(\mathbb{N})$, desta forma existe uma projeção linear contínua $S \circ T : E \rightarrow Im(S \circ T)$ tal que $Im(S \circ T) \sim \ell_1(\mathbb{N})$ e portanto $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} E$. ■

Teorema 11.8. *Seja K um compacto enumerável, então a propriedade de conter quociente a $\ell_1(\mathbb{N})$ é K cancelável.*

Demonstração. Pela definição bastará verificarmos os seguintes fatos:

a) $C(K) \not\rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$

De fato, caso contrário $C(K) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$; logo $\ell_\infty(\mathbb{N}) \sim \ell_1^*(\mathbb{N}) \hookrightarrow C^*(K) = \ell_1(\mathbb{N})$, absurdo, pois $\ell_\infty(\mathbb{N})$ não é separável.

b) Se $C(K, E) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$, então $E \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$

Com efeito, se $C(K, E) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$, pelo lema 11.7 temos que $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} C(K, E)$ e pelo teorema 10.12 desta dissertação ou teorema 3 de [37] segue que $\ell_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} E$, logo $E \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$. ■

O próximo passo é mostrar que a propriedade de conter quociente isomorfo a $\ell_q(\mathbb{N})$, $1 \leq q < +\infty$, é K cancelável para todo compacto K disperso. Precisaremos de:

Lema 11.9. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo sobrejetor, com F separável, então existe um subespaço H separável de E tal que $T|_H : H \rightarrow F$ é um operador linear contínuo sobrejetor.*

Demonstração. Pelo teorema da aplicação aberta, existe $r > 0$ tal que $B_r^F(0) \subset T(B_E)$.

Seja $(y_n)_n \subset B_r^F(0)$ densa em $B_r^F(0)$, logo existe $x_n \in B_E$ tal que $y_n = T(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $H = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ e consideremos $T|_H : H \rightarrow F$ que é linear contínuo, onde H é separável, logo $\|(T|_H)^*(y^*)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|(T|_H)^*y^*(h)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|y^*T(h)\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y^*T(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y^*(y_n)\| = r\|y^*\|$, portanto $\|(T|_H)^*(y^*)\| \geq r\|y^*\|$, conseqüentemente $(T|_H)^*$ é injetora e $Im(T|_H)^*$ é fechado, pelo teorema 1.47, segue que $T|_H$ é sobrejetor. ■

Lema 11.10. *Sejam K um compacto disperso, E e F espaços de Banach com F separável e $T : C(K, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo sobrejetor, então existe um compacto métrico disperso K_1 e $L : C(K_1, E) \rightarrow F$ um operador linear contínuo sobrejetor.*

Demonstração. Pelo lema 11.9 existe um subespaço separável H de $C(K, E)$ tal que $T|_H : H \rightarrow F$ é um operador linear contínuo sobrejetor. Definimos a relação $t_1 \sim t_2$ se, e somente se, $h(t_1) = h(t_2)$ para todo $h \in H$ e sejam o espaço quociente $K_1 = \frac{K}{\sim}$ e $\varphi : K \rightarrow K_1$ a aplicação canônica que é contínua e sobrejetora, pelo lema 1.63, segue que K_1 é compacto disperso.

Tomemos $(h_n)_n$ denso em $B_H \subset C(K, E)$ e consideremos as $(\bar{h}_n)_n, \bar{h}_n : K_1 \rightarrow E$, definidas por $\bar{h}_n(\bar{t}) = h_n(t)$, logo $h_n = \bar{h}_n \circ \varphi$ e portanto $\bar{h}_n$ são funções contínuas.

Definimos uma métrica d em K_1 , dada por: $d(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|h_n(t_1) - h_n(t_2)\|}{2^n}$, $\forall \bar{t}_1, \bar{t}_2 \in K_1$. Mostraremos que K_1 com a topologia quociente é equivalente a (K_1, d) . Coloquemos $id : K_1 \rightarrow (K_1, d)$, id é uma função contínua bijetora, pois se $\bar{t}_\delta$ é um net convergindo para $\bar{t}$ na topologia quociente de K_1 , como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|h_n(t_\delta) - h_n(t)\|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \|h_n(t_\delta) - h_n(t)\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$, da continuidade das $(h_n)_n$, segue que $d(\bar{t}_\delta, \bar{t}) \xrightarrow{\delta} 0$; assim K_1 é métrico.

Seja $\varphi^0 : C(K_1, E) \rightarrow C(K, E)$ dado por $\bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \varphi$, φ^0 está bem definida e sendo $\varphi : K \rightarrow K_1$ uma função contínua sobrejetora, φ^0 é uma isometria, logo $C(K_1, E)$ é isométrico a $\varphi^0(C(K_1, E)) \subset C(K, E)$. Observemos que $H \subset \varphi^0(C(K_1, E))$, pois $h_n = \varphi^0(\bar{h}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalmente $T|_{\varphi^0(C(K_1, E))} : \varphi^0(C(K_1, E)) \rightarrow F$ é um operador linear contínuo e pela observação anterior, junto com o fato de que $T|_H : H \rightarrow F$ é operador linear contínuo sobrejetor, segue que $T|_{\varphi^0(C(K_1, E))}$ é sobrejetor. Claramente, $L = T|_{\varphi^0(C(K_1, E))} \circ \varphi^0 : C(K_1, E) \rightarrow F$ é um operador linear contínuo e sobrejetor. ■

Teorema 11.11. *Seja K um compacto disperso, então a propriedade de ter quociente de $\ell_q(\mathbb{N})$, $1 \leq q < +\infty$, é K cancelável.*

Demonstração. Pela definição bastará verificarmos os seguintes fatos.

1º caso $1 < q < +\infty$.

a) $C(K) \not\rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$

De fato, suponha que $C(K) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ pelo lema 11.10 existe K_1 métrico enumerável tal que $C(K_1) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, logo $\ell_{q'}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ para, $1 < q' < \infty$, o que é absurdo.

b) Se $C(K, E) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, então $E \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

De fato, se $C(K, E) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ pelo lema 11.10 existe K_1 compacto métrico disperso e $L: C(K_1, E) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ um operador linear contínuo sobrejetor; isto é, $C(K_1, E) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$.

