**O Termo do Meio das
Sequências de Auslander-Reiten
em Componentes Não Semi-Regulares**

Edson Ribeiro Alvares

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq*

-São Paulo, novembro de 1995-

**O Termo do Meio das
Sequências de Auslander-Reiten
em Componentes Não Semi-Regulares**

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Edson Ribeiro Alvares
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, novembro de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt - IME - USP
- Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti - IMECC - UNICAMP.

à Geise

Agradecimentos

Gostaria de expressar o quanto estou grato ao professor Flávio Ulhoa Coelho, pois encontrei toda a colaboração que pude desejar. Em consequência é possível perceber a importância de suas críticas para a forma final que tomou esta dissertação.

À amiga e companheira Geise, pela compreensão, incentivo e por tolerar minha ausência durante boa parte do tempo.

Gostaria de destacar os professores Mary Lilian Lourenço e Orlando Stanley Juri-ans e os amigos Carlos Henrique dos Santos e Gaspar Alfredo Salas Pacho que muito colaboraram para que eu pudesse ultrapassar os primeiros obstáculos.

A todos os amigos que me acompanharam durante todos esses anos.

Aos meus pais e meus irmãos.

A todos eles meus sinceros agradecimentos.

Edson Ribeiro Alvares

Resumo

Primeiramente nosso propósito com este trabalho será apresentar uma demonstração do seguinte resultado devido a Liu [Liu93a]:

Seja A uma álgebra de artin e $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}A$ com Y_i indecomponível para cada i . Se X tem um antecessor projetivo e Z tem um sucessor injetivo então $r \leq 4$. Além disso, se $r = 4$ um dos Y_i é projetivo e injetivo ao passo que os outros não são nem projetivos, nem injetivos.

Este resultado é uma generalização do Teorema de Bautista-Brenner que fora provado para o caso em que A é uma álgebra de artin de Tipo de Representação Finito [BB81].

Como dissemos acima, esta versão geral do teorema é devido a Liu [Liu93a]. Apesar disso, neste trabalho tomamos a liberdade de chamar o Teorema acima de Teorema de Bautista-Brenner e a sua primeira versão denotaremos como um corolário deste Teorema (Capítulo 3).

Reunimos no Capítulo 2 uma série de resultados necessários para provar o Teorema de Bautista-Brenner e que foram obtidos por Liu para caminhos seccionais. No presente trabalho, generalizamos esses mesmos resultados para caminhos pré-seccionais. Logo em seguida faremos uma aplicação deste resultado (Proposição (3.1.2)) na direção do Teorema de Roiter. Provaremos que se A é uma álgebra de artin e para todo $M \in \text{ind}A$, $l(M) \leq b$ então, o número de classes de isomorfismos de A -módulos indecomponíveis é menor ou igual a $s \cdot 3^{2^b - 1}$, onde s é o número de A -módulos simples. Este resultado é devido a Ringel e fora publicado em [BB81].

No Capítulo 4 apresentamos a prova do Teorema de Bautista-Smalø, a saber, a não existência de ciclos seccionais no quiver de Auslander-Reiten (Teorema (4.1.2)). Apresentamos a versão feita por Bongartz [Bon83] e como consequência do Teorema de Bongartz, provamos que a composição de morfismos irredutíveis em um caminho seccional é não nula.

Ainda no Capítulo 4, com as mesmas técnicas utilizadas no Capítulo 2 para obter o Teorema de Bautista-Brenner, provamos que dada uma flecha $X \rightarrow Y$ no quiver de Auslander-Reiten com valorização (d, d') onde $d, d' > 1$ então, nem X , nem Y estão sobre um ciclo orientado e além disso X não tem sucessor injetivo ou Y não tem antecessor projetivo (Teorema (4.3.1)) e a álgebra A não é de tipo de representação finito (Corolário (4.3.2)). No caso em que uma flecha $X \xrightarrow{(d, d')} Y$ estiver sobre um ciclo orientado de Γ_A , provamos que $dd' \leq 3$ (Teorema (4.3.2)).

Abstract

The main purpose of this work will be to show a proof of the following result, due to Liu ([Liu93a]): Let A be an artin algebra, and let $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ be an Auslander-Reiten sequence in $\text{mod}A$ with the Y_i indecomposable for each i . Suppose that X has a projective predecessor and Z has an injective successor in the Auslander-Reiten quiver Γ_A . Then $r \leq 4$, and $r = 4$ implies that one of the Y_i is projective-injective, and the others are neither projective nor injective.

This result is a generalization of the Bautista-Brenner theorem proven for algebras of finite representation type [BB81]. We shall denote the general version as Bautista-Brenner theorem and the original version as a corollary.

We prove in Chapter 2 the necessary results to prove the Bautista-Brenner theorem. These results were proven for sectional paths. Here, we prove these results for the more general notion of pre-sectional paths. In the sequence we show the following application of this result (Proposition (3.1.2)) in the direction of the Roiter theorem. Let A be an artin algebra and suppose exists a b such that $l(M) \leq b$ for each $M \in \text{ind}A$. Then the number of isomorphisms class of indecomposable A -modules is smaller than $s \cdot 3^{2^b - 1}$, where s is the number of simple A -modules. This result is due to Ringel and first appeared in [BB81].

In Chapter 4 we show the proof of Bautista-Smalø theorem, that is, the non-existence of sectional cycle, in the Auslander-Reiten quiver (theorem (4.1.2)). We show the version proven by Bongartz and as a consequence of it, we show that the composition of the irreducible maps in a sectional path is non-zero.

Still in Chapter 4, with the same technics to obtain the Bautista-Brenner theorem, we show that if $X \rightarrow Y$ is an arrow in Γ_A with valuation (d, d') , and both d and d' are greater than one, then neither X nor Y belong to oriented cycle. Moreover, either Y has no projective predecessor or X has no injective successor in Γ_A (theorem (4.3.1) and A is not of finite representation type (Corolário (4.3.2)). If $X \rightarrow Y$ is an arrow in Γ_A with valuation (d, d') and belonging to an oriented cycle in Γ_A , then $d \cdot d' \leq 3$ (theorem (4.3.2)).

Conteúdo

Introdução	7
1 Categoria $\text{mod } A$ e o Quiver de Auslander-Reiten	12
1.1 Categoria de Módulos	13
1.2 Quivers e Representações	15
1.3 Um invariante entre módulos indecomponíveis	21
1.4 Quiver de Auslander-Reiten	26
2 Caminhos pré-seccionais e seccionais	34
2.1 Algumas técnicas para construção de um módulo sem antecessor projetivo.	36
2.2 Caminhos pré-seccionais e seccionais	39
2.3 Módulos estáveis	44
3 Teorema de Bautista-Brenner	51
3.1 Generalização do Teorema de Bautista-Brenner	52
4 Módulos sobre ciclos	57
4.1 O Teorema de Bautista-Smalø	58
4.2 Componentes com módulos τ -periódicos	62
4.3 Flechas com valorizações	68
Bibliografia	73

Introdução

A teoria de representações de álgebras desenvolveu-se com bastante rapidez nos últimos vinte anos. Dois dos problemas que mais contribuíram para o desenvolvimento da teoria foram, sem dúvida, as conjecturas de Brauer-Thrall I e II. A primeira foi resolvida por Roiter e é hoje conhecida como Teorema de Roiter. Em seguida, Auslander apresentou uma generalização do Teorema de Roiter para anéis artinianos em [AR74a]. Aliás, em [AR74a] deu-se o surgimento das seqüências de Auslander-Reiten (“almost split sequences”), que por sua vez deram um novo impulso ao desenvolvimento da teoria de representações e se adaptaram bem às questões levantadas nas conjecturas de Brauer-Thrall.

Também nesta direção, Bautista e Brenner apresentaram em [BB81] um resultado devido a Ringel (Teorema (3.1.2)) que fornece mais informações sobre a conjectura de Brauer-Thrall I. Este resultado de Ringel é uma aplicação de um Teorema de Bautista e Brenner (Corolário (3.1.1)) que trouxe mais informações sobre o termo do meio das seqüências de Auslander-Reiten.

Informações como esta resolveram parte dos problemas que surgiram com as seqüências de Auslander-Reiten. Por exemplo, Auslander e Reiten dedicaram parte de seu trabalho para descrever as seqüências de Auslander-Reiten com um somando projetivo no termo do meio [AR75] e [AR77a]. Outra contribuição nesta direção foi dada por Martinez [Mar80]. Martinez prova a existência de uma seqüência de Auslander-Reiten com o termo do meio indecomponível, para qualquer álgebra de artin. Os conceitos morfismo fonte (“minimal left almost split map”), morfismo poço (“minimal right almost split map”) e morfismo irredutível vieram facilitar estas investigações [AR77a].

Um dos objetos de nosso trabalho é o termo do meio das seqüências de Auslander-Reiten. Hoje é bem conhecido um resultado de Bautista e Brenner (Corolário (3.1.1)) que afirma que se A é uma álgebra de artin de tipo de representação finito então o termo do meio de uma seqüência de Auslander-Reiten tem, no máximo, quatro somandos indecomponíveis e o número quatro ocorre somente quando um dos somandos é projetivo e injetivo. Neste trabalho apresentaremos a generalização do Teorema de Bautista-Brenner para álgebras de artin. Esta prova fora dada por Liu em [Liu93a] e as seqüências de Auslander-Reiten estão inseridas em componentes do quiver de Auslander-Reiten Γ_A com módulos projetivos e injetivos, isto é, componentes não semi-regulares. Desta forma o resultado fornece informações locais sobre o quiver de Auslander-Reiten Γ_A . Aliás, o estudo das formas das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten é outra forma de investigar localmente o quiver. Nesta direção citamos, por exemplo [HPR80], [Zha91] e [Liu93b]. Neste último podemos ver um estudo das formas das componentes regulares de Γ_A . Além disso, com as mesmas técnicas que Auslander usou para provar a conjectura de Brauer-

Thrall I (morfismos irredutíveis e o Lema de Harada-Sai), Liu obteve mais informações sobre as formas das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten Γ_A para álgebras de artin de tipo de representação infinito [Liu92]. Apresentou primeiramente uma nova prova do Teorema de Happel-Preiser-Ringel [HPR80] que afirma que componentes conexas regulares periódicas de Γ_A são tubos estáveis.

Por outro lado, num trabalho de Auslander algumas questões sobre ciclos orientados vieram à tona, o que motivou o trabalho de Bautista e Smalø [BS83]. Neste trabalho Bautista e Smalø provaram a não existência de ciclos seccionais. Lembramos que o conceito de caminhos seccionais foi introduzido por Riedtmann em [Rie80] e de pré-seccionais por Liu em [Liu92]. Em 1983, Bongartz apresentou uma nova demonstração deste resultado [Bon83]. Apresentaremos aqui a demonstração dada por Bongartz (Teorema (4.1.2)). Lembramos que Liu apresentou uma generalização deste resultado em [Liu92] provando a não existência de ciclos pré-seccionais. Ainda neste trabalho, Liu apresenta uma prova de que as componentes estáveis periódicas são as únicas componentes estáveis de Γ_A que contém um ciclo orientado. Provou também que as componentes conexas de Γ_A não contém ciclos se a componente não contém seqüências de Auslander-Reiten com um único termo do meio indecomponível. Já um estudo das componentes semi-estáveis que contém ou não ciclo orientado foi feito por Liu em [Liu93b].

Outro campo de investigação feito por Liu foi dar algumas condições para que flechas com valorização não trivial estejam sobre um ciclo orientado. Com o uso das mesmas técnicas para provar a generalização do Teorema de Bautista-Brenner, Liu obteve em [Liu93a] que nenhum dos vértices da flecha $X \xrightarrow{(d,d')} Y$ está sobre um ciclo orientado se $d, d' > 1$. Além disso, Y não tem antecessor projetivo ou X não tem sucessor injetivo em Γ_A (Teorema (4.3.1)). No caso em que a flecha está sobre um ciclo orientado em Γ_A então $d, d' \leq 3$ (Teorema (4.3.2)).

Esta é uma pequena lista de contribuições que tem sido dada ao longo dos últimos anos à teoria de representações. Por conveniência apresentamo-la, pois trata-se do caminho que resolvemos fazer neste trabalho, porém com somente alguns pontos naturais de parada.

O primeiro objetivo foi apresentar o Teorema de Bautista-Brenner e logo em seguida uma aplicação deste (Teorema (3.1.2) [Ringel [BB81]]). Para a demonstração da forma generalizada do Teorema de Bautista-Brenner, é necessário uma série de resultados envolvendo caminhos seccionais (Proposição (2.2.1), Corolário (2.2.1), Corolário (2.2.2), Proposição (2.3.1) e Proposição (2.3.2)). Nossa contribuição original no presente trabalho foi generalizar tais resultados para caminhos pré-seccionais. Como consequência, generalizamos também a Proposição (4.3.1). No Capítulo 4 apresentamos a prova do Teorema de Bautista-Smalø fazendo uso da demonstração dada por Bongartz e obtivemos como consequência a demonstração de que a composição de morfismos irredutíveis sobre caminhos seccionais é não nula. Logo em seguida introduzimos novos conceitos tais como componentes semi-estáveis e módulos τ -periódicos. Este final teve como objetivo apresentar algumas condições para que uma flecha com valorização não trivial esteja sobre um ciclo orientado.

O trabalho ficou estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos a parte básica da teoria de representações necessária a seguir por este caminho. Consideramos A uma álgebra de artin e $\text{mod} A$ a categoria dos A -módulos finitamente gerados à esquerda. Uma ênfase especial foi dada à teoria de quivers, às representações

de quivers e às seqüências de Auslander-Reiten. Houve intenção de apresentar, ao menos de forma sucinta, a equivalência da categoria $\text{mod} A$ e a categoria das (Q, R) -representações. A forma construtiva da equivalência tem a vantagem de apresentar a técnica que possibilita a construção de exemplos de quivers de Auslander-Reiten.

Ainda no Capítulo 1 apresentamos os conceitos de morfismos irredutíveis, morfismos fontes e morfismos poços e suas relações com as seqüências de Auslander-Reiten, assim como a definição de quiver de Auslander-Reiten, o Lema de Harada-Sai e algumas características de álgebras de tipo de representação finito. Mostramos a não existência de flechas múltiplas no quiver de Auslander-Reiten Γ_A quando A é de tipo de representação finito e como consequência obtivemos a prova de que nas seqüências de Auslander-Reiten, os módulos indecomponíveis no termo do meio da seqüência não são isomorfos se A é de tipo de representação finito [Rie80] e [Bau82]. Finalizamos o capítulo apresentando uma caracterização das seqüências de Auslander-Reiten que possuem no termo do meio um módulo indecomponível projetivo-injetivo [AR77a]. Este resultado será útil no Capítulo 3 para a apresentação de uma aplicação do Teorema de Bautista-Brenner.

No Capítulo 2 desenvolvemos todas as técnicas necessárias para provar o Teorema de Bautista-Brenner: Seja A uma álgebra de artin. Dada uma seqüência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \oplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, se X tem um antecessor projetivo e Z tem um sucessor injetivo, então $r \leq 4$ e se $r = 4$ existe um único i tal que Y_i é projetivo-injetivo.

É fácil ver que nas condições do teorema acima, $l(Z) \geq l(X)$ ou $l(X) > l(Z)$. Posto isso, o que fizemos no Capítulo 2 foi apresentar um estudo da fonte $X \rightarrow \oplus_{i=1}^r Y_i$ com $l(X) > l(Z)$ e Y_i não projetivo e também do poço $\oplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow Z$ com $l(Z) \geq l(X)$ e Y_i não injetivo. As propriedades que o morfismo fonte apresenta, denotamos de propriedade (A) .

Através do estudo da fonte com a propriedade (A) , mostramos que X não tem antecessor projetivo. A técnica usada para provar este resultado foi mostrar que X é estável à esquerda e todo caminho pré-seccional terminando em $\tau^n X$ não contém módulos projetivos para todo $n \geq 0$. Conseqüentemente X não tem antecessor projetivo em Γ_A . Com o uso dos caminhos pré-seccionais, varremos rapidamente todos os antecessores de X . Lembramos que Liu provou este resultado usando caminhos seccionais e o que fizemos aqui foi generalizar, isto é, provamos usando caminhos pré-seccionais.

No Capítulo 3 apresentamos a prova do Teorema de Bautista-Brenner e o exemplificamos com um quiver de Auslander-Reiten em que o número de somandos de uma das seqüências de Auslander-Reiten tem quatro somandos indecomponíveis no termo do meio. Como aplicação, apresentamos um resultado devido a Ringel [BB81] que fornece um limitante para o número de A -módulos de $\text{ind} A$ onde A é uma álgebra de artin de tipo de representação finito. O número de A -módulos é limitado por $s(3^{(2^b-1)})$ onde s é o número de A -módulos simples e b é um limitante para o comprimento dos A -módulos de $\text{ind} A$.

No Capítulo 4 apresentamos algumas caracterizações de flechas com valorização não trivial que estão ou não sobre um ciclo orientado, como mencionamos acima. A prova destes também estão em [Liu93a] e foram obtidas, fazendo uso das mesmas técnicas para provar o Teorema de Bautista-Brenner. Provamos que uma flecha $X \xrightarrow{(d,d')} Y$ não possui vértice inicial nem final sobre um ciclo orientado de Γ_A , Y não tem antecessor projetivo e X não tem sucessor injetivo em Γ_A .

se $d, d' > 1$.

Para apresentarmos estes últimos resultados, fez-se necessário o Teorema de Bautista-Smalø que afirma que não existem ciclos seccionais no quiver de Auslander-Reiten [BS83]. Demos uma prova devido a Bongartz [Bon83] e como consequência do Teorema de Bongartz, provamos que a composição de morfismos irredutíveis sobre um caminho seccional é não nula. Mostramos também que se um módulo X tem a propriedade $(\mathcal{A})$ então $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito e X não é τ -periódico. Além disso, apresentamos o conceito de componentes semi-estáveis e provamos que existe uma componente estável à esquerda contendo X e destituída de módulos τ -periódicos e que X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A .

Capítulo 1

Categoria $\text{mod } A$ e o Quiver de Auslander-Reiten

Neste capítulo apresentaremos os resultados básicos de módulos e quivers que faremos uso no decorrer deste trabalho. Apresentaremos a prova de alguns, e para outros, citaremos apenas alguma referência, principalmente no que se refere a teoria dos módulos. Muitos dos resultados que enunciaremos possuem um dual. Algumas vezes deixaremos de mencionar o dual. O leitor poderá assumir a validade do dual salvo menção em contrário.

1.1 Categoria de Módulos

O conteúdo desta seção pode ser encontrado em vários textos elementares de teoria dos módulos. Em particular citamos [AF74], [JM84].

Dados um anel A com unidade e M um conjunto não vazio com estrutura de grupo abeliano. Consideraremos M como sendo um A -módulo à esquerda se existir uma ação de A sobre M , isto é, se, a cada par $(a, m) \in A \times M$, estiver associado um elemento $am \in M$ tal que: (a) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$; (b) $(a + b)m = am + bm$; (c) $(ab)m = a(bm)$; e (d) $1m = m$.

Neste trabalho usaremos somente módulos finitamente gerados (ver [AF74]) sobre uma álgebra. Por uma **álgebra** A sobre um anel comutativo com unidade R entendemos como sendo um anel com unidade que é também um R -módulo e tal que para $\alpha \in R$ e $a, b \in A$: $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Indicaremos por $\text{mod}A$ a categoria cujos objetos são os A -módulos finitamente gerados à esquerda e cujos morfismos são os morfismos entre módulos. Por $\text{ind}A$ indicaremos a subcategoria de $\text{mod}A$ dos A -módulos à esquerda indecomponíveis e finitamente gerados. Na categoria $\text{ind}A$, identificaremos os A -módulos isomorfos.

Vamos incluir em nosso contexto a idéia que temos de dimensão para espaços vetoriais sobre um corpo k . Para definir tal conceito de comprimento de módulos faz-se necessário o conceito de sequência de composição e que os módulos sejam artinianos e noetherianos.

Como estamos trabalhando mais especificamente com **álgebras de artin**, isto é, R -álgebras em que R é um anel artiniano e A é finitamente gerada como R -módulo, e com módulos finitamente gerados, então todo módulo de $\text{mod}A$ é artiniano e noetheriano. Sendo assim, denotaremos por $l(M)$ o **comprimento de M** e podemos definir:

$$l(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } M = 0 \\ n & \text{se } M \text{ tem uma sequência de composição de comprimento } n \end{cases}$$

Diremos também que uma sequência de morfismos $\dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \dots$ é uma **sequência exata** se para cada par de morfismos sucessivos, f_n e f_{n+1} , $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$.

Dada uma sequência exata de A -módulos $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$, são equivalentes: (a) a **sequência cinde**, (b) existe um morfismo $f' : Y \longrightarrow X$ tal que $f' f = I_X$, (c) existe um morfismo $g' : Z \longrightarrow Y$ tal que $g g' = I_Z$. Nestas condições $Y \simeq X \oplus Z$.

Diremos que um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é um **epimorfismo que cinde** ou uma “retração” se existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $fg = Id_Y$. A noção dual é a de **monomorfismo que**

cinde ou “secção”, isto é, é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $gf = Id_X$.

Lema 1.1.1 *Seja $f : M \longrightarrow N$ com $M, N \in ind A$.*

Se f é um monomorfismo que cinde ou um epimorfismo que cinde, então f é um isomorfismo.

Demonstração: Usar que $N = M \oplus N/Im f$. ■

Dada uma seqüência exata de A -módulos, existe uma forte relação entre o comprimento do termo do meio e a soma do comprimento dos extremos. É isso que apresentamos no próximo Lema.

Lema 1.1.2 .

Seja $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ uma seqüência exata de A - módulos. Então $l(Y) = l(X) + l(Z)$. ■

Como consequência deste Lema temos o Corolário:

Corolário 1.1.1 .

Seja M um módulo de comprimento finito com M_1 e M_2 submódulos de M . Então $l(M_1 + M_2) + l(M_1 \cap M_2) = l(M_1) + l(M_2)$. Conseqüentemente se $M = \oplus_{i=1}^n M_i$, então $l(M) = \sum_{i=1}^n l(M_i)$.

Além disso, se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo temos que f é um epimorfismo próprio se, e somente se, f é um epimorfismo e $l(X) > l(Y)$. De fato, pela seqüência exata: $0 \longrightarrow Ker f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ onde $Ker f \neq 0$, temos $l(X) = l(Ker f) + l(Y) > l(Y)$. A outra implicação é análoga. Temos também que se for monomorfismo próprio então $l(X) < l(Y)$.

Também estaremos fazendo uso do **Teorema de Krull-Schmidt** em quase todo o trabalho, isto é, se M é um módulo não nulo de comprimento finito, então, M tem uma decomposição finita em módulos indecomponíveis $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ e tal decomposição é essencialmente única no sentido de que, se $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$, $n = k$ então existe uma permutação σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $M_{\sigma_i} \simeq N_i$ com $(i = 1, \dots, n)$.

Outro resultado importante é dado no Lema a seguir onde veremos que o funtor Hom é exato à esquerda.

Lema 1.1.3 *Seja S um A -módulo.*

(a) *Se $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ é uma seqüência exata de A -módulos então a seqüência $0 \longrightarrow Hom_A(S, L) \xrightarrow{f_*} Hom_A(S, M) \xrightarrow{g_*} Hom_A(S, N)$ é exata.*

(b) *Se $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de A -módulos então a seqüência $0 \longrightarrow Hom_A(N, S) \xrightarrow{g^*} Hom_A(M, S) \xrightarrow{f^*} Hom_A(L, S)$ é exata.* ■

Agora falaremos um pouco de cobertura projetiva e envolvente injetiva. Antes de falarmos em cobertura projetiva, faz-se necessário dar alguns conceitos.

Chamaremos de **radical de $M \in \text{mod } A$** à intersecção de todos os submódulos maximais de M e denotaremos este submódulo $\text{rad}M$. Se a álgebra A é noetheriana e M é finitamente gerado, então M é noetheriano e portanto tem submódulos maximais. Como estamos trabalhando com álgebras de artin, pelo Teorema 15.20 [AF74] temos que A é noetheriano e então o resultado acima segue. Quando M não tem submódulos maximais, definimos $\text{rad}M = 0$.

Um módulo P é **projetivo** se dados A -módulos M e N e um epimorfismo $f : M \rightarrow N$ e um homomorfismo $g : P \rightarrow N$, sempre existe um homomorfismo $h : P \rightarrow M$ tal que $fh = g$, isto é, o morfismo g pode ser “suspendido”. O dual desta definição é a definição de **módulo injetivo**, bastando para isso, trocar o sentido das flechas e epimorfismo por monomorfismo.

Um morfismo $f : P \rightarrow M$ é uma **cobertura projetiva** de M se P é um A -módulo projetivo e f é um epimorfismo essencial, isto é, tal que $\ker f \subset \text{rad}P$. Temos também que todo A -módulo finitamente gerado M tem uma única cobertura projetiva a menos de isomorfismos.

Agora vamos definir envolvente injetiva. Antes daremos novos conceitos. Diremos que um módulo M sobre uma álgebra A é semisimples se, é soma direta de submódulos simples. As seguintes propriedades são equivalentes (Teorema 9.6 [AF74]): (a) M é semisimples, (b) M é soma de submódulos simples, (c) todo submódulo de M é somando direto de M . Podemos definir o **socle de $M \in \text{mod } A$** como a soma de todos os submódulos simples de M . Denotaremos **socle de M** por $\text{soc } M$. Como todo $M \in \text{mod } A$ é artiniano neste caso M possui submódulos simples. Portanto $\text{soc}M \neq 0$. Se M for semisimples então $\text{soc}M = M$.