Pelo teorema 8.6.10 de [39] existe um ordinal α infinito enumerável tal que $K_1 \sim [0, \alpha]$. Pelo teorema 1.66, $C(K_1, E) \sim C([0, \alpha], E) \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$ e pelo lema 11.5, segue-se $E \rightarrow \ell_q(\mathbb{N})$. ■

2º caso $q = 1$.

A demonstração é análoga a anterior usando-se o teorema 11.8. ■

Depois de termos feito a prova do teorema 11.6, conseguimos mais dois caminhos para se chegar a esse resultado.

1º caminho. Se $C(K, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, então $\ell_q(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_1(|K|, E^*)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (veja teorema 5.7) e não é difícil ver, basta provarmos um resultado análogo ao lema 10.1 para a soma um de espaços de Banach, que $\ell_q(\mathbb{N}) \hookrightarrow E^*$ e agora usando um resultado de W.B. Johnson e H.P. Rosenthal, veja [26], segue que $E \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$. ■

2º caminho. Usar a teoria de representação de operadores desenvolvido no capítulo 4, os teoremas 3.5, 6.6, 6.18, 10.5 e o lema 8.4 desta dissertação, o teorema 2 de [37] e seguir o esquema do teorema 11 de [8].

Se $C(K, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, seja $T: C(K, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ um operador linear contínuo sobrejetor. Como $c_o(\mathbb{N}) \not\rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, usando o teorema 3.5, segue que $T: C(K, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ é incondicionalmente convergente e pelo teorema 6.18 e lema 8.4, T admite uma medida representante $m: \beta \rightarrow \mathcal{L}(E, \ell_p(\mathbb{N}))$ e uma medida de controle $\lambda: \beta \rightarrow [0, 1]$ tal que $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \overline{m}(A) = 0$, sendo K disperso, λ é discreta.

Seja $A = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto enumerável de átomos de λ . Para cada $n \in \mathbb{N}$, lembrando que $B(\beta, E) = \{f : K \rightarrow E / f \text{ é totalmente } \beta\text{-mensurável}\}$ (veja definição 6.5), seja uma projeção canônica $P_n: B(\beta, E) \rightarrow E^n$ tal que $P_n(f) = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n))$, $\forall f \in B(\beta, E)$ e a inclusão canônica $I_n: E^n \rightarrow B(\beta, E)$ tal que $I_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \chi_{\{t_i\}}(\cdot) x_i$, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Pelo teorema 10.5 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{T} - \overline{T} \circ I_n \circ P_n\| = 0$, onde $\overline{T}: B(\beta, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ é a extensão de T

(veja definição 6.5 e teorema 6.6) e é sobrejetor e pelo teorema da aplicação aberta existe $r > 0$ tal que $B_{\ell_p(\mathbb{N})} \subset \overline{T}(B_r^{B(\beta, E)}(0))$ (I).

Assim, para $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que $0 < r\epsilon_0 < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ temos

$$\|\overline{T} - \overline{T} \circ I_n \circ P_n\| < \epsilon_0 \quad (\text{II}).$$

O operador linear contínuo $\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}: B(\beta, E) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ é sobrejetor. De fato, seja $y \in B_{\ell_p(\mathbb{N})}$ por (I) existe $f_1 \in B(\beta, E)$ com $\|f_1\| < r$ tal que $y = \overline{T}(f_1)$ e de (II) temos que

$$\|y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1)\| \leq r\|\overline{T} - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}\| < r\epsilon_0.$$

Observando que $\frac{y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1)}{r\epsilon_0} \in B_{\ell_p(\mathbb{N})}$, novamente por (I) e (II) existe $f_2 \in B(\beta, E)$ com $\|f_2\| < r$ tais que $y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1) = r\epsilon_0\overline{T}(f_2)$ e

$$\|y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1) - r\epsilon_0\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_2)\| \leq r^2\epsilon_0\|\overline{T} - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}\| < r^2\epsilon_0^2.$$

Analogamente temos que $\frac{y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1) - r\epsilon_0\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_2)}{r^2\epsilon_0^2} \in B_{\ell_p(\mathbb{N})}$ e, portanto, uma vez mais, existe $f_3 \in B(\beta, E)$ com $\|f_3\| < r$ tais que $y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1) - r\epsilon_0\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_2) = r^2\epsilon_0^2\overline{T}(f_3)$ e $\|y - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_1) - r\epsilon_0\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_2) - r^2\epsilon_0^2\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f_3)\| \leq r^3\epsilon_0^2\|\overline{T} - \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}\| < r^3\epsilon_0^3$.

Desta forma podemos construir, por indução finita, $(f_n)_n \subset B(\beta, E)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|y - \sum_{i=1}^n r^{i-1}\epsilon_0^{i-1}\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}\| < r^n\epsilon_0^n$, onde $\|f_i\| < r$, $\forall i \in \mathbb{N}$; logo $\sum_{i=1}^{\infty} \|r^{i-1}\epsilon_0^{i-1}f_i\| < r \sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1}\epsilon_0^{i-1} < \infty$. Assim $f = \sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1}\epsilon_0^{i-1}f_i \in B(\beta, E)$ e, sendo $\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}$ contínuo, $y = \overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}(f)$. Portanto $\overline{T} \circ I_{n_0} \circ P_{n_0}$ é sobrejetor.

Conseqüentemente, $\overline{T} \circ I_{n_0}: E^{n_0} \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ é sobrejetor e pelo teorema 2 de [37], concluimos que $E \twoheadrightarrow \ell_p(\mathbb{N})$. ■

Capítulo 12

Sobre a K estabilidade da propriedade de Dunford-Pettis para K não disperso: contra-exemplo de Talagrand

Seguindo o esquema de [41] no teorema 12.7, Michael Talagrand constrói um espaço de Banach E que tem a propriedade de Dunford-Pettis e $C(K, E)$ não tem a propriedade de Dunford-Pettis, isto é; a propriedade de Dunford-Pettis não é K estável nem K cancelável.