Seja $M \in \text{mod } A$. Uma **envolvente injetiva** de M é um monomorfismo essencial $f : M \rightarrow I$ onde I é um A -módulo injetivo. Lembrando que um monomorfismo $f : L \rightarrow M$ satisfazendo $\text{soc}M \subset f(L)$ é chamado de essencial. Temos também que todo $M \in \text{mod } A$ tem uma única envolvente injetiva a menos de isomorfismo.

1.2 Quivers e Representações

O estudo da categoria $\text{mod } A$ pode ser feito através das informações obtidas a partir de um quiver (grafo). Começamos então definindo quiver e a seguir veremos como definir álgebras a partir de um quiver. Lembramos que a noção de quiver e representações de quivers teve início com Gabriel em [Gab72] para formular de maneira eficiente alguns problemas relacionados com espaço vetorial.

Definição 1.2.1 Um **quiver** Q é dado por dois conjuntos Q_0 e Q_1 não vazios e um par de funções $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$. Os elementos de Q_0 são chamados de **vértices** de Q e os elementos de Q_1 são as **flechas** de Q . Dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, chamaremos de **vértice inicial** de α a imagem de α através de s , isto é, $s(\alpha)$ e **vértice final** de α ao vértice $e(\alpha)$.

Por um **subquiver** de Q , entenderemos como sendo o quiver $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', e')$ onde $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$ e s' e e' são as restrições de s e e a Q'_1 respectivamente. Por um **subquiver pleno** (full) Q' de Q entenderemos como sendo um subquiver de Q tal que para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ com vértices $a, b \in Q'_0$ então $\alpha \in Q'_1$.

Um **passeio** entre os vértices a e b é uma seqüência de flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ onde $a \in \{s(\alpha_1), e(\alpha_1)\}$ e $b \in \{s(\alpha_n), e(\alpha_n)\}$ e para cada $1 \leq i \leq n-1$, α_i e α_{i+1} tem um vértice em comum.

Dado um vértice $a \in Q_0$, o subquiver pleno Q_a de Q formado por todos os vértices b tais que existem passeios de a para b é chamado **componente conexa** de Q .

Se a e b são vértices em Q , um **caminho** γ em Q de a para b de comprimento $n > 0$ é da forma $(b|\alpha_n \dots \alpha_1|a)$ tal que $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ e $s(\alpha_1) = a$ e $e(\alpha_n) = b$. Os caminhos de comprimento zero são os vértices de Q que denotaremos por $(a|a)$ ou ϵ_a . Note que este é um caminho sem flechas. O caminho $\gamma = (b|\alpha_n \dots \alpha_1|a)$ também será denotado por $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$.

Quando γ não é um caminho trivial, isto é, com comprimento maior do que zero, e $s(\gamma) = e(\gamma)$, diremos que γ é um **ciclo orientado** ou circuito orientado.

Com isso podemos definir a **álgebra de caminhos** kQ , incluindo os caminhos de comprimento zero. Dado um corpo k , consideremos o espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos. Se definirmos uma multiplicação nos elementos da base, teremos a álgebra de caminhos. O produto de $(b|\alpha_n \dots \alpha_1|a)$ e $(d|\beta_r \dots \beta_1|c)$ será $(d|\beta_r \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1|a)$ se $b = c$ e zero caso contrário. Observemos que a álgebra kQ tem dimensão finita se e somente se Q tem somente um número finito de vértices e não contém ciclo orientado (ver Proposição 1.1 em [ARS95] ou pág. 14 de [Coe92]). Desta forma obtivemos uma álgebra associativa com unidade onde $1 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ onde os ϵ_i são os caminhos triviais (Proposição 2.2.1 em [CLS82]).

Uma álgebra A , vista como A -módulo, se decompõe em A -módulos indecomponíveis $A \cong P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_t^{n_t}$, onde $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$. Uma álgebra é **básica** se $n_i = 1$ para todo inteiro i . Desta forma temos que kQ é uma álgebra básica. Basta tomar $kQ = kQ\epsilon_1 \oplus \dots \oplus kQ\epsilon_n$, a decomposição de kQ em módulos indecomponíveis onde $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos.

Uma **relação** em um quiver Q é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2 com o mesmo vértice inicial e o mesmo vértice final. Dada uma relação $\sum_{i=1}^m k_i w_i$ com $k_i \in k$, assumiremos sempre que $k_i \neq 0$ para todo i e se $m = 1$ chamaremos a relação de **relação nula** e assumiremos sem perda de generalidade que o coeficiente é 1.

Um **quiver com relações** (Q, R) é dado por um quiver Q e um conjunto de relações R para Q . A **álgebra de caminhos com relações** é por definição a álgebra kQ/I , onde I é o ideal de kQ gerado pelas relações de R (ver pág. 44 de [Rin84], ver também pág. 58 de [ARS95] ou ainda pág. 22 de [Coe92]). Em geral, denotaremos por R ao ideal I .

Como exemplo, consideremos k um corpo e Q o quiver dado na Figura (1.1) e seja ρ a relação dada por $\gamma\alpha - \delta\beta$ sobre Q . Desta forma temos $A = kQ/R$ onde Q é o quiver da Figura (1.1) e R é o ideal gerado por ρ .

Se k é um corpo, uma **representação de Q** sobre k é da forma (V_i, ϕ_α) onde para cada vértice $i \in Q_0$, temos um espaço vetorial V_i e para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$, nós temos uma transformação linear $\phi_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$.

Se (V_i, ϕ_α) e (V'_i, ϕ'_α) são representações de Q sobre k , então um **morfismo de representações** $\eta : (V_i, \phi_\alpha) \longrightarrow (V'_i, \phi'_\alpha)$ é por definição uma família $\eta = (\eta_i)_{i \in Q_0}$ onde $\eta_i : V_i \longrightarrow V'_i$

Figura 1.1:

é uma transformação linear tal que para toda flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ temos $\eta_j \phi_\alpha = \phi'_\alpha \eta_i$.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\eta_i} & V'_i \\ \phi_\alpha \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \phi'_\alpha \\ V_j & \xrightarrow{\eta_j} & V'_j \end{array}$$

Figura 1.2:

Diremos que as representações (V_i, ϕ_α) e (V'_i, ϕ'_α) são isomorfas se existe um isomorfismo de representações, isto é, um morfismo de representações $\eta : (V_i, \phi_\alpha) \rightarrow (V'_i, \phi'_\alpha)$ tal que cada η_i é um isomorfismo.

Se $w = (b|\alpha_p \dots \alpha_1|a)$ é um caminho em Q e $V = (V_i, \phi_\alpha)$ é uma representação, definimos $V(w)$ como sendo a transformação linear $V(w) := \phi_{\alpha_p} \dots \phi_{\alpha_1} : V_a \rightarrow V_b$. Dizemos que uma representação V de Q satisfaz uma relação $\rho = \sum_{i=1}^m k_i w_i$ se $\sum_{i=1}^m k_i V(w_i) = 0$. Uma **representação** de (Q, R) é uma representação de Q que satisfaz as relações de R .

Dado um quiver com relações (Q, R) , obtemos desta forma a **categoria de representações** $\text{mod}(Q, R)$ onde os objetos são as representações e os morfismos são os morfismos de representações.

A soma de dois objetos (V_i, ϕ_α) e (V'_i, ϕ'_α) na categoria de representações (Q, R) será um objeto (W_i, φ_α) onde $W_i = V_i \oplus V'_i$ para cada $i \in Q_0$ e para cada $\alpha \in Q_1$,

$$\varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \phi_\alpha & 0 \\ 0 & \phi'_\alpha \end{pmatrix}.$$

Um objeto (W_i, φ_α) será uma **representação indecomponível** se não for isomorfo a soma de duas representações não nulas.

Gabriel mostrou em [Gab72] que um quiver sem relação possui somente um número finito de representações indecomponíveis se, e somente se, este for união disjunta de quivers obtidos orientando os diagramas da Figura (1.3) e este resultado vale independentemente da orientação desses quivers.

Figura 1.3:

Estudar a categoria $\text{mod}(kQ/R)$ é equivalente a estudar a categoria $\text{mod}(Q, R)$. A prova da equivalência destas categorias pode ser encontrada em [Rin84], pág. 44 ou em [ARS95] (Teorema 1.5, pág. 57), ou ainda [Coe92], pág. 28. A idéia é contruir funtores $F : \text{mod}(kQ/R) \rightarrow \text{mod}(Q, R)$ e $G : \text{mod}(Q, R) \rightarrow \text{mod}(kQ/R)$, tais que $FG \simeq \text{Id}_{\text{mod}(Q, R)}$ e $GF \simeq \text{Id}_{\text{mod}(kQ/R)}$.

Definimos o funtor $F : \text{mod}(kQ/R) \rightarrow \text{mod}(Q, R)$ da seguinte forma: Se $M \in \text{mod}(kQ/R)$, $F(M)$ será uma (Q, R) -representação dada por $V_i = \epsilon_i M$ para cada $i \in Q_0$. Lembramos que V_i é um k -espaço vetorial. Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ de (Q, R) temos a seguinte transformação linear: $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ dada por $f_\alpha(\epsilon_i x) = \alpha(\epsilon_i x) = (\alpha \epsilon_i) x = (\epsilon_j \alpha) x = \epsilon_j(\alpha x)$ onde $\alpha x \in M$.

Seja $V = ((\epsilon_i M)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$. Se mostrarmos que V satisfaz as relações de R , então basta definir $F(M) = V$. Seja $\gamma_i = \alpha_1^i \dots \alpha_{t_i}^i$ um caminho em (Q, R) e $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_1^i \dots \alpha_{t_i}^i$ uma relação. Vamos mostrar que $V(\rho) = 0$, onde $V(\rho)$ é a transformação linear $V(\rho) : \epsilon_{s(\rho)} M \rightarrow \epsilon_{t(\rho)} M$. Observemos que $V(\rho)(\epsilon_{s(\rho)} m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{\alpha_1^i} \dots f_{\alpha_{t_i}^i}(\epsilon_{s(\rho)} m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\alpha_1^i \dots \alpha_{t_i}^i)(\epsilon_{s(\rho)} m)$. Portanto $V(\rho)(\epsilon_{s(\rho)} m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\alpha_1^i \dots \alpha_{t_i}^i)(\epsilon_{s(\rho)} m) = \rho(\epsilon_{s(\rho)} m) = 0$.

Agora precisamos definir $F(\phi)$ onde $\phi \in \text{Hom}_{(kQ/R)}(M, N)$ e $\phi(\epsilon_i m) = \epsilon_i \phi(m)$. Definimos $F(\phi) = (\phi_i)_{i \in Q_0}$, onde $\phi_i : \epsilon_i M \rightarrow \epsilon_i N$ é a restrição de ϕ ao subespaço vetorial $\epsilon_i M$. Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ o diagrama da Figura (1.4) é comutativo. Desta forma F é um funtor de $\text{mod}(kQ/R)$ em $\text{mod}(Q, R)$.

Definiremos agora o funtor $G : \text{mod}(Q, R) \rightarrow \text{mod}(kQ/R)$. Seja $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \in \text{mod}(Q, R)$. Para definirmos $G(V)$, basta considerar $G(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$, necessitando apenas definir a estrutura de kQ/R -módulo. Então, seja $\gamma \in kQ/R$ e $m = (m_i)_{i \in Q_0} \in G(V)$, onde $m_i \in V_i$. Se $\gamma = \epsilon_i$ então $\epsilon_i m = m_i$. Se $\alpha : i \rightarrow j$ é uma flecha em Q , $\alpha m = (\eta_i)_{i \in Q_0}$ onde $\eta_j = f_\alpha(m_i)$

$$\begin{array}{ccc}
\epsilon_i M & \xrightarrow{f_\alpha} & \epsilon_j M \\
\phi_i \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi_j \\
\epsilon_i N & \xrightarrow{g_\alpha} & \epsilon_j N
\end{array}$$

Figura 1.4:

e $\eta_i = 0$ se $i \neq j$. Se $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ é um caminho de i a j então $V(\gamma) = f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1} : V_i \rightarrow V_j$ e $\gamma m = (\eta_i)_{i \in Q_0}$ onde $\eta_j = V(\gamma)(m_i)$ e $\eta_i = 0$ se $i \neq j$. Observemos que se $\rho \in R$ então, $\rho m = 0$. Seja $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0} : V \rightarrow W$ um morfismo de $\text{mod}(Q, R)$, vamos definir um morfismo em $\text{mod}(kQ/R)$ de $G(V)$ para $G(W)$. Basta tomar

$$G(\phi) = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \phi_r \end{pmatrix} : G(V) \rightarrow G(W).$$

Como ϕ é um morfismo de representações, então $G(\phi)$ é um morfismo de (kQ/R) -módulos. Portanto está definido o funtor G . Desta forma temos que as categorias $\text{mod}(kQ/R)$ e $\text{mod}(Q, R)$ são equivalentes e para mostrar isso basta mostrar que $FG \simeq Id_{\text{mod}(Q, R)}$ e $GF \simeq Id_{\text{mod}(kQ/R)}$, isto é, que existe uma transformação natural $\phi : FG \rightarrow Id_{\text{mod}(Q, R)}$ tal que para cada $M \in \text{Ob}(\text{mod}(Q, R))$ existe um morfismo $\phi(M) : FG(M) \rightarrow Id_{\text{mod}(Q, R)}(M)$ com a seguinte propriedade, para todo morfismo $f : M \rightarrow N$ na categoria $\text{mod}(Q, R)$ o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\epsilon_i M & \xrightarrow{f_\alpha} & \epsilon_j M \\
\phi_i \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi_j \\
\epsilon_i N & \xrightarrow{g_\alpha} & \epsilon_j N
\end{array}$$

natural

Figura 1.5:

e $\phi(M)$ seja um isomorfismo para todo $M \in \text{Ob}(\text{mod}(Q, R))$. Definimos F como sendo a inversa de G , logo podemos tomar ϕ como sendo a identidade.

Os módulos projetivos, injetivos e simples, tem um papel importante no estudo da categoria de módulos. Devido a isso, vamos verificar como são as representações destes módulos. Desde já, observamos que o número de projetivos, injetivos e simples é o mesmo (Corolário 4.5, pág. 14 em [ARS95] ou Proposição 1.7.2 em [CLS82]).

Começemos com os módulos simples. A representação destes módulos deverá manter esta propriedade, isto é, dada a representação de um módulos simples, não poderá existir nenhuma inclusão de outra representação não trivial nesta. Para cada vértice $j \in Q_0$, consideremos a representação $S_j = ((S_j)_i, f_\alpha) \in \text{mod}(Q, R)$: $(S_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ k & \text{se } i = j \end{cases}$ e $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in Q_1$.

Com esta definição, conseguimos mostrar que não existe nenhuma representação contida em S_j e que para qualquer representação Γ , existirá algum i tal que $S_i \hookrightarrow \Gamma$ e então Γ não será simples, a menos que Γ seja isomorfa a S_i . Portanto, $S_j, j \in Q_0$, são todas as representações de simples em $\text{mod}(Q, R)$. Pela Proposição 4.8, pág. 15 em [ARS95], temos que se ${}_A A = A\epsilon_1 \oplus \dots \oplus A\epsilon_n$, onde $A = kQ/R$ então os módulos $\{A\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ são módulos projetivos indecomponíveis e $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos.

Vamos descrever a representação dos A -módulos projetivos indecomponíveis $A\epsilon_i = P_i = ((P_i)_j, f_\alpha)$. Pela definição do funtor F acima, temos: $F(P_i) = F(A\epsilon_i) = \epsilon_j A\epsilon_i = (P_i)_j$. Portanto, na representação de P_i , em cada vértice j , teremos um espaço vetorial gerado pelos caminhos de i a j módulo as relações. E se $\alpha : j \rightarrow s$ é uma flecha então, $f_\alpha : \epsilon_j A\epsilon_i \rightarrow \epsilon_s A\epsilon_i$ é dada por $f_\alpha(\gamma) = \alpha\gamma$ onde $\gamma \in \epsilon_j A\epsilon_i$.

Outra representação de módulos de grande interesse em nosso trabalho é a representação do radical de um módulo projetivo indecomponível. Lembramos que $\text{rad}(A\epsilon_i) = (\text{rad}A)\epsilon_i$ (ver Teorema 1.5.5 em [CLS82]) e que $\text{rad}(kQ/R) = J/R$ onde J é o ideal de kQ gerado pelos caminhos de comprimento 1. Então $(\text{rad}P_i)_j = \epsilon_j(J/R)\epsilon_i$. Portanto se $i \neq j$ então $\text{rad}(P_i)_j = (P_i)_j$ e se $i = j$ então $(P_i)_i = \epsilon_i(kQ/R)\epsilon_i = k\epsilon_i \oplus \epsilon_i(J/R)\epsilon_i$. Logo, $\dim_k(\text{rad}P_i)_i = \dim_k(P_i)_i - 1$, o que significa eliminar o caminho trivial ϵ_i e para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q temos que g_α é a restrição de f_α onde f_α está na representação de P_i .

Para estabelecermos como são as representações de módulos injetivos indecomponíveis, tomamos A^{op} , a álgebra oposta à álgebra $A = (kQ/R)$, onde $A \simeq A^{op}$ como k -espaço vetorial e a multiplicação é dada por $a * b = ba$. Neste caso, $A^{op} = kQ^{op}/R^{op}$, onde Q^{op} é o quiver Q com o mesmo conjunto de vértices, mas com as flechas invertidas. Agora consideremos $D : \text{mod}(kQ/R) \rightarrow \text{mod}((kQ/R)^{op})$ o funtor dualidade dado por $DX := \text{Hom}_k(X, k)$. Observe que DX é um $(kQ/R)^{op}$ -módulo à esquerda. De fato, se $f \in DX$ e $a \in (kQ/R)^{op}$ então $a * f \in DX$, basta definir da seguinte forma $(a * f)(x) = f(ax)$. Definido assim, temos que $a * f$ é um k -homomorfismo, isto é, $(a * f)(kx) = f(a(kx)) = f(k(ax)) = kf(ax) = k(a * f)(x)$. Portanto, $a * f \in \text{Hom}(X, k)$. Este funtor leva módulos projetivos em injetivos. Desta forma se queremos a representação de um módulo injetivo, basta fazer a seguinte composição: primeiramente tomamos o módulo projetivo P_i^* em $\text{mod}(kQ/R)^{op}$, então DP_i^* é um injetivo indecomponível em $\text{mod}(kQ/R)$. Pelo funtor $F : \text{mod}(kQ/R) \rightarrow \text{mod}(Q^{op}, R^{op})$ sabemos qual é a representação de P_i^* , logo basta aplicar a dualidade $D' : \text{mod}(Q^{op}, R^{op}) \rightarrow \text{mod}(Q, R)$ dada por $D' = FDG$ onde $G : \text{mod}(Q, R) \rightarrow \text{mod}(kQ/R)$. Portanto, $I_j := D(P_j^*) =: ((I_j)_i, f_\alpha)$ e então $(I_j)_i = (P_j^*)_i^* \simeq_k (\epsilon_i(kQ^{op}/R^{op})\epsilon_j)^* \simeq_k \epsilon_j(kQ/R)\epsilon_i$.

Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow s$ em Q , a transformação linear $f_\alpha : \epsilon_j(kQ/R)\epsilon_i \rightarrow \epsilon_j(kQ/R)\epsilon_s$ é descrita assim: Se γ é um caminho de i a j , então $f_\alpha(\gamma) = \gamma'$ onde γ' é um caminho de s a j tal que $\gamma = \gamma'\alpha$ e $f_\alpha(\gamma) = 0$ caso não existir γ' . A prova destes resultados sobre representações de projetivos, injetivos e simples, indecomponíveis, estão em [CLS82] pág. 70.

1.3 Um invariante entre módulos indecomponíveis

As seqüências de Auslander-Reiten, apareceram primeiramente em 1971-1972 para álgebras de tipo de representação finito, em conexão com o estudo de resoluções projetivas de funtores simples. Duas provas bem diferentes da existência de seqüências de Auslander-Reiten foram dadas originalmente para álgebras de artin no período 1972-1973. Mais tarde apareceram outras demonstrações ([AR74b], [AR75], [Aus79]), [But80] e [Gab80]). Aliás, Auslander mostrou que um anel artiniano R com R -módulos indecomponíveis de comprimento limitado sempre possui seqüências de Auslander-Reiten [AR74a].

O conceito de seqüência de Auslander-Reiten foi apresentado por Auslander e Reiten com o nome de seqüências quase cindidas (“almost split sequences”) em [AR75]. Estas seqüências tiveram seu primeiro aparecimento quando Auslander fez a generalização do Teorema de Roiter para anéis artinianos [AR74a]. Agora são chamadas seqüências de Auslander-Reiten, devido ao fato de que sua existência em geral bem como muitas das propriedades terem sido feitas em um trabalho conjunto de Auslander e Reiten.

Primeiramente vamos ver o conceito de seqüência de Auslander-Reiten. Uma seqüência exata que não cinde $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, com X e Z indecomponíveis, é chamada **seqüência de Auslander-Reiten (ARS)** se dado um morfismo $\alpha : X \rightarrow X'$ que não é monomorfismo que cinde (secção), existe $\alpha' : Y \rightarrow X'$ com $\alpha' f = \alpha$ (Figura (1.6)). Esta propriedade pode ser substituída pela propriedade dual, tal que para qualquer $\beta : Z' \rightarrow Z$ que não é um epimorfismo que cinde (retração), existe $\beta' : Z' \rightarrow Y$ com $g \beta' = \beta$. Enunciaremos a seguir um Teorema que garante que uma seqüência de Auslander-Reiten, se ela existir, é única para um dado módulo X ou Z . Um Teorema devido a Auslander e Reiten [AR75] afirma que qualquer álgebra de artin possui seqüências de Auslander-Reiten. Também afirma que qualquer anel artiniano de tipo de representação finito tem seqüências de Auslander-Reiten.

Figura 1.6: Seqüência de Auslander-Reiten.

Vamos discutir um pouco a construção de uma seqüência de Auslander-Reiten na categoria $\text{mod } A$. Seja $\text{Hom}_A(, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$ o funtor dualidade. Lembramos que se P_A é um A -módulo projetivo à direita então $P^t = \text{Hom}_A(P, A)$ é um módulo projetivo à esquerda.

Consideremos agora um módulo à direita M_A . Seja $P_1 \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ a apresentação

projetiva minimal de M , isto é, os morfismos $f : P_0 \rightarrow M$ e $g : P_1 \rightarrow \text{Ker } g$ são coberturas projetivas. Aplicando o funtor $\text{Hom}_A(-, A)$, pelo Lema (1.1.3) temos: $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, A) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(P_0, A) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{Coker } g^* \rightarrow 0$. Define-se a **transposta** de M como sendo $\text{Tr } M := \text{Coker } g^*$ ([ARS95] pág. 100). Como apresentação projetiva minimal e a cobertura projetiva são únicas a menos de isomorfismo, então $\text{Tr } M$ é um A -módulo à esquerda único a menos de isomorfismo ([ARS95] Proposição 1.7 pág. 105).

Algumas propriedades importantes de Tr são: Um A -módulo $M \in \text{ind } A$ é projetivo se e somente se $\text{Tr } M = 0$ e se não for projetivo então $\text{Tr } M \in \text{ind } A$ e $\text{Tr}(\text{Tr } M) \simeq M$ (Proposição 1.7, pág. 105 em [ARS95]).

Lembramos que inicialmente tomamos M um A -módulo à direita e que $\text{Tr } M$ é um A -módulo à esquerda, logo $\text{Tr} : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$, mas nem por isso é uma dualidade pois anula projetivos. Para evitar isso, consideremos $M, N \in \text{mod } A$ e $\mathcal{P}(M, N) \subset \text{Hom}_A(M, N)$ o conjunto de todos os morfismos que se fatoram através de um módulo projetivo. Da Proposição 2.1, pág. 245 em [AR75] temos que $\mathcal{P}(M, N)$ é subgrupo de $\text{Hom}_A(M, N)$ e definimos $\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{P}(M, N)$ onde denotaremos o correspondente de um morfismo $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ por $\underline{f} \in \underline{\text{Hom}}_A(M, N)$. Desta Proposição 2.1 de [AR75] segue que se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow Q$ estão em $\text{mod } A$ então $\underline{gf} = \underline{g} \underline{f}$. Desta forma podemos definir a categoria $\underline{\text{mod}} A = \text{mod } A / \mathcal{P}$ cujos objetos são os mesmos de $\text{mod } A$, mas os morfismos entre dois objetos são os elementos de $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$ (pág. 104 em [ARS95] ou [AR74b]).

Desta forma podemos definir um funtor de $\text{mod } A$ em $\underline{\text{mod}} A$ que é a identidade sobre os objetos de $\text{mod } A$ e associa a cada morfismo $f : M \rightarrow N$ sua classe módulo $\mathcal{P}(M, N)$. Assim, Tr define uma dualidade de $\underline{\text{mod}} A$ em $\underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ (Proposição 1.6, pág. 104 em [ARS95]). Esta dualidade Tr é chamada de **transposição**. Usando a fatoração através de módulos injetivos em $\text{Hom}_A(M, N)$, temos a noção dual de $\underline{\text{mod}} A$ que é denotada por $\overline{\text{mod}} A$.

A correspondência $D\text{Tr}$ que em geral não é um funtor sobre $\text{mod } A$ para uma álgebra de artin A fora anteriormente estudada em conexão com o estudo da correspondência Tr , antes do trabalho de Auslander sobre teoria dos anéis comutativos ([Aus62]). Esta correspondência permite construir módulos indecomponíveis a partir de outros. A importância desta construção cresceu através da prova do teorema da existência de seqüências de Auslander-Reiten, porque expressa as relações entre os termos finais destas seqüências.