Definição do espaço de Banach E . Seja $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^n$, para cada $\varphi \in T$; coloquemos $|\varphi| = n$ se $\varphi \in \{0, 1\}^n$. Para cada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in T$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m) \in T$ dizemos que $\varphi \leq \psi$ se $n \leq m$ e $\varphi_i = \psi_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Dado $\varphi \in T$, indicaremos $T(\varphi) = \{\psi \in T : \psi \geq \varphi\}$ e consideremos, $R^T = \{x : T \rightarrow \mathbb{R}\}$; seja $x \in R^T$, então $x = (x(\varphi))_{\varphi \in T}$ e pomos $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{|\varphi|=n} \left(\sup_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Seja $F = \{x \in R^T : \|x\| < +\infty\}$. Que, $\|\cdot\|$ é uma norma e F um espaço de Banach, segue de maneira análoga a demonstração de que $\ell_p(\mathbb{N})$ é Banach.

Observemos que, $\|x\|_\infty = \sup_{\psi \in T} |x(\psi)| \leq \|x\|$, $\forall x \in F$ e F contém $R^{(T)}$ que é o conjunto das funções $x: T \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte finito.

Denotaremos por E o fecho de $R^{(T)}$ em F .

O lema abaixo segue imediatamente da definição de $\|\cdot\|$ em F .

Lema 12.1. *Seja $x \in E$, $\delta \leq \|x\|$ e $\delta < 1$, $\epsilon < 1$ e m tal que $\forall \varphi \in T$, $|\varphi| \leq m$ e $|x(\varphi)| \leq \frac{\delta \epsilon}{2^m}$; então:*

$$a) \quad \|x\| = \sup_{n > m} \left(\sum_{|\varphi|=n} \left(\sup_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e, portanto, definido } x''(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varphi| \leq m \\ x(\varphi) & \text{se } |\varphi| > m \end{cases}; \text{ tem-se } \|x\| = \|x''\|;$$

$$b) \text{ definindo, } x'(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) & \text{se } |\varphi| \leq m \\ 0 & \text{se } |\varphi| > m \end{cases} ; \text{ tem-se } \|x'\| < \epsilon .$$

Teorema 12.2. *Seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de E tal que $0 < \delta \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\| \leq a$ de modo que para todo $\varphi \in T$ tem-se $x_m(\varphi) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Então a seqüência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ contém uma subseqüência equivalente à base canônica de $c_0(\mathbb{N})$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $a < 1$, tomemos $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$.

Inicialmente, construiremos uma seqüência estritamente crescente de inteiros $1 = K(0) < K(1) < K(2) < \dots$, uma subseqüência $(x_{n_i})_i$ de $(x_n)_n$ e uma seqüência $(y_i)_i \subset R^{(T)}$ tal que :

- a) $y_i(\varphi) = 0, \forall \varphi, |\varphi| < K(i-1)$ e $|\varphi| \geq K(i)$;
- b) $\|x_{n_i} - y_i\| < \frac{\epsilon}{2^i} \frac{\delta}{2}, \forall i = 1, 2, 3, \dots$;
- c) $\frac{\delta}{2} \leq \|y_i\| \leq a + 1, \forall i = 1, 2, 3, \dots$

De fato, tomemos $n_1 = 1$, pela definição de espaço existe $y_1 \in R^{(T)}$ tal que $\|x_{n_1} - y_1\| < \frac{\epsilon}{2^1} \frac{\delta}{2}$, seja $K(1)$ tal que $y_1(\varphi) = 0, \forall \varphi, |\varphi| \geq K(1)$.

Seja $\epsilon_2 < \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{2^2} \frac{\delta}{2}$, como $x_m(\varphi) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, para todo φ , existe $n_2 > n_1$ tal que

$$|x_{n_2}(\varphi)| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{2^{K(1)}} \frac{\delta}{2}, \forall \varphi, |\varphi| \leq K(1). \quad (\text{I})$$

Para n_2 existe $y_2 \in R^{(T)}$ tal que $\|x_{n_2} - y_2\| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{2^{K(1)}} \frac{\delta}{2}. \quad (\text{II})$

Observemos que $\delta \leq \|x_{n_2}\| \leq \|x_{n_2} - y_2\| + \|y_2\| \leq \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{2^{K(1)}} \frac{\delta}{2} + \|y_2\|$, isto é $\frac{\delta}{2} < \|y_2\|$, definindo

$$y_2''(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varphi| \leq K(1); \\ y_2(\varphi) & \text{se } |\varphi| > K(1) \end{cases}$$

e usando I e II pelo lema 12.1 temos que $\frac{\delta}{2} < \|y_2''\|$ e definindo

$$y_2'(\varphi) = \begin{cases} y_2(\varphi) & \text{se } |\varphi| \leq K(1); \\ 0 & \text{se } |\varphi| > K(1) \end{cases}$$

pelo lema 12.1 temos $\|y_2'\| < \epsilon_2$ e de $\|x_{n_2} - y_2''\| \leq \|x_{n_2} - y_2\| + \|y_2'\|$ segue que

$$\|x_{n_2} - y_2''\| \leq \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{2^{K(1)}} \frac{\delta}{2} + \epsilon_2 < \frac{\epsilon}{2^2} \frac{\delta}{2} \quad (\text{pois, } y_2 = y_2' + y_2'').$$

Seja $K(2) > K(1)$ tal que $y_2(\varphi) = 0, \forall \varphi, |\varphi| > K(2)$ continuando por indução finita teremos construído as seqüências acima satisfazendo a), b) e c).

Observemos que existe $(y_i^*)_i \subset E^*$ tal que $y_i^*(y_j) = \delta_j^i$ e, $\|y_i^*\| \leq \frac{2}{\delta}$. De fato, coloquemos $t(x, \varphi) = \sup_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)|$, $\forall x \in E$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_i\|^2 = t^2(y_i, \varphi_1) + t^2(y_i, \varphi_2) + \dots + t^2(y_i, \varphi_{2^n})$ logo $\|y_i\|^2 = y_i(\varphi_{i_1})^2 + y_i(\varphi_{i_2})^2 + \dots + y_i(\varphi_{i_{2^n}})^2$, para algum (φ_{i_j}) , $1 \leq j \leq 2^n$.