Definição 1.3.1 *As translações de Auslander-Reiten são definidas como as compostas de D com Tr e as denotaremos por $\tau = D\text{Tr}$ e $\tau^{-1} = \text{Tr } D$.*

Com Proposição 1.9, pág. 106 de [ARS95] temos:

Proposição 1.3.1 *As translações τ e τ^{-1} definem equivalências inversas $\tau : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \overline{\text{mod}} A$ e $\tau^{-1} : \overline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$.*

As seguintes propriedades elementares das translações de Auslander-Reiten podem ser encontradas em [ARS95], Proposição 1.10 na pág. 107. Estas propriedades são decorrentes das propriedades de $D\text{Tr}$. Dados A -módulos indecomponíveis M e N :

- (a) $\tau M = 0$ se, e somente se, M é projetivo;
- (b) $\tau^- N = 0$ se, e somente se, N é injetivo;
- (c) Se M é não projetivo então τM é indecomponível não injetivo e $\tau^-(\tau M) \simeq M$;
- (d) Se N é não injetivo, então $\tau^- N$ é indecomponível não projetivo e $\tau(\tau^- N) \simeq N$;
- (e) Se M e N são não projetivos então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau M \simeq \tau N$;
- (f) Se M e N são não injetivos então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau^- M \simeq \tau^- N$.

Proposição 1.3.2 *Se $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ é uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$, então $X \simeq D\text{Tr} Z$ e $Z \simeq \text{Tr} DX$.*

Auslander e Reiten provaram em [AR75] que dado um módulo $Z \in \text{ind } A$ que não é projetivo, existe uma única seqüência de Auslander-Reiten terminando em Z a menos de isomorfismo. Desta forma, tais seqüências são invariantes dos A -módulos indecomponíveis que não são projetivos ou não injetivos. O seguinte teorema estabelece a existência e unicidade das seqüências de Auslander-Reiten.

Teorema 1.3.1 (Existência e Unicidade de Seqüências de Auslander-Reiten) .

Seja A uma álgebra de artín.

- (a) *Se $X \in \text{ind } A$ é não projetivo, então existe uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$ terminando em X : $0 \rightarrow \tau X \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$.*
- (b) *Se $Z \in \text{ind } A$ é não injetivo, então existe uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$ começando em Z : $0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow \tau^- Z \rightarrow 0$.*
- (c) *Uma seqüência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ é unicamente determinada por X ou Z a menos de isomorfismo.*

Os conceitos morfismo irreduzível, morfismo fonte (“minimal left almost split map”) e morfismo poço (“minimal right almost split map”) e suas relações com as seqüências de Auslander-Reiten podem ser encontrados em [AR77a]. Agora apresentaremos tais conceitos e logo em seguida veremos quais as relações destes com quivers. Uma boa parte dos resultados também podem ser encontrados em [Coe92].

Definição 1.3.2 *Seja $Z \in \text{ind } A$. Um morfismo $g : Y \rightarrow Z$ é um **poço** em Z se:*

- (a) *g não é um epimorfismo que cinde.*
- (b) *para todo $h : Y \rightarrow Y$ tal que $g h = g$, h é um automorfismo.*
- (c) *para todo $h : X \rightarrow Z$ que não seja um epimorfismo que cinde, existe $h' : X \rightarrow Y$ tal que $g h' = h$.*

Com o dual desta definição, obtemos a definição de **morfismo fonte**. Além disso, pela definição, uma fonte é única, a menos de isomorfismo. Analogamente para o morfismo poço.

O próximo Lema é uma consequência imediata da definição de seqüência de Auslander-Reiten e da definição de morfismo fonte e poço (ver Proposição IV.3 em [Coe92]).

Lema 1.3.1 *Seja $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten. Então*

- (a) *f é uma fonte.*
 (b) *g é um poço.*

A prova do Lema (1.3.2) pode ser encontrada em [Coe92] Corolário IV.4 ou Proposição 1.12 na pág. 142 de [ARS95].

Lema 1.3.2 *Se $M \in \text{ind}A$ valem os seguintes resultados:*

- (a) *Se M não é projetivo e se $g : E \longrightarrow M$ é um poço então g é um epimorfismo e $0 \longrightarrow \text{Ker}g \xrightarrow{i} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ é uma seqüência de Auslander-Reiten.*
 (b) *Se M não é injetivo e se $f : M \longrightarrow E$ é uma fonte então f é um monomorfismo e $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\pi} \text{Coker}f \longrightarrow 0$ é uma seqüência de Auslander-Reiten.*

Lema 1.3.3 *Se P e I são módulos indecomponíveis, valem os seguintes resultados:*

- (a) *Se P é um projetivo não simples, então a inclusão $i : \text{rad}P \hookrightarrow P$ é um poço e todo outro poço em P é isomorfo a i .*
 (b) *Se I é injetivo não simples, então a projeção natural $\pi : I \longrightarrow I/\text{soc}I$ é uma fonte e toda qualquer outra fonte em I é isomorfa a π .*

Em [AR77a], seção 4, Auslander e Reiten deram algumas caracterizações de módulos projetivos que são injetivos e quando módulos injetivos são projetivos e isso foi consequência dos Lemas (1.3.2) e (1.3.3).

Definição 1.3.3 *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$, com X e Y não nulos em $\text{mod}A$ é dito irredutível se*

- (a) *não é um epimorfismo que cinde nem um monomorfismo que cinde e*
 (b) *dado um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & Z & \end{array}$$

então ou h é um epimorfismo que cinde ou g é um monomorfismo que cinde.

Para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & \text{Im}f & \end{array}$$

com $g(x) = f(x)$ e $h(x) = x$. Sendo f um morfismo irredutível, concluímos que f é um monomorfismo próprio ou um epimorfismo próprio. Como consequência temos que nenhum morfismo irredutível termina em projetivo simples ou começa em injetivo simples.

Como exemplo temos que os morfismos fontes e poços são irredutíveis.

Dado um A -módulo indecomponível projetivo P , podemos determinar os morfismos irredutíveis $X \rightarrow P$. Estes morfismos irredutíveis são exatamente os morfismos inclusão dos somandos diretos não nulos X do $\text{rad}P$. Se $I \in \text{ind}A$ é injetivo, então $I \rightarrow Y$ é um morfismo irredutível se e somente se Y é um somando direto não nulo de $I/\text{soc}I$ com $I \rightarrow Y$ a projeção canônica (Corolário 1.6, pág. 139 em [ARS95] ou Proposição IV.5 em [Coe92]).

Lema 1.3.4 *Sejam M, P e I em $\text{mod}A$.*

(a) *Se $f : M \rightarrow P$ é um epimorfismo irredutível, então P não é projetivo.*

(b) *Se $f : I \rightarrow M$ é um monomorfismo irredutível, então I não é injetivo.*

Demonstração: Provaremos somente o item (a) pois a demonstração de (b) é similar. Vamos mostrar que P não é projetivo. Suponhamos que P seja projetivo. Como $f : M \rightarrow P$ é um epimorfismo e P é projetivo, concluímos então que f cinde. Absurdo pois f é irredutível. Portanto, P não é projetivo. ■

O próximo Lema apresenta uma conexão entre morfismos irredutíveis e morfismo fonte e morfismo poço. Uma síntese do Lema é que todo morfismo irredutível terminando (começando) em um indecomponível é restrição de um poço (co-restrição de uma fonte) e vice-versa, toda restrição de um poço (co-restrição de uma fonte) é um morfismo irredutível. A prova deste Lema foi feita por Auslander e Reiten e pode ser encontrada em [AR77a], Teorema 2.4. Ver também [Coe92].

Lema 1.3.5 *Seja $M \in \text{ind}A$.*

(a) *Um morfismo $h : M \rightarrow X$ é irredutível, se e somente se, existe $h' : M \rightarrow X'$ tal que $(h, h')^t$ é uma fonte em M .*

(b) *Um morfismo $h : X \rightarrow M$ é irredutível, se e somente se, existe $h' : X' \rightarrow M$ tal que (h, h') é um poço em M .*

Dada uma seqüência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, os morfismos irredutíveis começando em X ou terminando em Z são da forma $f' : X \rightarrow Y'$, onde Y' é um somando direto não nulo de Y . Dizemos que $Y = Y' \oplus Y''$, e $f = (f' \ f'')^t$ para algum f'' . Os morfismos irredutíveis finalizando em Z são da forma $g' : Y \rightarrow Z$ onde novamente $Y'' \neq 0$, $Y = Y' \oplus Y''$ e $g = (g' \ g'')$ para algum g'' .

A seguir mostraremos que, dados dois morfismos irredutíveis, ambos terminando no mesmo módulo indecomponível M , mas começando em módulos não isomorfos, existirá um poço terminando em M onde o domínio de cada morfismo irredutível é um somando direto do domínio do poço.

Lema 1.3.6 *Considere Y, X e M A -módulos, com $M \in \text{ind}A$ e $Y \neq X$.*

(a) *Se $h : X \rightarrow M$ e $h' : Y \rightarrow M$ são morfismos irredutíveis então existe um morfismo irredutível $g : W \rightarrow M$ tal que $(h \ h' \ g) : X \oplus Y \oplus W \rightarrow M$ é um poço.*

(b) *Se $h : M \rightarrow X$ e $h' : M \rightarrow Y$ são morfismos irredutíveis, então existe $g : M \rightarrow W$ irredutível tal que $(h \ h' \ g)^t : M \rightarrow X \oplus Y \oplus W$ é uma fonte.*

Demonstração: Claramente M não é projetivo simples devido ao Lema (1.3.4). Se M for projetivo, pelo Lema (1.3.3), a inclusão $i : \text{rad}M \hookrightarrow M$ será um poço e qualquer outro poço será isomorfo a ele. Como h e h' são irreduzíveis, então pelo Lema (1.3.5) existem $h_1 : N_1 \rightarrow M$ e $h_2 : N_2 \rightarrow M$ tais que $(h \ h_1) : X \oplus N_1 \rightarrow M$ e $(h' \ h_2) : Y \oplus N_2 \rightarrow M$ são poços. Como são isomorfos, então $X \oplus N_1 \simeq Y \oplus N_2 \simeq \text{rad}M$ e pelo fato de $X \not\simeq Y$ temos que Y é somando de N_1 , logo existe W tal que $N_1 = Y \oplus W$ e existe $g : W \rightarrow M$ tal que $\begin{pmatrix} h & h' & g \end{pmatrix} : \text{rad}M \rightarrow M$ é um poço e $\text{rad}M = X \oplus Y \oplus W$.

Agora, vamos supor que M não é projetivo. Pelo Lema (1.3.5) (b) temos que existem $f : X' \rightarrow M$ e $g : Y' \rightarrow M$ tais que $(h \ f) : X \oplus X' \rightarrow M$ e $(h' \ g) : Y \oplus Y' \rightarrow M$ são poços. Como M não é projetivo, pelo Lema (1.3.2) (a), $0 \rightarrow \text{Ker}(h \ f) \xrightarrow{i} X \oplus X' \xrightarrow{(h \ f)} M \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \text{Ker}(h' \ g) \xrightarrow{i} Y \oplus Y' \xrightarrow{(h' \ g)} M \rightarrow 0$ são seqüências de Auslander-Reiten e pelo Lema (1.3.1) (b) $X \oplus X' \simeq Y \oplus Y'$. Como $X \not\simeq Y$, então X é um somando de Y' . Portanto existe W tal que $Y' = X \oplus W$ e $g : W \rightarrow M$ tal que $(h \ h' \ g) : X \oplus Y \oplus W \rightarrow M$ é um poço. ■

Proposição 1.3.3 .

- (a) *Seja $X \in \text{ind}A$ não projetivo. Então existe um morfismo irreduzível $f : Y \rightarrow X$ se, e somente se, existe um morfismo irreduzível $f' : \tau X \rightarrow Y$.*
 (b) *Seja $Y \in \text{ind}A$ não injetivo. Então existe um morfismo irreduzível $g : Y \rightarrow X$ se, e somente se, existe um morfismo irreduzível $g' : X \rightarrow \tau^{-1}Y$.*

Com a igualdade de comprimento de módulos que conseguimos com o auxílio de uma seqüência exata (Lema (1.1.2)) e mais o fato de que todo morfismo irreduzível é um monomorfismo próprio ou epimorfismo próprio, temos o seguinte Lema:

Lema 1.3.7 .

Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{(f \ f')^t} Y \oplus Y' \xrightarrow{(g \ g')} Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten. Então, g é um epimorfismo irreduzível (ou monomorfismo) se, e somente se, f' é um epimorfismo irreduzível (respectivamente, monomorfismo).

Demonstração: Vamos supor que g é um epimorfismo irreduzível e concluir que f' é um epimorfismo irreduzível. A prova da recíproca ou o caso em que g é monomorfismo é análoga.

Pelo Lema (1.1.2) temos $l(X) + l(Z) = l(Y) + l(Y')$. Como g é um epimorfismo irreduzível, temos $l(Y) > l(Z)$. Neste caso, $0 < l(Y) - l(Z) = l(X) - l(Y')$ e então $l(X) > l(Y')$ e desta forma f' é epimorfismo. ■

1.4 Quiver de Auslander-Reiten

Algumas informações obtidas na categoria $\text{mod}A$ podem ser representadas por quivers. Os vértices são os objetos indecomponíveis e as flechas são os morfismos irreduzíveis, pois como qualquer objeto desta categoria se decompõe em uma soma direta de objetos indecomponíveis,

é conveniente escolhermos os vértices como sendo um representante da classe dos módulos indecomponíveis isomorfos. Como os morfismos irredutíveis são aqueles que admitem fatoração trivial, então estes representam as flechas, com algumas ressalvas. Vejamos.

Sejam X e $Y \in \text{mod} A$ com $X = \bigoplus_{i=1}^r X_i$ e $Y = \bigoplus_{j=1}^s Y_j$ as decomposições de X e Y em indecomponíveis e $p_l : X \rightarrow X_l$ e $i_k : Y_k \rightarrow Y$ as projeções e inclusões naturais respectivamente. Denotaremos por $\text{rad}(X, Y)$ o conjunto $\text{rad}(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y) \mid i_k f p_l \text{ é não isomorfismo para todo } k, l\}$. Por indução em n podemos definir também: $\text{rad}^n(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y) \mid \text{existe } Z \in \text{mod} A \text{ e } g \in \text{rad}(X, Z) \text{ e } h \in \text{rad}^{n-1}(Z, Y) \text{ com } f = hg\}$ (pág. 178 [ARS95]).

Definimos $I(X, Y) = \text{rad}(X, Y) / \text{rad}^2(X, Y)$. Consideremos $X, Y \in \text{ind} A$ e definimos $F(X) = \text{End}(X) / \text{rad}(X, X)$. Este é um anel com divisão. Afirmamos que $\text{rad}^2(X, Y)$ é um $\text{End}(Y)$ - $\text{End}(X)$ -submódulo do $\text{End}(Y)$ - $\text{End}(X)$ -bimódulo $\text{rad}(X, Y)$ e que $I(X, Y)$ é anulado pela esquerda por $\text{rad}(Y, Y)$ e pela direita por $\text{rad}(X, X)$. Deste modo $I(X, Y)$ é de fato um $F(Y)$ - $F(X)$ -bimódulo, o bimódulo dos morfismos irredutíveis (ver [Rin80]).

Denotaremos por a_{XY} o comprimento de $I(X, Y)$ como um $F(Y)$ -módulo e por a'_{XY} seu comprimento como um $F(X)$ -módulo. Observe que no caso de X não ser injetivo, então a_{XY} é igual a multiplicidade de Y no termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten começando em X e se Y não é projetivo, então a'_{XY} é igual a multiplicidade de X no termo médio da seqüência de Auslander-Reiten finalizando em Y .

Proposição 1.4.1 .

Sejam X e Y módulos indecomponíveis em $\text{mod} A$. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$.

A demonstração desta Proposição pode ser encontrada em [ARS95], Proposição 7.3, pág. 179 ou pág. 216 de [Rie80].

Proposição 1.4.2 .

Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^s Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten com módulos indecomponíveis Y_i . Fixemos $Y \in \text{ind} A$ e suponhamos $Y \simeq Y_i$ para todo i com $1 \leq i \leq d$, onde $d < s$. Então, os espaços vetoriais $_{F(Y)} I(X, Y)$ e $I(Y, Z)_{F(Y)}$ tem dimensão d .

Demonstração: Vamos supor que $Y = Y_i$ para $1 \leq i \leq d$ e assim temos $f = (f_1 \dots f_s)^t$ com d homomorfismos $f_i : X \rightarrow Y$, $1 \leq i \leq d$. Estes morfismos são linearmente independentes em $_{F(Y)} I(X, Y)$. De fato, sejam $\alpha_i \in F(Y)$, com $1 \leq i \leq d$, tais que a soma $\sum_{i=1}^d \alpha_i f_i \in \text{rad}^2(X, Y)$. Vamos supor que no mínimo um dos endomorfismos α_i é um automorfismo. Então $(\alpha_1 \dots \alpha_d) : \bigoplus_{i=1}^d Y \rightarrow Y$ é um epimorfismo que cinde. Segue do Corolário 2.5 de [AR77a] que $\sum_{i=1}^d \alpha_i f_i$ é um morfismo irredutível. Pela Proposição (1.4.1) temos que $\sum_{i=1}^d \alpha_i f_i \notin \text{rad}^2(X, Y)$, contradizendo nossa hipótese. Portanto $f_1, \dots, f_d$ são linearmente independentes.

Agora vamos provar que os morfismos $f_1, \dots, f_d$ geram $\text{rad}(X, Y) / \text{rad}^2(X, Y)$. Seja $f' : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível logo não é um monomorfismo que cinde e como f é uma fonte existe $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_s) : \bigoplus_{i=1}^s Y_i \rightarrow Y$ com $f' = \alpha f = \sum_{i=1}^s \alpha_i f_i$. Pelo Lema (1.3.5) cada f_i é um

morfismo irredutível, logo pela Proposição (1.4.1) $f_i \in \text{rad}(X, Y_i)$ para cada $1 \leq i \leq s$. Também temos que $\alpha_i \in \text{rad}(Y_i, Y)$ para todo $i > d$ pois Y_i é indecomponível e $Y_i \not\cong Y$ para $i > d$. Deste modo $\sum_{i=d+1}^s \alpha_i f_i \in \text{rad}^2(X, Y)$ e assim $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i$ módulo $\text{rad}^2(X, Y)$. Isto mostra que $f_1, \dots, f_d$ é uma base de $_{F(Y)}I(X, Y)$. Analogamente mostra-se que $g_1, \dots, g_d$ é uma base de $I(X, Y)_{F(X)}$. ■

Definição 1.4.1 *Dada uma álgebra de artin, o quiver de Auslander-Reiten Γ_A de A é definido da seguinte forma:*

- (a) *O conjunto dos vértices $(\Gamma_A)_0$ é o conjunto das classes de isomorfismos $[X]$ de indecomponíveis de $\text{mod} A$.*
- (b) *Se $[X], [Y] \in (\Gamma_A)_0$, então as flechas $[X] \rightarrow [Y]$ estão em correspondência bijetora com uma base de $I(X, Y)$.*

De acordo com nossa definição, dado um vértice $[Y] \in (\Gamma_A)_0$ os antecessores imediatos de $[Y]$ no quiver de Auslander-Reiten é o conjunto dos pontos $[X]$ com $[X]$ somando direto de $\text{rad} Y$ se $[Y]$ for projetivo ou caso contrário é um somando direto do termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten finalizando em $[Y]$. De forma análoga se $[Y]$ não for injetivo, os sucessores de $[Y]$ são os somandos do termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten começando em $[Y]$ ou caso contrário, são os somandos indecomponíveis de $Y/\text{soc} Y$. Portanto, para qualquer vértice $[X] \in (\Gamma_A)_0$, o número de sucessores e antecessores de $[X]$ é finito, portanto o quiver de Auslander-Reiten é localmente finito.

Outro fato interessante é que não existem loops no quiver de Auslander-Reiten. De fato, um morfismo irredutível é monomorfismo próprio ou epimorfismo próprio, então nenhum endomorfismo pode ser irredutível.

Vejamos qual será nosso conceito de caminho no quiver de Auslander-Reiten.

Definição 1.4.2 *Um caminho $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t$ em Γ_A é uma seqüência de módulos indecomponíveis X_i em Γ_A e morfismos irredutíveis $f_i : X_{i-1} \rightarrow X_i$, $1 \leq i \leq t$. Neste caso, denotaremos por t o comprimento do caminho.*

Observação 1.4.1 *Pode-se estender tal definição para caminhos de comprimento infinito, isto é, se o número de módulos e morfismos não for finito, dizemos que o caminho tem comprimento infinito. Se $t = 0$ teremos um caminho de comprimento nulo.*

Além disso, se $n \geq 3$, $X_0 = X_{t-1}$ e $X_1 = X_t$ chamaremos o caminho de **ciclo orientado**. Observe que retiramos da definição a possibilidade $t = 2$, isto é, de um ciclo $X_0 \rightarrow X_0$, pois já sabemos de antemão que não existem laços no quiver de Auslander-Reiten. O caso $t = 0$ e $t = 1$ não fazem sentido.

As álgebras de tipo de representação finito formam uma classe importante de álgebras. No Capítulo 3 estaremos generalizando um resultado importante de Bautista-Brenner (Teorema (3.1.1)) que fora feito anteriormente para álgebras de tipo de representação finito. Provaremos este resultado para álgebras de artin.

Definição 1.4.3 *Uma álgebra de artin A é de tipo de representação finito se existir somente um número finito de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis.*

É importante lembrar que Auslander provou que se A é uma álgebra de artin de tipo infinito, então existem módulos indecomponíveis que não são finitamente gerados. Este resultado tem como consequência o fato de que se todo A -módulo é soma direta de A -módulos, finitamente gerados, então A é de tipo de representação finito [Aus76].

A demonstração do próximo Lema está em [AR77c]. Ver também [Coe92].

Lema 1.4.1 *Seja A uma álgebra de tipo de representação finito. Então, todo não isomorfismo não nulo em $\text{mod } A$ é soma de composta de morfismos irredutíveis.*

Uma pergunta que pode ser feita é se a inversa do Lema acima é verdadeira. Parcialmente a resposta é sim, isto é, em [Liu95b], Liu prova que em álgebras de artin de dimensão finita sobre corpos perfeitos infinitos vale a recíproca deste resultado.

Com o próximo resultado provaremos o Corolário (4.1.3).

Proposição 1.4.3 *Seja A uma álgebra de artin indecomponível de tipo finito. Então Γ_A é um quiver conexo.*

No Capítulo 4 faremos uma caracterização de flechas múltiplas ou flechas com valorização, como denotaremos. Estaremos discutindo quando estas flechas estarão num ciclo orientado. O resultado abaixo já é um começo desta caracterização.

Proposição 1.4.4 *Seja A uma álgebra de tipo de representação finito. Então, Γ_A não tem flechas múltiplas.*

Demonstração: Vamos supor que existam dois morfismos irredutíveis de X para Y . Sabemos que todo morfismo irredutível é um monomorfismo próprio ou um epimorfismo próprio e então temos que $l(X) \neq l(Y)$. Suponhamos sem perda de generalidade que $l(X) > l(Y)$. Em particular, Y não é projetivo e existe uma seqüência de Auslander-Reiten finalizando em Y da forma:

$$0 \longrightarrow \tau Y \longrightarrow X^2 \oplus E \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Temos então, $l(\tau Y) + l(Y) = 2 l(X) + l(E)$. Assim, $l(\tau Y) \geq 2 l(X) - l(Y) > l(X) > l(Y)$, isto é, $l(\tau Y) > l(X) > l(Y)$. Por indução em i , podemos mostrar que $l(\tau^i Y) > l(\tau^{i-1} Y)$. Além disso, o número de morfismos irredutíveis de τY para X é maior ou igual a 2. Portanto, se tomarmos a seqüência de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow (\tau Y)^2 \oplus F \longrightarrow X \longrightarrow 0$ temos $l(\tau X) \geq 2 l(\tau Y) - l(X) > l(\tau Y)$. Novamente, por indução sobre i é possível provar que $l(\tau^i X) > l(\tau^i Y)$ e então dados números naturais i e j com $i > j$ temos:

$$l(\tau^i X) > l(\tau^i Y) > l(\tau^j X) > l(\tau^j Y).$$

Desta forma, a função dada por $i \mapsto [\tau^i Y]$ é injetora. Portanto a componente conexa de Γ_A que contém $[Y]$ é infinita. Contradizendo nossa hipótese. ■

No Capítulo 4 apresentaremos uma outra prova desta Proposição através de técnicas desenvolvidas no Capítulo 2.

Conseqüentemente temos o seguinte resultado ([Bau82] ou [Rie80]):

Teorema 1.4.1 *Se A é uma álgebra de tipo de representação finito então, numa seqüência de Auslander-Reiten os módulos indecomponíveis do termo do meio da seqüência são não isomorfos.*

Apresentaremos agora um importante resultado de Harada-Sai [HS70]. Apresentaremos este resultado como um Lema pois este foi assim difundido.

Antes disso, vejamos uma desigualdade entre a imagem de composta de morfismos que utilizaremos na prova do Lema. Dados $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismos entre A -módulos, temos a seguinte desigualdade

$$l(\text{Im } gf) \leq l(\text{Im } f).$$

De fato, seja $\bar{g} : \text{Im } f \rightarrow \text{Im } g$ definida por $\bar{g}(x) = g(x)$. Por definição, $\bar{g}$ é um epimorfismo, logo $l(\text{Im } f) \geq l(\text{Im } gf)$.

Lema 1.4.2 (Harada-Sai) *Seja $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} M_t$ uma seqüência de não isomorfismos e $M_i \in \text{ind } A$. Se $l(M_i) \leq b$ para todo i e $t \geq 2^b$ então, $f_{2^b-1} \cdots f_2 f_1 = 0$.*

Demonstração: Vamos provar por indução sobre n a seguinte afirmação:

Dados módulos indecomponíveis M_i , $1 \leq i \leq 2^n$, de comprimento menor ou igual a b e morfismos não isomorfismos $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$, então a composição $f_{2^n-1} \cdots f_2 f_1$ é zero ou o comprimento de sua imagem é menor ou igual a $b - n$.