Definimos $y_i^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y_i^*(x) = \frac{\sum_{1 \leq j \leq 2^n} x(\varphi_{i_j}) y_i(\varphi_{i_j})}{\|y_i\|^2}$, $\forall x \in E$, logo y_i^* é linear. Seja $\|x\| \leq 1$, $x \in E$, pela desigualdade de Hölder temos:

$$|y_i^*(x)| \leq \frac{(\sum_{1 \leq j \leq 2^n} (x(\varphi_{i_j}))^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{1 \leq j \leq 2^n} (y_i(\varphi_{i_j}))^2)^{\frac{1}{2}}}{\|y_i\|^2} \leq \frac{1 \cdot \|y_i\|}{\|y_i\|^2} \leq \frac{1}{\|y_i\|} \leq \frac{2}{\delta}.$$

Portanto, y_i^* é contínua e claramente $y_i^*(y_j) = \delta_j^i$ (pois os y_i tem suportes disjuntos) e pelo teorema 1 de [10], para acabarmos a demonstração é suficiente mostrarmos que $(y_i)_i$ admite uma subsequência equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$.

Para virmos isto, definimos para cada $\varphi \in T$, $t(\varphi, m) = \sup_{\psi \in T(\varphi)} |y_m(\psi)|$, temos que $\sum_{|\varphi|=n} t^2(\varphi, m) \leq \|y_m\|^2 \leq (a+1)^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Seja $N_o = \mathbb{N}$ e $m_o = 0$, logo $K(m_o) = 1$, e portanto $\sup_{m \in N_o} t^2(0, m) + \sup_{m \in N_o} t^2(1, m) \leq 2(a+1)^2$.

Seja m_1 um número qualquer em N_o , a sequência, $t^2(0, n)$ é limitada, logo essa sequência tem uma subsequência de Cauchy, e portanto existe um subconjunto infinito F_o de $\mathbb{N}$ tal que $|t^2(0, n) - t^2(0, m)| < \frac{1}{2^{K(m_1)}}(a+1)^2$, $\forall m, n \in F_o$. Olhando agora para a sequência $\{t^2(1, n) : n \in F_o\}$, de maneira análoga, existe um subconjunto infinito F_1 de F_o tal que $|t^2(1, n) - t^2(1, m)| < \frac{1}{2^{K(m_1)}}(a+1)^2$, $\forall m, n \in F_1$ prosseguindo assim até esgotar todos os φ , $|\varphi| \leq K(m_1)$, obtemos um conjunto infinito N_1 de N_o tal que

$$|t^2(\varphi, n) - t^2(\varphi, m)| < \frac{1}{2^{K(m_1)}}(a+1)^2, \forall |\varphi| \leq K(m_1) \text{ e } \forall m, n \in N_1.$$

Provemos que, $\forall n$, $n \leq K(m_1)$, temos $\sum_{|\varphi|=n} \sup_{m \in N_1} t^2(\varphi, m) \leq 2(a+1)^2$. (*)

De fato, para cada $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2^n}\}$ o conjunto dos φ , com $|\varphi| = n$, sejam $S_{\varphi_i} = \sup_{m \in N_1} t^2(\varphi_i, m)$, $\epsilon > 0$, então existe $m_{\varphi_i} \in N_1$, $S_{\varphi_i} - \frac{\epsilon}{2^n} < t^2(\varphi_i, m_{\varphi_i})$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^n} S_{\varphi_i} &\leq t^2(\varphi_1, m_{\varphi_1}) + t^2(\varphi_2, m_{\varphi_2}) + \dots + t^2(\varphi_{2^n}, m_{\varphi_{2^n}}) + \epsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^n} t^2(\varphi_i, m_{\varphi_i}) + (t^2(\varphi_2, m_{\varphi_2}) - t^2(\varphi_2, m_{\varphi_1})) + (t^2(\varphi_3, m_{\varphi_3}) - t^2(\varphi_3, m_{\varphi_1})) + \dots + \\ &\quad + (t^2(\varphi_{2^n}, m_{\varphi_{2^n}}) - t^2(\varphi_{2^n}, m_{\varphi_1})) + \epsilon \\ &\leq (a+1)^2 + (a+1)^2 + \epsilon. \end{aligned}$$

como ϵ é arbitrário segue (*).

Conclusão: por indução sobre p nós construímos uma seqüência de inteiros $m_1, m_2, \dots, m_p$ e uma seqüência de conjuntos infinitos N_p de $]m_p, +\infty[$ tal que

- (1) $m_{p+1} \in N_p, \quad N_{p+1} \subset N_p$;
- (2) $\forall n, n \leq K(m_p)$, tem-se $\sum_{|\varphi|=n} \sup_{m \in N_p} t^2(\varphi, m) \leq 2(a+1)^2$.

Agora, mostraremos que para toda seqüência $(a_p)_p$ nula a partir de um certo índice, temos

$$\frac{\delta}{2} \sup_{p \in \mathbb{N}} |a_p| \leq \|\sum a_p y_{m_p}\| \leq (a+1)\sqrt{3} \sup_{p \in \mathbb{N}} |a_p|.$$

A primeira desigualdade segue do fato que $\frac{\delta}{2} \leq \|y_{m_p}\|$ e y_{m_p} tem suportes disjuntos.

Fixemos n , seja l o primeiro inteiro tal que $n \leq K(m_l)$, para cada $\psi \in T, |\psi| \geq n$, existe no máximo um inteiro r tal que $y_{m_r}(\psi) \neq 0$ e temos que $r \geq l$, logo se $\varphi \in T$, com $|\varphi| = n$, temos

$$\sup_{\psi \in T(\varphi)} |\sum a_p y_{m_p}(\psi)| \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} |a_p| \sup_{r > l} \{t(\varphi, m_l), \sup_{r > l} t(\varphi, m_r)\}. \quad (3)$$

Para $r > l$, temos $m_r \in N_l$ e a condição (2) acima implica que $\sum_{|\varphi|=n} \sup_{r > l} t^2(\varphi, m_r) \leq 2(a+1)^2$ por tanto de (3) segue a última desigualdade.

Conseqüentemente, a seqüência $(y_{n_p})_p$ é equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$. ■

Lema 12.3. *Seja E um espaço de Banach tal que para toda seqüência satisfazendo*

$0 < \delta \leq \inf \|x_n\| \leq \sup \|x_n\| \leq a$ para algum δ e $a \in \mathbb{R}_+$ e $x_n \xrightarrow{E^*}^{top} 0$ têm que x_n possui uma subsequência equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$. Então E têm a propriedade de Dunford-Pettis.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ e $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in E^*$ convergente fracamente a zero respectivamente em E e E^* .

Basta mostrarmos que toda subsequência $x_{n_k}^*(x_{n_k})$ tem subsequência convergente a zero. Seja x_{n_k} uma subsequência de x_n , se $\|x_{n_k}\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, então claramente $\|x_{n_k}^*(x_{n_k})\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Senão existe $\delta > 0$ e uma subsequência de x_{n_k} , que ainda denotaremos por x_{n_k} , tal que $\delta \leq \|x_{n_k}\|, \forall k = 1, 2, \dots$, por hipótese existe $(x_{n_{k_l}})$ equivalente a base canônica de $c_o(\mathbb{N})$.

Seja $H = \overline{\langle x_{n_{k_l}} \rangle}$, logo H têm a propriedade de Dunford-Pettis (pois, $c_o(\mathbb{N})^* \sim \ell_1(\mathbb{N})$ têm a propriedade de Dunford-Pettis), logo considerando $x_{n_{k_l}}^*|_H$, temos $x_{n_{k_l}}^*(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$. ■

Lema 12.4. *Seja $(x_m), m = 1, 2, \dots$ uma seqüência do espaço de Banach E satisfazendo uma das condições abaixo.*

- (a) *existem números $A(l, k)$ com $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} A(l, k) = 2^{-\frac{l}{2}}$ tal que para quaisquer inteiros $l < m_1 < m_2 < \dots < m_k$ tem-se $\|\sum_{i \leq k} x_{m_i}\| \leq A(l, k)$;*

(b) para quaisquer inteiros distintos $m_1, m_2, \dots, m_k$ tem-se $\|\sum_{i \leq k} x_{m_i}\| \leq \sqrt{k}$.

Então (x_m) , $m = 1, 2, \dots$ converge fracamente a zero.

Demonstração. Prova de a). Suponha que x_m , $m = 1, 2, \dots$ não converge fracamente a zero, então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x^* \in E^*$ tal que $\|x^*\| \leq 1$ e $x^*(x_m) > \alpha > 0$ para infinitos m . Escolhamos l com $2^{-\frac{1}{2}} < \alpha$ e tomemos k satisfazendo $A(l, k) < \alpha k$ e inteiros $l < m_1 < m_2 < \dots < m_k$ com $x^*(x_{m_i}) > \alpha$ para $i \leq k$, logo $\alpha k < x^*(\sum_{i \leq k} x_{m_i}) \leq \|\sum_{i \leq k} x_{m_i}\| \leq A(l, k) < \alpha k$, absurdo.

A prova de b) é análoga, bastando escolher $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \alpha$. ■

Sejam $K = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n$ e P_n , $n = 1, 2, \dots$ as projeções canônicas em $\{0, 1\}^n$. Para cada elemento $\varphi \in T$, sejam $e_\varphi \in E$ dada por $e_\varphi(\varphi) = 1$ e $e_\varphi(\psi) = 0$, se $\varphi \neq \psi$ e $e_\varphi^* \in E^*$ dado por $e_\varphi^*(x) = x(\varphi)$.

Lema 12.5. *Seja $l \in \mathbb{N}$ e A um subconjunto finito de T , tal que $\varphi \in A$ implica $|\varphi| \geq l$. Seja $d = \sup_{|\varphi|=l} \text{card}(T(\varphi) \cap A)$. Então $\|\sum_{\varphi \in A} e_\varphi^*\| \leq 2^{\frac{1}{2}} d$*

Demonstração. Inicialmente fazemos uma partição de A , $A = \bigcup_{i \leq d} A_i$, onde $|\varphi| = l$, para cada $\varphi \in T$, tem-se $\text{card}(T(\varphi) \cap A_i) \leq 1$, logo $\text{card}(A_i) \leq 2^l$.

E portanto usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\|\sum_{\varphi \in A_i} e_\varphi^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\sum_{\varphi \in A_i} 1 \cdot x(\varphi)| \leq 2^{\frac{l}{2}} \sup_{\|x\| \leq 1} (\sum_{\varphi \in A_i} x(\varphi)^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{l}{2}} \sup_{\|x\| \leq 1} (\sum_{|\varphi|=l} (\sup_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)|)^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{l}{2}},$$

e a prova do lema é completa observando que os A_i são dois a dois disjuntos. ■

Teorema 12.6. *E tem a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em E satisfazendo $0 < \delta \leq \inf \|x_n\| \leq \sup \|x_n\| \leq a$ para algum δ e $a \in \mathbb{R}_+$ e $x_n \xrightarrow{E^*} 0$.

Para cada $\varphi \in T$ definimos $x_\varphi^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x_\varphi^*(x) = x(\varphi)$, $\forall x \in E$, logo $x_\varphi^* \in E^*$ e pela parte anterior temos $x_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, assim pelo teorema 12.2 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contém uma subsequência equivalente à base canônica de $c_0(\mathbb{N})$ e do lema 12.3 segue que E tem a propriedade de Dunford-Pettis. ■

Teorema 12.7. *O espaço de Banach $C([0, 1], E)$ não tem a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Pelo teorema 1.62 de Milutin e pelo teorema 1.66 de Semadeni é suficiente demonstrarmos que $C(K, E)$ não tem a propriedade de Dunford-Pettis, onde $K = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n$ é métrico não enumerável.