Se $n = 1$ a imagem de f_1 não pode ter comprimento b pois caso contrário f_1 seria um epimorfismo e então $l(M_1) \geq l(M_2)$. Mas $b = l(M_2) \leq l(M_1) \leq b$. Portanto $l(M_1) = b$ e desta forma f_1 é um isomorfismo. Contradizendo nossa hipótese. Provamos assim que $l(\text{Im } f_1) \leq b - 1$.

Vamos supor que a afirmação é verdadeira para n e seja

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \rightarrow M_{2^n-1} \xrightarrow{f_{2^n-1}} M_{2^n} \xrightarrow{f_{2^n}} M_{2^n+1} \xrightarrow{f_{2^n+1}} \cdots \xrightarrow{f_{2^{n+1}-1}} M_{2^{n+1}}$$

a seqüência de não-isomorfismos, não nulos entre módulos indecomponíveis de comprimento menor ou igual a b .

Consideremos as seguintes composições $f = f_{2^n-1} \cdots f_2 f_1$ e $h = f_{2^{n+1}-1} \cdots f_{2^n+1}$. Provaremos que $l(\text{Im } f_{2^{n+1}-1} \cdots f_1) \leq b - (n + 1)$ e se este não for o caso, então f_{2^n} será um isomorfismo, contradizendo nossa hipótese e assim completamos a prova.

Primeiramente observamos que por hipótese de indução, $l(\text{Im } f) \leq b - n$ e $l(\text{Im } h) \leq b - n$. Se f ou h for nulo ou ainda se no mínimo uma das desigualdades anteriores for estrita, então acabou. De fato, se for nulo então já esta provado o Lema. Se for estrita uma das desigualdades,

digamos $l(Im\ h) < b - n$ então, $l(Im\ f_{2^{n+1}-1} \cdots f_1) = l(Im\ h f_{2^n} f) \leq l(Im\ h) < b - n$ e assim terminamos. Se ocorrer o outro caso, isto é, $l(Im\ f) < b - n$, então teremos $l(Im\ f_{2^{n+1}-1} \cdots f_1) = l(Im\ h f_{2^n} f) \leq l(Im\ f_{2^n} f) \leq l(Im\ f) < b - n$ e neste caso também terminamos a prova do Lema. Podemos então supor que $l(Im\ f) = l(Im\ h) = b - n$.

Vamos supor que $l(Im\ f_{2^{n+1}-1} \cdots f_1) > b - (n + 1)$. Já que $l(Im\ h f_{2^n} f) \leq l(Im\ f) \leq b - n$ então $l(Im\ f_{2^{n+1}-1} \cdots f_1) = b - n$. Provaremos agora que $Im\ f \cap Ker\ h f_{2^n} = 0$. Para isso definimos $\varphi : Im\ f \rightarrow Im\ (h f_{2^n} f)$ por $\varphi(x) = g f_{2^n}(x)$ e basta mostrar que $Ker\ \varphi = Im\ f \cap Ker\ h f_{2^n} = 0$. Se não for, como φ é um epimorfismo, por definição, então $l(Im\ h f_{2^n} f) < l(Im\ f) \leq b - n$, contradizendo o que afirmamos acima. Temos assim $Im\ f \cap Ker\ h f_{2^n} = 0$.

Por outro lado, temos $Im\ h f_{2^n} f \subseteq Im\ h f_{2^n} \subseteq Im\ h$ e $l(Im\ h f_{2^n} f) = b - n$ e $l(Im\ h) \leq b - n$. Conseqüentemente, $l(Im\ h f_{2^n}) = b - n$. Consideremos a seguinte seqüência exata:

$$0 \rightarrow Ker\ h f_{2^n} \rightarrow M_{2^n} \xrightarrow{\psi} Im\ h f_{2^n} \rightarrow 0$$

onde $\psi(x) = h f_{2^n} x$. Pelo Lema (1.1.2) temos $l(Ker\ h f_{2^n}) = l(M_{2^n}) - l(Im\ h f_{2^n}) = l(M_{2^n}) - (b - n) = l(M_{2^n}) - l(Im\ f)$. Isto mostra que $M_{2^n} = Im\ f \oplus Ker\ h f_{2^n}$. Como M_{2^n} é indecomponível e $f \neq 0$ temos $Ker\ h f_{2^n} = 0$. Deste modo $h f_{2^n}$ é um monomorfismo e conseqüentemente f_{2^n} é um monomorfismo. De forma análoga é possível mostrar que $Im\ f_{2^n} \cap Ker\ h = 0$ e conseqüentemente $M_{2^{n+1}} = Im\ f_{2^n} f \oplus Ker\ h$ e assim $f_{2^n} f$ e f_{2^n} são epimorfismos. Isto prova que f_{2^n} é um isomorfismo, contradizendo nossa hipótese e provando assim o Lema. ■

No Capítulo 4 apresentaremos uma aplicação do Teorema de Bautista-Brenner (3.1.1) que implicará numa forma mais detalhada do Teorema de Roiter.

Teorema 1.4.2 (Roiter) *Se existir um inteiro positivo m tal que $l(M) \leq m$ para todo A -módulo indecomponível M , então A é uma álgebra de tipo de representação finito.*

A demonstração deste Teorema foi feita inicialmente em [AR74a] e pode ser também encontrada em [Coe92].

Nos capítulos posteriores faremos um bom uso dos seguintes Lemas. Tais resultados aparecem em [Liu95a] como Lema 1.1 e 1.3 respectivamente. Talvez esta seja a única referência em que aparece a prova destes Lemas. No geral eles são apenas citados. Uma versão mais geral deste primeiro aparece como Lema 1.2 em [Liu92] ou Lema 1.4 em [Liu95b].

Lema 1.4.3 *Sejam Z e $Z' \in ind A$.*

- (a) *Se $\theta : M \rightarrow Y \in mod A$ é não nulo, $g : Y \rightarrow Z$ é um morfismo irredutível e $\theta g = 0$, então existe a seqüência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow Z' \xrightarrow{(f\ f')^t} Y \oplus Y' \xrightarrow{(g\ g')} Z \rightarrow 0$ e existe um morfismo não nulo $\zeta : M \rightarrow \tau Z = Z'$ tal que $\theta = f \zeta$ e $f' \zeta = 0$.*
- (b) *Se $\theta : Y \rightarrow M \in mod A$ é não nulo, $f : Z' \rightarrow Y$ é um morfismo irredutível e $\theta f = 0$, então existe a seqüência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow Z' \xrightarrow{(f\ f')^t} Y \oplus Y' \xrightarrow{(g\ g')} Z \rightarrow 0$ e existe um morfismo não nulo $\zeta : \tau^- Z' = Z \rightarrow M$ tal que $\theta = \zeta g$ e $\zeta g' = 0$.*

Demonstração: (a) Vamos supor que $g\theta = 0$. Como θ é não nula então $\text{Kerg} \neq 0$. Como g é irredutível concluímos que g é um epimorfismo. Portanto Z não é projetivo. Considere a seguinte sequência de Auslander-Reiten: $0 \rightarrow \tau Z \xrightarrow{(f \ f')^t} Y \oplus Y' \xrightarrow{(g \ g')^t} Z \rightarrow 0$. Como $g\theta = 0$ então, $(g \ g') \cdot (\theta \ 0)^t = 0$. Pelo Lema (1.1.3), existe um morfismo não nulo $\zeta : M \rightarrow \tau Z$ tal que $(f \ f')^t \zeta = (\theta \ 0)^t$, isto é, $\theta = f\zeta$ e $f'\zeta = 0$.

(b) A demonstração é dual a demonstração de (a). ■

Lema 1.4.4 *Sejam Y, Z_1 e Z_2 módulos indecomponíveis em $\text{mod} A$.*

(a) *Se $\theta : M \rightarrow Y$ é um morfismo não nulo em $\text{mod} A$ e $g : Y \rightarrow Z_1 \oplus Z_2$ um morfismo irredutível tal que $g\theta = 0$, então Y, Z_1 e Z_2 não são projetivos. Além disso, existe um morfismo não nulo $\zeta : M \rightarrow \tau Y$ em $\text{mod} A$, uma fonte $(h_1 \ h_2 \ h)^t : \tau Y \rightarrow \tau Z_1 \oplus \tau Z_2 \oplus X$ e um morfismo irredutível $f_1 : \tau Z_1 \rightarrow Y$ tais que $\theta = f_1 h_1 \zeta$ e $h\zeta = 0$.*

(b) *Se $\theta : Y \rightarrow M$ é um morfismo não nulo em $\text{mod} A$ e $g : Z_1 \oplus Z_2 \rightarrow Y$ um morfismo irredutível tal que $\theta g = 0$, então Y, Z_1 e Z_2 não são injetivos. Além disso, existe um morfismo não nulo $\zeta : \tau^- Y \rightarrow M$ em $\text{mod} A$, um poço $(h_1 \ h_2 \ h) : \tau^- Z_1 \oplus \tau^- Z_2 \oplus X \rightarrow \tau^- Y$ e um morfismo irredutível $f_1 : Y \rightarrow \tau^- Z_1$ tais que $\theta = \zeta h_1 f_1$ e $\zeta h = 0$.*

Demonstração: Seja $g = (g_1 \ g_2)^t$. Consideremos $g\theta = 0$, isto é, $g_1\theta = 0$ e $g_2\theta = 0$. Como θ é não nula então, Z_1 e Z_2 não são projetivos e existem as seguintes sequências de Auslander-Reiten:

$$0 \rightarrow \tau Z_1 \xrightarrow{(f_1 \ e)^t} Y \oplus E \xrightarrow{(g_1 \ d)^t} Z_1 \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow \tau Z_2 \xrightarrow{(f_2 \ e')^t} Y \oplus E' \xrightarrow{(g_2 \ d')^t} Z_2 \rightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.4.3), existem morfismos não nulos $\zeta_1 : M \rightarrow \tau Z_1$ e $\zeta_2 : M \rightarrow \tau Z_2$ tais que $\theta = f_1 \zeta_1 = f_2 \zeta_2$ e $e\zeta_1 = e'\zeta_2 = 0$.

Suponhamos que Y seja um somando de E . Seja $e_1 : \tau Z_1 \rightarrow Y$ a co-restrição de e para Y . Então $e_1 \zeta_1 = 0$. Consequentemente Y não é projetivo. Seja $0 \rightarrow \tau Y \xrightarrow{(h_1 \ h_2 \ h)^t} \tau Z_1 \oplus \tau Z_2 \oplus X \xrightarrow{(e_1 \ e_2 \ e')^t} Y \rightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten. Pelo Lema (1.4.3), existe um morfismo $\zeta : M \rightarrow \tau Y$ tal que $\zeta_1 = h_1 \zeta$ e $(h_2 \ h)^t \zeta = 0$. Deste modo $\theta = f_1 h_1 \zeta$ e $h\zeta = 0$.

Se Y não for um somando de E , então podemos afirmar que existe o morfismo irredutível $(f_1 \ f_2) : \tau Z_1 \oplus \tau Z_2 \rightarrow Y$. De fato, se $Z_1 \not\simeq Z_2$, como existe o morfismo irredutível de Y em $Z_1 \oplus Z_2$ então, pelo Lema (1.3.6) temos a existência deste morfismo. Se $Z_1 \simeq Z_2$ segue de [IT84b] que existe este morfismo. Podemos afirmar que $(f_1 \ f_2)(\zeta_1 - \zeta_2)^t = 0$. Consequentemente Y não é projetivo. Consideremos a seguinte sequência de Auslander-Reiten: $0 \rightarrow \tau Y \xrightarrow{(h_1 \ h_2 \ h)^t} \tau Z_1 \oplus \tau Z_2 \oplus X \xrightarrow{(f_1 \ f_2 \ f)^t} Y \rightarrow 0$. Pelo Lema (1.4.3), existe um morfismo não nulo $\zeta : M \rightarrow \tau Y$ tal que $(\zeta_1 - \zeta_2)^t = (h_1 \ h_2)^t \zeta$ e $h\zeta = 0$. Deste modo $\zeta_1 = h_1 \zeta$ e então, $\theta = f_1 h_1 \zeta$. ■

Auslander e Reiten dedicaram parte dos trabalhos [AR75] e [AR77a] para descrever as sequências de Auslander-Reiten finalizando em Z no caso em que existe um epimorfismo irredutível $f : P \rightarrow Z$ com $P \in \text{ind} A$ e projetivo. Destacamos abaixo a parte que nos interessa.

Corolário 1.4.1 *Sejam $P, I \in \text{ind}A$ projetivo e injetivo respectivamente, então:*

- (a) *Se $f : P \rightarrow Z$ é um epimorfismo, então $Z \in \text{ind}A$.*
 (b) *Se $g : X \rightarrow I$ é um monomorfismo, então $X \in \text{ind}A$.*

Demonstração: Vamos provar (a) pois a demonstração de (b) é análoga. Sabemos que $Z/\text{rad}Z \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ onde os S_i são módulos simples para cada i . Seja $g : P' \rightarrow Z$ a cobertura projetiva de Z . Sabemos que $P' \simeq P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ onde P_i são projetivos indecomponíveis tais que $P_i/\text{rad}P_i \simeq S_i$. Além disso, P' é projetivo, pois é soma de projetivos. Como P é projetivo, então existe $\bar{g} : P \rightarrow P'$ tal que $g\bar{g} = f$. Por hipótese, f é um epimorfismo, logo $g\bar{g}$ é um epimorfismo, e então $\bar{g}$ é um epimorfismo pois g é essencial. Desta forma $\bar{g}$ cinde pois P' é projetivo. Portanto $P \simeq P'$. Sendo P indecomponível, concluímos que P' é indecomponível e então $Z/\text{rad}Z$ é simples, o que implica que Z é indecomponível. ■

Neste trabalho faremos um estudo do termo do meio das seqüências de Auslander-Reiten. Já é conhecido o fato de que para álgebras de artin, existe alguma seqüência de Auslander-Reiten com o termo do meio indecomponível [Mar80]. Um outro resultado importante e que usaremos neste trabalho é o caso em que um dos somandos do termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten é um módulo projetivo indecomponível. Este caso será discutido logo a seguir. É um resultado de Auslander e Reiten (Proposição 4.6 em [AR77a]) e será de grande utilidade na prova da Proposição (3.1.2) que é uma aplicação do Teorema de Bautista-Brenner.

Proposição 1.4.5 *As seqüências de Auslander-Reiten com um módulo projetivo e injetivo no termo do meio são as seqüências da forma $0 \rightarrow \text{rad}P \rightarrow \text{rad}P/\text{soc}P \oplus P \rightarrow P/\text{soc}P \rightarrow 0$, onde P é um módulo projetivo e injetivo indecomponível não simples.*

Demonstração: Seja P o A -módulo projetivo e injetivo não simples. Pelo Lema (1.3.3) podemos afirmar que $\text{rad}P \hookrightarrow P$ é um poço e $P \rightarrow P/\text{soc}P$ é uma fonte. Pelo Corolário (1.4.1) (a) e (b) temos que $P/\text{soc}P$ e $\text{rad}P$ são indecomponíveis, respectivamente. Por isso, $\text{rad}P \hookrightarrow P$ e $P \rightarrow P/\text{soc}P$ são os únicos morfismos irredutíveis que chegam e saem de P . Também podemos afirmar que $\text{rad}P$ não é injetivo, pois caso contrário $\text{rad}P \hookrightarrow P$ cinde, contradizendo o fato de ser um poço. Portanto existe uma seqüência de Auslander-Reiten começando em $\text{rad}P$ e como $P \rightarrow P/\text{soc}P$ é o único morfismo irredutível que sai de P então $\tau^-\text{rad}P = P/\text{soc}P$. Temos desta forma a seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow \text{rad}P \rightarrow P \oplus X \rightarrow P/\text{soc}P \rightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.3.7), como $P \rightarrow P/\text{soc}P$ é um epimorfismo irredutível, então $f : \text{rad}P \rightarrow X$ é um epimorfismo irredutível. Pelo Teorema do Homomorfismo temos $X \simeq \text{rad}P/\text{Ker}f$. Fazendo $l(P) = n$ temos, $l(X) = l(\text{rad}P) + l(P/\text{soc}P) - l(P) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$ e então, $l(\text{Ker}f) = 1$. Desse modo podemos dizer que $\text{Ker}f$ é simples e então $\text{Ker}f \subset \text{soc}P$, mas $\text{soc}P$ é simples. Temos então que $\text{Ker}f = \text{soc}P$. Deste modo, terminamos a prova. ■

Capítulo 2

Caminhos pré-seccionais e seccionais

Neste capítulo desenvolveremos todas as técnicas necessárias para provar a forma geral do Teorema de Bautista-Brenner (Capítulo 3) e outros resultados importantes no Capítulo 4.

O Teorema de Bautista-Brenner estabelece o seguinte: Considere uma componente não semi-regular do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin e seja $0 \rightarrow X \rightarrow \oplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten em que X tem antecessor projetivo (Definição (2.2.1)) e Z tem sucessor injetivo, então o termo do meio desta seqüência terá no máximo quatro somandos. Além disso, se este número for exatamente quatro, então um dos somandos será projetivo-injetivo. Para provarmos este teorema estudaremos em separado a fonte e o poço desta seqüência. Por exemplo, tomaremos o poço $\oplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow Z$ com $l(Z) \geq l(X)$ e provaremos que se Z tem sucessor injetivo então um dos Y_i será injetivo (Corolário (2.3.2)). Tomando a fonte $X \rightarrow \oplus_{i=1}^r Y_i$ veremos que X tendo antecessor projetivo então, $r \leq 4$ e se $r = 4$, um dos Y_i será projetivo (Proposição (2.3.2)). Este é um esboço da prova do Teorema acima. Pelo esboço, notamos a necessidade do estudo da fonte $X \rightarrow \oplus_{i=1}^r Y_i$ e do poço $\oplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow Z$.

Como em todo o trabalho estaremos nos referindo a esta fonte e/ou poço, vamos estabelecer uma notação. Dado um módulo indecomponível X em $\text{mod}A$, diremos que X satisfaz ou tem a **propriedade** $(\mathcal{A})$ se a seguinte configuração aparecer no quiver de Auslander-Reiten Γ_A

com Y_i indecomponível não projetivo e se $f : X \rightarrow \oplus_{i=1}^4 Y_i$ for um epimorfismo irreduzível ou $l(X) \geq l(\tau^{-1}X)$.

Veremos que nestas condições X não terá antecessor projetivo em Γ_A (Corolário (2.3.2)). Neste capítulo faremos apenas o Corolário (2.3.2) que já é suficiente para provar o Teorema de Bautista-Brenner. Analogamente, se a configuração acima aparecer com o sentido das flechas invertido e $f : \oplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow X$ for um morfismo irreduzível com $X \in \text{ind}A$ e Y_i não injetivo e além disso f for monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$, então X não terá sucessor injetivo em Γ_A .

A primeira parte deste resultado (Corolário (2.3.2)) nos auxiliará na demonstração da generalização do Teorema de Bautista-Brenner, feita recentemente por Liu [Liu93a]. Neste trabalho Liu obteve alguns resultados básicos para caminhos seccionais. Apresentamos aqui estes resultados para caminhos pré-seccionais que é uma noção mais geral. Para obter o Corolário (2.3.2), provaremos que um módulo não tem antecessor projetivo se os caminhos pré-seccionais terminando em algum elemento de sua órbita não contiverem módulos projetivos.

No Capítulo 4 provaremos outros resultados importantes. Provaremos que se um módulo $X \in \text{ind}A$ tem a propriedade $(\mathcal{A})$ então $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito (Proposição (4.2.1)). Provaremos também que com estas hipóteses, X não está num ciclo orientado de Γ_A (Corolário (4.2.4)). Estes resultados são relevantes na busca de uma caracterização das componentes do quiver de Auslander-Reiten. Com o dual das hipóteses teremos que $l(\tau^{-n} X)$ tem crescimento monótono para infinito e X não está num ciclo orientado de Γ_A .

2.1 Algumas técnicas para construção de um módulo sem antecessor projetivo.

Nesta seção provaremos que um módulo indecomponível X com a propriedade (A) não é projetivo e obteremos uma desigualdade que nos auxiliará na prova de que um tal módulo é estável à esquerda.

Lema 2.1.1 *Seja $r \geq 4$.*

(a) *Se $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ é um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e se f for um epimorfismo ou $l(X) \geq l(\tau^- X)$, então $2l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i)$ e X não é projetivo.*

(b) *Se $f : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow X$ é um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e se f for um monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$, então $2l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i)$ e X não é injetivo.*

Demonstração: Mostraremos somente (a) pois a demonstração de (b) é análoga.

(a) Primeiramente vamos mostrar que se f é epimorfismo, então

$$2l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i) \quad (2.1)$$

e X não é projetivo. Como f é um epimorfismo irredutível então,

$$l(X) > \sum_{i=1}^r l(Y_i) \quad \text{e} \quad 2l(X) > l(X) > \sum_{i=1}^r l(Y_i).$$

Por outro lado, se X for projetivo então pelo Corolário (1.4.1) (a), $\bigoplus_{i=1}^r Y_i$ é indecomponível, o que contraria as nossas hipóteses. Portanto, X não é projetivo e o resultado está provado neste caso.

Agora vamos supor que $l(X) \geq l(\tau^- X)$. Pelo Teorema (1.3.1) existe uma única sequência de Auslander-Reiten:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i \oplus M \xrightarrow{g} \tau^- X \rightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.1.2) temos

$$l(X) + l(\tau^- X) = l(\bigoplus_{i=1}^r Y_i) + l(M) \quad \text{onde} \quad l(M) \geq 0.$$

Por hipótese $l(X) \geq l(\tau^- X)$, logo

$$2l(X) \geq l(X) + l(\tau^- X) = l(\bigoplus_{i=1}^r Y_i) + l(M) \geq l(\bigoplus_{i=1}^r Y_i) = \sum_{i=1}^r l(Y_i).$$

Agora vamos supor que X é projetivo. Já mostramos que

$$2l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i), \quad \text{então} \quad l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2) \quad \text{ou} \quad l(X) \geq \sum_{i=3}^r l(Y_i).$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2)$. Então a seguinte co-restrição de f

$$g : X \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$$

é um epimorfismo irredutível pois $l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2)$.

Usando novamente o Corolário (1.4.1) para g , temos que $Y_1 \oplus Y_2$ é indecomponível, o que contraria novamente as nossas hipóteses. Portanto X não pode ser projetivo e o resultado está provado. ■

Observe que a hipótese $r \geq 4$ é essencial nesta demonstração. Se $r < 4$ não podemos supor que $l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2)$ sem perder a generalidade e por isso não podemos concluir que X não é projetivo.

Como o módulo X com a propriedade $(\mathcal{A})$ não é projetivo, então existe τX . Provaremos a seguir que todo morfismo irredutível de τX a um indecomponível é um epimorfismo. A prova depende basicamente da relação entre o comprimento dos módulos numa sequência exata.

Lema 2.1.2 *Sejam X e Y_i indecomponíveis com $1 \leq i \leq r$ e $r \geq 4$, então:*

(a) *Se $f : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ é um morfismo irredutível com Y_i não projetivo e se f é um epimorfismo ou $l(X) \geq l(\tau^- X)$ então toda co-restrição da fonte $\tau X \longrightarrow E$ a um somando indecomponível de E será um epimorfismo irredutível.*

(b) *Se $f : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \longrightarrow X$ é um morfismo irredutível com Y_i não injetivo e se f é um monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$ então toda restrição do poço $E \longrightarrow \tau^- X$ a um somando indecomponível de E será um monomorfismo irredutível.*

Demonstração: Provaremos somente (a) pois a demonstração de (b) é análoga.

Mostraremos que todo morfismo irredutível $\tau X \longrightarrow W$ com $W \in \text{ind} A$ é um epimorfismo. Para isso basta mostrar que $l(\tau X) > l(W)$. Se W é um módulo indecomponível do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten que termina em X , esta assume o seguinte aspecto:

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^r \tau Y_i \oplus W \oplus M \xrightarrow{\psi} X \longrightarrow 0$$

donde

$$l(\tau X) + l(X) = \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) + l(W) + l(M) \quad \text{com } l(M) \geq 0$$

e por esse motivo temos

$$l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) + l(W) - l(X). \quad (2.2)$$

Por hipótese, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, Y_i não é projetivo e portanto existe a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau Y_i \longrightarrow X \oplus N \longrightarrow Y_i \longrightarrow 0. \quad (2.3)$$

Logo $l(X) \leq l(\tau Y_i) + l(Y_i)$. As desigualdades (2.2) e (2.3) fornecem

$$l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) + l(W) - l(X) \geq \sum_{i=1}^r (l(X) - l(Y_i)) + l(W) - l(X). \quad (2.4)$$

Para mostrarmos que $l(\tau X) > l(W)$ dividiremos em dois casos. Primeiro quando $W \not\simeq \tau Y_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ e depois quando $W \simeq \tau Y_i$ para algum i .

Suponhamos $W \not\simeq \tau Y_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Mostraremos que $\sum_{i=1}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) > 0$.

$$\sum_{i=1}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) = r l(X) - \sum_{i=1}^r l(Y_i) - l(X) = (r-1) l(X) - \sum_{i=1}^r l(Y_i), \quad (2.5)$$

e $r-1 > 2$ pois $r \geq 4$. Por hipótese, $2 l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i)$, logo

$$(r-1) l(X) > 2 l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i) \quad \text{ou} \quad (r-1) l(X) - \sum_{i=1}^r l(Y_i) > 0.$$

Da desigualdade (2.5) temos, $\sum_{i=1}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) > 0$. Somando $l(W)$ obtemos: $l(W) + \sum_{i=1}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) > l(W)$, e da desigualdade (2.4) temos que $l(\tau X) > l(W)$. Neste caso, $\tau X \rightarrow W$ é um epimorfismo.

Consideremos o caso $W \simeq \tau Y_i$ para algum i . Provaremos novamente que $l(\tau X) > l(W)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $W \simeq \tau Y_1$. Da desigualdade (2.2) temos:

$$l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) - l(X) = l(W) + \sum_{i=2}^r l(\tau Y_i) - l(X).$$

Da desigualdade (2.3) segue que

$$l(\tau X) \geq l(W) + \sum_{i=2}^r l(\tau Y_i) - l(X) \geq l(W) + \sum_{i=2}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X). \quad (2.6)$$

No entanto, temos que

$$\sum_{i=2}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) = (r-1) l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) - l(X) = (r-2) l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i). \quad (2.7)$$

Usando a hipótese $2 l(X) \geq \sum_{i=1}^r l(Y_i)$, obtemos:

$$2 l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) - l(Y_1) \geq 0, \quad \text{conseqüentemente} \quad 2 l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) > 0.$$

Como $r-2 > 2$ ficamos com $(r-2) l(X) > 2 l(X)$ e então,

$$(r-2) l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) > 2 l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) > 0.$$

Esta última desigualdade e a equação (2.7) nos permite concluir que

$$\sum_{i=2}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) = (r-2) l(X) - \sum_{i=2}^r l(Y_i) > 0$$

e da desigualdade (2.6), obtemos $l(\tau X) \geq l(W) + \sum_{i=2}^r (l(X) - l(Y_i)) - l(X) > l(W)$. Portanto, $l(\tau X) > l(W)$. Logo $\tau X \rightarrow W$ é um epimorfismo, como queríamos. ■

Na verdade o Lema anterior irá funcionar como um primeiro passo de indução para mostrarmos que o módulo X com a propriedade (A) é estável à esquerda, isto é, que existe $\tau^n X$ para todo n inteiro positivo e todo morfismo irreduzível de $\tau^j X$ para um indecomponível W é um epimorfismo. Isto permitirá concluir que X não tem antecessor projetivo. Para isso, precisamos mostrar que para tais módulos nenhum caminho pré-seccional em Γ_A , terminando em $\tau^{j-1} X$, contém módulos projetivos. Começaremos a próxima seção definindo o que entendemos por antecessor em Γ_A e caminho pré-seccional.

2.2 Caminhos pré-seccionais e seccionais

Definição 2.2.1 *Sejam X e Y em Γ_A . Dizemos que X é antecessor de Y ou que Y é sucessor de X se existir um caminho $X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} X_n = Y$ em Γ_A com $n \geq 0$ e X_i é indecomponível e f_i irreduzível para cada i .*

Como já afirmamos no início deste capítulo, iremos provar que um A -módulo indecomponível X com a propriedade (A) não tem antecessor projetivo (Corolário (2.3.2)). Para isso, apresentaremos nessa seção os conceitos de caminho pré-seccional e caminho seccional em Γ_A , bem como vários resultados intrínsecos com estas idéias. Usaremos este tipo especial de caminho em Γ_A para estudarmos os antecessores do A -módulo X . Isto significa que provaremos que os antecessores de X que estão em caminhos pré-seccionais que terminam em algum elemento da τ -órbita de X , isto é, em algum $\tau^n X$ para $n \geq 0$ não são projetivos. Desta forma “varremos” uma boa parte dos antecessores de X . A partir daí provaremos que na verdade “varremos” todos os antecessores de X (Proposição (2.3.1)).

No trabalho de Liu, os resultados foram obtidos, de uma forma geral para caminhos seccionais. Nós generalizamos os resultados obtidos por Liu, isto é, provamos todos os resultados para caminhos pré-seccionais. No trabalho de Liu ele introduziu o conceito de caminhos pré-seccionais, somente quando passou a abordar outro tema, a saber, as flechas com valorização (ver Capítulo (4)).

Apesar de definirmos primeiramente caminho pré-seccional e logo a seguir caminho seccional, observamos que esta não é a ordem cronológica do surgimento dos termos na Teoria de Representações. A idéia de caminhos seccionais foi introduzida por Riedtmann em [Rie80] e teve papel importante na investigação das álgebras de dimensão finita e de seu quiver de Auslander-Reiten. Já o termo caminho pré-seccional foi introduzido recentemente por Liu em [Liu92].

Definição 2.2.2 *Um caminho $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_n$ em Γ_A é dito **pré-seccional** se toda vez que $X_{i-1} = \tau X_{i+1}$ para algum $1 \leq i \leq n-1$, então $X_{i-1} \oplus \tau X_{i+1}$ é um somando do domínio do poço para X_i , ou equivalentemente, se toda vez que $\tau^- X_{i-1} = X_{i+1}$ para algum $1 \leq i \leq n-1$, então $\tau^- X_{i-1} \oplus X_{i+1}$ é um somando do co-domínio da fonte para X_i .*

Definição 2.2.3 *Um caminho seccional em $\text{mod } A$ é uma seqüência de A -módulos indecomponíveis X_i e morfismos irreduzíveis $f_i : X_{i-1} \rightarrow X_i$ tais que $X_{i-2} \not\cong \tau X_i$ para $2 \leq i \leq n$ ou equivalentemente $X_{i+2} \not\cong \tau^- X_i$ para $0 \leq i \leq n-2$.*

Um exemplo de caminho pré-seccional pode ser encontrado numa componente do quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos obtida a partir do quiver:

Figura 2.1: Quiver de Kronecker.

A componente que tomamos é aquela que se inicia no projetivo P_2 :

Figura 2.2:

O caminho $P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow \tau^- P_1 \rightarrow \dots$ é pré-seccional pois, por exemplo se tomarmos $X_0 = P_2$ teremos $X_0 = \tau X_2$ e como indicam as duas flechas temos que $X_0 \oplus \tau X_2$ é um somando do domínio do poço para X_1 . Além disso, este é um exemplo de caminho pré-seccional que não é seccional.

Veremos agora alguns exemplos de caminhos seccionais. Consideremos a álgebra de caminhos $\Gamma_{(kE_6)}$ obtida a partir do quiver de E_6 :

Figura 2.3: Quiver E_6

O quiver de Auslander-Reiten de (kE_6) é dado na Figura (2.4).

Uma consequência imediata da definição de caminho seccional é que todo caminho seccional é pré-seccional.

Lema 2.2.1 *Considere $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ um caminho pré-seccional em Γ_A . Então os seguintes caminhos são também pré-seccionais se eles estiverem definidos:*

- (a) $\tau^n Y_n \rightarrow \tau^{n-1} Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \tau Y_1 \rightarrow Y_0$;
- (b) $Y_n \rightarrow \tau^- Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \tau^{-n+1} Y_1 \rightarrow \tau^{-n} Y_0$;
- (c) $\tau^m Y_0 \rightarrow \tau^m Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau^m Y_{n-1} \rightarrow \tau^m Y_n$, sendo m um inteiro qualquer.

Demonstração: Provaremos apenas (a) pois a prova de (b) e (c) são análogas. Primeiramente suponhamos definido o caminho $\tau^n Y_n \rightarrow \tau^{n-1} Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \tau Y_1 \rightarrow Y_0$. Vamos supor que existe um inteiro $k < n$ tal que $\tau(\tau^{n-k-2} Y_{n-k-2}) = \tau^{n-k} Y_{n-k}$. Temos então, $Y_{n-k-2} = \tau Y_{n-k}$. Como o caminho $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ é um caminho pré-seccional então, $Y_{n-k-2} \oplus \tau Y_{n-k}$ é um somando do domínio do poço para Y_{n-k-1} . Portanto $\tau^{n-k-1} Y_{n-k-2} \oplus \tau^{n-k} Y_{n-k}$ é um somando do domínio do poço para $\tau^{n-k-1} Y_{n-k-1}$. ■

Figura 2.4:

Na definição de caminho pré-seccional vimos que $\tau Z_i \oplus Z_{i-2}$ é somando direto do domínio do poço em Z_{i-1} quando $\tau Z_i = Z_{i-2}$. O próximo resultado mostra que isto também ocorre mesmo se fossem distintos. É o que provaremos a seguir.

Lema 2.2.2 *Seja $Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow Z_n$ um caminho pré-seccional.*

(a) *Se Z_i é não projetivo para algum i com $2 \leq i \leq n$, então $\tau Z_i \oplus Z_{i-2}$ é um somando direto do domínio do poço em Z_{i-1} .*

(b) *Se Z_i é não injetivo para algum i com $0 \leq i \leq n-2$, então $\tau^- Z_i \oplus Z_{i+2}$ é um somando direto do co-domínio da fonte em Z_{i+1} .*

Demonstração: Provaremos apenas (a) pois a demonstração de (b) é dual.

(a) Como existe uma seqüência de Auslander-Reiten terminando em Z_i e existe o morfismo irreduzível $Z_{i-1} \rightarrow Z_i$ então tal seqüência assume o seguinte aspecto:

$$0 \rightarrow \tau Z_i \xrightarrow{f} Z_{i-1} \oplus M \xrightarrow{g} Z_i \rightarrow 0.$$

Considerando $h : \tau Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ a co-restrição de f para Z_{i-1} , h é um morfismo irreduzível. Do caminho pré-seccional temos também um morfismo irreduzível $Z_{i-2} \rightarrow Z_{i-1}$. Vamos supor que $\tau Z_i \neq Z_{i-2}$, então pelo Lema (1.3.6) existe um morfismo poço $\theta : \tau Z_i \oplus Z_{i-2} \oplus X \rightarrow Z_{i-1}$. Portanto $\tau Z_i \oplus Z_{i-2}$ é um somando do domínio do poço em Z_{i-1} .

Se $\tau Z_i \simeq Z_{i-2}$, como o caminho é pré-seccional então, pela definição de caminho pré-seccional, $\tau Z_i \oplus Z_{i-2}$ é um somando no domínio do poço em Z_{i-1} . ■

Veremos agora uma caracterização dos caminhos pré-seccionais cujos extremos são ou o final ou o início de uma seqüência de Auslander-Reiten, dando condições para que possamos “transladar” um caminho pré-seccional.

Proposição 2.2.1 *Seja $Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow Z_n$ um caminho pré-seccional em Γ_A com $n \geq 1$.*

(a) *Se $g : Y \rightarrow Z_n$ é um epimorfismo irreduzível e existe um morfismo irreduzível de $Y \oplus Z_{n-1}$*

em Z_n , então Z_i não é projetivo para $0 \leq i \leq n$ e o morfismo irreduzível $g_i : \tau Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ é um epimorfismo para $0 < i \leq n$.

(b) Se $g : Z_0 \rightarrow Y$ é um monomorfismo irreduzível e existe um morfismo irreduzível de Z_0 em $Y \oplus Z_1$, então Z_i não é injetivo para $0 \leq i \leq n$ e o morfismo irreduzível $g_i : Z_{i+1} \rightarrow \tau^- Z_i$ é um monomorfismo para $0 \leq i < n$.

Demonstração: Provaremos apenas (a) pois a demonstração de (b) é dual.

(a) Vamos provar por indução em i . Como $g : Y \rightarrow Z_n$ é um epimorfismo, pelo Lema (1.3.4), Z_n não é projetivo, logo existe a seqüência de Auslander-Reiten terminando em Z_n . Além disto, como existe um morfismo irreduzível $Y \oplus Z_{n-1} \rightarrow Z_n$, pelo Lema (1.3.6) Y e Z_{n-1} são somandos do termo do meio desta seqüência:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Y & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \tau Z_n & \xrightarrow{h_n} & M & \longrightarrow & Z_n \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & Z_{n-1} & & &
 \end{array}$$

Como $g : Y \rightarrow Z_n$ é epimorfismo irreduzível, pelo Lema (1.3.7) g_n é epimorfismo irreduzível e pelo Lema (1.3.4) Z_{n-1} não é projetivo.

Suponha $i > 1$. Vamos provar por indução em i que existe um epimorfismo irreduzível $g_i : \tau Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ e conseqüentemente Z_{i-1} não é projetivo. Considere a seqüência de Auslander-Reiten terminando em Z_{i-1} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \tau Z_i & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \tau Z_{i-1} & \xrightarrow{h_{i-1}} & M_i & \longrightarrow & Z_{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & Z_{i-2} & & &
 \end{array}$$

onde $\tau Z_i \oplus Z_{i-2}$ é um somando do termo do meio da seqüência e além disso, $g_i : \tau Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ seja um epimorfismo irreduzível. Pelo Lema (1.3.7), g_{i-1} é epimorfismo irreduzível e pelo Lema (1.3.4) Z_{i-2} não é projetivo. Se $2 \leq i \leq n$, pelo Lema (2.2.2) $\tau Z_{i-1} \oplus Z_{i-3}$ é um somando direto do domínio do poço em Z_{i-2} , logo teremos a seqüência de Auslander-Reiten:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \tau Z_{i-1} & & & \\
& & \nearrow & & \searrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tau Z_{i-2} & \xrightarrow{h_{i-2}} & M_{i-1} & \longrightarrow & Z_{i-2} \longrightarrow 0, \\
& & \searrow & & \nearrow & & \\
& & & Z_{i-3} & & &
\end{array}$$

$g_{i-2} : \tau Z_{i-2} \rightarrow Z_{i-3}$ $g_{i-1} : \tau Z_{i-1} \rightarrow Z_{i-2}$

Portanto Z_i não é projetivo para $0 \leq i \leq n$ e existe um epimorfismo irreduzível $g_i : \tau Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ para $0 \leq i < n$, terminando assim a demonstração. ■

O Corolário a seguir será de grande valia para provar o Corolário (2.3.2), isto é, que o A -módulo X que tem a propriedade (A) não tem antecessor projetivo.

Corolário 2.2.1 *Considere $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten com Y_i indecomponível para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.*

- (a) *Se a co-restrição de f para Y_i é um epimorfismo para $1 \leq i \leq r$, então nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em Z contém módulos projetivos.*
- (b) *Se a restrição de g para Y_i é um monomorfismo para $1 \leq i \leq r$, então nenhum caminho pré-seccional em Γ_A começando em X contém módulos injetivos.*

Demonstração: (a) Primeiramente podemos dizer que Z não é projetivo pois é final de uma sequência de Auslander-Reiten.

Vamos assumir que a co-restrição de f para Y_i é epimorfismo para todo $1 \leq i \leq r$. Seja $Z_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0 = Z$ um caminho pré-seccional em Γ_A terminando em Z_0 com $n > 0$. Pelos Lemas (1.3.5) (b) e (1.3.6) temos que $Z_1 \simeq Y_{i_0}$ para algum $1 \leq i_0 \leq r$, pois a sequência dada acima é uma sequência de Auslander-Reiten. Seja $X \rightarrow Z_1$ a co-restrição de f a um indecomponível. Por hipótese tal morfismo será um epimorfismo e pelo Lema (1.3.4) Z_1 não é projetivo.

Vamos supor que $n > 1$. Pelo Lema (2.2.2), $\tau Z_0 \oplus Z_2$ é um somando direto do domínio do poço em Z_1 . Temos então todas as hipóteses necessárias para aplicar a Proposição (2.2.1) pois a co-restrição de f para Z_1 é um epimorfismo, o caminho dado é pré-seccional ($n > 1$) e existe um morfismo irreduzível de $\tau Z_0 \oplus Z_2$ à Z_1 . Logo, nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em Z contém módulos projetivos.

(b) A demonstração deste caso é análoga a anterior. ■

Como uma consequência imediata do Corolário acima temos:

Corolário 2.2.2 *Sejam X e Y_i indecomponíveis para todo i e $r \geq 4$, então:*

- (a) *Se $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ é um morfismo irreduzível com Y_i não projetivo e além disso se f é um epimorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau^- X)$ então nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em X contém módulos projetivos.*
- (b) *Se $f : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow X$ é um morfismo irreduzível com Y_i não injetivo e além disso se f for um*

monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$ então nenhum caminho pré-seccional em Γ_A começando em X contém módulos projetivos.

Demonstração: (a) Pelo Lema (2.1.1) (a) temos que X não é projetivo. Logo existe uma única seqüência de Auslander-Reiten terminando em X :

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^r \tau Y_i \oplus W \xrightarrow{\psi} X \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema (2.1.2) (a) toda co-restrição de ϕ à um somando indecomponível de $\bigoplus_{i=1}^r \tau Y_i \oplus W$ será um epimorfismo irreduzível. Pelo Corolário (2.2.1) (a) nenhum caminho pré-seccional terminando em X contém módulos projetivos.

(b) A demonstração deste caso é dual à do item (a). ■

2.3 Módulos estáveis

Nesta seção provaremos que um módulo X com a propriedade (A) não tem antecessor projetivo e obteremos alguns resultados que permitirão provar que $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito. No Lema (2.1.2) fizemos o primeiro passo de indução para mostrarmos que um módulo X com a propriedade (A) admite $\tau^n X$ para todo $n \geq 0$, isto é, X é estável à esquerda. Utilizando a mesma técnica da demonstração do Lema (2.1.2), provaremos por indução o próximo Lema, mas antes vamos definir o que vem a ser módulo estável à esquerda.

Definição 2.3.1 Um módulo indecomponível X em $\text{mod } A$ é **estável à esquerda** se $\tau^n X \neq 0$ para todo $n \geq 0$, e **estável à direita** se $\tau^{-n} X \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Será **estável** se for estável à esquerda e à direita.

Um exemplo de módulo estável à direita pode ser visto no quiver de Auslander-Reiten da álgebra de caminhos A obtida a partir do quiver da Figura (2.1) (Quiver de Kronecker). Como podemos perceber na Figura (2.2) o módulo projetivo P_2 é estável à direita. Aliás, todos os módulos nesta componente são estáveis à direita. Dualmente, todos os módulos da componente conexa de Γ_A contendo os injetivos são estáveis à esquerda.

Lema 2.3.1 Seja $r \geq 4$.

(a) Na seqüência de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^r \tau Y_i \oplus W \xrightarrow{\psi} X \longrightarrow 0$, se $l(\tau X) \geq l(X)$ e toda co-restrição de ϕ a um indecomponível é um epimorfismo, então X é estável à esquerda, o morfismo irreduzível $\tau^j X \longrightarrow M$, $j \geq 1$ com $M \in \text{ind } A$ é um epimorfismo e $l(\tau^{n+1} X) \geq l(\tau^n X)$ para cada $n \geq 0$.

(b) Na seqüência de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \tau^{-1} Y_i \oplus U \xrightarrow{\psi} \tau^{-1} X \longrightarrow 0$, se $l(\tau^{-1} X) \geq l(X)$ e toda restrição de ψ a um indecomponível é um monomorfismo, então X é estável à direita, o morfismo irreduzível $M \longrightarrow \tau^{-j} X$, $j \geq 1$ com $M \in \text{ind } A$ é um monomorfismo e $l(\tau^{-(n+1)} X) \geq l(\tau^{-n} X)$ para cada $n \geq 0$.

Demonstração: (a) Vamos provar por indução em j . Temos por hipótese que $l(\tau X) \geq l(X)$ e que cada morfismo irredutível $\tau X \rightarrow M$, com M indecomponível, é um epimorfismo.

Considere o morfismo $f : \tau X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \tau Y_i$ irredutível com τX e τY_i indecomponíveis. Por hipótese

$$l(\tau X) \geq l(\tau^-(\tau X)) = l(X).$$

Pelo Lema (2.1.1) (a), $2 l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i)$ e τX não é projetivo. Como a co-restrição de ϕ para cada indecomponível é um epimorfismo, segue que nenhum módulo indecomponível do termo do meio da sequência é projetivo. Desta forma $\tau^2 Y_i$ aparece no termo do meio da sequência de Auslander-Reiten que termina em τX :

$$0 \rightarrow \tau^2 X \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^r \tau^2 Y_i \oplus N \xrightarrow{\eta} \tau X \rightarrow 0 \quad \text{com } r \geq 4. \quad (2.8)$$

Pelo Lema (2.1.2) (a) concluímos que toda co-restrição $\tau^2 X \rightarrow L$ de φ a um indecomponível L é um epimorfismo.

Vamos mostrar que $l(\tau^2 X) \geq l(\tau X)$. Da sequência (2.8) temos

$$l(\tau^2 X) + l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau^2 Y_i). \quad (2.9)$$

Observe que τY_i não é projetivo, pois toda co-restrição de f é um epimorfismo para cada τY_i indecomponível. Então existe a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow \tau^2 Y_i \rightarrow \tau X \oplus U \rightarrow \tau Y_i \rightarrow 0$$

que nos fornece a desigualdade $l(\tau^2 Y_i) + l(\tau Y_i) \geq l(\tau X)$. Segue de imediato que,

$$l(\tau^2 Y_i) \geq l(\tau X) - l(\tau Y_i). \quad (2.10)$$

Das desigualdades (2.9) e (2.10) temos que

$$l(\tau^2 X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau^2 Y_i) - l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r (l(\tau X) - l(\tau Y_i)) - l(\tau X) = (r-1) l(\tau X) - \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i)$$

Por outro lado, vimos que $2 l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i)$ e $r-2 \geq 2$, então

$$(r-2) l(\tau X) \geq 2 l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i), \quad \text{isto é, } (r-2) l(\tau X) - \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) \geq 0.$$

Logo

$$l(\tau^2 X) \geq (r-1) l(\tau X) - \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i) = ((r-2) l(\tau X) - \sum_{i=1}^r l(\tau Y_i)) + l(\tau X) \geq l(\tau X).$$

De imediato saí que $l(\tau^2 X) \geq l(\tau X)$. Assim, completamos o primeiro passo da indução.

Consideremos a seguinte sequência de Auslander Reiten

$$0 \rightarrow \tau^{j-1} X \xrightarrow{\Upsilon} \bigoplus_{i=1}^r \tau^{j-1} Y_i \oplus K \xrightarrow{\beta} \tau^{j-2} X \rightarrow 0 \quad \text{com } r \geq 4, \quad l(\tau^{j-1} X) \geq l(\tau^{j-2} X)$$

e toda co-restrição de Υ a um indecomponível é um epimorfismo. Pelo Lema (2.1.1) (a),

$$2\, l(\tau^{j-1}X) \geq \sum_{i=1}^r l(\tau^{j-1}Y_i)$$

e $\tau^{j-1}X$ não é projetivo. Observe que nenhum termo indecomponível do meio da seqüência dada, é projetivo. Logo existe a seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau^j X \xrightarrow{\alpha} \oplus_{i=1}^r \tau^j Y_i \oplus Z \xrightarrow{\Psi} \tau^{j-1} X \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema (2.1.2) toda co-restrição $\tau^j X \longrightarrow Q$ de α à um indecomponível Q , somando de $\oplus_{i=1}^r \tau^j Y_i \oplus Z$, é um epimorfismo. Usando o procedimento anterior, podemos concluir que $l(\tau^j X) \geq l(\tau^{j-1} X)$, para todo $j \geq 1$.

(b) A demonstração de (b) é dual a de (a). ■

Já provamos que nenhum dos caminhos pré-seccionais que terminam em um A -módulo indecomponível X com a propriedade $(\mathcal{A})$ contém módulos projetivos. O resultado a seguir, bem como seu Corolário, formam uma “ponte” para generalizarmos estes resultados e provar que tal X não tem antecessor projetivo.

Proposição 2.3.1 *Seja $X \in \text{ind} A$.*

(a) *Suponhamos que X seja estável à esquerda e que nenhum caminho pré-seccional terminando em $\tau^n X$, $n \geq 0$, contenha módulos projetivos. Então para todo antecessor Y de X , existe um caminho pré-seccional de Y para $\tau^r X$ para algum $r \geq 0$. Conseqüentemente, X não tem antecessor projetivo em Γ_A .*

(b) *Suponhamos que X seja estável à direita e que nenhum caminho pré-seccional começando em $\tau^{-n} X$, $n \geq 0$, contenha módulos injetivos. Então para todo Y sucessor de X , existe um caminho pré-seccional de $\tau^{-r} X$ para Y , para algum $r \geq 0$. Conseqüentemente, X não tem sucessor injetivo em Γ_A .*

Demonstração: (a) Seja Y um antecessor de X , logo existe um caminho de menor comprimento de Y para $\tau^r X$ para algum $r \geq 0$:

$$Y = Z_0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_m = \tau^r X.$$

Vamos mostrar que este caminho é pré-seccional. Supondo por absurdo que não seja pré-seccional, isto é, existirá um Z_{i-1} com $i-1$ máximo, $0 < i < m$ tal que $Z_{i-1} = \tau Z_{i+1}$ e a multiplicidade de Z_{i-1} no domínio do poço para Z_i é igual a um. Logo,

$$Z_i \longrightarrow Z_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_m = \tau^r X$$

é um caminho pré-seccional. Por hipótese, para cada $i \leq j \leq m$, Z_j não é projetivo.

Consideremos o caminho $\tau Z_i \longrightarrow \tau Z_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tau Z_m = \tau^{r+1} X$. Pelo Lema (2.2.1) este caminho é pré-seccional. Pela junção dos caminhos, obtemos:

$$Y = Z_0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_{i-1} = \tau Z_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tau Z_m = \tau^{r+1} X.$$

Este caminho tem comprimento $m < m + 1$ o que contradiz o fato de que $m + 1$ era o menor comprimento de um caminho de Y para $\tau^r X$ para algum $r \geq 0$. O absurdo vem de supor que o caminho de menor comprimento não é pré-seccional. Sendo assim temos um caminho pré-seccional de Y para $\tau^r X$ e Y , como antecessor de X não é projetivo.

(b) A demonstração é dual à de (a). ■

Corolário 2.3.1 .