Definimos $f_n: K \rightarrow E$ por $f_n(t) = e_{P_n(t)}$ e $g_n: K \rightarrow E^*$ por $g_n(t) = e_{P_n(t)}^*$. Claramente $f_n \in C(K, E)$. Designemos por λ a medida de Haar em K , logo $g_n \in \mathcal{L}^1(\lambda, E^*)$ e $\|g_n\|_1 \leq 1$.

Seja I_1 a isometria canônica de $C(K, E)$ em $\mathcal{L}^1(\lambda, E^*)^*$ dada por $I_1(f)(g) = \int_K g(t) \cdot f(t) d\lambda(t)$ e

$\sup_{\|g\| \leq 1} \int_K f(t)g(t)d\lambda(t) = \|f\|_\infty$, pois:

(a) $\|I_1(f)\| \leq \|f\|_\infty$, de fato; $|I_1(f)(g)| = |\int_K g(t)f(t)d\lambda| \leq \|f\|_\infty \int_K \|g(t)\| d\lambda$, logo $|I_1(f)(g)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$, assim $\|I_1(f)\| \leq \|f\|_\infty$;

(b) $\|I_1(f)\| \geq \|f\|_\infty$, de fato; seja $t_o \in K$, $\|f\|_\infty = \|f(t_o)\|$, dado $\epsilon > 0$ existe $x^* \in E^*$ com $\|x^*\| = 1$ tal que $\|f\|_\infty - \epsilon < |x^*f(t_o)|$.

Identificando, $\mathcal{L}^1(\lambda) \rightarrow \mathcal{L}^1(\lambda, E^*)$ por $g(\cdot) \rightarrow g(\cdot)x^*$ e pelo teorema 1.30 temos que

$I_1(f)|_{\mathcal{L}^1(\lambda)} : \mathcal{L}^1(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $I_1(f)|_{\mathcal{L}^1(\lambda)}(g(\cdot)) = \int_K g(\cdot)x^*(f(t))dt$, logo

$\|I_1(f)|_{\mathcal{L}^1(\lambda)}\| = \|x^*(f(\cdot))\|_\infty \geq |x^*(f(t_o))| > \|f\|_\infty - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, portanto

$\|I_1(f)\| \geq \|I_1(f)|_{\mathcal{L}^1(\lambda)}\| > \|f(\cdot)\|_\infty - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, e assim $\|I_1(f)\| \geq \|f\|_\infty$.

Claramente $I_1^*(g_n^*)(f_n) = I_1(f_n)(g_n) = 1$, onde $g_n^* = \hat{g}_n$, $n = 1, 2, \dots$ e para provarmos o teorema é suficiente mostrarmos que:

(I.) f_n , $n = 1, 2, \dots$ converge fracamente a zero em $C(K, E)$

(II.) g_n , $n = 1, 2, \dots$ converge fracamente a zero em $\mathcal{L}^1(\lambda, E^*)$

Prova de (I). Usando a parte b) do lema 12.4 acima é suficiente mostrarmos que para quaisquer inteiros distintos $m_1, m_2, \dots, m_k$, tem-se $\|\sum_{i \leq k} f_{m_i}\| \leq \sqrt{k}$. Fixemos t e n . Para $\varphi \in T$, $|\varphi| = n$, temos

$\sup_{\psi \in T(\varphi)} |\sum_{i \leq k} f_{m_i}(t)(\psi)| \leq 1$, pois dois dos números $f_{m_i}(t)(\psi)$ nunca são simultaneamente não nulos.

Por outro lado, para $\varphi_1 \neq \varphi_2$, com $|\varphi_1| = |\varphi_2|$, os conjuntos $T(\varphi_1)$ e $T(\varphi_2)$ são disjuntos e uma vez que existem exatamente k pontos ψ de T tais que $\sum_{i \leq k} f_{m_i}(t)(\psi) \neq 0$, temos

$$\sum_{|\varphi|=n} (\sup_{\psi \in T(\varphi)} |\sum_{i \leq k} f_{m_i}(t)(\psi)|)^2 \leq k, \text{ logo } \forall t \in K, \|\sum_{i \leq k} f_{m_i}(t)\| \leq \sqrt{k}.$$

Prova de (II). Sabemos que $\mathcal{L}^1(\lambda, E^*) \subset C^*(K, E)$, de fato; seja $f \in \mathcal{L}^1(\lambda, E^*)$, definimos $\mu_f : \beta \rightarrow E^*$ tal que $\mu_f(A) = \int_A f(t)d\lambda$, $\forall A \in \beta$, logo $\mu_f \in rcabv(K, E^*)$ e $|\mu_f|(K) = \|f\|_1$, assim o operador $f \mapsto \mu_f$ é uma isometria e pelo teorema 4.13 segue que $\mathcal{L}^1(\lambda, E^*) \subset C^*(K, E)$, e então fazemos a identificação de g_n , $n = 1, 2, \dots$ com μ_n , $n = 1, 2, \dots$ dadas por $\mu_n(f) = \int_K g_n(t)f(t)d\lambda$.

Usando a parte a) do lema 12.4 acima é suficiente mostrarmos que existem números $A(l, k)$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{-1}A(l, k) = 2^{-\frac{1}{2}}$ e para quaisquer inteiros $l < m_1 < m_2 < \dots < m_k$, tem-se $\|\sum_{i \leq k} \mu_{m_i}\| \leq A(l, k)$.

Para provar isto, fixemos $l \in \mathbb{N}$ e seja $f \in B_{C(K,E)}$, logo $|\sum_{i \leq k} \mu_{m_i}(f)| \leq \int_K |\sum_{i \leq k} g_{m_i}(t)f(t)| d\lambda(t)$ e portanto $\|\sum_{i \leq k} \mu_{m_i}\| \leq \int_K \|\sum_{i \leq k} g_{m_i}(t)\|_{E^*} d\lambda(t) = \int_K \|\sum_{i \leq k} e_{P_{m_i}(t)}^*\| d\lambda(t)$ agora usando o lema 12.5, temos $\|\sum_{i \leq k} \mu_{m_i}\| \leq 2^{\frac{l}{2}} \int_K d_k(t) d\lambda(t)$, onde $d_k(t) = \sup_{|\varphi|=l} \text{card}\{i \leq k, P_{m_i}(t) \geq \varphi\}$, $|\varphi| = l$.