(a) Se X é um módulo estável à esquerda e todo morfismo irreduzível $\tau^j X \rightarrow W$ com $W \in \text{ind} A$ e $j \geq 1$ é um epimorfismo, então X não tem antecessor projetivo.

(b) Se X é um módulo estável à direita e todo morfismo irreduzível $W \rightarrow \tau^{-j} X$ com $W \in \text{ind} A$ e $j \geq 1$ é um monomorfismo, então X não tem sucessor injetivo.

Demonstração: Como X é estável à esquerda, consideremos a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow \tau^j X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l W_i \rightarrow \tau^{j-1} X \rightarrow 0.$$

Pelo Corolário (2.2.1) (a), nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em $\tau^{j-1} X$ contém projetivos. Como isto acontece para todo $j \geq 1$, então nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em $\tau^n X$ para $n \geq 0$ contém módulos projetivos. Pela Proposição (2.3.1) (a), X não tem antecessor projetivo.

(b) A prova é análoga à prova de (a). ■

Finalmente, chegamos ao resultado em que provaremos que o módulo indecomponível X com a propriedade (A) não tem antecessor projetivo. No Capítulo (3) provaremos que uma sequência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow Z \rightarrow 0$$

terá um módulo projetivo e injetivo no termo do meio da sequência se os módulos Y_i forem indecomponíveis e Z possuir um sucessor injetivo. Com o próximo Corolário já temos a garantia de que existe um módulo injetivo no termo médio da sequência.

Corolário 2.3.2 .

(a) Considere $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ um morfismo irreduzível onde X e Y_i são indecomponíveis e Y_i não é projetivo para todo i . Se f é um epimorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau^- X)$, então X não tem antecessor projetivo em Γ_A .

(b) Considere $f : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow X$ um morfismo irreduzível onde X e Y_i são indecomponíveis e Y_i não é injetivo para todo i . Se f é um monomorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau X)$, então X não tem sucessor injetivo em Γ_A .

Demonstração: (a) Pelo Lema (2.1.1) (a) segue que, $2 l(X) \geq \sum_{i=1}^4 l(Y_i)$ e X não é projetivo. Logo existe a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow \tau X \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^4 \tau Y_i \oplus U \rightarrow X \rightarrow 0$$

e pelo Lema (2.1.2) (a) toda co-restrição de ϕ a um indecomponível é um epimorfismo. Vamos mostrar que $l(\tau X) \geq l(X)$ para concluir que X é estável à esquerda. Da sequência de Auslander-Reiten acima temos:

$$l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^4 l(\tau Y_i) - l(X). \quad (2.11)$$

Pela desigualdade (2.3), $l(\tau Y_i) \geq l(X) - l(Y_i)$. As desigualdades (2.11) e (2.3) implicam

$$l(\tau X) \geq \sum_{i=1}^4 (l(X) - l(Y_i)) - l(X) = 3 l(X) - \sum_{i=1}^4 l(Y_i). \quad (2.12)$$

Inicialmente vimos que $2 l(X) - \sum_{i=1}^4 l(Y_i) \geq 0$, então da desigualdade (2.12) temos

$$l(\tau X) \geq 3 l(X) - \sum_{i=1}^4 l(Y_i) = l(X) + (2 l(X) - \sum_{i=1}^4 l(Y_i)) \geq l(X).$$

Portanto $l(\tau X) \geq l(X)$. Pelo Lema (2.3.1) (a), X é estável à esquerda e o morfismo irreduzível $\tau^j X \rightarrow M$, com $M \in \text{ind} A$ é um epimorfismo irreduzível para todo $j \geq 1$ e pelo Corolário (2.3.1) (a), X não tem antecessor projetivo em Γ_A .

(b) A demonstração de (b) é dual à de (a). ■

Observação 2.3.1 *Com as hipóteses do item (a) do Corolário acima, é possível concluir que $l(\tau^{n+1} X) \geq l(\tau^n X)$ e com as hipóteses do item (b) é possível concluir que $l(\tau^{-(n+1)} X) \geq l(\tau^{-n} X)$. Provaremos a primeira desigualdade pois a demonstração da segunda é análoga. Como vimos na demonstração do Corolário (2.3.2), toda co-restrição de ϕ a um indecomponível é um epimorfismo e $l(\tau X) \geq l(X)$. Usando novamente o Lema (2.3.1), de imediato temos a afirmação acima.*

Temos quase todas as condições para provar o Teorema de Bautista-Brenner. Com o resultado a seguir concluiremos, no Capítulo 3, que o número de termos do meio da sequência de Auslander-Reiten, cujo início tem um antecessor projetivo e o final tem um sucessor injetivo, é menor ou igual a quatro e que um dos Y_i é projetivo se este número for exatamente quatro. A prova da Proposição abaixo é um tanto longa, por esse motivo dividimos em vários casos, onde cada caso depende do comprimento do caminho e do número de indecomponíveis no contra-domínio da fonte dada.

Proposição 2.3.2 .

(a) *Seja $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ uma fonte com X e Y_i módulos indecomponíveis em $\text{mod} A$. Se existir um caminho pré-seccional de X a um módulo injetivo e $r > 4$, então X não tem antecessor projetivo. O resultado segue também se $r = 4$ e supondo que os Y_i são não projetivos.*

(b) *Seja $f : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow X$ um poço com X e Y_i módulos indecomponíveis em $\text{mod} A$. Se existir um caminho pré-seccional de um módulo projetivo a X e $r > 4$ então X não tem sucessor injetivo. O resultado segue também se $r = 4$ e supondo que os Y_i são não injetivos.*

Demonstração: Provaremos apenas (a) pois a prova de (b) é dual.

(a) Sejam $r \geq 4$ e (*) $X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{t-1} \rightarrow X_t$ um caminho pré-seccional de comprimento mínimo com X_t injetivo. Se $t = 0$ então, X é injetivo e portanto f é um epimorfismo. Logo a co-restrição de f a cada Y_i é um epimorfismo. E então, pelo Lema (1.3.4) (a), Y_i não é projetivo. Consideremos $g : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ a co-restrição de f a $\bigoplus_{i=1}^4 Y_i$. Como f é epimorfismo, então g é epimorfismo. Pelo Corolário (2.3.2), X não tem antecessor projetivo em Γ_A , terminando a demonstração neste caso.

Suponhamos $t > 0$ e $X_1 \simeq Y_1$. Então, X não é injetivo para $0 \leq j < t$, pois X_t é o primeiro injetivo do caminho. Sendo assim, existem $\tau^- X_{t-1}$ e $f_t : X_t \rightarrow \tau^- X_{t-1}$ irredutível. Como X_t é injetivo então f_t é um epimorfismo. Sendo X_j não injetivo para $0 \leq j < t$, então está definido o caminho

$$\tau^- X_0 \rightarrow \tau^- X_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau^- X_{t-2} \rightarrow \tau^- X_{t-1}. (**)$$

Pelo Lema (2.2.1) (c), o caminho (**) é pré-seccional. Como o caminho (*) é pré-seccional, então existe um morfismo irredutível $\Phi : X_{t-1} \rightarrow \tau^- X_{t-2} \oplus X_t$ e como X_{t-1} não é injetivo, logo $\tau^- X_{t-2} \oplus X_t$ é termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten que começa em X_{t-1} . Assim, $h : \tau^- X_{t-2} \oplus X_t \rightarrow \tau^- X_{t-1}$ é um morfismo irredutível.

Como f_t é epimorfismo irredutível, h morfismo irredutível e o caminho (**) é pré-seccional, pela Proposição (2.2.1) existe um epimorfismo irredutível

$$g_i : \tau(\tau^- X_i) \rightarrow \tau^- X_{i-1}$$

para $0 < i \leq t-1$. Em particular, existe epimorfismo irredutível $g_1 : X_1 \rightarrow \tau^- X$. Considere a seguinte seqüência de Auslander-Reiten:

$$0 \rightarrow X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow \tau^- X \rightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.3.7) a co-restrição $\phi : X \rightarrow \bigoplus_{i=2}^r Y_i$ de f para $\bigoplus_{i=2}^r Y_i$ é epimorfismo. Observe que a co-restrição de ϕ a cada Y_i , $2 \leq i \leq r$ é um epimorfismo irredutível. Logo Y_i não é projetivo.

Se $r > 4$ e considerando $\varphi : X \rightarrow \bigoplus_{i=2}^5 Y_i$ um epimorfismo irredutível, pelo Corolário (2.3.2), X não tem antecessor projetivo em Γ_A .

Suponhamos agora $r = 4$ e todos os Y_i não projetivos. Se ϕ é um epimorfismo irredutível, pelo Corolário (1.4.1) (a), conclui-se que X não é projetivo. De fato, $\varphi : X \rightarrow \bigoplus_{i=2}^4 Y_i$ é um epimorfismo irredutível e se X for projetivo então, $\bigoplus_{i=2}^4 Y_i$ é indecomponível pelo Corolário (1.4.1), o que contradiz nossas hipóteses.

Vamos provar que $l(\tau X) \geq l(X)$. Como estamos supondo que Y_i não é projetivo e $r = 4$, então existe τY_i e o seguinte morfismo irredutível:

$$g : \bigoplus_{i=1}^4 \tau Y_i \rightarrow X.$$

Sabemos que τY_i não é injetivo pois $\tau^-(\tau Y_i) = Y_i$. Se g for um monomorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau X)$ então pelo Corolário (2.3.2) (b) X não tem sucessor injetivo em Γ_A . Absurdo, pois X tem um sucessor injetivo. Então g não é monomorfismo e $l(\tau X) > l(X)$.

Agora vamos mostrar que todo morfismo irredutível $h_j : \tau X \rightarrow W_j$ com W_j indecomponível é um epimorfismo.

Seja $h : \tau X \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n W_j$ uma fonte com W_j indecomponível e $W_j = \tau Y_j$ para $1 \leq j \leq 4$. Sabemos que a co-restrição de f para $\bigoplus_{i=2}^4 Y_i$ é um epimorfismo, logo a co-restrição desta, isto é, $g : X \rightarrow Y_3 \oplus Y_4$ é um epimorfismo. Seja $i : K \hookrightarrow X$ a inclusão natural de $K = \text{Ker } g \neq 0$ em X . Observe que $g i = 0$. Pelo Lema (1.4.4) (a) existe $q : K \rightarrow \tau X$ em $\text{mod } A$, uma fonte $(h_3 h_4 \phi)^t : \tau X \rightarrow \tau Y_3 \oplus \tau Y_4 \oplus U$ e um morfismo irreduzível $f_3 : \tau Y_3 \rightarrow X$ tais que $i = f_3 h_3 q$ e $\phi q = 0$. Neste caso ϕ é um epimorfismo irreduzível pois $\phi q = 0$.

Analogamente, se considerarmos as co-restrições para $Y_2 \oplus Y_4$ e $Y_2 \oplus Y_3$ deduziremos que as co-restrições de h para $\bigoplus_{j \neq 2,4} W_j$ e $\bigoplus_{j \neq 2,3} W_j$ são epimorfismos. Destas duas últimas podemos dizer que as co-restrições para W_3 e W_4 são epimorfismos. Temos então que qualquer co-restrição de h para W_j é um epimorfismo irreduzível. Pelo Corolário (2.2.1), nenhum caminho pré-seccional terminando em X contém módulos projetivos. Em particular, τY_i não é projetivo para $1 \leq i \leq 4$.

Como $l(\tau X) \geq l(X)$ e τY_i não é projetivo, pelo Corolário (2.3.2) τX não tem antecessor projetivo em Γ_A . Assim, podemos dizer que X não tem antecessor projetivo em Γ_A pois pela Observação (2.3.2) todo antecessor de X ou é um antecessor de τX ou está sobre um caminho seccional terminando em X . ■

Observação 2.3.2 *Na proposição anterior, afirmamos que todo antecessor de X é um antecessor de τX ou está sobre um caminho seccional terminando em X . Vamos provar esta afirmação. Seja M um antecessor de X . Consideremos o caminho de menor comprimento de M para X .*

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n = X.$$

Se este caminho não é seccional, existe um inteiro positivo i tal que $M_i \simeq \tau M_{i+2}$. Considere este i máximo. Logo o caminho

$$M_{i+1} \rightarrow M_{i+2} \rightarrow \cdots \rightarrow M_n = X$$

é um caminho seccional. Como qualquer caminho seccional terminando em X não contém módulos projetivos então, está bem definido o caminho

$$\tau M_{i+1} \rightarrow \tau M_{i+2} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau M_{n-1} \rightarrow \tau M_n = \tau X$$

e este é um caminho seccional. Consideremos agora o seguinte caminho

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \tau M_{i+2} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau M_n = \tau X.$$

Logo M é um antecessor de τX .

Capítulo 3

Teorema de Bautista-Brenner

Em [BB81] Bautista e Brenner apresentaram a primeira prova deste resultado para álgebras de artin de tipo finito. A prova que obtiveram está assentada num resultado de Bautista referente a subgrafos seccionais e matriz de Coxeter, mas o principal resultado utilizado é o Teorema de Riedtman-Todorov [Rie80]. Em 1990 Höhne apresentou uma outra prova deste resultado em [vH90] utilizando formas quadráticas e supondo que A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

Neste capítulo apresentamos um dos principais resultados deste trabalho, isto é, a generalização do Teorema de Bautista-Brenner [BB81] que inicialmente fora provado para álgebras de tipo finito e aqui apresentamos a demonstração dada por Liu em [Liu93a] para álgebras de artin. Todo o cabedal de informações do Capítulo 2 será nosso guia. A prova ficou extremamente simples já que praticamente tudo fora feito no Capítulo 2. Apenas juntaremos os resultados para obtê-la.

Apresentamos também uma aplicação do Teorema de Bautista-Brenner (Teorema (3.1.2)). Este resultado fornece mais informações a respeito do Teorema de Roiter (1.4.2) que por sua vez deu autenticidade à Conjectura de Brauer-Thrall I. Este resultado foi provado por Ringel em [BB81], e afirma que se $l(M) \leq b$ para todo $M \in \text{ind} A$ então, o número de classes de isomorfismos de A -módulos indecomponíveis é menor que $s \cdot 3^{2^b - 1}$, onde s é o número de A -módulos simples.

3.1 Generalização do Teorema de Bautista-Brenner

A seqüência de Auslander-Reiten do Teorema abaixo exige que seu início tenha um antecessor projetivo e o final um sucessor injetivo, isto é, a seqüência está numa componente não semi-regular de Γ_A . Entendamos por componente não semi-regular de Γ_A , aquelas que possuem módulos projetivos e injetivos. Já um estudo completo da estrutura das componentes regulares (componentes que não contém módulos projetivos nem injetivos) foi feito recentemente por Zhang [Zha91].

Neste trabalho optamos por chamar de Teorema de Bautista-Brenner a versão dada por Liu e o resultado original apresentamos como um Corolário (Corolário (3.1.1)).

Teorema 3.1.1 (Bautista-Brenner) *Seja A uma álgebra de artin e $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod} A$ com Y_i indecomponível. Se X tem um antecessor projetivo e Z tem um sucessor injetivo então $r \leq 4$. Além disso, se $r = 4$ existe um único i tal que Y_i é projetivo e injetivo.*

Demonstração: Vamos supor $r \geq 4$. Podemos separar a demonstração em dois casos. Primeiro $l(Z) \geq l(X)$ e depois $l(X) > l(Z)$. Vamos provar o teorema somente para o primeiro caso pois o outro é análogo.

Consideremos o poço $\bigoplus_{i=1}^r Y_i \xrightarrow{g} Z$ e $l(Z) \geq l(X)$. Como Z tem um sucessor injetivo pelo Corolário (2.3.2) (b) um dos Y_i é injetivo. Sem perda de generalidade, podemos supor que Y_1 é injetivo. Temos assim um caminho pré-seccional de X para um injetivo. Se na fonte $X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ tivermos $r \geq 4$, pela Proposição (2.3.2) (a) temos $r = 4$ e um dos Y_i é projetivo.

Mostraremos agora que este projetivo é o A -módulo Y_1 e que os outros não são nem projetivos nem injetivos. Como Y_1 é injetivo então o morfismo irreduzível $Y_1 \rightarrow Z$ é um epimorfismo. Pelo Lema (1.3.7) a co-restrição de f para $\oplus_{i=2}^r Y_i$ é um epimorfismo e então, cada morfismo irreduzível $X \rightarrow Y_i$, $2 \leq i \leq 4$ é um epimorfismo implicando que Y_i não é projetivo para $2 \leq i \leq 4$. Assim, Y_1 é projetivo e os outros não são. Por outro lado, o morfismo irreduzível $X \rightarrow Y_1$ é um monomorfismo e novamente pelo Lema (1.3.7) a restrição de g para $\oplus_{i=2}^r Y_i$ é um monomorfismo. Portanto cada morfismo $Y_i \rightarrow Z$, $2 \leq i \leq 4$ é um monomorfismo. Portanto Y_i não é injetivo para $2 \leq i \leq 4$. ■

Apresentamos logo a seguir o quiver de Auslander Reiten de uma álgebra de caminhos A de tipo de representação finito (Figura (3.1)) e de tipo de representação infinito (Figura (3.3)), onde temos uma sequência de Auslander-Reiten com quatro somandos no termo do meio e um dos somandos é um módulo projetivo-injetivo.

Figura 3.1:

Figura 3.2:

Provamos a seguir que se A é uma álgebra de tipo de representação finito, então todo módulo indecomponível tem um antecessor projetivo e um sucessor injetivo em Γ_A . Por esse motivo, uma sequência de Auslander-Reiten em Γ_A está sempre nas condições do Teorema de Bautista-Brenner.

Figura 3.3:

Proposição 3.1.1 *Seja A uma álgebra de tipo finito. Se $X \in \text{ind}A$ então X tem um antecessor projetivo e um sucessor injetivo.*

Demonstração: Se X for projetivo não há nada a provar. Primeiramente vamos provar que X tem antecessor projetivo. Sabemos que todo A -módulo finitamente gerado tem uma única cobertura projetiva, isto é, existe $\pi : P \rightarrow X$. Tomando $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, onde P_i é projetivo indecomponível, podemos considerar $P_i \rightarrow X$ a restrição de $P \rightarrow X$. Portanto $\text{Hom}(P_i, M) \neq 0$ para todo i . Com isso e mais a hipótese de que A é de tipo finito deduzimos que o morfismo $P_i \rightarrow X$ é uma soma de composta de irreduzíveis entre indecomponíveis (Lema (1.4.1)). Tomando uma das parcelas desta soma, podemos dizer que existe um caminho de P_i para X em Γ_A .

A prova de que X tem um sucessor injetivo é dual. Basta usar o fato de que como X é finitamente gerado, então existe uma única envolvente injetiva. ■

Corolário 3.1.1 (Bautista-Brenner [BB81]) *Seja A uma álgebra de artin de tipo de representação finito e suponha que*

$$0 \rightarrow X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Y_i \rightarrow Z \rightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten de A -módulos com Y_i não nulo e indecomponível para $1 \leq i \leq n$. Então $n \leq 4$ e além disso se $n = 4$, um dos Y_i é projetivo e injetivo.

Apresentaremos abaixo uma aplicação do Teorema de Bautista-Brenner. Esta Proposição vem acrescentar mais informações sobre a conjectura de Brauer-Thrall I. Esta conjectura fora provada por Roiter nos anos 60 para álgebras sobre um corpo e para anéis artinianos por Auslander em [AR74a].

Teorema 3.1.2 (Ringel [BB81]) *Seja A uma álgebra de artin. Se o comprimento dos A -módulos indecomponíveis é limitado por b , então o número de classes de isomorfismos de A -módulos indecomponíveis é menor do que $s \cdot 3^{(2^b-1)}$, onde s é o número de A -módulos simples.*

Demonstração: Seja $X \in \text{ind}A$ não simples. Existe ao menos um módulo simples S tal que $\text{Hom}(X, S) \neq 0$. Como o comprimento dos A -módulos indecomponíveis é limitado por b , então

pelo Teorema de Roiter (1.4.2) A é de tipo de representação finito. Pelo Lema (1.4.1) existe uma cadeia

$$X = X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} X_m = S$$

de morfismos irredutíveis entre A -módulos indecomponíveis com composta não nula, onde $m \geq 1$.

Podemos assumir que para $1 < i < m$, X_i não é projetivo-injetivo, pois caso contrário isso pode ser contornado através da construção de uma nova seqüência sem módulos projetivo-injetivo e cuja composta dos morfismos irredutíveis é não nula. De fato, se X_i é um módulo projetivo-injetivo, pela Proposição (1.4.5) temos $X_{i-1} = \text{rad}X_i$, $X_{i+1} = X_i/\text{soc}X_i$ e a seqüência de Auslander-Reiten

$$(*) 0 \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \oplus \text{rad}X_i/\text{soc}X_i \longrightarrow X_i/\text{soc}X_i \longrightarrow 0,$$

com $\text{rad}X_i/\text{soc}X_i \neq 0$ pois caso contrário a seguinte seqüência é exata

$$0 \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_i/\text{soc}X_i \longrightarrow 0$$

e desta forma $f_i f_{i-1} = 0$ contrariando o fato de que $f_{m-1} \dots f_1 \neq 0$. Desta forma podemos tomar um A -módulo indecomponível Y somando de $\text{rad}X_i/\text{soc}X_i$ de tal forma que a cadeia permaneça não nula e Y não seja projetivo-injetivo.

Para garantir que Y não é projetivo-injetivo, estamos usando o fato de que uma seqüência de Auslander-Reiten possui no máximo um módulo projetivo-injetivo no termo do meio da seqüência. Mostraremos agora que a composta permanece não nula ao substituirmos os morfismos f_{i-1} e f_i por $g_{i-1} : X_{i-1} \longrightarrow \text{rad}X_i/\text{soc}X_i$ e $g_i : \text{rad}X_i/\text{soc}X_i \longrightarrow X_{i+1}$ respectivamente.

Figura 3.4:

Podemos ver pela Figura (3.4) que $\text{Im}g_i g_{i-1} = \text{Im}f_i f_{i-1}$. Logo temos $f_m \dots g_i g_{i-1} \dots f_1 \neq 0$.

Em síntese, para cada $X \in \text{ind}A$ existe uma cadeia $X = X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow S$ de morfismos irredutíveis com composta não nula, onde S é um A -módulo simples e X_i não é projetivo-injetivo para $1 < i < m$.

Como estamos interessados em encontrar um máximo para a cardinalidade de $\text{ind}A$, a menos de isomorfismo, podemos começar contando qual o número máximo de módulos indecomponíveis Y tal que existe uma cadeia de Y a X de comprimento m , sem projetivo e injetivo. Fixado o módulo simples S e o comprimento m da cadeia, pelo Teorema de Bautista-Brenner (3.1.1), podemos alcançar no máximo 3^{m-1} módulos indecomponíveis que não são projetivo-injetivos,

isto é, para cada m fixado, a cadeia que termina em S poderá ser iniciada em pelo menos 3^{m-1} módulos indecomponíveis X que não são projetivo-injetivos.

Pelo Lema de Harada-Sai (1.4.2), temos que $m \leq 2^b - 1$. Desta forma, o número de A -módulos indecomponíveis tal que existe uma cadeia com composta não nula de comprimento m , sem projetivo e injetivo de um A -módulo para S é no máximo $\sum_{1 \leq m \leq 2^b-1} 3^{m-1}$.

Além disso, temos que existe no máximo um módulo indecomponível projetivo-injetivo X com $\text{Hom}(X, S) \neq 0$. Assim, provamos que o número de A -módulos indecomponíveis X tais que existe um caminho de X a S em Γ_A com composta não nula, será no máximo

$$1 + \sum_{1 \leq m \leq 2^b-1} 3^{m-1} = \frac{1}{2}(3^{(2^b-1)} + 1) < 3^{(2^b-1)}.$$

Assim, terminamos a prova. ■

Capítulo 4

Módulos sobre ciclos

Neste capítulo apresentaremos dois resultados obtidos por Liu em [Liu93a], quais sejam: Numa flecha com valorização (d, d') , o vértice inicial e o vértice final não estão sobre um ciclo orientado se $d, d' > 1$. Além disso, o vértice inicial não tem sucessor injetivo ou o vértice final não tem antecessor projetivo (Teorema (4.3.1)). E se a flecha está sobre um ciclo orientado de Γ_A então, $d, d' \leq 3$ (Teorema (4.3.2)). As demonstrações destes resultados foram obtidas a partir das técnicas desenvolvidas no Capítulo 2 e do Teorema de Bautista-Smalø.

Em 1983, Bautista e Smalø provaram que não existem ciclos seccionais no quiver de Auslander-Reiten [BS83]. Este resultado ficou conhecido como Teorema de Bautista-Smalø. Naquele mesmo ano, Bongartz apresentava uma prova mais simples [Bon83] deste resultado. Optamos por apresentar aqui a prova dada por Bongartz, apesar de que uma generalização deste resultado apareceu num trabalho de Liu [Liu92], onde ele prova entre outras coisas a não existência de ciclos pré-seccionais (Proposição 1.16). Como consequência imediata do Teorema de Bongartz temos que a composição de morfismos irredutíveis sobre um caminho seccional é não nula (Corolário (4.1.1)).

Neste capítulo, alguns resultados que antecedem o Teorema (4.3.1) e o Teorema (4.3.2) se destacam. Estes resultados foram obtidos por Liu no mesmo trabalho em que aparecem os resultados do capítulo anterior [Liu93a]. Um destes resultados é o fato de um módulo X com a propriedade $(\mathcal{A})$ (vide capítulo (2)) não estar num ciclo orientado (Corolário (4.2.4)) e existir uma componente estável à esquerda contendo X e não contendo módulos τ -periódicos (Proposição (4.2.3)). Além disso, $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito (Proposição (4.2.1)). Provaremos também que um módulo X não está num ciclo orientado se este possuir mais de quatro sucessores imediatos (ou se possuir quatro sucessores imediatos que não sejam projetivos) e um caminho pré-seccional de X para um injetivo (Proposição (4.3.1)).

4.1 O Teorema de Bautista-Smalø

O ímpeto para o Teorema de Bautista-Smalø enunciado abaixo foi suscitado pelo trabalho de Auslander e Reiten sobre quando fatores de composição determinam os módulos indecomponíveis sobre uma álgebra de artin. Apresentaremos aqui no entanto, uma demonstração devida a Bongartz, muito mais simples e instrutiva.

O Lema que apresentamos a seguir é um pequeno resultado que auxilia na prova do Teorema de Bongartz. Ressaltamos que na prova deste Teorema, Bongartz o fez por indução e usa o Lema (4.1.1) como um primeiro passo de indução.

Lema 4.1.1 *Seja $f : X_1 \rightarrow X_2$ um morfismo irredutível com $X_1, X_2 \in \text{ind} A$. Então não existe nenhuma decomposição $f = g h$ onde $g : Y \rightarrow X_2$ e $h : X_1 \rightarrow Y$ são morfismos e além disso g e $(f g) : X_1 \oplus Y \rightarrow X_2$ são morfismos irredutíveis.*

Demonstração: Vamos supor que existe uma decomposição $f = gh$ onde $g : Y \rightarrow X_2$ e $h : X_1 \rightarrow Y$ com g e $(f g) : X_1 \oplus Y \rightarrow X_2$ morfismos irredutíveis. Neste caso podemos dizer que X_2 não é projetivo pois se fosse então $\text{rad} X_2 \hookrightarrow X_2$ seria um morfismo poço com Y e X_1 somandos de $\text{rad} X_2$. Sendo $f = gh$ com f morfismo irredutível, então h é um monomorfismo

que cinde. Logo $X_1 \simeq Y$ pois Y e X_1 são indecomponíveis. Como o morfismo irredutível $(f \ g)$ é uma restrição da inclusão $\text{rad} X_2 \hookrightarrow X_2$, logo é um monomorfismo irredutível, mas $f = g \ h$, isto é, $\text{Im} f \cap \text{Im} g \neq 0$, contradizendo o fato de $(f \ g)$ ser monomorfismo. Portanto X_2 não é projetivo.

Assim podemos dizer que existe uma seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau X_2 \xrightarrow{(f' \ g' \ r')^t} X_1 \oplus Y \oplus M \xrightarrow{(f \ g \ r)} X_2 \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.1.3) (a) obtemos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X_1, \tau X_2) \xrightarrow{(f' \ g' \ r')^t_*} \text{Hom}(X_1, X_1 \oplus Y \oplus M) \xrightarrow{(f \ g \ r)^*} \text{Hom}(X_1, X_2).$$

Podemos ver que $(1 \ -h \ 0)^t \in \text{Ker}(f \ g \ r)_*$. Como a seqüência é exata, temos $\text{Ker}(f \ g \ r)_* = \text{Im}(f' \ g' \ r')^t_*$. Portanto existe $\varphi \in \text{Hom}(X_1, \tau X_2)$ tal que $(f' \ g' \ r') \varphi = (1 \ -h \ 0)$, isto é, $1 = f' \varphi$, contradizendo o fato de f' ser irredutível. Portanto não existem f, g e h nas condições do Lema que enunciamos acima. ■

Com este resultado temos o seguinte Teorema:

Teorema 4.1.1 (Bongartz) *Sejam X_i e Y A -módulos indecomponíveis e $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ com $1 \leq i \leq n$ morfismos irredutíveis. Se $f_n f_{n-1} \dots f_1 = 0$ ou $f_n f_{n-1} \dots f_1 = g \ h$, onde $n \geq 2$, $g : Y \longrightarrow X_{n+1}$ e $h : X_1 \longrightarrow Y$ são morfismos tais que $(f_n \ g) : X_n \oplus Y \longrightarrow X_{n+1}$ é um morfismo irredutível, então $\tau X_k = X_{k-2}$ para algum $3 \leq k \leq n+1$.*

Demonstração: Vamos provar por indução sobre k . O primeiro passo de indução só faz sentido para $k = 3$. Temos somente duas possibilidades. Uma é $f_2 f_1 = 0$ ou $f_2 f_1 = g \ h$ com $(f_2 \ g)$ morfismo irredutível. Se $f_2 f_1 = 0$ então f_2 é um epimorfismo e assim X_3 não é projetivo. Consideremos a seqüência de Auslander-Reiten que termina em X_3 :

$$0 \longrightarrow \tau X_3 \xrightarrow{(f'_2 \ r)^t} X_2 \oplus R \xrightarrow{(f_2 \ r)} X_3 \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.1.3) se aplicarmos $\text{Hom}(X_1, -)$ a esta seqüência, temos a seqüência exata à esquerda:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X_1, \tau X_3) \xrightarrow{(f'_2 \ r)^t_*} \text{Hom}(X_1, X_2 \oplus R) \xrightarrow{(f_2 \ r)^*} \text{Hom}(X_1, X_3).$$

Observemos que $(f_1 \ 0)^t \in \text{Ker}(f_2 \ r)_*$. De fato, $(f_2 \ r)_*(f_1 \ 0)^t = f_2 f_1 = 0$. Como a seqüência é exata, isto é, $\text{Ker}(f_2 \ r)_* = \text{Im}(f'_2 \ r)^t_*$ então existe $\psi \in \text{Hom}(X_1, \tau X_3)$ tal que $(f'_2 \ r)^t \psi = (f_1 \ 0)^t$. Logo $f'_2 \psi = f_1$.

Se $X_1 = \tau X_3$, não há nada a fazer. Caso contrário, temos que $(f_1 \ f'_2) : X_1 \oplus \tau X_3 \longrightarrow X_2$ é um morfismo irredutível com f_1 e f'_2 irredutíveis e além disso vimos que existe $\psi : X_1 \longrightarrow \tau X_3$ com $f_1 = f'_2 \psi$. Mas isso contradiz o Lema (4.1.1). Portanto se a composta é nula, só nos resta a primeira possibilidade, isto é, $X_1 = \tau X_3$.

Agora vamos supor que $f_2 f_1 = g \ h$ com $g : Y \longrightarrow X_3$, $h : X_1 \longrightarrow Y$ e $(f_2 \ g)$ é um morfismo irredutível. Podemos afirmar que X_3 não é projetivo pois caso contrário a inclusão $\text{rad} X_3 \hookrightarrow X_3$

é um poço e então X_2 e Y são somandos de $\text{rad}X_3$ e além disso $(f_2 g)$ é restrição desta inclusão e pelo fato de $f_2 f_1 = g h$ então

$$\text{Im} f_2 \cap \text{Im} g \neq 0$$

o que implica que $(f_2 g)$ não pode ser restrição da inclusão $\text{rad}X_3 \hookrightarrow X_3$. Portanto X_3 não é projetivo e existe uma sequência de Auslander-Reiten.

$$0 \longrightarrow \tau X_3 \xrightarrow{(f'_2 \ g' \ r')^t} X_2 \oplus Y \oplus M \xrightarrow{(f_2 \ g \ r)} X_3 \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema (1.1.3), se aplicarmos $\text{Hom}(X_1, -)$ a esta sequência temos:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X_1, \tau X_3) \xrightarrow{(f'_2 \ g' \ r')^t_*} \text{Hom}(X_1, X_2 \oplus Y \oplus M) \xrightarrow{(f_2 \ g \ r)^*} \text{Hom}(X_1, X_3).$$

Podemos ver que $(f_1 - h \ 0)^t \in \text{Ker}(f_2 g r)_*$. De fato, $(f_2 g r)_*(f_1 - h \ 0)^t = (f_2 g r)(f_1 - h \ 0)^t = f_2 f_1 - g h = 0$. Portanto existe $\phi \in \text{Hom}(X_1, \tau X_3)$ tal que $(f'_2 \ g' \ r')^t_* \phi = (f_1 - h \ 0)^t$. Assim, temos: $f'_2 \phi = f_1$. Se $\tau X_3 = X_1$, então não há nada a provar. Caso contrário teremos $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$, $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$, $\phi : X_1 \rightarrow \tau X_3$ e $f'_2 : \tau X_3 \rightarrow X_2$ tais que $f_1 = f'_2 \phi$ com $(f'_2 f_1) : \tau X_3 \oplus X_1 \rightarrow X_2$ morfismo irreduzível. Contradizendo novamente o Lema (4.1.1). Fazendo por indução sobre k , completamos a prova. ■

Como consequência do Teorema de Bongartz temos:

Corolário 4.1.1 *A composição de morfismos irreduzíveis sobre um caminho seccional é não nula.*

Teorema 4.1.2 (Bautista e Smalφ) *Seja A uma álgebra de artin. Então não existem ciclos seccionais no quiver de Auslander-Reiten de A .*

Demonstração: Seja $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$ com $X_1 = X_n$ e $X_2 = X_{n+1}$ um ciclo no quiver de Auslander-Reiten. Temos que $f_n f_{n-1} \dots f_1$ é um elemento de $\text{End} X_1$, logo é um isomorfismo ou é nilpotente. Como é uma composta de irreduzíveis, então é nilpotente, isto é, existe um inteiro positivo k tal que $(f_n f_{n-1} \dots f_1)^k = 0$. Pelo Teorema de Bongartz (4.1.1) existe um inteiro i tal que $X_i = \tau X_{i+2}$. ■

Uma consequência imediata do Teorema de Bautista-Smalφ é o resultado a seguir que caracteriza os ciclos de comprimento 2.

Corolário 4.1.2 *Seja A uma álgebra de artin e sejam $X, Y \in \text{ind} A$ tais que existem morfismos irreduzíveis $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$. Então, $X = \tau^- X$ ou $Y = \tau^- Y$.*

Demonstração: Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ morfismos irreduzíveis entre módulos indecomponíveis X e Y . Então temos o ciclo:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X.$$

Pelo Teorema de Bautista-Smalφ, temos $X \simeq \tau^- X$ ou $Y \simeq \tau^- Y$. ■

Corolário 4.1.3 *Seja A uma álgebra de artin de tipo de representação finito tal que o quiver de Auslander-Reiten de A contém um ciclo orientado. Então um ciclo maximal contém módulos projetivos e injetivos. Maximal no seguinte sentido, o ciclo contém o número máximo de módulos indecomponíveis não isomorfos.*

Demonstração: Chamemos de C a um ciclo maximal $X_0 \xrightarrow{g_0} \cdots \rightarrow X_i \xrightarrow{g_i} X_{i+1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{g_{n-1}} X_0 \xrightarrow{g_0} X_1$ no quiver de Auslander-Reiten. Se C não contém um módulo projetivo, então temos que τC é também um ciclo. Pelo Teorema de Bautista-Smalø um dos módulos de τC está em C , digamos τX_i . Os módulos do ciclo τC estão no ciclo C pois caso contrário se tomarmos o seguinte ciclo:

$X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{i-2} = \tau X_i \rightarrow \cdots \rightarrow \tau X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau X_i \rightarrow X_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0$. Podemos ver que este contém um número maior de módulos indecomponíveis não isomorfos do que o ciclo C , contrariando nossas hipóteses.

Agora, consideremos $Y \in \text{ind} A$ que não está em C com um morfismo irredutível $f : Y \rightarrow X_i$ para algum X_i em C . Este módulo indecomponível existe pois C não contém módulos projetivos, então pelo menos estes módulos não estão em C . Além disso, podemos escolher este módulo de maneira que exista um morfismo irredutível $Y \rightarrow X_i$ pois o quiver de Auslander-Reiten é conexo. Sabemos que existe τX_i pois C não contém módulos projetivos, logo existe o morfismo irredutível $h : \tau X_i \rightarrow Y$. Podemos então construir um novo ciclo que contém Y e C já que τX_i e X_i estão em C , mas isso contradiz o fato de C ser um ciclo maximal. Conseqüentemente, C contém um módulo projetivo. Um argumento dual mostra que C contém um módulo injetivo. ■

Um exemplo que ilustra bem este Corolário é o ciclo no quiver de Auslander-Reiten (Figura (4.2)) da álgebra obtida a partir do quiver da Figura (4.1).

Figura 4.1:

Figura 4.2:

4.2 Componentes com módulos τ -periódicos

Discutiremos agora o que ocorre com o comprimento dos translados do módulo X que tem a propriedade (A). Provaremos que $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito. Além disso, mostraremos que um módulo X nessas condições está sobre um ciclo orientado. Para provarmos isso, introduziremos o conceito de componente semi-estável de Γ_A . Um estudo mais detalhado das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten pode ser encontrado em [Liu92]. Usando os conceitos de grau de morfismos irredutíveis Liu fez um estudo das possíveis formas das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten para uma álgebra de artin de tipo de representação infinito. Lembramos que o Teorema de Happel-Preiser-Ringel afirma que componentes periódicas regulares de Γ_A são tubos estáveis. Neste trabalho de Liu aparece uma nova prova deste resultado usando estes novos conceitos (Teorema 2.5 em [Liu92]).

Começaremos introduzindo o conceito de módulos τ -periódicos. Nesta seção daremos algumas caracterizações de componentes do quiver de Auslander-Reiten que contém algum módulo deste tipo. Os módulos com esta propriedade terão um lugar de destaque neste trabalho, o que justifica a seguinte definição:

Definição 4.2.1 Dado um módulo $X \in \text{ind} A$, dizemos que X é τ -periódico se existe um $n > 0$ tal que $\tau^n X \simeq X$. Ao menor inteiro positivo n tal que $\tau^n X \simeq X$, chamaremos de período de X .

Se X é τ -periódico de período n , então é claro que $\tau^{in} X \simeq X$ para todo inteiro i .

Vejamos agora um exemplo de um módulo τ -periódico. Consideremos a álgebra de caminhos obtida a partir do quiver com relação da Figura (4.1). No quiver de Auslander-Reiten desta álgebra (Figura (4.3)), podemos ver que $\tau^{-2}M = M$, isto é, M é um A -módulo de período 2.

Figura 4.3:

Proposição 4.2.1 .

(a) Seja $f : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não projetivo para cada i . Se f for um epimorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau^- X)$, então $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito.

(b) Seja $f : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \longrightarrow X$ um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não injetivo para cada i . Se f for um monomorfismo ou se $l(X) \geq l(\tau X)$, então $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito.

Demonstração: (a) Provaremos por indução em n que para todo $n > 0$, existe $k_n : K_0 \longrightarrow \tau^n X$ em $\text{mod} A$ e um morfismo não isomorfismo $v_n : \tau^n X \longrightarrow \tau^{n-1} X$ tais que $i = v_1 v_2 \cdots v_n k_n$, onde i é um morfismo não nulo. A idéia da prova é construir uma seqüência de morfismos (não isomorfismos)

$$\tau^n X \longrightarrow \tau^{n-1} X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau X \longrightarrow X$$

cujas compostas é sempre não nula independente do comprimento desta seqüência. Neste caso o Lema de Harada-Sai nos permitirá concluir que $l(\tau^n X)$ é ilimitado.

Aparentemente o que faremos a seguir poderá parecer dois passos de indução. Uma observação atenta mostrará que na verdade não se trata de um passo a mais de indução apesar do mesmo argumento para obtê-lo. Na verdade o que está acontecendo é uma alternância nos módulos que aparecem nas fontes obtidas. A cada passo da indução teremos as seguintes fontes:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{2k-1} \\ \Phi_{2k-1} \\ \varphi_{2k-1} \end{pmatrix} : \tau^{2k-1} X \longrightarrow \tau^{2k-1} Y_1 \oplus \tau^{2k-1} Y_2 \oplus M_{2k-2}$$

e

$$\begin{pmatrix} \Psi_{2k} \\ \Phi_{2k} \\ \varphi_{2k} \end{pmatrix} : \tau^{2k} X \longrightarrow \tau^{2k} Y_3 \oplus \tau^{2k} Y_4 \oplus M_{2k-1}.$$

No decorrer desta prova o leitor perceberá este fato.

Primeiramente pela desigualdade (2.1) do Lema (2.1.1) podemos dizer que se $2 l(X) \geq \sum_{i=1}^4 l(Y_i)$ então $l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2)$ ou $l(X) \geq l(Y_3) + l(Y_4)$. Sem perda de generalidade podemos supor

$$l(X) \geq l(Y_1) + l(Y_2).$$

Logo a co-restrição $\phi_0 : X \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$ de f é um epimorfismo irredutível. Seja $i : K_0 \hookrightarrow X$ a inclusão natural, onde $K_0 = \text{Ker } \phi_0 \neq 0$ pois ϕ_0 é um epimorfismo irredutível. Temos que $\phi_0 i = 0$. Pelo Lema (1.4.4), X , Y_1 e Y_2 não são projetivos e além disso existe um morfismo não nulo

$$k_1 : K_0 \longrightarrow \tau X$$

em $\text{mod} A$ e uma fonte

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Phi_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} : \tau X \longrightarrow \tau Y_1 \oplus \tau Y_2 \oplus M_0$$

e um morfismo irredutível $\alpha_1 : \tau Y_1 \longrightarrow X$ tais que

$$i = \alpha_1 \Psi_1 k_1 \text{ e } \varphi_1 k_1 = 0.$$

Denotaremos $i = v_1 k_1$ onde $v_1 = \alpha_1 \Psi_1 : \tau X \rightarrow X$.

Por hipótese, Y_i não é projetivo, então τY_3 e τY_4 são não nulos. Sendo assim, $\tau Y_3 \oplus \tau Y_4$ é um somando de M_0 e pelo Lema (1.3.5) $\varphi_1 : \tau X \rightarrow M_0$ é um morfismo irredutível. Seja $\phi_1 : \tau X \rightarrow \tau Y_3 \oplus \tau Y_4$ a co-restrição de φ_1 . Como $\varphi_1 k_1 = 0$ então $\phi_1 k_1 = 0$ onde $k_1 \neq 0$. Pelo Lema (1.4.4), τX , τY_3 e τY_4 não são projetivos e existe um morfismo não nulo

$$k_2 : K_0 \rightarrow \tau^2 X$$

em $\text{mod} A$, uma fonte

$$\begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Phi_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \tau^2 X \rightarrow \tau^2 Y_3 \oplus \tau^2 Y_4 \oplus M_1$$

e um morfismo irredutível

$$\alpha_2 : \tau^2 Y_3 \rightarrow \tau X \text{ tais que } k_1 = \alpha_2 \Psi_2 k_2 \text{ e } \varphi_2 k_2 = 0.$$

Observemos que $i = v_1 k_1$ e $k_1 = v_2 k_2$, onde $v_2 = \alpha_2 \Psi_2 : \tau^2 X \rightarrow \tau X$. Logo $i = v_1 v_2 k_2$. Sabemos que existem $\tau^2 Y_1$ e $\tau^2 Y_2$, pois pelo Corolário (2.3.2) os antecessores de X não são projetivos, então $\tau^2 Y_1$ e $\tau^2 Y_2$ não são projetivos. Portanto $\tau^2 Y_1 \oplus \tau^2 Y_2$ é um somando de M_1 . Seja $\phi_2 : \tau^2 X \rightarrow \tau^2 Y_1 \oplus \tau^2 Y_2$ a co-restrição de φ_2 . Como $\varphi_2 k_2 = 0$ então, $\phi_2 k_2 = 0$ e podemos aplicar novamente o Lema (1.4.4). Por indução em n , para todo $n > 0$ existe $k_n : K_0 \rightarrow \tau^n X$ e um morfismo

$$v_n : \tau^n X \rightarrow \tau^{n-1} X$$

tal que

$$i = v_1 v_2 \dots v_n k_n,$$

onde $v_i = \alpha_i \Psi_i : \tau^i X \rightarrow \tau^{i-1} X$. Como v_i é composta de morfismos irredutíveis, então $v_i \in \text{rad}(\text{mod} A)$, isto é, não é um isomorfismo. Temos também que a composta $v_1 v_2 \dots v_n$ é não nula, então pelo Lema de Harada-Sai $l(\tau^n X)$ é ilimitado e pela Observação (2.3.1) $l(\tau^n X)$ tem crescimento monótono para infinito.

(b) A prova de (b) é dual à de (a). ■

Como consequência da Proposição acima temos:

Corolário 4.2.1 .

- (a) Se $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ é um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não projetivo e além disso, se f for um epimorfismo ou $l(X) \geq l(\tau^- X)$ então X não é τ -periódico.
 (b) Se $f : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow X$ é um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não injetivo e além disso se f for um monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$ então X não é τ -periódico.

Demonstração: (a) Se X fosse τ -periódico, existiria um $m \geq 1$ tal que $\tau^m X \simeq X$ e neste caso teríamos $\tau^{im} X \simeq X$ para todo inteiro positivo i . Então $l(\tau^{im} X) = l(X) = b$ para todo inteiro positivo i . Com as hipóteses que temos e juntamente com a Proposição (4.2.1) podemos dizer que a seqüência de números inteiros positivos $l(\tau^n X)$ converge para infinito, mas a sub-sequência $x_i = l(\tau^{im} X) = b$ não converge para infinito. Concluimos assim que X é τ -periódico. ■

Para um módulo X com a propriedade $\mathcal{A}$, mostraremos que existe um tipo especial de componente que é chamada de componente estável à esquerda (Definição (4.2.3)) que contém o módulo X e que, além disso, não contém módulos τ -periódicos. Isto permitirá mostrar que X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A . Para isso, usaremos um resultado de Auslander e Reiten que apareceu em [AR77b] (Proposição 6.2).

Proposição 4.2.2 *Seja $X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível entre A -módulos indecomponíveis.*
 (a) *Se Y é τ -periódico, então X é τ -periódico ou X não é estável nem à esquerda, nem à direita.*
 (b) *Se X é τ -periódico, então Y é τ -periódico ou Y não é estável nem à esquerda, nem à direita.*

Demonstração: (a) Vamos supor que X não é τ -periódico e provar que não é estável nem à esquerda nem à direita. Supondo que o módulo indecomponível X seja estável à esquerda, isto é, que exista $\tau^i X$ para todo $i > 0$ e observando que X não é τ -periódico, segue que o conjunto $\{\tau^i X : i \text{ é inteiro positivo}\}$ possui infinitos elementos. Chamemos de j o período de Y , logo $\tau^{kj} Y = Y$ para todo inteiro positivo k . Como $X \rightarrow Y$ é um morfismo irredutível, então $\tau^{kj} X \rightarrow \tau^{kj} Y = Y$ são morfismos irredutíveis para todo inteiro positivo k . Como X é estável à esquerda temos então que o quiver de Auslander-Reiten de A não é localmente finito e isso é uma contradição. Portanto X não é estável à esquerda. Analogamente X não é estável à direita.

(b) A prova de (b) é dual à prova de (a). ■

Um exemplo que ilustra bem a Proposição (4.2.2) é o quiver de Auslander-Reiten (Figura (4.3)) da álgebra de caminhos obtida através do quiver da Figura (4.1). Observando o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra vemos que $I_3 \rightarrow M$ ou $M \rightarrow P_1$ são morfismos irredutíveis com M τ -periódico de período 2 e que I_3 e P_1 não são estáveis nem à esquerda, nem à direita.

Para simplificar nossa linguagem ao nos referirmos aos módulos $\tau^n X$ para algum inteiro n , definiremos o conceito de τ -órbitas.

Definição 4.2.2 *Dados A -módulos indecomponíveis X e Y , dizemos que Y está na τ -órbita de X se existe um inteiro n tal que $\tau^n Y$ é isomorfo a X . Denotaremos por $\mathcal{O}(X)$ a τ -órbita de X , isto é, $\mathcal{O}(X) = \{\tau^n X | n \text{ é inteiro}\}$.*

No exemplo dado na Figura (4.2) a τ -órbita $\mathcal{O}(M)$ é constituída pelos módulos M , $\tau^- M$. Observemos que M é um módulo estável com τ -órbita finita. No caso do módulo P_3 que não é estável, a τ -órbita é formada pelos módulos P_3 , $\tau^- P_3$ e $\tau^{-2} P_3 = I_1$.

Provamos no Capítulo 2 que um módulo indecomponível X com a propriedade $(\mathcal{A})$ é estável à esquerda e não tem antecessor projetivo. Além disso, provamos (Corolário (4.2.1)) que X não é τ -periódico. Através desta propriedade podemos construir um subquiver de Γ_A que não contém módulos τ -periódicos e que é estável à esquerda. Desta propriedade do subquiver vamos obter mais uma importante caracterização dos módulos que tem a propriedade $(\mathcal{A})$, isto é, módulos com esta propriedade não estão sobre um ciclo orientado de Γ_A .

Daremos uma atenção especial a este subquiver de Γ_A , o que justifica a seguinte definição.

Definição 4.2.3 Chamaremos ${}_l\Gamma_A$ o subquiver pleno de Γ_A onde os vértices são módulos estáveis à esquerda e chamaremos ${}_r\Gamma_A$ o subquiver pleno onde os vértices são os módulos estáveis à direita. Nós chamaremos as componentes conexas de ${}_l\Gamma_A$ de **componentes estáveis à esquerda de Γ_A** e aquelas de ${}_r\Gamma_A$ de **componentes estáveis à direita de Γ_A** .

Diremos também que Γ é uma **componente semi-estável** de Γ_A se Γ é uma componente estável à esquerda ou uma componente estável à direita de Γ_A . Com estes conceitos podemos ver que uma componente semi-estável Γ de Γ_A é uma componente estável de Γ_A se, e somente se, Γ contém somente módulos estáveis.

Corolário 4.2.2 Se Γ é uma componente de Γ_A contendo módulos τ -periódicos e não τ -periódicos então Γ contém módulos projetivos e injetivos.