Coloquemos $A(l, k) = 2^{\frac{l}{2}} \int_K d_k(t) d\lambda(t)$. Para $\varphi \in \{0, 1\}^l$ e $i \leq k$, sejam h_i^φ dadas por

$$h_i^\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi \leq P_{m_i}(t) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ portanto } d_k(t) = \sup_{|\varphi|=l} \left(\sum_{i=1}^k h_i^\varphi(t) \right) \text{ é limitado em } K.$$

• h_i^φ são independentes.

De fato, sejam $m_1 = l + r_1 < m_2 = l + r_2 < \dots < m_k = l + r_k$ e B_i , $i = 1, \dots, k$ subconjuntos de $\{0, 1\}$, queremos mostrar que $\lambda((h_1^\varphi)^{-1}(B_1) \cap \dots \cap (h_k^\varphi)^{-1}(B_k)) = \prod_{i=1}^k \lambda((h_i^\varphi)^{-1}(B_i))$; sem perda de generalidade podemos supor que B_i , $i = 1, \dots, k$ só tem um elemento $\{1\}$ ou $\{0\}$.

Seja $A_i = (h_i^\varphi)^{-1}(\{1\}) = \{t \in K : P_{m_i}(t) \geq \varphi\}$, logo

$$A_i = \prod_{j=1}^{m_i-1} \{0, 1\}^j \times (\{\varphi\} \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{r_i}) \times \prod_{j>m_i} \{0, 1\}^j.$$

Seja $C_i = \varphi \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{r_i} \subset \{0, 1\}^{m_i}$ e indicaremos por D_i o conjunto C_i ou C_i^c , portanto

$$\bigcap_{i=1}^k (h_i^\varphi)^{-1}(B_i) = \prod_{i=1}^{m_1-1} \{0, 1\}^i \times D_1 \times \prod_{i=m_1+1}^{m_2-1} \{0, 1\}^i \times D_2 \times \dots \times \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k-1} \{0, 1\}^i \times D_k \times \prod_{i=m_k+1}^{\infty} \{0, 1\}^i,$$

logo $\lambda((h_1^\varphi)^{-1}(B_1) \cap \dots \cap (h_k^\varphi)^{-1}(B_k)) = \prod_{i=1}^k \lambda(D_i)$; mas $\lambda((h_i^\varphi)^{-1}(B_i)) = \lambda(D_i)$.

• h_i^φ são equidistribuídos (isto é, tem mesma distribuição).

De fato, $\lambda((h_i^\varphi)^{-1}(\{1\})) = \lambda(A_i)$ onde $A_i = \{t \in K : P_{m_i}(t) \geq \varphi\}$, logo

$$A_i = \prod_{j=1}^{m_i-1} \{0, 1\}^j \times (\{\varphi\} \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{r_i}) \times \prod_{j>m_i} \{0, 1\}^j, \text{ então } \lambda(A_i) = \lambda(\{\varphi\}) = \frac{1}{2^l}, \forall i.$$

Analogamente $\lambda((h_i^\varphi)^{-1}(\{0\})) = 1 - \frac{1}{2^l}, \forall i$.

• $\int_K h_i^\varphi d\lambda = \frac{1}{2^l}, \forall i$.

De fato, $\int_K h_i^\varphi d\lambda = \lambda(A_i)$ onde $A_i = \{t \in K : \varphi \leq P_{m_i}(t)\}$ e como os h_i^φ são equidistribuídos temos que $\lambda(A_i) = \frac{1}{2^l}, \forall i$.

A lei fraca dos grandes números 1.67 implica que $\forall \epsilon > 0, \lambda(\{t \in K : |\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k h_i^\varphi(t) - \frac{1}{2^l}| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Como $\{0, 1\}^l$ tem 2^l elementos, segue que $\lambda(\{t \in K : |\frac{1}{k} \sup_{|\varphi|=l} (\sum_{i=1}^k h_i^\varphi(t)) - \frac{1}{2^l}| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, logo para cada $\epsilon > 0$, $\lambda(\{t \in K : |\frac{1}{k} d_k - \frac{1}{2^l}| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Seja $A_\epsilon = \{t \in K : |\frac{1}{k} d_k - \frac{1}{2^l}| \geq \epsilon\}$, então $\lambda(A_\epsilon) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e $\int_K (\frac{1}{k} d_k(t) - \frac{1}{2^l}) d\lambda(t) = \int_{A_\epsilon} (\frac{1}{k} d_k(t) - \frac{1}{2^l}) d\lambda(t) + \int_{A_\epsilon^c} (\frac{1}{k} d_k(t) - \frac{1}{2^l}) d\lambda(t)$, portanto

$$|\int_K (\frac{1}{k} d_k(t) - \frac{1}{2^l}) d\lambda(t)| \leq \sup_{t \in K} |\frac{1}{k} d_k(t) - \frac{1}{2^l}| \cdot \lambda(A_\epsilon) + \epsilon, \forall \epsilon > 0 \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}; \text{ isto é } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A(l,k)}{k} = 2^{-\frac{l}{2}}. \blacksquare$$

Bibliografia

- [1] Arens, R. “*Extension of Functions on Fully Normal Spaces*”. Pacific. J. Math. 2 (1952) 11-12.
- [2] Albert Wilansky “*Functional analysis*”. Blaisdell Publishing company. New York-Toronto-London 1964.
- [3] Barry R. James “*Probabilidade: um curso em nível intermediário*”. Projeto Euclides- Instituto de Matemática pura e Aplicada 1981.
- [4] Bombal, Fernando “*Medidas vectoriales y espacios de funciones continuas*”. Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Matemáticas Universidad Complutense. Madrid mayo 1984.
- [5] Bombal, F. & Porras, B. “*Strictly Singular and Strictly Cosingular Operators on $C(K, E)$* ”. Math. Nachr. 143 (1989) 355-364.
- [6] Bombal, Fernando & Cembranos, Pilar “*Characterization of Some Classes of Operators on Spaces of Vector-Valued Continuous Functions*”. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1985), 97, 137-146.
- [7] Bombal, F. “*Dos Nuevas Clases De Espacios de Banach*”. Homenaje al Prof. Dr. Nácere Hayek Calil, (1990) 65-70.
- [8] Bombal, Fernando; Cembranos, Pilar & Mendoza, José “*On the surjective Dunford-Pettis property*”. Math. Z. 204, 373-378 1990.
- [9] Bombal, Fernando “*Sobre Algunas Propiedades de Espacios de Banach*”. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid; Tomo 84 (1990) 83-116.
- [10] Bessaga, C. & Pelczynski, A. “*On bases and Unconditional Convergence of Series in Banach Spaces*”. Studia Math.,T. XVII, (1958), 151-164.

- [11] Bessaga, C. & Pelczynski, A. "*Spaces of Continuous Functions IV*". Studia Math. XIX (1960) 53-61.
- [12] Brooks, J.K. & Lewis, P.W. "*Linear Operators and Vector Measures*". Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 192 (1974) 139-171.
- [13] Bourgain, J. "*An averaging result for c_0 -sequences*". Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B 30 (1978), 83-87.
- [14] Chaim Samuel Hönig "*Análise funcional e aplicações*". Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Vol. 1 2da. edição 1990.
- [15] Cohn, Donald L. "*Measure Theory*". Birkhäuser Boston-Basel-Stuttgart (1980).
- [16] Dinculeanu, N. "*Vector Measures*". International Series Monographs in Pure and Applied Mathematics, Veb Deutcher Verlag Der Wissenschaften-Berlin (1967).
- [17] Diestel, Joseph & Uhl Jr., J.J. "*Vector Measure*". Providence, AMS 1977, Mathematical Surveys.
- [18] Diestel, Joseph "*Sequences and Series in Banach Spaces*". Springer-Verlag. N.Y. 1984.
- [19] Dunford, Nelson & Schwartz, Jacob T. "*Linear Operators*". New York, Interscience 1973-1971, Vol.1
- [20] Elias Saab & Paulette Saab. "*A Stability Property of Class of Banach Spaces not Containing a Complemented Copy of $\ell_1(\mathbb{N})$* ". Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.84, Nro 1, January 1982 p.44.
- [21] Gowurin, M. "*Über die stieltjessche integration abstrakter funktionen*". Fund. Math. 27, 255-268 (1936).
- [22] Grothendieck "*Sur Les Applications Lineaires Faiblement Compactes D'espaces Du Type $C(K)$* ". Canadian J. Math. 5, 129-173 (1953).
- [23] Galego, E. M.; Rocha Filho, G.C. & Abud, Z.I. "*Primeiras noções sobre $C(K)$* ". Seminário Brasileiro de Análise, 1984, 349-568.
- [24] Galego, E. M. "*Isomorfismo entre espaços de funções contínuas definidas num compacto*". Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo 1990.

- [25] Ivan Dobrakov, Bratislava "On representation of linear operators on $C_o(T, X)$ ". Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha.
- [26] Johnson W.B. & Rosenthal H. P. "On w^* -basic sequences and their applications to the study of Banach spaces". Studia Math. 43 1972, 77-92.
- [27] Jarchow, H. "Locally Convex Spaces". Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner Stuttgart (1981).
- [28] Jürgen Batt & E. Jeffrey Berg. "Linear Bounded Transformations on the Space of Continuous Functions". Journal of Functional Analysis 4, 1962, 215-239.
- [29] James, Robert C. "Weakly Compact Sets." Trans. American Math. Soc. 1964 129-140.
- [30] Lacey H. Elton "The Isometric Theory of Classical Banach Spaces". Springer-Verlag. N.Y. 1974.
- [31] Lindenstrauss, L & Tzafriri, L. "Classical Banach Spaces". Springer-Verlag. N.Y. Vol.I (1977)-Vol.II (1979).
- [32] Nigel Kalton , Elias Saab & Paulette Saab " $L^p(X)$ ($1 \leq p < \infty$) Has the Property (u) Whenever X Does" . Bull. Sc. Math. 2^e série, 115, 1991, 369-377.
- [33] Pelczynski, A. "Projection in Certain Banach Spaces". Studia Mathematica, T XIX (1960) 209-228.
- [34] Pelczynski, A. "Banach Spaces on Which Every Unconditionally Convergent Operators Is Weakly Compact". Bulletin De L'Académie Polonaise Des Sciences, Vol.X Nro 12 (1962) 641-648.
- [35] Pilar Cembranos " $C(K, E)$ Contains a Complemented Copy of $c_0(\mathbb{N})$ ". Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 91, Nro. 4, 1984, 556-558 .
- [36] R. D. Mc Williams. "A Note on Weak Sequential Convergence". Pacific Journal of Mathematics, Vol 12, Nro 1 (1962) 333-335.
- [37] Samuel, C. "Sur La Reproductibilité des Espaces $\ell_p(\mathbb{N})$ ". Math. Scand. 45 (1979) 103-117.
- [38] Singer Ivan "Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces". Springer-Verlag. N.Y. 1970.

- [39] Semadeni, Zbigniew "*Banach Spaces of Continuous Functions*". Monografie Matematyczne, Warszawa WA, 1971.
- [40] Tosio Kato "*Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*". J. Analyse Math. 6 (1958), 261-322.
- [41] Talagrand, M. "*La Propriete de Dunford-Pettis dans $C(K, E)$ et $L^1(E)$* ". Israel Journal of Mathematics. Vol. 44, No. 4, (1983) 317-321.
- [42] Talagrand, M. "*Weak Cauchy Sequences in $L^1(E)$* ". Amer. J. Math. 106 (1984) 703-724.
- [43] Ülger, A. "*Continuous Linear Operators on $C(K, X)$ and Pointwise Weakly Precompact Subsets of $C(K, X)$* ". Math. Proc. Phil. Soc. (1992) 111-143.