Demonstração: Vamos supor que Γ não contém projetivos ou injetivos e consideremos X um módulo τ -periódico em Γ com Y sucessor de X . Pela Proposição (4.2.2) (b), Y é τ -periódico ou Y não é estável nem à esquerda nem à direita. Pela nossa hipótese concluímos que Y é τ -periódico. Com este argumento podemos dizer que Γ consiste de módulos τ -periódicos, contradizendo assim nossa hipótese. Por esse motivo provamos nossa afirmação. ■

Com estes novos conceitos, podemos deduzir facilmente do Corolário (4.2.2) o seguinte resultado:

Corolário 4.2.3 Seja Γ uma componente semi-estável de Γ_A . Se Γ possui um módulo que não é τ -periódico então Γ é destituída de módulos τ -periódicos.

Sendo assim, podemos dizer que o módulo indecomponível X com a propriedade (A) está em uma componente estável à esquerda destituída de módulos τ -periódicos. É o que dizemos na Proposição que segue.

Proposição 4.2.3 .

(a) Seja $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não projetivo. Se f é um epimorfismo ou $l(X) \geq l(\tau^- X)$, então existe uma componente estável à esquerda contendo X e destituída de módulos τ -periódicos.

(b) Seja $f : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow X$ um morfismo irredutível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não injetivo. Se f é um monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$, então existe uma componente estável à direita contendo X e destituída de módulos τ -periódicos.

Demonstração: Pelo Lema (2.1.1) (a), X não é projetivo, logo existe $\tau X \neq 0$ um antecessor de X . Pelo Corolário (2.3.2) X é estável à esquerda e não possui antecessor projetivo.

Considere Γ a componente estável esquerda em Γ_A contendo X . É notório que tal componente não contém somente X pois como observamos acima, todos os antecessores de X são módulos estáveis à esquerda. Pelo Corolário (4.2.1), X não é τ -periódico e pelo Corolário (4.2.3) Γ não contém módulos τ -periódicos. ■

Com o próximo teorema, teremos condições de provar que um módulo X com a propriedade (A) não está sobre um ciclo orientado (Corolário (4.2.4)). A prova deste Teorema pode ser encontrada em [Liu93b] (Teorema 2.3). Não provaremos tal Teorema neste trabalho pois isso requer a introdução de novos conceitos e desta forma o trabalho fugiria de nossa proposta inicial. Alguns desses conceitos são “Grau Global” e “Grau de morfismo irreduzível”. O primeiro pode ser encontrado em [Liu93b]. O segundo surgiu da discussão entre Liu, Brenner e Buttler ([Liu95b]) sobre o problema de quando a composta de n morfismos irreduzíveis estão em R^{n+1} e pode ser encontrado em [Liu92]. Igusa e Todorov resolveram parcialmente este problema [IT84a]. A idéia da prova é supor que a componente Γ estável à esquerda que contém X e que não contém módulos τ -periódicos contém um ciclo orientado. Daí, conclui-se a existência de um caminho seccional infinito em Γ com um número infinito de flechas com “grau global finito à esquerda”. Isto permite concluir que cada módulo do caminho tem no máximo dois antecessores imediatos, estáveis à esquerda. Ser estável à esquerda e possuir um número finito de τ -órbitas implica que cada módulo de Γ tem no máximo dois antecessores imediatos em Γ e é esta última afirmação que nos interessa para provar o Corolário (4.2.4) logo após o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1 .

- (a) *Seja Γ uma componente estável à esquerda de Γ_A que não contém módulos τ -periódicos. Se existe um ciclo orientado em Γ , então Γ não é uma componente estável de Γ_A . Além disso, Γ contém somente um número finito de τ -órbitas, tem valorização trivial e cada módulo de Γ tem no máximo dois antecessores imediatos em Γ .*
- (b) *Seja Γ uma componente estável à direita de Γ_A que não contém módulos τ -periódicos. Se existe um ciclo orientado em Γ , então Γ não é uma componente estável de Γ_A . Além disso, Γ contém somente um número finito de τ -órbitas, tem valorização trivial e cada módulo de Γ tem no máximo dois sucessores imediatos em Γ .*

Como consequência do Teorema temos:

Corolário 4.2.4 .

- (a) *Seja $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ um morfismo irreduzível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não projetivo. Se f é um epimorfismo ou $l(X) \geq l(\tau^- X)$, então X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A .*
- (b) *Seja $f : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow X$ um morfismo irreduzível com X e Y_i indecomponíveis e Y_i não injetivo. Se f é um monomorfismo ou $l(X) \geq l(\tau X)$, então X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A .*

Demonstração: Pelo Corolário (2.3.2) os antecessores do módulo indecomponível X são estáveis à esquerda. Pela Proposição (4.2.3) (a) existe uma componente Γ , estável à esquerda contendo X e não contendo módulos τ -periódicos. Se X estiver sobre um ciclo orientado, o Teorema (4.2.1) afirma que cada módulo de Γ tem no máximo dois antecessores imediatos em Γ . Por hipótese Y_i não é projetivo para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, logo τY_i é antecessor de X . Pelo que observamos no início, os antecessores de X são estáveis à esquerda e isto significa que temos quatro antecessores imediatos de X que estão em Γ , porém isso contradiz o Teorema (4.2.1). Portanto concluímos que X não está sobre um ciclo orientado de Γ e consequentemente não está sobre um ciclo orientado de Γ_A .

(b) A demonstração de (b) é dual à de (a). ■

É claro que o Teorema (4.2.1) fornece algumas condições para que uma componente semi-estável contenha um ciclo orientado. No trabalho de Liu [Liu92] ele prova que as componentes estáveis e periódicas, são as únicas componentes estáveis de Γ_A que contém ciclos orientados (Teorema 2.7) e além disso que as componentes conexas de Γ_A que não contém seqüências de Auslander-Reiten com o termo do meio indecomponível, não contém ciclos orientados (Teorema 2.3). Conseqüentemente, um ciclo orientado em Γ_A cujos módulos são estáveis, obrigatoriamente é formado por módulos τ -periódicos (Corolário 2.7). De fato, basta considerar a componente obtida do subquiver pleno de Γ_A que por sua vez é obtido através das τ -órbitas dos módulos do ciclo. Esta componente é estável e contém um ciclo orientado. Pelo que afirmamos acima (Teorema 2.7) este ciclo é formado por módulos τ -periódicos.

Existem componentes estáveis à esquerda sem módulos τ -periódicos e que contém ciclo orientado. Tais componentes são denotadas de coray tubes. Aliás, toda componente conexa de Γ_A sem módulos projetivos ou sem módulos τ -periódicos e com ciclos é um coray tube (Teorema 2.5 em [Liu93b]). Já as componentes conexas de Γ_A que são estáveis e que contém um ciclo orientado são tubos (Teorema 2.6 em [Liu93b]). Terminamos aqui a prova do resultado ao qual nos comprometemos a provar no início deste capítulo.

4.3 Flechas com valorizações

Nesta seção introduziremos o conceito de flecha com valorização e provaremos alguns resultados que surgiram como conseqüência da discussão que vínhamos fazendo nos capítulos anteriores a respeito de um módulo indecomponível X que tem a propriedade $(\mathcal{A})$.

Proposição 4.3.1 .

- (a) Seja $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ uma fonte com X e Y_i módulos indecomponíveis em $\text{mod } A$. Se existe um caminho pré-seccional de X a um módulo injetivo e $r > 4$, então X não está sobre um ciclo orientado em Γ_A . O resultado segue se $r = 4$ e os Y_i são não projetivos.
- (b) Seja $f : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow X$ um poço com X e Y_i módulos indecomponíveis em $\text{mod } A$. Se existe um caminho pré-seccional de um módulo projetivo para X e $r > 4$ então X não está sobre um ciclo orientado em Γ_A . O resultado segue se $r = 4$ e os Y_i são não injetivos.

Demonstração: (a) Na prova desta Proposição recorreremos a tudo o que fora feito na Proposição (2.3.2). Provaremos apenas (a) pois a demonstração de (b) é dual.

Sejam $r \geq 4$ e $(*)X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{t-1} \rightarrow X_t$ um caminho pré-seccional começando em X , de comprimento mínimo com X_t injetivo. Primeiramente vamos supor $t = 0$. Na Proposição (2.3.2) concluímos que neste caso existe um epimorfismo irredutível $g : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 Y_i$ com Y_i não projetivo. Pelo Corolário (4.2.4) X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A .

Vamos supor $t > 0$ e $X_1 \simeq Y_1$. Novamente, pela Proposição (2.3.2), se $r > 4$, concluímos que existe um epimorfismo irredutível $\varphi : X \rightarrow \bigoplus_{i=2}^5 Y_i$ com Y_i não projetivo. Pelo Corolário

(4.2.4) X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A . No caso $r = 4$, com todos os Y_i não projetivos, através da Proposição (2.3.2) concluímos que X não é projetivo, $l(\tau X) \geq l(X)$ e τY_i não é projetivo. Consideremos o morfismo irredutível $\tau X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 \tau Y_i$. Pelo Corolário (4.2.4), τX não está sobre um ciclo orientado de Γ_A . Vamos supor que X esteja sobre um ciclo orientado de Γ_A

$$X \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow X.$$

Pela Proposição (2.3.2), sabemos que X não possui antecessor projetivo, logo o seguinte caminho está bem definido:

$$\tau X \rightarrow \tau X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau X_n \rightarrow \tau X.$$

Concluimos assim que τX está sobre um ciclo orientado, contradizendo nossa conclusão anterior. Portanto X não está sobre um ciclo orientado de Γ_A . Terminando assim a prova. ■

Como consequência desta Proposição temos:

Corolário 4.3.1 *Seja A uma álgebra de artin e $X \in \text{ind}A$ sobre um ciclo orientado de Γ_A .*

(a) *Se $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ é uma fonte com X e Y_i indecomponíveis, então $r \leq 4$. Além disso, se $r = 4$ temos um Y_i projetivo.*

(b) *Se $g : \bigoplus_{i=1}^r Y_i \rightarrow X$ é um poço com X e Y_i indecomponíveis, então $r \leq 4$. Além disso, se $r = 4$ temos um Y_i injetivo.*

Demonstração: Vamos tomar $r \geq 4$ e supor que não existe um caminho pré-seccional de X para um módulo injetivo. Consideremos

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_n = X$$

o ciclo orientado em Γ_A com $n \geq 2$. Pelo Teorema de Bautista-Smalø (4.1.2) podemos concluir que no ciclo acima, existe um inteiro minimal positivo $2 \leq m \leq n$ tal que $X_m = \tau^- X_{m-2}$. Então X_j não é injetivo para $0 \leq j < m$, pois

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{m-2} \rightarrow X_{m-1}$$

é um caminho pré-seccional. Vamos mostrar que $\tau^- X$ também está sobre um ciclo orientado de Γ_A . Pelo Lema (2.2.1) (c) o caminho

$$\tau^- X = \tau^- X_0 \rightarrow \tau^- X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^- X_{m-2} \rightarrow \tau^- X_{m-1}$$

é pré-seccional. Como $X_m = \tau^- X_{m-2}$, então temos o caminho:

$$\tau^- X = \tau^- X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^- X_{m-2} = X_m \rightarrow X_{m+1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_n = X \rightarrow X_1 \rightarrow \tau^- X.$$

Supondo $l(\tau^- X) > l(X)$ e se tomarmos $g : \bigoplus_{i=1}^4 Y_i \rightarrow \tau^- X$ o morfismo irredutível que é restrição do poço em $\tau^- X$ então, pelo Corolário (4.2.4) um dos Y_i será injetivo o que contradiz nossa hipótese de não existir caminho pré-seccional de X para um módulo injetivo. Conseqüentemente, $l(X) \geq l(\tau^- X)$ e novamente pelo Corolário (4.2.4) um dos Y_i será projetivo. Desta forma temos a existência de um caminho pré-seccional de um projetivo para $\tau^- X$. Pela Proposição (4.3.1) (b) se $r > 4$ concluímos que $\tau^- X$ não está sobre um ciclo contradizendo a hipótese. Então $r = 4$,

mas como os Y_i são não injetivos, pela Proposição (4.3.1) (b) temos que $\tau^- X$ não está sobre um ciclo orientado de Γ_A contradizendo novamente nossa hipótese. Logo $r < 4$.

Agora vamos supor que existe um caminho pré-seccional de X para um módulo injetivo e $r \geq 4$. Consideremos, $f : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r Y_i$ uma fonte com Y_i indecomponível e $r \geq 4$. Como existe um caminho pré-seccional de X para um módulo injetivo e $r > 4$, pela Proposição (4.3.1) X não está sobre um ciclo orientado, contradizendo nossa hipótese. Portanto $r = 4$ e se os Y_i forem não projetivos, pela Proposição (4.3.1) teremos novamente uma contradição, sendo assim, um dos Y_i deverá ser projetivo. Assim terminamos a prova.

(b) A demonstração de (b) é dual à de (a). ■

Definição 4.3.1 Se $X \rightarrow Y$ é uma flecha em Γ_A , então sua valorização (d, d') é definida de maneira que d' seja a multiplicidade de X no domínio do poço para Y e d seja a multiplicidade de Y no domínio da fonte para X .

$$d' \text{ vezes } \left\{ \begin{array}{c} X \\ \vdots \\ X \end{array} \right\} \rightarrow Y \quad X \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} Y \\ \vdots \\ Y \end{array} \right\} d \text{ vezes}$$

Veremos agora um exemplo de um quiver de Auslander-Reiten com valorizações. Consideremos a álgebra de caminhos A , obtida através do seguinte quiver:

$$1 \xrightarrow{(2,1)} 2$$

Figura 4.4: Quiver com valorização.

Temos a seguir o quiver de Auslander-Reiten de A :

$$\begin{array}{ccccc} & P_1 & & \tau^- P_1 = I_1 & \\ (1,2) \nearrow & & (2,1) \searrow & \nearrow (1,2) & \\ P_2 & & \tau^- P_2 = I_2 & & \end{array}$$

Figura 4.5: Quiver de Auslander-Reiten de A .

Pela configuração deste quiver de Auslander-Reiten, podemos dizer que este é também um caminho pré-seccional. Por exemplo, $I_2 = \tau^- P_2$ está no caminho e $I_2 \oplus \tau^- P_2$ aparece no domínio da fonte para P_1 .

Observação 4.3.1 Quando a flecha $X \rightarrow Y$ tem valorização (d, d') podemos dizer que a flecha $\tau X \rightarrow \tau Y$, quando está definida, tem valorização (d, d') , isto é, se X aparece d' vezes no domínio do poço para Y e X não é projetivo, então τX aparece d' vezes no domínio do poço para τY . Analogamente, τY aparece d vezes no co-domínio da fonte para τX .

Teorema 4.3.1 Seja $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A com valorização (d, d') . Se d e d' são maiores que um, então nem X nem Y estão sobre um ciclo orientado. Além disso, ou Y não tem antecessor projetivo ou X não tem sucessor injetivo em Γ_A .

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo irredutível. Primeiramente vamos supor que f é um epimorfismo. Neste caso Y não é projetivo. Consideremos a seguinte seqüência de Auslander-Reiten:

$$0 \rightarrow \tau Y \xrightarrow{g} X \oplus X_1 \rightarrow Y \rightarrow 0.$$

Como f é um epimorfismo irredutível, pelo Lema (1.3.7) a co-restrição de g para X_1 é um epimorfismo. Note que X é um somando de X_1 pois $d' > 1$, isto é, $X_1 = X \oplus M$. Como a co-restrição de g para X_1 é um epimorfismo, então a co-restrição h desta co-restrição, para X é um epimorfismo. Como qualquer co-restrição de g a um indecomponível é um epimorfismo, então pelo Corolário (2.2.1) (a) nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em Y contém módulos projetivos. Já que $d > 1$ e existe um epimorfismo irredutível $h : \tau Y \rightarrow X$, podemos concluir similarmente, que X não é projetivo e existe um epimorfismo $f_1 : \tau X \rightarrow \tau Y$. De fato, por h ser epimorfismo, já podemos concluir que X não é projetivo. Consideremos a seguinte seqüência de Auslander-Reiten:

$$0 \rightarrow \tau X \xrightarrow{\phi} \tau Y \oplus M \rightarrow X \rightarrow 0$$

e notando que a valorização da flecha $\tau X \rightarrow \tau Y$ é também (d, d') (ver observação (4.3.1)), de forma análoga ao que fizemos anteriormente concluiremos que f_1 é um epimorfismo irredutível. Portanto toda co-restrição de ϕ a um indecomponível é um epimorfismo irredutível e pelo Corolário (2.2.1) (a), nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em X contém módulos projetivos.

Por indução em n temos que $\tau^n Y \neq 0$ para todo $n \geq 0$ e nenhum caminho pré-seccional em Γ_A terminando em $\tau^n Y$ contém módulos projetivos. Pela Proposição (2.3.1) (a) Y não tem antecessor projetivo em Γ_A . Temos assim que a flecha $X \rightarrow Y$ está contida em uma componente estável à esquerda de Γ_A que denotaremos por Γ .

Para todo $n > 0$, existe um caminho pré-seccional

$$\tau^n X \rightarrow \tau^n Y \rightarrow \tau^{n-1} X \rightarrow \dots \rightarrow \tau Y \rightarrow X \rightarrow Y$$

em Γ_A . Pela Proposição 1.16 em [Liu92] concluímos que Y não é τ -periódico pois, por esta proposição $\tau^n X \not\cong X$ ou $\tau^n Y \not\cong Y$ para todo $n > 0$ pois o caminho acima é pré-seccional. De fato, $\tau^n Y \not\cong Y$ para todo $n > 0$, então acabou pois já temos que Y não é τ -periódico. Se ocorrer o outro caso, isto é, se $\tau^n X \not\cong X$ para todo $n > 0$, afirmamos que Y não será τ -periódico, pois caso contrário, pela Proposição (4.2.2) (a) concluo que X é τ -periódico ou existe um inteiro não negativo i tal que $\tau^i X$ é projetivo. Como X não é τ -periódico deduzimos que $\tau^i X$ é projetivo

para algum i não negativo, contradizendo o fato de que $\tau^i X$ é antecessor de Y e Y não tem antecessor projetivo. Portanto, Y não é τ -periódico. Pelo Corolário (4.2.3), Γ não contém módulos τ -periódicos e pelo Teorema (4.2.1) Γ não contém ciclos orientados, pois se tivesse, cada flecha de Γ teria valorização trivial, mas $X \rightarrow Y$ está em Γ e não tem valorização trivial. Portanto Γ não contém ciclos orientados. Deste modo, X e Y não estão sobre um ciclo orientado de Γ_A . ■

Como consequência imediata da Proposição anterior, temos:

Corolário 4.3.2 *Seja $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A com valorização (d, d') . Se d e d' são maiores que um então a flecha $X \rightarrow Y$ está no quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra que não é de tipo de representação finito.*

Demonstração: Para a flecha $X \rightarrow Y$ podemos concluir pela Proposição (4.3.1) que Y não tem antecessor projetivo ou X não tem sucessor injetivo. Como em uma álgebra de tipo de representação finito todo módulo tem um antecessor projetivo e um sucessor injetivo (Proposição (3.1.1)) concluímos assim a prova. ■

Nosso próximo resultado fornece as condições necessárias para que uma flecha com valorização esteja sobre um ciclo orientado.

Teorema 4.3.2 *Seja A uma álgebra de artin e seja $X \rightarrow Y$ uma flecha em Γ_A com valorização (d, d') . Se a flecha está sobre um ciclo orientado em Γ_A , então $dd' \leq 3$.*

Demonstração: Suponhamos que a flecha está sobre um ciclo orientado de Γ_A e que $d \geq 4$. Pelo Corolário (4.3.1), $d = 4$ e existe uma fonte $f : X \rightarrow \oplus_{i=1}^4 Y$ com Y projetivo.

Observamos que X não é injetivo, pois se fosse, f seria um epimorfismo e então cada co-restrição de f para Y seria um epimorfismo contradizendo o fato de Y ser projetivo. Conseqüentemente, temos a seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} \oplus_{i=1}^4 Y \xrightarrow{g} \tau^- X \rightarrow 0.$$

A co-restrição de f para $\oplus_{i=1}^3 Y$ é um monomorfismo, logo pelo Lema (1.3.7) a restrição de g para Y é um monomorfismo. Conseqüentemente pelo Corolário (2.2.1) (b) nenhum caminho pré-seccional em Γ_A começando em X contém módulos injetivos. Como X está sobre um ciclo orientado de Γ_A podemos deduzir que $\tau^- X$ também está. De fato, pelo mesmo argumento utilizado no início da prova do Corolário (4.3.1) temos que $\tau^- X$ está sobre um ciclo orientado de Γ_A . Pelo Corolário (4.3.1) (b) Y é injetivo, o que é uma contradição. Portanto $d \leq 3$. Dualmente, $d' \leq 3$. Se d e d' são iguais a um então $dd' \leq 3$. Se $d > 1$ então, pela Proposição (4.3.1) $d' = 1$. Por essa razão, $dd' \leq 3$. ■

Bibliografia

- [AF74] F.W. Anderson and K.R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*, volume 13 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1974.
- [AR74a] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras II. *Comm. Algebra*, 2:269–310, 1974.
- [AR74b] M. Auslander and I. Reiten. Stable equivalence of dualizing R-varieties I. *Advances in Math*, 12:306–366, 1974.
- [AR75] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras III. *Comm. Algebra*, 3:239–294, 1975.
- [AR77a] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras IV. *Comm. Algebra*, 5:443–518, 1977.
- [AR77b] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras V. Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms. *Comm. Algebra*, 5:519–554, 1977.
- [AR77c] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras VI. A functorial approach to almost split sequences. *Comm. Algebra*, 11:279–291, 1977.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*, volume 36 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1995.
- [Aus62] M. Auslander. Modules over unramified regular local rings. *Proc. of Int. Congress of Math*, pages 230–233, 1962.
- [Aus76] M. Auslander. Large modules over artin algebras, *Algebra, Topology and Categories. Academic Press*, pages 1–17, 1976.
- [Aus79] M. Auslander. Notes on representation theory. Brandeis Univ., 1979.
- [Bau82] R. Bautista. Irreducible maps and the radical of a category. *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México*, 22:83–135, 1982.
- [BB81] R. Bautista and S. Brenner. On the number of terms in the middle of an almost split sequence. In M. Auslander and E. Lluís, editors, *Representations of Algebras*, volume 903 of *Lecture Notes in Math*, pages 1–8, Puebla, Mexico, 1981. Springer-Verlag.

- [Bon83] K. Bongartz. On a result of Bautista and Smalø on cycles. *Comm. Algebra*, 11:2123–2124, 1983.
- [BS83] R. Bautista and S.O. Smalø. Non-existent cycles. *Comm. Algebra*, 11:1755–1767, 1983.
- [But80] M.C.R. Butler. The construction of almost split sequences I. *Proc. London Math. Soc.*, 40:72–86, 1980.
- [CLS82] C. Cibils, F. Larrion, and L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. UNAM, México, 1982. 111 pp.
- [Coe92] F.U. Coelho. Uma introdução à teoria de representações de álgebras - notas de um minicurso. a aparecer nas Atas da XII Escola de Álgebra (Diamantina) 60 pp., agosto 1992.
- [Gab72] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103, 1972.
- [Gab80] P. Gabriel. Auslander-reiten sequences and representation finite algebras. In V. Dlab and P. Gabriel, editors, *Representation Theory I*, volume 831 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–71, Ottawa, Carleton University, 1980. Springer-Verlag.
- [HPR80] D. Happel, U. Preiser, and C.M. Ringel. Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules. In V. Dlab and P. Gabriel, editors, *Representation Theory II*, volume 832 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 280–294, Ottawa, Carleton University, 1980. Springer-Verlag.
- [HS70] M. Harada and Y. Sai. On categories of indecomposable modules I. *Osaka J. Math.*, 7:323–344, 1970.
- [IT84a] K. Igusa and G. Todorov. A Characterization of Finite Auslander-Reiten Quivers. *J. Algebra*, 89:148–177, 1984.
- [IT84b] K. Igusa and G. Todorov. Radical layers of representable functors. *J. Algebra*, 89:105–147, 1984.
- [JM84] A.R. Jones and H. A. Merklen. *Representações de álgebras: métodos diagramáticos*. Publicações do IME-USP, São Paulo, 1984. 196 pp.
- [Liu92] S. Liu. Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers. *J. London Math. Soc.*, 45(2):32–54, 1992.
- [Liu93a] S. Liu. Almost split sequences for non-regular modules. *Fundamenta Mathematicae*, 143:183–190, 1993.
- [Liu93b] S. Liu. Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver. *J. London Math. Soc.*, 47(2):405–416, 1993.
- [Liu95a] S. Liu. On short cycles in a module category. *J. London Math. Soc.*, 51(2):62–74, 1995.

- [Liu95b] S. Liu. Shapes of Connected Components of the Auslander-Reiten Quivers of Artin Algebras. *preprint*, 1995. Rapport no.149.
- [Mar80] R. Martinez. Almost projective modules and almost split sequences with indecomposable middle term. *Comm. in Algebra*, 8(12):1123–1150, 1980.
- [Rie80] C. Riedtmann. Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen, und zurück. *Comment. Math. Helv.*, 55:199–224, 1980.
- [Rin80] C. M. Ringel. Report on the Brauer-Thrall conjectures. In V. Dlab and P. Gabriel, editors, *Representation Theory I*, volume 831 of *Lectures Notes in Mathematics*, pages 104–136, Ottawa, Carleton University, 1980. Springer-Verlag.
- [Rin84] C. M. Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, volume 1099 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1984.
- [vH90] H.J. von Höhne. A new proof of the “4 - terms in the middle” - Theorem. *Comm. Algebra*, 18(7):2355–2360, 1990.
- [Zha91] Y. Zhang. The structure of stable components. *Canad. J. Math.*, 43:652–672, 1991.